ISSN 2091-5446

ILMIY AXBOROTNOMA

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК SCIENTIFIC JOURNAL

2018-yil, 3-son (109) ANIQ VA TABIIY FANLAR SERIYASI
Matematika. Informatika.
Fizika. Kimyo. Biologiya. Geografiya. O'qitish metodikasi

Samarqand viloyat matbuot boshqarmasida ro'yxatdan o'tish tartibi 09-25.
Jurnal 1999-yildan chop qilina boshlagan va OAK ro'yxatiga kiritilgan.

Obuna indeksi – yakka tartbidagi obunachilar uchun - 5583,
tashkilot, korxonalar uchun - 5584

MUNDARIJA/СОДЕРЖАНИЕ/CONTENTS

Таким образом, может быть получена совокупностьлинейных моделей, по существу, являющихся присоединенных нелинейных композиций к линейной модели многопараметрического процесса.

Вычислительный процесс моделирования является совершенно аналогичным для всех случаев построения модели, т.е. Y_1, Y_2, Y_3 а также последующих моделей, последовательно усложняющих структуру модели процесса. Последовательное рассмотрение новых композиций модели процесса существенным образом упрощает реализацию метода моделирования многопараметрических процессов. Таким образом предложен метод моделирования процесса аддитивного усложнения исходной модели самоорганизации как существенно расширяющий возможности метода для моделирования сложных систем.

Литература

1. Вопросы прикладной математики и механики. Сборник научных трудов №7. Самарканд 2003.
2. Ленник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы математики-статистической теории обработки наблюдений. М.: Физмат, 1962, 352с.

УДК 517.946

ПРОДОЛЖЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Т. Ишонкулов[1], Д. Фозилов.[2]

[1]Самаркандский государственный университет [2]*Самаркандский филиал Ташкентско университета информационных технологий*

E-mail: davron_fozilov87@mail.ru

Аннотация. В данной работе рассматривается задача продолжения обобщенной аналитической функции в единичный круг по известным ее значениям на дуге граничной окружности. Установлено критерий разрешимости этой задачи.

Ключевые слова: уравнение Коши-Римана, обобщенная аналитическая функция, теорема Фока-Куни, формула Карлемана.

The extension of the generalized analytic functions

Abstract. In this paper we consider the problem of extending a generalized analytic function to a unit disk from its known values on the arc of the boundary circle. A criterion for the solvability of this problem is established.

Keywords: Cauchy-Riemann equation, generalized analytic function, Fock-Cooney theorem, Carleman's formula.

Umumlashgan analitik funksiyalarni davom ettirish

Annotatsiya. Ushbu maqolada umumlashgan analitik funksiyani birlik doira chegarasining qismidagi qiymatlariga ko'ra, shu doiraga davom ettirish masalasi o'rganilgan. Bu masala yechimining mavjudlik kriteriyasi o'rnatilgan.

Kalit so'zlar: Cauchy-Riemann tenglamasi, umumlashgan analitik funksiya, Fok-Kuni teoremasi, Karleman formulasi

Как известно [1], линейная эллиптическая система первого порядка на плоскости заменой переменных и неизвестных функций сводится к обобщённому уравнению Коши-Римана

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + A(z)w + B(z)\bar{w} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad z = x + iy. \qquad (1)$$

Решение уравнения (1) называется обобщенной аналитической функцией. В данной работе рассматривается задача продолжения обобщенной аналитической функции в круге по ее значениям на части граничной окружности.

Пусть $D = \{z: |z| < 1\} -$ единичный круг и $t' = e^{i\theta'}$, $t'' = e^{i\theta''}$ точки на единичной окружности $\partial D, 0 < \theta' < \theta'' < 2\pi$. Дугу (t', t'') окружности ∂D обозначим через S; $C_\alpha(E)-$ множество функций комплексного переменного z, удовлетворяющих условию Гёльдера на комплексной плоскости E; $L_{p,2}(E) -$ множество функций f удовлетворяющих условиям

$$f(z) \in L_p(\bar{D}), |z|^{-2} f\left(\frac{1}{z}\right) \in L_p(\bar{D}).$$

Через $U_{p,2}(A, B, D)$ обозначим множество решений в области D уравнения (1), где

$$A, B \in L_{p,2}(E) \cap C_\alpha(E), \qquad p > 2.$$

Формула аналитического продолжения функции комплексного переменного по ее значениям на части границы области регулярности впервые была получена Карлеманом [2]. Идея Карлемана была развита и обобщена Г.М.Голузиным и В.И.Крыловым [3]. Используя формулу Карлемана, В.А. Фок и Ф.М. Куни [4] решили задачу описания функций заданных на части границы области, которые являются следом аналитических в этой области функций. Теорема Фока-Куни была обобщена в работах [5], [6], [7] и других авторов.

В данной работе рассматривается задача описания функций $\varphi \in C(S)$, которые являются следом функции $w \in U_{p,2}(A, B, D)$.

Рассмотрим гармоническую меру ω дуги S относительно круга D [8]:

$$\omega(z, \theta', \theta'') = \frac{1}{\pi} \arg\left(\frac{z - e^{i\theta''}}{z - e^{i\theta'}} e^{\frac{\theta' - \theta''}{2} i}\right).$$

Обозначим через $X_j^\sigma(z, \zeta)$ $(j = 1,2)$ решения уравнения (1) по переменной z из класса $U_{p,2}(A, B, D)$, соответствующие по теореме взаимности [1] аналитическим функциям

$$\frac{1}{2}\Phi_\sigma(z, \zeta), \qquad \frac{1}{2i}\Phi_\sigma(z, \zeta),$$

где Φ_σ — функция Карлемана дуги S относительно круга D [9]:

$$\Phi_\sigma(z, \zeta) = \frac{1}{\zeta - z} exp\{\sigma[\lambda(\zeta) - \lambda(z)]\},$$

$\lambda(z)$ —аналитическая функция в области D, такое что $Re\lambda = w$, σ —положительный числовой параметр.

Теорема 1. Пусть $w \in U_{p,2}(A, B, D) \cap C(\bar{D})$, $w|_S = \varphi$. Тогда справедливы следующие эквивалентные формулы продолжения:

$$W(z) = \lim_{\sigma \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_S \Omega_1^\sigma(z, \zeta)\varphi(\zeta)d\zeta - \Omega_2^\sigma(z, \zeta)\bar{\varphi}(\zeta)d\bar{\zeta}, z \in D (2)$$

$$W(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \Omega_1 (z, \zeta)\varphi(\zeta)d\zeta - \Omega_2 (z, \zeta)\bar{\varphi}(\zeta)d\bar{\zeta} + \int_0^\infty J(z, \sigma)d\sigma, \qquad (2a)$$

где Ω_j — основные ядра Коши уравнения (1)

$$J(z, \sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \gamma_1^\sigma(z, \zeta)\varphi(\zeta)d\zeta - \gamma_2^\sigma(z, \zeta)\bar{\varphi}(\zeta)d\bar{\zeta},$$

$$\gamma_j^\sigma = \frac{\partial}{\partial\sigma}\Omega_j^\sigma, \qquad \Omega_1^\sigma = X_1^\sigma + iX_2^\sigma, \ \Omega_2^\sigma = X_1^\sigma - iX_2^\sigma.$$

Доказательство этой теоремы в случайкогда область Dограничена отрезком действительной оси и гладкой кривой S, лежащей на верхней полуплоскости приведено в [10].

Используя формулы (2) и (2a) можно получить критерий разрешимости упомянутой выше задачи продолжения. С этой целью рассмотрим область $D' = D \cup \{z: \theta' < argz < \theta''\}$. Имеет место следующая теорема о разрешимости задачи продолжения:

Теорема2. Пусть $\varphi \in L(S) \cap C(\dot{S})$ $(\dot{S} = IntS)$. Для того чтобысуществовала функция $w \in U_{p,2}(A, B, D) \cap C(D \cup S)$ такая что ее сужение на $\dot{S}$ совпадает с φ, необходимо и достаточно чтобы интеграл

$$\left|\int_0^\infty J(z, \sigma)d\sigma\right| < \infty \qquad (3)$$

сходился равномерно на каждом компакте $K \subset D'$. Если выполнено условие (3), то продолжение осуществляется эквивалентными формулами (2) и (2a).

Доказательство. Необходимость. Пусть существует функция $w \in U_{p,2}(A,B,D) \cap C(D \cup S)$ такая что$w(z) = \varphi(z), z \in \dot{S}$. Функции $X_1^\sigma(z,\zeta)$, $X_2^\sigma(z,\zeta)$ являются решениями интегральных уравнений [1]:

$$X_1^\sigma(z,\zeta) = \frac{1}{\pi}\iint_E \frac{A(t)X_1^\sigma(t,\zeta)+B(t)\bar{X}_1^\sigma(t,\zeta)}{t-z}dS_t = \frac{1}{2}\Phi_\sigma(z,\zeta),$$
$$X_2^\sigma(z,\zeta) = \frac{1}{\pi}\iint_E \frac{A(t)X_2^\sigma(t,\zeta)+B(t)\bar{X}_2^\sigma(t,\zeta)}{t-z}dS_t = \frac{1}{2i}\Phi_\sigma(z,\zeta)\,. \quad (4)$$

Из уравнений (4) следует, что аналитическим функциям

$$\frac{1}{2}\widetilde{\Phi}_\sigma(z,\zeta) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\sigma}\Phi_\sigma(z,\zeta) \text{ и } \frac{1}{2i}\widetilde{\Phi}_\sigma(z,\zeta) = \frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial\sigma}\Phi_\sigma(z,\zeta)$$

соответствуют функции

$$\widetilde{X}_1^\sigma(z,\zeta) = \frac{\partial}{\partial\sigma}X_1^\sigma(z,\zeta) \text{ и } \widetilde{X}_2^\sigma(z,\zeta) = \frac{\partial}{\partial\sigma}X_2^\sigma(z,\zeta).$$

Эти функции во всей плоскости Eпо переменной z удовлетворяют уравнению (1) и нелинейным интегральным уравнениям:

$$\widetilde{X}_1^\sigma(z,\zeta) = \frac{1}{2}\widetilde{\Phi}_\sigma(z,\zeta)e^{\widetilde{\omega}_1(z,\zeta)},$$
$$\widetilde{X}_2^\sigma(z,\zeta) = \frac{1}{2}\widetilde{\Phi}_\sigma(z,\zeta)e^{\widetilde{\omega}_2(z,\zeta)}, \quad (5)$$

$$\omega_j(z,\zeta) = \frac{z-\zeta}{\pi}\iint_E \frac{A(t)+B(t)\dfrac{\bar{\widetilde{X}}_j^\sigma(t,\zeta)}{\widetilde{X}_j^\sigma(t,\zeta)}}{(t-\zeta)(t-z)}dS_t\,, j = 1,2.$$

Так как функции X_j^σудовлетворяетуравнению (1) на плоскости E, функции $\widetilde{\Omega}_j^\sigma = \gamma_j^\sigma$ $(j = 1,2)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\partial_{\bar{z}}\widetilde{\Omega}_1^\sigma + A(z)\widetilde{\Omega}_1^\sigma + B(z)\bar{\widetilde{\Omega}}_2^\sigma = 0$$
$$\partial_{\bar{z}}\widetilde{\Omega}_2^\sigma + A(z)\widetilde{\Omega}_2^\sigma + B(z)\bar{\widetilde{\Omega}}_1^\sigma = 0. \quad (6)$$

По теореме взаимности [1] функциям $\frac{1}{2}\widetilde{\Phi}_\sigma(z,\zeta)$ и $\frac{1}{2i}\widetilde{\Phi}_\sigma(z,\zeta)$ соответствуют функции $\widetilde{X}_1'^\sigma, \widetilde{X}_2'^\sigma \in U_{p,2}(-A,-B,E)$. Функции $\widetilde{X}_1'^\sigma$ и $\widetilde{X}_2'^\sigma$ по переменной ζ удовлетворяют сопряженному уравнению к (1):

$$\partial_{\bar{\zeta}}\widetilde{X}_k'^\sigma(\zeta,z) - A(z)\widetilde{X}_k'^\sigma(\zeta,z) - B(z)\bar{\widetilde{X}}_k'^\sigma(\zeta,z) = 0,$$
$$\zeta \neq z, \quad \zeta \in E, \quad k = 1,2.$$

Взяв в качестве W' функции $\widetilde{X}_1'^\sigma, \widetilde{X}_2'^\sigma$ применяем формулу Грина [1]:

$$\int_{\partial D} w(\zeta)\widetilde{X}_k'^\sigma(\zeta,z)d\zeta - \bar{w}(\zeta)\bar{\widetilde{X}}_k'^\sigma(\zeta,z)d\bar{\zeta} = 0\,, \qquad k = 1,2, \qquad z \in D'.$$

Умножив второе из этих равенств $(k = 2)$ наi и сложив с первым получим

$$\int_{\partial D} w(\zeta)\widetilde{\Omega}_1'^\sigma(\zeta,z)d\zeta - \bar{w}(\zeta)\widetilde{\Omega}_2'^\sigma(\zeta,z)d\tilde{\zeta} = 0$$

В силу равенств [1]:

$$\widetilde{\Omega}_1^\sigma(z,\zeta) = -\widetilde{\Omega}_1'^\sigma(z,\zeta),$$
$$\widetilde{\Omega}_2^\sigma(z,\zeta) = -\widetilde{\Omega}_2'^\sigma(z,\zeta),$$

последнее равенство перепишем в виде

$$\int_{\partial D} w(\zeta)\widetilde{\Omega}_1'^\sigma(\zeta,z)d\zeta - \bar{w}(\zeta)\widetilde{\Omega}_2'^\sigma(\zeta,z)d\bar{\zeta} = 0\,, \qquad z \in D'.$$

Отсюда

$$\int_S w(\zeta)\gamma_1^\sigma(\zeta,z)d\zeta - \bar{w}(\zeta)\gamma_2^\sigma(\zeta,z)d\bar{\zeta} = -\int_{\partial D\setminus S} w(\zeta)\gamma_1^\sigma(\zeta,z)d\zeta - \bar{w}(\zeta)\gamma_2^\sigma(\zeta,z)d\bar{\zeta}\,. \quad (7)$$

Оценим интеграл, стоящей в правой части равенства (7). Используя формулы (5) и неравенство (8.7) из [1] (стр.178), имеем

$$\left|\int_{\partial D\setminus S}\gamma_1^\sigma(\zeta,z)w(\zeta)d\zeta-\gamma_2^\sigma(\zeta,z)\overline{w}(\zeta)d\bar{\zeta}\right| \leq \int_{\partial D\setminus S}(|\gamma_1^\sigma(\zeta,z)|+|\gamma_2^\sigma(\zeta,z)|)|w(\zeta)||d\zeta|$$

$$\leq 2e^{M_pL_{p,2}(|A|+|B|)}\int_{\partial D\setminus\bar{S}}|w(\zeta)|\frac{\lambda(\zeta)-\lambda(z)}{\zeta-z}\cdot|\exp[\lambda(\zeta)-\lambda(z)]||d\zeta|$$

$$\leq 2MCe^{M_pL_{p,2}(|A|+|B|)}\cdot e^{-\sigma\omega(z,\theta',\theta'')},$$

где

$$C=\max_{\substack{\zeta\in\partial D\\ z\in K}}\left|\frac{\lambda(\zeta)-\lambda(z)}{\zeta-z}\right|,\quad M=\int_{\partial D}|w(\zeta)||d\zeta|.$$

Таким образом

$$\left|\int_S \gamma_1^\sigma(\zeta,z)\varphi(\zeta)d\zeta-\gamma_2^\sigma(z,\zeta)\bar{\varphi}(\zeta)d\bar{\zeta}\right|\leq 2MCe^{M_pL_{p,2}(|A|+|B|)}\cdot e^{-\sigma\omega(z,\theta',\theta'')},\quad z\in D'. \tag{8}$$

Из неравенства (8) следует выполнение условия (1).

Достаточность. Пусть функция φ удовлетворяет условию теоремы. Покажем что существует функция$w\in U_{p,2}(A,B,D)\cap C(D\cup\dot{S})$, такая что $w(z)=\varphi(z), z\in\dot{S}$. Рассмотрим функцию $\Phi(z)$ заданную правыми частями двух эквивалентных формул (2) и (2a). Первое слагаемое в формуле (2a) является обобщенным интегралом типа Коши. Оно задает две функции удовлетворяющие соответственно в областях D и $D'\setminus\bar{D}$ уравнению (1) такие, что разность их предельных значений по нормалям (или по углам ограниченного раствора, а соответствующие точки $z^+\in D$ и $z^+\in D'\setminus\bar{D}$ при стремлении к точке $\zeta\in\dot{S}$находятся равных расстояниях от ζ) на $\dot{S}$ равно $\varphi(\zeta)$[1] (стр. 198). Причем если одна из функций непрерывна в соответствующей области вплоть до $\dot{S}$, то другая тоже обладает данным свойством. Покажем, что второе слагаемое в формуле (2a) удовлетворяет уравнению (1) в области D'. В силу равномерной сходимости интеграла (3) имеем

$$\int_0^\infty\left[\frac{\partial J(z,\sigma)}{\partial\bar{z}}+A(z)J(z,\sigma)+B(z)\bar{J}(z,\sigma)\right]d\sigma=$$

$$=\int_0^\infty\left[\frac{1}{2\pi i}\int_S\left[\frac{\partial\tilde{\Omega}_1^\sigma(z,\zeta)}{\partial\bar{z}}\varphi(\zeta)d\zeta+A(z)\tilde{\Omega}_1^\sigma(z,\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta-B(z)\bar{\tilde{\Omega}}_1^\sigma(z,\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta-\frac{\partial\bar{\tilde{\Omega}}_2}{\partial\bar{z}}\bar{\varphi}(\zeta)d\bar{\zeta}\right.\right.$$

$$\left.\left.-A(z)\bar{\tilde{\Omega}}_2^\sigma(z,\zeta)\bar{\varphi}(\zeta)d\bar{\zeta}+B(z)\bar{\tilde{\Omega}}_2^\sigma(z,\zeta)\bar{\varphi}(\zeta)d\zeta\right]\right]d\sigma$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\left\{\int_S\left[\left(\frac{\partial\tilde{\Omega}_1^\sigma(z,\zeta)}{\partial\bar{z}}+A(z)\tilde{\Omega}_1^\sigma(z,\zeta)+B(z)\bar{\tilde{\Omega}}_2^\sigma(z,\zeta)\right)\varphi(\zeta)d\zeta\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\frac{\partial\tilde{\Omega}_2^\sigma(z,\zeta)}{\partial\bar{z}}+A(z)\breve{\Omega}_2^\sigma(z,\zeta)+B(z)\bar{\tilde{\Omega}}_1^\sigma(z,\zeta)\right)\bar{\varphi}(\zeta)d\bar{\zeta}\right]\right\}d\sigma,\qquad z\in D'.$$

Отсюда в силу равенств (6) следует что второе слагаемое в формуле (2a) удовлетворяет уравнению (1) в области D'.Таким образом, правая часть формулы (2a) задает две функциии$w_1\in U_{p,2}(A,B,D)$и$w_2\in U_{p,2}(A,B,D'\setminus\bar{D})$такие что для всякой точки $\zeta\in\dot{S}$верно (в указанном смысле) равенство

$$w_1(\zeta)-w_1(\zeta)=\varphi(\zeta), \tag{9}$$

причем если одна из этих функций непрерывна в соответствующей области вплоть до S, то другая тоже обладает этим свойством [1]. С другой стороны функция $\Phi(z)$ равняется правой части (2). Для любой компактной подобласти $K'\subset D'\setminus\bar{D},\ z\in K'$ выполняется неравенство $\omega(\theta',\theta''\geq\delta>1)$.Поэтому $w_2(z)$ при $z\in K'$. В силу теоремы единственности для обобщённых аналитических функций $w_2(z)\equiv 0$. Так, что $w_2(\zeta)=0$при$\zeta\in S$.Таким, образом $w_2(z)$продолжается непрерывным образом на $(D'\setminus\bar{D})\cup S$. Но тогда $w_1(z)$тоже непрерывна продолжается на $D\cup S$. Из равенства (9)