

**ÓZBEKISTON RESPUBLIKASI YUQORI VA ÓRTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI
BERDOQ NOMIDAGI QORAQOLPOQ DAVLAT
UNIVERSITETI**

Funkcional analiz, algebra va geometriya kafedrası

Fizika-matematika fakulteti «Matematika» ta'lim yonalishining
4-kurs talabasi

Serdaliev Sakenning

**« n ólchamli affin fazosida k ólchamli tekisliklar »
nomli**

BÍTIRUV MALAKAVIY ÍSHI

Ilimiy rahbar:
Kafedra rahbari:

f.-m.i.k. Jiemuratov R
f.m.i.d. Kudaybergenov K.K.

Nukus 2018

MUNDARIJA

KIRISH.....	3
1-§ n -ólchamli affin fazo	5
2-§ Affin koordinatalar sistemasi.....	11
3-§ A^n fazodagi k ólchamli tekislikning tariflanishi.....	21
4-§ Ólchami k bólgan tekislikning tenglamasi.....	29
5-§ Tekisliklarning óz-aro joylashishi.....	36
XULOSA.....	41
FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR.....	43

KIRISH

Analitik geometriya kursida ikki va uch ólchamli affin fazolarni kórib ótgan edik. Bu yerda tógri chiziqlar va tekisliklarning har xil xossalari affin koordinatalar sistemasi yordamida órganiladi. Uch ólchamli affin fazodagi tógri chiziqni bir ólchamli tekislik deb, tekislikning esa ózini ikki ólchamli tekislik deb ataymiz. Shu bir ólchamli, ikki ólchamli tekisliklar tushunchasini órganish katta ahamiyatga ega. Bir ólchamli va ikki ólchamli tekisliklarning ózaro joylashishi har xil kombinatsiyalari k ólchamli tekisliklarga ótganda qanday ózgarishini tekshirishda geometrik masalalar kelib chiqadi. Shularni tekshirish va tadqiq qilish ahamiyatli masala hisoblanadi. Shuning uchun ham bu bitiruv malakaviy ishida bir, ikki ólchamli tekisliklarni umulashtiruvchi k - ólchamli tekislik haqida sóz bóladi. Bu yyerda uch ólchamli affin fazo n ólchamliga umumlashadi.

Bitiruv malakaviy ishi kirish qismi, 5 paragraf, xulosa qismi va foydalanilgan adabiyotlar ruyxatidan iborat.

Birinchi paragrafda n -ólchamli affin fazosi aksiomatik usulda asoslanib berilgan. Bu paragrafda n -ólchamli affin fazoni aniqlaydigan tórtta guruhdan iborat 12 aksioma keltirilgan. Bundan sóng shu aksiomalar asosida kelib chiqadigan teoremlar keltirilgan va ularning isbotlanishi kórsatilgan.

Bitiruv malakaviy ishining ikkinchi paragrafida n -ólchamli affin fazodagi koordinatalar sistemasi tushunchasi kórib chiqildi. Shu koordinatalar sistemasi asosida nuqatning, vektorning koordinatalari aniqlanadi. Sóngra koordinatalar sistemasini almashtirish masalasi kórib ótildi.

Bitiruv malakaviy ishining uchinchi paragrafida A^n fazodagi k ólchamli tekislik kórib ótildi. Bu yerda chiziqli bogliqsiz nuqtalar haqida va Π_k tekislikning ózi k ólchamli fazo bólishi haqidagi teoremlardan kelib chiqadigan natijalar atab ótilgan.

Bitiruv malakaviy ishining tórtinchi paragrafida k -ólchamli tekislikning tenglamasi uning tarifi asosida keltirib chiqariladi. Bu paragrafda k ólchamli

tekislikning $(n - k)$ sondagi tenglamalar sistemasi bóyicha berilishi keltiriladi. Bundan s6ng gippertekislikning tenglamasi keltirib chiqariladi. Shu ishning beshinchi paragrafida A^n fazodagi tekisliklarning 6z-aro joylashshi hollari yani kesishishi, parallel b6lishi yoki ayqash b6lib joylashishi haqida masalalar k6rib 6tildi.

1-§. n -ólchamli affin fazo

Elementlari ikki guruhdan turadigan bósh bólmagan fazoni M deb belgilaymiz. Birinchi guruh elementlarni “vektorlar” deb ataymiz. M tóplamning vektorlar deb nomlanuvchi elementlarini lotin yoki kirill alfavitining kichik harflari bilan belgilab uning tepasiga strelka ($\rightarrow$) belgisini qóyamiz. Bu vektor belgisini bildiradi. Birinchi guruh elementlarining har bittasini vektor deb ataymiz. Demak, vektorlar $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \dots, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ deb belgilanar ekan. Bu yerdagi har bitta $\vec{x}$ elementni vektor deb ataymiz.

Birinchi guruh elementlari mana shu shartlarga bóysinsin degan shartni qóyamiz.

I. M tóplamning birinchi guruhi ixtiyoriy ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlariga ularning yígindisi deb nomlanuvchi $\vec{c} (\vec{c} \in M)$ vektor mos qóyilgan bólib, $\vec{a} + \vec{b} \quad (\vec{c} = \vec{a} + \vec{b})$ esa turida yozilsin.

Bu yerdagi $\vec{a} + \vec{b}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yigindisi deyiladi. Bu holda M tóplamning birinchi guruh elementlari orasida qóshish amali quyidagi shartlarga bóysinsin.

I₁. M tóplamning ixtiyoriy ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlari uchun

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

bajarilsin. Buni qóshishga nisbatan kommutativ qonun deb ataymiz.

I₂. M tóplamning ixtiyoriy uch $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlari uchun qóshishga nisbatan assotsiativ qonun bajarilsin, yani

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

I₃. M tóplamning nol vektor deb nomlanuvchi $\vec{0}$ elementi mavjud bólib, shu tóplamning ixtiyoriy $\vec{a}$ vektori uchun

$$\vec{a} + \vec{a}' = \vec{0}$$

shart bajarilsin.

I₄. M to'plamning ixtiyoriy $\vec{a}$ vektori (birinchi guruh elementi) uchun uning $\vec{a}'$ vektori topilib

$$\vec{a} + \vec{a}' = \vec{0}$$

shart bajarilsin.

Bu yerdagi $\vec{a}'$ vektorini $\vec{a}$ vektoriga qarama-qarshi vektor deb ataymiz, uni $(-\vec{a})$ orqali belgilaymiz.

$$\vec{a}' = -\vec{a}$$

II. M to'plamning ixtiyoriy $\vec{a}$ vektori va itiyoriy λ haqiqiy soniga shu to'plamning $\lambda \vec{a}$ vektori mos qo'yilgan. Shu $\lambda \vec{a}$ vektor $\vec{a}$ vektorning λ soniga ko'paytirishdan kelib chiqqan vektor deyiladi. M to'plamning $\vec{a}$ vektori va R haqiqiy sonlar to'plamining λ soniga $\lambda \vec{a}$ vektorni mos qo'yadigan amal vektorni songa ko'paytirish amali deyiladi.

Vektorni songa ko'paytirish amali quyidagi xossalarga ega bolsin.

II₁. M to'plamning ixtiyoriy ikki $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlari va ixtiyoriy $\lambda (\lambda \in R)$ soni uchun

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

tengligi o'rinli.

II₂. M to'plamning ixtiyoriy $\vec{a}$ vektori va ixtiyoriy ikki $\lambda_1 \lambda_2$ haqiqiy sonlari uchun

$$\lambda_1(\lambda_2\vec{a}) = \lambda_2(\lambda_1\vec{a}) = (\lambda_1\lambda_2)\vec{a}$$

tenglik bajariladi.

II₃. M to'plamning ixtiyoriy $\vec{a}$ vektori va ixtiyoriy ikki $\lambda_1 \lambda_2$ haqiqiy sonlari uchun

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{a}$$

tenglik bajariladi.

II₄. M tóplamning ixtiyoriy $\vec{a}$ vektori va 1 soni uchun quyidagi yozuv qóllaniladi.

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

III. M tóplamning birinchi guruh elementlari (vektorlari) uchun chiziqli bog'liqliq tushunchasini kiritamiz. Bu tushuncha tarif orqali beriladi.

1.1-tarif. M tóplamdagi $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$ vektorlar uchun eng kamida bittasi nolg teng bólmagan $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$ haqiqiy sonlar mavjud bólib

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0} \quad (1.1)$$

tenglik bajarilsa, u holda shu $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'liqli, (1.1) tenglik esa faqat

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

bólgandagina bajariladigan bólsa $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorlar sistemas chiziqli bog'liqsiz (erkli) deyiladi.

Tarifda kóringanidek (1.1) tenglikning chap tarafidagi ifoda $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi deyiladi.

Endi uchichi guruh aksiomalarni keltirib ótamiz.

III₁. M tóplamdagi chiziqli bog'liqchiz vektorlarning soni n ga teng.

III₂. M tóplamdagi ixtiyoriy $n+1$ sondagi vektorlar sistemas chiziqli bog'liqli.

1.2-tarif. Elementlari I₁-I₄, II₁-II₄, III₁-III₂ shartlarni qanoatlantiradigan tóplam n -ólchamli vektor fazo deyiladi. Uch gruhga bólib kórsatilgan shartlar vektor fazoning aksiomalari deyiladi.

M tóplamning ikkinchi guruh elementlarini nuqtalar deb ataymiz. Tóplamning nuqtalar deb ataluvchi elementlari $A, B, C, D, \dots, E, F$ orqali belgilanadi.

Endi M to'plamning birinchi guruh elementlari (vektorlar) bilan ikkinchi guruh elementlari (nuqtalar) o'rtasidagi bog'liqlikni aniqlab beradigan shartlarni keltirib o'tamiz.

IV. M to'plamning malum bir tartibda olingan ikki A va B nuqtalar juftligiga shu vektorning aniq bir $\vec{a}$ vektori mos kelsin.

A va B nuqtaga mos keluvchi vektorni $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ deb yozamiz. Bu yerdagi A nuqta $\overrightarrow{AB}$ vektorning boshlang'ich nuqtasi, B esa uning songi nuqtasi deyiladi. Shuning bilan birga bu yerda shuni ham aytishimiz kerakki M to'plamning har bitta vektoriga shu to'plamdagi tartiblangan nuqtalar juftliklarinig to'plami mos keladi.

Masalan:

$$\vec{a} = \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2} = \dots = \overrightarrow{A_kB_k}.$$

Demak, bitta $\vec{a}$ vektorga tartiblangan $(A_1B_1), (A_2B_2), \dots, (A_nB_n)$ nuqtalar juftligi mos kelar ekan.

Endi to'rtinchi guruh shartlarini (aksiomalarini) aytib o'tamiz.

IV₁. M to'plamning ixtiyoriy A nuqtasi va ixtiyoriy $\vec{a}$ vektori uchun shu to'plamning yagona B nuqtasi mavjud bo'lib

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$$

shart bajariladi.

IV₂. M to'plamdagi ixtiyoriy A, B, C nuqtalar uchun

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

shart o'rinli.

1.3-tarif. Elementlari ikki guruhga ajralgan bo'lib, birinchi guruh elementlari n olchovli vektor bo'ladigan (I₁- I₄, II₁- II₄, III₁- III₂ shartlari o'rinli bo'ladigan), ikkinchi guruh elementlari esa “nuqtalar” deb atalib birinchi guruh va ikkinchi guruh elementlari o'rtasida IV₁-IV₂ shartlar o'rinli bo'ladigan $M(M \neq \emptyset)$ to'plam n olchovli affin fazo deyiladi va u A^n orqali yozildi.

Demak, n ólchovli affin fazoni $A^n = V_n \cup \Omega$ turda yozishga bóladi. Bu yerdagi V_n deganimiz n -ólchovli vektor fazo, Ω esa nuqtalar tóplami. Vektorlar va nuqtalar tórtinchi guruhlar shartlari bóyicha boǵliqlikka ega bólishi kerak. Demak, affin fazoning barcha elementlari orasida munosabat órnatilgan.

Affin fazoni keltirib chiqaruvchi I_1 - I_4 , II_1 - II_4 , III_1 - III_2 , IV_1 - IV_2 shartlar fazoning aksiomalari deyiladi. Shu aksiomalar asosida n -ólchamli affin fazo órnatiladi.

Xususiyl holda $n=1$ bólganda bitta ólchamli affin fazo, yani affin tógrí chiziq, $n=2$ da ikki ólchamli affin fazo (affin tekislik) kelib chiqadi.

Affin fazoning aksiomalaridan kelib chiqadigan teoremlarni kórib chiqamiz.

1.1-teorema. Affin fazodagi ustma-ust tushadigan ikki nuqtaga shu fazodagi nollik vektor mos keladi, yani $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Isbot. Aytaylik $\forall A \in A^n$ bólsin. Affin fazoning A, A nuqtalariga A^n fazoda qandaydir $\vec{a} = \overrightarrow{AA}$ vektor mos kelsin. IV_1 aksioma bóyicha A nuqta va $\vec{b}$ vektorga shunday yagona B nuqta mos kelib $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ órinli bólsin. Agar IV_2 aksiomani foydalansak quyidagiga ega bólamiz:

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \vec{b}.$$

Bundan I_3 – aksiomaga asoslanib $\vec{a} = \vec{0}$ degan xulosaga kelamiz. Demak, $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

1.2-teorema. Agar $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ bólsa, u holda $\overrightarrow{BA} = -\vec{a}$.

Isbot. Biz $\overrightarrow{BA} = \vec{b}$ deb belgilaymiz. Shunda IV_2 aksiomaga asoslanib quyidagi munosabatni yozamiz:

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

Bundan

$$\vec{a} = -\vec{b} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}.$$

1.3-teorema. Agar $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ bólsa, u holda $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Isbot. IV₂ aksioma báyicha

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Bu yerda berilgan tenglikni hisobga olsak qóyidagiga ega bólamiz:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$$

Bunga IV₂ aksiomasini foydalansak

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}.$$

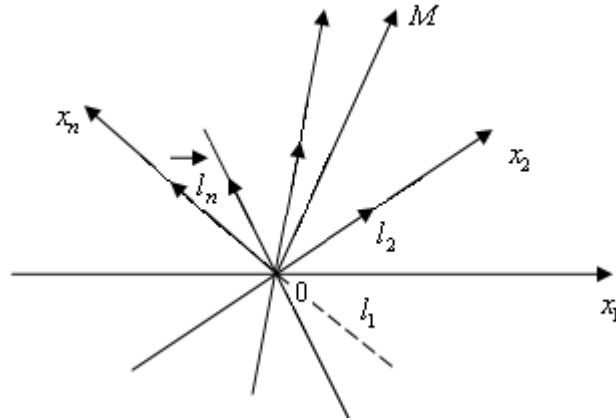
2-§. Affin koordinatalar sistemasi

Affin fazoda nuqta va vektor tushunchasi mavjudligidan u yerda affin koordinatalar sistemasi tushunchasini keltirish mumkin. Fazoda koordinatalar sistemasi kiritilgan holda nuqtaning, vektorning koordinatalari tushunchasi kelib chiqadi va ularning xossalari oson tekshiriladi. Koordinatalar sistemasini órnatish orqali geometrik figuralarni aniqlovchi tenglama yoki tengsizlikni hosil qilishimiz mumkin. Shuning natijasida figuralarning xossasi analitik usul bilan tekshirish mumkinligiga ega bólamiz. Shuning uchun affin koordinatalar sistemasini aniqlash ahamiyatli bólib, u haqidagi tushunchalarni kórib ótamiz.

2.1-tarif. Fazodagi O nuqtadan va chiziqli boǵliqsiz $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n$ nuqtalardan iborat figura affin koordinatalar sistemasi deyiladi. (bazida reper deyiladi). Affin reper $R = (O, \vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n)$ orqali yoziladi.

Affin reper berilishi uchun ikki narsani tanlab olishimiz kerak ekan: birinchisi O nuqta tanlab olinadi, ikkinchisi – chiziqli boǵliqsiz vektorlar sistemasi (n son da n i vektorlar) olinadi.

Affin reper berilsa, u holda O nuqtadan ótuvchi va har bittasi $\vec{l}_k$ ($k=1,2,\dots,n$) vektorga parallel tóǵri chiziqlar tanlab olinadi. Bularning har biri óq bólad i. $\vec{l}_k$ vektor bóyicha yónalish aniqlanadi. Bu óqlar koordinata óqlari deyiladi va ular $OX_1, OX_2, \dots, OX_n$ deb belgilanadi. (1-chizma) Har bir



1-chizma

óqni aniqlaydigan vektorlar $(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n)$ vektorlar koordinata vektorlari deyiladi. U O nuqta reper uchi yoki koordinata uchi deyiladi.

Agar $R = (O, \vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n)$ affin koordinatalar sistemasi berilgan bólsa, u holda $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n$ koordinata vektorlariga kollinear bólgan boshqa mos $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ vektorlarga $(\vec{b}_1 = \lambda_1 \vec{l}_1, \vec{b}_2 = \lambda_2 \vec{l}_2, \dots, \vec{b}_n = \lambda_n \vec{l}_n)$ reperlar bir affin (ustma-ust tushuvchi) koordinatalar sistemasini aniqlaydi. Shuning bilan birga ixtiyoriy chiziqli bog'liqsiz vektorlar sistemasini koordinata vektorlari etib qabul qilishimiz mumkin. Shunga uxshash A^n fazoning ixtiyoriy nuqtasini koordinata uchi deb olishimiz mumkni.

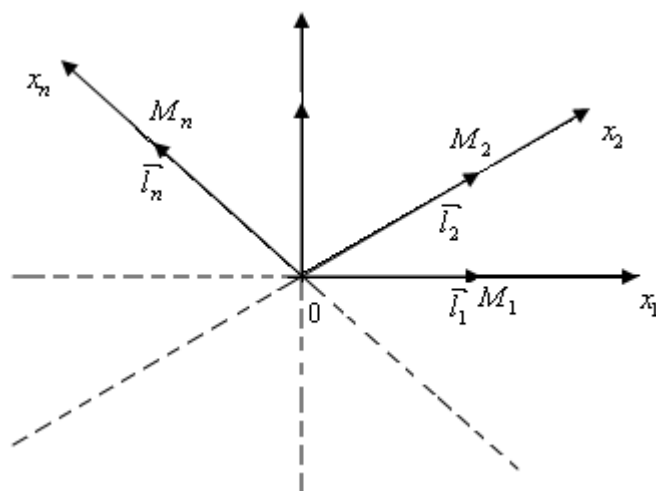
Affin koordinatalar sistemasiga nisbatan nuqtaning koordinatalari tushunshasini kiritamiz.

Aytaylik, A^n fazoda R reper berilgan bólsin. Fazoning qandayda bir M nuqtasini tanlab olamiz. U holda A^n fazoning O va M nuqtalariga (nuqtalar juftiga) $\overrightarrow{OM}$ mos keladi. Shu $\overrightarrow{OM}$ vektor M nuqtaning radius vektori deyiladi. (1-chizma) Affin repyerdagi $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'liqsiz bólad. Shundan chiziqli bog'liqli vektorlar sistemasining xossalariga asoslanib $\overrightarrow{OM}$ vektorni qolgan vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi turida kórsatishimizga bólad, yani

$$\overrightarrow{OM} = x^1 \vec{l}_1 + x^2 \vec{l}_2 + \dots + x^n \vec{l}_n \quad (2.1)$$

$\overrightarrow{OM}$ vektorining chiziqli ifodasidagi, yani (2.1) tenglikdagi $x^1, x^2, \dots, x^n$ sonlar M nuqtaning R repera nisbatan affin koordinatalari deyiladi. Nuqtaning affin koordinatalarini kórsatish uchun $M(x^1, x^2, \dots, x^n)$ yozuvi qóllaniladi.

Biz R repyerdagi $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n$ koordinata vektorlariga moslasuvchi va O nuqta bilan juftlilik tuzadigan nuqtalarni $M_1 M_2 \dots M_n$ orqali belgilaymiz. (2-chizma). Shunda shu nuqtalarning radius vektorlarining kórinishi



2-chizma

uchun quyidagicha yozamiz:

$$\overrightarrow{OM_1} = \vec{l}_1, \quad \overrightarrow{OM_2} = \vec{l}_2, \quad \dots, \quad \overrightarrow{OM_n} = \vec{l}_n$$

Bularning har bittasini

$$\overrightarrow{OM_1} = 1 \cdot \vec{l}_1 + 0 \cdot \vec{l}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{l}_n$$

$$\overrightarrow{OM_2} = 0 \cdot \vec{l}_1 + 1 \cdot \vec{l}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{l}_n$$

.....

$$\overrightarrow{OM_n} = 0 \cdot \vec{l}_1 + 0 \cdot \vec{l}_2 + \dots + 1 \cdot \vec{l}_n$$

kórinishida yozib kórsatishimiz mumkin. Buni (2.1) tenglik bilan solishtirsak $M_1(1,0,...,0), M_2(0,1,0,...,0),..., M_n(0,0,...,1)$ ekanligi kelib chiqadi.

Vektorning boshlan g ich va oxirgi nuqtalarining koordinatalari malum bólgan holda shu vektorning koordinatalarini topish masalasini kórib chiqamiz.

2.1-misol. A^n fazodagi M va N nuqtalarning R repera nisbatan koordinatalari malum bólsin, yani $M(x^1, x^2, ..., x^n)$ va $N(y^1, y^2, ..., y^n)$. SHu nuqtalarga mos keluvchi $\overrightarrow{MN}$ vektorning koordinatalarini toping.

Echimi. A^n fazodagi $M(x^1, x^2, ..., x^n)$ va $N(y^1, y^2, ..., y^n)$ nuqtalar ózlarining koordinatalari bilan birgalikda berilgan bólsin. U holda bu nuqtalarning radius vektorlari qóyidagicha bólad:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= x^1\vec{l}_1 + x^2\vec{l}_2 + ... + x^n\vec{l}_n \\ \overrightarrow{ON} &= y^1\vec{l}_1 + y^2\vec{l}_2 + ... + y^n\vec{l}_n\end{aligned}\tag{2.2}$$

Affin fazoning IV_2 aksiomasi bóyicha O, M, N nuqtalari uchun

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON}$$

tenglikni yozishga bólad. Bu yerdan

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}\tag{2.3}$$

ekanligi kelib chiqadi. $\overrightarrow{OM}$ va $\overrightarrow{ON}$ vektorlarning (2.2) tenglikdagi ifodalarini (2.3) tenglikka qóysak $\overrightarrow{MN}$ vektorning chiziqli ifodasi kelib chiqadi:

$$\overrightarrow{MN} = (y^1\vec{l}_1 + y^2\vec{l}_2 + ... + y^n\vec{l}_n) - (x^1\vec{l}_1 + x^2\vec{l}_2 + ... + x^n\vec{l}_n)$$

yoki

$$\overrightarrow{MN} = (y^1 - x^1)\vec{l}_1 + (y^2 - x^2)\vec{l}_2 + \dots + (y^n - x^n)\vec{l}_n.$$

Demak, $\overrightarrow{MN}$ vektor R reperining $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n$ bazislik vektorlari orqali chiziqli ifodalanadi. Shundan $\overrightarrow{MN}$ vektor

$$\overrightarrow{MN} = \{y^1 - x^1, y^2 - x^2, \dots, y^n - x^n\}$$

koordinatalarga ega.

2.2-misol. Aytaylik $[A, B]$ kesma berilgan bólsin. Shu kesmani λ nisbatta bóluvchi C nuqtaning koordinatalarini toping.

Echimi. Kesmani berilgan nisbatta bólishning tarifi bóyicha $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}$ bólsa, u holda C nuqta AB tógriga yaqin $[A, B]$ kesmani λ nisbatta bóladí deb ataymiz. Bu yerdagi λ soni (ABC) orqali belgilanib, u uch nuqtaning oddiy nisbati deyiladi:

$$(ABC) = \lambda = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} \quad (2.4)$$

Agar C nuqta $[A, B]$ kesmaning ichida joylashsa $\lambda > 0$, al $[A, B]$ kesmaning davomlarida (sirtida) joylashsa $\lambda < 0$. Shuning bilan birga $\lambda \neq -1$ teskari holda, yani $\lambda = -1$ bólganda

$$\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Rightarrow A = B$$

bóladi. Bunaqa bólishi mumkin emas. Shunki $[A, B]$ kesmaning A va B uchlari har xil nuqtalar.

Aytaylik $[A, B]$ kesmaning uchlarining koordinatalari berilgan bólsin $A(x^1, x^2, \dots, x^n)$, $B(y^1, y^2, \dots, y^n)$. Biz C nuqtaning koordinatalarini $z^1, z^2, \dots, z^n$ deb belgilaymiz. U holda $\overrightarrow{AC}$ va $\overrightarrow{CB}$ vektorlarning koordinatalari mana bu turda yoziladi.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \{z^1 - x^1, z^2 - x^2, \dots, z^n - x^n\} \\ \overrightarrow{CB} &= \{y^1 - z^1, y^2 - z^2, \dots, y^n - z^n\}\end{aligned}$$

yoki

$$\begin{aligned}\vec{AC} &= (z^1 - x^1)\vec{l}_1 + (z^2 - x^2)\vec{l}_2 + \dots + (z^n - x^n)\vec{l}_n \\ \vec{CB} &= (y^1 - z^1)\vec{l}_1 + (y^2 - z^2)\vec{l}_2 + \dots + (y^n - z^n)\vec{l}_n\end{aligned}$$

Bularni (2.4) tenglikka qóyamiz. Shunda quyidagi tenglik kelib chiqadi:

$$\begin{aligned}& (z^1 - x^1)\vec{l}_1 + (z^2 - x^2)\vec{l}_2 + \dots + (z^n - x^n)\vec{l}_n = \\ & = \lambda \left[(y^1 - z^1)\vec{l}_1 + (y^2 - z^2)\vec{l}_2 + \dots + (y^n - z^n)\vec{l}_n \right]\end{aligned}$$

Bu yerda $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n$ vektorlarning oldidagi koeffitsientlarini yig'ib chiqsak quyidagi ifoda kelib chiqadi:

$$\left[z^1 - x^1 - \lambda(y^1 - z^1) \right] \vec{l}_1 + \left[z^2 - x^2 - \lambda(y^2 - z^2) \right] \vec{l}_2 + \dots \quad (2.5)$$

$\vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'liqsiz bo'lganligi uchun (2.5) tenglikdagi vektorlarning oldida turgan koeffitsientlar nólga teng bo'lishi kerak:

Bu tengliklarning birinchisini

kórinishida yozamiz. Bundan C nuqtaning z^1 koordinatasini x^1 va y^1 orqali ifodalaymiz.

Shunga uxshash C nuqtaning qolgan koordinatalari ham quyidagicha topiladi:

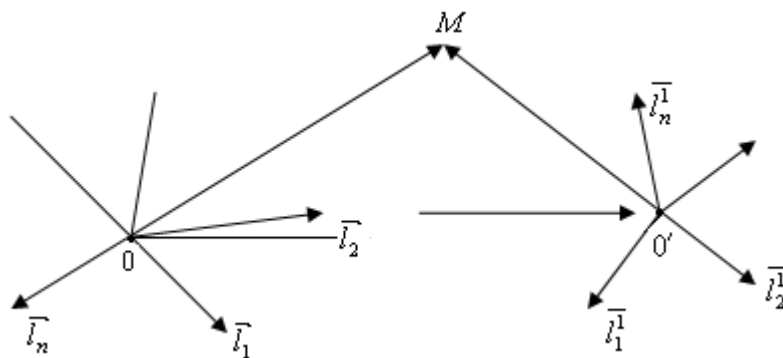
Xususiyl holda C nuqta $[A, B]$ kesimaning órtasida joylashsa, u holda $\lambda = 1$ bólib, uning koordinatalari mana bu formula bóyicha topiladi:

Kelib chiqqan (2.7) va (2.6) formulalar $[A, B]$ kesmani λ nisbatta bóluvchi C nuqtaning koordinatalarini topishda qóllaniladi.

Endi affin koordinatalar sistemasini almashtirish formulasini kórib chiqamiz. Buning uchun A^n fazoda $R = (0, \vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n)$ reper tanlab olamiz. Shu reporni dastlabki (birinchi) reper deb ataymiz. Ikkinchi $R' = (0', \vec{l}'_1, \vec{l}'_2, \dots, \vec{l}'_n)$ reporni belgilab olib, uni yangi reper deb ataymiz. Fazoning qandaydir M nuqtasining R reperga nisbatan koordinatalari $(x^1, x^2, \dots, x^n)$. Shu nuqtaning R' reperga nisbatan koordinatalari $(y^1, y^2, \dots, y^n)$ bólsin. Biz M nuqtaning R va R' reperlarga nisbatan bog'liqlikni keltirib chiqaramiz (3-chizma).

Aytaylik R' reporning R reperga nisbatan koordinatalari malum bólsin, yani

$$\begin{aligned} &O'(a_{10}, a_{20}, \dots, a_{n0}), \vec{l}'_1 \{a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}\} \\ &\vec{l}'_2 \{a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}\}, \dots, \vec{l}'_n \{a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{nn}\} \end{aligned}$$



3-chizma

U holda

$$\begin{cases} \vec{OO'} = a_{10}\vec{l}_1 + a_{20}\vec{l}_2 + \dots + a_{n0}\vec{l}_n \\ \vec{l}'_1 = a_{11}\vec{l}_1 + a_{21}\vec{l}_2 + \dots + a_{n1}\vec{l}_n \\ \vec{l}'_2 = a_{12}\vec{l}_1 + a_{22}\vec{l}_2 + \dots + a_{n2}\vec{l}_n \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \vec{l}'_n = a_{1n}\vec{l}_1 + a_{2n}\vec{l}_2 + \dots + a_{nn}\vec{l}_n \end{cases} \quad (2.8)$$

M nuqtaning R va R' reperlariga nisbatan radius vektorlarini xossasi b6yicha mana bularni yozishimiz mumkin:

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= x^1\vec{l}_1 + x^2\vec{l}_2 + \dots + x^n\vec{l}_n \\ \vec{O'M} &= y^1\vec{l}'_1 + y^2\vec{l}'_2 + \dots + y^n\vec{l}'_n \end{aligned} \quad (2.9)$$

3-chizmada k6rsatilgan chizmaga asoslanib mana bu tenglikni yozishimiz mumkin b6ladi:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

Bunga vektorlarning (2.8) va (2.9) yoyilmadagi qiymatlarini olib kelib q6ysak, mana bu tenglik kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} x^1\vec{l}_1 + x^2\vec{l}_2 + \dots + x^n\vec{l}_n &= a_{10}\vec{l}_1 + a_{20}\vec{l}_2 + \dots + a_{n0}\vec{l}_n + y^1(a_{11}\vec{l}_1 + a_{21}\vec{l}_2 + \dots + a_{n1}\vec{l}_n) + \\ &+ y^2(a_{12}\vec{l}_1 + a_{22}\vec{l}_2 + \dots + a_{n2}\vec{l}_n) + \dots + y^n(a_{1n}\vec{l}_1 + a_{2n}\vec{l}_2 + \dots + a_{nn}\vec{l}_n) \end{aligned}$$

yoki

$$x^1 \vec{l}_1 + x^2 \vec{l}_2 + \dots + x^n \vec{l}_n = (a_{11}y^1 + a_{12}y^2 + \dots + a_{1n}y^n + a_{10})\vec{l}_1 + \\ + (a_{21}y^1 + a_{22}y^2 + \dots + a_{2n}y^n + a_{20})\vec{l}_2 + \dots + (a_{n1}y^1 + a_{n2}y^2 + \dots + a_{nn}y^n + a_{n0})\vec{l}_n.$$

Affin repning koordinata vektorlari chiziqli bog'liqsiz bo'lganligi uchun keyingi tenglik órinli bo'lishi uchun $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n$ vektorlarning oldidagi koeffitsientlari teng bo'lishi kerak. Shundan mana bu tenglik kelib chiqadi:

[illegible]

Kelib chiqqan (2.10) tenglik koordinatalar sistemasini almashtirish formulasi deyiladi. Shu formuladagi koeffitsientlardan tuzilgan (a_{ij}) matritsa teskari matritsaga ega bólib, u birinchi koordinatalar sistemasidan ikkinchi koordinatalar sistemasiga ótish matritsasi deyiladi.

Demak, (a_{ij}) matritsa uchun $\det(a_{ij}) \neq 0$.

3-§. A^n fazodagi k ólchamli tekislikning tariflanishi

A^n affin fazoning vektorlari deb nomlanuvchi birinchi guruh elementlari n ólchamli vektor fazo bólishini aytib ótdik. Shu vektor fazoni V_n orqali belgilaylik.

Aytaylik n ólchamli affin fazoda $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ nuqtalar sistemasi olingan bólsin.

3.1-tarif. Agar $\vec{A_0A_1}, \vec{A_0A_2}, \dots, \vec{A_0A_n}$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'liqsiz bólsa, u holda $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ nuqtalar sistemasi bog'liqsiz deyiladi.

Bu tarifdan va III_1 aksiomadan A^n fazodagi chiziqli bog'liqsiz bólgan nuqtalarning soni $n+1$ ga teng ekanligi kelib chiqadi. Chiziqli bog'liqsiz bólmagan nuqtalar sistemasini chiziqli bog'liqli deb ataymiz. Affin fazoning III_2 aksiomasiga asoslanib n ólchamli fazoda chiziqli bog'liqli bóladigan eng kamida $n+2$ nuqta mavjud bóлади deb aytishimiz mumkin. Bu yerda shuni da aytishimiz kerakki chiziqli bog'liqsiz bóladigan nuqtalar har xil bólishi $n+2$ bólganda uch nuqtadan turadigan nuqtalar sistemasi chiziqli bog'liqsiz bólishi uchun ularning uchtasi ham bir vaqtning ózida bir tógrining bóyida yotmasligi zarur va etarli.

Biz k ólchamli tekislik tushunchasini kiritish uchun affin fazoni keltirib chiqaruvchi V_n vektor fazoning V_k qism fazosini belgilab olamiz. $(V_n \subset V_k)$ u holda V_k vektor fazo A^n fazoda qism fazo bólgan A^k affin fazoni keltirib chiqaradi.

3.2-tarif. A^n affin fazoning belgilab olingan M_0 nuqtasi uchun $\overrightarrow{M_0M} \in V_k$ sharti órinli bóladigan barcha $M(M \in A^n)$ nuqtalar tóplami k ólchamli tekislik deyiladi.

O'lchami k bólgan tekislikni Π_k deb belgilaymiz. Tarifda atab ótilgan M_0 nuqta Π_k tekislikning boshlang'ich nuqtasi deyiladi. Shu Π_k tekislikni keltirib chiqaruvchi k ólchamli vektor fazo V_k bóлады.

Biz Π_k tekislikning xususiy turlari bilan tanishib ótamiz.

1) $k = 0$ бўлган holda $\overrightarrow{M_0M}$ vektor nollik vektor бўлиб, Π_0 tekislik faqat bitta M_0 nuqtadan iborat бўлиб qoladi. Demak, A^n fazodagi har bitta nuqta nol ólchamli tekislik бўladi.

2) $k = 1$ бўлган holda Π_1 tekislik bir ólchamli tekislik бўлиб, u holda u tóg'ri chiziqli deyiladi. Shunki tóg'ri chiziqli keltirib chiqaruvchi ya'ni uning yónalishli vektorlari óz-aro kollinear vektorlar бўladi. Boshqacha aytganda V_k tekislikda fikserlab olingan vektorga kollinear vektorlar бўladi. Shundan $\overrightarrow{M_0M}$ vektor berilgan $\vec{a}$ vektorga kollinear бўлиb qoladi. Shu $\vec{a}$ vektor yoki ónga kollinear бўлган ixtiyoriy nollik emas vektor Π_1 tóg'riining yónalishli vektorí vazifasini bajaradi.

3) $k = 2$ бўлган holda Π_2 tekislik ikki ólchamli tekislik бўladi. Shunki óni keltirib chiqaruvchi vektor fazo ikki ólchamli бўлиb qoladi. Bu fazodagi chiziqli bog'liqsiz vektor sistemasining soni 2-ga teng. Ikki ólchamli tekislikni tógridan-tóg'ri tekislik deb ataymiz.

4) $k = n-1$ бўлган holda A^n fazodagi Π_{n-1} tekislikni giper tekislik deb ataymiz. Gipertekislikning ólchami ózi joylashgan asosiy fazoning ózidan ya'ni ólchamidan bir birlikka kam бўladi. Masalan, uch ólchamli affin (evklidlik) fazodagi tekislik gipertekislik deb aytsak бўladi.

5) $k = n$ бўлган holda $\Pi_k(\Pi_n)$ tekislik barcha A^n fazo bilan yuzlashib qoladi. Shundan n ólchamli affin fazoning ózi ham n ólchamli tekislik бўladi.

Endi Π_k tekislikka bog'liqli bir qancha teoremlarni kórib chiqamiz.

3.1-teorema. Ólchami k бўлган Π_k tekislikda $(k+1)$ sondagi nuqtalardan iborat chiziqli bog'liqsiz бўлган nuqtalar sistemasining eng kamida bittasi mavjud.

Isbot. Aytaylik Π_k tekislikdagi keltirib chiqaruvchi V_k vektorlar fazoning bazislik vektorlari $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n$ bólsin. Π_k tekislikning boshlan g'ich nuqtasini M_0

deb belgilab olamiz. V_k fazodan $\vec{a}$ ($\vec{a} \in V_k$) vektorni saylab olamiz. Shunda affin fazoning IV₁ aksiomasi bóyicha $\overrightarrow{M_0M} = \vec{a}$ vektor bóyicha aniqlanadigan M nuqta Π_k tekislikda yotadi. Biz $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n$ bazislik vektorlarni olib, bular orqali aniqlangan

$$\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{l}_1, \overrightarrow{M_0M_2} = \vec{l}_2, \dots, \overrightarrow{M_0M_k} = \vec{l}_k$$

vektorlarni kórib chiqamiz. U holda Π_k tekislikda yotadigan $(k+1)$ sondagi $M_0, M_1, M_2, \dots, M_k$ nuqtalar sistemasiga ega bólamiz. Bu nuqtalar sistemi chiziqli bog'liqsiz bóladir. Shunki $\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_2}, \dots, \overrightarrow{M_0M_k}$ vektorlar sistemi chiziqli bog'liqsiz. Biz V_k fazoning boshqa $\vec{l}'_1, \vec{l}'_2, \dots, \vec{l}'_k$ bazislik vektorini olsak, u holda $\overrightarrow{M_0M'_1} = \vec{l}'_1, \overrightarrow{M_0M'_2} = \vec{l}'_2, \dots, \overrightarrow{M_0M'_k} = \vec{l}'_k$ bóladigan chiziqli bog'liqsiz $M_0, M'_1, M'_2, \dots, M'_k$ nuqtalar sistemasiga ega bólib, ular Π_k tekislikda yotadi.

Shundan Π_k tekislikda eng kamida chiziqli bog'liqsiz bólgan bitta nuqtalar sistemi mavjud.

3.2-teorema. Π_k tekislikning ixtiyoriy nuqtasiga uning boshlan g ich nuqtasi deb qabul qilgan edik. Aytaylik N_0 nuqta Π_k tekislikning M_0 nuqtadan boshqa nuqtasi bólsin, yani $N_0 \in \Pi_k, M_0 \neq N_0$. Bu yerda N nuqta faqat Π_k tekislikda yotgan holda $\overrightarrow{N_0N} \in V_k$ bólishini kórsatsak teoremani isbotlagan bólamiz.

Aytaylik $\overrightarrow{N_0N} \in V_k$ bólsin. Bu holda $\overrightarrow{M_0N_0} \in V_k$ bóladir. Shunki Π_k tekislikning aniqlanishi bóyicha $N_0 \in \Pi_k$. U holda affin fazoning IV₂ aksiomasi bóyicha mana bu munosabatni yozishimiz mumkin:

$$\overrightarrow{M_0N} = \overrightarrow{M_0N_0} + \overrightarrow{N_0N} \in V_k.$$

Shunki $\overrightarrow{N_0N_0} \in V_k, \overrightarrow{N_0N} \in V_k$ Π_k tekislikning tarifi bóyicha $N \in \Pi_k$ bóladir. Teskarisi bóyicha, $N \in \Pi_k$ bólsin. U holda $\overrightarrow{M_0N} \in V_k$. Bundan $\overrightarrow{N_0N} \in V_k$.

Demak, $N \in V_k$ b6lishi uchun $\overrightarrow{N_0 N} \in V_k$ b6lishi zarur va etarli ekan. Bundan N_0 nuqta Π_k tekislikning boshlan g ich nuqtasi b6lishi kelib chiqadi.

3.3-teorema. A^n fazodagi har qanday Π_k tekislik 6z navbatida k 6lchamli affin fazo b6ladi.

Isbot. Aytaylik Π_k tekislik A^n fazoning k 6lchamli tekisligi b6lsin. Bu tekislik affin fazo b6lishi uchun nuqta va vektor orasidagi bogliqliqni 6rnatadigan IV_1 va IV_2 aksiomalarning 6rinli ekanligini k6rsatishimiz kerak.

Aytaylik M va N nuqtalar Π_k fazoning erkli nuqtalari b6lsin. U holda Π_k tekislikning tarifi b6yicha $\overrightarrow{M_0 M} \in V_k$, $\overrightarrow{M_0 N} \in V_k$ shartlar 6rinli b6ladi. Affin fazoning IV_2 aksiomasiga asoslanib mana bu tenglikni yozamiz:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MM_0} + \overrightarrow{M_0 N} = \overrightarrow{M_0 N} + \overrightarrow{MM_0} = \overrightarrow{M_0 N} + (-\overrightarrow{M_0 N}) \in V_k$$

yoki

$$\overrightarrow{MN} \in V_k.$$

Demak, Π_k tekislikdan malum bir tartibda tanlab olingan M va N nuqtalarga V_k vektor fazoda $\overrightarrow{MN}$ vektor mos keladi. Bu xulosa IV_1 aksiomaning 6rinli ekanligini k6rsatadi. Shuning bilan birga IV_2 aksioma A^n fazoda 6rinli b6lganligi uchun uning qism t6plami $\Pi_k (\Pi_k \subset A^n)$ tekislikda bajariladi. Shundan Π_k tekislik k 6lchamli affin fazo b6ladi.

3.4-teorema. n 6lchamli affin fazodagi M_0 nuqta va chiziqli bogliqsiz $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_k$ ($k \leq n$) vektorlar sistemasi faqat bir tekislikni aniqlaydi.

Isbot. Aytaylik V_k vektor fazoning bazislik vektorlari $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n$ b6lsin. Biz A^n fazoning M_0 nuqtasini belgilab olamiz. Bu holda M_0 nuqta va chiziqli

boʻliqsiz boʻlgan $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n$ vektorlar sistemasi A^n fazoda Π_k tekislikni aniqlaydi. (Π_k tekislikning taxrifi). Biz shu tekislikning yagona ekanligini isbotlaymiz. Buning uchun teskari tasdiqni qabul qilaylik.

Aytaylik M_0 nuqta va $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_k$ vektorlar orqali aniqlangan boshqa Π'_k tekislik mavjud boʻlsin. Bizning qabul qilishimiz boʻyicha $\Pi_k \neq \Pi'_k$. Bu erde $M_0 \in \Pi'_k$. Biz Π'_k tekislikni keltirib chiqaruvchi vektor fazoni V'_k deb belgilaymiz. V'_k vektor fazosi chiziqli boʻliqsiz boʻlgan $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_k$ vektorlar sistemasini oʻz ichiga oladi. Ikki V_k va $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_k$ vektor fazolarning keishmasi ularning oʻlchamlariga teng boʻlgan sonidagi chiziqli boʻliqsiz vektorlar sistemasini oʻz ichiga olgani uchun, yani

$$V_k \cap V'_k = \{ \vec{l}'_1, \vec{l}'_2, \dots, \vec{l}'_k \}$$

shart bajarilganligidan $V_k = V'_k$ boʻladi. Endi Π_k va Π'_k tekisliklarning yuzlanishini kósatamiz. Buning uchun tekislikning ixtiyoriy $M (\forall M \in \Pi_k)$ nuqtasini olamiz. Shunga uxshash Π'_k tekisliknin ixtiyoriy M' nuqtasini belgilab olamiz. U holda Π_k va Π'_k tekisliklarning tarifi boʻyicha $\overrightarrow{M_0 M} \in V_k$, $\overrightarrow{M_0 M'} \in V'_k$ shart bajariladi. Bu yerda $V_k = V'_k$ boʻlganligi uchun $\overrightarrow{M_0 M} \in V'_k$, $\overrightarrow{M_0 M'} \in V_k$ órinli boʻlishi kelib chiqadi. Bularning $M \in \Pi'_k$ va $M' \in \Pi'_k$ ekanligi malum boʻladi. Demak, Π_k tekislikning ixtiyoriy M nuqtasi Π'_k tekislikning nuqtasi boʻlganidan $\Pi_k \subset \Pi'_k$ deb aytamiz va oʻz navbatida Π'_k deb ataymiz va oʻz navbatida Π'_k tekislikning ixtiyoriy M' nuqtasi Π_k tekislikka tegishli boʻlganligi uchun $\Pi'_k \subset \Pi_k$ degan xulosaga kelamiz. Shundan $\Pi_k = \Pi'_k$ tenglik kelib chiqadi, yani Π_k tekislik faqat bitta boʻladi.

Shu teoremadan mana bu natija kelib chiqadi:

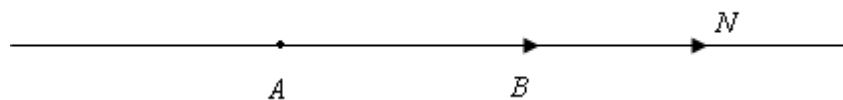
1⁰. n ólchamli affin fazodagi $(k+1)$ sondagi ixtiyoriy chiziqli bog'liqsiz nuqtalar sistemasi k ólchamli faqat bitta tekislikni ifodalovchi yani shu nuqtalar orqali yagona Π_k tekislik ótadi.

2⁰. A^n affin fazodagi n sondagi chiziqli bog'liqsiz nuqtalar sistemasi faqat bitta gipertekislikni aniqlaydi.

Endi biz bir ólchamli Π_1 tekislikni kórib chiqamiz. Π_1 tekislik A^n fazoda tóg'ri chiziq deyiladi. Shu tóg'ri chiziqni keltirib chiqaruvchi fazo bir ólchamli vektor fazo bólib, uni V_1 deb belgilaymiz. Bir ólchamli vektor fazodagi chiziqli bog'liqsiz vektorning soni birga teng.

Aytaylik, V_1 fazoning bazislik vektori $\vec{a}$ bólsin. Buni Π_1 tóg'ri chiziqning yónaltiruvchi vektori deb ataymiz. Agar $\vec{a}$ -yónaltiruvchi vektor bólsa, u holda har qanday $\vec{b} = \lambda \vec{a} (\lambda \neq 0, \lambda \in R)$ vektorda Π_1 tóg'rinings yónaltiruvchi vektori bólad.

Tóg'ri chiziqning ikki A va B nuqtalarini belgilab olamiz (4-chizma). Unda shu tóg'rinings yónaltiruvchi



4-rasm

Vektori bólib $\overrightarrow{AB}$ vektor xizmat qiladi. U holda Π_1 tóg'rinings ixtiyoriy N nuqtasi uchun $\lambda \in R$ soni mavjud bólib,

$$\overrightarrow{AN} = \lambda \overrightarrow{AB} \quad (3.1)$$

tenglik órinli bólad.

3.3-tarif. Π_1 tógridagi N nuqta uchun (3.1) tekislikdagi λ soni $0 < \lambda < 1$ shartini qanoatlantirsa, u holda shu nuqta A va B nuqtalarning orasida joylashgan deyiladi.

Π_1 tógridagi N nuqta gu tógridagi A va B nuqtalarning orasida yotadi degan tushunchani $\mu(ANB)$ orqali belgilaymiz.

Biz “orasida” yotadi tushunchasining xossasini keltirib chiqarish uchun (3.1) tenglikni quyidagicha yozamiz:

$$\overrightarrow{NA} = \lambda \overrightarrow{BA} \quad (3.2)$$

U holda

$$\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{NA} \quad (3.3)$$

Kelib chiqqan (3.2) va (3.3) tengliklardan mana bunga ega bólamiz:

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} - \lambda \overrightarrow{BA} = (1 - \lambda) \overrightarrow{BA}$$

Agar $1 - \lambda = \lambda_1$ deb belgilab olsak, u holda

$$\overrightarrow{BN} = \lambda_1 \overrightarrow{BA} \quad (3.4)$$

bu yerda $0 < \lambda < 1 \Rightarrow 0 < \lambda_1 < 1$.

Nuqtaning “orasida” yotadi degan tushuncha bóyicha N nuqta A va B nuqtalarning orasida yotadi degan tushunchaning qiymatini bildiradi va (3.4) tenglikdan kelib chiqadi. Shundan bir tógrining bóyida yotadigan uch nuqtaning bittasi qolganlarining orasida yotadi degan tushuncha mana bu xossaga ega:

$$\mu(ANB) \Rightarrow \mu(BNA).$$

Demak, N nuqta A va B nuqtalarning orasida yotsa, u holda shu N nuqta B va A nuqtalarning orasida yotadi ekan.

Nuqtaning orasida yotadi tushunchasidan foydalanib kesmaga tarif beramiz.

3.4-tarif. Π_1 tekislikdagi ikki har xil A va B nuqtalardan yana $\mu(ANB)$ bôladigan barcha N nuqtalardan iborat nuqtalar tóplami kesma deyiladi. Kesma $[A, B]$ orqali yoziladi.

Demak, kesma mana bu turda aniqlanadi.

$$[AB] = \{A, B\} \cup \{N / \mu(ANB)\}$$

Shunga uxshash, boshlan g ich nuqtasi A bôlgan $[A, B]$ nur quyidagicha aniqlanadi:

$$[AB] = [A, B] \cup \{N / \mu(ABN)\}$$

Yuqorida atab ótilgan $[A, B]$ kesmada A va B nuqtalar uning uchlari deyiladi.

Shunday qilib, A^n fazoda “tekislik”, “yarim tekislik”, “fazo”, “yarim fazo” tushunchalarini ham aniqlash mumkin.

4-§. O'lchami k b6lgan tekislikning tenglamasi

Affin fazoda koordinatalar sistemasini tanlab olish orqali tekislikning tenglamasini tuzish imkoniyatiga ega b6lamiz. Shuning uchun n 6lchamli affin fazoda $R = (0, \vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n)$ affin koordinatalar sistemasini tanlab olamiz. O'lchami k b6lgan Π_k tekislikning boshlang'ich nuqtasini M_0 deb belgilab olamiz. M_0 nuqtaning R repenga nisbatan koordinatalari $(x_0^1, x_0^2, x_0^3, \dots, x_0^n)$ b6lsin. Π_k tekislikni ifodalovchi V_k vektor fazoning bazislik vektorlarini $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ orqali belgilaymiz.

Aytaylik, $M(x^1, x^2, \dots, x^n)$ nuqta Π_k tekislikning erkli nuqtasi b6lsin. Bu yerdagi $x^1, x^2, \dots, x^n$ sonlar M nuqtaning R repenga nisbatan koordinatalari Π_k tekislikning tarifi b6yicha uning ustida 6zgaruvchi ixtiyoriy M nuqta uchun $\overrightarrow{M_0M} \in V_k$ b6lishi kerak. Shuning uchun $\overrightarrow{M_0M}$ vektor V_k vektor fazoning bazislik vektorlari orqali chiziqli ifodalanadi, yani

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_k \vec{u}_k, \quad \lambda_i \in R \quad (4.1)$$

$\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ vektorlar A^n fazodagi vektorlar b6lgani uchun $R = (0, \vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n)$ repening koordinata vektorlari orqali chiziqli ifodalanadi. Buni mana bu turda yozamiz:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_0M} &= (x^1 - x_0^1) \vec{l}_1 + (x^2 - x_0^2) \vec{l}_2 + \dots + (x^n - x_0^n) \vec{l}_n \\ \vec{u}_1 &= a_{11} \vec{l}_1 + a_{21} \vec{l}_2 + \dots + a_{n1} \vec{l}_n \\ \vec{u}_2 &= a_{12} \vec{l}_1 + a_{22} \vec{l}_2 + \dots + a_{n2} \vec{l}_n \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \vec{u}_k &= a_{1k} \vec{l}_1 + a_{2k} \vec{l}_2 + \dots + a_{nk} \vec{l}_n \end{aligned} \quad (4.2)$$

Kelib chiqqan (4.2) nisbattagi (a_{ij}) matricaning elementlari $\vec{u}_i (i = \overline{1, k})$ vektorning R reperga nisbatan koordinatalari bóladi, yani

$$\vec{u}_1 \{a_{11} \ a_{21}, \dots, a_{n1}\}, \vec{u}_2 \{a_{12} \ a_{22}, \dots, a_{n2}\}, \dots, \vec{u}_k \{a_{1k} \ a_{2k}, \dots, a_{nk}\}$$

Biz (4.2) tenglikni (4.1) ga qóysak mana bunga ega bólamiz:

$$\begin{aligned} (x^1 - x_0^1) \vec{l}_1 + (x^2 - x_0^2) \vec{l}_2 + \dots + (x^n - x_0^n) \vec{l}_n &= \lambda_1 (a_{11} \vec{l}_1 + a_{21} \vec{l}_2 + \dots + a_{n1} \vec{l}_n) + \\ &+ \lambda_2 (a_{12} \vec{l}_1 + a_{22} \vec{l}_2 + \dots + a_{n2} \vec{l}_n) + \dots + \lambda_k (a_{1k} \vec{l}_1 + a_{2k} \vec{l}_2 + \dots + a_{nk} \vec{l}_n) \end{aligned}$$

yoki

$$\begin{aligned} (x^1 - x_0^1) \vec{l}_1 + (x^2 - x_0^2) \vec{l}_2 + \dots + (x^n - x_0^n) \vec{l}_n &= (\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \dots + \lambda_k a_{1k}) \vec{l}_1 + \\ &+ (\lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_k a_{2k}) \vec{l}_2 + \dots + (\lambda_1 a_{n1} + \lambda_2 a_{n2} + \dots + \lambda_k a_{nk}) \vec{l}_n. \end{aligned}$$

Bu yerdagi $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n$ vektorlar sistemasi chiziqli boǵliqsiz bólganligi uchun kelib chiqqan tenglikning órinli bólishi uchun bazislik vektorning oldida turgan mos koeffitsientlar teng bólishi kerak. Shundan mana bu munosabat kelib chiqadi.

$$\begin{aligned} x^1 - x_0^1 &= \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \dots + \lambda_k a_{1k} \\ x^2 - x_0^2 &= \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_k a_{2k} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x^n - x_0^n &= \lambda_1 a_{n1} + \lambda_2 a_{n2} + \dots + \lambda_k a_{nk} \end{aligned}$$

yoki

$$\begin{aligned}
x^1 &= x_0^1 + \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \dots + \lambda_k a_{1k} \\
x^2 &= x_0^2 + \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_k a_{2k} \\
&\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
x^n &= x_0^n + \lambda_1 a_{n1} + \lambda_2 a_{n2} + \dots + \lambda_k a_{nk}
\end{aligned}
\tag{4.3}$$

Paydo b6lgan (4.3) tenglik Π_k tekislikning parametrli tenglamasi deyiladi. Bu yerdagi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ lar parametrlar. Agar $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ parametrlarning har birida uning bir qiymati berilsa, u holda $x^1, x^2, \dots, x^n$ 6zgaruvchilar malum bir qiymatni qabul qilib Π_k tekislikdagi aniq bir nuqtaning koordinatalarini aniqlaydi.

Bu yerda Π_k tekislikning xususiy hollarini k6rib chiqamiz.

1. Agar $k=1$ b6lsa, u holda Π_1 tekislik A^n fazodagi t6gri chiziqni aniqlaydi. Uning parametrik tenglamasi quyidagicha b6ladi:

$$\begin{aligned}
x^1 &= x_0^1 + \lambda_1 a_{11} \\
x^2 &= x_0^2 + \lambda_1 a_{21} \\
&\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
x^n &= x_0^n + \lambda_1 a_{n1}
\end{aligned}
\tag{4.4}$$

Agar Π_1 t6grining $\vec{u}_1\{a_{11}a_{21}\dots a_{n1}\}$ y6naltiruvchi vektorning koordinatalarini har biri nolga teng b6lmasa, u holda (4.4) tenglikni mana bu turda yozishga b6ladi

$$\frac{x^1 - x_0^1}{a_{11}} = \frac{x^2 - x_0^2}{a_{21}} = \dots = \frac{x^n - x_0^n}{a_{n1}}.$$

Bu tenglama Π_1 t6grining kanonik tenglamasi deyiladi.

2. $k=2$ b6lganda A^n fazodagi ikki 6lchamli Π_2 tekislikka ega b6lamiz. Bu holda (4.3) tenglamaga asoslanib Π_2 tenglamani mana bu turda yozamiz:

$$\begin{aligned}
x^1 &= x_0^1 + \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} \\
x^2 &= x_0^2 + \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} \\
&\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
x^n &= x_0^n + \lambda_1 a_{n1} + \lambda_2 a_{n2}
\end{aligned}
\tag{4.5}$$

Π_2 tekislikni aniqlovchi $\overrightarrow{u_1}\{a_{11}a_{21}..a_{n1}\}$ va $\overrightarrow{u_2}\{a_{12}a_{22}..a_{n2}\}$ vektorlar chiziqli bo'lganligi uchun ular kollinear bo'lmaydi. Shuning uchun mana bu matricaning rangi 2 ga teng bo'ladi, ya'ni

$$rang \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \end{pmatrix} = 2$$

Bu matricaning ikkinchi tartibli determinantlarining eng kamida bittasi nolga teng bo'lmaydi.

Aniqrog'i

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

bolsin. U holda (4.5) tenglamalar sistemasining dastlabki ikki tenglamasidan λ_1 va λ_2 koordinatalarning qiymatlarini x^1 va x^2 lar orqali ifodalaymiz.

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= b_{11}x^1 + b_{12}x^2 + y_0^1 \\
\lambda_2 &= b_{21}x^1 + b_{22}x^2 + y_0^2
\end{aligned}$$

Buni (4.5) tenglamaga oporib qoysak λ_1, λ_2 parametrlar qatnashmagan tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned}
c_{11}x^1 + c_{12}x^2 + x^3 &= y_0^3 \\
c_{21}x^1 + c_{22}x^2 + x^4 &= y_0^4 \\
&\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
c_{n-2,1}x^1 + c_{n-2,2}x^2 + x^n &= y_0^n
\end{aligned}$$

Bu tenglamalarning soni $(n-2)$ ga teng. Bular chiziqli bog'liqsiz bo'lib, shu tenglamalar sistemasi Π_2 tekislikning tenglamasi bo'ladi.

Demak, A^n fazodagi ikki olchamli Π_2 tekislik $n-2$ tenglama bilan aniqlanar ekan.

Endi umumiy holda qaraymiz. Buning uchun Π_2 tekislikning parametrli tenglamasini kórib ótamiz. Bu tenglama (4.3) orqali berilgan.

Π_k tekislikni keltirib chiqaruvchi $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'liqsiz bo'lganligi uchun, ularning koordinatalaridan tuzilgan

$$(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matricaning rangi k soniga teng bo'ladi. Boshqacha aytganda $(A)=k$. Shuning bilan birga V_k vektor fazo V_n fazoning qism fazosi bo'lganligi uchun $k \leq n$ shartli órinli. Algebra kursidagi matricaning rangining tarifi bóyicha (A) matricaning k tartibli determinantlarining eng kamida bittasi nolga teng bo'lmaydi. Aniqlik uchun nolga teng emas determinantni quyidagicha bólsin deb olaylik:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0$$

Bu holda (4.3) tenglamalar sistemasining dastlabki k tenglamasidan $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k$ parametrlarni $x^1 x^2 \dots x^n$ orqali ifodalashimizga b6ladi. Shu $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k$ parametrlar tenglamadan aniqlangannan s6nggi qiymati mana bu turda b6lsin:

[illegible]

$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k$ parametrlarning bu qiymatlarini (4.3) tenglamadagi ortib qolgan $n-k$ sondagi tenglamalarga olib borib qóyamiz. Shunda quyidagi $(n-k)$ sondagi tenglamalar sistemasiga ega bólamiz:

[illegible]

Yuqorida kórib ótilgan (4.3) tenglamalar sistemasidagi har bir tenglama chiziqli bog'liqsiz bólganligi uchun undan kelib chiqqan (4.6) tenglamalar sistemasidagi $n - k$ tenglamalar ham chiziqli bog'liqsiz bóladí. Shuning bilan birga ular birgalikda keltirib chiqarilgan sǒnggi (4.6) tenglamalar sistemasi Π_k tekislikning tenglamasi deyiladi. Bu tenglamalar sistemasi Π_k tekislikning umumiy tenglamasi deyiladi.

Agar $k = n - 1$ bólsa, u holda Π_{n-1} tekislik A^n fazodagi gipertekislikni aniqlashi bizga malum. Gipertekislikning tenglamasini keltirib chiqarish uchun

(4.6) tenglamalar sistemasidan foydalanamiz. Shunda Π_{n-1} gipertekislikning tenglamasi

$$c_{11}x^1 + c_{12}x^2 + \dots + c_{1n-1}x^{n-1} + c_{1n}x^n + c = 0$$

turga keladi. Demak gipertekislik chiziqli bog'liqsiz b'olgan bitta tenglama bilan aniqlanadi. Bu tenglamadagi $c_{11}c_{12}\dots c_{1n}$ ko'efficientlarning barchasi bir vaqtda nolga teng emas, yani

$$\text{rang}(c_{11} c_{12} \dots c_{1n}) = 1$$

5-§. Tekisliklarning óz-aro joylashishi

A^n fazodagi har xil tekisliklarning bir-biri bilan óz-aro joylashish hollarini kórib ótamiz. Bular óz-aro kesishishi yoki kesishmay joylashishi mumkin.

1. Kesishadigan tekisliklar.

Aytaylik A^n fazoda ikki Π_k va Π_m tekisliklar berilgan bólsin. ($k < n$, $m < n$)

5.1-tarif. A^n fazodagi ikki har xil tekislik eng kamida bitta umumiy nuqtaga ega bólsa, u holda bu tekisliklar kesishadigan tekisliklar deyiladi.

Aytaylik Π_m va Π_k tekisliklarning kesishmasiga tegishli bólgan bitta nuqtani A deb belgilaylik. Shu nuqtani koordinata uchi deb qabul qilib olamiz. Π_m tekislikning (Π_k tekislikning) ustida erkli ózgaruvchi N nuqtani olamiz. Bu holda $\overrightarrow{AN} \in V_m$ ($\overrightarrow{AN} \in V_k$) bóladir. Shunnig uchun kesishadigan tekislikning óz-aro joylashishi haqidagi masala A^n affin fazoni keltirib chiqaruvchi V_n vektor fazoning qism fazolari V_m va V_k fazolarning óz-aro joylashishi haqidagi masalaga keladi.

Aytaylik $V_s = V_m \cap V_k$ bólsin. Agar $m + k = n$ bólsa, u holda V_s fazo nol ólchamli vektor fazo bóladir. Bu holda V_m va V_k fazolarning nol vektor nuqtani aniqlagani uchun Π_m va Π_k tekisliklar faqat bitta umumiy nuqtaga ega bóladir.

Agar $m + k > n$ bólsa $V_s = V_m \cap V_k$ fazo nol ólchamli bólmaydi. Bu holda A nuqta va V_s fazo orqali Π_s tekislik aniqlanadi. Bu tekislik Π_m va Π_k tekisliklarning kesishish tekisligi bóladir. Shuning uchun

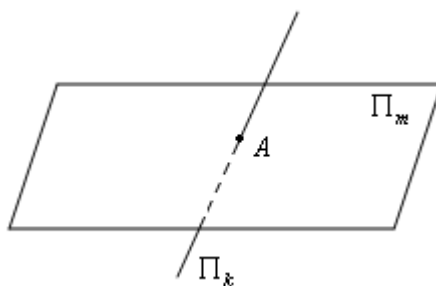
$$\Pi_s = \Pi_m \cap \Pi_k$$

Umumiy holda Π_s tekislik faqat bitta nuqtadan yoki cheksiz kóp nuqtalardan iborat bólishi mumkin.

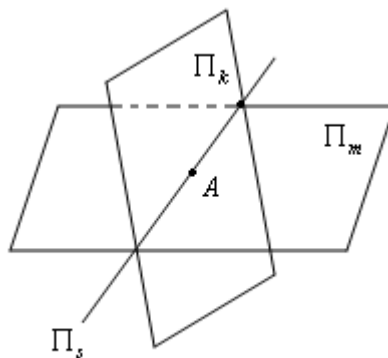
Agar $\Pi_s = \Pi_m$ бўlsa, u holda $\Pi_m \subset \Pi_k$. Shunga uxshash $\Pi_s = \Pi_k$ бўlganda $\Pi_k \subset \Pi_m$ бўлади.

Yuqorida aytib ótilganlarning chizmalarini keltiramiz.

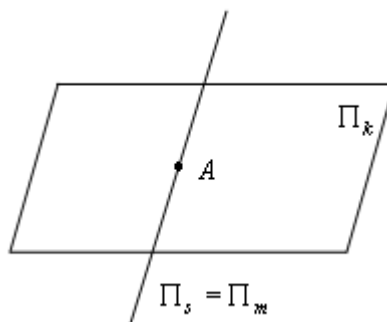
1) Π_s faqat bitta nuqtadan iborat.



2) Π_s -cheksiz kóp nuqtalardan iborat.



3) $\Pi_s = \Pi_m$ бўlgan holda



Agar Π_m va Π_k tekisliklar Π_s tekislik bóyicha kesishadigan bólsa, u holda Π_m va Π_k tekisliklarni óz ichiga oladigan $\Pi_r (r = m + k - s)$ tekisligi mavjud. Bu yerdagi Π_r tekislikni va shu tekislikni keltirib chiqaruvchi V_k vektor fazo V_m va V_k fazolarning yi ғ indisi turadi. Xususiyl holda $m + k - s = n$ bólishi mumikn. Bu holda Π_r tekislikning órnida A^n fazoning ózi bóladl. Masalan uch ólchamli fazodagi kesishadigan har xil ikki tekislikni óz ichiga oladigan tekislik uch ólchamli fazoning ózi bóladl.

2) Kesishmaydigan tekisliklar.

Biz A nuqta va V_m fazo orqali aniqlangan tekislikni Π_m dep, B nuqta va V_k fazo orqali aniqlangan tekislikni Π_k deb belgilaymiz.

5.2-tarif. Agar Π_m va Π_k tekisliklarni keltirib chiqaruvchi V_m va V_k fazolarning bittasi ikinchisining qism fazosi bólsa, u holda bu tekisliklar óz-aro parallel deyiladi. Parallel tekisliklar $\Pi_m \parallel \Pi_k$ deb belgilanadi.

5.1-teorema. A^n fazodagi Π_m va Π_k tekisliklar parallel bólib umumiy nuqtaga ega bólsa, u holda bularning bittasi ikkinchisida yotadi.

Isbot. Aytaylik Π_m va Π_k tekisliklar parallel bulsin. Teoremaning sharti buyicha bu tekisliklar A umumiy nuqtaga ega bulsin, ya'ni $A = \Pi_m \cap \Pi_k$. Bu yerda aniqlik uchun $m \leq k$ bulgan holni kurib utamiz. U holda parallellikning ta'rifdan $V_m \subset V_k$ ekanligi kelib chiqadi. Π_m tekisliknin ustida uzgaruvchi N nuqtani olamiz. Shunda $\overrightarrow{AN} \in V_m \subset V_k$. Bu yerdan $\overrightarrow{AN} \in V_k \Rightarrow N \in \Pi_k$. Demak, $AN \in \Pi_m \Rightarrow N \in \Pi_k$ bulgani uchun $\Pi_m \subset \Pi_k$.

Shu teoremadan mana bu xulosa kelib chiqadi:

Hulosa. Teng ólchamga iye ikki tekislik parallel bulib eng kamida bitta umumiy nuqtaga ega balsa, u holda bu tekisliklar yuzlashadi.

Ikki tekislikning ólchamlari ten bólib, ular parallel bulsa, u holda bu tekisliklarni keltirib chiqaruvchi vektor fazolarning yuzlashishi tekisliklarning parallel bólsh tarifidan kelib chiqadi, yani

$$\Pi_m \parallel \Pi_k \text{ va } m = k \Rightarrow V_m = V_k$$

Aytaylik A^n fazoda birdek ólchamga ega bólgan Π va Π' tekisliklarning R repyerdagi tenglamalari berilgan bólsin. Bu tekisliklarning har bittasi birinchi darajali bir jinsli tenglamalar sistemasi orqali aniqlanadi. Parallel tekisliklarning aniqlamasidan mana bu teorema kelib chiqadi.

5.2-teorema. Π va Π' tekisliklar parallel bólshi uchun shu tekisliklarni aniqlovchi tenglamalar sistemasi ekvivalent bólshi zarur va etarli.

3. Ayqash tekisliklar.

Uch ólchamli Evklid fazosida ayqash tógri chiziqlar kórib ótiladi. Bular haqida maktab kursi geometriyasida tóla malumot beriladi. SHu tushunchani A^n fazoda kórib ótish uchun mana bu tarifni kórib ótamiz.

5.3-tarif. A^n fazodagi parallel emas va kesishmaydigan ikki Π_m, Π_k tekisliklarni ayqash tekisliklar deb ataymiz.

Uch ólchamli fazoda bir ólchamli tekislik deb nomlanuvchi ikki tógri chiziqning ayqash bólshi bizlarga juda yaxshi malum. Shuning uchun uch ólchamli fazodagi ikki ólchamli tekisliklar ayqash bólmaydi. Ammo fazoning ólchami kattalashgani sari, ayqash tekisliklarning ham ólchamlari kattalashib boradi.

A^n fazodagi Π_k tekislikni tanlab olamiz. Bu yerda $m < n$. Aytaylik A^n fazodagi yana bitta Π_m tekislik Π_k tekislik bilan kesishsin. SHu tekisliklarning kesishish tekisligini Π_s deb olsak, u holda Π_k, Π_m tekisliklarning ikkitasini ham óz ichiga aluvchi $\Pi_r (r = m + k - s)$ tekisligining mavjudligi bizlarga malum. U holda mana bu teorema órinli .

5.3-teorema. Agar $m+k-s < n$ бўлса, u holda Π_m tekisligida parallel бўлган har qanday m -ólchamli tekislik Π_r tekislikta yotmaydi va Π_k tekislik bilan ayqash бўлади.

5.4-teorema. Agar m, k, s, n butun sonlar бўлиб

$$0 \leq s < m, \quad 0 \leq s < k, \quad m+k-s < n$$

tengsizliklari órinli бўлса, u holda A^n fazoda ayqash Π_m va Π_k tekisliklar mavjud бўлиб, ularni keltirib chiqaruvchi V_m, V_k fazolarning kesishishidan kelib chiqqan $V_m \cap V_k$ fazoa s ólchamli бўлади ($V_m \cap V_k = V_s$).

Xulosa

Biz n ólchamli affin fazodagi k ólchamli tekislik haqida tushunchaga ega bólib, uning tenglamasini keltirib chiqardik. Shuning natijasida Π_k tekislikning xossalari analitik usulda aniqlash mumkinchiligiga ega bldik. Bu xossalr tekislikning ólchamlari bir, ikki, uch va k bólgan hollarda saqlanishini kórib ótdik. Masalan, n -ólchamli affin fazodagi k ólchamli tekislik $n-k$ sondagi chiziqli bogliqsiz tenglamalar sistemasi orqali aniqlanishini kórib ótdik. Demak birinchi darajali algebraik tenglamalar sistemasi berilgan bólsa, shu tenglamalar sistemasidagi nechta tenglama chiziqli bogliqsiz bólishiga qarab ólarning nechta ólchamli tekislikni aniqlash mumkinligini topishga bóladí. Bu yerda tekislikni ifodalovchi tenglamalar sistemasining matricasining rangi katta ahamiyatga ega. SHuning bilan birga bu bitiruv malakaviy ishida k ólchamli tekislikni yóntiruvchi vektor fazoning tutgan órni haqidagi masalalar ham kórib ótildi. A^n fazodagi Π_m va Π_k tekisliklarning yóntiruvchi V_m va V_k vektor fazolarining kesishmasi nechta ólchamli vektor fazo bólishiga qarab ótirib, shu tekisliklar nechta ólchamli tekislik bóyicha kesishishini aniqlash mumkinchiligiga ega bóldik. SHuning uchun tekislikning yóntiruvchi fazosining berilishi katta ahamiyatga ega. Tekislikning yóntiruvchi vektor fazosi uning tenglamasi orqali aniqlanadi.

Fazoning ólchami uchdan katta bólgan holda u yerdagi figuralarning chizmalarini tasavvur qilish qiyin bóladí. Shunki biznig yashab, amaliyotda qóllanayotgan fazomiz uch ólchamga ega. Shuning uchun ólchami uchdan katta bólgan tekisliklar geometriyasining órganish va tadqiq qilish ularning tenglamalari orqali amalga oshirilishini kórdik. Shu bilan birga k ólchamli tekislik bóyicha olingan natijalar uch ólchamli fazodagi ikki ólchamli tekislik va tógri chiziq (bir ólchamli tekislik) bóyicha olingan natijalar bilan solishtirilib tekshiriladi. Shuning natijasida k ólchamli tekislik haqida kóproq tushunchalarga ega bóladigan materiallar bu bitiruv malakaviy ishida keltirilgan.

Bu bitiruv malakaviy ishining natijalari universitet va pedagogik institut talabalarining geometriya fani bóyicha chuqur órganishi uchun mustaqil ishlarga materiallar bólib xizmat qiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Aleksandrov A.D., Netsvetaev N.Yu. Geometriya, M., Nauka, 1990 g.
2. Narmanov A.Ya., Differentsial geometriya, T. Universitet, 2003 y.
3. Dadajonov N.D., Juraeva M.Sh. Geometriya, I-qism, T., O'qituvchi, 1996 y.
4. Atanasyan L.S. Analiticheskaya geometriya, chast II, M., Prosvesheniya, 1970 g.
5. Pogorelov A.V. Analiticheskaya geometriya, M., Nauka, 1978 g.
6. Atanasyan L.S., Bazi'lov V.T. Geometriya, chast I, M., Nauka, 1986 g.
7. Aleksandrov P.S. Kurs analiticheskoy geometrii i vi'sshey algebri', M., Nauka, 1970 g.