

**ÓZBEKISTAN RESPUBLIKASÍ JOQARÍ HÁM ORTA ARNAWLÍ
BILIMLENDIRIW MINISTRLIGI**

**BERDAQ ATÍNDAĞÍ QARAQALPAQ MÁMLEKETLIK
UNIVERSITETI**

Funkcionallıq analiz, algebra hám geometriya kafedrası

Fizika-matematika fakulteti

«Matematika» tálim baǵdarınıń 4-kurs studentı

Saliev Islamnıń

«Metabellik gruppalar kóptúrliliginiń bazıbir qásiyetleri»

atamasındaǵı

PITKERIW QÁNIYGELIK JUMÍSÍ

Ilimiy basshısı:

doc. Allambergenov X.S.

Kafedra bashlıǵı:

f.m.i.d. Kudaybergenov K. K.

Nókis 2017

Mazmunı

Kirisiw.....	3
§1. Tiýkargı teoriyalıq maǵlıwmatlar.....	5
§2. Gruppalar kóptúrliligi.....	15
§3. Kóptúrlilikler algebrası.....	23
§4. Metabellik gruppalar kóptúrliliginiń bazıbir qásiyetleri.....	31
Juwmaq.....	40
Paydalanılǵan ádebiyatlar.....	41

Kirisiw

Bul pitkeriw qániygelik jumısı gruppalar teoriyasınıń jasawshı kóplik hám anıqlawshı qatnaslar arqalı anıqlanatuǵın gruppalarǵı úyrenetuǵın bólimi-kombinatorlıq gruppalar teoriyasına baylanıslı gruppalar kóptúrliligin úyreniwge arnalǵan. Barlıq gruppalar klasında belgili bir qatnaslardı qanaatlandıratuǵın úles klası gruppalar kóptúrliligi dep ataladı. Házirge kelip kóp úyrenilgen gruppalar kóptúrliliginiń mısalları sıpatında kommutativ gruppalar kóptúrliligin ($[x,y]=1$), Bernsayd kóptúrliligin ($x^n=1$), metabellik gruppalar kóptúrliligin ($[x_1,x_2].[x_3,x_4]=1$) hám taǵı basqa kóptúrliliklerdi kórsetiw múmkin.

Gruppalar kóptúrliligin sistemalı úyreniwge hám rawajlandırıwǵa úlken úles qosqan matematiklerden, Neyman, Xoll, Malcev, Kurosh hám taǵı basqalardı jáne de olardıń miynetlerin kórsetiw múmkin [1-5].

Gruppalar kóptúrliligi verbal úles gruppa túsiniǵı menen tıǵız baylanıslı. Gruppalarǵıń hár qıylı kóptúrliligindeǵı verbal úles gruppalarǵı úyreniwge baylanıslı materiallardı [2], [6-10] miynetlerden tabıw múmkin.

Bul pitkeriw qániygelik jumısı metabellik gruppalar kóptúrliliginiń bazıbir qásiyetlerin úyreniwge arnalǵan bolıp kirisiw, tórt paragraf, juwmaq hám paydalanılǵan ádebiyatlar diziminen turadı.

Jumıstıń kirisiw bóliminde temanıń ulıwma sıpatlaması, onıń qoyılıw áhmiyeti hám tema boyınsha izertlewlerge qısqasha sholıw berilgen.

Pitkeriw qániygelik jumısınıń birinshi paragrafı gruppalar teoriyası boyınsha jumısta qollanılatuǵın túsiniqler, anıqlamalar, belgilewler hám tastıyıqlawlar berilgen.

Jumıstıń ekinshi paragrafında gruppalar kóptúrlilikleriniń anıqlaması, hár qıylı anıqlaw usılları, verbal úles gruppalar olardıń mısalları hám gruppalar kóptúrliligine baylanıslı bazıbir tastıyıqlawlar keltirilgen.

Pitkeriw qániygelik jumısınıń úshinshi paragrafı kóptúrlilikler algebrası dep atalǵan bolıp, onda kóptúrliliklerdiń kóbeymesi, kesispesi, birikpesi hám basqada ámeller sonday-aq bul ámellerdiń qásiyetleri úyrenilgen.

Jumıstıń tórtinshi paragrafı metabellik gruppalardıń qásiyetlerin úyreniwge arnalǵan bolıp, onda metabellik gruppalardıń bazisine baylanıslı, metabellik gruppalardı ekinshi tártipli matricalarǵa sáwlelendiriwge baylanıslı, bazislik kommutatorlarǵa baylanıslı qásiyetleri úyrenilgen.

Pitkeriw qániygelik jumısınıń juwmaq bóliminde qoyılǵan máseleniń sheshiliw dárejesi, alınǵan nátiyjeler hám olardı ámeliy iskerlikte qollanıw múmkinshilikleri haqqında sóz etilgen.

Jumıstıń eń sońında on atamadan ibarat paydalanılǵan ádebiyatlar dizimi keltirilgen.

§1. Tiykargı teoriyalıq maǵlıwmatlar

Gruppanıń arnawlı bólimleriniń bayanlawdı gruppanıń anıqlaması hám tiykargı qásiyetlerinen baslaǵan maqsetke muwapıq. Sonlıqtan biz bul paragrafta pitkeriw qániygelik jumısında qollanılatuǵın tiykargı túsiniqlerge toqtap ótemiz.

Qálegen matematikalıq teoriya eń sońında kóplik hám onıń ústinde anıqlanǵan funkciyalardı úyreniwge alıp klinedi. Egerde f funkciyanıń argumentleri M kópliginen mánisler qabıl etkende funkciyanıń mániside usı kóplikke tiyisli bolsa, M kópliginde algebralıq operaciya anıqlanǵan delinedi. Algebralıq operaciyalardı úyrenetuǵın pán algebra delinedi. Bul máseleni úyreniwge izomorfizm túsiniǵı qollanıladı. Meyli bizge algebralıq operaciylar anıqlanǵan eki kóplik berilgen bolsın. Egerde bul kóplikler hám operaciylar arasında óz-ara bir mánisli sáykeslik ornatılǵan bolsa, sáykes operaciylardıń argumentleriniń sanı teń bolǵanda olardıń qabıl etetuǵın mánisleride birdey bolsa, bul kóplikler óz-ara izomorf delinedi.

Izomorf obiektler operaciylar maǵanasında birdey dúziliske iye, sonlıqtan olardı algebrada birdey esaplaydı.

Algebralıq operaciylardıń bazıbir túrleri matematikada jiyi ushırasatuǵın bolǵanlıqtan olardı úyreniw óz aldına teoriyanıń predmeti bolıp qalǵan. Gruppalar teoriyasınıń predmeti-gruppa túsiniǵı solardıń birinen esaplanadı. Gruppa bazıbir aksiomalardı qanaatlandıırıwshı binarlıq algebralıq operaciya anıqlanǵan kóplik bolıp tabıladı.

Elementlerdiń x, y jubına sáykes keletuǵın f binarlıq operaciyasınıń mánisi $f(x, y)$ túrinde emes, al xy túrinde jazǵan qolaylı, sebebi bul úsh simboldı ekonomlaydı hám sanlar ústindegi operaciylardıń kanonikalıq jazılıwı menen sáykes keledi.

Gruppalar teoriyasında binarlıq operaciyanı kóbeytiw dep ataydı hám tochka arqalı belgileydi. Bazıbir jaǵdaylarda $*, \circ$ h.t.b. belgiler paydalanıladı.

Operaciyanı točka arqalı belgilew multiplikativ jazıw dep, al qosıw arqalı jazıw additiv jazıw dep ataladı.

Аныqlama: Бинарлық алгебралық operaciya анықланған G көпliğінде төмендегі аксиомалар орынласа группа делінеді:

1. Operaciya associativ. Яғнйы қалеген $a, b, c \in G$ elementleri ushın

$$(ab)c = a(bc)$$

2. Operaciyaǵa baylanıslı birlik element bar, yaǵnıy G көпliğinde sonday l elementi tabılıp қалеген $a \in G$ elementi ushın

$$al = la = a$$

3. Operaciyaǵa baylanıslı kerı element bar, yaǵnıy қалеген $a \in G$ elementi ushın $x \in G$ elementi tabılıp

$$ax = xa = l$$

Bazıbir $n > 0$ ushın $a^n = l$ bolıwı mómkin. Bul teńlikti qanaatlandıratuǵın eń kishi n sanı a elementiniń tártibi yamasa periodı delinedi hám $|a|$ dep belgilenedi. Eger қалеген $n > 0$ ushın $a^n \neq l$ bolsa a elementiniń tártibi sheksiz delinedi hám $|a| = \infty$ dep jazıladı.

Egerde G gruppasınıń qálegen birden ózgeshe elementiniń tártibi sheksiz bolsa группа periodsız группа dep, al kerisinshe barlıq elementleriniń tártibi shekli bolsa periodlı группа delinedi. Egerde G gruppasınıń elementleriniń tártipleriniń jıynaǵı shegaralangan bolsa, olardıń eń kishi ulıwma eseligi gruppasınıń periodı yamasa kórsetkishi delinedi. Meyli p -ápiwayı san bolsın. Elementleriniń periodı p -ápiwayı sanınıń dárejesine teń bolatuǵın группа p -группа dep ataladı. G gruppasınıń quwatlılıǵı $|G|$ onıń tártibi delinedi. Egerde bul quwatlılıq shekli bolsa группа shekli dep kerı jaǵdayda sheksiz dep ataladı.

Eger gruppadaǵı operaciya kommutativ bolsa, yaǵnıy қалеген $a, b \in G$ ushın

$$ab = ba$$

teńligi orınlansa kommutativ yamasa abel gruppası dep ataladı. Ádette kommutativ gruppanı additiv túrde jazadı hám bul jaǵdayda belgilewlerdi tómendegi tablica boyınsha ózgertedi.

•	+
Kóbeytiw	Qosıw
Kóbeyme	Qosındı
Birlik	Nol
Keri	Qarama-qarsı
Dáreje	Eselik
Tiyindi	Ayırma
e yamasa 1	0
a^{-1}	$-a$
a^n	na
a/b	$a - b$

Meyli G gruppa , al H onıń normal úles gruppası Bolsın. G nıń H boyınsha irgeles klaslarınń kópligin

$$G/H = \{gH / g \in G\}$$

dep belgileymiz hám bul kóplikte kóbeytiw operaciyasın tómendegishe anıqlaymız.

$$g_1 H g_2 H = g_1 g_2 H$$

G/H kópligi bul anıqlanǵan kóbeytiw operaciyasına qarata gruppa dúzedi hám G gruppasınıń H úles gruppası boyınsha faktor gruppası dep ataladı.

G gruppasınıń a, b elementleri x elementi arqalı túyinles dep ataladı, egerde

$$a = x^{-1} b x$$

teńligi orınlanatuǵın bolsa. Bunı $a = b^x$ dep belgileymiz. Eger A, B lar eki úles kóplik bolsa

$$A^B = \{a^b / a \in A, b \in B\}$$

dep belgilenedi.

$$N_H(M) = \{h / h \in H, M^h = M\}$$

kópligi M kópliginiń H úles gruppasındaǵı normalizatorı dep ataladı.

Meyli G qálegen gruppa bolsın. G gruppasınıń a hám b elementleriniń kommutatorı dep ádettegidey $a^{-1}b^{-1}ab$ kóbeymesin túsiney.

$b=c^{-1}bc$ jazıwı b elementin G gruppasınıń c elementi arqalı túyinlestiriwdi bildiredi.

$a^{-1}b^{-1}ab=[a,b]$ dep belgileybiz. $n \geq 2$ bolǵanda $[g_1, g_2, \dots, g_n]$ ápiwayı kommutatorında skobkalar sol jaqtan normal jaylasqan dep esaplanıladı.

Yaǵnıy

$$[g_1, g_2, \dots, g_{n+1}] = [[g_1, g_2, \dots, g_n], g_{n+1}] \quad (1)$$

Ayırım jaǵdaylarda biz natural n sanı ushın $(a, b; n)$ jazıwın paydalanamız. Bul kommutator tómendegishe anıqlanadı.

$$[a, b; n+1] = [[a, b; n], b], n \in \mathbb{N} \quad (2)$$

G gruppasınıń tómendegi oraylıq qatarı

$$\gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \dots \gamma_n(G) \geq \dots$$

tómendegishe anıqlanadı.

$$\gamma_1(G) = G \quad (3)$$

$$\gamma_{n+1}(G) = [\gamma_n(G), G], n \in \mathbb{N} \quad (4)$$

Bul jerde $[\gamma_n(G), G]$ dep, G gruppasınıń $a \in \gamma_n(G), b \in G$ bolǵan $[a, b]$ elementlerinen jasalǵan normal úles gruppası túsiniledi.

G gruppasınıń kommuntantı $\gamma_\alpha(G), G'$ arqalı belgilenedi.

G gruppası basqıshı k dan artıq emes nilpotent gruppa delinedi. Egerde bazıbir k natural sanı ushın $\gamma_{k+1}(G) = 1$ teńligi orınlanatuǵın bolsa, bul shárt G gruppasında qálegen $g_1, g_2, \dots, g_{k+1}$ elementleri ushın

$$[g_1, g_2, \dots, g_{n+1}] = 1$$

birdeyliginiń orınlanıwına teń kúshli ekenligin túsiniw qıyın emes.

G gruppasınıń nilpotentlik basqıştı dep $\gamma_{n+1}(G)=1$ shártı orınlanatuǵın eń kishi k natural sanına aytamız.

Nilpotentlik basqıştı k dan aspaytuǵın barlıq nilpotent gruppalardıń klasın M_k arqalı, al M_k klasındaǵı rangi n ge teń erikli gruppanı $F_n(M_k)$ arqalı belgileymiz.

Erikli F_n gruppasında salmaǵı r ge teń bolǵan bazislik kommutatorlardı tómendegishe anıqlaymız.

Meyli F_n jasawshıları $x_1, x_2, \dots, x_n$

1. $x_1, x_2, \dots, x_n$ – jasawshıları, salmaǵı 1 ge teń bolǵan bazislik kommutatorlar delinedi.

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

2. Salmaǵı r ge teń bolǵan bazislik kommutator dep tómendegishe shártlerdi qanaatlandıratuǵın $[g, h]$ túrindegi kommutatorǵa ayıladı.

a) g hám h lar salmaqları s hám l ge teń bolǵan, jáne $s+l=r$ bolatuǵın bazislik kommutatorlar.

b) $g > h$,

c) Eger $g = [g_1, g_2]$ bolsa, $g_2 \leq h$,

Salmaǵı r ge teń bolǵan bazislik kommutatorlar r den kishi bolǵan kommutatorlardıń sońınan keledi hám olar óz-ara tómendegishe tártiplestiriledi.

$$[g_1, h_1] < [g_2, h_2] \Leftrightarrow h_1 < h_2$$

yamasa $h_1 = h_2$ bolsa $g_1 < g_2$.

Erikli $F_n(M_k)$ gruppasınıń qálegen elementi g bazislik kommutatorlardıń kóbeymesi túrinde tómendegishe tek bir usıl menen jazıladı.

$$g = c_1^{\alpha_1}, c_2^{\alpha_2}, \dots, c_t^{\alpha_t}, \quad \alpha_i \in \mathbb{Z}$$

Bundağı $c_1 < c_2 < \dots < c_t$ bazislik kommutatorlar.

Salmağı r ge teń bolğan hám $x_1, x_2, \dots, x_n$ jasawshılarının dúzilgen bazislik kommutatordıń sanın tómendegi formula boyınsha esaplawğa boladı.

$$(M_n; r) = \frac{1}{r} \sum_{d/r} \mu(d) n^{r/d} \quad (5)$$

Bundağı $\mu(d)$ –Mebius funkciyası.

Аnıqlama: Meyli G bazıbir gruppa bolsın. Тómendegi normal qatar

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_s = G \quad (6)$$

oraylıq qatar delinedi, egerde onıń barlıq faktorları oraylıq bolsa, yaғnıy qálegen i ushın $i=1, 2, \dots, s$

$$G_{i+1}/G_i \leq C(G/G_i) \quad (7)$$

shárti yamasa oǵan ekvivalent bolğan

$$[G_{i+1}, G] \leq G_i \quad (8)$$

shárti orınlansa, oraylıq qatarǵa iye gruppa joqarıda aytqanımızday nilpotent basqıshı dep ataladı.

Meyli G -qálegen gruppa bolsın. Biz G gruppasınıń oraylıq qatarın dúziw ushın ekinshi yamasa úshinshi formulanı bassılıqqa alıp háreket etiwimiz múmkin. Haqıyqatında da, meyli

$$\xi_0 G = 1, \quad \xi_{i+1} G / \xi_i G = G(G / \xi_i G) \quad i=1, 2, \dots \quad (9)$$

$$\gamma_1 G = G, \quad \gamma_{i+1} G = [\gamma_i G, G], \quad i=1, 2, \dots \quad (10)$$

bolsın.

$\xi_i G$ úles gruppaları G gruppasınıń gipercentralları dep ataladı, al $\gamma_i G$ ler bizge málim gruppanıń tómengi oraylıq qatarınıń aǵzaları.

Eger bazıbir gipercentr gruppanıń ózine teń bolsa yamasa tómengi oraylıq qatardıń bazıbir aǵzası birge teń bolsa, onda gruppanıń nilpotent gruppa bolatuǵınlıǵı túsinikli.

Kerisinshe, meyli G gruppası nilpotent gruppa, al birinshi onıń qálegen oraylıq qatarı bolsın. Qısqaqlıq ushın tómendegi belgilewlerdi kiritelik.

$$Z_i = \xi_i G, \Gamma_i = \gamma_i G$$

Nilpotent gruppanıń anıqlamasınan paydalanıp tómendegi ańlatpanıń durıslıǵın túsiniw qıyın emes.

$$1 = Z_0 \leq Z_1 \leq \dots$$

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_{s-1} \leq G_s = G \quad (11)$$

$$1 = \Gamma_s \leq \Gamma_{s-1} \leq \dots \leq \Gamma_1 \leq \Gamma_0 = G$$

Bul ańlatpanı nilpotent gruppanıń gipercentrlar hám centrallardıń qatarı shekli bolıp, olardıń uzınlıǵı gruppanıń nilpotentlik basqıshına teń ekenligi kelip shıǵadı.

(11) diagrammanıń tásirinde bul qatarlar sáykes joqarı hám tómengi oraylıq qatarlar dep ataladı.

Joqarı hám tómengi oraylıq qatarlardıń uzınlıqları teń bolǵan menen olardıń bir-biri menen betlesiwı shárt emes.

Endi nilpotent gruppalardıń ayırım qásiyetlerine toqtap óteyik.

Nilpotent gruppalarǵa baylanıslı tastıyıqlawlardı dálillewde tómendegi lemma úlken rol atqaradı.

Lemma: Meyli G nilpotentlik basqıshı $s \geq 2$ bolǵan, nilpotent gruppa bolsın, onda G gruppasınıń kommutantı hám bir element penen jasalǵan úles gruppanıń nilpotentlik basqıshı s ten kishi boladı.

Dálillew: Meyli G_1 , G gruppasınıń bazıbir elementi, G' kommutantı, al a menen G' dan jasalǵan úles gruppası H bolsın.

Tómendegi shárttiń orınlanatuǵınlıǵı túsiniikli.

$$G' \leq (\xi_{s-1} G) \cap H \leq \xi_{s-1} H \quad (12)$$

Olay bolsa, $H / \xi_{s-1} H$ faktor gruppası cikllı gruppası boladı, al gruppanıń orayı boyınsha faktor gruppası birden ózgeshe úles gruppası bolamaytuǵın bolǵanlıqtan $H / \xi_{s-1} H \neq 1$, yaǵnıy $H / \xi_{s-1} H \neq H$. Demek H tıń nilpotentlik basqıshı $s-1$ den asıp ketpeydi.

Lemma dálillendi.

Nilpotent gruppalarǵa baylanıslı tastıyıqlawlardı indukciya metodı menen dálillewde tómendegi teorema jıy qollanıladı.

Teorema: Nilpotent gruppanıń qálegen úles gruppasında nilpotent boladı. Dálirek aytqanda, eger G gruppası basqıshı s ke teń bolǵan nilpotentlik gruppası bolsa, onıń qálegen úles gruppası H tıń izbe-iz alınǵan normalizatorları s qádemnen burın G gruppasına teń boladı.

Dálillew: Tómendegi belgilewlerdi kiritemiz.

$$Z_i = \xi_i G, H_0 = H, H_{i+1} = N_G(H_i)$$

Bul belgilewlerden paydalanıp Z_i diń H_i diń ishinde jatatuǵınlıǵın kórsetiw jetkilikli.

Bunı kórsetiw ushın matematikalıq indukciya metodın paydalanamız.

$i=0$ bolǵanda $Z_0 \leq H_0$ ekenligi túsiniikli.

Endi i den $i+1$ ge óteyik.

$$[G, Z_{i+1}] \leq Z_i \leq H_i \quad (13)$$

shárti orınlanatuǵın bolǵanlıqtan H_i di Z_{i+1} menen túyinlestirsek tómendegige iye bolamız.

$$H_i^{Z_{i+1}} \leq H_i[H_i, Z_{i+1}] \leq H_i \quad (14)$$

Bunnan Z_{i+1} diń H_i di normallastıratuǵınlıǵı kórinip tur, yaǵnıy $Z_{i+1} \leq H_{i+1}$. Teorema dálillendi.

Bul paraǵraftıń sońında G gruppasınıń qálegen a,b,c elementleri ushın orınlı bolǵan tómendegi teoremanı keltiremiz.

Teorema: G gruppasınıń qálegen elementleri ushın tómendegi teńlikler orınlı boladı.

- 1) $(a, b) \cdot (b, a) = 1$
- 2) $(a, b \cdot c) = (a, c) \cdot (a, b) \cdot ((a, b) \cdot c)$
- 3) $((a, b), c) = (a, c) \cdot ((a, c), b) \cdot (b, c)$

Dálillew: Bul teoremanı dálillew ushın hár bir gruppalıq kommutatordı gruppası elementleriniń kóbeymesi túrinde kórsetiw jetkilikli.

1. $(a, b) \cdot (b, a) = 1$

$$a^{-1}b^{-1}abb^{-1}a^{-1}ba = 1$$
2. $(a, b \cdot c) = (a, c) \cdot (a, b) \cdot ((a, b) \cdot c)$

$$\begin{aligned}
(a, b \cdot c) &= a^{-1}(b \cdot c)^{-1}abc = a^{-1}c^{-1}b^{-1}abc = a^{-1}c^{-1}acc^{-1}a^{-1}b^{-1}abc = \\
&= (a, c)c^{-1}a^{-1}b^{-1}abc = (a, c)c^{-1}a^{-1}b^{-1}abb^{-1}a^{-1}abc = \\
&= (a, c)c^{-1}(a, b)a^{-1}b^{-1}abc = \\
&= (a, c)(a, b)(a, b)^{-1}c^{-1}(a, b)b^{-1}a^{-1}abc = \\
&= (a, c)(a, b)(a, b)^{-1}c^{-1}(a, b)cc^{-1}b^{-1}a^{-1}abc = \\
&= (a, c)(a, b)((a, b) \cdot c)(a, b)c^{-1}b^{-1}a^{-1}abc = \\
&= (a, c)(a, b)((a, b)c)
\end{aligned}$$

$$3. ((a, b), c) = (a, c) \cdot ((a, c), b) \cdot (b, c)$$

$$\begin{aligned}
((a \cdot b), c) &= (a \cdot b)^{-1}c^{-1}abc = b^{-1}a^{-1}c^{-1}abc = b^{-1}a^{-1}c^{-1}acc^{-1}a^{-1}abc = \\
&= b^{-1}(a, c)c^{-1}abc = (a, c)(a, c)^{-1}b^{-1}(a, c)bb^{-1}c^{-1}a^{-1}abc = \\
&= (a, c)((a, c), b)b^{-1}c^{-1}a^{-1}abc = (a, c)((a, c), b)b^{-1}c^{-1}bcc^{-1}b^{-1}a^{-1} \\
&abc = (a, c)((a, c), b)(b, c);
\end{aligned}$$

§2. Gruppalar kóptúrliligi hám onıń erikli gruppaları

Biz bul paragrafta gruppalar kóptúrliligi, onıń hár qıylı anıqlamaları, erkin gruppaları, bazislik birdeylikler kópligi haqqında sóz etemiz. Paragraftı salıstırmalı erkin gruppalar haqqındaǵı bazıbir maǵlıwmatlar menen baslaymız.

Anıqlama: Hár bir berilgen birdeylikler kópliginiń hár birin qanaatlandıratuǵın gruppaların barlıq klasına kóptúrlilik delinedi.

Bul kóptúrlilik usı birdeylikler kópligi menen anıqlanadı dep aytıladı. Eger M kópliginiń hár bir sózi gruppalar klasınıń hár bir gruppasında birdeylik bolsa, bul qásiyetke M niń jabılmasındaǵı hár bir sózde iye boladı. Sonlıqtan, kóplik hám onıń jabılması tek ǵana bir kóptúrlilikti anıqlaydı.

Jabıq V kópligi menen anıqlanatuǵın kóptúrlilik B arqalı belgileymiz. Onda anıqlamadan A gruppası B kóptúrliligine $V(A)=1$ bolǵanda ǵana tiyisli bolatuǵını kelip shıǵadı.

Teorema: A gruppası B kóptúrliligine tiyisli bolıwı ushın ol F erkin gruppasınıń faktor gruppası $F/\sqrt{(F)}$ na izomorf bolıwı zárúrli hám jetkilikli.

Dálillew: Meyli M kópligi A gruppasınıń jasawshı kópligi bolsın, al M_1 kópliginiń quwatlılıǵı M niń quwatlılıǵına teń bolsın. $F=Gr(M_1)$ -sáykes erkin gruppa. F gruppasınıń A gruppasına kanonikalıq epimorfizmin α arqalı belgileyik, yaǵnıy

$$\alpha : F \rightarrow A$$

onda

$$V(F)\alpha = V(F\alpha) = V(A) = 1$$

qatnası kelip shıǵadı, yaǵnıy $V(F)$, α niń yadrosında jatadı. Bunnan tısqarı B kóptúrliliginde V dan basqa birdeyliklerdi qanaatlandıratuǵın gruppa bar boladı.

Haqıyqatında da $F_D/\sqrt{(F_D)}$ gruppasın qaraymız. Eger ω bul salıstırmalı erkin

gruppadağı bazıbir sóz bolsa, onda $W(f) \in V(F_D)$ qatnasları orınlı boladı. Bunnan $W \in V$ ekenligi kelip shıǵadı.

Teorema: B kóptúrliligi menen X_α gruppasınıń tolıq invariant úles gruppaları V arasında óz-ara bir mánisli sáykeslik bar. Atap aytqanda, eger B gruppalar klası V nıń birdeyliklerin qanaatlandırsa, onda V kópligi B nıń hár bir gruppasında orınlanatuǵın barlıq birdeylikler kópligi boladı.

Saldar: Eger eki jabıq U hám V birdeylikler kópligi sáykes U hám B kóptúrliliklerin anıqlaytuǵın bolsa $U \subset V$ ekenliginen $U \supset V$ ekenligi kelip shıǵadı.

Bunday jaǵdaylarda B kóptúrliligi U kóptúrliliginiń úles kóptúrliligi delinedi.

$F/\sqrt{(F)}$ salıstırmalı erkin gruppaları rangi ... ǵa teń gruppalar dep yamasa B erkin gruppalar dep ataladı hám olar sáykes $F(B), F_n(B), F_\infty(B)$ arqalı belgilenedi.

Teorema: Hár bir salıstırmalı G erkin gruppası bazıbir U kóptúrliliginde sáykes rangli erkin gruppa boladı.

Dálillew: 2-tastıyıqlawǵa muwapıq G ge baylanıslı rangke iye F gruppası tabılıp $G \cong F/R$ hám R, F de tolıq invariant úles gruppa. Onda R -verbal úles gruppa boladı, yaǵnıy $R = W \subset f$. W kópliginiń jabılmasında usı verbal úles gruppanı anıqlaydı hám $G \cong F/\cup(F)$ gruppası boladı.

Endi biz bazıbir áhmiyetli kóptúrliliklerdi mısál sıpatında keltiremiz.

1. $[x, y]$ sózi menen anıqlanatuǵın barlıq abel gruppalarınıń kóptúrliligi **A**

$[x, y]$ ǵı sóziniń jabılması kommutant $F_{(2)} = F^{(1)} = F'$ bolatuǵınlıǵı túsinikli.

2. $[x, y]$ hám x^m sózleri menen anıqlanatuǵın eksponentası m ge teń abel gruppalarınń kóptúrliligi A_m .
3. x^m sózi menen anıqlanatuǵın eksponentası m ge teń barlıq gruppalar kóptúrliligi. x^m sóziniń jabılması $mFA_2=B_2$ ekenligin túsiniw qıyın emes.
4. N_c kóptúrliligi, Bul nilpotentlik basqıshı c dan aspaytuǵın hám $[x_1, x_2, \dots, x_{c+1}]$ sózi menen anıqlanatuǵın barlıq nilpotent gruppalar kóptúrliligi. $[x_1, x_2, \dots, x_{c+1}]$ sóziniń jabılması F_{c+1} ge teń bolatuǵınlıǵı túsiniikli.
5. σ_e kóptúrliligi. Bul sheshimlilik basqıshı l den aspaytuǵın hám $S_e(x)=[S_{e-1}(x), S_{e-1}(x)]$ sózi menen anıqlanatuǵın sheshimli gruppalar kóptúrliligi. $S_e(x)$ sóziniń jabılması F^e hám $AN_1=A=\sigma_1$ ekenin túsiniw qıyın emes.
6. P kóptúrliligi. Bul polinilpotent gruppalar kóptúrliligi dep ataladı. $(C_1, C_2, \dots, C_e)$ klaslar toplamı menen anıqlanadı.

Kóptúrlilik túsiniǵın basqasha kóz qarastan anıqlaw múmkin. Bunıń ushın tómendegi belgilewlerdi kiritemiz. Eger $\{-$ gruppalar klası bolsa, onda $S\{, Q\{, C\{$ arqalı sáykes úles gruppaların alıw ámeline baylanıslı, gomomorf obrazların alıwǵa baylanıslı hám dekart kóbeymelerin alıwǵa baylanıslı jabılması bolsın. Eger $\{-$ kóptúrlilik bolsa, onda $S\{=\{, Q\{=\{, C\{=\{$ ekenligi túsiniikli. Buǵan keri tastıyıqlawda orınlı.

Teorema(Birkhoff[2]). Meyli $\{-$ gruppalar klası bolsın. Onda eger $S\{=\{, Q\{=\{, C\{=\{$ teńlikleri orınlı bolsa $\{-$ kóptúrlilik boladı.

Dálillew: Meyli V kópligi $\{'$ da orınlanatuǵın barlıq birdeylikler bolsın. $\bar{\{}$ olar arqalı anıqlanatuǵın kóptúrlilik deyik. $\bar{\{} \subseteq \bar{\{}$ ekenligi túsiniikli hám $\bar{\{} \subseteq \bar{\{}$ ekenligin kórsetiw kerek. $Q\{=\{$ bolǵanı ushın da erkin bolǵan F gruppası $\{$ ǵa

derek ekenligin kórsetiw jetkilikli. Bunıń ushın $C=\{, S=\{$ bolǵanlıqtan F gruppasın $\{$ dan alınǵan gruppaların dekart kóbeymesine alıp qoyıw jetkilikli.

[2] degi 15.1.4 teoreması Boyınsha

$$F = F(x) / \vee(F(x))$$

Bunda x -saylap alınatuǵın alfavit, yaǵnıy $X = \{x_i \mid i \in I\}$. V kópligine derek bolmaytuǵın hár bir $V(x_{i1}, \dots, x_{im})$ sózi ushın $\{$ dan G_v gruppasın, onda $g_{vi}, i \in I$ elementlerin

$$V(g_{vi1}, \dots, g_{vim}) \neq 1$$

bolatuǵınday etip saylap alamız. Endi

$$\overline{\prod_{v \in V} G_v}$$

dekart kóbeymesin hám onda $f_i(v)=g_{vi}$ teńligi orınlanatuǵın elementlerin saylap alamız. f_i elementleri V dan alınǵan birdeyliklerden basqa hesh qanday qatnasqa baǵınbaytuǵın bolǵanlıqtan olardan jasalǵan úles gruppa F ke izomorf .

Teorema dálillendi.

Anıqlama: Eger gruppanıń sonday jasawshılar kópligi tabılıp, bul kópliktiń gruppaǵa qálegen sáwlelendiriwin bazıbir endomorfizmge shekem dawam ettiriw múmkin bolsa, onda gruppa salıstırmalı erkin gruppa delinedi.

Bul anıqlamadaǵı qásiyetke iye jasawshı kóplik gruppanıń erkin jasawshıları delinedi.

Salıstırmalı erkin gruppalardı keltirilgen erkin gruppalar dep te ataydı.

Salıstırmalı erkin gruppalardı bir-birine ekvivalent bolǵan tómendegi tastıyıqlawlar arqalı da anıqlaw múmkin.

Teorema: G gruppası tómendegi qásiyetlerdiń birewine iye bolǵanda ǵana salıstırmalı erkin grupp boladı.

1. G gruppası sonday jasawshılar kópligine iye bolıp, bul jasawshılar arasındaǵı qatnas G gruppasında birdeylik boladı.
2. G gruppası erkin F gruppanıń bazıbir verbal úles gruppası boyınsha faktor gruppası túrinde $G \cong F / \cup(F)$ kórsetiledi.
3. G gruppası $G \cong F / R$ kórsetiliwine iye bolıp, F gruppasınıń hár bir endomorfizmi G gruppasınıń bazıbir endomorfizmin payda etedi.

Dálillew: Anıqlamadan 1- tastıyıqlawdıń kelip shıǵatuǵınlıǵın kórseteyik. Meyli M kópligi G gruppasınıń jasawshı kópligi hám r olar arasındaǵı m simboldan dúzilgen qatnas bolsın. Onda m elementten dúzilgen gtM^n izbe-izligi tabılıp, $r(g)=1$ teńligi orınlanadı. Biraq qálegen

$$\gamma: M \rightarrow M_g$$

sáwlelendiriwi G gruppasınıń endomorfizmin anıqlaydı. Demek,

$$1 = r(g) = r(g)\gamma = r(g\gamma)$$

teńligi orınlı. γ sáwlelediriwine baylanıslı g nıń komponentleri G da aldın ala beriliwi múmkin bolǵanlıqtan r diń G daǵı hár bir mánisi 1 ge teń, yaǵnıy r qatnası G da birdeylik boladı. Endi 1-tastıyıqlawdan 2-tastıyıqlaw kelip shıǵatuǵınlıǵın kórseteyik.

1-tastıyıqlawdıń shártin qanaatlandıratuǵın M jasawshı kópligin saylap alamız. Keyin F jasawshı kópligi X bolǵan erkin grupp hám $|M|=|X|$ bolsın. Onda $\varphi: X \rightarrow M$ sáwlelendiriwi $F \rightarrow G$ endomorfizmine shekem dawam ettiriledi hám $G \cong F / R$ kórsetiliwi bar bolıp, ol tómendegi qásiyetlerge iye: F gruppasınıń qálegen Θ endomorfizminde bazıbir $F \in M^n$ ushın $r(f) \leftarrow R$ ekenliginen $r(f\Theta) \leftarrow R$ ekenligi kelip shıǵadı. Solay etip, R úles gruppası tolıq invariant.

Demek, [1] degi 12.31 tastıyqlawı boyınsha ol F gruppasınıń verbal úles gruppası boladı. 2-tastıyqlawdan 3-tastıyqlawdıń kelip shıǵatuǵınlıǵı qálegen $\alpha : M \rightarrow M_\alpha$ sáwlelendiriwi $F \rightarrow G$ endomorfizmine shekem dawam ettiriletuǵınlıǵınan kelip shıǵadı. Endi 3-tastıyqlawdan 1-tastıyqlawdıń kelip shıǵatuǵınlıǵın kórseteyik. Berilgen $G \cong F/R$ kórsetiliwi F/R gruppasınıń tabıǵıy jasawshıların, atap aytqanda fR , $f \in M$ irgeles klasların beredi. Bul jasawshılar kópligi 1-tastıyqlawdıń shártlerin qanaatlandıratuǵınlıǵın kórseteyik. fR kópliginiń G gruppasına Θ sáwlelendiriwin alamız. F/R gruppasınıń hár bir elementi

$$\omega(f^*R) = \omega(f^*)R$$

ω bazıbir sóz hám bazıbir n ushın $f^* \in M^n$ túrinde kórsetiledi. Bunday kórsetiliwdi hár bir $(fR)\Theta$ obrazı ushın belgilep alamız hám

$$\Theta_1 : M \rightarrow M \Theta_1 \subseteq F$$

sáwlelendiriwin $f \in M$ ushın

$$(fR)\Theta = (f\Theta_1)R$$

formulası boyınsha anıqlaymız. Onda [1] niń 11.14 tastıyqlawı boyınsha Θ_1 sáwlelendiriwi F gruppasınıń bazıbir endomorfizmin anıqlaydı, ol F/R gruppasınıń bazıbir endomorfizmin payda etip, ol F/R diń taqlap alınǵan jasawshılar kópliginde Θ menen birdey boladı. Solay etip, Θ sáwlelendiriwi F/R gruppasınıń endomorfizmine shekem dawam ettiriledi.

Bul keltirilgen dálillemeden tómendegi eki saldar kelip shıǵadı.

1-saldar: G salıstırmalı erkin gruppanıń hár bir endomorfizmi F gruppasınıń endomorfizmi menen payda etiledi.

2-saldar: Salıstırmalı G gruppasınıń jasawshı kópligindegi hár bir qatnas G gruppasında birdeylik boladı.

Endi erkin gruppalardıń bazıbir qásiyetlerin salıstırmalı erkin gruppalarǵa ótkeriwge boladı.

Teorema: Salıstırmalı erkin gruppanıń tolıq invariant úles gruppası verbal úles gruppa boladı.

Dálillew: 2-tastıyıqlawdan paydalanıp G gruppasını $G \cong F/\cup(F)$ túrinde kórsetiliwinen paydalanamız. Meyli N , G gruppasınıń tolıq invariant úles gruppasınıń F gruppasındaǵı tolıq proobrazı bolsın, onda $N/\cup(F)$ úles gruppası $F/\cup(F)$ gruppasında tolıq invariant. Onda F gruppasınıń hár bir Θ endomorfizmi G gruppasınıń endomorfizmin payda etedi. Solay etip, $\cup F$ hám $N/\cup(F)$ ler Θ endomorfizminde ózine ótedi. Inducirlengen endomorfizmnıń anıqlaması boyınsha N úles gruppasında Θ –da ózine sáwlelenedi.

Demek, N úles gruppa F gruppasında tolıq invariant hám verbal úles gruppa yaǵnıy $N = \omega(F)$. Olay bolsa

$$N/\cup(F) = \omega(F/\cup F).$$

Bul teoremadan tómendegi saldar kelip shıǵadı.

Saldar: $G \cong F/\cup(F)$ gruppasınıń verbal úles gruppaları F gruppasınıń F penen $\cup F$ aralıǵındaǵı verbal úles gruppalarına sáykes keledi.

Salıstırmalı M kópliginen jasalǵan abel gruppası ózine izomorf yamasa bazistıń hár bir elementiniń tártibi m ge teń bolǵan eksponentası m ge teń abel

gruppası boladı. Jasawshı kópliktıń quwatlılıǵı $|M|$, G gruppasınıń rangi delinedi. Oǵan baylanıslı G_n, G_α belgilewleri paydalanıladı.

§3. Kóptúrlilikler algebrası

Biz bul paragrafta kóptúrliliklerdiń ústinde anıqlanatuǵın ámellerdi hám olardıń qásiyetlerin úyrenemiz.

C gruppasın A gruppasınıń B gruppası járdeminde keńeymesi dep aytamız, egerde C gruppasında A ǵa izomorf normal úles gruppaga iye bolıp, C/A faktor gruppası B ǵa izomorf bolsa.

Anıqlama: Eger A hám B lar bazıbir gruppalar kóptúrliligi bolsa, onda olardıń kóbeymesi AB dep A nıń gruppalarınıń B nıń gruppaları járdeminde keńeymesi bolatuǵın gruppalar kópligine aytıladı.

Bunday gruppalar kópligi kóptúrlilik bolatuǵının jabılma túsiniǵın paydalanıp ańsat dálillewge boladı.

1-teorema: Eger U, V lar X_∞ gruppasınıń tolıq invariant úles gruppaları bolsa hám sáykes túrde A hám B kóptúrlilikleriniń birdeyliklerin qanaatlандırsa, onda AB kóptúrliliginiń birdeylikler jıynaǵı X_∞ gruppasınıń U(V) verbal úles gruppası menen anıqlanadı.

Dálillew: $\omega \in U(V)$ sózi $u(v_1, \dots, v_n), u \in U, v_i \in V$ túrindegi sózlerdiń kóbeymesi boladı. Endi ω sóziniń AB da birdeylik ekenin kórsetiw ushın $u(v_1, \dots, v_n)$ túrindegi sózlerdiń bári AB da birdeylik ekenin kórsetiw jetkilikli.

Meyli $C \in AB$ hám $\bar{A} \trianglelefteq C$ bolıp $\bar{A} \in A, C/A \in B$ bolsın. v_i sózleri C/A da birdeylik bolǵanlıqtan v_i diń C daǵı hár bir mánisi $\bar{A}$ ǵa tiyisli: $v_i(c^i) \in \bar{A}$ bunda $c^{(i)} \in C^{m(i)}$. Demek, $u(v_1(c^1), \dots, v_n(c^n)) = u(a)$ bazıbir $a \in A^n$ ushın. Biraq u elementi A da birdeylik, demek $u(a)=1$ birdeyligi A da orınlanadı.

Kerisinshe C gruppası $u(v_1, \dots, v_n)$ túrindegi barlıq birdeyliklerdi qanaatlandıratuǵın bolsın. $\bar{A} = V(C)$ arqalı V ǵa sáykes keletuǵın verbal úles gruppanı belgileymiz. Onda $\bar{A} \triangleleft C$ hám $C/\bar{A} \in B$. Bunnan tısqarı kóplik sıpatında $V(C)$ jabıq bolǵanlıqtan, ol barlıq $v(c), v \in V, c \in C^m$ túrindegi (bazıbir m ushın) elementlerden turadı. Solay etip, $u(a_1, \dots, a_n) = u(v(c^{(1)}), \dots, v(c^{(n)})), c^{(i)} \in C^{m(i)}$ hám tastıyıqlawımız boyınsha $u(a) = 1$ barlıq $a \in \bar{A}^n$ ushın. Demek $\bar{u}$ sózi $\bar{A}$ da birdeylik boladı.

1-saldar: Eger A, B lardıń hesh birewi barlıq gruppalar klası D ǵa teń bolmasa, onda $F(AB)$ erikli gruppası $F(A)$ nıń $F(B)$ járdeminde keńeymesi boladı. Bunda $F(A)$ hám $F(B)$ lardıń rangleri sheksiz hám $F(AB)$ nıń rangine teń. $F_n(AB)$ shekli rangke iye gruppa $F_m(A)$ nıń $F_n(B)$ járdeminde kóbeymesi boladı, bunda $m = (n-1)|F_n(B)| + 1$.

Dálillew: 1-teorema boyınsha

$$F(AB) \cong F/U(V(F))$$

onda $U(V(F)) \subseteq V(F) \subseteq F$ hám $V(F)$ absolyut erikli gruppa boladı. Demek

$$V(F)/U(V(F)) \cong F(A)$$

bundaǵı $F(A)$ nıń rangi $V(F)$ tiń rangine teń. Bunnan tısqarı $F(AB)$ nıń bul úles gruppasınıń faktor gruppası $F/V(F) \cong F(B)$ ǵa izomorf, al bul óz gezeginde $F(B)$ nıń erikli úles gruppası.

Eger F tiń rangi sheksiz bolsa, onda $V(F)$ tiń rangi de sheksiz boladı. F_n niń úles gruppası $V(F_n)$ niń rangi sheksiz, al onıń F_n degi indeksi j shekli, keri jaǵdayda onıń rangi

$$(n-1)j+1$$

ge teń.

2-saldar: $F_n(AB)$ erikli gruppası barlıq $n \in I$ ushın sonda tek ǵana sonda shekli boladı, eger $F(A)$ hám $F(B)$ gruppalarınń rangleri barlıq $n \in I$ ushın shekli bolsa.

$[U, V]$ kommutantına sáykes keletuǵın kóptúrlilikti $[A, B]$ arqalı belgileymiz. Bul U, V úles gruppaları orın almasıw qásiyetine iye bolǵan gruppalardan turadı. U hám V lar X_∞ gruppasınıń normal úles gruppaları bolǵanlıqtan, $[U, V] \subseteq U \cap V$ yaǵnıy $[A, B] \supseteq A \cup B$.

Kóbeytiw ámeliniń tiyislilik qatnasına, kommutator hám strukturalıq ámellerge tásirin biliw ushın dáslep $B \neq D$ kóptúrliliginde ońnan kóbeytiw V gruppasınıń verbal úles gruppalarındaǵı ámellerge sáykes keledi. Bul gruppanıń ózi rangi x_0 bolǵan erikli gruppa. Solay etip, X_∞ gruppasınıń verbal úles gruppasındaǵı ámel V da óz sáwleleniwin tabadı. Bunnan tómendegi tastıyıqlawlar kelip shıǵadı.

2-teorema: $A_1 \subseteq A_2$ dan $A_1 B \subseteq A_2 B$ ekenligi kelip shıǵadı. Eger $B \neq D$ bolsa $A_1 B \subseteq A_2 B$ dan $A_1 \subseteq A_2$ kelip shıǵadı. Dara jaǵdayda, eger $A_1 B = A_2 B$ bolsa, onda $A_1 = A_2$ boladı.

3-teorema: Qálegen A kóptúrliligi ushın $AD=DA$ hám $AC=CA=A$.

4-teorema: $(A_1 \vee A_2)B = A_1 B \vee A_2 B$

$$(A_1 \wedge A_2)B = A_1 B \wedge A_2 B$$

$$[A_1, A_2]B = [A_1 B, A_2 B] .$$

5-teorema: $B_1 \subseteq B_2$ ekenliginen $AB_1 \subseteq AB_2$ ekenligi kelip shıǵadı.

6-teorema:

$$A(B_1 \vee B_2) = AB_1 \vee AB_2$$

$$A(B_1 \wedge B_2) = AB_1 \wedge AB_2$$

Dálillew: $A=A_7$, $B_1=A_2$, $B_2=A_3$ dep alamız. Meyli A tártibi 7 ge teń bolǵan ciklikli gruppanıń, onıń 6 tártipli avtomorfizmler gruppası járdeminde keńeymesi bolsın, yaǵnıy

$$A = Gr(a, b; a^7 = b^6 = 1, a^b = a^3)$$

$C_6 \in A_2 \vee A_3$ bolǵanlıqtan $A \in A_7(A_2 \vee A_3) = A_7A_2 \vee A_7A_3$ kóptúrliliginiń birdeylikleri A_7A_2 hám A_7A_3 kóptúrlilikleriniń kesilispesine teń. Demek x^{14} sózi A_7A_2 de, al x^{21} sózi A_7A_3 kóptúrliliginde birdeylik bolǵanı ushın $[x^{14}, y^{21}] = A_7A_2 \vee A_7A_3$ kóptúrliliginde birdeylik boladı. Biraq A gruppasında $x = ab^4$, $y = b$ sózlerin tańlap alıp $x^{14} = a^3b^2$, $y^{21} = b^3$ hám $a^3b^2b^3 = a^3b^{-1}$ teńliklerine iye bolamız. Biraq $b^3a^3b^2 = a^{-3}b^{-1}$, solay etip $[x^{14}, y^{21}] = 1$ birdeyligi bul eki element ushın orınlanbaydı.

7-teorema: Eger $A \wedge B = C$ bolsa, $F(A \vee B) = F(A) \vee F(B)$ onda , bunda barlıq úsh erikli gruppaların rangleri óz-ara teń.

Dálillew: $A(F)B(F) = F$ hám $A \vee B$ kóptúrliligine sáykes tolıq invariant úles gruppa bolıp $U(F) \cap V(F)$ penen betlesedi. Demek $F(U \vee B) = F / U(F) \cap V(F)$ tómendegi normal úles gruppalaradı ózinde tutadı.

$$U(F) / U(F) \cap V(F) \cong U(F)V(F) / V(F) = F / V(F) \cong F(B)$$

$$\text{hám } V(F) / U(F) \cap V(F) \cong U(F)V(F) / U(F) = F / U(F) \cong F(U).$$

Bul úles gruppaların $F(A \vee B)$ daǵı kesispesi birge teń.

8-teorema: Kóptúrliliklerdi kóbeytiw associativ qásiyetke iye.

Kóptúrliliklerdi kóbeytiwdiń anıqlamasınan $A(BC) = (AB)C$ ekenligi tikkeley kelip shıǵadı. Meyli endi $D \in (AB)C$ Bolsın. Onda $N \trianglelefteq D$ normal úles gruppası tabılıp $N \in AB, D/N \in C$ orınlanadı. Dara jaǵdayda, N sıpatında D da normal úles gruppa $W(D)$ verbal úles gruppanı alıwǵa boladı. Onda $V(N)$ úles gruppası N normal hám $V(N)=A$. Toliq invariant úles gruppanıń tolıq invariant úles gruppası tolıq invariant bolǵanlıqtan, $V(N)$ úles gruppa D da tolıq invariant. Bunnan tısqarı $D/V(N) \in AB$, sebebi $W(C/V(N)) = W(D)/V(N)$. Solay etip, $C \in A(BC)$.

Eger kóptúrlilikte eki kóptúrlilik kóbeymesi túrinde kórsetilmeytuǵın bolsa, onda onı jiklenbeytuǵın kóptúrlilik dep ayıladı. Qálegen D dan ózgeshe kóptúrliliktiń jiklenetúǵının kórsetiw ushın bizge Levi lemması zárúr, onı dálillew ushın erikli gruppalarda Nilsen sistemasınıń bazıbir qásiyetleri kerek boladı. Bul qásiyetlerdi tolıq túrde [2-4] kitaplardan tabıw múmkin. F_∞ gruppasınıń hár bir $a \neq 1$ elementi $f_i^{\varepsilon_1}, \dots, f_{i_e}^{\varepsilon_e}, \varepsilon_k = \pm 1, f_{i_\lambda}^{\varepsilon_\lambda} \neq f_{i+1_\lambda}^{\varepsilon_{\lambda+1}}, \lambda \geq 1$ túrinde jazıladı. $l = l(a) - a$ elementiniń uzınlıǵı dep ataladı. Eger $M \subseteq F_\infty$ diń $\{1\}$ den ózgeshe úles kóplik bolsa, onda $l(M)$ uzınlıǵı tómendegishe anıqlanadı.

$$l(M) = \min l(a), 1 \neq a \in M$$

Eger $A \subseteq F_\infty$ trivial emes úles gruppa bolsa, onda A gruppasınıń Nilsen jasawshılarınıń reducirlengen sisteması yaǵnıy A gruppasınıń erikli jasawshıları tabılıp tómendegi shártler orınlanadı.

$$1) l(a_i^{\varepsilon_i} a_j^{\varepsilon_j}) \geq \max(l(a_i), l(a_j));$$

2) Eger $a \in A, a \neq 1$ bolsa, onda $a = \prod_j a_{i(j)}^{\varepsilon_j}, a$ – elementiniñ reducirlengen jasawshılar sisteması bolsa, onda $l(a) \geq \max l(a_{i(j)})$.

3) Eger (2) Barlıq $a_{i(j)}$ lerdiñ uzınlığı l ge teñ bolsa, onda $l(a) = l$ ge teñ boladı, eger a – jasawshı yamasa eki jasawshınıñ kóbeymesi bolsa.

Lemma(Levi): Eger $F_\infty = A_0 \geq A_1 \geq A_2 \geq \dots$ keyingisi ózinen aldındısında xarakteristikalıq bolğan úles gruppalar izbe-izligi bolsa, onda $l(A_k) > l(A_{k-1}), k \geq 1$.

Dálillew: A_{k-1} ushın reducirlengen Nilsen jasawshılar kópligi U di saylap alamız. Meyli $a \in M, A_{k-1}$ ushın eñ qısqa uzınlıqqa iye jasawshı bolsın. Onda $l(A_{k-1}) = l(a_1)$. Eger b eñ qısqa uzınlıqqa iye A_k nıñ jasawshısı bolsa, onda $l(A_k) = l(b)$. Bunnan tısqarı $b \in A_{k-1}$, hám $b = \prod a_{i(j)}^{\varepsilon_j}, a_{i(j)} \in M$. (2) den $l(b) > l(a_1)$ teńsizligi orınlı, eger barlıq jasawshılar b nıñ jazılıwında eñ qısqa uzınlıqqa iye bolsa (3) den $l(b) > l(a_1)$ yamasa b jasawshı yamasa eki jasawshınıñ kóbeymesi bolsa. Eger b jasawshı bolsa, yaǵnıy $b \in M$ bolsa, onda A_k barlıq M di ishinde tutadı, sebebi A_k xarakteristikalıq úles gruppa. Demek $A_k = A_{k-1}$, bul múmkin emes. Eger b eki jasawshınıñ kóbeymesi bolsa, onda aytayıq $b = a_i^{\varepsilon_i} a_j^{\varepsilon_j} (i \neq j)$, onda M degi a_i hám a_j elementlerin a_i hám b ğa almastırıw taza jasawshılar sistemasın beredi hám burındıday $A_{k-1} = A_k$. Demek $b = a_i^2$. Biraq, onda $l(b) > l(a_i)$; haqıyqatında da eger a_i dıñ uzınlığı

$2m$ ge teń bolǵanda, onda $a_i = r \cdot s$, Bunda r hám s tiń uzınlıqları m ge teń. Onda $b = rsrs$ bolıp uzınlıǵı $2m$ nen aspaydı, eger $rs = 1$ bolsa, $r = s^{-1}$, $a_i = 1$, bul múmkin emes. Demek, a_i diń uzınlıǵı taq san bolıp $2m+1$ ge teń. Onda jáne a_i^2 kóbeymesinde eń kóp bolǵanda m hárıp qısqaırwı múmkin. Bunnan $l(b) \geq l(a_i) + 1$. Solay etip, eki jaǵdayda da

$$l(b) = l(A_k) > l(A_{k-1}) = l(a_i)$$

3-saldar: Eger $F_\infty = A_0 > A_1 > \dots$ úles gruppaların sheksiz kemiwshi qatań izbe-izligi bolsa hám hár biri aldınǵısında xarakteristikalıq bolsa, onda $\cap A_i = \{1\}$.

4-saldar: Eger $A_D = A_0 > A_1 > \dots > A_k$ hár biri ózinen aldınǵısında xarakteristikalıq bolǵan úles gruppaların qatań izbe-izligi bolsa, onda $l(A_k) > k$.

9-teorema: Eger $B \neq D, C$ bolsa, onda B kóptúrliligi shekli sandaǵı jiklenbeytuǵın kóptúrliliklerdiń kóbeymesi boladı.

Dálillew: B nıń ózi jiklenbeytuǵın kóptúrlilik bolsa teorema orınlı. Keri jaǵdayda $B = B_1 B_2$. Eger B_1 yamasa B_2 lerdiń birewi jiklenetuǵın bolsa, onı kóbeyme túrinde jazamız. Solay etip, biz

$$B = B_1 B_2 \dots B_k$$

túrindegi jikleniwge iye bolamız. Buǵan tómendegi tolıq xarakteristikalıq úles gruppaların izbe-izligi sáykes keledi.

$$V = V_1(V_2(\dots(V_k)\dots)) \subset V_{k-1} \subset V_k \subset X_\infty$$

4-saldar boyınsha $k < l(V)$, olay bolsa, kóp bolğanda $l(V)$ qádemnen keyin kóbeytiwshiler jiklenbeytuğın boladı.

10-teorema: Eger abellik emes A kóptúrliligi shekli gruppadan jasalatuğın bolsa, onda ol abellik emes metabellik gruppanı ózinde tutadı.

Dálillew: Eger A metabellik gruppalar kóptúrliligi bolsa, onda teorema orınlı. Keri jağdayda A dağı barlıq metabellik gruppalar kóptúrliligi B nı qaraymız. SHárt boyınsha $B \subset A$, endi biz B abellik emesligin kórsetsek jetkilikli. A kóptúrliligi shekli gruppadan jasalatuğın bolğanlıqtan A nın ishinde B ğa tiyisli emes shekli gruppa bar. Olardıń ishinde eń kishi tártiplisin saylap alamız. Onı C dep belgileyik. Onda onıń barlıq úles gruppaları B ğa tiyisli boladı, yaǵnıy eger B abellik bolsa O.Yu.Shmidt teoreması boyınsha eger shekli gruppanıń barlıq menshikli úles gruppaları abellik bolsa, onda onıń ózi metabellik gruppa boladı. Olay bolsa A -metabellik gruppa hám B ğa tiyisli bolar edi. Bul tastıyıqlawımızǵa qarsı keledi.

§4. Metabellik gruppalar kórtúrliliginin bazıbir qásiyetleri

Biz bul paragrafta barlıq metabellik gruppalar kóptúrliligin qaraymız. Bul kóptúrlilik $[[x,y],[x,t]]$ birdeyligi menen anıqlanadı. «Metabellik» termini «uzınlıǵı ekige teń sheshimli» yamasa «eki basqıshlı nilpotent» maǵanalarında qollanıladı.

Metabellik gruppalarǵı izertlewde V.Magnus hám D.E.Koenler [1] tárepinen islenip shıǵılǵan metodlar úlken áhmiyetke iye. Biz bul paragrafta Magnus metodınan paydalanıp tómendegi teoremanıń dálillew sxemasın keltiremiz.

Teorema: Qálegen metabellik gruppalar kóptúrliligi shekli baziske iye.

Magnus metodın qollanıw ushın dáslep bazıbir belgilewler hám tastıyıqlawlardı keltiremiz.

Meyli $A = Gr(M)$ jasawshılar kópligi M bolǵan gruppa, al $A \cong X/R$ onıń kórsetiliwi bolsın.

Meyli $ZA - A$ gruppasın pútin sanlar ústindegi kolcosı hám $(ZA)^k$ arqalı ZA kolcosınıń k ekzemplıyalarınıń (nusqasınıń) tuwrı qosındısın belgileymiz, bunda $k = |M|$, X gruppasınıń rangi, onda tómendegi túrdegi ekinshi tártipli matricalar kópligi

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}, a \in A, \alpha \in (ZA)^k$$

matricalar ádettegi kóbeytiw ámeline baylanıslı gruppa dúzedi. Meyli α_1 arqalı ZA kolcosınıń i -komponentası 1, al qalǵanları bári nolge teń elementi bolsın. Onda tómendegi tastıyıqlaw orınlı.

Tastıyqlaw: X gruppasınıń matricalar gruppasına jasawshıları arqalı berilgen

$$x_i \rightarrow \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ \alpha_i & 1 \end{pmatrix}$$

sáwlelendiriwi $X | [R, R]$ gruppasınıń monomorfizmin payda etedi.

Solay etip, dara jaǵdayda sanaqlı yamasa shekli jasawshılarga iye metabellik gruppalar joqarıdaǵıday matricalar menen tolıq anıqlanadı. Bul kórsetiliwden paydalanıp erkin metabellik gruppa $F_\alpha(A^2)$ bazıbir úles gruppaları ushın, atap aytqanda, erikli ózgeriwshilerdi orın almasırwǵa baylanıslı avtomorfizmlerge qarata turaqlı úles gruppaları ushın maksimallıq shártin qanaatlandıradı. Solay etip, ol verbal úles gruppaları ushında maksimallıq shártin qanaatlandıratuǵın bolıp shıǵadı. Bunı dálillewdegi tiykargı qıyınshılıq kommutanta jatatuǵın úles gruppalar bolıp tabıladı. Bul α elementleri menen jasalǵan úles moduller izbe-izligine ótiwge múmkinshilik beredi. Bunıń operatorı $X | X^1$ gruppasını $X_i X^i$ elementlerinen jasalǵan abel yarım gruppası menen almasırılса bul problema elementleri orın almasırw qásiyetine iye bolǵan ideallar izbe-izligin úyreniwge alıp kelinesi.

Metabellik gruppalarda shepten normallanǵan bazislik kommutatorlar ǵana 1 den ózgeshe. Bizge gruppanıń matricalıq kórsetiliwi rangi ekige teń erkin metabellik gruppalarda shepten normallanǵan bazislik kommutatorlardıń erikli ekenligin dálillew ushın kerek. Bunday kommutatorlardıń qálegen rangli erkin metabellik gruppalarda erikliliǵı usı paragraftıń tiykargı nátiyjesinen kelip shıǵadı.

Lemma: Meyli $A_1 = F_2(A)$ gruppası a_1 hám b_1 elementleri arqalı erkin jasalatuǵın bolsın: α hám β arqalı komponentaları $(1, 0)$ hám $(0, 1)$ bolǵan $(ZA_1)^2$ tıń elementlerin belgileybiz. Onda tómendegi formulalar menen berilgen

μ sáwlelendiriwi $X_2 \mid X_2$ " gruppasınıń matricalıq gruppaga gomomorfizmin anıqlaydı.

$$x_1\mu = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad x_2\mu = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}.$$

Dálillew: μ gomomorfizm ekenligin kórsetiw ushın, eki matrica metabellik gruppa dúzetuǵınlıǵın dálillew kerek, yaǵnıy $[x_1\mu, x_2\mu]$ kommutatorı menen túyinles elementler orın almastırıw qásiyetine iye ekenligin kórsetiw jetkilikli. Joqarıdaǵı kommutatordı esaplaymız.

$$[x_1\mu, x_2\mu] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (b_1 - 1)\alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Bunnan tısqarı ulıwma $C \in A_1$ hám $\gamma, \delta \in (ZA_1)^2$ ushın

$$\begin{pmatrix} c & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta_c & 1 \end{pmatrix}$$

demek $[x_1\mu, x_2\mu]$ menen túyinles element

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$$

kórinisine iye, al bunday eki matrica orın almastırıw qásiyetine iye.

Lemma: Eger $A = F_2(A^2)$ gruppası a hám b elementlerinen erkin jasalǵan bolsa, onda barlıq shepten normallanǵan bazislik kommutatorlar A gruppasınıń kommutantı A da baylanıssız.

Saldar: $F_2(A^2 \cap N_c)$ gruppasında salmaǵı C dan aspaytuǵın shepten normallanǵan bazislik kommutatorlar qálegen $C \geq 2$ ushın sıızıqlı baylanıssız.

Dálillew: Eger a jasawshısı b dan aldın keledi dep esaplasaq, onda qálegen soldan normallanǵan kommutator

$$[b, a, a, \dots, a, b, \dots, b]$$

kórinisine iye bolıp, qálegen $k \geq 0, l \geq 0$ ushın a elementi k ret, al b elementi l ret qaytalanadı. Biz onı $[b, (k+1)a, lb]$ túrinde jazamız. Onıń matricalıq kórsetiliwi tómendegishe boladı.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ((a_1 - 1)^k (b_1 - 1)^l ((1 - b_1)\alpha + (a_1 - 1)\beta) & 1 \end{pmatrix}$$

Soldan tártiplengen bazislik kommutatorlardıń erikli ekenligin kórsetiw ushın

$$(a_1 - 1)^k (b_1 - 1)^l ((1 - b_1)\alpha + (a_1 - 1)\beta), \quad k \geq 0, l \geq 0$$

ańlatpasınıń a_1, b_1, α, β belgisizlerine baylanıslı kóp aǵzalı sıpatında pútin sanlar ústinde erikli ekenligin dálillew jetkilikli. Biraq pútin koeffitsientli

$$\sum n_{kl} (a_1 - 1)^k (b_1 - 1)^l ((1 - b_1)\alpha + (a_1 - 1)\beta) = 0$$

qatnası α ge hám β ge iye aǵzalırdıń óz aldına nolge teńligin bildiredi.

$$\sum n_{kl} (a_1 - 1)^k (b_1 - 1)^{l+1} = \sum n_{kl} (a_1 - 1)^{k+1} (b_1 - 1)^l = 0$$

Bul $n = a_1 - 1, v = b_1 - 1$ belgisizlerine baylanıslı polinomial teńlik qálegen $k \geq 0, l \geq 0$ ushın $n_{kl} = 0$ ekenligin beredi, tómendegi tastıyıqlawdı este tutqan maqul.

Tastıyıqlaw: $A = F_2(A^2)$ gruppasındaǵı bazislik kommutatorlar gruppanıń kommutantın jasay almaydı, hátteki olardıń A' tı tómengi oraylıq qatardıń qálegen aǵzasınıń moduli boyınsha jasawına qaramastan.

Dálillew: $[b, a^{-1}]$ kommutatorın qaraymız, qálegen $m \geq 1$ ushın

$$[b, a^{-1}] = [b, a]^{-1} [b, a, a] \dots [b, (m-1)a]^{(-1)^{m-1}} [b, (m-1)a, a^{-1}]^{(-1)^{m-1}}$$

Eger $[b, a^{-1}]$ dı bazislik kommutatorlar arqalı ańlatıw mǘmkin bolsa, m arqalı ushırasatuǵın eń úlken salmaqtı belgileymiz. Onda joqarıdaǵı lemma boyınsha bul ańlatpa salmaǵı m ge shekem bazislik kommutatorlardıń kóbeymesi menen birdey bolıwı kerek. Onda

$$[b, (m-1)a, a^{-1}] = 1$$

birdeyligi A gruppasında orınlanıwı tiyis. Biraq bul birdeylikten A gruppasında $[b, ma] = 1$ ekenligi kelip shıǵadı. Bul joqarıdaǵı lemmaǵa qarama-qarsı keledi.

Endi $N_c \cap A^2$ kóptúrliliginiń, yaǵnıy nilpotentlik basqısı c dan aspaytuǵın hám bir waqıtta metabellik bolatuǵın gruppalar kóptúrliliginiń erkin gruppaların úyrenemiz.

Eger $c = 2, 3$ bolsa, bul kóptúrlilik barlıq N_c menen betlesedi. Bunday kóptúrliliktiń qálegen gruppasında hár bir element soldan tártiplengen bazislik kommutatorlardıń kóbeymesi túrinde jazıladı, yaǵnıy $g = C_1^{\alpha_1} \dots C_e^{\alpha_e}$ bundaǵı C_i ler salmaǵı c aspaytuǵın soldan tártiplengen kommutatorlar.

Lemma: Meyli $G = F_k(N_c \cap A^2)$ gruppası $g_1, g_2, \dots, g_k$ elementlerinen erkin jasalatıwı bolsın, al $A = F_2(N_c \cap A^2)$ gruppası a hám b elementlerinen erkin jasalatıwı bolsın. Meyli $g \in G, g = C_1^{\alpha_1} \dots C_l^{\alpha_l}$, bunda C_i hár qıylı soldan tártiplengen bazislik kommutatorlar; eger qálegen $l : b \rightarrow A$ gomomorfizminde $gl = 1$ bolsa g nıń kórsetiliwindegi barlıq α_i kórsetkishler nolge teń.

Lemmanı dálillemeden aldın, onıń saldarın bayanlaymız.

Teorema: $F_k(N_c \cap A^2)$ erkin gruppasınıń qálegen elementi soldan tártiplengen bazislik kommutatorlardıń kóbeymesi $C_1^{\alpha_1} \dots C_l^{\alpha_l}$ túrinde jazıladı, bunda $C_1 < C_2 < \dots < C_l$ bazislik kommutatorlardıń tártibi.

Bunı basqasha formada tómendegishe bayanlaw múmkin.

Teorema: Qálegen $F(A^2)$ erkin gruppasında salmaǵı ekiden úlken yaki teń bolǵan soldan tártiplengen bazislik kommutatorlar kommutanttıń úles gruppasın jasaydı.

Teorema: Qálegen $N_c \cap A^2$ kóptúrliligi, $c > 1$, óziniń 2-jasalǵan gruppaları menen jasaladı.

Dálillew: Joqarıdaǵı lemma barlıq

$$l : F_c(N_c \cap A^2) \rightarrow F_2(N_c \cap A^2)$$

gomomorfizmlerdiń yadrolarınıń kesilispeşi bos kóplik ekenligin bildiredi. Solay etip, $F_c(N_c \cap A^2)$ gruppası $F_2(N_c \cap A^2)$ gruppasınıń dekart dárejesiniń úles gruppası boladı. Demek, kóptúrliliktiń C — jasalǵan gruppasın jasaydı, onda [1] niń 35.12 saldar boyınsha barlıq kóptúrlilikti jasaydı.

Lemmanıń dálillemesi: Eger $c = 2$ bolsa kóptúrlilik $\hbar_2$ jasaydı, demek, $F_2(N_2) \leq (F_2(N_2))^m$ qatnası bazıbir ushın orınlanadı. $F_2(\hbar_2)$ gruppasın dekart dárejesiniń kóbeytiwshilerine proekciyalaw yadrolarınıń kesispeşi 1 ge teń gomomorfizmlerdi kommutatorlar arqalı jazılıw bir mánisli bolǵanlıqtan lemma bul jaǵday ushın dálillengen dep esaplaw múmkin.

Solay etip indukciya boyınsha dálillew ushın bazis bar dep esaplawǵa boladı. Endi lemmanı nilpotentlik basqısı $l = 1$ bolǵan gruppalar ushın durıs dep esaplaymız. Bunnan salmaǵı $c - 1$ den aspaytuǵın bazislik kommutatorlar $\mathcal{g}$

elementiniñ jazılıwına nol dáreje menen kiretuǵınlıǵı kelip shıǵadı. Solay etip, biz tek ǵana salmaǵı C ǵa teń bazislik kommutatorlar bar dep esaplawǵa boladı. Eger olardan bazı biri bar bolsa, onda biz G gruppasınıñ A gruppasına gomomorfizmi tabılıp g elementi 1 den ózgeshe obrazǵa iye ekenligin dálilleybiz.

$g = C_1^{\alpha_1} \dots C_l^{\alpha_l}$ jazılıwındaǵı hár bir kommutator erkin jasawshılardıñ bazı bir úles kópligin dúzedi. Eñ az sandaǵı erkin ózgeriwshiler kiretuǵın, aytayıq r dana C_i lerdi qaraymız. Onda G gruppasınıñ sonday ν avtomorfizmi tabılıp $g\nu$ dıñ kórsetiliwinde $g_1, g_2, \dots, g_r$ jasawshıları qatnasadı dep esaplawǵa boladı. $g_i^\pi = g_i, i=1, \dots, r$ hám $g_i^\pi = 1, i=r+1, \dots, k$ formulası menen π endomorfizmin qollanamız. Onda $g\nu\pi$ elementi $g_1, g_2, \dots, g_r$ jasawshıların tutatuǵın bazislik kommutatorlardan dúzilgen boladı. Endi Bizge $g\nu\pi$ birden ózgeshe obrazǵa iye bolatuǵın G nıñ A ǵa gomomorfizmin tabıw jetkilikli. $g_1, g_2, \dots, g_r$ elementlerinen dúzilgen soldan tártiplengen hár bir bazislik kommutator $[g_j, g_1, \dots, g_1, g_2, \dots, g_2, \dots, g_r, \dots, g_r]$ kórinisine iye bolıp, bunda g_i jasawshı $n_i > 0$ ret ushırasadı hám $2 \leq j \leq r$. Kerek bolsa jasawshılardıñ ornın almasıwshı ν^1 avtomorfizmin qollanıp $g\nu\pi\nu^1$ elementin tómendegi kóriniske iye dep esaplawǵa boladı.

$$[g_r, g_1, \dots, g_1, \dots, g_r, \dots, g_r]$$

$g\nu\pi\nu^1 = h$ dep belgilep alamız. $h\mu \neq 1$ bolatuǵın $\mu: G \rightarrow A$ gomomorfizminiñ bar ekenligin kórsetemiz.

μ di tómendegishe anıqlaymız.

$$g_i\mu = a^{m_i}$$

$$1 \leq i \leq r-1 \text{ ushın} \quad b = \mu = b^{mr}$$

$$i > r \text{ ushın} \quad g_i \mu = 1$$

Bunday anıqlanğan μ sáwlelendiriwinde h qa kiriwshi hám g_r den baslanbaytuǵın bazislik kommutator 1 ge sáwlelenedi. Bunnan tısqarı

$$[g_r, g_1, \dots, g_2, \dots, g_r, \dots, g_r] \mu = [b, a, \dots, a, b, \dots, b]^m$$

Bunda a elementi $n(a) = n_1 + \dots + n_{r-1}$ ret, b elementi $n(b) = n_r$ ret kiredi hám

$$m = m_1^{n_1} m_2^{n_2} \dots m_r^{n_r}$$

Endi h qa kiretuǵın $n(b)$ hám $n(a)$ sanları turaqlı bolatuǵın bazislik kommutatorlardı jıynaymız. Meyli $C_1, C_2, \dots, C_s$ usınday kommutatorlardıń barlıǵı bolsın. Onda $C_1 \mu, \dots, C_s \mu$ obrazları $d_1^{p_1}, \dots, d_s^{p_s}$ dárejelerine teń

$$d = [b, n(a)a, (n(b)-1)b] \leftarrow A$$

Bunnan

$$h = C_1^{\alpha_1} \dots C_s^{\alpha_s} h_1$$

teńligine iye bolamız. Bunda h_1 ge kiretuǵın bazislik kommutatorlardıń μ degi obrazları d dan ózgeshe. A gruppasındaǵı bazislik kommutatorlar erikli. $h\mu \neq 1$ ekenligin támiyinlew ushın

$$(C_1^{\alpha_1} \dots C_s^{\alpha_s}) \mu = d^\delta \neq 1$$

$$\delta = \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_s p_s$$

ekenligin kórsetiw kerek. Biraq barlıq p_i ler $m_1, \dots, m_s$ sanlarınıń mánisi, al α_i nolden ózgeshe pútin koeffitsientler. Solay etip, δ sanı Z ózgeriwshige iye polinomnıń mánisi, sonlıqtan $m_1, \dots, m_s$ sanların $\delta \neq 0$ bolmaytuǵınday etip saylap alıwǵa boladı. Bul dálillewdi juwmaqlaydı.

Juwmaq

Bul pitkeriw qániygelik jumısı házirgi zaman algebrasınıń kóplegen qollanıwlarına iye bolǵan metabellik gruppalar kóptúrliliginiń qásiyetlerin úyreniwge arnalǵan. Sońǵı waqıtları gruppalar dı kóptúrliliklerdiń qásiyetlerine baylanıslı klasslarǵa bólip úyreniw úlken áhmiyetke iye bolmaqta. Kóptúrliliklerge baylanıslı metodlar gruppalar teoriyasınıń rawajlanıwına úlken túrtki bolıp, óziniń jeke mashqalaların payda etti hám bul nárse jańa metodlardıń payda bolıwına alıp keldi.

Házirgi waqıtqa kelip eń kóp úyrenilgen gruppalar kóptúrlilikleriniń biri metabellik gruppalar kóptúrliligi esaplanadı. Soǵan qaramastan bul kóptúrliliktiń qásiyetlerin úyreniw úlken áhmiyetke iye bolıp qalmaqta.

Pitkeriw qániygelik jumısınıń nátiyjeleri tiykarınan teoriyalıq xarakterge iye bolıp, gruppalar teoriyası, ulıwma algebra boyınsha arnawlı kurs, seminarlarda, dógerek jumıslarında, fakultativ sabaqlarda paydalanılıwı múmkin.

Paydalanılğan ádebiyatlar

- [1]. M.I. Kargapolov, Yu.I. Merzlyakov. Osnobı teorii grupp-M: Nauka, 1982.
- [2]. Kurosh A.G. Teorii grupp-M: Nauka, 1967.
- [3]. Neyman X. Mnogoobraziya grupp-M: Mir, 1969.
- [4]. Magnus V, Karras A, Soliter D. Kombinatornaya teoriya grupp-M: Nauka, 1974.
- [5]. J.Hojiev, A.S. Faynleyb. Algebra va sonlar nazariyasi kursi.-T,UzBekiston, 2001.
- [6]. Allambergenov X.S. Gruppalar teoriyasınıń tiykarları. Nókis, QMU, 1994.
- [7]. Tajetdinov S. Gruppalar hám kolcolar teoriyasın úyreniwge metodikalıq kórsetpeler. Nókis, QMU, 2004.
- [8]. Allambergenov X.S., Romankov V.A. O proizvedeniyax kommutatorov v gruppax. Dokl. An. IzSSR, 1984, №2
- [9]. B. Shandler, V. Magnus. Razvitie kombinatornoy teorii grupp. M., Mir. 1985.
- [10]. Allambergenov X.S., Tajetdinov S., Júzbaev N. Algebra hám sanlar teoriyası. Nókis., QMU, 2005.