O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

BERDAQ NOMIDAGI QORAQALPOQ DAVLAT UNIVERSITETI

Fizika-matematika fakulteti

Funksional analiz, algebra va geometriya kafedrasi

«Matematika» yo’nalishining 4-kurs talabasi

KARIMOV HAKIMBEKNING

CHEGARALANMAGAN OPERATORLAR UCHUN SPEKTRAL YOYILMA

mavzusida

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Ilmiy rahbar: **f.-m.f.n., dots., M.M.Ibragimov**

Kafedra mudiri: **f.-m.f.d., K.K.Kudaybergenov**

Nukus-2018

MUNDARIJA

Kirish

Ma’lumki hozirgi zamon matematikasida operatorlar nazariyasi eng muhim o’rinlarga ega bo’lib hisoblanadi. Matematika ilmining ko’pchilik yo’nalishlari operatorlar nazariyasi bilan bog’liq bo’lib hisoblanadi, shu jumladan har bir C^*-algebrasi uchun biror Hilbert fazosi mavjud bo’lib undagi chiziqli chegaralangan operatorlar to’plami C^*-algebra bilan izomorf, bu esa C^*-algebrasi hisoblanuvchi fon Neyman algebrasi ham qandayda bir Hilbert fazosidagi chiziqli chegaralangan operatorlar to’plami bilan izomorf bo’ladi.

Ushbu bitiruv malakaviy ishi operatorlarning spektral yoyilmalarini o’rganishga bag’ishlangan bo’lib, ishda Hilbert fazosidagi operatorlar qarashtiriladi.

Ishning birinchi paragrafida Hilbert fazosidagi qo’shma operatorlar o’rganilib, ular bilan bog’liq bir qator xossalar keltiriladi. Jumladan, qo’shma operatorlar ustida amallarni beruvchi xossalar, yani operatorlar yig’indisining qo’shma operatori, operatorning skalyarga ko’paytmasining qo’shma operatori, operatorlar ko’paytmasining qo’shma operatori, shu bilan birga operatorning grafik bilan bog’liq bir necha xossalari, hamda chegaralanmagan operatorlar uchun ham bir qator xossalar o’rganiladi.

Bitiruv malakaviy ishining ikkinchi paragrafi Hilbert fazolarida chegaralangan operatorlarning spektral yoyilmasini o’rganishga bag’ishlandi. Bunda dastlab birlik yoyilma tushunchasi keltirilib uning xossalari qarashtirildi, keyin Hilbert fazosida chegaralangan o’z-o’ziga qo’shma operatorning spektral yoyilmasi, unitar operatorning spektral yoyilmasi hamda normal operatorning spektral yoyilmalari o’rganildi.

Uchinchi va to’rtinchi paragraflar Hilbert fazolaridagi chegaralanmagan operatorlarning spektral yoyilmalarini o’rganishga bag’ishlanadi.

Uchinchi paragrafda Hilbert fazolaridagi chegaralanmagan o’z-o’ziga qo’shma operatorlarning spektral yoyilmasi qarashtiriladi, operatorlarning kommutativlik bo’lgan holidayam o’rganiladi, unda asosan ikkinchi paragrafda o’rganilgan xossa va tasdiqlarga tayaniladi. Operatorning spektr va rezolventasi bilan bog’liq xossalari keltirildi.

Bitiruv malakaviy ishning yakuniy to’rtinchi paragrafida Hilbert fazosidagi chegaralanmagan normal operatorlarning spektral yoyilmasi o’rganilib, unda ham ikkinchi paragrafda o’rganilgan chegaralangan operatorlarning xossalarga tayaniladi.

Bitiruv malakaviy ishni tayyaorlashda ”Foydalanilgan adabiyotlar” ro’yxatida keltirilgan manbalardan foydalanilib, ularda keltirilgan ta’rif va tushunchalar o’rganildi ([1]-[15]).

1-§. Hilbert fazolarida qo'shma operatorlar

Dastlab Hilbert fazosida chegaralangan qo'shma operator tushunchasini qarashtiramiz.

Ma'lumki, Hilbert fazosiga qo'shma fazo uning o'ziga izomorf, ya'ni $H = H^*$ deb qarash mumkin. Shuning uchun Hilbert fazolarida qo'shma operatorlar xossalarini o'rganish ancha qulay.

Ta'rif 1.1. H Hilbert fazosi va $A \in B(H)$ operator berilgan bo'lsin. Agar biror $A^* : H \to H$ operator va ixtiyoriy $f, g \in H$ lar uchun

$$\left(Af, g\right)_H = \left(f, A^* g\right)_H \tag{1.1}$$

tenglik o'rinli bo'lsa, A^* operator A ga qo'shma operator deyiladi.

Bu ta'rif Banax fazosidagi qo'shma operatorning ta'rifidan biroz farq qiladi, ya'ni bu erda $(kA)^* = \overline{k}A^*$ tenglik o'rinli.

Hilbert fazosi holida A va A^* operatorlar aynan bitta fazoda aniqlangani uchun, ba'zan $A = A^*$ tenglik ham o'rinli bo'lishi mumkin.

Ta'rif 1.2. Agar $A = A^*$ bo'lsa, ya'ni ixtiyoriy $x, y \in H$ uchun

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, A operator o'z-o'ziga qo'shma operator deyiladi.

Ta'rif 1.3. Bizga $A : H \to H$ chiziqli operator va $H_0 \subset H$ qism fazo berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $x \in H_0$ uchun $Ax \in H_0$ bo'lsa, u holda H_0 qism fazo A operatorga nisbatan invariant qism fazo deyiladi.

Lemma 1.1. Bizga $A : H \to H$ chiziqli operator va $H_0 \subset H$ qism fazo berilgan bo'lsin. Agar H_0 qism fazo A operatorga nisbatan invariant bo'lsa, u holda uning ortogonal to'ldiruvchisi bo'lgan $H_0^{\perp} \subset H$ qism fazo A^* operatorga nisbatan invariant bo'ladi.

Isbot. Haqiqatan ham, agar $y \in H_0^{\perp}$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $x \in H_0$ uchun

$$(A^* y, x) = (y, Ax) = 0,$$

chunki $Ax \in H_0$. Demak, $A^* y \in H_0^{\perp}$. Δ

Xususiy holda, agar $A = A^*$ bo'lsa, u holda $A(H_0) \subset H_0$ ekanligidan $A(H_0^{\perp}) \subset H_0^{\perp}$ ekanligi kelib chiqadi.

Hilbert fazosida qo'shma operatorlar quyidagi xossalarga ega:

Teorema 1.1. Agar $A, B \in B(H)$ bo'lsa, u holda

1) $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$,

2) $(AB)^* = B^* A^*$,

3) $(A^*)^* = A$ tengliklar o'rinli.

Isbot. Birinchi tenglikni isbotlaymiz.

$$((\alpha A + \beta B)x, y) = (\alpha Ax + \beta Bx, y) = \alpha(Ax, y) + \beta(Bx, y) =$$

$$= \alpha(x, A^* y) + \beta(x, B^* y) = (x, \overline{\alpha} A^* y) + (x, \overline{\beta} B^* y) = (x, (\overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*) y).$$

Bundan $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$ tenglik kelib chiqadi.

2) ni isbotlaymiz:

$$((AB)x, y) = (A(Bx), y) = (Bx, A^* y) = (x, B^* A^* y).$$

Bundan $(AB)^* = B^* A^*$ tenglik kelib chiqadi.

3) ning isboti bevosita qo'shma operator ta'rifidan kelib chiqadi. Δ

Chegaralanmagan A operatori uchun qo‘shma A^* operatorni aniqlash ancha murakkabroq hisoblanadi.

Mayli A operatori H Hilbert fazosida berilgan aniqlanish sohasi zich bo‘lgan operator bo‘lsin. Biror $g \in H$ vektorni qaraymiz, uning uchun shunday $g^* \in H$ mavjud bo‘lib, ixtiyoriy $f \in D(A)$ uchun

$$(Af, g)_H = (f, g^*)_H \tag{1.2}$$

tengligi o‘rinli bo‘lsin. Skalyar ko‘paytmaning chiziqliligidan bunday g vektorlar to‘plami chiziqli to‘plam hosil qiladi, shu bilan birga $(\lambda g + \mu h)^* = \lambda g^* + \mu h^*$, $g, h \in D(A^*)$, $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$.

Qaralayotgan g vektorga nisbatan g^* vektori bir qiymatli aniqlanadi. Haqiqatan ham, agar ikkinchi bir $g^{*\prime}$ vektori

$$(Af, g)_H = (Af, g^{*\prime})_H, \quad f \in D(A)$$

tengligini qanoatlantirsa, u holda $(f, g^* - g^{*\prime})_H = 0$ bo‘ladi, $D(A)$ ning zichligidan esa $g^{*\prime} = g^*$ tengligi kelib chiqadi. Har bir $g \in D(A^*)$ uchun $A^* g = g^*$ deb belgilaymiz. Bunday aniqlangan operator chiziqli bo‘lib, uni A operatoriga qo‘shma operator deyiladi. Demak, (1.1) tenglik o’rinli bo’ladi, bunda $D(A^*)$ to’plami shunday g lardan ibpratki, ular uchun (1.2) tenglik o’rinli.

Ta’rif 1.4. Agar $A \in L(H)$ operatori uchun $A^* = A$ tengligi o’rinli bo’lsa uni o’z o’ziga qoshma operator deb ataymiz ya’ni $(Ax, y) = (x, Ay)$, $x, y \in H$

Ta’rif 1.5. Agar A operatori uchun $A^* A = AA^*$ tengligi o’rinli bo’lsa, u holda uni normal operator deyiladi.

Ta’rif 1.6. Agar $A : H \to H$ chiziqlim operatori uchun quyidagi shartlar o’rinli bo’lsa uni unitar operator deymiz:

1) Ushbu $(Ux, Uy) = (x, y)$ tengligi o’rinli ya’ni U operatori skalyar ko’paytmani saqlaydi:

2) Qiymatlar to’plami H bilan mos keladi ya’ni $R(U) = H$;

Yuqoridagi 1) shartdan U operatorining normani saqlashi ham kelib chiqadi, ya’ni $\|Ux\| = \|x\|$ bundan esa $\|U\| = 1$ ekanligi kelib chiqadi.

Ta’rif 1.7. Aniqlanish sohasi H Hilbert fazosida zich bo’lgan A operatori uchun $(Af, g)_H = (f, Ag)_H$, $f, g \in D(A)$ munosabat o’rinli bo’lsa, u holda A operatorini ermit operatori deyiladi.

Chekli $(a;b)$ intervalda Lebeg o‘lchovi bo‘yicha kvadrati bilan jamlanuvchi barcha funksiyalardan iborat $H = L_2((a,b)) = L_2$ Hilbert fazosini qaraymiz. Ushbu $C'([a,b]) \subset L_2$ chiziqli to‘plamni L_2 ga akslantiruvchi

$$f \to Af = \frac{df}{dx} = f'$$

ko‘rinishidagi A operatorini olamiz. Bu operator chiziqli ekanligi ravshan, lekin chegaralangan bo‘lmaydi. Agar $f_n(x) = e^{inx}, n \in N$ ketma-ketlikni olsak, u holda ixtiyoriy $n \in N$ uchun $\|Af_n\|_{L_2} = \|(e^{inx})'\| = \|\text{in} f_n\| = n \cdot \|f_n\|_{L_2}$ tengligiga ega bo‘lamiz. Bundan esa $\|Af\|_{L_2} \le c \cdot \|f\|_{L_2}$, $f \in C'([a;b])$ tengsizligi $c \ge 0$ sonlari uchun o‘rinli emasligi kelib chiqadi, ya’ni qaralayotgan A operatori chegaralanmagan bo‘ladi.

Bu misolda keltirilgan operator $H = L_2$ fazoda to‘liq aniqlanmay uning $C'([a,b])$ chiziqli qism fazosida aniqlangan.

Mayli A va B lar ikkita operatorlar bo‘lib $D(A) \subseteq D(B)$ va $Af = Bf$, $f \in D(A)$ bo‘lsin. Bunday holda B operatori A operatorining davomi deyiladi va $A \subseteq B$, $B|_{D(A)} = A$ kabi yoziladi.

Faraz qilaylik A operatori $D(A)$ va $R(A)$ orasida o‘zaro bir qiymatli moslik bo‘lsin, u holda shunday A^{-1} teskari operator mavjud bo‘lib $A^{-1}(Af) = f$, $f \in D(A)$ tengligi bilan aniqlanadi. Operatorning o‘zaro bir qiymatli moslik bo‘lish kriteriyasi quyidagidan iborat: A operatorining yadrosi faqat noldan iborat, ya’ni $\ker A = \{f \in D(A) : Af = 0\} = \{0\}$ tengligi o‘rinli.

Yuqorida aniqlangan teskari operatorni algebraik teskari deymiz, teskari operator deganda esa $D\left(A^{-1}\right)=R(A)=H$ tengligini qanoatlantiruvchi chegaralangan A^{-1} operatorini tushunamiz.

Chegaralanmagan operatorlarni o‘rganishda A operatori bilan bir vaqtning o‘zida uning aniqlanish sohasi $D(A)$ to‘plamni taxlil qilish bilan bog‘liq qiyinchiliklar paydo bo‘ladi. Chegaralanmagan operatorlar nazariyasidagi bunday hollarda operatorlarning grafigini qarashtirish qulay bo‘ladi. A operatorining grafigi tushunchasi oddiygina kiritiladi.

Aytaylik H Hilbert fazosi va unda A operatori berilgan bo‘lsin. Elementlari $\langle f,g\rangle,\ f,g\in H$ juftliklardan iborat $H\oplus H$ ortogonal yigindini qaraymiz. Bu juftliklar ustida chiziqli amallar koordinata bo‘yicha kiritiladi, skalyar ko‘paytma esa

$$\left(\langle f_1,g_1\rangle,\ \langle f_2,g_2\rangle\right)_{H\oplus H}=\left(f_1,f_2\right)_H+\left(g_1,g_2\right)_H,f_1,f_2,g_1,g_2\in H$$

tengligi bilan kiritiladi.

A operatorining grafigi deganda

$$\Gamma_A=\left\{\langle f,Af\rangle\in H\oplus H:\ f\in D(A)\right\}$$

to‘plami tushuniladi.

Endi H Hilbert fazosida berilgan A operatori uchun quyidagi o‘zaro ekvivalent uchta ta’rifini keltiramiz.

1) Agar A operatorining Γ_A grafigi $H\oplus H$ da yopiq bo‘lsa, u holda A operatori yopiq deyiladi.

2) Agar ixtiyoriy $\left(f_n\right)_{n=1}^{\infty}\subseteq D(A)$ ketma-ketlik uchun $n\to\infty$ da $f_n\to f\in H$ va $Af_n\to g\in H$ yaqinlashuvlardan $f\in D(A)$ va $Af=g$ munosabatlar kelib chiqsa, u holda A operatori yopiq deyiladi.

3) A operatorning $D(A)$ aniqlanish sohasi ushbu

$$\left(f,g\right)_{\Gamma_A}=\left(f,g\right)_H+\left(Af,\,Ag\right)_H,\quad f,g\in D\left(A\right)$$

skalyar ko‘paytmaga nisbatan to‘liq bo‘lsa, u holda A operatori yopiq deyiladi.

Yuqoridagi skalayr ko’paytma bilan aniqlangan norma grafik normasi deyiladi, uning uchun

$$\|f\|_{\Gamma_A}^2=\|f\|_H^2+\|Af\|_H^2\qquad f\in D\left(A\right)$$

tengligi o’rinli bo’ladi.

Agar H Hilbert fazosidagi A operatori yopiq bo‘lmasa, u holda uning aniqlanish sohasi $D\left(A\right)$ to‘plamiga shunday $f\in H$ vektorlarni biriktirib A operatorini $\tilde{A}$ yopiq operatorigacha davom ettirish masalasi qaraladi, bu erda $f\in H$ elementlar uchun shunday $\left(f_n\right)_{n=1}^{\infty}\subset D\left(A\right)$ ketma-ketlik mavjud bo‘lib $n\to\infty$ da $f_n\to f$ va $\lim\limits_{n\to\infty}Af_n=g$ bo’lishi kerak. Biriktirilgan f vektorida $\tilde{A}f=g$ deb qabul qilamiz.

1) Agar yuqorida keltirilgan jarayon har bir f $\left(\exists\left(f_n\right)_{n=1}^{\infty},\,f_n\to f\right)$ element uchun to’gri bo‘lsa, u holda A operatori $\tilde{A}$ yopilmaga ega deyiladi.

Bu bilan birgalikda unga ekvivalent quyidagi ikkita ta’rifni ham keltiramiz.

2) Agar $\left(f_n\right)_{n=1}^{\infty}\subset D\left(A\right)$ ketma-ketlik uchun $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=0$ va $\lim\limits_{n\to\infty}Af_n=h,\ h\in H$ munosabatlardan $h=0$ ekanligi kelib chiqsa, u holda A operatori yopilmaga ega deyiladi.

3) Agar A operatori uchun uning grafigining yopilmasi $\tilde{\Gamma}_A$ qandayda bir operatorning grafigi bo‘lsa, u holda A operatori yopilmaga ega deyiladi.

Eslatma 1.1. A operatoriga qo‘shma operator korrekt aniqlangan bo‘ladi, shunda va faqat shundagina agar, $D(A)$ to‘plam H da zich bo‘lsa.

Isbot. Haqiqatan ham, buning uchun biz (1.1) tengligi bo‘yicha A operatori uchun A^* operatori mavjud va yagona bo‘lganda $D(A)$ to‘plami H da zich ekanligini ko‘rsatishimiz qoldi. Bu quyidagi mulohazadan kelib chiqadi: Agar $D(A)$ zich bo‘lmasa, unda g ga mos A^*g vektor bir qiymatli bo‘lmaydi, chunki unga ixtiyoriy $h \perp D(A)$ vektorni qo‘shish mumkin.

Biz hozircha A^* operatorining aniqlanish sohasi haqida so‘z yuritmaymiz, biroq 0 unga tegishli ekanligi ma’lum va $D(A^*) = \{0\}$ bo‘lishi mumkin. Quyida $D(A^*)$ ning zichligi va A ning yopilmaga egaligi orasidagi bog‘liqlik keltiriladi, lekin dastlab $H \oplus H$ ning A^* bilan bog‘liq muhim yoyilmasiga to‘xtalamiz.

Lemma 1.2. Mayli $D(A)$ to‘plam H fazoda zich ya’ni A^* mavjud bo‘lsin. U holda

$$\Gamma_{A^*} = (O\Gamma_A)^{\perp} = (H \oplus H)\Theta(O\Gamma_A) \tag{1.3}$$

tengligi o‘rinli bo‘ladi, bu erda O operatori $\langle f, g\rangle \in H \oplus H$ elementni $\langle -g, f\rangle \in H \oplus H$ ga akslantiruvchi operator.

Isbot. Mayli $\langle g, A^*g\rangle \in \Gamma_{A^*}$ bo‘lsin. Bundan $g \in D(A^*)$ va $(Af, g)_H = (f, A^*g)_H$, $f \in D(A)$ tengligi o‘rinli. U holda

$$\begin{aligned}(\langle g, A^*g\rangle,\ O\langle f,\ Af\rangle)_{H\oplus H} &= (\langle g, A^*g\rangle,\ \langle -Af,\ f\rangle)_{H\oplus H} = \\ &= -(g, Af)_H + (A^*g, f)_H = 0\end{aligned} \tag{1.4}$$

tengligiga ega bo‘lamiz. Demak $\langle g, A^*g\rangle \perp O\langle f,\ Af\rangle$, bundan $\Gamma_{A^*} \subseteq (O\Gamma_A)^{\perp}$.

Aksincha, agar $\langle g, h\rangle \in (O\Gamma_A)^{\perp}$ bo‘lsa, ixtiyoriy $f \in D(A)$ uchun

$$0=\left(\langle g,h\rangle,\ O\langle f,\ Af\rangle\right)_{H\oplus H}=-\left(g,Af\right)_H+\left(h,f\right)_H$$

tengligiga ega bo‘lamiz. Boshqacha aytganda $g\in D\left(A^*\right)$ va $h=g^*=A^*g$, ya’ni $\langle g,h\rangle\in\Gamma_{A^*}$ bo‘ladi. Demak $\left(O\Gamma_A\right)^{\perp}\subseteq\Gamma_{A^*}$.
Yuqoridagi (1.3) tenglik quyidagi ortogonal yoyilmaga ekvivalent:

$$H\oplus H=\Gamma_{A^*}\oplus\left(O\Gamma_A\right)^{\sim} \qquad (1.5)$$

Agar A operatori yopiq bo‘lsa, u holda $H\oplus H$ da Γ_A yopiq, demak $O\Gamma_A$ ham yopiq, bundan esa (1.5) tenglik

$$H\oplus H=\Gamma_{A^*}\oplus O\Gamma_A \qquad (1.6)$$

yoyilma ko‘rinishida yoziladi.

Teorema 1.2. Agar A operatori H Hilbert fazosida berilgan va $D\left(A\right)$ to‘plami H da zich bo‘lib, A^* unga qo‘shma operator bo‘lsa, u holda quyidagilar o‘rinli:
1) A^* operatori yopiq bo‘ladi;
2) Agar A yopilmaga ega bo‘lsa, u holda $\left(\tilde{A}\right)^*=A^*$ bo‘ladi;
3) Agar $\left(R\left(A\right)\right)^{\sim}=H$ va A^{-1} algebraik teskarisi mavjud bo‘lsa, u holda $\left(A^*\right)^{-1}$ mavjud bo‘lib

$$\left(A^{-1}*\right)=\left(A^*\right)^{-1} \qquad (1.7)$$

bo‘ladi;
4) Agar B operatori ham A operatori kabi bo‘lsa, u holda

$$B \supseteq A \Rightarrow A^* \supseteq B^* \tag{1.8}$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

5) Agar B operatori ham A operatori kabi bo‘lib $D(A+B)$ to‘plami H fazosida zich bo‘lsa, u holda

$$(A+B)^* \supseteq A^* + B^* \tag{1.9}$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

6) Agar B operatori ham A operatori kabi bo‘lib, $D(BA)$ to‘plami H fazosida zich bo‘lsa, u holda

$$(BA)^* \supseteq A^* B^* \tag{1.10}$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. 1) A^* operatorining yopiqligi (1.3) tenglikdan kelib chiqadi, chunki ortogonal to‘liqtiruvchi hamisha yopiq bo‘ladi.

2) Keltirilgan (1.3) va (1.5) munosabatlardan $\Gamma_{(\tilde{A})^*} = \left(O\Gamma_{\tilde{A}}\right)^{\perp} = \left(O\tilde{\Gamma}_A\right)^{\perp} = \left(\left(O\Gamma_A\right)^{\sim}\right)^{\perp} = \left(O\Gamma_A\right)^{\perp} = \Gamma_{A^*}$ tengligiga ega bo‘lamiz, bundan esa $\left(\tilde{A}\right)^* = A^*$ kelib chiqadi.

3) Ushbu $D\left(A^{-1}\right) = R(A)$ to‘plam H fazosida zich bo‘lgani uchun $\left(A^{-1}\right)^*$ operatori mavjud. Uning grafigi uchun (1.3), (1.5) va (1.6) formulalarni foydalanib

$$\Gamma_{\left(A^{-1}\right)^*} = \left(O\Gamma_{A^{-1}}\right)^{\perp} = \left(OU\Gamma_A\right)^{\perp} = \left(-UO\Gamma_A\right)^{\perp} =$$
$$= \left(H \oplus H\right)\Theta\left(UO\Gamma_A\right) = U\left(\left(H \oplus H\right)\Theta\left(O\Gamma_A\right)\right) = U\Gamma_{A^*}$$

tengligiga ega bo‘lamiz. Demak $U\Gamma_{A*}$ qandayda bir operatorning grafigi bo‘ladi, bundan teorema 1.1 bo‘yicha $(A*)^{-1}$ operatori mavjud bo‘lib $\Gamma_{(A*)^{-1}} = U\Gamma_{A*} = \Gamma_{(A^{-1})*}$ tengligi o‘rinli, demak $(A*)^{-1} = (A^{-1})*$ bo‘ladi.

4) $B \supseteq A$ bo‘lgani uchun $\Gamma_B \supseteq \Gamma_A$, $O\Gamma_B \supseteq O\Gamma_A$ bo‘ladi, (1.3) tenglikdan $\Gamma_{B*} = (O\Gamma_B)^{\perp} \subseteq (O\Gamma_A)^{\perp} = \Gamma_{A*}$ tengligi kelib chiqadi. demak $B* \subseteq A*$.

5) Mayli $g \in D(A*+B*) = D(A*) \cap D(B*)$ bo‘lsin, u holda $f \in D(A)$ uchun $(Af,g)_H = (f,A*g)_H$ tengligini $f \in D(B)$ uchun esa $(Bf,g)_H = (f,B*g)_H$ tengliklarini yozish mumkin.

Agar $f \in D(A+B) = D(A) \cap (B)$ deb olsak yuqoridagi tengliklardan

$$((A+B)f,g)_H = (f,A*g+B*g)_H = (f,(A*+B*)g)_H$$

tengligiga ega bo‘lamiz. Bu tenglik ko‘rsatadiki, $g \in D((A+B)*)$ va $(A+B)*g = (A*+B*)g$ munosabatlar o‘rinli. Demak $A*+B* \subseteq (A+B)*$.

6) Mayli $g \in D(A*B*) = \{g \in D(B*) : B*g \in D(A*)\}$ bo‘lsin, u holda ixtiyoriy $f \in D(BA) = \{f \in D(A) : Af \in D(B)\}$ uchun

$$(BAf,g)_H = (Af,B*g)_H = (f,A*B*g)_H \tag{1.11}$$

tengligiga ega bo‘lamiz. Bu esa $g \in D((BA)*)$ va $(BA)*g = A*B*g$ ekanligini ko‘rsatadi. Demak $A*B* \subseteq (BA)*$ munosabat o‘rinli.

Yuqoridagi (1.9), (1.10) munosabatlardagi operatorlarning hech bo‘lmaganda bittasi chegaralangan bo‘lgan hol uchun quyidagi teorema o‘rinli bo‘ladi.

Teorema 1.3. Agar A operatori H fazosida berilgan va aniqlanish sohasi H da zich bo‘lib $B \in B(H)$ bo‘lsa, u holda

$$(A+B)^* = A^* + B^*, \ (BA)^* = A^* B^* \tag{1.12}$$

tengliklari o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. Dastlab birinchi tenglikni isbotlaymiz, (1.9) munosabatni hisobga olsak $(A+B)^* \subseteq A^* + B^*$ munosabatni ko‘rsatish yetarli. Mayli $g \in D((A+B)^*)$ bo‘lsin, ya’ni barcha $f \in D(A+B) = D(A)$ vektorlar uchun

$$((A+B)f, g)_H = (f, g^*)_H, \ g^* = (A+B)^* g.$$

Biroq $((A+B)f, g)_H = (Af, g)_H + (f, B^* g)_H$, bundan esa har bir $f \in D(A)$ uchun

$$(Af, g)_H = ((A+B)f, g)_H - (f, B^* g)_H = (f, g^* - B^* g)_H$$

tengligi kelib chiqadi. Natijada

$$g \in D(A^*), \ A^* g = g^* - B^* g = (A+B)^* g - B^* g,$$

demak $(A+B)^* \subseteq A^* + B^*$ bo‘ladi.

Ikkinchi $(BA)^* = A^* B^*$ tengligini ko‘rsatish uchun $(BA)^* \subseteq A^* B^*$ munosabatni ko‘rsatish etarli. Mayli $g \in ((BA)^*)$ bo‘lsin, ya’ni barcha $f \in (BA) = D(A)$ uchun $(BAf, g)_H = (f, g^*)_H$, $g^* = (BA)^* g$. Ushbu $(BAf, g)_H = (Af, B^* g)_H$ tengligidan $(Af, B^* g)_H = (BA f, g)_H = (f, g^*)_H$ bo‘ladi. Bundan esa $B^* g \in D(A^*)$, $A^* B^* g = g^* = (BA)^* g$ bo‘ladi. Natijada $g \in D(A^* B^*) = \{g \in H : B^* g \in D(A^*)\}$ va $(A^* B^*) g = (BA)^* g$ demak $(BA)^* \subseteq A^* B^*$ bo‘ladi. Teorema isbotlandi.

2-§. Chegaralangan operatorlar uchun spektral yoyilma

Aytaylik H chekli o'lchamli Hilbert fazosi bo'lsin, ya'ni $\dim = n < \infty$, unda berilgan A - operatori esa o'z-o'ziga qo'shma operator bo'lsin, ushbu $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_m \quad (m < n)$ lar esa bu operatorning xos qiymatlari bo'lsin. Har bir λ_k xos qiymatga $\Phi(\lambda_k)$ xos qism fazo mos keladi: $\Phi(\lambda_k) = \{\varphi \in H : A\varphi = \lambda_k \varphi\}$; uning o'lchami $N(\lambda_k) = \dim \Phi(\lambda_k) \le n$ bo'ladi. $\Phi(\lambda_k)$ da $\varphi_1(\lambda_k), \ldots, \varphi_{N(\lambda_k)}(\lambda_k)$ ortonormol bazis olish mumkin.

Berilgan A operatori uchun spektral teorema bu har xil k va α larda $\varphi_\alpha(\lambda_k)$ vektorlari H da ortonormal bazisni ifodalashidir. Shunday qilib, ixtiyoriy $f \in H$ uchun bu bazis bo'yicha quyidagi yoyilma o'rinli:

$$f = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\alpha=1}^{N(\lambda_k)} \left(f, \varphi_\alpha(\lambda_k)\right)_H \varphi_\alpha(\lambda_k) \tag{2.1}$$

Ushbu $A\varphi_\alpha(\lambda_k) = \lambda_k \varphi_\alpha(\lambda_k)$ munosabatdan (2.1) tenglikga A operatorini tasir qildirsak.

$$Af = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\alpha=1}^{N(\lambda_k)} \lambda_k \left(f, \varphi_\alpha(\lambda_k)\right)_H \varphi_\alpha(\lambda_k) \tag{2.2}$$

bo'ladi. Agar $P(\lambda_k)$ orqali $\Phi(\lambda_k)$ qism fazosiga otkazuvchi proektorni belgilasak, u holda

$$P(\lambda_k) f = \sum_{\alpha=1}^{N(\lambda_k)} \lambda_k \left(f, \varphi_\alpha(\lambda_k)\right)_H \varphi_\alpha(\lambda_k)$$

bo'ladi, hamda (2.1) va (2.2) tengliklari

$$\mathbf{1}=\sum_{k=1}^{m} P(\lambda_k),\ \ A=\sum_{k=1}^{m} \lambda_k P(\lambda_k) \tag{2.3}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Yuqoridagi (2.3) formulalarni operator qiymatli E o'lchov bo'yicha integrallar yordamida quydagicha ham yozish mumkin:

$$\mathbf{1}=\int_{-\infty}^{\infty} dE(\lambda),\ A=\int_{-\infty}^{\infty} dE(\lambda)$$

$$\mathbb{R} \ni \alpha \to E(\alpha)=\sum_{\lambda_j \in \alpha} P(\lambda_j) \in L(H)$$

Birlik yoyilma tushunchasi tushunchasini qarashtiraylik. Birlik yoyilma – bu qandayda bir proektor qiymatli o'lchov hisoblanadi, shu sababli biz proektorlarning quydagi xossasidan boshlaymiz.

Lemma 2.1. Aytaylik P_{G_1} va P_{G_2} proektorlar bo'lsin. U holda $G_1, G_2 \subseteq H$ qism fazolardagi proektorlar bo'lsin. U holda $P=P_{G_1}+P_{G_2}$ yig'indi shunda va faqat shundagina proektor bo'ladi, $G_1 \perp G_2$ munosabat o'rinli bo'lsa, ya'ni $P_{G_1}P_{G_2}=0$ bo'ladi.

Isbot. *Zaruriyligi.* Aytaylik $P=P_{G_1}+P_{G_2}$ proektor bo'lsin, u holda $P^2=P$ yoki

$$\begin{aligned} P_{G_1}+P_{G_2} &= \left(P_{G_1}+P_{G_2}\right)=P_{G_1}^2+P_{G_1}P_{G_2}+P_{G_2}P_{G_1}+P_{G_2}^2= \\ &=P_{G_1}+P_{G_1}P_{G_2}+P_{G_2}P_{G_1}+P_{G_2} \end{aligned} \tag{2.4}$$

bundan esa

$$P_{G_1}P_{G_2}+P_{G_2}P_{G_1}=0 \tag{2.5}$$

tenglikga ega bo'lamiz.

Ushbu $f \in H$ ni keltiramiz. Bu element uchun

$$g = P_{G_1} P_{G_2} P_{G_1} f = -P_{G_1} \left(P_{G_1} \right)^2 f = -P_{G_1} P_{G_1} f = -g$$

munosabatga ega bo'lamiz. Demak

$$g = -P_{G_1} g \tag{2.6}$$

Bu oxirgi tenglikga P_{G_1} proektorini qo'llab

$$P_{G_1} g = -P_{G_1}^2 g = -P_{G_1} g \Rightarrow P_{G_1} g = 0$$

munosabatga ega bo'lamiz. Bundan esa $g = 0$ ya'ni $P_{G_2} P_{G_1} = 0$ tenglik kelib chiqadi.

Yetarliligi. Aytaylik $P_{G_2} P_{G_1} = 0 \Leftrightarrow G_1 \perp G_2 \Leftrightarrow P_{G_1} P_{G_2} = 0$ bo'lsin, u holda (2.4) bo'yicha $P^2 = P$. Ravshanki P ham o'z-o'ziga qoshma. U holda bu operator proektor bo'ladi, u $G = \left\{ f \in H : Pf = f \right\}$ qism fazoga akslantiradi. Biroq $f = Pf = P_{G_1} f \oplus P_{G_2} f$ munosabat ko'rsatadiki $f \in G_1 \oplus G_2$ bo'ladi. Shunday qilib $G = G_1 \oplus G_2$ bo'ladi ekan.

Endi birlik yoyilma ta'rifini keltiramiz. Mayli R - abtrak fazo, $G - R$ ning qism to'plamlarining qandayda bir σ - algebrasi. Boshqcha aytganda, $\langle R, G \rangle$ o'lchovli fazo berilgan bo'lsin. H esa Hilbert fazosi

Operator qiymatli $G \ni \alpha \to E(\alpha) \in L(H)$ funksiyasi quyidagi shartlarni qanoatlantirsa uni R dagi birlik yoyilma deymiz:

a) $\forall \alpha \in G$ uchun $E(\alpha)$ operatori H da proektor bo'lib $E(\varnothing) = 0$, $E(R) = \mathbf{1}$

b) Sanqli additivlik ya’ni G dagi kesishmaydigan to’plamlarning ixtiyoriy $\left(\alpha_j\right)_{j=1}^{\infty}$ ketma - ketligi uchun

$$E\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\alpha_j\right)=\sum_{j=1}^{\infty}E\left(\alpha_j\right) \tag{2.7}$$

tengligi o’rinli, bu yerda qator operatorlarning kuchli yaqinlashuvchiligi ma’nosida yaqinlashuvchi, ya’ni har bir $f\in H$ vektorida norma bo’yicha.

Teorema 2.1 E birlik yoyilma ortogonollik xossasini qanotlantiradi:

$$E(\alpha)E(\beta)=E(\alpha\cap\beta),\ (\alpha,\beta\in G) \tag{2.8}$$

Isbot Aytaylik $\alpha\cap\beta=\varnothing$ bo’lsin. U holda birlik yoyilma tarifidagi b) shart bo’yicha $E(\alpha\cup\beta)=E(\alpha)=E(\beta)$ va lemma 2.1 bo’yicha $E(\alpha)E(\beta)=0$.

Demak $E(\alpha\cap\beta)=E(\varnothing)=0$ tengligidan (2.8) xossa o’rinli ekanligi kelib chiqadi.

Endi umumiy holni qaraymiz, ya’ni $\alpha\cap\beta=\varnothing$ bo’lishi shart emas. Bu holda $\gamma=\alpha\cap\beta$ belgilashni kiritamiz. Natijada $\alpha=(\alpha\setminus\gamma)\cup\gamma$, $\beta=(\beta\setminus\gamma)\cup\gamma$ yoyilmalar mos turda α va β larning G dagi kesishmaydigan to’plamlarga yoyilmasini beradi, hamda kesishmaydigan hol uchun isbot bo’yicha

$$E(\alpha\setminus\gamma)E(\gamma)=0,\ E(\beta\setminus\gamma)E(\gamma)=0,\ E(\alpha\setminus\gamma)E(\beta\setminus\gamma)=0$$

tengliklari kelib chiqadi. Birlik yoyilma tarifi bo’yicha esa

$$
\begin{aligned}
&E(\alpha)E(\beta)=\left(E(\alpha\setminus\gamma)+E(\gamma)\right)\left(E(\beta\setminus\gamma)+E(\gamma)\right)=\\
&=E(\alpha\setminus\gamma)E(\beta\setminus\gamma)+E(\alpha\setminus\gamma)E(\gamma)+E(\gamma)E(\beta\setminus\gamma)+\\
&+E^2(\gamma)=E(\gamma)
\end{aligned}
$$

tenglikga ega bo'lamiz. Teorema isbotlandi.

Birlik yoyilmaga misol keltiramiz.

Misol. Aytaylik (R,G) - o'lchovli fazo bo'lsin, μ qandayda bir o'lchov. Ushbu $H=L_2(R,G,d\mu)=L_2$ fazoda $\chi_\alpha(\cdot)$ indekatorda (xarakteristik funksiya) ko'paytirish operatori bo'lgan $E(\alpha)$ operatorini qaraymiz, ya'ni

$$
\left(E(\alpha)f\right)(\lambda)=\chi_\alpha(\lambda)f(\lambda),\ f\in L_2 \tag{2.9}
$$

Bunda $\chi_\alpha(\cdot)$ ning chegaralanganligidan (2.9) operatori ham chegaralanganligi kelib chiqadi, $\chi_\alpha(\cdot)$ ning haqiqiy qiymatliligidan esa o'z-oziga qo'shma operatorligi kelib chiqadi, ushbu $\left(\chi_\alpha(\lambda)\right)^2=\chi_\alpha(\lambda)$ $(\lambda\in R)$ tengligidan esa $E^2(\alpha)=E(\alpha)$ tengligi kelib chiqadi. Shunday qilib, $E(\alpha)$ - proektor bo'lar ekan. Bu proektor $\chi_\alpha(\lambda)f(\lambda)=f(\lambda)$ tengligi μ - deyerli barcha $\lambda\in R$ lar uchun o'rinli bo'ladigan $f\in L_2$ nuqtalardan iborat qism fazolarga akslantiradi.

Ushbu $G\ni\alpha\to E(\alpha)$ to'plam funksiyasi L_2 da birlik yoyilma bo'ladi.

Mayli H Hilbert fazosi, A undagi chegaralangan operator, $S(A)$ esa A operatorning spektri bo'lsin. $S(A)$ chekli $(a,b)\subset R$ intervaldagi yopiq to'plam. A operatorning rezoventasi

$$
R_z=(A-z\mathbf{1})^{-1}\quad \left(z\in\mathbb{C}\setminus S(A)\right)
$$

Aytaylik $F(z)$ funksiyasi (a,b) intervalning qandayda bir atrofida aniqlangan analitik funksiya bo'lsin. Barcha shunday funksiyalar to'plamini

$A((a,b))$ orqali belgilaymiz. $S(A)$ spetrni o'lchovchi F funksiya aniqlanish sohasiga tegishli ixtiyoriy yopiq γ kontur uchun

$$F(A) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} F(z)\,dz \tag{2.10}$$

integral tuzish mumkin .

Bu integral keltirilgan tipdagi γ konturning qanday olinishiga bog'liq emas. Ushbu

$$A((a,b)) \ni F \to F(A) \in L(H) \tag{2.11}$$

akslantirishi $A((a,b))$ algebrani H dagi chegaralangan operatorning $L(H)$ algebrasiga akslantiruvchi gomomorfizm bo'lib, $F(z)\equiv 1$ funksiyani birlik operatorga o'tkazadi. $F(z)=z$ funsiyani esa A operatoriga o'tkazadi.

$A((a,b))$ to'plam odatdagi algebraik amallarga nisbatan algebra bo'ladi:

$\forall F, G \in A((a,b))$ uchun

$$(F+G)(z) = F(z) + G(z)$$

$$(FG)(z) = F(z)G(z)$$

bu yerda $F+G$,FG funksiyalari F va G larning aniqlanish sohalarida aniqlangan.

Shunday qilib, yuqoridagi tasdiq quydagi tengliklarning o'rinli ekanligini ko'rsatadi:

$$\begin{aligned} &(F+G)(A) = F(A) + G(A) \\ &(FG)(A) = F(A)G(A) \\ &1(A) = \mathbf{1}, \qquad z(A) = A \end{aligned} \tag{2.12}$$

Lemma 2.2. Quydagi formula o'rinli bo'ladi :

$$F(A)=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2\pi i}\int_a^b F(\lambda)\left(R_{\lambda+i\varepsilon}-R_{\lambda-i\varepsilon}\right)d\lambda=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon}{\pi}\int_a^b F(\lambda)R_{\lambda+i\varepsilon}R_{\lambda-i\varepsilon}d\lambda \qquad F\in A\left((a,b)\right) \tag{2.13}$$

Bu lemmaning isbotini keltirmaymiz. Quyidagi bir nechta teoremani ham isbotsiz keltirib o'tamiz.

Teorema 2.2 Aytaylik A o'z-o'ziga qoshma chegaralangan operator bo'lsin. U holda sonlar oqi bilan borel to'plamlarining σ algebrasi $B(\mathbb{R})$ da E birlik yoyilma aniqlangan bo'lib, ushbu

$$A=\int_{\mathbb{R}}\lambda dE(\lambda) \tag{2.14}$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Teorema 2.3. Mayli U unitar operator bo'lsin. U holda $T=\left\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\right\}$ birlik aylanadagi borel to'plamlarining σ- algebrasi $B(T)$ da U operatorning E birlik birlik yoyilmasi aniqlangan bo'lib

$$U=\int_T\lambda dE(\lambda)=\int_0^{2\pi}e^{i\varphi}dE\left(e^{i\varphi}\right) \tag{2.15}$$

yuqoridagi (2.15) tenglikda T ni U operatorining spektri $S(U)$ ga almashtirish mumkin. $S(U)$ ning atrofidagi ixtiyoriy $F(z)$ analitik funksiya uchun

$$F(U)=\int_{S(U)}F(\lambda)dE(\lambda) \tag{2.16}$$

tengligi o'rinli.

Teorema 2.4. Aytaylik A_1 va A_2 lar ikkita o'z-o'ziga qo'shma chegaralangan operatorlar bo'lsin. U holda A_1 va A_2 operatorlarning qandayda bir fiksirlangan z_1 va z_2 regulyar nuqtalaridagi $R_{z_1}\left(A_1\right)$ va $R_{z_2}\left(A_2\right)$ rezoventalari komutativlik bo'lishi uchun A_1 va A_2 larning yoyilmalari komutativlik bo'lishi zarur va yetarli.

Teorema 2.5. Mayli A chegaralangan normal operator bo'lsin. U holda kompleks sonlar tekisligidagi borel toplamlarining σ algebrasi $B(\mathbb{C})$ da A operatorning E birlik yoyilmasi aniqlangan bo'lib

$$A=\int_{\mathbb{C}}\lambda dE\left(\lambda\right) \tag{2.17}$$

tengligi o'rinli bo'ladi.

3-§. Chegaralanmagan qo'shma operator uchun spektral yoyilma

Biz bu paragrafda 2-§ paragraflardagi kabi xossalarni chegaralanmagan operatorlar uchun o'rganamiz. O'z-o'ziga qo'shma operator A operator uchun o'rganishdan bo'shlaymiz. Biz A operatorning E birlik yoyilmasini aniqlash uchun shunday chegarlangan operatorni topamizki (o'z-o'ziga qo'shma yoki unitar), uning uchun birlik yoyilmasi qurilgan bo'lsin, natijada qidirilayotgan E birlik yoyilmaga ega ega bo'lamiz.

Teorema 3.1 Mayli A - ixtiyoriy o'z-o'ziga qo'shma operator. U holda haqiqiy sonlar o'qi borel toplamlarining $\sigma(R)$ σ - algebrasida A operatorning E birlik yoyilmasi aninqlangan bo'lib

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE(\lambda)$$

$$D(A) = \left\{ f \in H : \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\left(E(\lambda) f, f\right)_H < \infty \right\} \tag{3.1}$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Yuqoridagi tenglikda $\mathbb{R}$ ning o'rniga A operatorning $S(A)$ spektrini yozsak ham to'g'ri bo'ladi. (3.1) tenglikdagi E birlik yoyilma bir qiymatli aniqlanadi.

Isbot. Biz (3.1) uchun ikkita isbot keltiramiz: Bunda teorema 2.2 va teorema 2.3 lardan foydalanamiz.

Birinchi holatda A da haqiqiy regulyar nuqta talab qilinadi. Mos turda §2 dagi A, E, va λ larni ushbu teoremada A', E' va λ' lar bilan belgilash qulay.

1) Aytaylik berilgan A' operator uchun $\lambda'_0 \in \mathbb{R}$ regulyar nuqta bo'lsin. Shunday kichik $\lambda'_0 \in (a', b')$ interval olamiz, u A' ning regulyar nuqtalaridan iborat bo'lsin. Quydagicha belgilashlar kiritamiz:

$R' = (-\infty, a'] \cup [b', +\infty)$, $R = [a,b]$, bu yerda $a = (a' - \lambda_0') < 0$, $b = (b' - \lambda_0') > 0$.
Boshqacha aytganda, R – R' ning

$$R' \ni \lambda' \to \lambda = (\lambda' - \lambda_0')^{-1} \in R \qquad (3.2)$$

akslantirish bo'yicha obrazi .
Bu akslantirsh uchun ushbu

$$R \ni \lambda \to \lambda' + \lambda_0' \in R' \qquad (3.3)$$

akslantirishning teskari akslantirishi bo'ladi.
Yuqoridagi (3.2) akslantirishga mos

$$A = \left(A' - \lambda_0'\mathbf{1}\right)^{-1} \qquad (3.4)$$

Operatorini kiritamiz, ya'ni A' operatorning $\lambda_0' \in R$ nuqtadagi rezolventasi.

Uning spektri (a,b) intervalda yotishini ko'rsatish qiyin emas. A operatori chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma, Aytaylik E - uning $\sigma = \sigma(R)$ dagi birlik yoyilmasi bo'lsin, bu esa teorema 2.2 bo'yicha mavjud yuqoridagi (3.3) akslantirish bo'yicha E ning obrazini E' bilan belgilaymiz.
Ko'rish mumkinki, $E' \to A'$ uchun qidirilayotgan birlik yoyilma bo'ladi, ya'ni (3.1) o'rinli
O'z navbatida, $R' \ni \lambda' \to F'(\lambda') = \lambda' \in R$ funksiya uchun o'zgaruvchini almashtirish fo'rmulasiga asosan (3.4) bo'yicha

$$\int_{R'} \lambda' dE'(\lambda') = \int_R \left(\lambda^{-1} + \lambda_0\right) dE(\lambda) = A^{-1} + \lambda_0'\mathbf{1} = A'$$

bo'ladi.

2) Aytaylik A' - ixtiyoriy o'z-o'ziga qo'shma operator. Ushbu $R' = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ $R = T$ (birlik aylana) belgilash kiritamiz, (3.2)akslantirsho'rniga (3.3) ko'rinishdagi kasr chiziqli (o'z-aro bir qiymatli) akslantirishni qaraymiz:

$$R' \ni \lambda' \to \lambda = \frac{\lambda' + 1}{\lambda' - 1} \in R \qquad (3.5)$$

φ sifatida (3.5) akslantirishga teskari akslamtirishni olamiz:

$$R \ni \lambda \to \lambda' = \varphi(\lambda) = i\frac{\lambda+1}{\lambda-1} \in R' \qquad (3.6)$$

(3.5) akslantirish bilan mos

$$U = (A' + i\mathbf{1})(A' - i\mathbf{1})^{-1} \qquad (3.7)$$

operatorini kiritamiz. Bu operartor unitar , E -uning $\sigma(T)$ dagi birlik yoyilmasi bo'lsin. Yuqoridagi (3.6) akslantirishi bo'yicha E ning obrazini E' orqali belgilaymiz. Bu σ -algebraning toplamlari (elementlari) $\sigma(\mathbb{R})$ ning toplamlari va ∞ ning birlashmasi bilan mos keladi.

Biroq $E'(\{\infty\}) = E(\{1\})$ va $E(\{1\}) = 0$, aks holda U operatorning xos vektorlari bor bo'lar edi (1 ning xos qiymatga mos), bu $D(A)$ ning zichligiga zid. Shunday $E'(\{\infty\}) = 0$, bundan esa E' ni $\sigma(R)$ dagi birlik yoyilma deb xisoblash mumkin.

Kiritilgan $E' \to A'$ operator uchun birlik yoyilma bo'ladi:

$R' \ni \lambda' \to F(\lambda') = \lambda' \in R$ funksiya uchun

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda' dE(\lambda') = \int_{R'} \lambda' dE(\lambda') = \int_{\mathrm{T}} i\frac{\lambda+1}{\lambda-1} dE(\lambda) = i(U+\mathbf{1})(U-\mathbf{1})^{-1} = A'$$

(3.1) munosabat isbotlandi.

3) A' uchun E' birlik yoyilmaning bir qiymatli aniqlanishini quyidagicha isbotlaymiz. Aytaylik L' - E' dan boshqa birlik yoyilma bolsin. Yuqoridagi 2) xolda belgilashlarda (3.5) ko'rinishdagi akslantirshni qaraymiz, u R' ni R ga akslantiradi. U R ga L birlik yoyilmasini xosil qiladi. Biz 2) da yuritilgan funksiyalarni teskari tartibda qo'llasak, ravshanki L- U unitar operator uchun birlik yoyilma bo'ladi. Unitar uchun birlik yoyilmaning bir qiymatli aniqlanishidan $L = E$, natija $L' = E'$ bo'ladi.

Eslatma 3.1. Yuqoridagi (3.1) tenglikda A bo'yicha E ning aniqlanishi bir qiymatli ekanligini isbotlash uchun imkon beruvchi tasdiqni keltiramiz.

U quydagi faktga asoslanadi: Aytaylik $B(\mathbb{R}) \ni \alpha \to \omega \in \mathbb{C}$ qandayda bir zaryad, bo'lsin, u sonlar oqida berilgan va chekli o'lchovlarning chiziqli kombinatsiyasi bo'lsin. Ushbu

$$\varphi(z) = \int_{\mathbb{R}} (\lambda - z)^{-1} d\omega(\lambda) \qquad (t \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \tag{3.8}$$

analitik funksiya ω zryadning Hilbert tasvirlashi deyiladi. Zaryad bilan uning Hilbert tasvirlashi bir qiymatli bo'ladi. Shu bilan birga, har bir $\delta \in R$ chekli ochiq interval uchun

$$\frac{1}{2}\left(\omega(\delta) + \omega(\overline{\delta})\right) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta + i\varepsilon} \left(\varphi(z) - \varphi(\overline{z})\right) dz \tag{3.9}$$

fo'rmula o'rinli bo'ladi.

Bir qiymatlilik quydagicha isbotlanadi. Mayli E va L lar o'z-o'ziga qoshma A opetorning (3.1) bo'yicha ikkita birlik yoyilmalari bo'lsin. U holda uning rezoventasi uchun ushbu

$$R_z = (A - z\mathbf{1})^{-1} = \int_{\mathbb{R}} (\lambda - z)^{-1} dE(\lambda) \quad (t \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \tag{3.10}$$

formula o'rinli bo'ladi, bu yerda E ni L ga almashtirsak ham o'rinli. Bu fo'rmula chegaralangan funksiyalardan spektral integrallar xossalaridan kelib chiqadi. Ikkita formulani bir-biridan ayirib va skalyar qiymatga o'tsak, ixtiyoriy $f, g \in H$ lar uchun ushbu

$$0 = \int_{\mathbb{R}} (\lambda - z)^{-1} d\omega_{f,g}(\lambda),$$

$$B(\mathbb{R}) \ni \alpha \to \omega_{f,g}(\alpha) = \left(\left(E(\alpha) - L(\alpha)\right) f, g\right)_H \in \mathbb{C}$$

tenlikga ega bo'lamiz, bundan $E = L$ ekanligi kelib chiqadi, chunki (3.8) formulada φ va ω o'zaro bir qiymatli aniqlanadi.

Spektral integrallar yordamida chegaralamagan o'z-o'ziga qo'shma operatorlar uchun ham operatorlar funksiyasi nazariyasini ko'rish mumkin. Aytaylik $E \to A$ operatorning birlik yoyilmasi bo'lsin, $F \in L_0\left(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), E\right)$ uchun

$$F(A) = \int_{\mathbb{R}} F(\lambda) dE(\lambda) \ ,$$

$$D\left(F(A)\right) = \left\{ f \in H : \int_{\mathbb{R}} \left|F(\lambda)\right|^2 d\left(E(\lambda) f, f\right) H < \infty \right\} \qquad (3.11)$$

operator quriladi.

Quyidagi o'z-o'ziga qo'shma operator uchun ba'zi bir mukim funksiyalarni keltiramiz.

1) Birlik yoyilma : $\alpha \in B(\mathbb{R})$ to'plamning x_α indekotori uchun

$$E(\alpha) = x_\alpha(A) = \int_{\mathbb{R}} x_\alpha(\lambda) dE(\lambda) \qquad (3.12)$$

2) Rezoventa: Mayli $z \notin S(A)$ bo'lsin, u holda ushbu

$$R_z = \left(A - z\mathbf{1}\right) = \int_{S(A)} \frac{1}{\lambda - z} dE(\lambda) \qquad (3.13)$$

tasvirlashi o'rinli;

Quyidagi (3.14), (3.15), (3.16) larda A operatorini chegaralanmagan deb qarash mumkin.

3) Nofanfiy A operatoridan iborat ildiz:

$$\sqrt{A} = \int_{S(A)} \sqrt{\lambda} dE(\lambda) = \int_0^\infty \sqrt{\lambda} dE(\lambda) \geq 0 \ , \left(\sqrt{A}\right)^2 = A \qquad (3.14)$$

4) Operatorning absalyut qiymati:

$$|A| = \int\limits_{S(A)} |\lambda| dE(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} |\lambda| dE(\lambda) \geq 0 \tag{3.15}$$

5) Eksponenta: $\forall z \in \mathbb{C}$ uchun

$$\exp(zA) = e^{zA} = \int\limits_{S(A)} e^{z\lambda} dE(\lambda) \tag{3.16}$$

Teorema 3.2 Aytaylik E - o'z-o'ziga qo'shma operatorning birlik yoyilmasi bo'lsin, R_z esa uning rezoventasi bo'lsin. U holda kuchli yaqinlashuvchilik ma'nosida ixtiyoriy $\delta \subset \mathbb{R}$ ochiq chekli interval uchun ushbu

$$\frac{1}{2}\left(E(\delta) + E\left(\overline{\delta}\right)\right) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\delta + i\varepsilon} \left(R_z - R_{\overline{z}}\right) dz \tag{3.17}$$

formula o'rinli bo'ladi.

Isbot: Kuchsiz yaqinlashuvchilik ma'nosida (3.17) tenglikning isboti (3.9) dan to'g'ridan to'gri kelib chiqadi: $f, g \in H$ larni tayinlaymiz, u holda $\varphi(z) = \left(R_z f, g\right)_H$ ω zaryadning Hilbert tasvirlashi bo'ladi, keyin esa (3.9) ni qo'llaymiz.

Kuchli yaqinlashuvchilik ma'nosida isboti uchun tayinlangan $\delta = (a,b)$, hamda $\forall f \in H$ uchun $\left\| \int\limits_{\delta + i\varepsilon} \left(R_z - R_{\overline{z}}\right) dz f \right\|_H$ ning $\varepsilon > 0$ ga nisbatan chegaralangan ekanligini ko'rsatish yetarli.

Mayli $z = x + iy$ bo'lsin, u holda (3.13) bo'yicha

$$\left\| \int_{\delta+i\varepsilon} (R_z - R_{\bar{z}}) dzf \right\|_H^2 = \left\| \int_{\delta+i\varepsilon} \left(\int_{\mathbb{R}} \left((\lambda - z)^{-1} - (\lambda - \bar{z})^{-1} \right) dE(\lambda) \right) dzf \right\|_H^2 =$$

$$= \left\| \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\delta} \left((\lambda - x - i\varepsilon)^{-1} - (\lambda - x + i\varepsilon)^{-1} \right) dx \right) dE(\lambda) f \right\|_H^2 =$$

$$= 4 \left\| \int_{\mathbb{R}} \left(\int_a^b \frac{\varepsilon}{(\lambda - x)^2 + \varepsilon^2} dx \right) dE(\lambda) f \right\|_H^2 = \varphi(\varepsilon).$$

Normaning ichidagi integral qiymati

$arctg\left(\varepsilon^{-1}(b-\lambda)\right) - arctg\left(\varepsilon^{-1}(a-\lambda)\right) = X(\lambda, \varepsilon)$ ga teng.

Bundan esa, $\forall \varepsilon > 0$ uchun

$$\psi(\varepsilon) = 4 \left\| \int_{\mathbb{R}} X(\lambda, \varepsilon) dE(\lambda) f \right\|_H^2 \leq 4 \sup \left\{ \left| X(\lambda, \varepsilon)^2 \right| : \lambda \in |R|^2 \|f\|_H^2 \right\} \leq$$

$$\leq C \|f\|_H^2$$

ya'ni $\psi(\varepsilon)$ chegaralangan.

Endi o'z-o'ziga qo'shma va kommutativli bo'lgan operatorlarning spektral yoyilmalarini qarashtiramiz.

Teorema 3.3. Aytaylik A_1 va A_2 lar o'z-o'ziga qo'shma operatorlar bo'lsin. Ularning birlik yoyilmalari komutativli bo'lishi uchun ularning $R_{z_1}(A_1)$ va $R_{z_2}(A_2)$ rezoventalari komutativli bo'lishi zarur va yetarli, bu yerda z_1 va z_2 lar mos turda A_1 va A_2 larning regulyar nuqtalari.

Isbot. Ravshanki, $R_{z_1}(A_1)$ va $R_{z_2}(A_2)$ komutativ bo'lganda A_1 va A_2 chegaralanmagan operatorlar uchun teorema 2.4 ning isboti saqlanadi. Endi (3.17) munosabat yordamida isbotni yakunlashimiz mumkin. Ular har xil $j = 1, 2$ larda

$\forall\delta_j=\left(a_j;b_j\right)$, $B_j\left(\delta_j\right)=E_j\left(\delta_j\right)+E_j\left(\overline{\delta}_j\right)$ operatorlari kamutativli bo'lishi kelib chiqadi.

Aytaylik $c_1\in\mathbb{R}$ va $\delta_{11}\supseteq\delta_{12}\supseteq\ldots$ $c_1\in\delta_{1n}$ nuqtaga jamlanuvchi intervallar kketma ketligi bo'lsin, ya'ni $\left\{c_1\right\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\delta_{1n}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{\delta}_{1n}$

U holda kuchli yaqinlashuvchilik ma'nosida $n\to\infty$ bo'lganda $B_1\left(\delta_{1n}\right)\to\alpha E_1\left(\left\{c_1\right\}\right)$ bo'ladi.

Shu bilan birga $\forall\delta_2$ uchun $B_1\left(\delta_{1n}\right)$ operatori $B_2\left(\delta_{2n}\right)$ operatori bilan kumutativ bo'ladi, bundan esa $E_1\left(\left\{c_1\right\}\right)$ ham komutativli bo'ladi. Biroq $2E_1\left(\left[a_1,b_1\right)\right)=B_1\left(\left(a_1,b_1\right)+E_1\left(\left\{a_1\right\}\right)\right)-E_1\left(\left\{b_1\right\}\right)$ bo'lganligidan $E_1\left(\left[a_1,b_1\right)\right)$ ham $B_2\left(\delta_2\right)$ bilan komutativ bo'ladi; bu yerda δ_2 ixtiyoriy ochiq interval, $\left[a_1,b_1\right)$ ixtiyoriy yarim ochiq interval. Jarayonni $j=2$ bo'lganda ham ixtiyoriy $\left[a_1,b_1\right)$, $\left[a_2,b_2\right)\subset R$ uchun $E_1\left(\left[a_1,b_1\right)\right)$ bilan $E_2\left(\left[a_2,b_2\right)\right)$ ning komutayiv ekanligiga ega bo'lamiz.

4-§. Chegaralanmagan normal operator uchun spektral yoyilma

Haqiqiy sonlar o'qi borel to'plamlarida berilgan birlik yoyilmada qiymatli o'lchov o'rniga operator qiymatli qamaymaydigan funksiyani kiritish mumkin, o'z o'rnida uni ham birlik yoyilma (funksiya) deyiladi. Uning tarifini keltiramiz.

Ta'rif 4.1. Qiymatlari tayinlangan H Hilbert fazosi proektorlar bo'lgan operator qiymatli $\mathbb{R} \ni \lambda \to E_\lambda$ funksiyasi uchun quydagi shartlar bajarilsa, u holda uni birlik yoyilma deyiladi:

a) Monotonligi: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda < \mu \Rightarrow E_\lambda \le E_\mu$

b) To'liqlilik: kuchli yaqinlashish ma'nosida $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} E_\lambda = 0$, $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} E_\lambda = \mathbf{1}$

c) Chapdan uzluksiz: kuchli yaqinlashish ma'nosida $\lim\limits_{\lambda \to \mu - 0} E_\lambda = E_\mu$

Teorema 4.1 Aytaylik $E - B(\mathbb{R})$ da berilgan birlik yoyilma (o'lchov) bo'lsin. U holda

$$\mathbb{R} \ni \lambda \to E_\lambda = E\left(\left(-\infty; \lambda\right)\right) \tag{4.1}$$

Akslantirish birlik yoyilma (funksiya) bo'ladi va aksincha, berilgan E_λ birlik yoyilma bo'yicha $B(\mathbb{R})$ da shunday E birlik yoyilma ko'rish mumkinki, E_λ bilan E lar (4.1) munosabat bo'yicha o'zaro bog'liq bo'ladi.

Isbot. Aytaylik $B(\mathbb{R})$ da E berilgan bo'lsin, (4.1) bo'yicha E_λ ni ko'ramiz.

Yuqoridagi a) shartining bajarilishi ravshan. Biz $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} E(\lambda) = 0$ munosabatni isbotlash uchun $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots$ va $n \to \infty$ da $\lambda_n \to -\infty$ bo'lishidan $E_{\lambda_n} \to 0$ kelib chiqishini ko'rsatish yetarli.

Ushbu

$$\lim_{\lambda\to-\infty} E_{\lambda_n} = \lim_{\lambda\to-\infty} E\left((-\infty,\lambda_n)\right) = E\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\infty,\lambda_n)\right) = E(\varnothing) = 0$$ munosabatdan $E_{\lambda_n} \to 0$ kelib chiqadi. Shunga o'xshash $\lim_{\lambda\to+\infty} E_\lambda = \mathbf{1}$ ham keltiriladi.

Endi v) shartni isbotlash uchun ushbu $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \mu$ va $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \mu$ munosabatdan $E_\mu - E_{\lambda_n} \to 0$ kelib chiqishini tekshirish yetarli. Bu esa $E_\mu - E_{\lambda_n} = E\left([\lambda_n,\mu)\right) \to 0$ munosabatdan kelib chiqadi, chunki

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[\lambda_n,\mu) = \varnothing \; .$$

Endi teoremaning ikkinchi qismini isbotlaymiz. Xar biri $[\lambda,\mu)$ yarim intevallarining chekli birlashmasi ko'rinishida bo'lgan α toplamlarning algebrasisni G bilan belgilaymiz . Xar bir bunday yarim intervalda $E\left([\lambda,\mu)\right) = E_\mu - E_\lambda$ belgilashni kiritamiz . Bu yerda E_μ ,E_λ lar proektorlar va $E_\lambda \le E_\mu$ bo'lishidan $E\left([\lambda,\mu)\right)$ proektor ekanligini aytish mumkin.

Kirtilgan to'plam funksiyasi G da additiv bo'ladi. Uning sanoqli additivligini ko'rsatish uchun $f \in H$ ni tayinlaymiz va

$$G \ni \alpha \to \rho_{f,f}(\alpha) = \left(E(\alpha)f,f\right)_H \ge 0$$

skalyar o'lachovni kiritamiz. U chegaralangan kamaymaydigan funksiya bo'yicha quriladi: $\mathbb{R} \ni \lambda \to \varphi_{f,f}(\lambda) = \left(E_\lambda f,f\right)_H \ge 0$ mos turda E ning qurilishi bilan deyish ham mumkin. Yuqoridagi keltirilgan $\rho_{f,f}$ ning G ga absayut additivligini ko'rish qiyin emas, bu esa f ning ixtiyoriyligidan E ni $B(\mathbb{R})$ dagi birlik yoyilmagacha davom etirsak , qidirilayotgan birlik yoyilmaga ega bo'lamiz.

Endi normal operatorlar uchun spektral yoyilmani qaraymiz. Agar zich aniqlangan yopiq operator uchun $A^*A = AA^*$ tengligi o'rinli bo'lsa, U holda A operatorini normal operaror deyiladi.

Teorema 4.2 Aytaylik A ixtiyoriy normal operator bo'lsin. U holda ko'mpleks sonlar tekisligining borel to'plamlarini $Б$ algebrasi $B(\mathbb{C})$ algebrada A operatorning E birlik yoyilmasi aniqkangan bo'lilib ushbu

$$A = \int_{\mathbb{C}} \lambda dE(\lambda)\ , D(A) = \left\{ f \in H : \int_{\mathbb{C}} |\lambda|^2 d\big(E(\lambda) f, f\big)_H < \infty \right\} \qquad (4.2)$$

Spektrlal tasvirlash o'rinli bo'ladi .

Shu bilan birga (4.2) munosabatda $\mathbb{C}$ ni A operatorning $S(A)$ spektiri bilan almashtirtish mumkin, hamda E birlik yoyilma bir qiymatli aniqladi.

Isbot. Biz teorema 3.1 kabi (4.2) tasvirlash uchun ikkita isbot keltiramiz.

Ularadan birini oddiy bo'lib, teorema 3.1 ning birinchi isboti kabi chegaralangan normal operotorga olib kelinadi. Buning uchun A^{-1} chegaralangsn operator mavjud deb faraz qilamiz.

Ikinchi isbot umumiy hol uchun bo'lib nisbatan qiyinroq bo'ladi.

1) Bunga teoremadagi A , E va λ larni A' , E' va λ' larga almashtirish qulay. Demak $\lambda' = 0$ ni A' operatorni regulyar nuqtasi deb faraz qilamiz, aytaylik $\varepsilon' > 0$ yetarlicha kichik bo'lib $\{\lambda' = C : |\lambda'| \geq \varepsilon\}$ doira A' ning regulyar nuqtalaridan iborat bo'lsin. Ushbu $R' = \{\lambda' = \mathbb{C} : |\lambda'| \geq \varepsilon\}$ va $R = \{\lambda' = \mathbb{C} : |\lambda'| \geq \varepsilon^{-1}\}$ belgilashlarni kiritamiz.

Bunda R fazosi $R' \ni \lambda' \to \lambda = \left(\lambda^{-1}\right)^{-1} \in R$ akslantirishning o'brazi bo'ladi. Bu akslantirishga teskari

$$R \ni \lambda :\to \lambda' = \varphi(\lambda) = \lambda^{-1} \in R' \qquad (4.3)$$

akslantirishini qaraymiz.

Chegaralangan $A = (A')^{-1}$ operatorni kiritamiz, uning spektri R da joylashgan bo'ladi. Bu operator normal bo'ladi:

$$A^* A = \left((A')^{-1} \right)^* (A')^{-1} = \left((A')^* \right)^{-1} (A')^{-1} = \left(A' (A')^* \right)^{-1} =$$
$$= \left((A')^* A' \right)^{-1} = (A')^{-1} \left((A')^* \right)^{-1} = (A')^{-1} \left((A')^{-1} \right)^* = AA^*$$

Aytaylik E - A operatorning birlik yoyilmasi bo'lsin. Uni $G = B(R)$ da berilgan deb hisoblash mumkin. Yuqoridagi (4.3) akslantirish bo'yicha E ning obrazini E' orqali belgilaymiz. Bu E' - A' operator uchun birlik yoyilma bo'ladi: $R \ni \lambda \to F(\lambda') = \lambda^{-1} \in \mathbb{C}$ funksiya uchun

$$\int_{R'} \lambda' dE'(\lambda') = \int_{R} \lambda^{-1} dE(\lambda) = A^{-1} = A'$$

$$D(A') = \left\{ f \in H : \int_{R'} |\lambda'|^2 \, d\left(E'(\lambda') f, f \right)_H < \infty \right\}$$

formulaga ega bo'lamiz.

2) Aytaylik A - umumiy xolda normal operator bo'lsin. Ikkita operatorni kiritamiz:

$$B = \mathbf{1} + A^* A \;,\; C = A\left(\mathbf{1} + A^* A\right) \qquad (4.4)$$

Ma'lumki, $A^* A$ o'z-o'ziga qo'shma va nomanfiy, shu sababli B operatori o'z-o'ziga qo'shma va teskarilanuvchi. C operatori ko'rrekt aniqlangan va

$$R\left(\left(\mathbf{1} + A^* A \right)^{-1} \right) = D\left(A^* A \right) \subseteq D(A)$$

Teoremaning isbotini davom ettirishdan oldin bir bir necha yordamchi faqtlarni kiritamiz.

Lemma 4.1 C operatori chegaralangan va

$$C = A\left(\mathbf{1} + A^* A\right)^{-1} = \left(\mathbf{1} + A^* A\right)^{-1} A \tag{4.5}$$

$$C^* = A\left(\mathbf{1} + A^* A\right)^{-1} A^* = A^* \left(\mathbf{1} + A^* A\right)^{-1} \tag{4.6}$$

formulalar o'rinli bo'ladi.

Isbot. C operatorining chegaralanganligi bu shunday $c > 0$ soni topilib $\forall f \in H$ uchun $\left\| A\left(\mathbf{1} + A^* A\right)^{-1} f \right\|_H \le c \|f\|_H$ tengsizligi bajarilishi hisoblanadi, yoki $\left(\mathbf{1} + A^* A\right) f = g$ deb belgilasak $\|Ag\|_H \le c \left\|\mathbf{1} + A^* A\right\|_H$, $g \in D\left(A^* A\right)$ tengsizligi bajarilishidir.

Bu esa

$$\|Ag\|^2_H = \left(Ag, Ag\right)_H = \left(A^* Ag, g\right)_H \le \left(\left(\mathbf{1} + A^* A\right) g, g\right)_H \le$$
$$\le \left\|\left(\mathbf{1} + A^* A\right) g\right\|_H \|g\|_H \le \left\|\left(\mathbf{1} + A^* A\right)^{-1}\right\| \left\|\left(\mathbf{1} + A^* A\right) g\right\|^2_H$$

munosabat kelib chiqadi.

Endi (4.5) tengsizlikni isbotlaymiz. Buning uchun $f \in D\left(A\right)$ bo'lganda $A\left(\mathbf{1} + A^* A\right)^{-1} f = \left(\mathbf{1} + A^* A\right)^{-1} Af$ tenglikni ko'rsatish yetarli. Ushbu $\left(\mathbf{1} + A^* A\right)^{-1} f = g$ belgilashni kiritib ekvivalent bo'lgan

$$Ag = \left(\mathbf{1} + A^* A\right)^{-1} A\left(\mathbf{1} + A^* A\right)^{-1} g \;, g \in D\left(A\left(\mathbf{1} + A^* A\right)^{-1}\right) \tag{4.7}$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Biroq

$A\left(\mathbf{1}+A^*A\right)^{-1} g = Ag + AA^*Ag = Ag + A^*A^2 = \left(\mathbf{1}+A^*A\right)Ag$ bo'ladi, shu sababli (4.7) o'rinli.

Endi (4.6) dagi birinchi birinchi tenglikni isbotlaymiz. Ixtiyoriy $f \in H, g \in D\left(A^*\right)$ lar uchun

$$(Cf,g)_H = \left(A\left(\mathbf{1}+A^*A\right)^{-1} f, g\right)_H = \left(\left(\mathbf{1}+A^*A\right)^{-1} f, A^*g\right) =$$

$= \left(f, \left(\mathbf{1}+A^*A\right)^{-1} A^*g\right)_H$ tenglik o'rinli, bu esa ko'rsatish lozim bo'lgan munosabat to'g'riligini anglatadi.

Endi (4.6) dagi ikkinchi tenglikni ko'rsatish uchun , A o'rniga A^* ni olib (4.5) kabi muloxoza yuritiladi.

Lemma 4.2. C operatori normal bo'ladi.

Isbot. Biz $C^*C = CC^*$ tenglikni, ya'ni $f, g \in H$ uchun

$$(Cf, Cg)_H = \left(CC^* f, g\right)_H = \left(C^*Cf, g\right)_H = \left(C^* f, C^* g\right)_H \tag{4.8}$$

tenglikni isbotlashimiz kerak. Yuqoridagi (4.5) munosabatdan birinchi tenglikni va (4.6) munosabatdan ikkinchi tenglikni qo'llab (4.8) tenglikni ushbu

$$\begin{aligned} &\left(A\left(\mathbf{1}+A^*A\right)^{-1} f, A\left(\mathbf{1}+A^*A\right)^{-1} g\right)_H = \\ &= A^*\left(\left(\mathbf{1}+A^*A^{-1}\right) f, A^*\left(\mathbf{1}+A^*A\right)^{-1} g\right)_H \end{aligned} \tag{4.9}$$

ko'rinishida yozamiz. Agar f, g lar H ning hamma yerida xarakat qilsa (o'zgarsa) u xolda $\left(\mathbf{1}+A^*A\right)^{-1} f = f_1$ bilan $\left(\mathbf{1}+A^*A\right)^{-1} g = g_1$ vektorlar $D\left(A^*A\right)$ ning barcha qiymatlarini qabul qiladi . Bundan (4.9) tenglik

$f_1, g_1 \in D\left(A^* A\right)$ lar uchun $\left(Af_1, Ag_1\right)_H = \left(A^* f_1, A^* g_1\right)$ tenglikiga eklivalent bo'ladi . Bu tenglik esa A normal bo'lgani uchun o'rinli.

Lemma 4.3 O'z-o'ziga qo'shma B operatori va C chegaralangan normal operatori chegaralangan normal operatori birlik yoyilmalari komutativ bo'ladi.

Isbot: C operatorining birlik yoyilmasi chegaralangan o'z-oziga qo'shma $\operatorname{Re} C$ va $\operatorname{Im} C$ operatorlarining birlik yoyilmalarining to'g'ri yig'indisi ko'rinishida ifodalanadi, u xolda B va $\operatorname{Re} C$ va B va $\operatorname{Im} C$ operatorining birlik yoyilmalari komutativli bo'lishini ko'rsatish yetarli. Buning uchun esa teorema 3.3 bo'yicha B^{-1} bilan $\operatorname{Re} C$,B^{-1} bilan $\operatorname{Im} C$ larning komutativli bo'lishini korsatish kifoya, ya'ni B^{-1} bilan C , B^{-1} bilan C^* larning komutativli bo'lishini ko'rsatish kerak.

Dastlab B^{-1} bilan C ning komutativli bo'lishini tekshiramiz. (4.5) munosabat bo'yicha

$$\begin{gathered} B^{-1}C - CB^{-1} = \left(\mathbf{1} + A^* A\right)^{-1} A \left(\mathbf{1} + A^* A\right)^{-1} - \\ - \left(\left(\mathbf{1} + A^* A\right)^{-1} A\right)\left(\mathbf{1} + A^* A\right)^{-1} \end{gathered} \tag{4.10}$$

tenglikga ega bo'lamiz. Oxirga ayirma nolga teng va

$$R\left(\left(\mathbf{1} + A^* A\right)^{-1}\right) = D\left(A^* A\right) \subseteq D(A)$$

shu sababli o'ng tomoni o'rniga nolni yozsak bo'ladi. Shu kabi B^{-1} bilan C^* ning ning komutativli ekanligini (4.6) yordamida isbotlanadi.

Endi teoremaning isbotiga qaytamiz. O'z-o'ziga qo'shma musbat B operatori uchun teorema 3.1 bo'yicha

$$B = \int_{1}^{\infty} t dE_B(t) \tag{4.11}$$

tasvirlashi o'rinli, bu yerda E_B - B operatorining birlik yoyilmasi. $B \geq 1$ bo'lishidan $S(B) \subseteq [\mathbf{1};\infty)$ kelib chiqadi. Normal chegaralangan C operatori uchun teorema 2.5 boyicha

$$C = \int_{\mathbb{C}} z dE_C(z) \tag{4.12}$$

Tasvirlashi o'rinli, bu yerda E_C - C operatorining birlik yoyilmasi. C ning chegaralanganligidan $\sup E_C$ xam chegaralangan, aniqroq aytsak

$$\sup E_C \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|C\|\} = B_{\|C\|}(0)$$

Yuqorida E_B bilan E_C komutativli ekanligi ko'rsatiladi. Ularning $E = E_B \times E_C$ to'g'ri ko'paytmasi $\mathbb{R} = [1,\infty) \times \mathbb{C}$ borel to'plamlarida (nuqtalarida $\lambda = (t;z)$ ko'rinishida belgilanadi) birlik yoyilma bo'ladi: $\sup E \subseteq [1;\infty) \times B_{\|C\|}(0)$.

Yuqoridagi (4.11) va (4.12) fo'rmulalarni E uchun mos turda quydagicha yozish mumkin:

$$B = \int_{R} t dE(\lambda) \text{ , } C = \int_{R} z dE(\lambda) \tag{4.13}$$

Birinchi integralda $R \ni \lambda = (t,z) \to t \in [1,\infty)$ funksiyasi integrallanadi , ikkinchi integralda $R \ni \lambda = (t,z) \to t \in \mathbb{C}$ funksiya integrallanadi.

Yuqoridagi (4.4) bo'yicha $A = CB$. Shu bilan birga (4.13) integrallar ko'paytmasi funsiyalar ko'paytmasining integrallariga teng. Shuday qilib A operatori uchun

$$A=\int_R tdE(\lambda)\;D(A)=\left\{f\in H=\int_R t^2\left|t^2\right|d\left(E(\lambda)f,f\right)_H<\infty\right\} \qquad (4.14)$$

spektral tasvirlashiga ega bo'lamiz. Agar $R\ni\lambda=(t,z)\to\lambda'=tz\in\mathbb{C}=R'$ akslantirishini kiritsak (4.14) formulani (4.2) ko'rinishida ifodalash mumkin. Aytaylik bu akslantirish E ni E' ga o'tkazsin ; U holda E' $B(R')=B(\mathbb{C})$ da birlik yoyilma bo'ladi.

Biz $R'=\mathbb{C}\ni\lambda'\to\lambda'\in\mathbb{C}$ funksiya uchun

$$\int_{\mathbb{C}}\lambda' dE(\lambda')=\int_R tzdE(\lambda)=A$$

$$D(A)=\left\{f\in H:\int_{\mathbb{C}}|\lambda'|^2 d\left(E(\lambda')f,f\right)_H<\infty\right\}$$

tenglikga ega bo'lamiz. (4.2) tasvirlash umumiy holda isbotlandi

3) (4.2) da $\mathbb{C}$ dan $S(A)$ ga o'tish ham teorema 3.1 kabi bajariladi.

4) (4.2) dagi E ning bir qiymatli aniqlanishi esa teorema 2.5 dan kelib chiqadi.

XULOSA

Bitiruv malakaviy ishini tayyorlashda dastlab Hilbert fazolari va undagi operatorlar xossalari o'rganildi. Hilbert fazolaridagi qo'shma operatorlarning bir qator xossalri o'rganildi, bunda funktsional analiz kursidagi tushuncha va xossalarga tayanildi.

Hilbert fazolarida aniqlangan chegaralangan operatorlarning spektral yoyilmasi o'rganilib, ular bilan bog'liq xossalarni chegaralanmagan qo'shma operator hamda normal operatorlar uchun ham o'rganildi. Spektral yoyilmani o'rganishda operator rezolventasi bilan bog'liq xossalari ham qarashtirildi.

Hilbert fazosidagi chegaralanmagan operatorlarning spektral yoyilmalarini o'rganish va ularning xossalari opertorlar alagebralari nazariyasidagi masalalarni tahlil qilishda qo'llaniladi. Jumladan, o'lchovli operatorlarning har xil algebralarini o'rganishda, ulardagi akslantirishlar xossalarini o'rganishda ham qo'llaniladi ([9]).

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Mirziyoyev Sh. Buyuk kelajagimizni mard va oliyjanob xalqimiz bilan birga quramiz. – T.: O‘zbekiston, 2017.
2. Ayupov Sh. A., Ibragimov M.M., Kudaybergenov K.K. Funksional analizdan misol va masalalar, Bilim, 2009.
3. J.I. Abdullayev, R.N. G‘anixo‘jayev, M.H. Shermatov, O.I.Egamberdiyev. Funksional analiz, Samarqand. 2009.
4. Sh.A. Ayupov, M.A. Berdiqulov, R.M. Turg‘unboyev. Funksional analiz. Toshkent. 2008.
5. Sh.A. Ayupov, M.A. Berdiqulov, R.M. Turg‘unboyev. Funksiyalar nazariyasi. Toshkent. 2004.
6. Sarimsoqov T.A. Haqiqiy o‘zgaruvchining funksiyalari nazariyasi. Toshkent: Fan. 1994.
7. Sarimsoqov T.A. Funksional analiz kursi. Toshkent: O‘qituvchi. 1986.
8. Sherstnev A.N., Lugovaya G.D. Funktsionalniy analiz. Kazan, 2008.
9. Muratov M.A., Chilin V.I. Algebri izmerimix i lokalno izmerimix operatorov, Izd-vo Instituta matematiki NAN Ukraini, 2007.
10. Kutateladze S.S. Osnovi funktsionalnogo analiza. Novosibirsk, 2001.
11. Sadovnichiy V.A. Teoriya operatorov. M.: Visshaya shkola, 1999.
12. Berezanskiy Yu.M., Us G.F., Sheftel Z.G. Funktsionalniy analiz. Kiev: Visha shkola, 1990.
13. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука. 1989.
14. www.ziyonet.uz;
15. www.bilim.uz;