

O`zbekistan Respublikasi Xalq bilimlendiriw ministrliqi

A`jiniyaz atındag`ı No`kis ma`mleketliq pedagogikalıq institutı

Fizika-matematika fakul`teti

Uluwma matematika kafedrası

**«İTİMALLIQLAR TEORİYASI HA`M MATEMATİKALIQ STATISTIKA»
pa`ni boyınsha lektsiya teksti**



Muallif: A.Xojaniyazov

NO`KIS – 2014

Mazmuni

Lektsiya №1. Elementar waqiyalar kenisligi

Lektsiya №2. Waqiyalardin algebrasi ha'm δ -algebrasi Itimalliq tusinigi.

Aksiomalar

Lektsiya №3. σ -kasiyetleri

Lektsiya №4. Itimalliqtin σ -geometriyalik aniklamasi Itimalliqtin σ -statistikaliq aniklamasi

Lektsiya №5. Shartli itimalliqlar. Kobeytiu teoremasi. Waqiyalardin garezsizligi

Lektsiya №6. Toliq itimalliqtin σ -formulasi. Bayes formulasi

Lektsiya №7. Garezsiz tajiriybeler izbe-izligi

Lektsiya №8. Bernulli sxemasi ushin shek teoremalari. Muavr-Laplastin σ -lokal shek teoremasi

Lektsiya №9. Muavr-Laplastin σ -integral shek teoremasi. Puasson teoremasi

Lektsiya №10. Muavr-Laplastin σ -integral shek teoremasinin qollanbalari.

Puasson sxemasi

Lektsiya №11. Markov shinjiri. Bir tekli Markov shinjiri. Otiw matritsasi

Lektsiya №12. Rekkurent formulalari. Shek itimalliqlari xaqqinda teorema

A`debiyatlar

Lektsiya №1

Tema. Elementar waqiyalar kenisligi.

Lektsiyanin jobasi:

1. Tajriybe ha`m waqiya.
2. Elementar waqiyalar kenisligi.
3. Waqiyalar ustin`de a`meller.
4. Misal.

Tayanish tusinikler:

Tajiriybe ha`m waqiyalardi bir-biri menen baylanisi ha`m olarga misallardi korsetiu. Elementar waqiyalar kenisliginde kalay isleu kerek ha`m olarga misal korsetiu. Waqiyalar ustin`de a`meller.

Qadagalawshi sorawlar:

1. Elementar waqiyalar kenisligi degenimiz ne?
2. Eki waqiyanin qosindisi ha`m kobeymesin aytip berin.

A`debiyatlar:

[1] §1,2,3. 16-38 betler

Itimalliq teoriyasinda tajiriybe ha`m waqiya tusiniklari tiykargi tusinik bolip tabiladi. Adette, xar bir tajiriybe natiyjesinde geypara turakli shartler jiynagi orinlanganda, bazibir waqiya juzege asadi dep aytiladi.

Misali: Tiyindi bir ret taslaganda (tajiriybe) gerb kelip shigadi (ukiya).

Turakli shartler jiynagi saklanganda, tajiriybenin natiyjesi tajiriybeden tajiriybege ozgerip otiratugin jagdaylar koplep ushrasip otiradi.

Misali: Kubikti bir ret taslaganda 6 ochko kelip shikkan bolsa, kubikti ekinshi ret taslaganda 1,2,3,4,5,6 ochkolarinin kalegen bireui kelip shigiui mumkin. Sol siyakli baklanip atirgan tajiriybenin natiyjesi telefon stantsiyasina bir saat dauaminda kelip tusken talaplardin sani bolsa, bul saat sayin ozgerip otiriui mumkin.

Solay etip , tajiriybeni natiyjesi tajiriybeden tajiriybege tosinnanliq turde ozgerip otiratugin kubilislar (waqiyalar) boladi aldin ala anik aytui mumkin emes.

Tajiriybeler ha`m olardin tosinannliq xarakterdegi natiyjeleri bolgan waqiyalar ozlerinin tabiyati boyinsha juda kop turli boladi. Sonliqtan da bunday waqiyalardi matematikaliq koz-karastan birdeysuuretler ushin itimalliq teoriyasinda elementar waqiyalar kenisligi tusinigi kiritiledi.

Elementar waqiyalar kenisligi dep tajiriybenin birin-biri oz-ara biykarlaytugin natiyjelerin jiynagina aytamiz. Elementar waqiyalar kenisligi $\Omega = \{\omega\}$ dep belgileymiz. Onin elementlerin, yag`niy ω lardi elementar dep ataymiz.

Misallar:

1.Tiyindi bir ret taslaganda kelip shigiui mumkin bolgan elementar waqiyalar tek g`ana ekew boladi: gerbtin` shigiui, tsifrdin kelip shigiui: $\Omega = \{r, u\} = \{\omega_1, \omega_2\}$

2. Kubikti bir ret taslagan. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ bunda ω_k

Kubikti bir ret taslaganda k ochkonin kelip shigiin bildiretugin elementar waqiya, $k=1,2,3,4,5,6$.

3. Oq tegis nishanaga atilgan. Oqtin` nishananin anau yamasa minau tochkasina tiyiui elementar waqiya boladi. Nishananin tegisliginde XOY koordinat sistemasin kiritayik. Sonda elementar waqiyalar kenisligi,

$$\Omega = \{x, y; x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

turinde boladi.

Bul misallardan tomendegishe juumak shigariuga boladi: xar bir tajiriybe natijesinde juzege asiui mumkin bolgan, birin-biri biykarlaytugin elementar waqiyalar kenisligin duzedi. Elementar waqiyalardin bul kopligi shekli, sanakli kontin`ium kuuatliqka iye boliui mumkin.

Elementar waqiyalar kenisligine derek elementar waqiyalardin kalegen ules kopligi tosinnaliq waqiya (yamasa waqiya) dep ataladi. Bul tasiyiklau Ω shekli yamasa sanakli kopliq bolgan jagday ushin tolighi menen duris bolip, al kontin`um kuuatliqka iye bolganda kopliqlerdin ayirim klasi ushin g`ana duris boladi

Waqiyalardi latin` alfavitin`in bas xaripleri A, V, S, ... lar menen belgileymiz. Egerde A waqiyasi juzege askan bolsa, onda A ga derek elementler waqiyalardin bireui juzege askan boladi. Misali, kubikti bir ret taslaganda A waqiyasi jup ochkonin kelip shigiin bildiretugin bolsa, onda $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ ha`m A waqiyasi yamasa 2 ochkonin, yamasa 4 ochkonin, yamasa 6 ochkonin kelip shigiin bildiredi.

Tegis nishanaga ok atilganda, V waqiyasi oktin` birliq radiuska iye bolgan dongelekke tiyiin bildirse, onda $B = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$. Uliuma jagdayda matematikaliq koz-karastan kalegen Ω kopligin elementar waqiyalar kenisligi dep ataymiz. Onin elementleri elementar waqiyalar dep ataladi. Tosinnaliq waqiya dep, Ω nin bazi bir ules kopligine ataymiz.

Waqiyalar ustin`de a`meller. Waqiyalar klassifikatsiyasi.

Waqiyalar ustin`de a`meller, kopliqler ustin`de a`meller siyakli aniklanadi.

1. A ha`m V waqiyalarinin qosindisi dep, olardin en keminde bireuine derek bolgan elementar waqiyalardin kopligine aytamiz. Bul waqiyani $A+V$ yamasa $A \cup B$ dep belgileymiz. Eki waqiyaning qosindisi tajiriybenin natijesinde bul waqiyalardin yamasa bireuinin yamasa ekeuinin de juzege asiin bildiredi.

2. A ha`m V waqiyalarinin kobeymesi dep A ga ha`m V ga derek bolgan elementar waqiyalardin kopligine aytamiz. Bul waqiya AV yamasa $A \cap B$ dep belgilenedi. Eki waqiyaning kobiymesi bul waqiyalardin ekeuinin de bir uakitta juzege asiin bildiredi.

3. A ha`m V waqiyalarinin ayirmasi dep A ga derek, al V ga derek emes elementar waqiyalardin kopligine aytiladi. Bul waqiya $A-V$ yamasa $A \setminus V$ den belgilenedi. $A-V$ waqiyasi A waqiyasinin juzege asip V waqiyasinin juzege aspauin bildiredi.

4. Barliq elementar waqiyalardin kopligi Ω isenimli waqiya dep, al bir de elementke iye bolmagan $F = \Omega - \Omega$ bos kopligi mumkin emes waqiya dep ataladi.

5. $\bar{A} = \Omega - A$ waqiyasi A waqiyasina karama-karsi waqiya dep ataladi. $\bar{A}$ waqiyasi A waqiyasining juzege aspauin bildiredi. Karama-karsi waqiyalardin qosindisi isenimli waqiya, al olardin kobeymesi mumkin emes waqiya boladi.

$$A + \bar{A} = \Omega, \quad A\bar{A} = \emptyset.$$

6. A ha'm V waqiyalarinin tek g'ana bireuine tiyisli elementar waqiyalardan turatugin waqiya, A ha'm V waqiyalarinin simmetriyaliq ayirmasi dep ataladi. Bul waqiya $A\Delta B$ dep belgilenedi. $A\Delta B$ waqiyasi A ha'm V waqiyalarinin tek g'ana bireuinin juzege asiuin bildiredi.

7. Egerde $AB = \emptyset$ bolsa, onda A ha'm V waqiyalari oz-ara birgeliqsiz dep ataladi. Eki waqiyaning oz-ara birgeliqsizligi tajiriybenin natiyjesinde bul waqiyalardin ekeuinin birgeliqte juzege asiuu mumkin emes ekenligin bildiredi.

8. A waqiyasi juzege askanda V waqiyasi da sozsiz juzege asatugin bolsa, onda V waqiyasi A waqiyasining saldari dep ataladi ha'm bul fakt $A \subset B$ dep belgilenedi. Egerde $A \subset B$ ha'm $B \subset A$ bolsa, onda A ha'm V waqiyalari ten kushli yamasa ekvivalent dep ataladi ha'm $A=V$ dep belgilenedi. $A+V=V$ $AV=A$ boladi.

Jokaridagi waqiyalar ustin'de kiritilgen tusiniklerdi tomendegi 1- sizilma turinde tusindiriu kolayli boladi.

Meyli turakli shartler jiynagi tochkani dusmaldan kvadratk taslaudan ibarat bolsin. A -waqiyasi taslangan tochkanin ulken dongelekke kelip tusiugin, al V waqiyasi taslangan tochkanan kishi dongelekke kelip tusiugin bildiretugin bolsin. Sonda $A+B$, AB , $A-B$, $\bar{A}$, $A\Delta B$ waqiyalari, dusmaldan taslangan tochkanin saykes shtrixlangan oblas'larga kelip tusiugin bildiredi. Biz bunnan bilay elementar waqiyaning bazi bir waqiyaga derekligin $\in$ simvoli menen belgileymiz.

Misali $\omega \in A$.

Waqiyalardin qosindisi ha'm kobeymesi tusinigi shekli yamasa sanakli sandagi waqiyalar ushin duris boladi.

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Waqiyasi A_n , $n=1,2,\dots$ waqiyalarinin en keminde bireuine tiyisli elementar waqiyaning juzege asiuin bildiredi.

$A_1 A_2 \dots A_n \dots = A_n$ waqiyasi A_n , $n=1, 2, \dots$ waqiyalarinin xar birine tiyisli elementar waqiyaning juzege asiuin korsetedi. Kalegen waqiyalar ushin, tosinnanliq waqiyaning aniklamasinan tomendegi tepliqlerdin durisligi kelip shigadi.

1. $AA=A$, $A+A=A$ birdeyliq nizami;
2. $A+V=V+A$, $AV=VA$ kommutativliq nizami;
3. $A+(V+S)=(A+V)+S$, $A(VS)=(AV)S$ assotsiativliq nizami;
4. $A(V+S)=AV+AS$ - distributivliq nizami.

Kopshiliq jagdaylarda tomendegi teiliqlerdin orinli ekenligin biluu kerek boladi.

$$A+V=AV, \quad AV=A+V$$

Waqiyalar ustin'de a'mellerdi tomendegi misalda tusindireyik.

Misal. Kubik bir ret taslangan, elementar waqiyalar kenisligi

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

A waqiyasi - kubikti taslaganda jup ochkonin kelip shigiin, V waqiyasi – tak ochkonin, S waqiyasi 3 ke eseli ochkonin kelip shigiin bildiretugin bolsin.

Sonda $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$. $B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$. $C = \{\omega_3, \omega_6\}$ boladi.

$$\overline{A} = B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\} \quad A = B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} \quad C = \{\omega_3, \omega_6\}$$

$$A + B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} = \Omega_6$$

$AB = \emptyset$. Demek A, V waqiyalar oz-ara karama-karsi ha`m birgeliqsiz waqiyalar boladi.

$$A + B = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_6\}, \quad AC = \{\omega_6\}$$

$$B + C = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_6\}, \quad BC = \{\omega_3\}$$

Solay etip A ha`m V ha`m S waqiyalari ozara birgeliqsiz emes.

Lektsiya №2

Tema. Waqiyalar algebrasi ha'm δ -algebrasi. Itimalliq tusinigi. Aksiomalar.

Lektsiyanin jobasi:

1. Waqiyalar algebrasi.
2. Itimalliq tusinigi.
3. Aksiomalar.
4. Misal.

Tayanish tusinikler:

Waqiyalar algebrasinin tusiniklari ha'm olarga misallar korsetiu. Itimalliq tusinigi. Aksiomalar ha'm olardin kasiyetlari. Misallar korsetiu.

Qadagalawshi sorawlar:

1. Waqiyalar algebrasi degenimiz ne?
2. Itimalliqtin`` klassikaliq aniklamasin berin.

A`debiyatlar:

[1], [2], [3]

Elementar waqiyalar kenisligi Ω shekli yamasa sanakli bolsa tosinnanliq waqiya dep Ω nin kalegen ules koplugin tusinemiz. Al Ω elementar waqiyalardin kalegen sheksiz koplighi bolgan jagdayda waqiya dep Ω nin ules kopliqlerinin bazibir klasina derek bolgan ules kopliqlerinin tusinemiz. Bul klass kopliqlerdin (waqiyalardin) algebrasi yamasa δ -algebrasi dep ataladi.

Meyli Ω kalegen elementar waqiyalar kenisligi bolsin, al F onin ules kopliqlerinin bazi bir klasi bolsin.

Egerde $A \in F$, $B \in F$ kalegen waqiyalari ushin

1. $\Omega \in F$
2. $A + B \in F$, $AB \in F$, $A \setminus B \in F$

Bolsa, onda f waqiyalar algebrasi dep ataladi.

Egerde $A_n \in F$, $n = 1, 2, \dots$ bolganda $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$ bolsa, onda waqiyalardin algebrasi waqiyalardin δ -algebrasi dep ataladi.

Endi biz itimalliq tusinigin kiritiuge otemiz. Itimalliq waqiyanin juzege asiunin mumkinshiliq darejesin xarakterleushi san. Kalegen waqiya ushin itimalliqtin`` san manisin tikkeley esaplauga mumkinshiliq беретugin itimalliqtin`` uliuma aniklamasi jok. Bul temada biz itimalliqtin`` uliuma aniklamasi sipatin`da xar bir konkret tajiriybe yamasa tosinnanliq waqiya ushin aniklanatugin itimalliq kanaatlandiriui tiyis bolgan aksiomalar di keltiremiz.

Waqiyalar algebrasi F ke derek bolgan kalegen A waqiyasinin itimallighi dep, tomendegi aksiomalar di kanaatlandiratugin $R(A)$ sanli funktsiyasina aytamiz.

A1. Teris emesliq aksiomasi.

Kalegen $A \in F$ waqiyasi ushin $P(A) \geq 0$.

A2. Normirovkalau aksiomasi.

$$P(\Omega) = 1.$$

A3. Shekli additivliq aksiomasi.

Egerde A ha'm V waqiyalari birgeliqsiz, yag'niy $AB = \emptyset$ bolsa, onda $R(A+V)=R(A)+R(V)$. Shekli additivliq aksiomasi kalegen shekli sandagi jup-juptan birgeliqsiz waqiyalar ushin da duris boladi.

Waqiyalardin sheksiz izbe-izligine baylanisli manislerdi sheshkenge sanakli additivliq (δ additivliq) aksiomasi dep atalatugin tomendegi aksiomani kiritiu kerek boladi.

A4. Egerde $A_1, A_2, \dots, A_n \dots$ izbe-izliginde waqiyalar jup-juptan birgeliqsiz bolsa (yag'niy $A_i \cdot A_j = \emptyset, i \neq j$ bolganda), onda $P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$. Shekli additivliq aksiomasi menen birgeliqte uzliqsizliq aksiomasi dep atalatugin tomendegi aksioma sanakli additivliq aksiomasina ten kushli boladi.

A4'. Uzliqsizliq aksiomasi.

Egerde $A_1, A_2, \dots, A_n \dots$ waqiyalarinin izbe-izligi kemiushi izbe-izliq duzetugin bolsa, yag'niy $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$ bolsa, ha'm $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ bolsa, onda $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$ (uzliqsizliq R).

Itimalliq R A1-A4 aksiomalarin kanaatlandiraturin bolsa ha'm waqiyalar kopligi F algebra bolu menen birge ozinde waqiyalardin sanakli qosindisin ha'm kobeymesin tutaturin bolsa, onda $\{\Omega, F, P\}$ ushligi itimalliq kenisligi dep ataladi.

Solay etip itimalliq tusinigin kiritiu ushin $\{\Omega, F, P\}$ itimalliq kenisligin duziu kerek eken. Itimalliq kenisligi tomendegi tartipte duziledi: daslep elementar waqiyalar kenisligi Ω beriledi, onin ules kopliqlerinin jiynaginan F algebrasi (δ -algebrasi) duziledi, keyin F tin' elementi bolgan kalegen A waqiyasi ushin onin itimalligi $R(A)$ aniklanadi. A1, A2, A3, A4' yamasa A1, A2, A4 aksiomalar sistemasi Ω elementar waqiyalar kenisliginin F δ -algebrasinda itimalliq olshemli aniklaydi. Bul aksiomalar sistemasi 1933-jili A.N.Kolmogorov tarepinen kiritilgen.

Demek itimalliqtin'' jokaridagi aniklamasi boyinsha, $A \in F$ bolganda g'ana $R(A)$ itimalligi aniklangan boladi. Kerek jagdayda Ω nin ules kopligi A itimalliqqa iye emes. Sonliqtanda (Ω, F) ekiliq olshemli kenisliq dep ataladi.

Itimalliqtin'' bul uliuma aniklamasidan waqiyanin itimalligi waqiyanin funktsiyasi ekenligi kelip shigadi. Sebebi oz-ara ten kushli emes eki A ha'm V waqiyalarina xar kiyli $R(A)$ ha'm $R(V)$ itimalliqdari saykes keledi. Waqiyalar funktsiyasi bolgan itimalliqtin'' aniklau oblasti F algebrasi (δ -algebrasi) boladi. A1, A2 aksiomalaridan itimalliqtin'' manisler kopligi $[0,1]$ segmenti ekiligi kelip shigadi.

Endi elementar waqiyalar kenisligi Ω nin elementlerinin sani xar kiyli (shekli, sanakli, sanaksiz) bolgan jagdaylar ushin itimalliqtin'' aniklamalarin keltiremiz.

Diskret elementar waqiyalar kenisligi.

Itimalliqdin`` klassikaliq aniklamasi.

Egerde elementar waqiyalar kenisligi shekli yamasa sanakli sandagi elementar waqiyalardan turatugin bolsa, onda bul kenisliq diskret elementar waqiyalar kenisligi dep ataladi. Meyli Ω elementar waqiyalardin diskret kenisligi bolsin. Egerde Ω da $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$ bolatugin $R(\omega)$ teris emes sanli funktsiyasi berilgen bolsa, onda elementar waqiyalardin itimalliqdari berilgen dep aytiladi.

A waqiyadin itimaligi dep, $A \subset \Omega$ bolganda, tomendegi formula menen aniklanatugin $R(A)$ sanina aytamiz.

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega), \quad A \neq \emptyset \quad (1)$$

Egerde $A = \emptyset$ bolsa, onda $R(A)=0$ boladi. $P(\omega)$ itimalliqdari elementar itimalliqdar dep ataladi. Solay etip, A waqiyasinin itimaligi A waqiyasina derek elementar waqiyalardin itimalliqdarinin qosindisina ten.

Usilayinsha aniklangan itimalliq A1-A4 aksiomalarin kanaatlandiradi.

Misal: Tiyn ozinin bir tarepinen katarina eki ret kelip tuskenge shekem taslanadi.

Tiyni: a) 5 retten kop taslamau kerekligin, b) Jup ret taslau kerek boluinin itimalliqdarin tabin.

Tiyni bir ret taslaganda eki turli elementar waqiyalardin (G, Ts) bireui kelip shigiui mumkin. Tiyn bir tekli materialdan islengen simmetriyali dene bolganliqtan, $R(G)=R(Ts)=1/2$ dep aliu orinli boladi. Sonliqtan n taslauda gerb katarina eki ret kelip shigadi, tsifr katarina eki ret kelip shigadi – degen waqiyalar oz-ara ten itimalliqdarga iye boladi ha`m bul itimalliq $1/2$ n ge ten. Bizin misalimizda:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\} = \{TT, TT, TT, TT, TT, TT, \dots\}.$$

Tiyni n ret taslaganda tiyn ozinin bir tarepinen katarina eki ret kelip tusedi – degen waqiyani juzege asiratugin eki turli natijje bar. Olardin bireuinde keyingi eki rette gerb, al ekinshisinde tsifr kelip shigadi.

$$\text{Sonliqtan, } P(\omega_n) = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \quad (n \geq 2) \text{ boladi.}$$

Usilayinsha alingan itimalliqdar.

$$P(\omega_n) = \frac{1}{2^{n-1}} > 0, \quad (n \geq 2); \quad \sum_{n=2}^{\infty} P(\omega_n) = 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 \text{ shartleri kanaatlandiradi. Olay}$$

bolsa jokaridagi waqiyalardin itimalliqdari (1)-formula boyinsha esaplauga boladi. Misalda karalip atirgan waqiyalardi saykes A ha`m V dep belgilesek, onda olardi tomendegishe jaziuga boladi.

$$A = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}, \quad B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6, \omega_8, \dots\}.$$

Demek, (1)-formula boyinsha

$$P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = \frac{15}{16}, \quad P(B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\omega_{2n}) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{2}{3}.$$

Meyli elementar waqiyalar kenisligi Ω oz-ara ten kushliqi (tendey itimalliqdarga iye bolgan) n elementar waqiyalardan turatugin bolsin, yag`niy

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n\}, \quad P(\omega_1) = P(\omega_2) = P(\omega_3) = \dots = P(\omega_n) = 1/n.$$

A waqiyasi ($A \subset \Omega$) k elementar waqiyalardan turatugin bolsin.

$$A = \{\omega_{i1}, \omega_{i2}, \omega_{i3}, \dots, \omega_{ik}\}.$$

Onda (1)-formula boyinsha

$$P(A) = \sum_{j=1}^k P(\omega_{ij}) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$

Bunda k A ga derek elementar waqiyalar sani, n Ω ga derek elementar waqiyalar sani. Sonliqtan jokaridagi formulani $A \subset \Omega$ bolgan kalegen A waqiyasi ushin tomendegishe jaziuga boladi:

$$P(A) = \frac{A \text{ ga derek elementar waqiyalar sany}}{\Omega \text{ ga derek elementar waqiyalar sany}} = \frac{|A|}{|\Omega|}. \quad (2)$$

Solay etip, (2)-formula boyinsha A waqiyasinin itimalligi A ga derek elementar waqiyalardin saninin elementar waqiyalardin uliuma sanina katnasina ten. (2)-formula boyinsha aniklangan itimalliqtin`` aniklamasi itimalliqtin`` klassikaliq aniklamasi dep ataladi.

Lektsiya №3

Tema: Itimalliqdin`` kasiyetleri.

Lektsiyanin jobasi:

1. Birgeliqsiz waqiyalardin itimalliqlarin kosiu teoriyasi.
2. Kombinatorika elementleri.
3. Klassikaliq sxemaga keltiriletugin maseleler.

Tayanish tusinikler:

Birgeliqsiz waqiyalardin itimalliqlarin kosiu teoremasin korsetiu ha`m dalilleu. Kombinatorika elementlerin korsetiu. Klassikaliq sxemaga keltiriletugin maseleler.

Qadagalawshi sorawlar:

1. Birgeliqsiz waqiyalardin itimalliqlarin kosiu teoremasin ayting.
2. Kombinatorika elementlerin jazin?

A`debiyatlar:

[1], [2], [4]

A1-A4aksiomalarinin saldarlari sipatin`da itimalliqdin`` tomendegi kasiyetlerin keltiremiz.

1. Mumkin emes waqiyanin itimalligi nulge ten.

$$P(\emptyset) = 0$$

Bul tenliq durisligi $\Omega + \emptyset = \Omega$ tenligine ha`m A2, A3 aksiomalarinan kelip shigadi.

2. Egerde $A \subseteq B$ bolsa, onda

$$R(V \setminus A) = R(V) - R(A).$$

$V = A + (V \setminus A)$ ha`m $A \cap (V \setminus A) = \emptyset$ bolganliqtan, A3- aksiomasi boyinsha $R(V) = R(A) + R(V \setminus A)$ yamasa $R(V \setminus A) = R(V) - R(A)$

3. Egerde $A \subseteq B$ bolsa, onda

$$R(A) \leq R(V).$$

Bul tenliq A1 aksiomasinan ha`m 2-kasiyetten kelip shigadi.

4. $A \in F$ kalegen waqiyasi ushin

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Bul tensizliq $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$ katnasinan ha`m 3- kasiyetten kelip shigadi.

5. $P(\bar{A}) + 1 - P(A)$. Bul tenliq $A + \bar{A} = \Omega$, $A \cap \bar{A} = \emptyset$ tenliqlerinen ha`m A3 aksiomasinan kelip shigadi.

6. Kalegen eki A ha`m V waqiyalari ushin

$$R(A \cup V) = R(A) + R(V) - R(A \cap V).$$

$A \cup V = A + (A \cap V)$ bolganliqtan A3 aksiomasi boyinsha $R(A \cup V) = R(A) + R(V \setminus A \cap V)$. Itimalliqdin`` 2-kasiyeti boyinsha $R(V \setminus A \cap V) = R(V) - R(A \cap V)$ bolganliqtan,

$$R(A \cup V) = R(A) + R(V) - R(A \cap V)$$

tenligine iye bolamiz.

7. Kalegen A ha'm V waqiyalari ushin

$$R(A \cup V) \leq R(A) + R(V).$$

Bul tensizliq 6-kasietten kelip shigadi.

8. Meyli $A_1, A_2, \dots, A_n$ kalegen waqiyalar bolsin. Onda

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i, A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i, A_j, A_k) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1, A_2, \dots, A_n).$$

Bul formula Bul` formulasi dep ataladi. Bul formulani induksiya metodi menen dallileymiz. Itimalliqdin` 6- kasiyeti boyinsha, Bul` formulasi $n = 2$ bolganda duris.

$R(A_1 \cup A_2) = R(A_1) + R(A_2) - R(A_1 A_2)$, $n = 1$ ushin formula duris bolsin

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i, A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i, A_j, A_k) + \dots + (-1)^{n-2} P(A_1, A_2, \dots, A_{n-1})$$

.

$$\text{Sonda } P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = P(B + A_n) = P(B) + P(A_n) - P(A_n B).$$

$$\text{Bul tenliqke bizge malim bolgan } P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right), \quad P(A_n B) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i A_n\right)$$

manislerin koysak, Bul` formulasi kelip shigadi.

$$9. \text{ Kalegen } A_1, A_2, \dots, A_n \text{ waqiyalari ushin } P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

Bul tensizliq 7-kasietten induksiya metodi boyinsha kelip shigadi.

10. Egerde $\{A_n\}$ waqiyalardin monoton osiushi izbe-izligi bolsa (yag`niy $A_n \subset A_{n+1}$) ha'm $A = \left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)$ bolsa, onda $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$. Bul uzliqsizliq aksiomasinin ekinshi formasi boladi.

Kombinatorika elementleri. Klassikaliq sxemaga keltiriletugin maseleler.

Elementar waqiyalar kenisligi Ω shekli sandagi elementlerden turatugin, ha'm barliq elementar waqiyalar tendey itimalliq'larga iye bolgan sxema klassikaliq sxemani duzedi. Bul sxema kiretugin maselelerde waqiyalardin itimalliq'lari itimalliqdin` klassikaliq aniklamasi boyinsha esaplanadi. Itimalliq teoriyasina tiyisli maselelerdi sheshiu tiykarinan eki etaptan turadi:

1) Maselenin shartin`de kiritilgen tajiriybeni suuretlu ushin saykes matematikaliq model`di saylap aliu ha'm maseleni matematikaliq formulirovkalau.

2) Matematikaliq maseleni sheshiu.

Itimalliqdin` klassikaliq aniklamasi tajiriybenin natyjeleri bazi bir maniste simmetriyali bolatugin ha'm bul natyjelerdi ten mumkinshiliqli dep karauga bolatugin tosinanliq kubilislardin en jaksi matematikaliq model boladi. Tajiriybenin natyjelerinin simmetriyaliq ha'm tenmumkinshiliq kasiyeti kubikti yamasa tiyindi taslaganda, lotereya oyininda ha'm t.b. tajiriybelerde saklanadi.

Klassikaliq aniklama boyinsha waqiyalardin itimalliq'larin esaplaganda bazibir kopliqtin` ules kopliqlerinin sanin kombinatorikaliq metodlar menen esaplauga tuura keledi. Olar, ornalastiriu, orin almastiriu ha'm teriu tusiniklari boladi.

Meyli bizge shekli $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ kopligi berilgen bolsin. Bul kopliqti N ge ten bolgan bas toplam dep ataymiz. Bos toplamnan duzilgen kolemi n ge ten bolgan saylanba toplam dep $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ tartiplengen izbe-izligine aytamiz.

X kopligine N elementin`en  $n$  element boyinsha jasalgan (duzilgen) orinalastiriu dep kalegen tartiplengen  $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$  saylanba toplamina aytamiz. Eki orinalastiriu bir-birinen ozlerinin elementlerinin sostavi menen yamasa tartibi menen ayiriladi. Eki  $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$  ha`m $(x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn})$ orinalastiriulari oz-ara ten boliui ushin $x_{ik} = x_{jk}, \kappa = 1, 2, 3, \dots, n$ tenliqleri olardin barliq saykes elementleri ushin orinlaniui kerekli ha`m jetkiliqli. N elementten n element boyinsha duzilgen barliq orinalastiriudin sani

$$A_n^N = N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot (N-n+1) \quad (1)$$

$N \geq 1$ bolganda $A_N^0 = 1$ dep kabil etemiz. $N = n$ bolgandagi orinalastiriudin dara jagdayi N elementten duzilgen orin almastiriu dep ataladi. N elementten barliq orinalastiriulardin sani

$$P_N = N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = N!. \quad (2)$$

Birdey sandagi elementlerge iye bolgan eki orin almastiriu bir birinen ozlerinin elementlerinin tartibi menen ayiriladi. X kopliginin N elementin`en n element boyinsha duzilgen teriu dep, X kopliginin $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ turindegi kalegen ules kopligine aytamiz. N elementten n boyinsha jasalgan barliq teriulardin sani

$$C_N^n = \frac{A_n^N}{n!} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \frac{N(N-1)(N-2)\dots(N-n+1)}{n!}. \quad (3)$$

(3)- tenliqten $C_N^n = C_N^{N-n}$ ekenligi kelip shigadi. Bunnan bilay $0! = 1$, $C_N^0 = 1$ ha`m $n < 0$, $n > N$ bolganda $C_N^n = 0$ dep tusinemiz. Birdey sandagi elementlerge iye bolgan eki teriu biri-birinen ozlirinin elementlerinin sostavi menen ayiriladi. Meyli bizge kolemi N ge ten bolgan bas toplam berilgen bolsin. Bul bos toplamnan kolemi n ge ten bolgan saylanba toplamdi eki turli usil menen duziuge boladi. 1) Kaytalausiz saylanba toplam. Saylanba toplamnin birinshi elementi sipatin`da bas toplamdagi  $N$  elementtin` kalegen bireuin, al ekinshi elementi sipatin`da kalgan  $N-1$  elementtin` kalgan bireuin ha`m.t.b. saylanba toplamnin  $n$ -elementi sipatin`da bas toplamda kalgan $N-(n-1)$ elementtin` kalegen bireuin alamiz. Usilayinsha duzilgen saylanba toplam dep ataladi. Kolemi n ge ten bolgan bunday saylanba toplamlardin sani N nen n boyinsha duzilgen orinalastiriudin sanina ten:

$$A_N^n = N(N-1)\dots(N-n+1)$$

Egerde xar bir kaytalausiz saylanba toplamga $\frac{1}{A_N^n}$ itimalligin

saykeslendirsek, onda biz klassikaliq sxemaga iye bolamiz. Kaytalausiz saylanba toplamdin ishinde numerlegen N shar bar urnadan izbe-iz turde dusmaldan n shar aliu arkali duziledi dep tusiniuge boladi. Alingan shar urnaga kaytarilmaydi. Bul

jerde «dusmaldan» sozi urnadan kalegen shar aliu barliq sharlar ushin ten mumkinshiliq ekenin bildiredi

1-misal. Numerlengen m shar n oringa dusmaldan jaylastiriladi. Numerlengen k ha'm s bolgan eki shar sol numerlerdegi jaylaskan bolu itimalligin tabin.

Biz bul jerde elementar waqiya dep, m shardin n oringa jaylasiuinin bir usilin tusinemiz. Elementar waqiyalar kenisligi Ω nin elementlerinin sani shardi n oringa jaylastiriudin sanina yag'niy n elementten m element boyinsha duzilgen ornalastiriulardin sanina ten:

$$|\Omega| = A_n^m = n(n-1)\dots(n-m+1).$$

Numerleri k ha'm s bolgan eki shardi saykes numerli orinlarga tek g'ana bir turli usil menen jaylastiriimizga boladi, al kalgan $m-2$ shardi $n-2$ oringa

$$A_{n-2}^{m-2} = (n-2)(n-3)\dots(n-m+1)$$

turli usil menen jaylastiriuga boladi. Sonda izlengen itimalliq

$$P = \frac{A_{n-1}^{m-1}}{A_n^m} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

Endi biz kolemi N ge ten bolgan bas toplamnan alingan ozlerinin sostavi menen ayirilatugin kolemi n ge ten bolgan saylanba toplamlardin sanin tabayik. Biri birinen elementlerinin tartibi menen ayirilatugin, birdey sostavka iye bolgan, kolemi n ge ten bolgan saylanba toplamlardin sani $n!$ ga ten. Sonliqtan elementlerinin sostavi boyinsha ayirilatugin saylanba toplamlardin sani $\frac{A_N^n}{n!} = C_N^n$ ge ten boladi.

Bul N elementten n element boyinsha jasalgaan teriu boladi. Eger xar bir saylanba toplamga $\frac{1}{C_N^n}$ itimalligin saykeslendirsek, biz tagi da klassikaliq sxemaga iye bolamiz.

Lektsiya №4

Tema. Itimalliqtin`` geometriyalik ha`m statistikaliq aniklamasi.

Lektsiyanin jobasi:

1. Itimalliqtin`` geometriyalik aniklamasi.
2. Misallar.
3. Itimalliqtin`` statistikaliq aniklamasi.

Tayanish tusinikler:

Itimalliqtin`` geometriyalik aniklamasi ha`m misallar koriu. Elementar waqiyalardin kenisligin tusindirip beriu. Itimalliqtin`` statistikaliq aniklamasi ha`m misallar sheshiu.

Qadagalawshi sorawlar:

1. Itimalliqtin`` geometriyalik aniklamasin aytin`.
2. Itimalliqtin`` statistikaliq aniklamasin aytin`.

A`debiyatlar:

[1], [3], [5]

Elementar waqiyalar kenisligi Ω diskret bolgan jagdayda waqiyalardin itimalliqdari (1) ha`m (2) aniklamalari menen esaplanatuginin kordik. Bul aniklamalardi Ω tajiriybenin sanaksiz sandagi ten mumkinshiliqli natiyjelerinin koplighi bolgan jagdayda kollanip bolmaydi. Sonliqliqtan bunday jagdaylarda itimalliqtin`` geometriyalik aniklamasi kollanadi.

Meyli $\Omega(\omega)$ shekli n olshemli kolemg e iye bolgan n olshemli Evklid kenisliginin oblasti (koplighi) bolsin. Ω nin n olshemli kolemg e iye bolgan ules koplighi A ni tosinanliq waqiya dep tusinemiz.

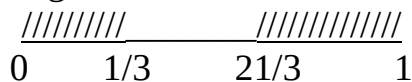
$A \subseteq \Omega$ waqiyalarinin klasi F δ -algebrasin duzedi. $A \in F$ waqiyasinin itimallighin tomendegishe aniklaymiz.

$$P(A) = \frac{A \text{ нын } n \text{ олшемли колеми}}{\Omega \text{ нын } n \text{ олшемли колеми}} = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad (1)$$

n olshemli kolemg dep saykes lebeg olshemin ha`m R itimalliqtin`` (1) tenlighi menen aniklap biz $\{\Omega, F, P\}$ itimalliq kenisligi materialliq tochka Ω oblastin`a dusmaldan (tosinanliq turde) taslangandagi payda bolmaytugin maselelerdin modeli boladi. Materialliq tochkani  $\Omega$  oblastin`in anau yamasa minau kelip tusiui elementar waqiya boladi ha`m bul tochkani jagdayi (koordinatalari) usi oblast`ta ten olshemli bolistirilgen boladi, yag`niy materialliq tochkani  $A \subset \Omega$  oblastin`a kelip tusiui itimallighi sol oblastin`n olshemli kolemine proporsional boladi

Biz oblast`lardin  $n$  olshemli kolemi dep  $n=1,2,3$  bolganda saykes kesindinin uzunlighin, tegis figuranin ha`m kenisliq figurasinin kolemin tusinemiz. (1)-formulada aniklangan itimalliq geometriyalik itimalliq dep ataladi.

1-misal. Sterjen o'zining uzunligi bo'yinsha ten o'lshefli bolistirilgan tosinanliq tochkada eki bolekke bolinedi. Sterjen`nin kishi boleginin uzunliginin ushten birinen asip ketpeuinin itimalligin tabin.



Sterjen`nin uzunligin 1 dep belgileyik. San kosherinde x ozgermeli koordinata bolsin. Elementar waqiyalar kunisligi Ω uzunligi 1 bolgan kesindinin tochkalarinin jiynaginan turadi: $\Omega = (x; 0 \leq x \leq 1)$, $|\Omega| = |A|$ waqiyasi itimalligi izlngen waqiya bolsin

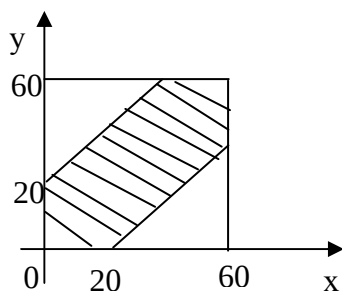
$$A = \left\{ x; 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \right\}, |A| = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$(1)\text{-formula boyinsha } P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\frac{2}{3}}{1} = \frac{2}{3}.$$

2-misal. Ushirasiu xaqqinda masele. Eki joldas bir saat dauaminda ushirasiuga kelisken. Ushirasiu ornina burin kelgen adam ekinshisin 20 minut dauaminda kutip turadi. Onnan keyin ketip kaladi. Egerde olardin xar kaysisi ushirasiu ornina 1 saat araligindagi kelgen uakit momentlerinde keliui mumkin bolsa, eki joldastin` ushirasiu itimalligi nege ten?

x , y arkali saykes birinshi ha`m ekinshi joldaslardin ushirasiu ornina keliu momentlerin belgileyik, $0 \leq x \leq 60$, $0 \leq y \leq 60$.

Sonda $\Omega = \{(x, y), 0 \leq x \leq 60, 0 \leq y \leq 60\}$. A waqiyasi eki joldastin` ushirasiuin bildiretugin bolsa, onda $A = \{(x, y), |x - y| \leq 20\}$



Sonda geometriyalik aniklama boyinsha eki joldastin` ushirasiu itimalligi  $A$  oblastin`in maydani tarepi 60 ka ten bolgan kvadrattin` maydanina katnasinina ten, yag`niy

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9}$$

Itimalliqtin` statistikaliq aniklamasi.

Itimalliqtin` klassikaliq aniklamasi tajiriybe otkeriletugin ob`ektlerdin simmetriyaligina ha`m onin tiykarinda tajiriybenin natiyjelerinin ten

mumkinshiliqli boluina tiykarlangan. Birak-ta tabiyattaniu ilimine baylanisli ha`m texnikaliq xarakterdegı kop g`ana maselelerdi karaganda tajiriybenin natiyjelerinin ten mumkinshiliqli yamasa ten mumkinshiliqli emesligin aniklauga akildin muapik usilin tabiu kiyin. Bunday jagdaylarda tajiriybenin natiyjeleri bolgan elementar waqiyalardin kaday itimalliq penen juzege asatuginligi xaqqında xesh narse ayta almaymiz, uliuma jagdayda bul itimallıqlar belgisiz boladi. Itimallıq teoriyasinin rauajlaniuinin daslepki dauirlerinen baslap, bunday belgisiz itimallıqlardi kop sandagi tajiriybelerdi otkeriu arkali tabiu mumkin ekenligi xaqqındağı pikirler payda bolgan.

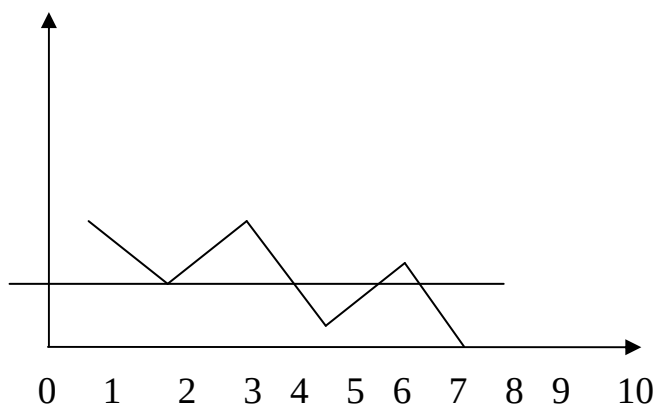
Meyli turakli shartler jiynagi orinlaganda xar kaysisında bazi-bir A ukiyasi juzege asatugin yamasa aspaytugin n garezsiz tajiriybe otkerilgen bolsin. Usi n tajiriybede A waqiyasi μ ret juzege askan bolsin. μ/n katnasi A waqiyasinin juzege asiui yamasa aspauı ustin`degı jurgizilgen uzak uakit baklaular, shartler jiynagi turakli bolganda, kop sandagi otkerilgen tajiriybelerdin natiyjesinde A waqiyasi juzege asiı jiyiligi turakli zakonlıqqa bolatuginligin aniklangan. Atap aytkanda μ/n katnasi n sani jeterli darejede ulken bolganda kop sandagi tajiriybeler seriyasi ushin bir-birinen juda az parik kilatuginligi baklangan. Jiyiliqtin` turaklılıq kasiyeti dep atalatugin bul fakt en daslep demografiyalıq xarakterdegı izertleudin barisında ashildi. Ayemgi dun`yada putkil mamleket ushin ha`m ulken kalalar ushin tuuilgan ul balalar saninin tuuilgan balalar uliuma sanına katnasi jildan jilga derliq ozgermey kalatuginligi sezilgen. Bul san ayemgi Kitayda bizin eramızdan 2238 jil burin xalıqtin` esabin aliudin natiyjesinde $\frac{1}{2}$ ge ten dep

kabil etilgen. Laplas, London, Peterburg, Berlin ha`m putkil Frantsiya ushin statistikalıq maglumatlardi uyreniu natiyjesinde ul balalardin tuuilıu jiyilginin birinshi jillari dauamında shama menen 22\43 ke ten ekenligi aniklangan. Solay etip, ayemgi dauirlerden baslap-ak, waqıyanın jiyiligi tajiriybenin sani artip barganda bazi bir turakli sanga juuiklasip baratuginligi xaqqındağı maglumatlar bar bolgan. Asirese, itimallıqtin` klassikalıq aniklamasin kollaniuga bolatugin jagdaylarda jiyiliqtin` terbelisli turde jakinlasiui waqıyani itimallıqtin` dogereginde bolatuginligi aniklangan. Bul faktti tastiyiklau ushin kop g`ana ret tiyin taslau, kubikti taslau ha`m t.b. tajiriybeler otkerilgen. Tomendegi tablitsadan kop ret tiyin taslauda Gerbtin` kelip shigiı jiyiligin onin itimalligi $1/2$ ge jakinlasip baratuginligi korinedi.

Ekspereimentator	Tiyindi taslau sani	Gerbtin` kelip shigiı sani	Jiyiligi
Byuffen	4040	2048	0,5080
Feller	10000	4979	0,4979
K.Pirson	12000	6019	0,5010
Djevons	20480	10379	0,5068
K.Pirson	24000	12012	0,5005
Romanovskiy	80640	39699	0,4923

Meyli tiyin n ret taslanganda gerbtin` kelip shigiı jiyiligi μ/n bolsin. Koordinatalar kosherin sizip, abstsissa kosherinde otkerilgen tajiriybeler sani n di

,al ordinata kosherine gerbtin` kelip shigiu jiyiligi μ/n di koyayik. Tajiriybenin sani n nin osip bariui menen $(n, \mu/n)$ tochkalarin tutastiriushi sinik sizik $u=1/2$ tuurisina jakinlasip baradi.



Kop sandagi otkerilgen tajiriybeler natiyjesinde bir katar tosinanliq waqiyalardin jiyiligin derliq turakli bolip kalatuginligi, tajiriybe otkeriushiden garezsiz turde tosinanliq waqiyalardin zakonliqlarin bar ekenligin korsetedi. Bul zakonliqlardi koriniui jokarida aytilgan jiyiliqlerdin derliq turakliliginan ibarat boladi. Itimalliqtin`` klassikaliq aniklamasin kollaniuga mumkin bolgan jagdaylarda, tajiriybe kop sanda otkerilgende waqiyanin jiyiligi waqiyanin itimalligina jakin boliui, uliuma jagdayda da jiyiliq onin dogereginde terbelisi turde ozgerip, ogan sheksiz jakinlasip baratugin turakli san bar dep esaplauga mumkinshiliq beredi.

Lektsiya №5
Tema. Shartli itimalliqlar.
Lektsiyanin jobasi:

1. Shartli itimalliqlar.
2. Kobeytiu teoremasi.
3. Waqiyalardin garezsizligi.

Tayanish tusinikler:

Shartli itimalliqlar ha`m kobeytiu teoremasi. Maseleler sheshiu. Waqiyalardin garezsizligi.

Qadagalawshi sorawlar:

1. Shartli itimalliqlardin aniklamasin aytin`.
2. Kobeytiu teoremasin dallillen.

A`debiyatlar:
[1], [2], [5]

Biz usi uakitka shekem waqiyalardin itimalliqlarin esaplaganda tajiriybeni otkeriude saklanatugin turakli shartler jiynaginan baska kosimsha shartlerdin orinlaniuin talap etkenimiz jok. Usilayinsha esaplangan itimalliqlar shartsiz itimalliqlar dep ataladi. Kopshiliq jagdaylarda A waqiyasinin itimalligin esaplaganda V waqiyasinin juzege askanligin esapka aliuga tuura keledi. Bunday itimalliq A waqiyasinin V ukiyasi juzege askanligin shartli itimalligi dep ataladi. A waqiyasinin V waqiyasi juzege askandagi shartli itimalligi $P(A/V)$ yamasa $R_V(A)$ dep belgilenedi. Shartli itimalliqlardi esaplaudun bir kansha misallarin keltiremiz. 1-misal. Eki kubik bir uakitta taslangan. Kelip shikkan ochkolardin qosindisi jup ekenligi malim bolganda, ochkolardin qosindisinin 8 ge ten ekenliginin itimalligin tabin.

Ochkolardin qosindisinin 8 ge ten boluiun bildiretugin waqiyani A arkali, ochkolardin qosindisinin jup ekenligin bildiretugin waqiyani V arkali belgileyik. Sonda

$$\Omega = \{(i, j): i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{(i, j): i + j = 8, i, j = 1, 6\}$$

$$B = \{(i, j): i + j + 2k, i, j = 1, 6, k = 1, 6\}$$

$|\Omega| = 36, |A| = 5, |B| = 18$ bolganliqtan, itimalliqtin` klassikaliq aniklamasi boyinsha

$$P(A) = \frac{5}{36}, P(B) = \frac{18}{36}, P(A/B) = \frac{5}{18} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{18}{36}} = \frac{P(A)}{P(B)}, AB = A$$

bolganliqtan, bul misalda $P(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ dep jaziuga boladi.

2-misal. Meyli elementar waqiyalar kenisligi oz-ara ten mumkinshiliqli n elementar waqiyadan turatugin bolsin, yag`niy:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}, \quad P(\omega_i) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, n.$$

Olardin ishinde $|A| = m, |B| = k, |AB| = r$ bolsin. Egerde V waqiyasi juzege askan bolsa, onda ogan derek k elementar waqiyadan bireui juzege asadi. Sol uakitta A waqiyasi juzege asiu ushin $A \cap V$ ga derek bolgan r elementar waqiyadan

bireui juzege asadi. Sonliqtan klassikaliq aniklama boyinsha $P(A/B) = \frac{r}{k} = \frac{\frac{r}{n}}{\frac{k}{n}} = \frac{P(AB)}{P(B)}$.

Uliuma jagdayda shartli itimalliqning aniklamasi tomendegishe kiritiledi:

Meyli $\{\Omega, F, P\}$ itimalliq kenisligi berilgen bolip, $A, B \in F$ ha'm $R(V) > 0$ bolsin. A waqiyasinin V waqiyasi juzege askandagi shartli itimalligi dep

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (1)$$

formulasi menen aniklanatugin itimalliqqa aytamiz.

Egerde V berilgen bolip, $A \in F$ waqiyasi $\{\Omega, F, P\}$ itimalliq kenisligin aniklaytugin bolsa, onda $R_V(A)$ shartli itimalligi $A \in F$ waqiyasi R_V funktsiyasi retin`de jana $\{\Omega, F, P\}$ itimalliq kenisligin aniklaydi. Buni tekseriu ushin R_V shartli itimalliginin A1-A aksiomalarin kanaatlandiratuginin korsetiu jetkiliqli. Bul aksiomalarin orinlanatuginligi $R_V(A)$ (yamasa $R(A/V)$) shartli itimalliqlardan tomendegi kasiyetlerinen kelip shigadi.

$$1. P(A/B) \geq 0, \text{ чебоёбу } P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \geq 0.$$

$$2. P(\Omega/B) = 1, \text{ чебоёбу } P(\Omega/B) = \frac{P(\Omega B)}{P(B)} = 1.$$

3. Egerde $A_1 A_2 = \emptyset$ bolsa, onda

$$R(A_1 + A_2 / V) = R(A_1 / V) + R(A_2 / V). \quad (2)$$

$A_1 A_2 = \emptyset$ bolganda $A_1 B \cap A_2 B = \emptyset$ bolatugin bolganliqtan

$$P(A_1 + A_2 / B) = \frac{P((A_1 + A_2)B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 B + A_2 B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 B) + P(A_2 B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 B)}{P(B)} = P(A_1 / B) + P(A_2 / B).$$

Shartli itimalliqlardan bul kasiyetleri A1-A3 aksiomalarinin durisligin korsetedi.

$$4. P(\bar{A} / B) = 1 - P(A / B) \quad (3)$$

Xakiykatin`dada  $A + \bar{A} = \Omega, A\bar{A} = \emptyset$  bolganliqtan (2)-tenliqte  $A_1 = A, A_2 = \bar{A}$  dep alsak 2- kasiyettin` tiykarinda (3)-tenligi kelip shigadi.

5. Egerde bolsa, onda $P(A_n / B) \downarrow \emptyset, A_0 \downarrow \emptyset$ ekenliginen $\forall A_n \downarrow \emptyset$ ekenligi kelip shigatugin bolganliqtan $P(A_n / B) = \frac{P(BA_n)}{P(B)} \downarrow \emptyset$ shartli itimalliqning bul kasiyeti A4 aksiomasinin orinlanatuginin bildiredi.

(1)-formulanin tiykarinda $R(A) > 0$ bolganda

$$P(A/B) = \frac{P(BA)}{P(A)} \quad (4)$$

dep jaziuga boladi. (1) ha'm (4) formulalaridan

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B) \quad (5)$$

ekenligi kelip shigadi. Bul tenliq kobeytiu teoremasi dep ataladi ha'm oni tomendegishe aytiuga boladi.

Kalegen eki waqiyaning kobeymesinin itimalligi olardin bireuinin shartsiz itimalligin ekinshisinin birinshisi juzege askandagi shartli itimalligina kobeytkenge ten.

Kobeytiu teoremasi induksiya boyinsha kalegen sandagi waqiyalardin kobeymesi ushin uliumalastiriuga boladi

$$P(A_1, A_2, \dots, A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n / A_1 A_2 \dots A_{n-1}). \quad (6)$$

(6)-tenliginin dalilleuin okiushilardin ozlerine kaldiramiz.

Itimalliq teoriyasinin qollanbalarinda biz $R(A/V)$ itimalligin (1)-formula boyinsha emes, al baskasha pikir juritiu arkali aniklaymiz. Bul jagdayda (5)-formula $R(AV)$ itimalligin $R(A)$ ha'm $R(V/A)$ itimalligilari arkali yamasa $R(V)$ ha'm $R(A/V)$ itimalligilari arkali esaplauga mumkinshiliq beredi.

Waqiyanin garezsizligi.

Endi biz waqiyalardin garezsizligi tusinigin kiritemiz.

Egerde A ha'm V waqiyalari ushin $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ tenligi orinlansa, onda A ha'm V waqiyalari oz-ara garezsiz kelip shigadi.

A ha'm V waqiyalarinin garezsizliginen tomendegi kasiyetler kelip shigadi.

1. Egerde $R(A) > 0$, $P(V) > 0$ bolsa, onda A ha'm V waqiyalarinin garezsizligi $R(A/V) = R(A)$, $R(V/A) = V$ tenliqlerinin xar kaysisina ekvivalent. Bul kasiyet (1) ha'm (4)-formulalarina (7)-tenliqti kollaniudan kelip shigadi.

2. Egerde $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ bolsa, onda $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$, $P(\bar{A}B) = P(\bar{A}) \cdot P(B)$, $P(A\bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B})$. Bul ush tenliqtin` birinshisin dalilleyik:

$$R(AV) = R(A - AV) = R(A) - R(AV) = R(A) - R(A)R(V) = R(A)(1 - R(V)) = R(A)R(V).$$

3. Egerde A ha'm V_1 waqiyalari garezsiz ha'm A ha'm V_2 waqiyalari garesiz jane $B_1 B_2 = \emptyset$ bolsin. Onda A ha'm $V_1 + V_2$ waqiyalari da garezsiz boladi.

Bu kasiyettin` durisligi tomendegi tenliqlerden kelip shigadi.

$$P(A(B_1 + B_2)) = P(AB_1 + AB_2) = P(AB_1) + P(AB_2) = P(A)P(B_1) + P(A)P(B_2) =$$

$$P(A)[P(B_1) + P(B_2)] = P(A)P(B_1 + B_2)$$

Itimalliq teoriyasinin qollanbalarinda kalegen eki waqiyaning garezsizligin aniklau ushin (7)-tenliqtin` orinlaniuin tekseriu jetkiliqli boladi.

Misal: Tiynin eki ret taslangan. A_1 waqiyasi birinshi taslauda gerb, A_2 waqiyasi ekinshi taslauda tsifr kelip shigadi degen waqiyalardi bildiretugin bolsin.

$P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$ bolganliqtan $P(A_1, A_2) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A_1) \cdot P(A_2)$ boladi.

Waqiyalardin sani ekeuden kop bolgan jagdayda waqiyalardin jup-juptan garezsizligi ha'm toplamda garezsizligi tusiniklerin kiritelik.

Egerde $A_1, A_2, \dots, A_n$ waqiyalari ushin $i \neq j$ bolganda $P(A_i, A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$ tenliqleri orinlansa, onda $A_1, A_2, \dots, A_n$ waqiyalari jup-juptan garezsiz dep ataladi.

Egerde $A_1, A_2, \dots, A_n$ waqiyalarinin kalegen gruppasi ushin $1 \leq i_1 \leq i_2 < \dots < i_k \leq n, \quad 2 \leq k \leq n$ bolganda $P(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$ tenliqleri orinlansa, onda $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_n}$ waqiyalari toplamda garezsiz dep ataladi. Keri jagdayda waqiyalar toplamda garezsiz boladi. Waqiyalardin jup-juptan garezsizliginen olardin toplamda garezsizligi kelip shiga beredi. Bul kasiyet tomendegi misalda korinedi.

Misal: Tegisliqke ush jagi saykes kizil, kok, jasil renlerge, al tortin`shi jagi ush renge de aralas boyalgan tetraedr taslangan. Tetraedrdin tegisliqke kizilga boyalgan jagi menen kelip tusiun V, al jasilga boyalgan jagi menen kelip tusiun S waqiyasi dep belgilensin.

$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, an $P(AB) = P(BC) = P(AC) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(B) = P(B)P(C) = P(A)P(C)$ boladi.

Sebebi tetraedrdin tort jaginin ekeuinide kizil, kok, jasil renler bar. Demek A, V, S waqiyalari jup-juptan garezsiz. Birakta $P(ABC) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$ bolganliqtan A, V, S waqiyalari toplamda garezli.

Lektsiya № 6
Tema. Toliq itimalliqtin`` formulasi.
Lektsiyanin jobasi:

1. Toliq itimalliqtin`` formulasi.
2. Bayes formulasi.
3. Misallar.

Tayanish tusinikler:

Toliq itimalliqtin`` formulasi ha`m ogan misallar korsetiu. Bayes formulasinin kelip shigiui ha`m ogan misallar.

Qadagalawshi sorawlar:

1. Toliq itimalliqtin`` formulasin jazin.
2. Bayes formulasin dallilen.

A`debiyatlar:
[1], [5], [6]

Eger $A_1, \dots, A_n$ waqiyalari jup-juptan birgeliqsiz bolsa ha`m $A_1 + \dots + A_n = \Omega$ bolsa, onda $A_1, \dots, A_n$ waqiyalarin shekli jikleniu duzedi dep ataymiz.

Meyli $A_1, \dots, A_n$ waqiyalari shekli jikleniu duzetugin bolsin ha`m barliq $P(A_k) > 0$ bolsin. Onda kalegen $B \subset \Omega$ waqiyasi ushin

$$B = B\Omega = AB_1 + \dots + AB_n \quad (1)$$

dep jaziuga boladi. $A_1, \dots, A_n$ waqiyalarinin jup-juptan birgeliqsizliginen $BA_1, \dots, BA_n$

waqiyalarinin jup-juptan birgeliqsizligi kelip shigadi. Sonliqtan $P(B) = \sum_{k=1}^n P(BA_k)$

kobeytiu teoremasi boyinsha $P(BA_k) = P(A_k)P(B/A_k)$ bolganliqtan keyingi eki formuladan

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(BA_k)P(B/A_k) \quad (2)$$

formulasi kelip shigadi. Bul formula toliq itimalliqtin`` formulasi dep ataladi.

1-misal: Urnada M ak shar, N-M kara shar bar. Urnadan kaytalausiz turde izbe-iz eki shar alingan. Ekinshi alingan shardin ak shar boluinin itimalligin tabin.

A ukiyasi arkali birinshi alingan shardin ak shar boluinin, V waqiyasi arkali ekinshi alingan shardin ak shar boluinin belgileyik.

Sonda $P(A) = \frac{M}{N}$, $P(\bar{A}) = \frac{N-M}{N}$, $P(B/A) = \frac{M-1}{N-1} \cdot \frac{M-1}{N-1}$, $P(B/\bar{A}) = \frac{M}{N-1}$. Toliq

itimalliqtin`` formulasi boyinsha

$$P(B) = P(A)P(B/A) + P(\bar{A})P(B/\bar{A}) = \frac{M}{N} \cdot \frac{M-1}{N-1} + \frac{N-M}{N} \cdot \frac{M}{N-1} = \frac{M(M-1+N-M)}{N(N-1)} = \frac{M(N-1)}{N(N-1)} = \frac{M}{N}$$

Solay etip $P(A) = P(B) = \frac{M}{N}$ yag`niy birinshi ha`m ekinshi ret ak shar aliudin itimalliqlari oz-ara ten boladi eken. Sol siyakli alingan shardi urnaga kaytarmay izbe-iz turde shar alganda kalegen orinda ak shar aliudin itimalligi da $\frac{M}{N}$ ge ten bolatuginligin koriuge boladi.

2-misal: Mugalim jokari matematikadan zachet aliu ushin 50 masele tayarlagan. Olardin ishinde differentsial esabinan 20 masele, integral esabinan 18 masele, itimalliqlar teoriyasinan 12 masele bar. Student differentsial esabinan 18 masele, integral esabinan 15 masele, itimalliq teoriyasinan 10 masele shigara alatugin bolsa, onda dus kelgen bir maseleni shigarip zachet tapsiriuinin itimalligin tabin.

Tomendegi waqiyalardi kiritelik:

$A_1 = \{\text{studentke masele differentsial esabinan kelip tusti}\},$

$A_2 = \{\text{studentke masele integral esabinan kelip tusti}\},$

$A_3 = \{\text{studentke masele itimalliq teoriyasinan esabinan kelip tusti}\} \dots\dots$

$V = \{\text{student zachet tapsirdi}\},$

Sonda $P(A_1) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}, P(A_2) = \frac{18}{50} = \frac{9}{25}, P(A_3) = \frac{12}{50} = \frac{6}{25}$

Saykes shartli itimalliqlardi esaplayik:

$P(B/A_1) = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}, P(B/A_2) = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}, P(B/A_3) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$

Sonliqtan (2)-formula boyinsha

$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + P(A_3)P(B/A_3) = \frac{2}{5} \cdot \frac{9}{10} + \frac{9}{25} \cdot \frac{5}{6} + \frac{6}{25} \cdot \frac{5}{6} = \frac{43}{50} = 0,86.$

Meyli $A_1, \dots, A_n$ waqiyalari shekli jikleniu duzetugin bolsin. (1)-tenligi V waqiyasinin kalegen bireui menen birliqte juzege asatuginligin bildiredi. Sonda (2)-tenligi menen aniklangan toliq itimalliqtin` formulasi V waqiyasinin $A_1, \dots, A_n$ waqiyalarinin kalegen bireui menen birliqte juzege asiuinin itimalligin bildiredi.

Meyli V waqiyasi juzege askan bolsin. Sol uakitta A_k waqiyasi juzege askanliginin shartli itimalligin tabayik. Kobeytiu teoremasi boyinsha.

$P(A_k/B) = P(A_k)P(B/A_k) = P(B)P(A_k/B).$ Keyingi tenliqten

$P(A_k/B) = \frac{P(A_k)P(B/A_k)}{P(B)}.$ (2)-tenliqten $R(V)$ nin manisin koysak

$$P(A_k/B) = \frac{P(A_k)P(B/A_k)}{\sum_{k=1}^m P(A_k)P(B/A_k)}. \quad (3)$$

(3)-formula Bayes formulasi dep ataladi. Bayes formulasin tomendegishe interpretatsiyalauga (tusindiriuge) boladi. $A_k (\kappa = 1, 2, \dots, n)$ waqiyalarin boljaular (gipotezalar) dep ataymiz.

$P(A_k)$ itimalliqlar tajiriybe otkizgenge shekem esaplangan (apriorliq) itimalliqlar, al $P(A_k/B)$ shartli itimalliqlar tajiriybe juumaginda V waqiyasi juzege askannan keyin esaplanatugin (aposteriorliq) itimalliqlar boladi. Bayes formulalari boljaulardin aprirliq itimalliqlari $P(A_k)$ ha`m V waqiyasinin shartli itimalliqlari

$P(B/A_k)$ lar arkali aposteriorliq itimalliqlar $P(A_k/B)$ lardi esaplauga mumkinshiliq beredi.

3-misal. Skladta eki zavodta tayarlangan lampochkalar aralas turde kabil etilgen. Birinshi zavodta tayarlangan lampochkilerdin sani ekinshi zavodta tayarlangan lampochkalardin saninan n ese artik. Birinshi zavodta tayarlangan lampochkalardin R_1 ulesi, al ekinshi zavodta tayarlangan lampochkalardin R_2 ulesi jaramsiz. Skladtan dusmaldan alingan bir lampochkani jaramsiz ekenligi malim bolsa, onin birinshi zavodta tayarlangan boliuinin itimalligin tabin.

Skladtan alingan lampochkalar kaysi zavodta tayarlanganligi xaqqinda eki turli boljau jurgiziu mumkin. A_1 {alingan lampochka 1-zavodta tayarlangan}, A_2 {alingan lampochka 2-zavodta tayarlangan}. Skladtagi barliq lampochkalardin n ulesi 1-zavodta, al bir ulesi 2-zavodta tayarlanganliqtan, skladtagi lampochkalardin uliuma sani $n+1$ ulesti kuraydi. Sonliqtan, $P(A_1) = \frac{n}{n+1}$, $P(A_2) = \frac{1}{n+1}$ V waqiyasi

alingan lampochkanin jaramsizligin bildiretugin bolsin. Onda $P(B/A_1) = P_1$, $P(B/A_2) = P_2$. Toliq itimalliqtin`` formulasi boyinsha

$P(B) = \frac{n}{n+1}P_1 + \frac{1}{n+1}P_2$. Bayes formulasi boyinsha $P(A_1/B) = \frac{\frac{nP_1}{n+1}}{\frac{nP_1}{n+1} + \frac{P_2}{n+1}} = \frac{nP_1}{nP_1 + P_2}$. Sol

siyakli alingan jaramsiz lampochkanin 2-zavodta tayarlangan boliuinin shartli itimalligi tomendegishe boladi

$$P(A_2/B) = \frac{\frac{P_2}{n+1}}{\frac{nP_1}{n+1} + \frac{P_2}{n+1}} = \frac{P_2}{nP_1 + P_2}.$$

Lektsiya №7
Tema: Garezsiz tajiriybeler izbe-izligi.
Lektsiyanin jobasi.

1. Tajiriybelerdin garesizligi.
2. Bernulli sxemasi. Binomial formulasi.
3. Misallar.

Tayanish tusinikler:

Tajiriybelerdin garesizligi ha'm ogan misallar korsetiu. Bernulli sxemasin korsetiu. Binomial formulasi ha'm onin aniklamalarin misallar jardeminsh korsetiu.

Qadagalawshi sorawlar:

1. Tajiriybelerdin garesizliginin aniklamasin aytin'?
2. Binomial formulasin keltirip shigariu?

A`debiyatlar:
[1], [3], [4]

Tajiriybe dep natiyjesinde, elementar waqiyalar kenisligi Ω ga tiyisli bazibir elementar waqiyalar juzege asatugin belgili bir shartler jiynaginin (eksperimentin') iske asiuin tusinemiz. n tajiriybeler izbe izligin matematikaliq model

$\omega = (\omega_{i1}, \omega_{i2}, \dots, \omega_{i3})$ tochkalarinan turatugin jana elementar waqiyalar kenisligi Ω_n boladi. Bunda ω_{ik} K- numerli tajiriybede juzege askan Ω elementar waqiyalar kenisligini kalegen tochkasi. misali: tajiriybe kubikti taslaudan ibarat bolsin. Elementar waqiyalar kenisligi Ω alti elementten turadi.

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3 \omega_4, \omega_5, \omega_6).$$

Ush tajiriybege saykes keletugin jana elementar waqiyalar kenisligi Ω_3 $\omega = (\omega_{i1}, \omega_{i2}, \dots, \omega_{i3})$ turdegi 216 tochkadan turadi. Bunda $\omega_{i1}, \omega_{i2}, \dots, \omega_{i3}$ ler saykes birinshi, ekinshi ha'm ushinshi tajiriybe juzege askan $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \omega_4, \omega_5, \omega_6$. lardin kalegen bireui. Sonliqtan , $|\Omega_3| = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 256$

Meyli $A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, \dots, A_k^{(s)}$ waqiyalari s tajiriybedegi Ω shakil jikleniui bolsain. Yag'niy i natiyjede dep ataymiz. Dep belgileyik.

$\omega_{i1} \in A_i^{(1)} \quad \omega_{i2} \in A_i^{(2)}, \omega_{in} \in A_n^{(\kappa)}$ bolatugin Ω_n kenisligini barliq

$\omega_{i1}, \omega_{i2}, \dots, \omega_{in}$ tochkalarinan turatugin $A_i^{(1)}, A_i^{(2)}, \dots, A_i^{(n)}$ waqiyasin duzeyik.

Egerde Ω_n kenisliginde $P(A_i^{(1)} A_i^{(2)}, \dots, A_{in}^{(\kappa)}) = P_{i1}^{(1)} P_{i2}^{(2)}, \dots, P_{in}^{(n)}$ tenligi kalegen $I_1, I_2, \dots, I_n$ ler ushin ($I \leq i_1 < i_2 < \dots, < i_n \leq k$ orinlanatugin bolsa, onda otkerilgen n tajiriybeleri garezli dep ataladi.

Bernulli sxemasi. Binomial formula.

Biz bunnan bilay A_i^s waqiyalarinin itimalliq-lari tajiriybenin numerine baylanisiz bolgan jagdaydi karaymiz. Bul jagdayda $P(A_i^s) = P_i, i = 1, 2, \dots, k$

dep belgileymiz. A_i^s waqiyalar shekli jikleniu duzetugin bolganliqtan $\sum_{i=1}^k P_i = 1$

shart orinlanadi. Bunday sxema $k=2$ bolgan dara jagdayda Yakov Briulli tarepinen en birinshi ret karalغان. Sonin ushin da bul sxema Bernulli sxemasi dep ataladi. Bernulli sxemasinda xar bir tajiriybenin natijesinde bazi bir A waqiyasi turakli itimalliq-lar mene juzege asadi, al $P_2 = 1 - P = q$ itimalligi menen juzege aspaydi dep karalidi. Yag`niy,

$$P(A) = P, P(\bar{A}) = qp + q = 1.$$

Bul jagdayda $\Omega = A + \bar{A}, \Omega_n = \{\omega\}$ al $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_3,)$ Tlementar waqiyalar A ha`m $\bar{A}$ lardin bazi bir izbe izliginen turadi. Egerde i -shi tajiriybede A waqiyasi juzege assa, $\omega_i = A, P(\omega_i) = P$ egerde A i- tajiriybelerdi A waqiyasi juzege aspasa $\omega_i = \bar{A}, P(\omega_i) = q$ -- boladi

Bernulli sxemasinda karatiuga masele otkerilgen n garezsiz tajiriybelerde A waqiyasinin m ret juzege asiu itimalligi $P_n(m)$ di tabiu bolip esaplanadi. Bul itimalliq $\omega = \{AA \dots A \bar{A} \bar{A} \dots \bar{A}\}$ turindegi elementar waqiyalar itimalliq-lar qosindisina ten boladi. Bunday elementar waqiyalardin itimalligi boladi.

N tajiriybe A waqiyasi m ret juzege asip $n-m$ ret . Juzege aspaytin` jagdaylardan sani C_n^m ge ten bolganliqtan

$$P_n(m) = C_n^m P^m q^n \quad (1)$$

Kelip shikkan formula binomial formula dep ataladi. Sebebi (1) tenliqtin` sol jagi $(px + q)^n$ binomial jikleniuinde x^m nin koeffitsienti boladi. $P_n(0), P_n(1), \dots, P_n(n)$ itimalliq-larinin izbe-izligi binomial bolistiriliu dep ataladi.

Meyli xar bir garezsiz tajiriybenin NATIYJEsinde shz-ara birgeliqsiz $A_1, A_2, \dots, A_k$ waqiyalarinin tek g`ana bireui juzege asatugin bolsa ha`m $P(A_1) = P_1, P(A_2)P_2, \dots, P(A_k) = P_k$ bolsin. Bunda $P_1 + P_2 + \dots + P_k = 1$ Bul jagdayda $A_1 + A_2 + \dots + A_k = \Omega, \Omega_n = \{\omega\}$, al $\omega = (\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n) = A_1, A_2, \dots, A_k$ waqiyalarinin bazi-bir izbe-izligine turadi. Egerde i tajiriybede A_i uakfyasi juzege assa $\omega_i = A_j, P(\omega_i) = P_j, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, k$

Bunda biz otkerilgen tajiriybede A_1 waqiyasinin m_k ret A_2 waqiyasinin m_2 ret A_k waqiyasinin m_k ret juzege asiinin itimalligin tabiyik $(m_1 + m_2 + \dots + m_k = n)$ Bul itimalliqti $P_n(m_1, m_2, \dots, m_k)$ dep belgileyik. $P_n(m_1, m_2, \dots, m_k)$ itimalliqti $\omega = (A_1 \dots A_1 A_2 \dots A_2 \dots A_k \dots A_k)$ turindegi elementar waqiyalardin itimalliqlarinin kosindasına ten. Bunday xer bir elementar waqiyalardin itimalligi $P_1^{m_1}, P_2^{m_2}, \dots, P_k^{m_k}$ kobeymesi ten, al elementar waqiyalardin sani $\frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_k!}$ polinomial koeffitsientin`e ten bolganliqtan

$$P_n(m_1, m_2, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_k!} P_1^{m_1} P_2^{m_2} \dots P_k^{m_k} \quad (2)$$

(2) formuladan $K=2$ bolgan dara jagdayda (1) formula kelip shigadi. (2) formula polinomial formula dep ataladi, sebebi (2) tenliqtin` on jagi $(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_k x_k)^n$ polinomnin jukleniinde kasindagi koeffitsient boladi.

1-misal. Bazi bir elatli punktte sentyabr` ayinda orta esap penen 12 kun jauin jauadi. Sentyabr` ayinda dusmaldan alingan 8 kunnin ishinde ush kunde jauatuginliginin itimalligin tabin.

Sentyabr`degi 30 kunnin ishinde 12 kun jauin jauatugin bolganliqtan aydin xar bir kuninde jauin jauiudin itimalligi $P = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$, al jauin jaumaudin itimalligi

$q = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$ boladi. Bul jagdayda $n=8, m=3$ (1) formula boyinsha

$$P_3(3) = C_8^3 \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^5 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} 0,064 \cdot 0,7776 = 56 \cdot 0,00497664 = 0,27769184.$$

2-misal. n yacheykada numerlengen r bolekshe dusmaldan jaylastirilgan. k -yacheykada r_1 bolekshe jaylaskan boliuinin itimalligi nege ten?

Bolekshelerdi yacheykalarda jaylastiriudi kolemi n ge ten bolgan bas toplamnan kolemi r ge ten bolgan kaytalanbali saylanba toplam duziu dep karauga boladi. Xar bir bolshekke $\frac{1}{n}$ itimalligi menen kalegen yacheykada jaylaskan boliui mumkin.

A waqiyasi bolekshe n yacheykada jaylaskanligin bildiretugin bolsa, onda

$$P = P(A) = \frac{1}{n}, q = P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{n}$$

Sonda r boleksheden r_1 bolekshe n yacheykada jaylasiuinin itimalligi (1)

$$\text{formula boyinsha } P_r(r_1) = C_r^{r_1} \left(\frac{1}{n}\right)^{r_1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{r-r_1} \cdot (3)$$

Bul itimalliqlardi otkerilgen r tajiriybede A waqiyasinin r_1 ret juzege asiriinin itimalligi dep karauga boladi.

Izlegen itimalliqti klassikaliq aniklama boyinshi esaplasakta (3) tenligine iye bolamiz. Xakiykatin`dada xar bir bolshek n yacheykasinda kalegen bireuine jaylasiui mumkin. Sonliqtan r bolekshe n yacheykada n^1 turli usil menen jaylastiriu mumkin.

Yag`niy $|\Omega| = n^r$

V waqiyasi k yacheykadan r_1 bolshek jaylasiuin bildietugin bolsin k yacheykada tuspegen $r-r_1$ boleksheni kalegen $n-1$ yacheykada $(n-1)^{r-r_1}$ turli usili menen jaylastiriuga boladi, al $r-r_1$ boleksheni r boleksheden $C_z^{r-r_1} = C_r^{r_1}$ turli usil menen bolip aliuga boladi. Sonda $|B| = C_z^{r-r_1} (n-1)^{r-r_1}$ Sonliqtan klassikaliq aniklama boyinsha

$$P(B) = \frac{C_r^{r-r_1} (n-1)^{r-r_1}}{n^r} = C_r^{r-r_1} \left(\frac{1}{n}\right)^{r_1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{r-r_1}$$

Lektsiya №8

Tema: Bernulli sxemasi ushin shek teoremalari.

Lektsiya jobasi:

1. Bernulli sxemasi ushin shek teoremalari.
2. Muavr- Laplastin` lokal` shek teoremasi.
3. Misallar

Tayanish tusiniklari::

Bernulli sxemasi ha`m shek teoremalari ha`m ogan misallar keltiriu. Muavr-Laplastin` lokal` shek teoremasi ha`m olarga misallar korsetiu.

Qadagalawshi sorawlar:

1. Bernulli sxemasi ushin shek teoremasin dalillen.
2. Muavr-Laplastin` lokal` shek teoremasin aytin` ha`m ogan misallar keltirin.

A`debiyatlar:

[1]. II bap §10,77-84 betler.

Binomial formula boyinsha $R_n(m)$ itimalliqlarin esaplau tajiriybenin sani n kishi bolgan jagdaylarda juda jenil boladi. Tajiriybenin sani asip barganda $R_n(m)$ itimalliqlarin binomial formula boyinsha esaplau kiyinlasip baradi.

1-misil. Bazi bir zavod tayarlagan detal`lardin xarkaysisinin jaramsiz bolu itimalligi 0,005 ke ten. Tayarlangan 10000 detal`din ishinde jaramsiz detal`lardin sani a) 40 ka ten boluinin, b) 70 ten boluinin itimalliqlarin esaplan.

Bizin misalimizda $n=10000, r=0,005, q=0,995$ Sanliqtan binomial formula boyinsha

$$A) P_{10000}^{40} = (40) = C_{10000}^{40} (0,005)^{40} (0,995)^{9960}$$

B) Jaramsiz zatlardin sanini 70 ten saip ketpeuin bildiretugin $\{m \leq 70\}$ waqiyasi jaramsiz zatlardin saninin 0,1,2,...,70 ke ten bolu in bildiretugin waqiyalardin qosindisina ten.

Sonliqtan

$$P(m \leq 70) = \sum_{m=0}^{70} p_{1000}(m) = \sum_{m=0}^{70} C_{1000}^m (0,005)^m (0,995)^{1000-m}$$

Bul misalda tabiliui kerek bolgan itimalliqardi binomial formula boyinsha esaplau texnikaliq kiyinshiliqlarga alip keledi.

Sonin ushinda tajiriybenin sani n ulken san bolganda $R_n(m)$

Itimalligin ha'm $\sum_{m=k}^1 p_n(m)$ turinde kosindilardi esaplauda

ansatlastiratugin juuik formulalar tabiu kerek boladi.

Bunday dara jagday formulalar Muavr tarepinen $R=q=1/2$ bolgan dara jagday ushin 1730 jili tabilgan. Keyin ol formulalar Laplas tarepinen (1812)0 ha'm 1 den ozgeshe bolgan kalegen r Ler ushin aniklangan. Sonliqtan 5,6,7 paragraflarda karalatugin shek teoremalar Muavr- Laplastin` shek teoremalari dep ataladi .

Muavr- Laplastin` lokal` shek teoremasi

TEOREMA. Egerde n garesiz tajiriybelerden xarkaysisinda A waqiyasi tkrakli $p(0 < p < 1)$ itimalligi menen juzege asatugin bolsa , Onda A waqiyasinin n tajiriybeden m reet juzege asiuinin $R_n(m)$,m nin $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ shamasi shekli

araliqta bolatugin manisleri ushin ten olshemli turde n ulken san bolgan tomendegi katnasti kanaatlandiradi.

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2mpq}} \ell^{-\frac{r^2}{2}} (1 + O(\frac{1}{\sqrt{n}}))$$

DALILLEU: Teoremani dalilleude Stiring formulasinan

Paydalanamiz: $k! = \sqrt{2\pi k} k^k e^{-k} e^{\frac{1}{2k}}, |0| \leq 1/2k$

Bul formulani logorifmler arkali Stirling formulasin tomendegishe jazamiz.

$\ln k! = \ln n\sqrt{2\pi k} + k \ln k - k + O_k = O(1/k)x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ tenlinen

$$\left. \begin{aligned} m &= np + x\sqrt{npq} = np(1 + x\sqrt{\frac{p}{nq}}) \\ n-m &= np - x\sqrt{npq} = np(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

tenliqlerine iyk bolamiz.

X shekli araliqta ozgeretugin olganliqtan $n \rightarrow \infty$ (1) formuladan $m \rightarrow \infty$, $n-m \rightarrow \infty$ ekenligi kelip shigadi . Sonliqtan $\ln n!$, $\ln m!$, $\ln(n-m)!$ Anlatpalarina Stirligi formulasin kollaniuga boladi. Sonda $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m(n-m)!} p^m q^{n-m}$

formulasinan

$$\ln P_n(m) = \ln \sqrt{2\pi n} + n \ln n - n + \theta_n - \ln \sqrt{2\pi m} - m \ln m + m \theta_m - \ln \sqrt{2\pi(n-m)} - (n-m) \ln(n-m) + n-m - \theta_{n-m} + m \ln p + (n-m) \ln q$$

Anlatpasina ne bolamiz. Bul anlatpani apiuayilastiriu arkali tomendegi turde jaziuga boladi.

$$\ln P_n(m) = \ln \sqrt{\frac{\pi}{2\pi(n-m)}} - m \ln \frac{m}{np} - (n-m) \ln \frac{n-m}{nq} + \theta \quad (2)$$

n jeterli darejede ulken bolganda ,x,p,q lar shekli san bolgani ushin $\sqrt{\frac{q}{np}}, \sqrt{\frac{p}{nq}}$ shamalar kalegeninshe kishi boladi. Sonliqtan $\varepsilon \rightarrow 0 \quad \ln(1+\varepsilon) = 0(\varepsilon)$ tenliginen paydalanip ha'm (1) tenliqlerdegi m ha'm n-m nin manislerin ornana koyip

$$\ln \sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}} = \ln \sqrt{\frac{1}{2\pi npq}} - \frac{1}{2} \ln \left(1 + x \sqrt{\frac{q}{np}}\right) - \frac{1}{2} \ln \left(1 + x \sqrt{\frac{p}{nq}}\right) = \ln \sqrt{\frac{1}{2\pi npq}} + 0\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad (3)$$

ekenligine iye bolamiz.

Sol siyakli

$$\begin{aligned} -m \ln \frac{m}{np} - (n-m) \ln \frac{n-m}{nq} &= (np + x\sqrt{npq}) \ln \left(1 + x \sqrt{\frac{q}{np}}\right) - (np - x\sqrt{npq}) \\ \ln \left(1 - x \sqrt{\frac{p}{nq}}\right) &= - (np + x\sqrt{npq}) \left(x \sqrt{\frac{q}{nq}} = \sqrt{\frac{qx^1}{2nq}} + 0(n^{-3/2}) \right) = \\ (np - x\sqrt{npq}) &\left(-x \sqrt{\frac{p}{nq}} = \sqrt{\frac{px^2}{2nq}} + 0(n^{-3/2}) \right) = \\ x\sqrt{npq} + \frac{1}{2}qx^2 - qx^2 + x\sqrt{npq} + \frac{1}{2}px^2 - px^2 + 0\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) &= -\frac{x^2}{2} + 0\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \end{aligned} \quad (4)$$

$|\theta| \leq |\theta_n| + |\theta_m| + |\theta_{n-m}| \leq \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} \right)$ ekenligi kelip shigadi. Demek n jeterli darejede ulken bolganda

$$\theta = 0\left(\frac{1}{n}\right) \quad (5)$$

(3),(4),(5) baxalarin (2) tengligine koysak n gin jeterli ulken manisleri ushin dalilleu kerek bolgan juuik tenliqke iye bolamiz.

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \lambda^{\frac{x^1}{2}} \left(1 + 0\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right) \quad (6)$$

Egerde $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lambda^{\frac{x^1}{2}}$ funktsyasin kiritsek jokaridagi formula

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \varphi(x) \left(1 + 0\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right)$$

$\varphi(x)$ -jup funkts, yag'niy $\varphi(-x) = \varphi(x)$ - tenligi oranlandi.

Sonliqtan funktsyasinin manislerinin tablitsasi x tin` tek g`ana on manisleri ushin berilgen.

1-misal. Endi biz aldingi paragrafta karalgan misaldin shartlerinde tayarlangan 10000 detal`linishinde 40 detal`din jaramsiz bolu itimalligi tabayik. Maselenin sharti boyinsha

$$n=10000, p=0,005, q=0,995, m=40$$

$$np = 1000 \cdot 0,00 = 50, \sqrt{npq} = \sqrt{50 \cdot 0,995} \approx 7,05$$

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{40 - 50}{7,05} \approx -1,42$$

$$P_{10000}(40) = \frac{1}{7,05} \varphi(1,42) = \frac{0,1456}{7,05} \approx 0,0206$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lambda^{\frac{x^2}{2}} \text{ funktsiyasining manisleri tablitsada berilgen.}$$

2- misal. Kubik 1800 ret taslaganda 6 ochkonin 320 ret kelip shigiinin itimalligin tabin.

$$n = 1800, P = \frac{1}{6}, q = \frac{5}{6}, M = 320$$

$$np = 1800 \cdot \frac{1}{6} = 300, \sqrt{npq} = \sqrt{300 \cdot \frac{5}{6}} \approx 5,8$$

$$P_{1800}(320) = \frac{1}{15,8} \varphi(1,26) = \frac{0,1804}{15,8} \approx 0,0114$$

3-misal: Simmetriyali Bernulli sxemasi ushin $P = q = \frac{1}{2}$ boladi, al binomial formula

$$P_n(m) = C_n^m 2^{-n} \quad (7)$$

turine ie boladi. Bul jagdayda lokal`n ulken san bolganda

$$P_n(m) = C_n^m 2^{-n} = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot \frac{n}{2}}} \lambda^{\frac{x^2}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right) \quad (8)$$

turine iye boladi. Bunda

$$x = \frac{2\left(m - \frac{n}{2}\right)}{\sqrt{n}} = \frac{2m - n}{\sqrt{n}}, \sqrt{2\pi npq} = \sqrt{2\pi \cdot \frac{n}{4}} = \sqrt{\pi \cdot \frac{n}{2}}$$

1730- jili Muavr Bernulli sxemasi ushin (8) formuladan durisligin dalillegen, al 1812-jili Laplas bul formulani (6) formula turinde uliumalistirgan.

Bernulli sxemasif ushin (7) formulaning misili Banax maselesinin sheshiletugin boladi (1,2,3-misali). Bul misalda $P_{2k-r}(k) = C_{2k-r}^{2k} 2^{-(2kr)}$ sheshimine iye bolgan edik. Izlengen itimalliq $k=50, r=20$ bolgan jagdayda esaplayik. Sonda $n=2k-r=80, m=k=50$ bolganliqtan

$$P_{80}(50) = C_{80}^{50} 2^{-80}$$

Bul itimalliqni (8) formula boyinsha esaplayish kolayli boladi (8) formulani tomendegi turde jazayfk.

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \frac{n}{4}}} \lambda^{\frac{x^1}{2}} \left(1 + 0 \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right) = \frac{2}{\sqrt{n}} \varphi(x) \left(1 + 0 \left(\frac{1}{n} \right) \right) \quad (9)$$

$$\text{Bunda } X = \frac{2m - n}{\sqrt{n}}$$

$$\text{Bizin misalimizda } X = \frac{100 - 80}{\sqrt{80}} \approx 2,24$$

$$P_{80}(50) \approx \frac{2}{\sqrt{80}} \varphi(2,24) = 0,224 \cdot 0,0325 = 0,00728.$$

Lektsiya №9

Tema: Muavr-Laplastin` integral shek teoremasi.

Lektsiya jobasi:

1. Muavr-Laplastin` integral shek teoremasi.
2. Misallar
- 3 Puasson teoremasi.

Tayanish tusinikler:

Muavr-Laplastin` integral shek teoremasi misal sheshiu. Puasson teoremasi ha`m ogan misal korsetin`.

Qadagalawshi sorawlar:

1. Muavr-Laplastin` integral shek teoremasin dalillen.
2. Puasson teoremasin aytin` ha`m misallar korsetin`.

A`debiyatlar:

[1]. II bap §11, 85-97 betler.

Tajiriybenin sani n jeterli darejede ulken san bolganda $P_n(k_i \leq m \leq k_2) = \sum_{K_i}^{K_j} P_n(m)$ turindegi kosindilardi esaplaudi ansatlastiratugin juuik formula keltirip shigarayik. Tomendegi belgileulardi kiritemiz $a = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \theta = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_m = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}, \Delta x_m = X_{m+1} X_m \frac{1}{\sqrt{npq}}$

Teorema. Egerde A waqiyasi otkerilgen n garezsiz tajiriybenin xarkaysisinda turakli $p(0 < p < 1)$ itimalligi mene juzege asatugin bolsa a ha`m v $(-\infty \leq a < \theta \leq \infty)$ sanlarina karata ten olshemli turde $n \rightarrow \infty$ tomendegi katnas orinli boladi.

$$P_n(k_i \leq m \leq k_2) \rightarrow \frac{1}{2k} \int_a^b e^{\frac{1}{2}x^2} dx \quad (1)$$

Dalilleui. Biz teoremani a ha`m i turakli sanlar bolgan jagday ushin dalilleyemiz. Muavr-Laplastin` lokal` shek teoremasi boyinsha.

$$P_n(k_i \leq m \leq k_2) = \sum_{m=K_i}^{K_j} P_n(m) \sum_{m=K_i}^{K_j} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{m-np}{\sqrt{npq}})^2} (1 + O(\frac{1}{\sqrt{n}})) = \sum_{as-\frac{s-n}{\sqrt{npq}} \leq a} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{m-np}{\sqrt{npq}})^2} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \sum_{\pi \leq x_m \leq \frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Delta x_m \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \quad (2)$$

$$\text{Sebebi } P_n(k_i \leq m \leq k_2) = P\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) = P(a < x_m < \theta)$$

$J(\Delta x_m) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ jardemshi funktsiyasin ha'm $u=x-x_m$ ornina koyiui arkali taza ozgeriushi u di kiritayik. Sonda

$$J(\Delta x_m) = \int_0^{x_0} e^{-\frac{u^2}{2}} du = e^{-\frac{x_0^2}{2}} \int_0^{\frac{x_0}{\Delta x_m}} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

$0 \leq u \leq \Delta x_m = \frac{1}{\sqrt{npq}}$ bolganliqtan, n nin jeterli ulken manimlerinde u din kalegenshe eishi boladi. Sonliqtan $e^{-ux_0 - \frac{x^2}{2}} = 1 + O(ux_m + \frac{u^2}{2})$.

Demek, $J(\Delta x_m) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = e^{-\frac{x_0^2}{2}} \Delta x_m \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right)$. Keyingi tenliqtin` eki jagin $\frac{1}{\sqrt{2n}}$ Ge kobeytip, m nin $a \leq x_m \leq b$ bolatugin manisleri boyinsha summa alsak

$$\frac{1}{\sqrt{2n}} \sum_{a \leq x_m \leq b} \int_{x_m}^{x_{m+1}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sum_{a \leq x_m \leq b} \frac{1}{\sqrt{2n}} \int_{x_m}^{x_{m+1}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Delta x_m \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right) \quad (3)$$

tenligine iye bolamiz. (2) ha'm (3) tenliqlerinin on jaklari birdey. Sonliqtan,

$$P_n(k_1 \leq m \leq k_2) = \frac{1}{\sqrt{2n}} \sum_{a \leq x_m \leq b} \int_{x_k}^{x_{k+1}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Bul tenliqtan $n \rightarrow \infty$ da, dalilleu kerek bolgan juuik tenliq kelip shigadi.

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2n}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ funktsiyasin kiritsek, (1) ni tomendegishe jaziuga boladi

$$P_n(k_1 \leq m \leq k_2) = \frac{1}{\sqrt{2n}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(b) - \Phi(a). \quad (4)$$

$F(x)$ funktsiyasi – tak funkiya, yag`niy $F(-x) = -F(x)$ tenligi orinlanadi. $F(x)$ tez osiushi funktsiya, $x \geq 5$ bolganda $F(x) = 0,5$ dep alamiz. Bul funktsiyanin manisleri tablitsalastirilgan. $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2n}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ funktsiyasi, $x > 0$ $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2n}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

funktsiyasi menen $F(x) = \frac{1}{2} + \Phi(x)$ tenligi menen baylaniskan.

Misal. Ul balanin tuuiliu itimalligi 0,51 ge ten. 1-klasska kelgen 400 okiushinin ishinde ul balalardin sani 190 nan az emes, 210 nan kop emes boliuinin itimalligin tabin. $N=400$, $p=0,51$, $q=0,49$, $k_1=190$, $k_2=210$ bolganliqtan

$$a = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{190 - 400 \cdot 0,51}{\sqrt{400 \cdot 0,51 \cdot 0,49}} = -\frac{10}{10,234} \approx -1,365,$$

$$b = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{210 - 400 \cdot 0,51}{\sqrt{400 \cdot 0,51 \cdot 0,49}} = \frac{6}{10,234} \approx 0,536.$$

(4) formula boyinsha

$$P(190 \leq m \leq 210) \approx \Phi(0,586) - \Phi(-1,365) = \Phi(0,586) + \Phi(1,365) = 0,22240 + 0,41309 = 0,6354$$

Puassaon teoremasi.

Muavr-Laplastin` lokal` shek teoremasi r ha`m  $q$  din  $\frac{1}{2}$  ge jakin manisleri ushin  $R_n(m)$  itimalliqlarining manislerin dalilrek esaplauga mumkinshiliq beredi.  $r$  ha`m q din manisleri 0 ha`m 1 ge jakin bolgan sayin lokal` shek teoremlarining dalligi kemip baradi. Bul teoremanin dalligin arttiru ushin tajiriybenin sani n di jane de arttiru kerek boladi, bul praktikaliq koz-karastan mumkin emes. Sonin ushin da r ha`m  $q$  din saykes 0 ha`m 1 ge jakin manisleri ushin $R_n(m)$ itimalligin juuik esaplau formulasin keltirip shigariu kerek boladi. Bunday formula Puasson tarepinen 1873-jili tabilgan.

Meyli bizge waqiyalar seriyasining izbe-izligi berilgen bolsin ha`m bir seriyaga tiyisli waqiyalar oz-ara garezsiz bolsin.

n seriyada waqiyanin juzege asiu itimalligin P_n dep belgileyik.

Teorema. Tajiriybeler sani $n \rightarrow \infty$ da $P_n \rightarrow 0$ bolsin ha`m $nP_n \rightarrow \lambda$ bolsin. Onda

$$P_n(m) = C_n^m P_n^m (1 - P_n)^{n-m} \rightarrow \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}. \quad (1)$$

Dalilleu. $nP_n \rightarrow \lambda$ dep belgileyik.

$$P_n(m) = C_n^m P_n^m (1 - P_n)^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-m} = \frac{\lambda_n^m}{m!} \cdot \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{n^m \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^m}.$$

$$\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n = \frac{\lambda_n^m}{m!} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \frac{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^m}. \quad (2)$$

Meyli A jeterli darejede ulken san bolsin, m berilgen san bolganda $\xi > 0$ sani berilgen bolsin. $A = A(\xi)$ sanin $\lambda_n \geq A$ bolganda $\frac{\lambda_n^m}{m!} e^{-\frac{\lambda_n}{n}} \leq \frac{\xi}{2}$ bolatugin etip saylap aliuga boladi. Sonliqtan n nin usi manisleri ushin $0 \leq x \leq 1$ bolganda $1 - x \leq e^{-x}$ tensizliginen paydalanip (2) tengliginen $P_n(m) \leq \frac{\lambda_n^m}{m!} e^{-\frac{n-m}{n}\lambda_n} \leq \frac{\xi}{2}$. Keyingi tensizlik $n > 2m$ bolganda orinlanadi. Sebebi $y = \frac{x^m}{m!} e^{-\frac{1}{\lambda}}$ funktsiyasining manisi $x \rightarrow 0$ ha`m  $x \rightarrow \infty$  nol`ge umtiladi, al $x = 2m$ bolganda en ulken maniske iye boladi. Sonliqtan $n \geq A$ bolganda

$$\left| P_n(m) - \frac{\lambda_n^m}{m!} e^{-\lambda_n} \right| \leq \frac{\lambda_n^m}{m!} e^{-\frac{n-m}{n}\lambda_n} + \frac{\lambda_n^m}{m!} e^{-\lambda} < \frac{\xi}{2} + \frac{\xi}{2} = \xi.$$

Bul tensizlik $\lambda_n \geq A$ (yag`niy $n \rightarrow \infty$ da $\lambda_n \rightarrow \infty$) bolsa (1) tensizligining orinli ekenin korsetedi.

Meyli kalegen n ushin λ_n shekli san bolsin, yag`niy $\lambda_n \geq A$ bolsin. onda

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$ ha`m m nin berilgen turakli manisi ushin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n} = 1 \quad \text{ekenligi (1) tenliginin duris ekenligi kelip shigadi.}$$

Teorema dalillendi.

Puasson teoremasi xar bir tajiriybede waqiyanin juzege asiu itimalligi $R \approx 0$ ge jakin bolganda, n nin ulken manisleri ushin $P_n(m)$ itimalligin $P_n(m) \approx \frac{\lambda_n^m}{m!} e^{-\lambda_n}$ juuik

formulasi boyinsha esaplauga mumkinshiliq beredi. $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(m) = P(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$

belgileuin kiritelik. $\sum_{m=0}^{\infty} P(m) = 1$ orinlanatuginligi malim. $\frac{P(m)}{P(m-1)} = \frac{\frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}}{\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\lambda}} = \frac{\lambda}{m}$

tenliginen

1) $m < \lambda$ bolganda $P(m-1) < P(m)$,

2) $m = \lambda$ bolganda $P(m-1) = P(m)$,

3) $m > \lambda$ bolganda $P(m-1) > P(m)$

ekenliqleri kelip shigadi. Bunnan $P(m)$ itimalligi m nin daslepki manislerinde, yag`niy  $m < [\lambda]$  bolganda, osetugin  $m = [\lambda]$  en ulken maniske iye bolatuginligi, al  $m > [\lambda]$  bolganda kemip baratuginligi kelip shigadi. Egerde  $\lambda$  putin` san bolsa, onda $P(m)$ $m_1 = \lambda - 1$, $m_2 = \lambda$ bolganda en ulken manislerge iye boladi.

$P(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$ itimalliqlarinin izbe-izligi Puasson bolistiriliui dep ataladi.

Misal. Xar bir oktin` nishanaga tiyu itimalligi 0,001 ge ten bolsa, atilgan 5000 oktan tiygen oklardin sani ekeuden az boluinin itimalligin tabin.

$\lambda_n = n \cdot p = 5000 \cdot 0,001 = 5$ bolganliqtan

$$P(m \geq 2) = \sum_{m=2}^{5000} P_{5000}(m) = 1 - P_{5000}(0) - P_{5000}(1).$$

Puasson teoremasi boyinsha

$$P_{5000}(0) \approx e^{-5} = 0,006738, \quad P_{5000}(1) \approx 5e^{-5} = 0,033690.$$

Sonliqtan $P(m \geq 2) \approx 1 - 0,40428 = 0,99572$.

$\lambda_n = 5$ putin` san bolganliqtan,  $P_{5000}(m)$  tajiriybesi  $m=4$  ha`m $m=5$ bolganda en ulken maniske iye boladi. Puasson teoremasi boyinsha

$$P_{5000}(4) = P_{5000}(5) = \frac{5^4}{4!} e^{-5} = 0,175467.$$

Lektsiya №10

Tema: Muavr- laplasti integral shek teoremasinin qollanbalari.

Lektsiyanin jobasi:

1. Muavr- laplasti integral shek teoremasinin qollanbalari.
2. Puasson sxemasi.
3. Misallar.

Tayanish tusinikler:

Muavr- laplasti integral shek teoremasinin qollanbalari ha`m misallar keltirip Puasson sxemasi.

Qadagalawshi sorawlar:

1. Muavr- laplasti integral shek teoremasinin aytip berin?
2. Puasson sxemasin dalilen?

A`debiyatlar:

[1]. II bap §14 103-107 betler.

[7]. § 5 61-67 betler.

1. Muavr- laplasti integral shek teoremasinin en daslepki kollanbasi sipatin`da $\left\{ \frac{M}{n} = P \right\} < \xi$ tensizliginin itimalligin baxalayik. Bunda n tajiriybenin juzege asiui sani, $\frac{M}{n}$ tajiriybesi juzege asiui jiyiligi, 3 waqiyenin xar bir tajiriybede juzege asiui itimalligi.

$$P\left(\left|\frac{M}{n} - P\right| < \xi_n\right) = P\left(\xi_2 < \frac{M - np}{n} < \xi_2 \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \approx \frac{1}{2x} \int_{-\xi \sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\xi \sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{\frac{-x}{2}} dx \rightarrow \frac{1}{2x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x}{2}} dx = 1$$

Sebebi $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x}{2}} dx$ integrali Puasson integrali dep ataladi ha`m ol $\sqrt{2\pi}$ ge ten.

Solay etip $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{M}{n} - P\right| < \xi\right) = 1$ ekenligin korsetik. Demek waqiyenin juzege

asiu jiyiligi menen onin juzege asiu itimalliginin ayirmasinin absolt shamasinin kalegeninshe Keshi ξ nen kishi boliuinin itimaligi tajiriybenin sani n sheksiz 1 ge umitiladi eken. Bul fakt itimalliq teoremasinda ulken sanlar zakoni yamasa Bernulli teoremasi degen at penen malim. Jokarida dalillengen fakt en daslep. Ya. Bernulli tarepinen tabilgan.

2. A waqiyasinin jiyiliginin onin itimaligi 3 dan ayirmasinin absalyut shamasina α dan asip ketiuginin t / itimalligin tabin. Bul itimalliq tomendegishe tabiladi.

$$P\left(\left|\frac{M}{n} - P\right| \leq \alpha\right) = P\left(-\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}} \leq \frac{M - np}{\sqrt{npq}} \leq \alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2\Phi\left(\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) -$$

$$\left(\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 2\Phi\left(\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Yag`niy

$$P\left(\left|\frac{M}{n} - P\right| \leq \alpha\right) \approx 2\Phi\left(\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \quad (1)$$

α, p, n Ler berilgen manisler boyinsha $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ funksiyanin manislerini izlengen itimalliqti tabamiz.

2. A waqiyasinin jiyiliginin onin juzege asiu itimalliginan ayirmasinin absolyut shamasinin α dan asip ketpeuinin itimalligi β ga ten bolsa.

$$\text{Yag`niy, } P\left(\left|\frac{M}{n} - P\right| \leq \alpha\right) = \beta$$

$$\text{tenliginen } 2\Phi\left(\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = \beta \text{ yamasa } \Phi\left(\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = \frac{\beta}{2} \quad (2) \text{ ekenligi kelip shigadi.}$$

Egerde α, p, n lerdin bireui belgisiz bolgan jagdayda berilgen $\frac{\beta}{2}$ manisi boyinsha tablitsadan $\Phi(x_0) = \frac{\beta}{2}$ tenligi kanaatlandiratugin x_0 manisine iye bolamiz. Keyingi

tenliqte (2) tenligi menen salistirip $\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}} = x_0$ (3) tenligine iye bolamiz. Bul tenliq

α, p, n lardin kalegen bireui belgisiz bolganda oni aniklauga mumkinshiliq beredi.

1-misal. Otkerilgen ozara garezsiz 10000 tajiriybenin xarkaysisinda juzege asiu itimalliginin ayirmasinin absolyut shamasi 0,01 den asip ketpeuinin itimalligin tabin.

Berilgeni $n=10000, p=0,75, q=0,25, \alpha=0,01$ (1)-shi formula boyinsha

$$P\left(\left|\frac{M}{n} - P\right| \leq 0,01\right) \approx 2\Phi\left(0,01\sqrt{\frac{10000}{0,75 \cdot 0,25}}\right) = 2\Phi(2,277) = 2 \cdot 0,48840 = 0,97680$$

2-misal. garezsiz tajiriybelerdin xarkaysisinda waqiyanin juzege asiu itimalligi 0,3 ke ten. Waqiyanin juzege asiu jiyiligi menen waqiyanin juzege asiu itimalliginin ayirmasinin absolyut shamasi 0,02 den aspauinin itimalligi 0,98 ge ten boliui ushin neshe ret tajiriybe otekriu kerek?

berilgen

$$p = 0,3, q = 0,7, \alpha = 0,02, \beta = 0,98$$

Biz $P\left(\left|\frac{M}{n} - P\right| \leq \alpha\right) = \beta$ tenliginen n di tabiuimiz kerek. Bul tenliqten $\Phi\left(\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = \frac{\beta}{2}$

tenligi kelip shigiui berilgen $\Phi(x_0) = \frac{\beta}{2} = 0,49$ manisi boyinsha tablitsadan $x_0 = 2,33$ ekenligin aniklaymiz.

$$\alpha \sqrt{\frac{n}{pq}} = x_0 \text{ tenliginen } n = \left[\frac{x_0^2 pq}{\alpha^2} \right] \text{ ekenligi keli shigadi. Sonda}$$

$$n = \left[\frac{(2,33)^1 \cdot 0,30,7}{(0,02)^2} \right] = 2850$$

Puasson sxemasi.

Meyli A waqiyasi otkerilgen n garezsiz tajiriybelerdin xarkaysisinda xarkiyli itimalliqlar menen juzege asatugin bolsin. Egerde i - tajiriybede A waqiyasinin juzege asatuginin bildiretugin waqiyani $A^{(1)}$ al aspaytuginligin bildiretugin waqiyani $\bar{A}^{(1)}$ dep belgileyik. Sonda $P(A^{(1)}) = p_i$, $P(\bar{A}^{(1)}) = q_i = 1 - p_i$, $i = 1, n$ boladi. Bunday sxema Puasson sxemasi dep ataladi. Puasson sxemasidan $P_i = p$ bolgan dara jagdayda Bernulli sxemasi kelip shigadi. Puasson sxemasinda a waqiyasinin n garezsiz tajiriybede m reet juzege asiuginin itimalligin $P_m(m, p_1, p_2, \dots, p_n)$ dep belgilesek, onda

[illegible]

Ekenligin ansat keltirip shigariuga boladi.

$P_m(m, p_1, p_2, \dots, p_n)$ itimalliqni aniklaushi tenglikning on jagida
 kosiliushilarning soni C_n^m Ge tenglikning tusini kiyin emes.

$$\gamma_n(x) = (q_1 + p_1x)(q_2 + p_2x).....(q_n + p_nx) \quad (2)$$

eki agzalilarinin kobeymesin karayik.(2) tenliginin on jagindagi eki agzalilardi agzam-agza kobeytip x tin` darejeleri boyinsha kosindiga jayip jazsak, X^m kasindagi koeffitsient $P_m(m, p_1, p_2, \dots, p_n)$ itimalligina ten boladi. Sonda (2) ni

$$\gamma_n(X) = \sum_{m=0}^n P_m(m, p_1, p_2, \dots, p_n) \cdot X^m \quad (3)$$

turinde jaziuga boladi. $\gamma_n(X)$ funktsiyasi $P_m(m, p_1, p_2, \dots, p_n)$ itimalliqlarining doretiushi funktsiyasi dep ataladi. Bernulli sxemasi ushın doretiushi funktsiya tomendegi turge iye boladi.

$$\gamma_n(X) = (q + px)^n \sum_{m=0}^n P_m(m) \cdot X^m.$$

Doretiushi funksiyanin jardemi menen $P_m(m, p_1, p_2, \dots, p_n)$ itimalliqlarin esaplauga bir misal keltireyik.

Misal. Mergen bir-birine garezsiz turde 3 metrli araliqtan nishanaga bir-birden ok atkan. Olardin nishanaga tiyu itimalliqlari saykes 0,2; 0,3 ha`m 0,5 ke teng bolsa, atilgan 3 oktan nishanaga ok tiyiuinin itimalliqlarin tabin.

Berilgeni: $n = 3, p_1 = 0,2, p_2 = 0,3, p_3 = 0,5$. Izlenip $P_3(2, P_1, P_2, P_3)$ atirgan $P_3(3, P_1, P_2, P_3)$ ha'm itimalliklarin (1) formula boyinsha tikkeley espalauga boladi. Bul itimalliklardin doretiushi funktsiya arkali esaplayik. (2) formula boyinsha $\gamma_3(X) = (0,8 + 0,2x)(0,7 + 0,3x)(0,5 + 0,5x) = 0,28 + 0,47x + 0,22x^2 + 0,03x^3$

(2) tenliq boyinsha
 $\gamma_3(x) = P_3(0, P_1, P_3) + P_3(1, P_1, P_2, P_3)X + P_3(2, P_1, P_2, P_3)X^2 + P_3(3, P_1, P_2, P_3)X^3$
 bolganliqtan

$$P_3(0;0,2;0,3;0,5) = 0,28, \quad P_3(1;0,2;0,3;0,5) = 0,47,$$

$$P_3(2;0,2;0,3;0,5),$$

$$P_3(3;0,2;0,3;0,5) = 0,03$$

tomendegi belgileulerdi kiritemiz.

$$P_1 + P_2 + \dots + P_n, P_1 q_1 + P_2 q_2 + \dots + P_n q_n = S^2$$

Usi belgileulerde $P_n(m, p_1, p_2, \dots, p_n)$ itimalliklari ushin Muavr diplastin` lokal ha'm integral shek teoremlaridin dalilleusiz kiritelik.

Teorema. Egerde tajiriybenin sani $n \rightarrow \infty$ da $\delta \rightarrow \infty$ onda

$$P_n(m, P_1, P_2, \dots, P_n) - \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}} \ell^{\frac{1}{2}(\frac{n-1}{\delta})} \rightarrow 0$$

Teorema. Egerde tajiriybeninsani $n \rightarrow \infty$ da $\delta \rightarrow \infty$ onda $m_1, m_2 (-\infty < m_1 < m_2 < \infty)$ sanlarina karata ten olshemli turde

$$P_n(m_1 \leq \frac{m - a1}{\delta} \leq m_2) - \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}} \int_{m_1}^m \ell^{\frac{d}{1}} dx \rightarrow 0$$

tenligi orinlanadi.

Lektsiya №11
Tema: Markov shinjiri.
Lektsiya jobasi:

1. Markov shinjirinin aniklamasi.
2. Birtekli markov shinjiri.
- 3 Misallar.

Tayanish tusinikler:

Markov shinjirinin aniklamasi ha'm ogan misallar korsetiu. Birtekli Markov shinjiri, otiw matritsasi menen misal korestiu.

Qadagalawshi sorawlar:

1. Markov shinjirinin aniklamasin aytin` ha'm misal korsetin`
2. Birtekli Markov shinjirinin aniklamasin aytin`?

A`debiyatlar:

- [1] §13 97-103 betler.
[1] III bap §15 109-110 betler

Biz usi uakitka shekem garezsiz tajiribeler izbe-izligin uyrendik. Endi garezsiz tajiribeler izbe-izligin tikkeley uliumalastiratugin, 1907- jili belgili rus matematigi A.A.Markov tarepinen kiritilgen Markov shinjiri dep atalatugin sxema garezsiz tajiriybeler izbe-izliginen apuayi misali boladi.

Meyli xar bir tajiriybenin natijesinde shekli yamasa sanakli sandagi ozara birgeliqsiz $A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \dots, A_s^{(n)}, \dots$

Waqiya kalegen bireui juzege asatugin bolsa (bunda jokargi indeks tajiribenin nomerin bildiredi).

Egerde n- tajiriybede $A_1^{(n)}$ waqiyasi juzege askanligi malim bolgandagi n+1- tajiriybede $A_1^{(n+1)}$ waqiyasinin juzege asuinin shartli itimalligi, n tajiriybede.

$A_1^{(n)}$ waqiyasinin juzege askanliginan garezli bolin otkerilgen buringi tajiriybelerde kanday waqiyalardin juzege askanligina baylanisli bolmasa, onda otkerilgen tajiriybeler izbe-izligi Markov shinjirin duzedi dep aytiladi.

Bul aniklama tomendegi tenliqtin` orinlanui menen xarakterlendi.

$$P(A_j^{(n+1)} / A_k^{(1)}, \dots, A_l^{(n)}) P(A_j^{(n+1)} / A_i^{(1)}) = P_{13}^{(n)} \quad (1)$$

Mumkin bolgan natijeleri $A_s^{(n)}$ waqiyalari bolgan tajiriybelerdin kalegen izbe-izligi ushin tomendegi tenliqti jaziuga boladi.

$$P(A_{I_1}^{(1)}, A_{I_1}^{(2)}, \dots, A_{I_{n+1}}^{(n+1)}) = P(A_{I_1}^{(1)}) \cdot P(A_{I_1}^{(2)} / A_{I_1}^{(1)}) \dots P(A_{I_{1+1+1}}^{(1+n)} / A_{I_1}^{(2)}, \dots, A_{I_1}^{(n)})$$

Bul tenliq tajiriybeler izbe-izligi Markov shinjirin duzetugin jagdayda (1) tenliqti tikarinda tomendegi apiuayi turge iye boladi.

$$P(A_{I_1}^{(1)}, A_{I_1}^{(2)}, \dots, A_{I_{n+1}}^{(n+1)}) = P(A_{I_1}^{(1)}) \cdot P(A_{I_1}^{(2)} / A_{I_1}^{(1)}) \dots P(A_{I_{1+1+1}}^{(1+n)} / A_{I_1}^{(2)})$$

1. $P_{ij} \geq 0$

$$2. \sum_{i=k}^k P_{ij} = 1 \quad \text{shartler orinlandi.}$$

Elementleri jokaridagi eki shartti kanatlandiratugin kalegen matritsa stoxastikaliq matritsa dep ataladi.

Birtekli Markov shinjirina birneshe misallar keltireyik.

1-misal : Bolshek tuuri sizik boyinsha $t_1, t_2, \dots, t_n$ uakit momentlerinde tosinnanliq turtkilerdin natijesinde kozgalatugin bolsin. Bolshek putin` kordinatali.  $a, a+1, a+2, \dots, v$  tochkalarda bola aladi  $a$  ha`m v tochkalarinda shagilistiriushi ekranlar koyilgan. Xar bir tosinnanliq turtki natijesinde bolekshe P itimalligi en birliqte onga yamasa q itimalligi menen bir birliqte solga jilisadi. Egerde bolshek a yamasa v tochkalarinda bolsa, xar bir turtki oni bir birliqke ekranlari araligina ishke jilistiradi. Boleksheni shagilistiriushi ekranlar arasinda bunday kozgalis Markov shinjirinin misali boladi. Markov shinjirinin otiw matritsasi tomendegishe boladi.

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

2-misal: Birinshi misaldin shartlerinde a ha`m  $v$  tochkalarin ozine tartiushi ekranlar koyilgan bolsin. Egerde bolshek bazibir tosinnanliq turtki natijesinde  $a$  yamasa  $v$  tochkalarinin bireuine otken bolsa onda bolshekkelesi turtki natijesinde ekranlar arasindagi ishki tochkalardin bireuine ote almaydi, yag`niy sol tochkada kaladi. Markov shinjirinin bul misali ushin otiw matritsasi tomendegi turge iye boladi.

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q & 0 & p & \dots & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

3-misal Meyli sistema E_1, E_2, E_3 jagdaylarinin bireuinde bolaalatugin bolsa ha`m otiw matritsasi tomendegishe berilgen bolsin

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Bul misalda sistemani bir jagdaydan baska jagdayga otiwi tomendegishe iske asadi: egerde sistema xazirgi momentte E_1 jagdayinda bolsa, kelesi momente ol $1/3$

itimalligi menen E_2 jagdayina yamasa $1/6$ itimalligi menen E_3 jagdayina otedi yamasa $1/2$ itimalligi menen E_1 jagdayda kaladi. Egerde sistema E_2 jagdayinda bolsa, ol tendey itimalliq penen E_1 yamasa E_3 jagdayini otedi, al E_2 jagdayinda kala almasa. Egerde sistema E_3 jagdayda bolsa, onda ol $1/4$ itimalligi menen E_2 jagdayina yamasa $1/2$ itimaligi menen E_1 jagdayina otedi yamasa $1/4$ itimalligi menen E_3 jagdayinda kaladi.

Lektsiya №12
Tema: Rekurent formulalar.
Lektsiya jobasi:

1. Rekurent formulalar.
2. Shek itimalligi xaqqida teorema.
3. Misallar.

Tayanish tusinikler:

Rekurent formulalar. Shek itimalligi xaqqida teorema ha'm olarga misallar korsetiu.

Qadagalawshi sorawlar:

1. Rekurent formulalarin keltirip shigarin .
2. Shek itimalligi xaqqida teoremani aytip berin.

A`debiyatlar:

[1] §15 110-115 betler.

Endi biz sistema $E_1, E_2, \dots, E_k$ jagdaylarinda bola alatugin bolganda n tajiriybeden (kademnen) keyin Markov shinjiri ushin otiv itimalligin ha'm otiv matritsa tabiu maselesine karayik. S- tajiriybede sistema E_i jagdayinda bolganda, $S+n - n$ tajiriybede sistemani E_i jagdayina otiv itimalligi $P_{ij}(n)$ dep belgileyik. Araliqtagi $S+m-$ tajiriybede sistema mumkin bolgan E_r ($1 \leq r \leq k$) jagdaylarinin bireuinde boladi. Sonda toliq itimalliqnin` formulasi boyinsha.

$$P_{ij}(n) = \sum_{r=1}^k P_{ir}(m) P_{rj}(n-m) \quad (3)$$

Egerde π_n arkali n tajiriybeden keyin otiv matritsasini belgilesek, onda

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} P_{11}(n) & P_{12}(n) & \dots & P_{1k}(n) \\ P_{21}(n) & P_{22}(n) & \dots & P_{2k}(n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{k1}(n) & P_{k2}(n) & \dots & P_{kk}(n) \end{pmatrix}$$

(3) formula boyinsha xarkiyli nomerli otiv matritsalarini arasinda tomendegi katin`as orinlanadi.

$$\pi_n = \pi_m \pi_{n-m}, (0 < m < n)$$

Bunnan $n=2$ bolganda

$$\pi_2 = \pi_1 \cdot \pi_1 = \pi_1^2$$

$n=3$ bolganda

$$\pi_3 = \pi_1 \cdot \pi_2 = \pi_1^3$$

ekenligi kelip shigadi ha`m kalegen n ushin

$\pi_n = \pi_1^{(n)}$, (3) ekenligine iye bolamiz. $M=1$ bolganda (2) formuladan

$P_{ij}(n) = \sum_{r=1}^k P_{ir} P_{rj}(n-1)$ formulasina iye bolamiz.

Solay etip π_1 matritsasinin beriliui kalegen sandagi tajiriybelerden keyin otiw itimalliq-larin bir manisli aniklaydi eken. Egerde $E_1^{(n)}$ arkali n tajiriybede sistemani E_r jagdayinda boluvin belgilesek, onda birtekli Markov shinjiri ushin.

$$P(E_j^{(n+k)} / E_i^{(n)}) = P(E_j^{(k)} / E_i^{(0)}) = P_{ij}(k)$$

ekenligi kelip shigadi.

Bul aytilganlardan kalegen sandagi tajiriybe ushin Markov shinjiri π_1 matritsasi ha`m daslepki bolistiriliu $P_k^{(0)} = P(E_k^{(0)})$ arkali toliq aniklanatuginligi kelip shigadi.

4-misal: (3) formuladan paydalanip eki (kademnen) tajiriybeden keyin otiw matritsasini 1 ha`m 2 misallar ushin jazayik.

a) Bolekshe eki shagilistiriushi ekranlar arasinda tuurisizik `oyinsha kozgalganda

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} q & 0 & p & 0 & 0 \dots \\ 0 & q + pq & 0 & p^2 & 0 \dots \\ p^2 & 0 & 2pq & 0 & p^2 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & q & 0 & p \dots \end{pmatrix}$$

b) Bolekshe eki ozine tartiushi ekranlar arasinda tuuisizik boyinsha kozgalganda

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ q & p & q & 0 & p^2 \dots \\ q^2 & 0 & 2pq & 0 & p^2 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \dots \end{pmatrix}$$

π_9 di esaplau ushin 8 ret kobeytiu ameli orinlaudini ornini 4 ret kobeytiydi orinlau jetkiliqli aytib ketiu orinli boladi.

$$\pi_2 = \pi_1 \cdot \pi_1, \pi_4 = \pi_2 \cdot \pi_2, \pi_8 = \pi_4 \cdot \pi_4, \pi_9 = \pi_8 \cdot \pi_1,$$

Shek itimalliq-lari xaqqinda teorema.

Tema. Egerde $S > 0$ ushin π_3 otiw matritsasinin barliq elementleri on bolsa, onda sonday $P_i (j = 1, 2, \dots, k)$ --- sanlar bar bolip i tndeksine garezsiz turde, tomendegi tenliqlar orinlanadi. $\lim_{k \rightarrow \infty} P_{ij}(n) = P_j$

Dalilleniui: Bul teoremanin dalilleniui tomendegishe jurgiziledi: daslep $P_{ij}(n)$ itimalliqlarinin en ulken n oskende ospeytuginligin, al en kishisi kemimeytugin korsetemiz, onnan keyin $P_{ij}(n) - P_{ij}(n) (i, 1 = 1, 2, \dots, k)$ ayirmasinin maksimal manisi $n \rightarrow \infty$ nol`ge umtilatuginin korsetemiz.

Endi teoremani dalilleuge oteyik $n > 1$ bolganda tomendegi tensizliq orinli boladi.

$$P_{ij}(n) = \sum_{i=1}^k P_n P_{ij}(n-1) \geq \min_{1 \leq i \leq k} P_{ij}(n-1) \sum_{i=1}^k P_n = \min_{1 \leq i \leq k} P_{ij}(n-1)$$

Bul tezliq kalegen i ushin , dara jagdayda $P_{ij}(n) = \min_{1 \leq i \leq k} P_{ij}(n)$

Tenligi orinlangan jagday ushinda duris boladi. Solay etip

$$\min_{1 \leq i \leq k} P_{ij}(n) \min_{1 \leq i \leq k} P_{ij}(n-1)$$

Sol siyakli $\min_{1 \leq i \leq k} P_{ij}(n) \min_{1 \leq i \leq k} P_{ij}(n-1)$ ekenligi kelip shigariuga boladi $n > s$ dep esaplap (3) formulasi boyinsha

$$P_{ij}(n) = \sum_{r=1}^k P_{ij}(s) P_{ij}(n-s) \quad \text{ha`m} \quad P_{ij}(n) - P_{ij}(n) = \sum_{r=1}^k [P_{ir}(s) - P_{ir}(s)] P_{rj}(n-s)$$

$P_{ir}(s) - P_{ir}(s)$ ayirmalarinin onlari $\beta_{\mathcal{I}}^{(T)}$, terisleri $\beta_{\mathcal{I}}^{(T)}$ dep belgilesek

$$\sum_{r=1}^k P_{ir}(s) = \sum_{r=1}^k P_{ir}(s) = 1 \text{ kenliginen}$$

$$\sum_{r=1}^k [P_{ir}(s) - P_{ir}] = \sum_{(r)} \beta_{\mathcal{I}}^{(r)} - \beta_{\mathcal{I}}^{(r)} = 0 \quad (4)$$

ekenligine iye bolamiz.

Bul tenliqten $h_{il} = \sum_{(r)} \beta_{\mathcal{I}}^{(r)} = \sum_{(r)} \beta_{\mathcal{I}}^{(r)}$ ekenligine iseniuge boladi.

Teoremanin sharti boyinsha barliq i ha`m r ushin $\sum_{(r)} \beta_{\mathcal{I}}^{(r)} < \sum_{r=1}^k P_{\mathcal{I}}(s) < 1$

ekenligi kelip shigadi. Solay etip, $0 \leq h_{il} < 1$ Meyli $h_{il} = \max_{1 \leq i_2 l \leq k} h_{il}$ bolsin.

Shinshir ushin mumkin bolgan jagdaylar shekli bolganliqtan h_{i1} shamalari menen bir katarda $0 \leq h < 1$ sharti orinlanadi. Kalegen i ha`m 1 $(i, 1 = \bar{1}, \bar{k})$ ushin (3) formuladan.

$$|P_{ij}(n) - P_{1j}(n)| = \left| \sum_{(r)} \beta_{i1}^{(r)} P_{ij}(n-s) - \sum_{(r)} \beta_{ij}^{(r)} P_{ij}(n-s) \right| \leq \max_{1 \leq r \leq k} P_{ij}(n-s) \left| \sum_{(r)} \beta_{i1}^{(r)} - \min_{1 \leq r \leq k} P_{rj}(n-s) \sum_{(r)} \beta_{il}^{1(r)} \right| \leq h \left| \max_{1 \leq r \leq k} P_{rj}(n-s) - \min_{1 \leq r \leq k} P_{rj}(n-s) - P_{ij}(n-s) \right|$$

ekenligine iye bolamiz. Sonliqtan,

$$\max_{1 \leq i, l \leq k} |P_{ij}(n) - P_{1j}(n)| \leq h \max_{1 \leq i, l \leq k} |P_{rj}(n-s) - P_{1j}(n-s)|$$

Bul tensizliqti $\left[\frac{n}{3} \right]$ ret kollansak,

$$\max_{1 \leq i, l \leq k} |P_{ij}(n) - P_{1j}(n)| \leq h^{\left[\frac{n}{3} \right]} \max_{1 \leq i, l \leq k} \left| P_{rj} \left(n - \left[\frac{n}{s} \right] s \right) - P_{ij} \left(n - \left[\frac{n}{s} \right] s \right) \right|.$$

tensizligine iye bolamiz.

Kalegen m ushin $|P_{ij}(m) - P_{1j}(m)| \leq 1$ bolganliqtan,

$$\max_{n \rightarrow \infty} |P_{ij}(n) - P_{1j}(n)| \leq h^{\left[\frac{n}{s} \right]} \quad n \rightarrow \infty \quad \text{umitilganda} \quad \left[\frac{n}{s} \right] \rightarrow \infty \quad \text{bolganliqtan ha`m}$$

$0 \leq h < 1$ bolganliqtan

$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{i \leq r \leq k} |P_{ij}(n) - P_{1j}(n)| = 0$ boladi. Dalillengennen $\sum_{s=1}^k P_j = 1$ ekenligi kelip shigadi. Xakiykatin`da da

$$\sum_{j=1}^k P_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k P_{ij}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

Solay etip R_i itimalligin n ulken san bolganda n- tajiriybede $A_j^{(n)}$ waqiyasin juzege asiu itimalligi dep karauga boladi. Dalillengen teoremanin fizikaliq manisi s-sistemasinin E_j jagdayinda bolu itimalligi erte uakitta sistemanin kanday jagdayda boluina baylanissiz ekenligin anlatadi.

Dalillengen teorema A.A. Markov tarepinen dalillengen bolip, ol shek itimalliqlari dep ataladi

Egerde R_j itimalliqlar ushin $\sum_j P_j = 1$ bolganda

Tenlemeler sistemasi orinli bolsa, onda R_j itimalliqlari statsionar itimalliqlar dep ataladi.

4-misali: Statsionar itimalliqlardi esaplauga bir misal keltireyik.

Markov shinjiri tomendegi otiw matritsasi menen berilsin.

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Statsionar itimalliqlar ushin tomendegi tenlemeler sistemasina iye bolamiz:

$$\begin{cases} P_1 = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{2}P_3 \\ P_2 = \frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{4}P_3 \\ P_3 = \frac{1}{6}P_1 + \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{4}P_3 \\ P_1 + P_2 + P_3 = 1 \end{cases}$$

Ekinshi tenlemeden R_2 nin manisi ushinshi ha'm tortin'shi tenlemelerge koyip $P_3 = \frac{4}{15}$, $P_1 = \frac{1}{2}$ ekenligin tabamiz. Bul manislerdi ekinshi koyip $P_2 = \frac{7}{30}$ ekenligin tabamiz. Solay etip sototstsionar itimalliqqlar $P_1 = \frac{1}{2}$, $P_2 = \frac{7}{30}$, $P_3 = \frac{4}{15}$ boladi eken. Jokaridagi tenlemeler sistemasin sheshkende biz birinshi tenlemani paydalanganimiz jok. Uliwma jagdayda (5) tenlemeler sistemasinda kalegen tenleme kalgalarinin saldari boladi. Xakiykatin`da da (5) tenlemenin eki jagi boyinsha summalaskan $\sum_j P_{ij} = 1$ ekenligine $\sum_j P_j = \sum_j P_i$ ekenligi kelip shigadi.

A`debiyatlar

1. Гиеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М. "Наука" 1988г.
2. Sirajatdinov S.X. Mamatov N.N. extimollar nazariyasi va matematik statistika. Toshkent "O`qituvchi" 1980y.
3. Ширяев А.Н. Вероятност`. М. "Наука" 1980г.
4. Гихман К.И. и др. Теория вероятностей и математическая статистика. Киев "Виша школа" 1988г.
5. Климов Г.П. Теория вероятностей и математическая статистика. М. "Из-во МГУ" 1983г.
6. Боровков А.А. Теория вероятностей. М. "Наука" 1986г.
7. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М. "Высшая школа" 1975г.