

ÓZBEKISTAN RESPUBLIKASÍ JOQARÍ HÁM ORTA
ARNAWLÍ BILIMLENDIRIW MINISTRLIGI

BERDAQ ATÍNDAĞÍ QARAQALPAQ MÁMLEKETLIK
UNIVERSITETI

Funkcionallıq analiz, algebra hám geometriya kafedrası

Matematika fakulteti “Matematika” tálim baǵdarınıń 4-kurs studentı

Kungratbaeva Aqshagúldıń

“Yarım ápiwayi Leibnic algebraları avtomorfizmi ”

temasındaǵı

PITKERIW QÁNIGELIK JUMÍSÍ

Kafedra baslıǵı:

Kudaybergenov

Ilimiy basshı:

Kudaybergenov

f. -m. i. d., professor K. K.

f. -m. i. d., professor K. K.

Nókis 2020

MAZMUNÍ

	Kirisiw	3
1-§.	Tiykargí túsínik hám anıqlamalar.....	5
2-§.	Ápiwayi hám yarım ápiwayi Leibnic algebrası.....	
3-§.	Nilpotent Leibnic algebrası hám onıń differentsiyali.....	
4-§.	Ápiwayi hám yarım ápiwayi Leibnic algebrasınń differentsiyallawı	
5-§.	Yarım ápiwayi Leibnic algebrası avtomorfizmleri.....	
	JUWMAQLAW	
	PAYDALANÍLGAN ÁDEBIYATLAR	

Kirisiw

Bul pitkeriw qánigelik jumısı tiykarınan yarım ápiwayi Leibnic algebraları hám avtomorfizmlerin úyreniwden ibarat. Házirgi kúnde Leibnic algebraları tez pát penen rawajlanıp, úyrenilip barılmaqta hám sońǵı on jıllıqta úyrenilip baslanǵan edi. Birinshi márte Leibnic algebrası Lie algebrasınıń kommutativ bolmaǵan analogi dep túsındirip bergen ilimpaz L. Lodey edi.

Qálegen yarım ápiwayi Lie algebrası tolıq klassifikatsiyalanǵan ápiwayi ideallardin tuwrı qosındısı turinde jazılıwı shekli ólshewli Lie algebralarınıń klassik teoriyasınan belgili. Bul yarım ápiwayi Leibnic algebralarınıń dúzilisi yarım ápiwayi Lie algebralarınıń dúzilisine qaraǵanda quramali ekenligin kórsetedi hámde yarım ápiwayi Leibnic algebraların úyreniw mashqalası tuwiladi. Yarım ápiwayi Leibnic algebrası L : $L = S \times I$, bul jerde S -yarım ápiwayi Lie algebrası, I bolsa algebra L elementleriniń kvadratlarında payda bolǵan idealdır. Bul sonı ańlatadi, mashqala ideal I hám yarım ápiwayi Lie algebrası S ortasındaǵı baylanısti úyreniwge qaratılǵan. Yarım ápiwayi Lie algebralarınıń tuwindılari hám avtomorfizmleri tiyisli ápiwayi ideallardıń háreketleri menen tolıq klassifikatsiyalanıwına itibar qaratamız.

Bul pitkeriw qánigelik jumısı kirisiw, tiykarǵı bes paragraf, juwmaqlaw hám paydalanılǵan ádebiyatlar diziminen ibarat.

Jumıstın birinshi paragrafi qaralıp atırǵan temanıń mazmunin tereńirek túsiniw maqsetinde tiykarǵı túsiniwler hám anıqlamalarǵa arnalǵan. Joqarıda aytilǵanday Lie algebrası Leibnic algebrasınıń dara

jaǵdayi bolǵanlıqtan biz dáslep Lie algebrasına toqtalamız hám oǵan misallar keltirip ótemiz.

Jumıstıń ekinshi paragrafında bolsa, Leibnic algebrası hám ápiwayi Leibnic algebralarına tolıǵraq maǵliwmatlar hám misallar kórsetilgen. Bul maǵliwmatlar bul temanı úyreniwde áhmiyetli orın tutadı. Sonıń menen birge, bul jumıstıń úshinshi hám tórtinshi paragraflarında ápiwayi hám yarım ápiwayi Leibnic algebralarınıń strukturalari hám differentsiyallari keltirilgen. Bul maǵliwmatlar Leibnic algebrasında anıqlanǵan sızıqlı operatorlardı úyreniwde biz ushın qolaylı boladı. Leibnic algebrası Li algebrasınıń uliwmalasqan jaǵdayi bolǵanlıqtan, dáslepki paragraflardaǵı tastıyqlawlar ayırım qosımsha shártler qoyılıp dálillengen.

Qánigelik jumısınıń besinshi paragrafında, jumıstıń tiykarı bolǵan yarım ápiwayi Leibnic algebraları avtomorfizmleri haqqında keltirilgen. Avtomorfizmler-kóbeymeni kóbeymege sáwlelendiretuǵın óz – ara bir mánisli sızıqlı shegaralanǵan operator bolıp esaplanadı.

Sonıń menen birge, bul qánigelik jumısın jazıwda paydalanılǵan ádebiyatlar jumıstıń eń sońında keltirilgen . Keltirilgen ádebiyatlardan paydalanıp, Leibnic algebrasın jánede tereńirek úyreniwge boladı.

1-§. Tiykargı túsinik hám anıqlamalar

F maydanında berilgen U vektorlıq keńisligi *algebra* delinedi, eger de onda kóbeymeniń bisızıqlı nızamı anıqlanǵan bolsa.

F sanlı maydan hám L bul F maydan ústinde bázı bir sızıqlı keńislik bolsın. Eger

$$[\cdot, \cdot]: L \times L \rightarrow L \quad (1.)$$

1)

sáwlelendiriw tómenдеgi qásiyetlerge iye bolsa:

$$[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y] = \alpha_1 [x_1, y] + \alpha_2 [x_2, y]$$

$$[x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2] = \beta_1 [x, y_1] + \beta_2 [x, y_2]$$

Onda bul sáwlelendiriw bisızıqlı nızam dep ataladı.

1. 1-anıqlama. Bizge F maydan ústinde L sızıqlı keńislik hám onda anıqlanǵan $[\cdot, \cdot]: L^2 \rightarrow L$ bisızıqlı sáwlelendiriw berilgen bolıp, ol tómenдеgi shártlerdi qanaatlandırsın:

$$\forall x \in L \quad \text{ushın} \quad [x, x] = 0 \quad (\text{L1})$$

$$\forall x, y, z \in L \quad \text{ushın} \quad [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0. \quad (\text{L2})$$

onda L sızıqlı keńislik *Lie algebra* delinedi.

Bunda (L2) shárti *Yakobi birdeyligi* delinedi. $[x, x]$ elementke x hám y elementleriniń kóbeymesi yamasa kommutatorı delinedi. (L1) den Lie algebrasınıń antikommutativ ekenligi kelip shıǵadı. Haqıyqattan

$[x, x] = 0$ birdeylikti $[x + y, x + y]$ element ushın qollasaq, onda $[x + y, x + y] = 0$, $[x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = 0$. Lie algebrasında $[x, x] = 0$ hám $[y, y] = 0$ bolǵanı ushın $[x, y] = -[y, x]$ birdeylik payda boladı. Bul birdeylik antikommutativlik birdeyligi delinedi.

1. 2-anıqlama. $L - F$ maydan ústindegi algebra hám $K \subset L$ úles keńislik bolsın. Egerde $\forall x, y \in K$ ushın $[x, y] \in K$ bolsa, onda K úles keńisligi L algebranın *úles algebrası* delinedi.

1. 1-misal: Meyli A assotsiativ algebra bolsın, yaǵniy

$$x(yz) = (xy)z, \quad \forall x, y, z \in A$$

Onda A algebra $[x, y] = xy - yx$ sıyaqlı anıqlanǵan kóbeyme boyınsha Lie algebra boladı. Dástlep bisızıqlı ekenligin tekseremiz. Onda

$$\begin{aligned} [\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y] &= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)y - y(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \\ &= \alpha_1 x_1 y + \alpha_2 x_2 y - y\alpha_1 x_1 - y\alpha_2 x_2 = \\ &= \alpha_1 x_1 y - y\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 y - y\alpha_2 x_2 = \\ &= \alpha_1 [x_1, y] + \alpha_2 [x_2, y]. \end{aligned}$$

Endi Yakobiy birdeyligin tekseremiz:

$$1). [x, [y, z]] = x(yz - zy) - (yz - zy)x = xyz - xzy - yzx + zyx,$$

$$2). [y, [z, x]] = y(zx - xz) - (zx - xz)y = yzx - yxz - zxy + xzy,$$

$$3). [z, [x, y]] = z(xy - yx) - (xy - yx)z = zxy - zyx - xyz + yxz$$

teńliklerdi qossaq talap etilgen birdeylik kelip shıǵadı.

1. 3-anıqlama. Eger sonday $\varphi: L \rightarrow L'$ óz-ara bir mánisli sıızıqlı operator bar bolıp, qálegen $x, y \in L$ elementler ushın $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$ teńlik orınlı bolsa, onda F maydan ústindegi L hám L' algebralar izomorf delinedi. Eger $L = L'$ bolsa, onda φ *avtomorfizm* delinedi.

1. 2-misal. $V - F$ maydan ústindegi n ólshemli vektorlıq keńislik bolsın. $gl_n(V)$ arqalı tómenдеgi kóplikti belgileymız:

$$gl_n(V) = \{x | x: V \rightarrow V - \text{sızıqlı operator}\}$$

Bizge belgili, $gl_n(V) - n^2$ ólshemli vektorlıq keńislik boladı. Bul keńislikte tómendegishe ámel anıqlaymız: $x, y \in gl_n(V)$ ushın $[x, y] = xy - yx$. Onda $gl_n(V)$ keńislik kiritilgen ámelge qarata Lie algebrasın payda etedi.

1. 4-anıqlama. L - Lie algebrası, I onıń úles keńisligi bolsın. Eger $\forall x \in L, y \in I$ ushın $[x, y] \in I$ bolsa, onda I úles keńisligi L Lie algebrasınıń *ideali* dep ataladı.

1. 3-misal. $Z(L) = \{x \in L : [x, y] = 0, \forall y \in L\}$ kóplikti qarastıramız. Bul kóplik L Lie algebrasınıń ideali boladı.

$I = \{0, L\}$ úles keńislikleri L Lie algebrasınıń *trivallıq idealları* delinedi.

1. 5-anıqlama. Eger L algebra 0 hám L den basqa ideallargá iye bolmasa, onda L ápiwayi Lie algebrası delinedi.

1. 4-misal. sl_n - ápiwayi Lie algebra bolıwın kórsetiń.

$B = \{h_i = e_{ii} - e_{i+1i-1} : i = \overline{1, n-1}\} \cup \{e_{ij} : i \neq j\}$ kóplik sl_n ushın bazis elementleri kópligi boladı.

sl_n niń ápiwayi Lie algebra ekenligin kórsetiw ushın $I \neq 0$ ideali bolıp, $I \subseteq sl_n$ idealdı alamız. $x \in I, x \neq 0$ bolsın, onda

$x = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i h_i + \sum_{i \neq j} \alpha_{ij} e_{ij}$ sıyaqlı jazıw múmkin. Bul jerde

$$h_i = e_{ii} - e_{i+1i-1} : i = \overline{1, n-1}$$

1). $\alpha_{ks} \neq 0, k < s$ bolsın, onda $h_k \in sl_n$ ushın $[x, h_k] \in I$ boladı.

$$[x, h_k] = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i [h_i, h_k] + \sum_{i \neq j} \alpha_{ij} [e_{ij}, h_k] = \sum_{i \neq j} \alpha_{ij} [e_{ij}, e_{kk} - e_{k+1k+1}] =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i \neq j} \alpha_{ij} (e_{ij} (e_{kk} - e_{k+1k+1}) - (e_{kk} - e_{k+1k+1}) e_{ij}) = \\
&= \sum_{i \neq j} \alpha_{ij} e_{ik} - \sum_{i \neq j} \alpha_{kj} e_{kj} - \left(\sum_{i \neq k+1} \alpha_{ik+1} e_{ik+1} - \sum_{j \neq k+1} \alpha_{n+1} e_{k+1j} \right).
\end{aligned}$$

$[x, h_k] \in I, e_{1k} \in sl_n$ dep alamız, onda

$$\begin{aligned}
[[x, h_k], e_{1k}] &= \sum_{i \neq k} \alpha_{ik} [e_{ik}, e_{1k}] - \sum_{j \neq k} \alpha_{kj} [e_{kj}, e_{1k}] - \\
&\quad - \sum_{i \neq k+1} \alpha_{ik+1} [e_{ik+1}, e_{1k}] + \sum_{j \neq k+1} \alpha_{k+1j} [e_{k+1j}, e_{1k}] = \\
&= \alpha_{k1} e_{11} - \alpha_{k1} e_{kk} + \alpha_{kk+1} e_{k+11} + \alpha_{k+11} e_{k+1k} \in I.
\end{aligned}$$

$[[x, h_k], e_{1k}] \in I, e_{kk} \in L$ bolsın, onda

$$[[[x, h_k], e_{1k}], e_{kk}] = \alpha_{k+1} [e_{k+1k}, e_{kk}] = \alpha_{k+1} e_{k+1k} \in I.$$

$e_{k+1k} \in I, e_{k1} \in L$ bolsın, onda $[e_{k+1k}, e_{k1}] = e_{k+11} \in L$ boladı.

$e_{k+11} \in I, e_{ik+1} \in L$ bolsın, onda $[e_{ik+1}, e_{k+11}] = e_{i1} \in I$ boladı.

Bunnan $e_{i1} \in I, e_{1j} \in L$ bolsa, onda $[e_{i1}, e_{1j}] = e_{ij} \in I$ boladı.

Demek joqarıdağılarǵa tiykarlanıp, $I=L$ bolatuǵını kelip shıǵadı.

$sl_n(V) = \{x | x : V \rightarrow V - \text{siziqlioperator}, Tr(x) = 0\}$ bul kóplik gl_n

keńisliktiń úles keńisligi boladı hám onıń ólshemi $n^2 - 1$ ge teń. Sonıń menen birge, $sl_n(V)$ $gl_n(V)$ elgebranıń úles algebrası bolıp, ápiwayi *Lie algebrası* boladı.

1. 6-anıqlama. Eger F maydan ústindegi $(L, [\cdot, \cdot])$ algebranıń qálegen $x, y, z \in L$ elementleri ushın tómendegi *Leybnic birdeyligi* ornalı bolsa:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y]$$

onda L algebra ***Leybnic algebrası*** delinedi.

$$L \text{ Leybnic algebrası ushın } I = \text{span} \left\{ [x, x] = \sum_{i=1}^n \lambda_i [x_i, x_i] : x \in L \right\}$$

kóplikti qaraymız. Bizge belgili, bul sıziqlı keńislik L Leybnic algebrasınıń eki táreplemeli idealı boladı. Bunnan tısqarı L/I factor-algebra boladı.

1. 7-anıqlama. L Leybnic algebrası hám $d: L \rightarrow L$ sıziqlı operator berilgen bolsın. Eger qálegen $x, y \in L$ elementler ushın

$$d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)]$$

teńlik orınlı bolsa, d sıziqlı operator L Leybnic algebrasınıń differentsiyallawı delinedi.

1. 5-misal. L Leybnic algebrasında $\alpha \in L$ elementin alıp, tómendegishe operatordı qarayıq:

$$d(x) = [x, \alpha], x \in L$$

bul operator L algebrasınıń differentsiyallawı boladı hám bul kórinistegi differentsiyallaw ishki differentsiyallaw dep ataladı.

L algebranıń barlıq differentsiyallawlar kópligin $DerL$ dep belgileyik. Eger qálegen $f, g \in DerL$ elementler ushın

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f$$

kórinistegi ámel anıqlansa, onda $(DerL, [\bullet, \bullet])$ – Lie algebrası boladı.

L algebranıń barlıq ishki differentsiyallawlar kópligin $InDerL$ arqali belgilenedi hám ol $DerL$ diń idealı boladı.

1. 8-anıqlama. L Leibnic algebrası hám $\Delta: L \rightarrow L$ sıziqlı operator berilgen bolsın. Eger qálegen $x \in L$ ushın sonday d_x differentsiyallawı bar bolıp,

$$\Delta(x) = d_x(x)$$

teńlik orinlansa, Δ -sızıqlı operatori L algebranıń lokal differentsiyallawı delinedi.

1. 9-anıqlama. L Leibnic algebrası hám $\nabla : L \rightarrow L$ operator (sızıqlı bolıwı shárt emes) berilgen bolsın. Eger qálegen $x, y \in L$ elementler ushın sonday $d_{x,y}$ differentsiyallaw bar bolıp,

$$\nabla(x) = d_{x,y}(x)$$

$$\nabla(y) = d_{x,y}(y)$$

teńlikleri orınlı bolsa, ∇ -operator L algebranıń 2-lokal differentsiyallawı delinedi.

1. 10-anıqlama. Kvadrati nolge teń bolǵan Lie algebra Abel Lie algebra delinedi. Bul anıqlama $\forall x, y \in L$ ushın $[x, y] = 0$ ańlatpaǵa teń kushli.

1. 11-anıqlama. K keńislik L (Lie algebra) niń úles keńisligi bolsın. K úles algebra delinedi, eger $\forall x, y \in K$ ushın $[x, y] \in K$ bolsa.

Meyli L bázı bir Lie algebrası hám I onıń úles keńisligi bolsın. Eger I úles keńisliginen alınǵan qálegen vektor menen L algebradan alınǵan qálegen vektordiń kóbeymesi I úles keńislikke tiyisli bolsa, onda I ideal delinedi, yaǵniy:

$$\forall x \in I, \forall y \in L, [x, y] \in I.$$

Kóbeytiriw ameliniń antikommutativlik qásiyetinen tómendegige iye bolamız:

$$[y, x] = -[x, y] \in I$$

anıqlamadan kórinip turǵanıday, qálegen ideal úles algebra boladı.

$gl(n, F)$ bul- F maydan ústindegi n -tártpi kvadrat matritsalar Lie algebrası:

$$[x, y] = xy - yx.$$

$sl(n, F)$ arqali izi nolge teń bolǵan barlıq n -tártpılı kvadrat matritsalar kópılgın belgıleymız: $sl(n, F) = \{x \in gl(n, F) : tr(x) = 0\}$

1. 1-lemma. $sl(n, F)$ kópılkı $gl(n, F)$ algebranıń idealı boladı.

Dáııllenıwı: $sl(n, F)$ kópılkıń úles keńıslık ekenlıgı matritsa izınıń addıtvılk hám bırteklılk qásiyetlerınen kelıp shıǵadı, yaǵnıy $\forall x, y \in sl(n, F), \alpha \in F$ ushın

$$tr(x + y) = tr(x) + tr(y) = 0 + 0.$$

Bunnan

$$x + y \in sl(n, F).$$

Endı $x, y \in sl(n, F), \alpha \in F$ ushın

$$tr(\alpha x) = \alpha tr(x) = 0$$

teńlıgınen $\alpha x \in sl(n, F)$ ekenlıgı kelıp shıǵadı.

Kóbeyme ushın

$$tr([x, y]) = tr(xy - yx) = tr(xy) - tr(yx) = 0. \blacksquare$$

Tómende biz Shur lemmasınıń biz paydalanıwımızǵa maslastırılǵan kórinısın kórip shıǵamız:

1. 2-lemma. Meylı G kompleks Lie algebrası bolsın. $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$ hám $W = W_1 \oplus \dots \oplus W_n$ tolıq qaytarılatuǵın G -modulları bolsın, bul jerde $V_1, \dots, V_m, W_1, \dots, W_n$ qaytarıp bolmayıtuǵın modullı. Kiyın hár qanday G -modullı gomomorfızım $\varphi : V \rightarrow W$ dı

$$\varphi = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \varphi_{ij}$$

sıpatında ańlatıw múmkin, bul $\varphi_{ij} : V_i \rightarrow W_j$ operatori ózgerterılgen modullı gomomorfızımler hám λ_{ij} kompleks sanlar. Bunnan tısqarı

$\varphi_{ij} \neq 0$ hám, eger V_i hám W_j izomorf G -modullar bolsa, φ_{ij} izomorfizmge baylanisli boladı.

1. 12-anıqlama. $G(L)$ algebra, eger $R(G) = Z(G)$, bul jerde $R(G)$ hám $Z(G)$ sáykes túrde hal qiliniwi múmkin bolǵan radikal hám G diń orayi bolsa, reduktiv dep ataladı.

2-§. Ápiwayi hám yarım ápiwayi Leybnic algebrası

Bul paragrafta biz yarım ápiwayi Leibnic algebraların anıqlaw ushın olardıń ózgeritip bolmaytuǵın modulleri boyınsha kerekli anıqlamalar hám nátiyjelerdi keltiramız.

2. 1-anıqlama. Eger F maydan ústindegi $(L, [\cdot, \cdot])$ algebranın qálegen $x, y, z \in L$ elementleri ushın tómendegi *Leibnic birdeyligi* orınlı bolsa:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [x, z], y],$$

onda L algebra *Leibnic algebrası* delinedi.

Leibnic birdeyligi-bul Yakobiy birdeyliginiń uliwmalastirilǵanı. Sebebi: $(L, [\cdot, \cdot])$ anti-simmetrik shárti, bul ózine tánlik Yakobiy birdeyligin ózgerledi.

$$L \text{ Leibnic algebrası ushın } I = \text{span} \left\{ [x, x] = \sum_{i=1}^n \lambda_i [x_i, x_i] : x \in L \right\}$$

kóplikti qarayıq. Bizge belgili, bul sıızıqlı keńislikti L Leibnic algebrasınıń eki tárepleme idealı boladı. Bunnan tısqarı L/I factor-algebra Lie algebrası boladı.

Endi Leybnits algebrası ushın nilpotentlik, sheshiliwsheń túsiniqlerdi kiritemiz. Tómendegi qatardi qarayıq:

$$L^{[1]} = L, \quad L^{[2]} = [L, L], \dots, \quad L^{[k+1]} = [L^{[k]}, L^{[k]}], \quad k \geq 1. \quad \text{tuwındı qatar} \quad (1)$$

$$L^1 = L, \quad L^2 = [L, L], \dots, \quad L^{k+1} = [L^k, L], \quad k \geq 1. \quad \text{tómengi oraylıq atar} \quad (2)$$

2. 2-anıqlama. Eger sonday n natural sanı bar bolıp, $L^{[n]} = 0$ bolsa L Leibnic algebrası sheshiliwsheń Leibnic algebrası delinedi.

2. 3-anıqlama. Eger sonday n natural sanı tabılıp, $L^n = 0$ bolsa, onda L Leibnic algebrası nilpotent Leibnic algebrası delinedi.

Leibnic algebrasınıń maksimal sheshiliwsheń idealı onıń radikali, maksimal nilpotent idealı bolsa nilradikali delinedi.

2. 4-anıqlama. Eger L Leibnic algebrası $L, \{0\}$ hám I den pariqlı bolǵan idealǵa iye bolmasa, onda L -ápiwayi Leibnic algebrası delinedi.

2. 5-anıqlama. Eger L Leibnic algebrasınıń radikali I ge teń bolsa, L algebra yarım ápiwayi Leibnic algebrası delinedi.

2. 6-anıqlama. Eger n ólshemli L Leibnic algebrasınıń xarakteristikalıq izbe-izligi $C(L) = (n)$ bolsa, basqasha aytqanda $L^n \neq \{0\}, L^{n+1} = \{0\}$ bolsa, onda Leibnic algebrası nul-filiform Leibnic algebrası delinedi.

Bunday algebralar nilindeksli maksimal $n+1$ bolǵan Leibnic algebraları klası boladı.

2. 1-teorema. Kompleks maydanda berilgen qálegen n ólshemli nul-filiform Leibnic algebrasında sonday $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bazis bar bolıp, algebradaǵı kóbeyme tómenдеgi kóriniske keledi:

$$[e_i, e_1] = e_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1,$$

bul jerde qatnaspaǵan kóbeymeler nolge teń boladı.

L -nilindeksli s ke teń bolǵan shekli ólshemli nilpotent Leibnic algebrası bolsın. $gr(L)_i : L^i / L^{i+1}, 1 \leq i \leq s-1$ dep alamız, $grL = gr(L)_1 \oplus gr(L)_2 \oplus \dots \oplus gr(L)_{s-1}$ dep belgileymız. Onda $[gr(L)_i, gr(L)_j] \subseteq gr(L)_{i+j}$ boladı. Eger bul keńislikte tómenдеgishe kóbeyme anıqlasaq

$$[x + L^i, y + L^j]_{gr(L)} = [x, y]_L + L^{i+j-1},$$

onda biz graduirlengen grL algebrasına iye bolamız.

2. 7-anıqlama. Eger L Leibnic algebrası grL algebrasına izomorf bolsa, onda L tabiiy usil menen *graduirlengen Leibnic algebrası* delinedi.

2. 8-anıqlama. Eger n ólshemli L Leibnic algebrasınıń xarakteristikalıq izbe-izligi $C(L) = (n-1,1)$ bolsa, yaǵniy $L^{n-1} \neq \{0\}, L^n = \{0\}$ bolsa, bunday Leibnic algebrası *filiform Leibnic algebrası* delinedi.

Endi nilindeksi $n-1$ bolǵan, yaǵniy $L^{n-2} \neq \{0\}, L^{n-1} = \{0\}$ bolǵan Leibnic algebraların qaraymız. Nilindeksli $n-1$ bolǵan algebraların xarakteristikalıq izbe-izligi eki túrli kóriniske iye boladı:

$$C(L) = (n-2,1,1), C(L) = (n-2,2).$$

Bunday algebralar *kvazi-filiform Leibnic algebraları* delinedi.

Xarakteristikalıq izbe-izliktiń anıqlamasınan sonday $e_1 \in L/L^2$ bazis elementi bar bolıp, R_{e_1} operatorınıń Jordan formasında tómendegilerdiń biri kórinisinde jaziladi. Bul jerde J_i i -tártipli Jordan ketekshesi:

$$\begin{pmatrix} J_{n-2} & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} J_n & 0 \\ 0 & J_{n-2} \end{pmatrix}.$$

eger R_{e_1} operator birinshi matritsaǵa teń bolsa, onda kvazi-filiform Leibnic algebrası birinshi túrdegi algebra delinedi, sáykes túrde ekinshi matritsaǵa teń bolsa ekinshi túrdegi algebra delinedi.

L Leibnic algebrası $L = \bigoplus_{i \in Z} V_i$ hám de $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$ bolsa, onda L Z -graduirlengen delinedi, bul jerde $i, j \in Z$ hám V_i ler shekli sandaǵı nolden ózgeshe keńislikler.

Z- graduirngen L nilpotent Leibnic algebrası qálegen i ($0 \leq i \leq t$) da $V_{k_1+i} \neq 0$ bolsa, $L = V_{k_1} \oplus V_{k_1+1} \oplus \dots \oplus V_{k_1+t}$ baylanıslı graduirovka boladı.

$l(\oplus V) = l(V_{k_1} \oplus V_{k_1+1} \oplus \dots \oplus V_{k_1+t}) = t + 1$ sanına graduirovkanıń uzınlıǵı delinedi. Eger $l(\oplus V) = t + 1 = \dim L$ bolsa, graduirovka maksimal uzınlıqqa iye delinedi.

L algebranıń uzınlıǵın tómenдеgi qaǵıyda menen anıqlayıq:

$$l(L) = \max\{l(\oplus L) : L = V_{k_1} \oplus V_{k_1+1} \oplus \dots \oplus V_{k_1+t}\}$$

bul baylanıslı graduirovka delinedi.

Eger L maksimal uzınlıqqa iye bolǵan graduirovka bolsa, L Leibnic algebrası maksimal uzınlıqqa iye bolǵan algebra delinedi.

2. 2-teorema. Meyli $L - n$ ólshemli Lie bolmaǵan maksimal uzınlıqtaǵı I túrдеgi kvazi-filiform Leibnic algebrası bolsın. Onda L tómenдеgi berilgen óz-ara izomorf bolmaǵan algebralardıń birewine izomorf boladı:

$$M^{1,\delta} : \begin{cases} [e_1, e_1] = e_n, \\ [e_{n-1}, e_1] = e_2, \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \delta e_4, \delta \in \{0, 1\} \\ [e_i, e_{n-1}] = \delta e_{i+3}, 2 \leq i \leq n-5. \end{cases}$$

$$M^{2,\lambda} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, 1 \leq i \leq n-3 \\ [e_{n-1}, e_n] = e_n, \\ [e_1, e_{n-1}] = \lambda e_{n+3}, \lambda \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

2. 9-anıqlama. Eger n -ólshemli L Leibnic algebrasınıń xarakteristikalıq izbe-izligi $C(L) = (n-2, 1, 1)$ bolsa, onda bul Leibnic algebrası 2-filiform Leibnic algebrası delinedi.

2. 3-teorema. Meyli L graduirlengen, tuwrı qosındıǵa ajıralmaytuǵın 2-filiform Leibnic algebrası bolsın. Onda L algebra tómenдеgi óz-ara izomorf bolmaǵan algebralardıń birewine izomorf boladı:

$$\mu_1 : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_1] = f_2, \end{cases}$$

$$\mu_2 : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_1] = e_2 + f_2, \\ [e_i, f_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \end{cases} .$$

3-§. Nilpotent Leibnic algebrası hám onıń differentsiyallawı

3. 1-lemma. $\forall i, j \in N$ ushın $[L^{<i>}, L^{<j>}] \subseteq L^{<i+j>}$ orınlı.

Dalilleniwi: $\forall i$ ushın j boyınsha induktsiya metodınan paydalanamız.

$[L^{<i>}, L^{<j>}] \subseteq L^{<i+j>}$ orınlı dep oylap, $j+1$ ushın tekseremiz:

$$[L^{<i>}, L^{<j+1>}] = [L^{<i>}, [L^{<j>}, L^1]] \subseteq [[L^{<i>}, L^{<j>}], L] - [[L^{<i>}, L], L^{<j>}] \subseteq [L^{<i+j>}, L] - [L^{<i+1>}, L^{<j>}] \subseteq L^{<i+j+1>}.$$

Lemma dálillendi.

Nátiyje: $\forall n \in N$ ushın $L^{<n>} = L$ bolsa, onda óń nilpotent túsiniǵı hám nilpotentlik teń kúshli boladı.

3. 2-lemma. Meyli L – sanlı Leibnic algebrası bolsın. Eger L^2 - nilpotent bolsa, onda L -sheshiliwsheń boladı.

Dálilleniwi: L^2 nilpotentliginen L dıń sheshiliwsheńligi ańsat kórinedi. Kerisinshe boljaymız, meyli L -sheshiliwsheń, sheshiliwsheń radikal menen teń kúshli. Sheshiliwsheń algebra teń kushli sheshiliwsheń algebra Lie $R(L)$ ge uxsap. $[R(L), R(L)]$ kóplikte algebranıń nilpotent radikalında $R(L)^*$ bar. Sonıń ushın, $\exists m \in N, \forall m$ ushın $[R_{x_i}, R_{y_j}], x_i, y_j \in L$ kórinisiniń ózgeriwi menen

$$[R_{x_1}, R_{y_1}] \cdot \dots \cdot [R_{x_m}, R_{y_m}] = 0$$

teńlik orınlı boladı. $R_x R_y - R_y R_x = R_{[y,x]}$ dan

$$(-1)^m R_{[x_1, y_1]} \cdot \dots \cdot R_{[x_m, y_m]} = 0.$$

Demek L^2 - nilpotent.

Endi differentsiyallawǵa túsiniǵı berip ótemiz

Bizge tómendegi algebra berilgen bolsın

$$\mu_2 : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, 1 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, f_1] = e_2 + f_2 \\ [e_i, f_1] = e_{i+1}, 2 \leq i \leq n-3 \end{cases}$$

bul 2-filiform Leibnic algebrasınıń differentsiyallawlarınıń keńisligi tómendegishe boladı:

$$Der(\mu_2) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n-2} & b_1 & b_2 \\ 0 & 2a_1 + b_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-3} & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 3a_1 + 2b_1 & a_2 & \cdots & a_{n-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4a_1 + 3b_1 & \cdots & a_{n-5} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-2)a_1 + (n-3)b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a_1 + b_1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2a_1 \end{pmatrix}$$

Dálilleniwi: Meyli μ_2 algebra berilgen bolsın. Bul algebra $\{e_1, f_1\}$ elementler payda etiwshi elementler boladı. Sonıń ushın biz tómendegilerdi belgilep alamız:

$$d(e_1) = \sum_{i=1}^{n-2} a_i e_i + b_1 f_1 + b_2 f_2, \quad d(f_1) = \sum_{i=1}^{n-2} c_i e_i + d_1 f_1 + d_2 f_2$$

differentsiyallawdıń anıqlamasınan tómendegilerdi tabamız:

$$\begin{aligned} d(e_2) &= d([e_1, e_1]) = [d(e_1), e_1] + [e_1, d(e_1)] = \\ &= \left[\sum_{i=1}^{n-2} a_i e_i + b_1 f_1 + b_2 f_2, e_1 \right] + \left[e_1, \sum_{i=1}^{n-2} a_i e_i + b_1 f_1 + b_2 f_2 \right] = \\ &= \sum_{i=1}^{n-3} a_i e_{i+1} + a_1 e_2 + b_1 (e_1 + f_2) = (2a_1 + b_1) e_2 + \sum_{i=2}^{n-3} a_i e_{i+1} + b_1 f_2 \end{aligned}$$

Induktsiyadan tómendegini alamız:

$$d(e_i) = (ia_1 + (i-1)b_1)e_i + \sum_{j=i+1}^{n-2} a_{j-i+2} e_j$$

i ushın duris dep boljap, $i+1$ ushın dálilleyміз:

$$\begin{aligned} d(e_{i+1}) &= d([e_i, e_1]) = [d(e_i), e_1] + [e_i, d(e_1)] = \\ &= \left[(ia_1 + (i-1)b_1)e_i + \sum_{j=i+1}^{n-2} a_{j-i+2} e_j, e_1 \right] + \left[e_i, \sum_{i=1}^{n-2} a_i e_i + b_1 f_1 + b_2 f_2 \right] = \end{aligned}$$

$$= (ia_1 + (i-1)b_1)e_{i+1} + \sum_{j=i+1}^{n-2} a_{j-i+1}e_{j+1} + a_1e_{i+1} + b_1e_{i+1} = ((i+1)a_1 + ib_1)e_{i+1} + \sum_{j=i+2}^{n-2} a_{j-i}e_j$$

Endi tóمندegi differentsiyallawdi qarayiq:

$$\begin{aligned} 0 &= d([f_1, e_1]) = [d(f_1), e_1] + [f_1, d(e_1)] = \\ &= \left[\sum_{i=1}^{n-2} c_i e_i + d_1 f_1 + d_2 f_2, e_1 \right] + \left[f_1, \sum_{i=1}^{n-2} a_i e_i + b_1 f_1 + b_2 f_2 \right] = \sum_{i=2}^{n-2} c_{i-1} e_i \end{aligned}$$

demek, $c_i = 0, 1 \leq i \leq n-3$.

Differentsiyallawdın shártın tóمندegiler ushın teksereyik

$$\begin{aligned} d([e_i, f_1]) &= [d(e_i), f_1] + [e_i, d(f_1)] = \\ &= \left[(ia_1 + (i-1)b_1)e_i + \sum_{j=i+1}^{n-2} a_{j-i+1}e_j, f_1 \right] + [e_i, c_{n-2}e_{n-2} + d_1 f_1 + d_2 f_2] = \\ &= (ia_1 + (i-1)b_1)e_{i+1} + \sum_{j=i+1}^{n-2} a_{j-i+1}e_{j+1} + d_1 e_{i+1} \end{aligned}$$

ekinshi tárepten tóمندegige iye bolamız:

$$d([e_i, f_1]) = d(e_{i+1}) = ((i+1)a_1 + ib_1)e_{i+1} + \sum_{j=i+2}^{n-2} a_{j-i}e_j$$

bunnan tóمندegi teńlikti alamız:

$$d_1 = a_1 + b_1.$$

Endi $d(f_2)$ ni differentsiyallawdan tabamız:

$$\begin{aligned} d(f_2) &= d([e_1, f_1] - e_2) = [d(e_1), f_1] + [e_1, d(f_1)] - d(e_2) = \\ &= \left[\sum_{i=1}^{n-2} a_i e_i + b_1 f_1 + b_2 f_2, f_1 \right] + [e_1, c_{n-2}e_{n-2} + (a_1 + b_1)f_1 + d_2 f_2] - \\ &= -(2a_1 + b_1)e_2 - \sum_{i=2}^{n-3} a_i e_{i+1} - b_1 f_2 = a_1(e_2 + f_2) + \sum_{i=3}^{n-2} a_{i-1} e_i + (a_1 + b_1)(e_2 + f_2) - \\ &= -(2a_1 + b_1)e_2 - \sum_{i=2}^{n-3} a_i e_{i+1} - b_1 f_2 = 2a_1 f_2. \blacksquare \end{aligned}$$

Joqarıdağı tástiyıqlawlardan biz μ_2 algebranın differentsiyallawları keńisliginen tómendegi bazisti tańlasaq

$$\begin{aligned} d_1(e_i) &= ie_i \quad 1 \leq i \leq n-2, \quad d_1(f_1) = f_1, \quad d_1(f_2) = 2f_2, \\ d_2(e_1) &= f_1, \quad d_2(f_1) = f_1, \quad d_2(e_2) = e_2 + f_2, \quad d_2(e_i) = (i-1)e_i, \quad 3 \leq i \leq n-2, \\ d_j(e_i) &= e_{i+j-2}, \quad 3 \leq j \leq n-1, 1 \leq i \leq n-j, \\ d_n(e_1) &= f_2, \quad d_{n+1}(f_1) = e_{n-2}, \quad d_{n+2}(f_1) = f_2, \end{aligned}$$

onda μ_2 algebranın nil-baylanıslı bolmağan differentsiyallawlarının sanı ekige teń, yaǵnıy d_1 hám d_2 ler nil-baylanıslı bolmağan differentsiyallawlar boladı.

Nilradikali μ_2 ge izomorf bolğan sheshiliwsheń Leibnic algebrası nıń tolıqtiriwshi úles keńisliginıń ólshemi $\dim Q \leq 2$ boladı.

3. 1-teorema. $M^{1,\delta}$ hám $M^{2,\lambda}$ algebralardıń differentsiyallawlarının matritsalıq kórinisi tómendegishe boladı:

Eger $\delta = 0$ bolsa,

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_3 & \alpha_1 + \gamma_2 & 2\alpha_1 + \gamma_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_4 & \beta_3 & 2\alpha_1 + \gamma_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-3} & \beta_{n-3} & \beta_{n-4} & \beta_{n-5} & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_{n-2} & \beta_{n-2} & \beta_{n-3} & \beta_{n-4} & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} & \beta_{n-2} & \beta_{n-3} & \cdots & (n-3)\alpha_1 + \gamma_2 & \alpha_{n-2} \\ \alpha_n & \beta_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2\alpha_1 \end{pmatrix}$$

eger $\delta = 1$ bolsa,

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3\alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_3 & 4\alpha_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_4 & \beta_3 & 5\alpha_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-3} & \beta_{n-3} & \beta_{n-4} & \beta_{n-5} & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_{n-2} & \beta_{n-2} & \beta_{n-3} & \beta_{n-4} & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} & \beta_{n-2} & \beta_{n-3} & \cdots & n\alpha_1 & \alpha_{n-2} \\ \alpha_n & \beta_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2\alpha_1 \end{pmatrix}$$

eger $\lambda \neq 0$ bolsa,

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 2\alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & 3\alpha_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & 4\alpha_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-4} & \alpha_{n-5} & \cdots & (n-2)\alpha_1 & b_{n-2} & 0 \\ \alpha_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & 0 \\ \alpha_n & (\lambda+1)\alpha_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n & \alpha_1 + b_n \end{pmatrix}$$

eger $\lambda = 0$ bolsa,

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 2\alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & 3\alpha_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-3} & \alpha_{n-4} & \alpha_{n-5} & \alpha_{n-6} & \cdots & 0 & b_{n-3} & 0 \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-4} & \alpha_{n-5} & \cdots & (n-2)\alpha_1 & b_{n-2} & b_{n-3} \\ \alpha_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & 0 \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n & \alpha_1 + b_n \end{pmatrix}$$

Dálilleniwi: Dálilleniwin $M^{1,0}$ algebra ushın kórsetemiz. Bul algebra da $\{e_1, e_2\}$ elementler payda etiwshi elementler. Sonıń ushın biz

tómendegilerdi belgilep alamız: $d(e_1) = \sum_{t=1}^n \alpha_t e_t$ $d(e_2) = \sum_{t=1}^n b_t e_t$.

Differentsiyallawdıń anıqlamasınan tómendegilerdi tabamız:

$$\begin{aligned} d(e_n) &= d([e_1, e_1]) = [d(e_1), e_1] + [e_1, d(e_1)] = \left[\sum_{t=1}^n \alpha_t e_t, e_1 \right] + \left[e_1, \sum_{t=1}^n \alpha_t e_t \right] = \\ &= 2\alpha_1 e_n + \sum_{t=3}^{n-1} \alpha_{t-1} e_t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(e_3) &= d([e_2, e_1]) = [d(e_2), e_1] + [e_2, d(e_1)] = \left[\sum_{t=1}^n b_t e_t, e_1 \right] + \left[e_2, \sum_{t=1}^n \alpha_t e_t \right] = \\ &= (\alpha_1 + b_2) e_3 + \sum_{t=4}^{n-1} b_{t-1} e_t + b_1 e_n. \end{aligned}$$

Endi tómendegi teńliklerdi kóremiz

$$\begin{aligned} 0 &= d([e_n, e_1]) = [d(e_n), e_1] + [e_n, d(e_1)] = \left[2\alpha_1 e_n + \sum_{t=3}^{n-1} \alpha_{t-1} e_t, e_1 \right] + \\ &+ \left[e_n, \sum_{t=1}^n \alpha_t e_t \right] = \sum_{t=4}^{n-1} \alpha_{t-2} e_t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= d([e_3, e_2]) = [d(e_3), e_2] + [e_3, d(e_2)] = \left[(\alpha_1 + b_2) e_3 + \sum_{t=4}^{n-1} b_{t-1} e_t + b_1 e_n, e_2 \right] + \\ &+ \left[e_3, \sum_{t=1}^n b_t e_t \right] = b_1 e_4 \end{aligned}$$

bulardan tómendegi nátiyjelerge iye bolamız: $b_1 = 0, \alpha_t = 0$

$2 \leq t \leq n-3$. Matematikalıq induktsiya usilinan tómendegini alamız:

$$d(e_i) = ((i-2)\alpha_1 + b_2) e_i + \sum_{t=i+1}^{n-1} b_{t-i+1} e_t, \quad 3 \leq i \leq n-1. \blacksquare$$

4-§. Ápiwayi hám yarım ápiwayi Leibnic algebrasınıń differentsiyali

Ba`zi algebralar ushın lokal differentsiallawlar hám ápiwayi ma`nidegi differentsiallawlar ústpe-úst túsedı.

4. 1-teorema. Eger L shekli ólshemli yarım ápiwayi Lie algebrası bolsa, onda bul algebranıń qálegen lokal differentsiallawı ápiwayi mániidegi differentsiyallaw boladı.

Tómendegi teoremada sl_2 ápiwayi Lie algebrası arqalı payda etilgen ápiwayi Leibnic algebralarınıń anıqlamaları keltirilgen.

4. 2-teorema. Meyli, L algebra $L/I \cong sl_2$ shártti qanaatlandırıwshı $m+4$ ólshemli ápiwayi Leibnic algebrası bolsın. Onda bul algebrada sonday $\{e, h, f, x_0, x_1, \dots, x_m\}$ bazis bar bolıp, bul bazis elementleri ushın tómendegi kóbeytiriw kestesı orınlı boladı:

$$\begin{aligned} [e, h] &= 2e, & [h, f] &= 2f, & [e, f] &= h, \\ [h, e] &= -2e, & [f, h] &= -2f, & [f, e] &= -h, \\ [x_k, h] &= (m-2k)x_k & & k=0, \dots, m, \\ [x_k, f] &= x_{k+1}, & & k=0, \dots, m-1, \\ [x_k, e] &= -k(m+1-k)x_{k-1}, & & k=1, \dots, m. \end{aligned}$$

Usı teoremada keltirilgen algebranıń differentsiallawları tómendegi teoremada keltirilgen.

4. 3-teorema. Meyli, L algebra $L/I \cong sl_2$ shártti qanaatlandırıwshı $m+4$ ólshemli ápiwayi Leibnic algebrası bolsın. Onda bul algebranıń differentsiallawları tómendegishe boladı:

$$d = R_a + \alpha + \Delta,$$

$$a \in \langle e, f, h \rangle, \quad \alpha \langle e, f, h \rangle = 0, \quad \alpha(x_k) = \lambda x_k, \quad 0 \leq k \leq m, \quad \lambda \in C$$

hám

$$m \neq 2 \quad \text{ushın} \quad \Delta(x_k) = 0, \quad \Delta(e) = \Delta(f) = \Delta(h) = 0,$$

$$m = 2 \quad \text{ushın} \quad \Delta(x_k) = 0, \quad \Delta(e) = \mu x_0, \quad \Delta(f) = \mu x_2, \quad \Delta(h) = \mu x_1, \quad \mu \in C$$

Endi faktor algebrası qálegen G ápiwayi Lie algebrasına izomorf bolǵan ápiwayi Leibnic algebralarınń differentsiallawları haqqındaǵı teoremalardı keltiremiz.

4. 4-teorema. Meyli nol xarakteristikalıq F maydan ustindegi L algebra $L/I \cong G$ shártti qanaatlandırıwshı ápiwayi Leibnic algebrası bolsın. Onda bul algebranıń differentsiallawları tómendegishe boladı:

$$d = R_a + \alpha + \Delta,$$

bunda

$$a \in G, \alpha: I \rightarrow I \text{ va } \Delta: G \rightarrow I$$

hámde

$$\alpha([x, y]) = [\alpha(x), y], \quad \forall x, y \in L.$$

bunnan tısqarı $\alpha(I) = 0$ yamasa $\alpha(I) = I$ boladı.

Dálilleniwi. L algebranı ápiwayi Lie algebrası G ha'm I idealnıń yarım tuwrı qosındısı kórinisinde jazıw múmkin:

$$L = G \dot{+} I.$$

L da $L_0 := G, L_1 := I, L_i := 0$ belgilewlerdi kiritemiz, bunda $i > 1$ yamasa $i < 0$. Onda $L = L_0 \oplus L_1$ graduirovkaǵa iye bolamız. Bunnan $DerL$ da tómendegi graduirovkaǵa iye ekenligi kelip shıǵadı:

$$DerL = \oplus D(L)$$

bul jerde

$$Der(L)_i = \{d \in DerL \mid d: L_j \rightarrow L_{i+j}\}$$

Kórinip turǵanıday, $D(L)_i = 0, i \leq 2$ hám $i \geq 2$ ushin

$$Der(L) = Der(L)_{-1} \oplus Der(L)_0 \oplus Der(L)_1$$

Sunday etip, $d \in Der(L)$ differentsiallawdi tómendegi úsh sáwlelendiriw qosındısı kóriniste jazıw múmkin:

$$d = d_{-1} + d_0 + d_1$$

Biz dáslep $d_{-1}(I) \subseteq I$ ańlatpanıń orınlı bolıwın ko`rsetemiz.

$\forall [x, x] \in I$ úshin

$$d_{-1}[x, x] = [x, d_{-1}(x)] + [d_{-1}(x), x] \in I$$

teńlik orınlı.

$$D_{-1}(I) \subseteq G \sim i(DerL)_{-1} = \{d \in Der \mid d : L_j \rightarrow L_{j-1}\}$$

teńlikten, yaǵnıy $d_{-1} : L_1 \rightarrow L_0$ den $d : I \rightarrow G$ ańlatpa kelip shıǵadı.

$$G \cap I = \{0\} \Rightarrow d_{-1} = 0.$$

Sonıń úshin

$$Der(L) = Der(L)_0 + Der(L)_1.$$

Meyli, $x, y \in G$ bolsın. Onda

$$\begin{aligned} d_0([x, y]) + d_1([x, y]) &= d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)] = \\ &= [d_0(x), y] + [x, d_0(y)] + [d_1(x), y] + [x, d_1(y)] \end{aligned}$$

teńlik órinli. Bul bolsa

$$d_0([x, y]) = [d_0(x), y] + [x, d_0(y)]$$

teńlikti beredi. $x \in G, y \in I$ bolsın, onda

$$d_0([x, y]) = [d_0(x), y] = [x, d_0(y)] = 0$$

teńlik orınlı boladı. Sonıń ushın

$$d_0([x, y]) = [d_0(x), y] + [x, d_0(y)].$$

Meyli, $x \in I, y \in G$ bolsın. Onda tómendegi teńlikler orınlı

$$d_1([x, y]) = [d_1(x), y] + [x, d_1(y)] = 0$$

hám

$$d_0([x, y]) = d[x, y] = [d(x), y] + [x, d(y)] = [d_0(x), y] + [x, d_0(y)]$$

Sonıń úshin d_0 sáwlelendiriw L algebranıń differentsiallawı boladı.

Demek, d_1 de differentsiallaw payda etedi. d sáwlelendiriw G Lie algebrasınıń differentsiallawı bolǵanlıǵı hám ápiwayi Lie algebralarınıń differentsiallawları ishki ekenliginen

$$d_0(x) = d(x) = R_a(x), \quad x \in G$$

teńlik kelip shıǵadı. Bunnan bolsa $\alpha = d_0 - R_a$ úshin

$$\alpha(x) := d_0(x) - R_a(x) = \begin{cases} 0, & x \in G \\ \in I, & x \in I. \end{cases}$$

teńlikke iye bolamız.

$$\text{Buǵan kóre } \alpha(I) \subseteq I \subseteq \text{Ann}(L) = \{x \in L \mid [y, x] = 0\} \quad \text{hám}$$

tómendegi teńlik orınlı boladı:

$\alpha([x, y]) = [\alpha(x), y]$, $x, y \in I$ hám $\alpha(I)$ – Lie algebrasında ideal payda etedi. Biz $\Delta = d_1$ ekenin anıqladiq hám teoremanı dálilledik. ■

4. 5-teorema. L – kompleks ápiway Leibnic algebrası bolsın.

Onda L algebranıń d differentsiallawları tómendegi ko`riniste boladı:

$$d = R_a + \alpha + \Delta.$$

Bunda $a \in G$, $\Delta: G \rightarrow I$, $\alpha = \lambda id_{/I}$, $\lambda \in C$.

Dálilleniwi. 4. 4-teoremaǵa ko`re $d = R_a + \alpha + \Delta$. I ideal keltirilmes oń G – modul boladı. 1-den ko`rinip turǵanıday $\alpha: I \rightarrow I$ G – moduldıń gomomorfizmi boladı. Shurdiń lemmasına ko`re

$$\alpha = \lambda id_{/I}, \lambda \in F. \quad \blacksquare$$

4. 6-teorema. L kompleks ápiwayı Leibnic algebrası bolsın. Onda L diń differentsiallawı $d = R_a + \alpha + \Delta$ ko`rinisinde boladı, bunda

$$a \in G, \Delta: G \rightarrow I, \alpha = \lambda id_{/I}, \lambda \in C$$

Qosimsha túrde $n \neq m$ bolsa, $\Delta = 0$. $n = m$ bolsa, $\Delta(G) = I$ $\Delta(G) = 0$.

Yarım ápiwayı Leibnic algebrasın ápiwayı Leibnic algebralarınń tuwrı qosındısı kóriniste jazıw múmkin.

4. 7-teorema. $L = \bigoplus_{i=1}^s L_i$ yarım ápiwayı Leibnic algebrasınıń differentsiyallawı L_i ápiwayı Leibnic algebraları differentsiyallawlarınıń qosındısı kóriniste boladı, yaǵniy:

$$d = \sum_{i=1}^s d_i,$$

bundaǵı d_i - 3. 4 -teoremada keltirilgen.

Dálilleniwi. L_i úshin $L_i = G_i + I_i$. Belgili $G = \bigoplus_{i=1}^s G_i$ hám $I = \bigoplus_{i=1}^s I_i$. Biz yarım ápiwayı L Leibnic algebrasınıń d differentsiallawı tómendegishe bolıwın bilemiz:

$$d = R_a + \alpha + \Delta.$$

Bunda $a \in G$ $\alpha: I \rightarrow I$, $\Delta: G \rightarrow G$, $\alpha([x, y]) = [\alpha(x), y]$,

$\forall x, y \in L$ $\alpha_{i,j} = \alpha|_{I_i}$ bolsın. $\alpha|_{I_i}: I_i \rightarrow I_j$. hám $\alpha = \sum_{i,j=1}^s \alpha_{i,j}$.

Bunnan $\alpha_{i,j} = 0 (i \neq j)$ ekenligi kelip shıǵadı. Onda

$$[\alpha_{i,j}(I_i), G_j] = [\alpha(I_i), G_j] = \alpha([I_i, G_j]) = 0$$

sol sebepli $\alpha = \sum_{i=1}^s \alpha_{i,i}$ boladı. Bunnan tısqarı hár bir I_j keltirilmes G_j –

modul úshin

$$\alpha_{j,j}([x,y]) = [\alpha_{j,j}(x), y], \quad x \in I_j, \quad y \in G_j.$$

onda Shurdiń lemmasına ko`re

$$\alpha_{j,j} = \lambda_j id|_{I_j}, \quad 1 \leq j \leq s \quad (\lambda_j \in F \text{ ushin})$$

teńlik orinlanadi.

Endi $\Delta = \sum_{i,j=1}^s \Delta_{i,j}$ ni kórip shigamız.

$$\Delta_{i,j} = \Delta|_{G_i} : G_i \rightarrow I_j$$

$$[\Delta_{i,j}(G_i), G_j] = [\Delta(G_i), G_j] = [\Delta(G_i), G_j] + [G_i, \Delta(G_j)] = \Delta([G_i, G_j]) = 0,$$

ańlatpa arqali $\Delta_{i,j} = 0, i \neq j$ teńlikke iyemiz. Sol sebepli $\Delta = \sum_{i=1}^s \Delta_{i,i}$. ■

4. 8-teorema. L/I faktor algebra yarım ápiwayi Lie algebrası G ğa izomorf bolğan yarım ápiwayi kompleks Leibnic algebrası bolsın. Onda L diń differentsiallawları $d = R_a + \alpha + \Delta$ ko`rinisinde bolıp, bunda

$$a \in G, \alpha : I \rightarrow I, \Delta : G \rightarrow G \text{ ha'm } \alpha([x,y]) = [\alpha(x), y], \quad \forall x, y \in L.$$

Bunnan tısqarı I moduldı s te keltirilmes $G -$ modullar $(I_i, i = \overline{1, s})$ niń tuwrı qosındısı kórinisinde jazıw múmkin hám

$$\alpha = \sum_{i,j=1}^s \alpha_{i,j}$$

bu jerde

$$\alpha_{i,j} : I_i \rightarrow I_j, \quad 1 \leq i, j \leq s.$$

$$\alpha_{i,j} = \lambda_i id|_{I_i}, \quad 1 \leq i \leq s.$$

5-§. Yarım ápiwayi Leibnic algebrası avtomorfizmleri

Bul poragrafta biz yarım ápiwayi Leibnic algebraları L diń avtomorfizmleriniń $Aut(L)$ gruppaların anıqlaymız.

Endi bul paragrafta biz $L = S \times I$ algebrasın yarım ápiwayi Leibnic algebra dep boljaymız.

$$p_1 : L \rightarrow S, \quad x + y \mapsto x, \quad \forall x \in S, \quad y \in I;$$

$$p_2 : L \rightarrow I, \quad x + y \mapsto y, \quad \forall x \in S, \quad y \in I.$$

Meyli φ L degi $\varphi_1 = \varphi/I$, $\varphi_1 = p_1 \circ \varphi/s$ hám $\varphi_2 = p_2 \circ \varphi/s$ kórinistegi avtomorfizmi bolsın. $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ hám $\varphi(y) = \varphi_1(y) \quad \forall x \in S, y \in I$ ekenligi belgili.

Hár qanday S -modul V hám hár qanday $\sigma \in Aut(S)$ ushın jańa S -modulin $V^\sigma = V$ menen $v \cdot x = [v, x]' = v\sigma(x)$, $\forall v \in V, x \in S$ háreketi menen anıqlaymız.

5. 1-lemma.

- $\varphi_1 \in Aut(S)$;
- $\varphi_1 - I$ dan I^{φ_1} ge S -modulli izomorfizm;
- $\varphi_2 - S$ dan I^{φ_1} ğa S -modulli gomomorfizm;

Dálilleniwi: Meyli $x, y \in S$, bolsın

$$\begin{aligned} \varphi_1([x, y]) + \varphi_2([x, y]) &= \varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] = \\ &= [\varphi_1(x) + \varphi_2(x), \varphi_1(y) + \varphi_2(y)] = [\varphi_1(x), \varphi_1(y)] + [\varphi_2(x), \varphi_2(y)] \end{aligned}$$

bul degeni

$$\begin{aligned} \varphi_1([x, y]) &= [\varphi_1(x), \varphi_1(y)] \\ \varphi_2([x, y]) &= [\varphi_2(x), \varphi_2(y)]. \end{aligned}$$

$\forall x \in S, i \in I$ ushın,

$$\varphi_I([i, x]) = \varphi([i, x]) = [\varphi(i), \varphi(x)] = [\varphi_I(i), \varphi_I(x)]. \blacksquare$$

Meyli $L = G + I$ ápiwayi Leibnic algebrası bolsın, bul jerde G ápiwayi Lie algebrası, I onıń ońnan keltirilmeytuǵın moduli.

L de anıqlanǵan φ avtomorfizmin qarastıramız. L diń elementleriniń kvadratlarınan dúzilgen idealı $\text{span}\{[x, x] : x \in L\}$ ge sáykes keledi. Onda

biz $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i [x_i, x_i] \in I$ ushın tómendegige iye bolamız:

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i [x_i, x_i]\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi[x_i, x_i] = \sum_{i=1}^n \lambda_i [\varphi(x_i), \varphi(x_i)] = \sum_{i=1}^n \lambda_i [y_i, y_i],$$

yaǵniy $\varphi(I) \subseteq I$.

Endi meyli $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i [y_i, y_i] \in I$ idealdıń erikli túrde tańlap alınǵan elementi bolsın. φ avtomorfizm bolǵanı ushın qálegen $y_i \in L$ element ushın sonday $x_i \in L$ elementi tabılıp, $\varphi(x_i) = y_i$ teńlik orınlanadı. Onda biz tómendegi nátiyjeni alamız:

$$y = \sum_{i=1}^n \lambda_i [y_i, y_i] = \sum_{i=1}^n \lambda_i [\varphi(y_i), \varphi(y_i)] = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi([x_i, x_i]) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i [x_i, x_i]\right).$$

Demek qálegen $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i [x_i, x_i] \in I$ element $\varphi(x) = y$ kóriniste jazıladı.

Onda $I \subseteq \varphi(I)$ bolıp, bunnan $\varphi(I) = I$ ekeni kelip shıǵadı.

Meyli L Leibnic algebrasınıń barlıq avtomorfizmleriniń kópigin $\text{Aut}(L)$ arqalı belgileyik. Hár bir $\varphi \in \text{Aut}(L)$ mina $\varphi = \varphi_{G,G} + \varphi_{G,I} + \varphi_{I,I}$ qosındı túrinde jazılatuǵının kórsetemiz, bul jerdegi $\varphi_{G,G} : G \rightarrow G - G$

diñ ústindegi avtomorfizm, $\varphi_{G,I} : G \rightarrow I$ - G -modul gomomorfizmi, $\varphi_{I,I} : I \rightarrow I - I$ diñ G -modul izomorfizmi. Dara jaǵdayda,

$$\varphi(x+i) = \varphi_{G,G}(x) + \varphi_{G,I}(x) + \varphi_{I,I}(x), x+i \in G+I.$$

5. 2-lemma. Meyli $L = G + I$ ápiwayi kompleks Leibnic algebrası hám $\varphi \in \text{Aut}(L)$ bolsın. Onda, eger $\dim G \neq \dim I$ bolsa,

$$\varphi = \varphi_{G,G} + \varphi_{I,I}$$

hám $\dim G = \dim I$ bolsa,

$$\varphi = \varphi_{G,G} + \omega\theta \circ \varphi_{G,G} + \varphi_{I,I}$$

boladı.

Dálilleniwi: Meyli $x, y \in G$ elementlerin alayıq, onda

$$\begin{aligned} \varphi_{G,G}([x, y]) + \varphi_{G,I}([x, y]) &= \varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] = \\ &= [\varphi_{G,G}(x) + \varphi_{G,I}(x), \varphi_{G,G}(y) + \varphi_{G,I}(y)] = \\ &= [\varphi_{G,G}(x), \varphi_{G,G}(y)] + [\varphi_{G,I}(x), \varphi_{G,G}(y)]. \end{aligned}$$

Bul mınanı ańlatadı:

$$\varphi_{G,G}([x, y]) = [\varphi_{G,G}(x), \varphi_{G,G}(y)], \quad (1)$$

$$\varphi_{G,I}([x, y]) = [\varphi_{G,I}(x), \varphi_{G,G}(y)]. \quad (2)$$

Tómendegi sáwlelendiriwdi qaraymız:

$$\psi = \varphi_{G,G} + \varphi_{I,I}$$

bul sáwlelendiriw avtomorfizm boladı. Haqıyqatında da,

$$\begin{aligned} \psi([x+i, y+j]) &= \psi([x, y] + [i, y]) = \varphi_{G,G}([x, y]) + \varphi_{I,I}([i, y]) = [\varphi_{G,G}(x), \varphi_{G,G}(y)] + \\ &+ \varphi([i, y]) = [\varphi_{G,G}(x), \varphi_{G,G}(y)] + [\varphi(i), \varphi(y)] = [\varphi_{G,G}(x), \varphi_{G,G}(y)] + [\varphi_{I,I}(i), \varphi_{G,G}(y) + \varphi_{G,I}(y)] = \\ &= [\varphi_{G,G}(x), \varphi_{G,G}(y)] + [\varphi_{I,I}(i), \varphi_{G,G}(y)] = [\varphi_{G,G}(x) + \varphi_{I,I}(i), \varphi_{G,G}(y) + \varphi_{I,I}(j)] = [\psi(x+i), \psi(y+j)]. \end{aligned}$$

Endi $\eta = \varphi \circ \psi^{-1}$ avtomorfizmin qarastıramız. Onda

$$\eta(x+i) = x + \eta_{G,I}(x) + i,$$

bul jerde, $\eta_{G,I} = \varphi_{G,I} \circ \varphi_{G,G}^{-1}$. (1) hám (2) qatnaslardan tómendegige iye bolamız:

$$\eta_{G,I}([x, y]) = [\eta_{G,I}(x), y]$$

Bunnan $\eta_{G,I}$ niń G di I ge sáwlelendiretuǵın G -modul gomomorfizm ekeni kelip shıǵadı.

1-jagday. Meyli $\dim G \neq \dim I$ bolsın. Onda Shur lemmasınan $\eta_{G,I} = 0$ bolıwı kelip shıǵadı. $\eta_{G,I} = \varphi_{G,I} \circ \varphi_{G,G}^{-1}$ ekenin esapqa alsaq, onda $\varphi_{G,I} = 0$ boladı. Bunnan tómendegi teńlikke iye bolamız:

$$\varphi = \varphi_{G,I} + \varphi_{I,I}.$$

2-jagday. Meyli $\dim G = \dim I$ bolsın. Bul jagdayda jáne Shurdiń lemmasınan $\eta_{G,I} = \omega\theta$ teńlikke iye bolamız, bul jerde $\omega \in \mathbb{C}$. Onda $\varphi_{G,I} = \eta_{G,I} \circ \varphi_{G,G}$ ekeninen $\varphi_{G,I} = \omega\theta \circ \varphi_{G,G}$ qatnasqa iye bolamız hám bunnan

$$\varphi = \varphi_{G,G} + \omega\theta \circ \varphi_{G,I} + \varphi_{I,I}. \blacksquare$$

Endi biz bul paragraftıń tiykarǵı nátiyjesin keltiremiz:

Teorema 5. 1. $L = S \times I$ yarım ápiwayi Leibnic algebrası bolsa, $Aut(L) = Aut(L)_S \times Aut(L)_0$ orınlı boladı.

Dálilleniwi: Meyli $\varphi \in Aut(L)$. $\psi(x+i) = \varphi_1(x) + \varphi_I(i)$, $x+i \in S+I$ dep alamız. Bunda ψ avtomorfizm ekenligin kórsetemiz. Haqıyqattanda

$$\begin{aligned} \psi([x+i, y+j]) &= \psi([x, y] + [i, y]) = \varphi_1([x, y]) + \varphi_I([i, y]) = \\ &= [\varphi_1(x), \varphi_1(y)] + \varphi([i, y]) = [\varphi_1(x), \varphi_1(y)] + [\varphi(i), \varphi(y)] = \\ &= [\varphi_1(x), \varphi_1(y)] + [\varphi_I(i), \varphi(y) + \varphi_I(y)] = [\varphi_1(x) + \varphi_I(i), \varphi_1(y) + \varphi_I(j)] = \\ &= [\psi(x+i), \psi(y+j)]. \end{aligned}$$

Bunnan $\psi \in Aut(L)_S$.

Endi $\eta = \psi^{-1} \circ \varphi$ avtomorfizmin kórip shıǵamız. $\eta(x+i) = x + \varphi_I^{-1} \varphi_2(x) + i$ bolǵanlıqtan $\eta = \psi^{-1} \circ \varphi \in \text{Aut}(L)_0$ ekenligi kelip shıǵadı. $\text{Aut}(L) = \text{Aut}(L)_S \times \text{Aut}(L)_0$ ekeninen $\varphi = \psi \circ \eta$ kelip shıǵadı. ■

Endi bir neshe áhmiyetli lemmalardıń dálilleniwleri menen tanısamız:

5. 3-lemma. Meyli $\varphi \in \text{Aut}(L)$ bolsın. Onda

- a) eger $\varphi_{G,G} = id_G$ bolsa, onda $\varphi_{I,I} = \lambda id_I$;
- b) eger $\varphi_{I,I} = id_I$ bolsa, onda $\varphi_{G,G} = id_G$ boladı.

Dálilleniwi: a) (2) niń dálilleniwine uqsas barlıq $i \in I, x \in G$ ushın

$$\varphi_{I,I}([i, x]) = [\varphi_{I,I}(i), \varphi_{G,G}(x)] = [\varphi_{I,I}(i), x]$$

qatnasqa iye bolamız. Shur lemmasınan $\varphi_{I,I} = \lambda id_I$ qatnasti alamız.

b) Barlıq $i \in I, x \in G$ ushın

$$[i, x] = \varphi_{I,I}([i, x]) = [\varphi_{I,I}(i), \varphi_{G,G}(x)] = [i, \varphi_{G,G}(x)] \quad \text{ekenliginen}$$

$[i, \varphi_{G,G}(x) - x] = 0$ bolatuǵınlıǵı kelip shıǵadı. Onda $\varphi_{G,G}(x) = x$, yaǵnıy

$\varphi_{G,G} = id_G$ boladı.

5. 4-lemma. Meyli $L = G + I$ ápiwayi kompleks Leibnic algebrası hám $\dim G = \dim I$ bolsın. Onda hár bir $\varphi \in \text{Aut}(L)$ avtomorfizmi

$$\varphi = \varphi_{G,G} + \omega \theta \circ \varphi_{G,G} + \lambda \theta \circ \varphi_{G,G} \circ \theta^{-1}$$

kóriniste jazıp kórsetiledi, bul jerde $\omega \in \mathbb{C}$ hám $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$.

Dalilleniwi: Meyli G diń avtomorfizmi $\varphi_{G,G}$ bolsın. Meyli biz $\phi = \varphi_{G,G} + \lambda \theta \circ \varphi_{G,G} \circ \theta^{-1}$ niń avtomorfizmi ekenligin kórseteyik. Bul hár bir $i \in I, x \in G$ elementi ushın $\phi([i, x]) = [\phi(i), \phi(x)]$ qatnasın tekseriwdi

bildiredi. θ niń G - modul izomorfizm ekenliginen, $\theta\left([\theta^{-1}(i), x]\right) = [i, x]$ ekeni kelip shıǵadı. Bunnan biz tómendegige iye bolamız:

$$\begin{aligned}\phi([i, x]) &= \lambda\theta \circ \varphi_{G,G} \circ \theta^{-1}([i, x]) = \lambda\theta \circ \varphi_{G,G} \circ [\theta^{-1}(i), x] = \lambda\theta \circ \varphi_{G,G}([\theta^{-1}(i), x]) = \\ &= \lambda\theta \circ \varphi_{G,G} \circ [\theta^{-1}(i), x] = \lambda\theta\left([\varphi_{G,G}(\theta^{-1}(i)), \varphi_{G,G}(x)]\right) = [\lambda\theta \circ \varphi_{G,G} \circ \theta^{-1}(i), \varphi_{G,G}(x)] =\end{aligned}$$

$$\text{Endi mina } \varphi = \varphi_{G,G} + \omega\theta \circ \varphi_{G,G} + \varphi_{I,I}$$

sáwlelendiriwın qarastramız. Tómendegishe belgilewler kirgizemiz:

$$\psi = \varphi_{G,G} + \varphi_{I,I}, \quad \phi = \varphi_{G,G} + \theta \circ \varphi_{G,G} \circ \theta^{-1} \quad \text{hám} \quad \eta = \psi \circ \phi^{-1}.$$

Onda $\eta = id_G + \eta_{I,I}$ boladı hám bunnan lemma 5. 2 boyınsha $\eta_{I,I} = \lambda id_I$ ekeni kelip shıǵadı. Olay bolsa

$$\psi = \eta \circ \phi = (id_G + \lambda id_I) \circ (\varphi_{G,G} + \theta \circ \varphi_{G,G} \circ \theta^{-1}) = \varphi_{G,G} + \lambda\theta \circ \varphi_{G,G} \circ \theta^{-1}.$$

Demek $\varphi = \varphi_{G,G} + \omega\theta \circ \varphi_{G,G} + \lambda\theta \circ \varphi_{G,G} \circ \theta^{-1}$. ■

5. 5-lemma. Meyli $L = G + I$ ápiwayi kompleks Leibnic algebrası hám $\dim G = \dim I, \dim H \geq 2$ bolsın, bunda $H \subset G$ Kartan úles algebrası. Sonday-aq $\varphi \in Aut(L)$ avtomorfizmi $\varphi(h_0 + i_0) = h_0 + i_0$ shártin qanaatlandıradı dep uyǵarayıq. Onda $\varphi = id_L$ boladı.

Eskertiw. 5.5-lemma $\dim H = 1$ bolǵan algebralar ushın duris emes. Bir ólshemli Kartan úles algebrası bar bolǵan hám $\dim G = \dim I$ bolǵan ápiwayi Leibnic algebrası birden-bir boladı. Bul 6 ólshemli ápiwayi Leibnic algebrası

$$L = sl_2 + span\{x_0, x_1, x_2\} = span\{h, e, f, x_0, x_1, x_2\},$$

sonday-aq L degi bazis vektorlardıń nollık emes kóbeymesi tómendegishe kórsetiledi:

$$[x_k, e] = -k(3-k)x_{k-1}, \quad k \in \{1, 2\},$$

$$[x_k, f] = x_{k+1}, \quad k \in \{1, 2\},$$

$$[x_k, h] = (2 - 2k)x_k, \quad k \in \{0, 1, 2\}$$

$$[e, f] = h, \quad [h, e] = -2e, \quad [h, f] = 2f,$$

$$[f, e] = -h, \quad [e, h] = 2e, \quad [f, h] = -2f.$$

sl_2 – modul izomorfizmi $\theta: sl_2 \rightarrow I$ bilay aniqlanadi:

$$\theta(h) = 2x_1, \quad \theta(e) = 2x_0, \quad \theta(f) = x_2.$$

Meyli $\varphi(h_0 + i_0) = h_0 + i_0$ shártin qanaatlandiratuğın $\varphi \in Aut(L)$ avtomorfizmin qarayıq, bunda $h_0 = h, i_0 = x_1 + x_0 + x_2$. Onda $\varphi = id_L$ yamasa

$$\varphi = \varphi_{G,G} + \theta \circ \varphi_{G,G} - \theta \circ \varphi_{G,G} \circ \theta^{-1} \quad (3)$$

boladı, bul jerde

$$\varphi_{G,G}(h) = h, \varphi_{G,G}(e) = -e, \varphi_{G,G}(f) = -f.$$

Meyli $\varphi = \varphi_{G,G} + \omega\theta \circ \varphi_{G,G} + \lambda\theta \circ \varphi_{G,G} \circ \theta^{-1}$ bolsın. Onda

$\varphi(h_0 + i_0) = h_0 + i_0$ teńlikten $\varphi_{G,G}(h) = h$ hám

$\omega\theta(h) + \lambda\theta(\varphi_{G,G}(\theta^{-1}(i_0))) = i_0$ qatnaslarına iye bolamız. Tómenдеgi

qásiyetti keltireyik:

Meyli $\varphi \in Aut(L)$ avtomorfizmi $\varphi(h_0) = h_0$, bul jerde $h_0 \in H$ kushli regulyarlıq noqat. Onda

a) $\varphi(e_\alpha) = t_\alpha e_\alpha$ hám $\varphi(e_{-\alpha}) = t_\alpha^{-1} e_{-\alpha}$, bul jerde barlıq $\alpha \in \Phi$ ushın

$$t_\alpha \in \mathbb{C};$$

b) Barlıq $h \in H$ ushın $\varphi(h) = h$ boladı.

Bul qásiyetke muwapiq

$$\varphi_{G,G}(h) = h, \varphi_{G,G}(e) = te, \varphi_{G,G}(f) = t^{-1}f.$$

Olay bolsa

$$x_1 + x_0 + x_2 = i_0 = \omega\theta(h) + \lambda\theta\left(\varphi_{G,G}\left(\theta^{-1}(i_0)\right)\right) = (2\omega + \lambda)x_1 + \lambda tx_0 + \lambda t^{-1}x_2$$

yamasa

$$2\omega + \lambda = 1, \lambda t = 1, \lambda t^{-1} = 1.$$

1-jagday. $\lambda = t = 1$. Bul jagdayda $\omega = 0$. Bunnan $\varphi_{G,G} = id_G$, onda $\theta \circ \varphi_{G,G} \circ \theta^{-1} = id_I$. Solay etip, $\varphi = id_L$.

2-jagday. $\lambda = t = -1$. Bul jagdayda $\omega = 1$ bolip, biz (3) korinistegi avtomorfizmge iye bolamiz.

Juwmaqlaw

Bul pitkeriw qánigelik jumısında bir qansha ádebiyatlar hám maqalalardan paydalanılǵan halda ápiwayi hám yarım ápiwayi Leibnic algebraları, onıń differentsiyallawı hám yarım ápiwayi Leibnic algebraları avtomorfizmleri úyrenildi hám Lie algebraları, ápiwayi, yarım ápiwayi Lie algebraları hám Lie algebra idealları, Lie algebralarınıń ishki differentsiyallawlarınan paydalanılǵan halda úyrenip shıǵıldı. Bunnan tısqarı usı pitkeriw qánigelik jumısında anıqlamalar mısallar hám teoriyalardıń dálilleniwi menen tanısip shıqtıq. Bul teoriyalar ilim hám texnikada júda úlken áhmiyetke iye, sebebi: Leibnic algebraları Lie algebralarınıń kommutativ emes analogi bolǵanı ushın, bul algebrada alınǵan nátiyjeler bir qansha ulıwmalıq xarakterge iye.

PAYDALANILGAN ÁDEBIYATLAR

1. Sh. A. Ayupov, K. K. Kудaybergenov, B. A. Omirov., Local and 2-local derivation and automorphisms on simple Leibniz algebras. // *arXiv: 1703.10506v2. [math. RA]* 8 Sep 2017.
2. Ayupov Sh. A, Kудaybergenov K. K., Local derivations on finite dimensional Lie algebras. // *Linear algebra and its Applications*, 493(2016) p. 381-398.
3. Ayupov Sh. A, Kудaybergenov K. K, Rakhimov I. S., 2-Local derivations on finite dimensional Lie algebras. // *Linear algebra and its Applications*, 474(2015) p. 1-11.
4. Ayupov Sh. A., Kудaybergenov K. K., Rakhimov I. S., 2-Local derivations on finite-dimensional Lie algebras, *Linear Algebra Appl.*, 474(2015), 1-11.
5. Ayupov Sh. A., Omirov B. A. On some classes of nilpotent Leibniz algebras, *Siberian Math. J.*, 42 (2001) 15-24.
6. Barnes D. W., On Levi's theorem for Leibniz algebras. // *Bull Aust Math Soc.* 2012;86(2):184–185.
7. Loday J. L., Pirashvili T. Leibniz representations of Leibniz algebras, *J. Algebra*, 181 (1996) 414-425.
8. Rakhimov I. S., Omirov B. A., Turdibaev R. M. On descriptions of Leibniz algebras corresponding to 2 sl, *Algebr. Represent. Theory*, 16 (2013) Issue 5, 1507-1519.
9. Rakhimov I. S., Másutova K. K., Omirov B. A., On derivations of semisimple Leibniz algebras. // *Bulliten of the Malaysian Mathematical sciences Society.* 2015.
10. Аюпов Ш. А., Омиров Б. А. О некоторых классах нильпотентных алгебр Лейбница. // *Сиб. Мат. Журнал*, –2001. Т. 42. – С. 18-29.
11. Худойбердиев А. Х., Султонова Д. Ю., О локальных дифференцирований разрешимых алгебр Ли. // *Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения.* Тошкент, 15-17 декабрь. 2017 й

12. I. S. Rakhimov, K. K. Másutova, B. A. Omirov, On derivations of semisimple Leibniz algebras. // *Bulliten of the Malaysian Mathematical sciences Society*. 2015.
13. Sulstonova D. Y., Sodda Leybnits algebra larining lokal differensiallashi. // *Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения*. Тошкент, 15-17 декабрь. 2017 й (222-b).
14. Loday J. L. Une version non commutative des algèbres de Lie. // les algèbres de Leibniz. *Enseign. Math.* – 1993. - Vol. 39. – P. 269-293.