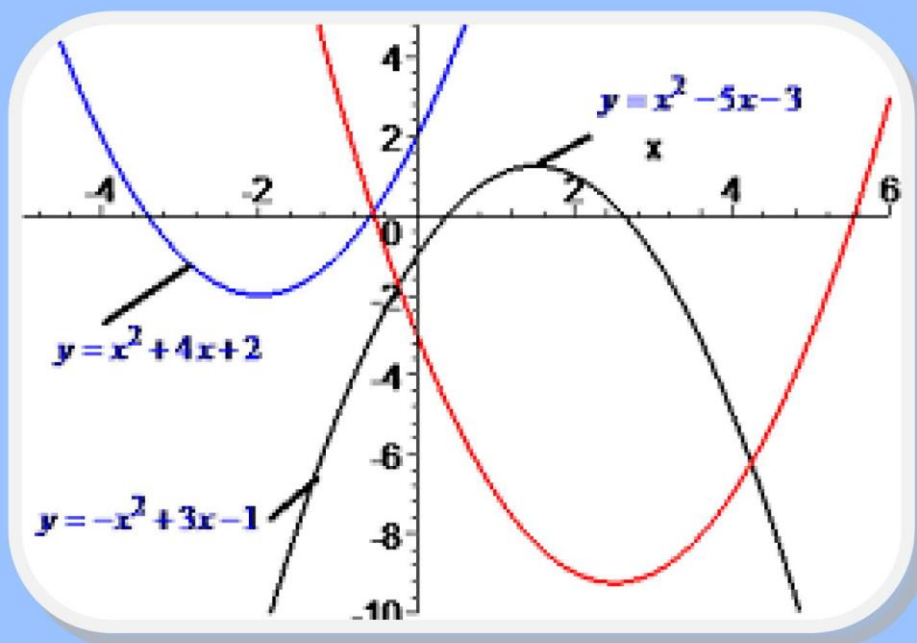


**M. Qasimov, A. Usakova,
M. Murzambetova, D. Esengeldiev**

**TEŃLEMELER HÁM TEŃSIZLIKLERDI
SHESHIWDE FUNKCIYALARDÍŃ
QÁSIYETLERINEN QOLLANÍW**
(metodikalıq qollanba)



NÓKIS – 2021

**ÓZBEKISTAN RESPUBLIKASI
JOQARI HÁM ORTA ARNAWLÍ BILIMLENDIRIW MINISTRLIGI**

M. Qasimov, A. Usakova, M. Murzambetova, D. Esengeldiev

**TEÑLEMELER HÁM TEÑSIZLIKLERDI
SHESHIWDE FUNKCIYALARDÍN
QÁSIYETLERINEN QOLLANÍW**
(metodikalıq qollanba)

NÓKIS – 2021

Dúziwshiler:

M. Qasimov, A. Usakova, M. Mirzambetova, D. Esengeldiev.

Usınılıp atırǵan metodikalıq qollanbada matematika oqıtıw metodikası pániniń tiykarǵı bóliminiń biri bolǵan teńlemeler hám teńsizliklerdi sheshiwde olardıń ishinde qatnasıwshı funkciyalardıń qásiyetlerinen qollanıw jollari qaralǵan bolıp, bunda oqıwshılarǵa teńlemeler hám teńsizliklerdi sheshiwde funkciyalardıń qásiyetlerin qollanıwdı úyretiw hám onı ámeliyatta qollanıw kónlikpesin hám uqıplılıqların rawajlandırıwdı óz-ishine alıwshı metodikalıq qollanba islengen.

Bul qollanbadan orta mektep hám akedemiyalıq liceydińlerdiń hám kásip- óner kollejleriniń oqıwshıları menen bir qatarda universitet, institut talabaları da, pedagog kadrlardı qayta tayarlaw hám qániygeligin arttırıw institutı tıńlawshıları da paydalanıwı múmkin.

JUWAPLI REDAKTOR:

N. Jumabaev

- Ájiniyaz atındaǵı Nókis mámleketlik pedagogikalıq institutı matematika oqıtıw metodikası kafedrası docenti, pedagogika ilimleriniń kandidatı.

PIKIR BILDIRIWSHILER:

M. Allambergenova

- Ájiniyaz atındaǵı Nókis mámleketlik pedagogikalıq institutı Informatika oqıtıw metodikası kafedrası dotsenti, pedagogika ilimleriniń kandidatı

Z. Saparov

- Ájiniyaz atındaǵı Nókis mámleketlik pedagogikalıq institutı, «Matematika oqıtıw metodikası» kafedrası docenti, fizika-matematika ilimleriniń kandidatı

Ájiniyaz atındaǵı Nókis mámleketlik pedagogikalıq institutı
Oqıw-metodikalıq keńesi(27-iyun 2019–jıl №8 sanlı bayanlama) májilisi
qararı menen baspaǵa usınıs etilgen.

Kirisiw

Funkciya túsiniǵın biz zamanagóy ilimniń tiykarǵı túsiniǵı dep aytıwımız shárt bolmasa kerek desekte boladı. Ol bizge fizikalıq shamalardıń bir-birine baylanısın úyretiwge múmkinshilik beredi. Sonıń ushında házirgi waqıtta matematikanı, fizikanı, texnikanı hám tábiyat ilimlerin úyretiw funkciya túsiniǵısız kóz aldımızǵa keltire almaymız. Bul jaǵday orta mekteptiń elementar matematika kursında da funkciyanı úyretiw haqqında tálim kirgizilgen.

Matematika sabaǵında oqıwshılardıǵa, matematikanı oqıtıw processinde funkciyalardıń qásiyetlerin qollanıw járdeminde teńlemeler hám teńsizliklerdi sheshiw qábiletin rawajlandırıw hám onı bekkemlew jolları, sonday-aq, olardı keyingi alǵan bilimlerin ańlı túrde, turmıs máselelerin sheshiwde tabıslı qollanıw ushın kónlikpe hám uqıplılıqların payda etiw, bul matematikalıq biliminiń tiykarǵı wazıypalarına aylanıwı lazım. Matematikanı oqıtıwda tiykarǵı maqsetlerdiń biri, oqıwshılardıń funkciyalardıń qásiyetlerin qollanıw járdeminde teńlemeler hám teńsizliklerdi sheshiwdi úyretiw arqalı, oqıwshılardıń qábiletin hám qızıǵıwshılıǵın rawajlandırıw bolıp esaplanadı. Demek, matematikanı oqıtıw processinde oqıwshılardıǵa funkciyalardıń qásiyetlerin qollanıw járdeminde teńlemeler hám teńsizliklerdi sheshiwdi úyretiw hám onı ámeliyatta qollanıw kónlikpesin hám uqıplılıqların rawajlandırıwdı óz-ishine alıwshı metodikalıq qollanba islep shıǵıw, bul *eń aktual* máselelerden biri bolıp esaplanadı.

Solay etip, bul pitkeriw qánigelik jumısında, teńlemeler hám teńsizliklerdi, olardıń ishinde qatnasıwshı funkciyalardıń qásiyetlerin qollanıw járdeminde sheshiwdi úyretiw hám rawajlandırıwshı, onı bekkemlew jollarına baylanıslı metodika keltirilgen.

I BAP. ULÍWMA ORTA BILIM BERIW MEKTEPLERINDE FUNKCIYALAR HAQQÍNDÁ ULÍWMA TÚSINIKLER

1-§. Funkciya túsiniginiń qısqasha rawajlanıwı tariyxı

Algebra - hárıpli ańlatpalardı tiykarlanadı . Al algebradağı hárıpler jiy túrde, qandayda bir kóplikke tiyisli erikli sandı ańlatadı . Bunnan, algebradağı hárıpti qandayda bir kópliktegi sanlardı juwrıp ótetuǵın ózgeriwshi shama dep túsinemiz. óz-ara baylanısqa shamalar , mısalı, algebralıq teńlik járdeminde , funkciyanı anaqlaydı.

Funkciya túsinigi-real haqıyqatlıq penen tikkeley baylanısqa fundamentallıq matematikalıq túsiniklerdiń biri. Onda real dúnyanıń ózgergishligi hám hárketlilik (dinamikalıǵı), real ob'ekterdiń hám qubılıslardıń óz- ara shártleskenligi anıq kórinedi. Funkciya túsiniginde real dúnyanıń qubılıslarınıń sheksiz túrli- túrliligi málim dárejede sáwlelenedi.

Matematikaniń evolyuciyası procesinde funksiya túsinigi (hám oǵan sáykes anıqlamalar yaqı táriplesler) málim ózgerislerge dushar boldı. Mısalı, uzaq waqıt dawamında (funksiya matematikalıq formulanıń tutqını boldı). L. Eyler funksiya degende hár bir analitikalıq ańlatpanı túsindi. Ilimniń rawajlanıwınıń málim dáwirine deyin qanaatlandırarlıq bolǵan bul anıqlama túsinik kólemin jasalma sheklep ǵana qoymay (funksiya beriliw usıllarınıń biri menen teńlestirildi), hár qıylı qarama- qarsılıqlardı da alıp keldi. Dara jaǵdayda, funkciyanı eki analitikalıq ańlatpa járdeminde beriwge ruxsat etilmedi. Mısalı,

$$y = \begin{cases} \sin x, & x \leq 0, \\ \lg x, & x > 0 \end{cases}$$

kórinisindegi funksiya bolıwı múmkin emes edi.

Áiyemgi zamanlarda aq, funktsional baylanıslar adamlardıń turmısında kóp ushırasqa. Mısalı, ónermenchiler qansha kóp ónim tayarlasa, payda da sonsha kóp bolatuǵını túsinikli. Keyinirek, oǵan uqsas keri proporsionallıq baylanısı hasıl etiwshi turmıs máselelerin túsiniwge hárket qılǵan. Usınıń menen birlikte geometriyalıq denelerdiń kólemleriniń, betiniń maydanınıń, olardıń ólshemlerine baylanıslı ekenligin teksergen. Vavilonda bunday baylanıslar, sanlar tablıcası túrinde kórsetilgen. Mısalı, sannıń kvadratı, kubı hám keri sanlardı tabıw tablıcaları dúzilgen. Greciyada kóbirek teoriyalıq matematikaǵa itibar berilip, logikalıq juwmaqlar arqalı nátiyjeler shıǵarıwǵa hárket qılǵan. Olar dóńgelekte geometriyalıq baylanıslardı teksergen, biraqta zárúr nátiyjege erise almaǵan.

Astronomiyadağı izertlewshiler trigonometriyalıq funksiylardıń kelip shıǵıwına tiykar saldı. Biziń eramızǵa shekemgi III-II ásirlerde berilgen uzınlıqtaǵı doǵanı tartıp turıwshı xordalar tablıcası dúzilgen. Onı grek alımı Klavdiy Ptolomey 100-178 jıllarda dawam ettirip, sinuslar tablıcasın dúzip shıǵadı.

Indiya hám arab matematikleri trigonometriyalıq funksiylardı sheńberge júrgizilgen kesindilerdiń uzınlıqları túrinde kórip shıqtı. Indiya matematigi

Ariabxata I (shama menen 476-550) tiykargı trigonometriyalıq birdeylıkti, sinus, kosinus hám tangens ushın formulalardı keltirip shıǵaradı. Shıǵıs alımları bolsa trigonometriyalıq funkciyalardıń mánislerin interpolıyacıyalaw járdeminde esaplaw múmkinligin kórsetti. Mısalı, Abu Rayxan al' Beruniy óziniń «Kanuni Masudiy» (1037) shıǵarmasında sinuslar hám tangensler tablicasın, olardan paydalanıwdı hám kvadratlıq interpolıyacıyalaw qaǵıydaların bayan etti. Sonday aq bul interpolıyacıyalaw qaǵıydaların astronomiyadaǵı barlıq tablıcalar ushın qollanıw múmkinshiligin aytıp ótedi. Al bul bolsa, onıń funkciyalardıń ulıwma nızamlılıǵın tabıwǵa háreket qılǵanlıǵın kórsetedi.

Ulıwma alǵanda dáslepki trigonometriyalıq shamalar Indiyada payda bolǵan. Olar dáslep sinus, sońınan {aylandırılǵan} sinus $1-\sin\alpha$ shamasın kiritken. IV-V ásirlerde indiya matematikleriniń shıǵarmalarında sinus, kosinus hám «aylandırılǵan» sinus (sinus-versus) lar ushırasadı, biraqta olar tek ǵana súyir múyeshler ushın qaralǵan. Esaplawlarda bolsa tek ǵana tuwrı múyeshli úshmúyeshlikler qaralǵan. Bunnan tisqari tiykargı birdeylıkti, ayırım $\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ túrindegi keltiriw formulaların birlgen.

Keyinirek Al'-Xorezmiydiń zamanlası Axmad ibn Abdulla al'-Mavraziy al'-Xosib al'-Xabash (764-874) gnomonika (quyash saatları haqqındaǵı táliymat yaǵnıy jerge tik qaǵılǵan aǵash (gnomon) bolıp waqıt aǵash sayası uzınlıǵı hám baǵıtı boyınsha anıqlanǵan) máseleleri menen shuǵıllanıp, saya uzınlıǵı U dıń gnomon uzınlıǵı L gepatit qatnası quyash biyikligine baylanıslı túrde ózgeretuǵınlıǵın esapqa alıp, bul saya uzınlıǵınıń $\varphi = 1^\circ, 2^\circ$.. mánislerine sáykes keliwshi mánislerin tabadı. Solay etip olar birinshi bolıp tangens hám kotangensti tuwrı múyeshliktiń tárepleriniń qatnası túrinde kiritedi hám sinuslar, tangensler, kotangensler tablıcaların dúzedi.

XII ásirde arab shıǵarmaların latin tiline awdarǵanda tangens hám kotangens funkciyaları «tuwrı saya» hám «keri saya» dep atala baslaǵan. «Tangens» hám «sekans» atamaları (1583) Daniyalıq matematik astronom Tomas Fink (1561-1656) kiritilgen, al «kotangens» hám «Kosekans» atamaları Edmon Yunter (1581-1626) 1620 jıldan baslap qollana baslaǵan.

Orta ásirlerde birinshi bolıp funkciya túsiniǵın francuz matematigi Nikola Orem (Oresme) (1323-1382), kesindi uzınlıǵında kórsetti yaǵnıy baylanıslar tek ǵana san jaǵınan emes hátteki sıpat jaǵınan da ózgeriske iye ekenligin hám bólshek kórsetkishli dárejeli funkciya túsiniǵiniń kelip shıǵıwına óz úlesin qostı. Bul kesindilerdi bazı bir tuwrı sıızıqqa perpendikuloyar qılıp qoyıp shıqsa onda olardıń aqırları bazı bir tuwrı sıızıqtı anıqlaydı. Bul funkcional baylanıslardıń birinshi grafiginiń súwretleniwi edi. Sonday-aq ol grafiklerdi klasslarǵa ajratıwǵa háreket qıldı: tegis, tegis-tegis emes.

XVI-XVIII ásirlerde astronomiya páni kúshli rawajlandı. Bul bolsa háreketti úyreniw hám onı izertlew usılların islep shıǵıw zárúrligin keltirip shıǵardı. Usı tiykarda matematikaǵa ózgeriwshi shamalar tusinigi kiritildi. Onı birinshi bolıp francuz matematigi R.Dekart (1596-1650) kirgizdi. Ol tuwrı sıızıqlı koordinatalar

usılın islep shıqtı, sonıń menen birge ózgeriwshi shama hám funkciya tusinigin kirgizdi.

XVII ásirdeń aqırında nemec matematigi Gotfrid Vil'gelm Leybnic (1646-1716) hám onıń shákirtleri funkciya atamasın qollana basladı. Olar funkciya (latınsha - funktus-orınlaw) atamasın birinshi ret isletti. Shveycariyalıq matematik Iogan Bernulli (1667-1748) funkciyaǵa tómendegishe anıqlama beredi: Ózgeriwshi shamalıń funkciyası dep qandayda bir usıl menen bul ózgeriwshi shamadan hám turaqlılardan hasıl qılınǵan shamaǵa ayıladı.

Belgili anglichan matematigi hám fizigi Isaak Nyuton (1643-1727) funkciya túsiniǵın rawajlandırıw boyınsha kóp jumıslar isledi. Ol funkciya ornına ordinata atamasın qollanǵan, usı tiykarda differencial hám integral esabın hám mexanika nızamların jaratqan.

Leonard Eyler (1707-1783) kompleks ózgeriwshi funkciyalardı kiritedi, trigonometriyalıq hám kórsetkishli funkciyalar arasındadı qatnaslardı tabadı. Ol birinshi ret trigonometriyalıq funkciyalar teoriyasın tolıq bayan etedi, kórsetkishli hám logarifmlik funkciyalar qásiyetlerin tereń úyrenedi.

XIX ásirdeń basında funkciya túsiniǵiniń tómendegi anıqlaması payda boldı: x ózgeriwshi shamasınıń hár bir mánisine u ózgeriwshi shamasınıń tek bir ǵana anıq mánisi sáykes kelse, onda u shaması x ózgeriwshi shamasınıń funkciyası delinedi. Bul anıqlama ulıwma bolıp óz ishine júdá kóp funkciyalardı aladı.

XIX ásirdeń ekinshi yarımınan baslap funkciyanıń anıqlamasındaǵı «ózgeriwshi shama» sózine ǵúman menen qaray basladı. Bul ózgeriwshi shama túsiniǵi tek ǵana matematika emes ol basqa túrdegi nárseler bolıwı múmkinligi hám de anıqlamadaǵı sáykeslik túsiniǵi sanlar arasındadı sáykeslikti ańlatatuǵınlıǵı túsinile basladı. Sonlıqtan, eger funkciyanıń analitikalıq ańlatpa menen beriliwinen bas tarcaq, ol jaǵdayda nárseler arasındadı sáykeslikti qaraw múmkinshiligi anıq bolıp qaldı.

Kóplikler teoriyasınıń payda bolıwı menen onı dúziwshiler Nemec matematigi Georg Kantor (1845-1918) hám nemec alımı Rixard Yumus Vil'gelm Dedekind (1831-1916) funkciya túsiniǵiniń ulıwmalasqan túri-sáwlelendiriwge anıqlama berdi: X hám U kóplikleri berilgen bolsın. Egerde X kópliginiń hár qanday x elementine U kópliginde oǵan sáykes u element kórsetilgen bolsa, onda X kópliginiń U kópligine f sáwleleniwi berilgen delinedi. Bunda x elementi u elementiniń obrazı dep ataladı. Bul túsiniktiń kiritiliwi keri funkciya (quramalı) funkciya túsiniǵiklerin aydınlastırıwǵa múmkinshilik beredi.

Sáwlelendiriw túsiniǵi de jeterlishe ulıwma bolıp qalmadı. Sebebi turmısta X kópligindegi hár bir x elementine U kópliginde bir tek ǵana bir element sáykes keletuǵın kóplikler menen bir qatarda quramalı baylanıslarǵa iye bolǵan kópliklerdi de ushıraıw múmkin. Yaǵnıy hár qanday $x \in X$ elementine U kópliginen bir element emes, ol bazı bir elementlerdeń málim bir bólegi sáykes keliwi múmkin. Bunday jaǵdaylardı da óz ishine alıw ushın binarlıq sáykeslik túsiniǵi kiritildi.

XX ásirдің basında funkciyalardı úyreniw ushın matematikanıń taza tarawı - funktsional analiz payda boldı. Bul pándе funktsional izbe-izlikler sıızıqlardan turatúǵın kópplikler úyrenildi.

Funkciyanıń anıqlamasın rus matematigi N.I.Lobachevskiy (1792-1856) hám nemec matematigi L.Direxleniń(1805-1859) jumıslarında kóriwge boladı. N.I.Lobachevskiy Kazan universitetiniń professorı hám rektori bolǵan. Biz onıń geometriya oblasındaǵı islegen áhimiyetli miyneti ushın ullı matematik dep ataymız. Ol taza geometriya jarattı. Bul geometriya házirgi waqıtta óziniń atı menen ataladı. Biraqta, N.I. Lobachevskiydi tek geometriya qızıqtırǵan joq. Sonday-aq, matematikalıq analizgede aytarlıqtay úlesin qostı. Funkciya degenimiz ne degen sorawǵa juwap bere otırıp, oǵan tómendegishe anıqlamanı beredi: bul uluma túsinikti talap etedi, x tıń funkciyası dep sol sandı aytamız, hár bir x ushın mánis beriledi hám x penen birgelikte ástelikte ózgeredi. Funkciyanıń mánisi analitikalıq ańlatpada beriliwi múmkin yamasa sanlar túrinde tájiriybe arqalı beriledi hám olardan birewi saylanıp alıwı nátiyjesinde yamasa baylanıs bar bolıwı hám belgisiz bolıp qalıwı múmkin.

Teoriyalıq kóz qarastan, baylanıslardıń bar bolıwı, tek sol maǵanada jol qoyladı, sandı birewi ekinshisinen keyin, óz-ara baylanasta, berilgen maǵlumatlardıń tiykarında birgelikte qabıl ecin.

Koordinatar sisteması funkciyanı grafik túrinde ańlatıwǵa múmkinshilik berdi-sızıq túrinde. Biraqta, kerisinshe, koordinat sistemasında ańlatılǵan sızıq, qandayda bir funkciyanıń grafigi bolıwı múmkin. Biraqta onı úyreniw sáykes funkciyanıń ózin izertlewge alıp keletúǵın bolsa. Biz usınday jol menen tuwrını, parabolanı úyrendik hám keyinnirek basqada sızıqlardı úyrenemiz.

Francuz matematigi hám filosofi R.Dekart (1596-1650) brinshi mártebe geometriyalıq sorawlardı izertlegende koordinatar metodın qollanǵan. Bul taza ilimniń payda bolıwına alıp keldi -analitikalıq geometriya. Mısalı, sızıqlı teńlemelerdi grafikalıq usılda sheshiw analitikalıq geometriyaǵa tiyisli.

«Koordinatar» sózi eki latin sózinen quralǵan: *so*(sum)- «birgelikte» hám *ardınatus*- «tártiplengen», «anıqlanǵan» degendi bildiredi. Demek, koordinatar tegisliktegi noqatıń jaylasıwın bildiretuǵın belgili birliktegi san.

Házirgi waqıtta funkciya túsiniǵiniń anıqlamasınıń bir neshe variantları bar. Dara jaǵdayda, funkciya túsiniǵi dáslepki (anıqlanbaytuǵın) matematikalıq túsiniq sıpatında beriliwi de múmkin ([1]). Ekinshi variantta *sáwlelendiriw* túsiniǵi dáslepki túsiniq sanaladı, al funkciya dep *bir sanlı kóplikti ekinshisine sáwlelendiriw* túsiniledi ([2]). Funkciya túsiniǵin *kópliklerdiń elementleri arasında ornatılǵan ayırıqsha qatnas* sıpatında da beriwge boladı. Funkciya *kópliklerdiń elementleri arasındaǵı bazıbir sáykeslik* sıpatında da anıqlanıwı múmkin.

Mektep baǵdarlamasına funkciya túsiniǵiniń kiritilgenine salıstırmalı qaraǵanda onsha kóp waqıt bolǵan joq. Matematikalıq bilimlendiriwdegi bul qádemge bul túsiniktiń matematika- ilimdegi hám matematikanı oqıtıwdaǵı

jetekshi roline isenim menen qarağan belgili pedagog- matematik F. Kleyinniñ (1849-1925) ideyaları áhmiyetli tásirin kórsetti.

N. Burbakidiñ izertlewleriniñ tiykarǵı yadrosın dúzetuǵın matematikalıq ilimniñ bir pútinlik ideyasın funkciya túsiniǵın pútkil matematikaniñ oraylıq túsiniǵı dep sanaǵan F. Kleyn aytqan edi: «Házirgi zaman matematikasında qanday túsiniq ústem boladı? Álbette, bul funkciya túsiniǵı. Funkciyalardı izertlew pútkil joqarı matematikaniñ maqsetin dúzedi dep aytıwǵa boladı; hár qıylı faktorlar arasındaqı funkcionallıq baylanıstı anıqlaw ámeliy matematikaniñ wazıypasına kiredi» ([3]).

Hám jáne: (Funkciya haqqındaǵı túsiniq orta mektep kursında tiykarǵı, basshı rol'di oynawı kerek. Bul túsiniqti oqıwshılar júdá erte uǵıp alıwı kerek hám ol algebranı hám geometriyanı oqıtıwdıñ ishine kirip ketiwi lazım)([3]).

F.Kleyinniñ kóz qarası boyınsha hár qanday ilimiy bilim oqıwshılar tárepinen kórsetpelikten paydalanbay ózlestiriliwi múmkin emes. Sonlıqtan funkciya túsiniǵın geometriyalıq obrazlar járdeminde túsindiriw, F. Kleyinniñ pikiri boyınsha, mektepte matematikani oqıtıwda maqsetke júdá muwapıq boladı. (Geometriyalıq formadaǵı funkciya túsiniǵı mektep matematikalıq bilimlendiriwiniñ janı bolıwı kerek) ([4]).

Teoriyalıq-kópliklik koncepciyaǵa tiykarlanǵan matematika boyınsha hárekettegi mektep baǵdarlaması hámme tiykarǵı matematikalıq túsiniqlerdi, sonıñ ishinde funkciya túsiniǵın de, keń túsindiriwge múmkinshilik beredi. Bunnan tisqari, teoriyalıq- kópliklik usıl onı jeterli dárejedegi qatallıqta bayanlawǵa múmkinshilik beredi.

2-§. Ulıwma orta bilim beriw mekteplerinde funkciyalardı úyretiwdiñ ulıwma sxeması

Ózgeriwshi hám turaqlı muǵdarlar. Tábiyatta, pán hám texnikanıñ bárshe baǵdarlarında hár túrli muǵdarlardı (uzınlıq, maydan, waqıt, massa hám t.b.) ushratamız. Bunday muǵdarlar sharayatqa qarap túrli mánislerdi qabıl etiwı múmkin. Máselen, hár qanday úshmúyeshliktiñ múyeshleri qosındısı hárdayım 180° qa teń bolsa, úshmúyeshlikler perimetri bolsa (olardıñ tárepleri uzınlıǵına qarap) túrlishe boladı. Bunnan úshmúyeshlik múyeshleri qosındısı turaqlı muǵdar, úshmúyeshlik perimetri bolsa ózgeriwshi muǵdar ekeni kórinedi. Natiyjede eki túrli — ózgeriwshi hámde turaqlı muǵdarlarǵa dus kelemiz.

Ózgeriwshi muǵdarlar x, y, z hám tagı basqa háripler menen belgilenedi.

Eger ózgeriwshi muǵdardıñ qabıl etetuǵın mánisleri kópligi belgili bolsa, ózgeriwshi berilgen delinedi (máselen, "bárshe oń sanlar kópligi ózgeriwshi muǵdar sıpatında alınǵan sheńber radiusı r diñ qabıl etetuǵın mánisleri kópligi boladı).

Tájiriybe kórsetkendey, **ulıwma orta bilim beriw mekteplerinde** konkret funkciyalardı úyretiwdi tómendegi metodikalıq sxema boyınsha ótkeriw paydalı:

1. Berilgen funkciyağa alıp keletuǵın jaǵdaylardı (yaki máselelerdi) qaraw. Úyreniwdiń bul basqışında oqıwshılar ámeliyat talabı hám teoriyanı bunnan bılay da rawajlandırıw zárurlıǵı boyınsha berilgen funkciyanı izertlewdiń maqsetke muwapıqlıǵına isenim arttırıwı kerek.

2. Berilgen funkciyanıń anıqlamasın beriw, funkciyanı formula menen jazıw, bul formulaǵa kiretuǵın parametrlerdi izertlew. Eki x hám y ózgeriwshilerin qarayıq. x ózgeriwshiniń qabıl etetuǵın mánisleri kópligi X , y ózgeriwshiniń qabıl etetuǵın mánisler kópligi Y haqıyqıy sanlar kópliklerinen ibarat bolsın.

Anıqlama 1. Eger X kóplikten alınǵan hár bir x sanǵa qandayda bir f qaǵıyda yaki nızamǵa göre Y kópliktiń bir y sanı sáykes qoyılǵan bolsa, onda X kóplikte funkciya anıqlanǵan (berilgen) delinedi.

Bunda X kóplik funkciyanıń anıqlanıw (beriliw) oblastı, Y kóplik bolsa funkciyanıń ózgeriw oblastı, x — funkciya argumenti, ol bolsa x tiń funkciyasi delinedi. f hár bir x qa bir y ti sáykes qoyıwshı qaǵıydanı bildiredi.

Keltirilgen anıqlamadaǵı x , y hám f birlestirilip, y ózgeriwshi x tiń funkciyasi deliniwi $y = f(x)$

tárizde jazıladı hám «igrek teń ef iks» dep oqıladı.

Eger hár bir

$x (x \in X)$ qa basqa qaǵıydaǵa göre bir $y (y \in$

$Y)$ sáykes koyılса, tabiiyki basqa funkciya payda boladı, hám onı, máselen, $y = \varphi(x)$

kóriniste jazıw múmkin.

Úyreniwdiń bul basqışında oqıwshılar berilgen funkciya, onı basqa funkciyalardan ajratıp turatuǵın xarakterli qásiyetleri haqqında anıq túsiniklerge iye boladı.

3. Oqıwshılardı funkciyanıń beriliw usılları menen tanıstırıw.

Funkciya anıqlamasındaǵı hár bir x qa bir y ti sáykes qoyıwshı qaǵıyda túrli usılda: analitikalıq, tablica, grafikalıq hám basqa usıllarda bolıwı múmkin.

1) Analitikalıq usıl. Bul usılda, kóbinese x hám y ózgeriwshiler arasındaǵı baylanıs formulalar arqalı boladı. Bunda argument x tiń mánisine göre y tiń mánisi qosıw, ayırıw, kóbeytiw, bóliw hám basqa ámeller járdeminde tabıladı.

2) Tablica usılı. Bul usılda x penen y ózgeriwshiler arasındaǵı baylanıs tablica kórinisinde boladı. Máselen, kun dawamında hawa temperaturası gúzetkenimizde,

t_1 waqıtta hawa temperaturası T_1 , t_2 waqıtta hawa temperaturası T_2 hám h. t. bolsın. Nátiyjede tómendegi tablica payda boladı:

t — waqıt	t_1	t_2	t_3	t_4	...	t_n
T —temperatura	T_1	T_2	T_3	T_4		T_n

3) Bul tablica t waqıt penen hawa temperaturası T arasındaǵı baylanıstı ańlatadı, bunda t — argument, T bolsa t niń funkciyasi boladı.

4) Grafikalıq usıl. Bul usılda x hám y ózgeriwshiler arasındagı baylanıs tegisliktegi qandayda bir iymek sıızıq arqalı boladı. Máselen, tegislikte 11-sızılmada súwretlengen iymek sıızıq berilgen bolsın.

Bul basqısha oqıwshılar izertlenetuǵın funkciyanıń beriliw usılları menen, sonday-aq, grafikalıq táspirlewdi, berilgen grafigi boyınsha funkciyanı grafikalıq usılda berilgen basqa funkciyalardan ayırıwdı, parametrlerdiń funkciyanıń grafikalıq táspirleuiw xarakterine tásirin anıqlawdı úyrenedi.

4. Funkciyanı tiykarǵı qásiyetlerin izertlew: anıqlanıw oblastı hám mánisler kópligi, ósiwi hám kemiwi, belgisin saqlaytuǵın aralıqları, nol'leri, ekstremumları, juplıǵı yaqı taqlıǵı (yamasa bul qásiyetlerge iye emesligi), periodlılıǵı, shegaralanǵanlıǵı, úzliksizligi.

Funkciyanıń anıqlanıw oblastı hám mánisleri kópligi.

Anıqlama 2. Erikli ózgeriwshi x tiń qabıl etiwı mımkin bolǵan mánisleri kópligi u funkciyanıń anıqlanıw oblastı dep ataladı hám onı $D(u)$ penen belgileydi. Eriksiz ózgeriwshi u tiń qabıl etetuǵın mánisler kópligi funkciyanıń mánisleri kópligi(ózgeriw oblastı) dep ataladı hám onı $E(u)$ penen belgileydi.

Egerde funkciya qandayda bir formula menen berilgen bolsa hám onıń anıqlanıw oblastı kórsetilmese, onda erikli ózgeriwshi x tiń bul formula maǵanaǵa iye bolatuǵın barlıq mánisleri kópligi funkciyanıń anıqlanıw oblastı ekenligi názerde tutılǵan boladı.

Ayırım funkciyalardıń mánisleri kópligin tabıwda $u=f(x)$ funkciyalardıń ózgeriw oblastı

$$f(x)=a$$

teńleme sheshimge iye bolatuǵın a nıń $a \in R$ bolǵan barlıq mánisler kóplikleri biriktirilmesinen ibarat ekenliginen paydalanıw qolaylı.

Funkciyanıń beriliwi degende argumenttiń mánisleri boyınsha funkciyanıń sákes mánislerini qanday tabıwdı kórsetiw túsiniledi.

Funkciyanıń nolleri. Argument x tiń funkciyanıń mánisin nolge teńlestiretuǵın, $f(x)=0$ mánisleri funkciyanıń nolleri dep ataladı.

Shegaralanǵan funkciyalar. Qandayda bir X kóplikte $f(x)$ funkciya berilgen bolsın.

Anıqlama 3. Eger sonday turaqlı M san bar bolsa, $\forall x \in X$ ushın

$$f(x) \leq M$$

teńsizlik orınlansa, onda $f(x)$ funkciya X kóplikte joqarıdan shegaralanǵan funkciya delinedi.

Anıqlama 4. Eger sonday turaqlı m san bar bolıp $\forall x \in X$ ushın

$$f(x) \geq m$$

bolsa, onda $f(x)$ funkciya X kóplikte tómennen shegaralanǵan. funkciya delinedi.

Анықлама 5. Eger

$f(x)$ функсия X көплікте де жоғарыдан, ҳам төменнен шегараланған функсия X

ushın

$$m \leq f(x) \leq M$$

теңсізлік орынланса, онда $f(x)$ функсия X көплікте шегараланған функсия делінеді.

Жуп ҳам тақ функциалар. Қандайда бір X нақтық санлар көплігін қарайық. Eger $\forall x \in X$ ushın $-x \in X$ болса, онда X көплік O нүктеге салыстырғанда симметриялық көплік делінеді.

Айтайық O нүктеге салыстырғанда симметриялық болған X көплікте $y = f(x)$ функсия берілген болсын.

Анықлама 6. Eger қалеген $x \in X$ ushın

$$f(-x) = f(x) \quad (2)$$

теңлік орынланса, $f(x)$ жуп функция делінеді.

Анықлама 7. Eger қалеген $x \in X$ ushın

$$f(-x) = -f(x) \quad (3)$$

теңлік орынланса, $f(x)$ тақ функсия делінеді.

Жуп функцияның графигі ордината көшесіне салыстырғанда симметриялы жайласқан болады.

Тақ функцияның графигі координата басына салыстырғанда симметриялы жайласқан болады.

Көз алдымызға келтірейік $f(x)$ ҳам $g(x)$ функциялардың һәр бірі O нүктеге салыстырғанда симметриялы болған X көплікте анықланған болсын.

1°. Eger $f(x)$ ҳам $g(x)$ функциялар жуп функциялар болса, онда

$$f(x) + g(x), f(x) - g(x), f(x) + g(x), \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

2°. Eger $f(x)$ ҳам $g(x)$ функциялар тақ функциялар болса, онда

$$f(x) + g(x), f(x) - g(x),$$

функциялар тақ болады,

$$f(x) + g(x), \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

функциялар болса жуп болады.

Монотон функциялар. $y = f(x)$ функсия X көплікте анықланған болсын.

Анықлама 8. Eger argument x тің X көпліктен алынған қалеген x_1 ҳам x_2 мәнісleri ushın $x_1 < x_2$ болыуын

$$f(x_1) < f(x_2) \quad ((f(x_1) \leq f(x_2)))$$

теңсізлік орынлы екенлігі келіп шықса, онда $f(x)$ функсия X көплікте өсіуші (көмеюіуші) функсия делінеді.

Анықлама 9. Егер argument x тің X көптіктен алынған қалеген x_1 һәм x_2 мәнісleri үшін $x_1 < x_2$ екенliginen

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ (} f(x_1) \geq f(x_2) \text{)}$$

теңсізлік орынлы екенligi келіп шықса, онда $f(x)$ функciя X көптікте кемeyiwshi (оспейтуғын) функciя делinedi.

Осіwshi һәмде кемeyiwshi функciялар монотон функciялар делinedi.1

Айтaylıq $f(x)$ һәм $g(x)$ функciялар X көптікте осіwshi (кемeyiwshi) болып, C тұрақлы сан болсын. Онда:

1°. $f(x) + C$ функciя осіwshi (кемeyiwshi) болadı.

2°. $C > 0$ болғанда $C \cdot f(x)$ функciя осіwshi болadı,

$C < 0$ болғанда $C \cdot f(x)$ функciя кемeyiwshi болadı.

3°. $f(x) + g(x)$ функciя осіwshi (кемeyiwshi) болadı.

Дәwірлі функciялар. $y = f(x)$ функciя X көптікте анықланған болсын.

Анықлама 10. Егер сондай тұрақлы $T (T \neq 0)$ сан бар болса, қалеген $x \in X$ үшін

$$1. x - T \in X; x + T \in X$$

$$2. f(x + T) = f(x)$$

болса, онда $f(x)$ дәwірлі функciя делinedi. Бундағы T сан $f(x)$ функciяның дәwірі делinedi.

Айтaylıq T — қалеген

$(T \neq 0)$ пүтін сан болсын: $T = m$ ($m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$). Онда қалеген $x \in (-\infty, +\infty)$

үшін

$$x - T \in (-\infty, +\infty), x + T \in (-\infty, +\infty)$$

болып,

$$f(x + T) = f(x + T) = f(x) = f(x)$$

болadı. Демек берілген функciя дәwірлі функciя, оның дәwірі $T = m$ болadı.

1°. Егер $f(x)$ дәwірлі функciя болып, оның дәwірі T га ($T \neq 0$) тең болса,

$$T_n = nT \text{ (} n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \text{)}$$

санлар да сол функciяның дәwірі болadı.

2°. Егер

T_1 һәм T_2 санлар $f(x)$ функciяның дәwірі болса, онда $T_1 + T_2$ ($T_1 + T_2 \neq 0$) һәмде $T_1 - T_2$ ($T_1 \neq T_2$) санлар да $f(x)$

функciяның дәwірі болadı.

3°. Егер

$f(x)$ һәм $g(x)$ дәwірлі функciялар болып, олардың һәр birінің дәwірі T болса ($T \neq 0$)

онда

$$f(x) + g(x), f(x) - g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)} (g(x) \neq 0)$$

funkciyalar da dáwirli funkciyalar bolıp, T san olardıń da dáwiri boladı.

5. Funkciyanıń úyrenilgen qásiyetlerinen hár qıylı máselelerdi, dara jaǵdayda, teńlemelerdi hám teńsizliklerdi sheshiwde paydalanıw.

Bul basqısh izertlenetuǵın funkciya menen baylanıslı tiykarǵı túsiniqlerdi hám teoriyalıq qaǵıydalardı bekkemlew, sonday- aq, sáykes uqıplılıqlardı hám kónlikpelerdi qalıplestiriw basqıshı.

Bul metodikalıq sxema qálegen funkciyanı izertlew ushın ayrıqsha bir joba-baǵdarlama boladı. Materialdıń mazmunı hám oqıtıw ámeliyatı oǵan sáykes dúzetiwler kirgizetuǵını túsiniqli berilgen metodikalıq sxema ayırım funkciyalardı izertlegende (yaki oqıtıwdıń geypara basqıshında) jáne de maydalap anıqlanıwı yaki kerisinshe, joqarıda atalǵan basqıshlardıń ayırımları ulıwma bolmawı múmkin. Bul sxemadan eń áhmiyetli awısıwlar, onıń dáslepki eki punktın iske asırǵanda bolıwı múmkin.

Endi biz kelesi bapta funkciyanıń úyrenilgen qásiyetlerinen hár qıylı máselelerdi yaǵınıy teńlemelerdi hám teńsizliklerdi sheshiwde qollanıwdı qaraymız

II BAP. FUNKCIYALARDIŃ BAZI BIR QÁSIYETLERIN QOLLANIW JÁRDEMINDE TEŃLEMELER HÁM TEŃSIZLIKLERDI SHESHIW

1-§. Ózgeriwshiniń qabıl qılıwı múmkin bolǵan mánisleri kópligin qollanıw

Geyde ózgeriwshiniń qabıl qılıwı múmkin bolǵan mánisleri kópligin biliw, teńlemenin(yamasa teńsizliktiń) sheshimi joq ekenligin dálillewge, al geyde teńlemenin(yamasa teńsizliktiń) ózgeriwshiniń qabıl qılıwı múmkin bolǵan mánisleri kópliginen sandı qoyıw arqalı sheshimin tabıwǵa múmkinshilik beredi. Endi buǵan mısallar keltiremiz.

Mısalı 1. Teńlemenı

$$\sqrt{3-x} = \log_5(x-3).$$

sheshiń.

Sheshimi. Bul teńlemenin ózgeriwshiniń qabıl qılıwı múmkin bolǵan mánisleri kópligin $3-x \geq 0$ hám $x-3 > 0$ shártin qanaatlandıırıwshı barlıq x lardan ibarat. Bul bizge bos kópliki beredi. Demek teńleme sheshimge iye emes.

Juwabı: sheshimi joq.

Mısalı 2. Teńlemenı

$$\sqrt{|\sin x|} = \sqrt[4]{-|\sin x|} + \operatorname{tg} x \quad (1)$$

sheshiń.

Sheshimi. Bul teńlemeninń ózgeriwshiniń qabıl qılıwı múmkin bolǵan mánisleri kópligi, $|\sin x| \geq 0, -|\sin x| \geq 0, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ shártin bir waqıtta qanaatlandırıwshı barlıq x lardan ibarat yaǵınıy $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Bul x tıń mánislerin (1) teńlemege qoysaq, onıń oń hám shep tárepleri 0 ge teń. Al bul bolsa, barlıq $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$, onıń sheshimler bolatuǵını bildiredi.

Juwabı: $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Mısalı 3. Teńsizlikti

$$\sqrt[4]{1-x^2} + \sqrt[6]{x^4-1} < 2^x - \log_2(1+x^4). \quad (2)$$

sheshiń.

Sheshimi. Bul teńsizliktiń ózgeriwshiniń qabıl qılıwı múmkin bolǵan mánisleri kópligi, $1-x^2 \geq 0, x^4-1 \geq 0$, shártin bir waqıtta qanaatlandırıwshı barlıq x lardan ibarat. (2) teńsizliktiń ózgeriwshiniń qabıl qılıwı múmkin bolǵan mánisleri kópligi, eki $x_1 = 1$ hám $x_2 = -1$ sanlardan ibarat. $x_1 = 1$ mánisti (2) ge qoysaq, onda onıń shep tárepi 0tge teń, al oń tárepi $2 - \log_2 2 = 1$ teń, yaǵınıy $x_1 = 1$ mánisi (2) teńsizliktiń sheshimi boldı. $x_2 = -1$ manisti (2) teńsizlikke qoysaq, $x_2 = -1$, onıń sheimi emes, sebebi (2) teńsizliktiń shep tárepi 0, al oń tárepi $2^{-1} - \log_2 2 = -1/2$ teń.

Juwabı: $x = 1$.

Mısalı 4. Teńsizlikti

$$\log_5 x < \sqrt{1-x^4}. \quad (3)$$

sheshiń.

Sheshimi. Bul teńlemeninń ózgeriwshiniń qabıl qılıwı múmkin bolǵan mánisleri kópligi, $0 < x \leq 1$ shártin qanaatlandırıwshı barlıq x lardan ibarat. Túsiniqli, $x = 1$ mánisi (3) teńsizliktiń sheshimi boldı. x ushın

$0 < x < 1$ aralıqtan $\log_5 x < 0$ alamız, al $\sqrt{1-x^4} > 0$. Bunnan kelip shıǵadı,

$0 < x < 1$ aralıқтаǵı barlıq x lar (3) teńsizliktiń sheshimi boladı. *Juwabı:* $0 < x < 1$.

Mısalı 5. Teńsizlikti

$$\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} < \sqrt{3}. \quad (4)$$

sheshiń.

Sheshimi. Bul (4) teńsizliktiń ózgeriwshiniń qabıl qılıwı múmkin bolǵan mánisleri kópligi, $-3 \leq x \leq 9$ aralıқтаǵı barlıq x lar. Bul kóplikti $-3 \leq x \leq 0$ hám $0 < x \leq 9$ eki aralıqqa bólemiz. x ushın $-3 \leq x \leq 0$ aralıqtan $\sqrt{x+3} \geq 0, \sqrt[4]{9-x} \geq \sqrt[4]{9} = \sqrt{3}$ iye bolamız. Bunnan, bul $\sqrt{x+3} \geq 0, \sqrt[4]{9-x} \geq \sqrt[4]{9} = \sqrt{3}$ aralıқта (4) teńsizliktiń sheshimge iye emesligi kelip shıǵadı.

Meyli x tıń mánisleri $0 < x \leq 9$ aralıqqa tiyisli bolsın. Onda $\sqrt{x+3} > \sqrt{3}$ hám $\sqrt[4]{9-x} \geq 0$. Bunnan kelip shıǵadı, $\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} \geq \sqrt{3}$ bul aralıqtada (4) teńsizlik sheshimge iye emes.

Solay etip, (4) teńsizlik sheshimge iye emes.

Juwapı: sheshimi joq.

Eskertiw.

1. Teńlemenı sheshiwde, ózgeriwshiniń qabıl qılıwı múmkin bolǵan mánisleri kópligi tabıw shárt emes. Geyde saldarǵa ótiw ápiwayı, hám keyin tabılǵan korenlerin tekseriw jetkilikli boladı.

2. Teńsizliktiń sheshiwde, ózgeriwshiniń qabıl qılıwı múmkin bolǵan mánisleri kópligi tabıw shárt emes, al teńsizlikti sheshiwde oǵan teń kúshli teńsizlikler sistemasına ótiw kerek, bunda sistemaniń teńsizlikleriniń birewi sheshimge iye emes yamasa onıń sheshimin biliw, teńsizlikler sistemasın sheshiwge járdem beredi.

Mısalı 6. Teńsizlikti

$$\log_2(2^x + 1 - x^2) > \log_2(2^{x-1} + 1 - x) + 1. \quad (5)$$

sheshiń.

Sheshimi. Bul teńsizliktiń ózgeriwshiniń qabıl qılıwı múmkin bolǵan mánisleri kópligin tabıw jeńil emes yaǵınıy ápiwayı másele emes. Sonıń ushın basqasha jol tutamız. (5) teńsizlik tómendegi teńsizlikler sistemasına teń kúshli

$$\begin{cases} 2^x + 1 - x^2 > 0 \\ 2^{x-1} + 1 - x > 0 \\ 2^x + 1 - x^2 > 2(2^{x-1} + 1 - x). \end{cases} \quad (6)$$

Bul sistemaniń úshinshi teńsizligi $x^2 - 2x + 1 < 0$ sheshimge iye emes. Bunnan kelip shıǵadı, (6) teńsizlikler sisteması sheshimge iye emes. Demek, (5) teńsizlik sheshimge iye emes.

Juwapı: sheshimi joq.

Mısalı 7. Teńsizlikti

$$\sqrt{\sin x} < \sqrt{1 - |x| + \sin x}. \quad (7)$$

sheshiń.

Sheshimi. Bul teńsizliktiń ózgeriwshiniń qabıl qılıwı múmkin bolǵan mánisleri kópligin tabıw quramılı másele. Sonlıqtan, basqasha jol tutamız. (7) teńsizlik tómendegi teńsizlikler sistemasına teń kúshli

$$\begin{cases} \sin x \geq 0, \\ 1 - |x| + \sin x \geq 0, \\ \sin x < 1 - |x| + \sin x. \end{cases} \quad (8)$$

Bul sistemaniń úshinshi teńsizligi — $-1 < x < 1$ aralıqta barlıq x lar ushın sheshimge iye. (8) sistemaniń birinshi teńsizligi, bul aralıqtıń barlıǵında x ushın orınlı emes, al tek $0 \leq x < 1$ aralıq x ushın orınlı. $0 \leq x < 1$ aralıqtıń barlıǵı x ushın ekinshi teńsizlik orınlı. Bunnan kelip shıǵadı, (8) sistemaniń sheshimler kópligi $0 \leq x < 1$ boladı.

Juwapı: $0 \leq x < 1$.

2-§. Funkciyanıń shegaralanıwı qollanıw

Teńlemeler hám teńsizliklerdi sheshiwde, qandayda bir kóplikte funkciyanıń tómennen hám joqarıdan shegaralanıw qásiyeti úlken rol oynaydı.

Mısalı, egerde barlıq x lar ushın qandayda bir M kóplikte, $f(x) > A$ hám $g(x) < A$ teńsizligi orınlı bolsa, bunda A qandayda bir san, onda M kóplikte $f(x) = g(x)$ teńleme hám $f(x) < g(x)$ teńsizlik sheshimge iye emes. Kórinip turıptı, A sanınıń orının jiy nol oynaydı. Bul jaǵdayda M kópliginde $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalardıń belgisin saqlawı haqqında ayıladı.

Mısalı 8. Telemnenni

$$\sin(x^3 + 2x + 1) = x^2 + 2x + 3.$$

sheshiń.

Sheshimi. Qálegen x haqıyqıy sanı ushın

$$\sin(x^3 + 2x + 1) \leq 1, \quad x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 \geq 2.$$

iye bolamız.

Qálegen x haqıyqıy sanı ushın, teńlemenıń shep tárepi birden asıp ketpeytuǵınlıǵı sebepli, al oń tárepi hámme waqıt ekiden kishi emes, onda berilgen teńleme sheshimge iye emes.

Juwabı: sheshimi joq.

Mısalı 9. Telemnenni

$$x^3 - x - \sin \pi x = 0. \tag{9}$$

sheshiń.

Sheshimi. Kórinip turıptı, $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ mánisleri (9) teńlemenıń sheshimleri boladı. (9) teńlemenıń qalǵan korenlerin tabıw ushın, $f(x) = x^3 - x - \sin \pi x$ funkciyanıń taqlıǵınan, onıń sheshimlerin $x > 0$, $x \neq 1$ oblastında tabıw jetkilikli. Sebebi, eger $x_0 > 0$ bolsa onıń sheshimi boladı, onda $(-x_0)$ hám sheshimi boladı.

$x > 0$, $x \neq 1$ kóplikti eki aralıqqa bólemiz: $(0; 1)$ hám $(1; +\infty)$. (9) teńlemenı $x^3 - x - \sin \pi x$ túrinde jazamız. $(0; 1)$ aralıqta funkciya $g(x) = x^3 - x$ tek teris mánislarda qabıl etedi. Sebebi, $x^3 < x$, al funkciya $h(x) = \sin \pi x$ tek oń mánislerdi qabıl etedi. Bunnan kelip shıǵadı, (9) teńleme bul aralıqta sheshimge iye emes.

Meyli x mánisleri $(1; +\infty)$ aralıqqa tiyisli bolsın. x tıń bunday hár bir mánisleri ushın, funkciya $g(x) = x^3 - x$ oń mánislerdi qabıl etedi, al $h(x) = \sin \pi x$ funkciya hár túrli belgidegi mánislerdi qabıl etedi, sonıń menen birge $(1; 2]$ aralıqta $h(x) = \sin \pi x$ funkciya oń emes. Bunnan kelip shıǵadı, $(1; 2]$ aralıqta (9) teńleme sheshimge iye emes.

Egerde $x > 2$ bolsa, onda $|\sin \pi x| \leq 1$, $x^3 - x - \sin \pi x > 2 \cdot 3 = 6$, demek bul $(2; +\infty)$ aralıqta (9) teńlemenıń sheshimi joqlıǵın bildiredi.

Solay etip, tek $x = 0$, $x = 1$ hám $x = -1$ bular berilgen teńlemenıń sheshimi boladı.

Juwabı: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

Mısalı 10. Teńsizlikti

$$\frac{1-x}{1+x} < 2^x. \quad (10)$$

sheshiń.

Sheshimi. (10) teńsizliktiń x ózgeriwshiniń qabıl qılıwı múmkin bolǵan mánisleri kópligin, tek $x = -1$ den basqa, barlıq haqıyqıy sanlar. Ózgeriwshiniń qabıl qılıwı múmkin bolǵan mánisleri kópligin $-\infty < x < -1$, $-1 < x \leq 0$, $0 < x < +\infty$ úsh kóplikke bólemiz hám (10) teńsizlikti bul aralıqtıń hár birinde qaraymız.

Meyli $-\infty < x < -1$. Bulardıń hár biri ushın x tıń mánisi $g(x) = \frac{1-x}{1+x} < 0$, al $f(x) = 2^x > 0$. Bunnan kelip shıǵadı, bul barlıq x lar (10) teńsizliktiń sheshimi boladı.

Meyli $-1 < x \leq 0$. Bulardaǵı x tıń hár bir mánisi ushın $g(x) = 1 - \frac{2x}{1+x} < 1$, al $f(x) = 2^x \leq 1$. Bunnan, bulardan x hesh birewide, (10) teńsizliktiń sheshimi bolamaydı.

$0 < x < +\infty$. Bulardaǵı x tıń hár bir mánisi ushın $g(x) = 1 - \frac{2x}{1+x} < 1$, al $f(x) = 2^x >$

1. Bunnan, barlıq bul x mánisleri (10) teńsizliktiń sheshimi boladı.

Juwabı: $-\infty < x < -1$; $0 < x < +\infty$.

Mısalı 11. Teńlemenı

$$2\pi \sin x = |x - \pi/2|. \quad (11)$$

sheshiń.

Sheshimi. $|x - \pi/2| - |x + \pi/2|$ lardı $f(x)$ arqalı belgileymiz. Absolyut shamaniń anıqlamasınan kelip shıǵadı, $x \leq -\pi/2$ bolǵanda $f(x) = \pi$, $-\pi/2 < x < \pi/2$ bolǵanda $f(x) = -2x$ hám $x \geq \pi/2$ bolǵanda $f(x) = -\pi$. Sonlıqtan, eger $x \leq -\pi/2$ bolsa, onda (11) teńlemenı $2\pi \sin x = \pi$ túrinde jazıw múmkin yaǵınıy $\sin x = 1/2$ túrinde jazıw múmkin.

Bul teńleme $x = (-1)^n \pi/6 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ sheshimge iye. x tıń bul mánisleriniń ishinen, $x \leq -\pi/2$ shártin tek $x = (-1)^n \pi/6 + \pi n$, $n = -1, -2, \dots$ qanaatlandıradı. Eger $x \geq \pi/2$ bolsa, onda (11) teńlemenı $2\pi \sin x = -\pi$ túrinde jazaw múmkin yaǵınıy $\sin x = -1/2$. Bul tenleme $x = (-1)^{m+1} \pi/6 + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$ sheshimlerge iye. x tıń bul mánislerinen $x \geq \pi/2$ shártin qanaatlandarawshı tek $x = (-1)^{m+1} \pi/6 + \pi m$, $m = 1, 2, \dots$

$(-\pi/2; \pi/2)$ aralıqtan x tı qaraymız. Bul aralıqta (11) teńlemenı $2\pi \sin x = -2x$ túrinde jazaw múmkin yaǵınıy

$$\sin x = -\frac{x}{\pi}. \quad (12)$$

kóriniste.

Túsinikli, $x = 0$ mánisi (12) teńlemenin sheshimi boladı. Demek, berilgen teńlemeninde sheshimi. (12) teńlemenin basqa sheshimleri, $(-\pi/2; \pi/2)$ aralıqta joq ekenligin dálilleybiz.

$x \neq 0$ ushın (12) teńleme

$$\frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{\pi}.$$

teńlemege teń kúshli.

$x \in (-\pi/2; 0) \cup (0; \pi/2)$ qálegen mánisi ushın funkciya $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ tek óń mánisti qabıl etedi. Sonlıqtan (12) teńleme $(-\pi/2; 0) \cup (0; \pi/2)$ kóplikte sheshimge iye emes.

Juwabı: $x = 0$, $x = (-1)^n \pi/6 + \pi n$, $n = -1, -2, \dots$; $x = (-1)^{m+1} \pi/6 + \pi m$, $m = 1, 2, \dots$

Mısalı 12. Teńlemenı

$$\sin^5 x + \frac{1}{\cos^7 x} = \cos^5 x + \frac{1}{\sin^7 x} \quad (13)$$

sheshin.

Sheshimi. Meyli x_0 berilgen (13) teńlemenin sheshimi,

$$\frac{1}{\cos^7 x_0} - \cos^5 x_0 = \frac{1}{\sin^7 x_0} - \sin^5 x_0 \quad (14)$$

teńlik orınlı hám $|\cos x_0| < 1$ hám $|\sin x_0| < 1$ teńsizlikler orınlı. Teńsizliktin durılıqlıǵınan, (14) teńliktin shep tárepiniń sonday belgige iye ekenligin alamız

hám $\frac{1}{\cos^7 x_0}$ yaǵınıy $\cos x_0$ ta sonday belgige iye. Biraq, $\sin x_0$ hám $\cos x_0$ (14)

teńlikti qanaatlandıradı, onda olar birdey belgige iye.

(14) teńlikti v vide

$$\cos^7 x_0 \sin^7 x_0 (\sin^5 x_0 - \cos^5 x_0) = \cos^7 x_0 - \sin^7 x_0 \quad (15)$$

túrinde jazamız.

Kóbeytiwdin qısqartılǵan formulasınan paydalansaq

$$a^{2l+1} - b^{2l+1} = (a-b)(a^{2l} - a^{2l-1} + \dots + b^{2l}),$$

(15) teńlikti

$$(\sin x_0 - \cos x_0) f(x_0) = 0 \quad (16)$$

túrinde jazamız. Bunda

$$f(x_0) = (\sin x_0 \cos x_0)^7 (\sin^4 x_0 + \sin^3 x_0 \cos x_0 + \dots + \cos^4 x_0) +$$

$$+ (\sin^6 x_0 + \sin^5 x_0 \cos x_0 + \dots + \cos^6 x_0).$$

Sebebi, $\sin x_0$ hám $\cos x_0$ birdey belgige iye, onda $f(x_0) > 0$. Sonlıqtan, (16) teńlikten kelip shıǵadı, (13) teńlemenin qálegen sheshimi ushın, $\sin x_0 = \cos x_0$ teńlik durıs. Solay etip, (13) teńlemenin qálegen sheshimi

$$\sin x = \cos x \quad (17)$$

teńlemenı qanaatlandıradı.

Kórinip turıptı, (17 teńlemenıń qálegen sheshimi, (13) teńlemenıń sheshimi boladı. ‘unnan kelip shıǵadı, (13) teńleme (17) teńlemege teń kúshli. (17) teńlemenıń sheshimi $x = \pi / 4 + k\pi, n \in \mathbb{Z}$ boladı. Tek olar, olar ǵana (13) teńlemenıń sheshimi boladı.

Juwabı: $x = \pi / 4 + k\pi, n \in \mathbb{Z}$

Eskertiw. Usıǵan uqsas, mısál 12 daǵı

$$\sin^{2n-1} x + \frac{1}{\cos^{2m-1} x} = \cos^{2n-1} x + \frac{1}{\sin^{2m-1} x}$$

bolatuǵının dálillew múmkin. Bunda n,m-qalegen natural san, $\sin x = \cos x$ teń kúshli teńlemenı hám keyin bunnan ápiway bolǵan teńlemenı.

3-§. Funkciyanıń monotonlıǵın qollanıw

Funkciyanıń monotonlıq qásiyetin qollanıp teńleme hám teńsizliklerdi sheshiw, tómendegi tastıyqlawǵa tiykarlanadı.

1. Meyli T aralıqta $f(x)$ — úzliksiz hám qatań monotonlıq funkciya, onda $f(x) = S$ teńleme, unda S — berilgen turaklı(konstanta), T aralıqta, birden artıq bolmaǵan sheshimge iye bolıwı múmkin.

2. Meyli T aralıqta $f(x)$ hám $g(x)$ — úzliksiz funkciyalar, usı aralıqta $f(x)$ qatań ósiwshi, al $g(x)$ qatań kemeywshi, onda $f(x) = g(x)$ teńleme T aralıqta birden artıq bolmaǵan sheshimge iye bolıwı múmkin.

Atap ótemiz, T aralıq sıpatında $(-\infty; +\infty)$ sheksiz aralıq, $(a; +\infty)$, $(-\infty; a)$, $[a; +\infty)$, $(-\infty; b]$ aralıqlar, kesidiler, intervallarhám yarım intervallar bolıwı múmkin.

Mısalı 13. Teńlemni

$$x \cdot 2^{x^2+2x+3} = 64 \quad (18)$$

sheshiń.

Sheshimi. Kórinip turıptı, $x \leq 0$ (18) teńlemenıń sheshimi bolmaydı. Sebebi, $x \cdot 2^{x^2+2x+3} \leq 0$. $x > 0$ ushın funkciya $u = x \cdot 2^{x^2+2x+3}$ úzliksiz hám qatań ósiwshi. Bul x lar ushın, eki úzliksiz qatań oń ósiwshi funkciyalardıń $f = x$ hám $g = 2^{x^2+2x+3}$ kóbeymesindey.

Demek, $x > 0$ oblastında funkciya $u = x \cdot 2^{x^2+2x+3}$ berilgen bir noqatta, hár biri óziniń mánisin qabıl etedi. Jeńil kóriwge boladı, $x = 1$ mánisi (18) teńlemenıń sheshimi. Bunnan, onıń bul birden bir koreni boladı.

Juwabı: $x = 1$.

Mısalı 14. Teńsizlikti

$$2^x + 3^x + 4^x < 3 \quad (19)$$

sheshiń.

Sheshimi. $u = 2^x$, $u = 3^x$, $u = 4^x$ funkciyalardan hár biri, x kósherinde úzliksiz hám qatań ósiwshi. Demek sonda-aq, berilgen $u = 2^x + 3^x + 4^x$ funkciyanıńda. Jeńil kóriwge boladı, $x = 0$ bolǵanda $u = 2^x + 3^x + 4^x$ funkciya 3 mánisti qabıl etedi. Úzliksizlik hám qatań monotonlıǵınan, bul funkciya $x > 0$ bolǵanda $2^x + 3^x$

$+ 4^x > 3$, al $x < 0$ bolganda $2^x + 3^x + 4^x < 3$ alamiz. Bunnan, (19) teńsizliktiń sheshimi, barlıq $x < 0$.

Juwabı: $-\infty < x < 0$.

Mısalı 15. Teńlemenı

$$\sqrt[4]{18-x} - \sqrt{8x-2} = 2. \quad (20)$$

sheshiń.

Sheshimi. Bul (20) teńlemenıń ózgeriwshiniń qabıl qılıwı múmkin bolğan mánisleri kópligin $2 \leq x \leq 18$ aralıq boladı. Bul (20) teńlemenıń ózgeriwshiniń qabıl qılıwı múmkin bolğan mánisleri kópliginde, $f(x) = -\sqrt[8]{x-2}$ hám $g(x) = \sqrt[4]{18-x}$ funkciyalar úzliksiz hám qatań kemeywshi, bunnan, úzliksiz hám kemeywshi funkciya $h(x) = \sqrt[4]{18-x} - \sqrt[8]{x-2}$.

Sonlıqtan $h(x)$ funkciya óziniń hár bir mánisin, tek bir noqatta qabıl etedi. $h(2) = 2$ bolsa, onda $x = 2$ berilgen tenlemenıń birdtń bir koreni boladı.

Juwabı: $x = 2$.

Mısalı 16. Teńsizlikti

$$\sqrt[6]{x} + 2x^3 + \log_3(x+2) - \sqrt{1-x} < 4 \quad (21)$$

sheshiń.

Sheshimi. Bul (21) teńsizliktiń ózgeriwshiniń qabıl qılıwı múmkin bolğan mánisleri kópligin $0 \leq x \leq 1$ aralıq boladı. Bul teńsizliktiń ózgeriwshiniń qabıl qılıwı múmkin bolğan mánisleri kópliginde $f(x) = \sqrt[6]{x} + 2x^3 + \log_3(x+2) - \sqrt{1-x}$ funkciya, úzliksiz hám qatań ósiwshi. Sebebi $f(1) = 4$, onda $[0; 1)$ kópligindegi, x barlıq mánisleri, berilgen teńsizlikti.

Juwabı: $0 \leq x \leq 1$.

Mısalı 17. Teńlemenı

$$\log_2(|x-1|+1) + \sqrt[3]{(x-1)^4} = 2. \quad (22)$$

sheshiń.

$$\log_2(|x-1|+1) + \sqrt[3]{(x-1)^4} = 2. \quad (22)$$

Sheshimi. (22) teńlemenı

$$\log_2(|x-1|+1) = 2 - \sqrt[3]{(x-1)^4}$$

túrinde jazamız.

$f(x) = \log_2(|x-1|+1)$ hám $g(x) = -\sqrt[3]{(x-1)^4} + 2$ funkciyalardı qaraymız. $f(x)$ funkciya $(-\infty; 1]$ aralıqta kemeywshi hám $[1; +\infty)$ aralıqta ósiwshi. Funkciya $g(x)$ bolsa $[1; +\infty)$ kemeyiwshi hám $(-\infty; 1]$ aralıqta ósiwshi. Sebebi $[1; +\infty)$ aralıqta funkciya $f(x)$ ósedi, al funkciya $g(x)$ kemeyedi, onda bul aralıqta $f(x) = g(x)$ teńleme birewden kóp bolğan sheshimge iye. Bunday korenniń $x = 2$ sanı ekenligin, jeńil tekseriwge boladı. Sebebi, $(-\infty; 1]$ aralıqta funkciya $f(x)$ kemeyedi, al funkciya $g(x)$ ósedi, onda bul aralıqta $f(x) = g(x)$ teńlemenıń

koreni birewden artıq emes. Jeńil kóriwge boladı, bunday sannıń $x = 0$ bolatuǵınlıǵın. Solay etip, (22) berilgen teńleme eki $x_1 = 0, x_2 = 2$ korengge iye.

Juwabı: $x_1 = 0, x_2 = 2$.

Mısalı 18. Teńsizlikti

$$\sqrt[8]{2-x} > x^3 + x - 1. \quad (23)$$

sheshiń.

Sheshimi. Bul (23) teńsizliktiń ózgeriwshiniń qabıl qılıwı múmkin bolǵan mánisleri kópligi barlıq x ushın $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ aralıqta boladı. $-\sqrt{2} \leq x \leq 0$ aralıqtaǵı x barlıq mánisi berilgen (23) teńsizlik ushın sheshimi boladı. Sebebi, sonday hár bir x ushın $f(x) = \sqrt[8]{2-x^2}$ funkciyanıń teris emesligine iye bolamız, al funkciya $g(x) = x^3 + x - 1$ teris.

(23) teńsizlikti $(0; \sqrt{2}]$ aralıǵında qaraymız. Bul aralıqta $g(x)$ funkciya úzliksiz hám qatań ósiwshi bolǵanlıǵı sebepli, al funkciya $f(x)$ úzliksiz hám qatań kemeyiwshi, onda, eger $f(x) = g(x)$ teńleme bul aralıqta korengge iye, onda ol birden bir boladı. Jeńil kóriwge boladı, bul koren $x = 1$ sanı.

$(0; 1)$ aralıqtaǵı hár bir x ushın $f(x) = \sqrt[8]{2-x^2} > 1$ iye bolamız, al $g(x) = x^3 + x - 1 > 1$. Sonlıqtan, bul aralıqtaǵı hár bir x , (23) berilgen teńsizliktiń sheshimi boladı. Haır dayım x iz ushın $(1; \sqrt{2}]$ aralıqtaǵı hár bir x ushın, anıq $f(x) = \sqrt[8]{2-x^2} < 1$, al $g(x) = x^3 + x - 1 > 1$ iye bolamız. Sonlıqtan, bunday x mánisleri, (23) berilgen teńsizlikti qanaatlandırmaydı.

Solay etip, $[-\sqrt{2}; 1)$ aralıqtaǵı x barlıq mánisleri, (23) berilgen teńsizlikti qanaatlandıradı.

Juwabı: $-\sqrt{2} \leq x < 1$.

Mısalı 19. Teńleme qansha haqıyqıy korengge iye.

$$ax^3 + bx + c = 0. \quad (24)$$

Eger a hám b sanları birdey belgige iye bolsa?.

Sheshimi. a hám b sanları birdey belgige iye bolǵanlıǵı sebepli $b/a > 0$, qálegen x ushın hám $x^2 + b/a \neq 0$. $s = 0$ hám $ab > 0$ bolǵanda kórinip turıptı, (24) teńleme birden bir $x = 0$ korengge iye. Meyli $s \neq 0$. Berilgen teńlemenı

$$-\frac{a}{c}x = \frac{1}{x^2 + \frac{b}{a}} \quad (25)$$

túrinde jazamız.

$f(x) = \frac{1}{x^2 + b/a}$ funkciya hár bir $x \in (-\infty; +\infty)$ ushın, oń mánisti qabıl etedi hám $(-\infty; 0]$ aralıqta úzliksiz hám qatań ósiwshi hám $[0; +\infty)$ aralıqta úzliksiz hám

qatań kemeyiwshi. Eger $a/s > 0$ bolsa, al funkciya $g(x) = -\frac{a}{c}x$ barlıq $-\infty < x < +\infty$ san kósherinde úzliksiz hám qatań kemeyiwshi hám $x \in (-\infty; 0)$ ushın tek oń mánislerdi qabıl etedi. Al $x \in (0; +\infty)$ ushın tek teris mánislerdi. Sonlıqtan, (25) teńleme $(-\infty; 0)$ aralıqta birden bir korengge iye. Eger $a/s < 0$ bolsa, onda $g(x) = -\frac{a}{c}x$ funkciya úzliksiz hám $-\infty < x < +\infty$ balıq san kósherinde qatań ósiwshi hám $x \in (0; +\infty)$ ushın barlıq oń mánislerdi qabıl etedi hám $x \in (-\infty; 0)$ ushın teris mánislerdi. Sonlıqtan, (25) teńleme $(0; +\infty)$ aralıqta birden bir sheshimge iye.

Juwabı: birden bir koren.

4-§. Funkciyanıń grafiklerinen qollanıw

Teńlemelerdi yamasa teńsizliklerdi sheshiwde, geyde grafiklerdiń on hám shep tárepleriniń eskizin qaraw paydalı. Onda bul grafiklerdiń eskizi, sanlı kósherde qanday kópliklerge bóliwge bolatuǵının túsiniwge járdem beredi. Bunda hár birinde, tenlemniń(teńsizliktiń) sheshimi anıq boladı.

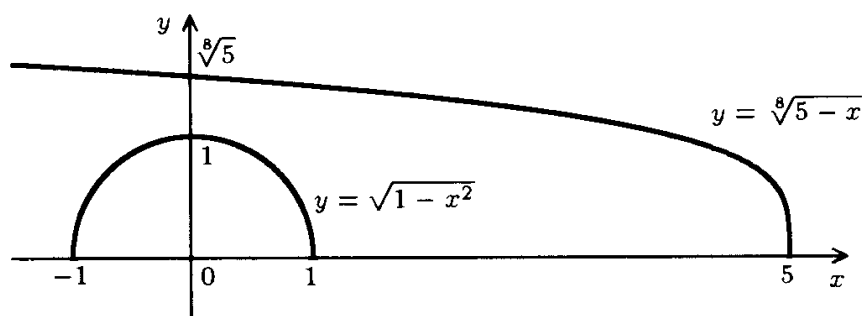
Dıqqat qoyamız, grafiklerdiń eskizinleri, tek sheshimdi tabıwǵa járdem bersin. Biraq, grafikten juwaptı jazıwǵa bolmaydı, ele onı tiykarlaw kerek.

Mısalı 20. Teńsizlikti

$$\sqrt{1-x^2} < \sqrt[8]{5-x} \quad (26)$$

sheshiń.

Sheshimi. Bul (26) teńsizliktiń ózgeriwshiniń qabıl qılıwı múmkin bolǵan mánisleri kópligi, $[-1, 1]$ aralıqtaǵı barlıq x lar. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ hám $g(x) = \sqrt[8]{5-x}$ funkciyalardıń grafikleriniń eskizi 1-sızılma kórsetilgen



1- sızılma

Sızılmadan, barlıq x lar ushın hám teńsizliktiń ózgeriwshiniń qabıl qılıwı múmkin bolǵan mánisleri kópliginen barlıq x lar ushın, (26) orınlı. Buni dálilleybiz. Hár bir $x \in [-1; 1]$ ushın $0 \leq f(x) \leq 1$ iye blamız, al sonda hár bir x ushın, $\sqrt[8]{5-x} \geq \sqrt[8]{4} > 1$ iye bolamız. Demek, $x \in [-1; 1]$ hár biri ushın $f(x) \leq 1 < g(x)$ iyemiz. Bunnan, $[-1, 1]$ aralıqtaǵı balıq x (26) teńsizliktiń sheshimi boladı.

Juwabı: $-1 \leq x \leq 1$.

Mısalı 21. Teńlemenı

$$x^2 + 2x + 3 = \sqrt{4 - x^2} \quad (27)$$

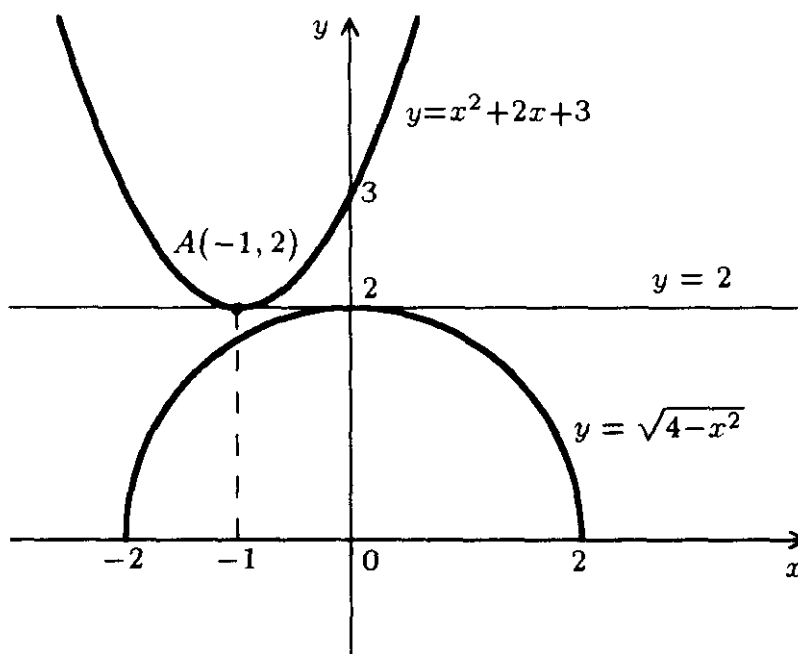
sheshiń.

Sheshimi. Bul (27) teńlemenıń ózgeriwshiniń qabıl qılıwı múmkin bolǵan mánisleri kópligi barlıq x ushın $-2 \leq x \leq 2$ aralıqta boladı. $f(x) = x^2 + 2x + 3$ hám $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ funkciyalardıń grafikleriniń eskizi 2- sızılma kórsetilgen. Provedem pryamuyu $u = 2$ tuwrını júrgizemi. Sızılmadan kelip shıǵadı, $f(x)$ funkciyanıń grafigi, bul tuwrıdan tómende jatadı, al $g(x)$ funkciyanıń grafigi joqarısında jalasqan. Bul jaǵdayda, bul grafikler $u = 2$ tuwrıǵa, hár túrli noqatlarda urınadı.

Bunnan kelip shıǵadı, teńlemenıń sheshimge iye emesligi. Bunı dálillemeiz.

Hár bir $x \in [-2; 2]$ ushın $\sqrt{4 - x^2} \leq 2$, al $x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 \geq 2$ iye bolamız. $f(x) = 2$ bolǵanda tek $x = -1$ ushın, al $g(x) = 2$ tek $x = 0$ ushın. Bul sonı bildiredi, (27) teńlemene sheshimge iye emes.

Juwabı: sheshimi joq.



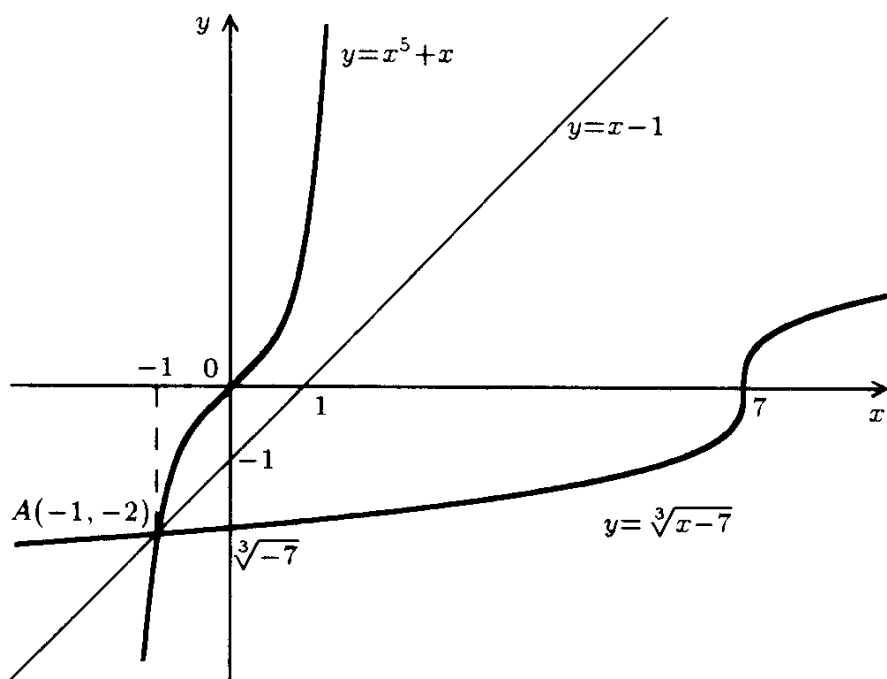
2- sızılma

Mısalı 22. Teńlemenı

$$x^5 + x = \sqrt[3]{x - 7} \quad (28).$$

sheshiń.

Sheshimi: $f(x) = x^5 + x$ hám $g(x) = \sqrt[3]{x - 7}$ funkciyalardıń grafikleriniń eskizi 3-sızılma kórsetilgen. Bunı jeńil tekseriwge boladı, $(-1; -2)$ noqatı $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalardıń grafikleriniń kesisiw noqatı boladı yaǵnıy $x = -1$ mánisi (28) teńlemenıń sheshimi boladı.



3-sızılma

$u = x - 1$ tuwrını júrgizemiz. Sızılmadan kórinedi, bul tuwrı $u = f(x)$ hám $u = g(x)$ funkciyalardıń grafikleriniń arasında jalasqan. Bul baqlaw, (28) teńlemeni sheshiminiń joqlıgın dálillewge járdemlesedi. Bunıń ushın, $(-1; +\infty)$ aralıqtaǵı barlıq x lar ushın $x^5 + x > x - 1$ hám $x - 1 > \sqrt[3]{x-7}$ teńsizliktiń durıslıgın dálilleybiz, al $(-\infty; -1)$ aralıqtaǵı barlıq x ushın $\sqrt[3]{x-7} > x - 1$ hám $x^5 + x < x - 1$ teńsizliktiń durıslıgın dálilleybiz.

Kórinip turıptı, $x^5 + x > x - 1$ teńsizlik $x > -1$ ushın durıspa, al $x^5 + x < x - 1$ teńsizlik $x < -1$ ushın. $\sqrt[3]{x-7} > x - 1$ teńsizlikti sheshemiz. Bul teńsizlik $x - 7 > (x - 1)^3$ teńsizlikke teń kúshli hám onı

$$(x + 1)[(x - 2)^2 + 2] < 0.$$

túrinde jazıw múmkin.

Bul teńsizliktiń barlıq sheshimleri $x < -1$ boladı. Dál usınday, $\sqrt[3]{x-7} > x - 1$ teńsizliktiń barlıq sheshimleri $x > -1$ bolatuǵının kóretiwge boladı.

Solay etip, talap etilgen tastıyqlaw dálillendi hám (28) teńleme birden bir $x = -1$ korengi iye.

Juwabı: $x = -1$.

Mısalı 23. Teńsizlikti

$$\frac{6}{2x+1} > \frac{1+\log_2(2+x)}{x} \quad (29)$$

sheshiń.

Sheshimi. Bul (29) teńsizliktiń ózgeriwshiniń qabıl qılıwı múmkin bolǵan mánisleri kópligi barlıq x ushın, qanaatlandırwshı shárti $x > -2$, $x \neq -1/2$, $x \neq 0$ aralıqta boladı yagınıy $-2 < x < -1/2$, $-1/2 < x < 0$, $0 < x < +\infty$ úsh

aralıqtan aralıqtan turadı. (29) teńsizlikti bul aralıqlardıń hár birinde qaraymız. Atap ótemiz, $-2 < x < 0$, $x \neq -1/2$ oblastında, ol

$$\log_2(2+x) > \frac{4x-1}{2x+1} \quad (30)$$

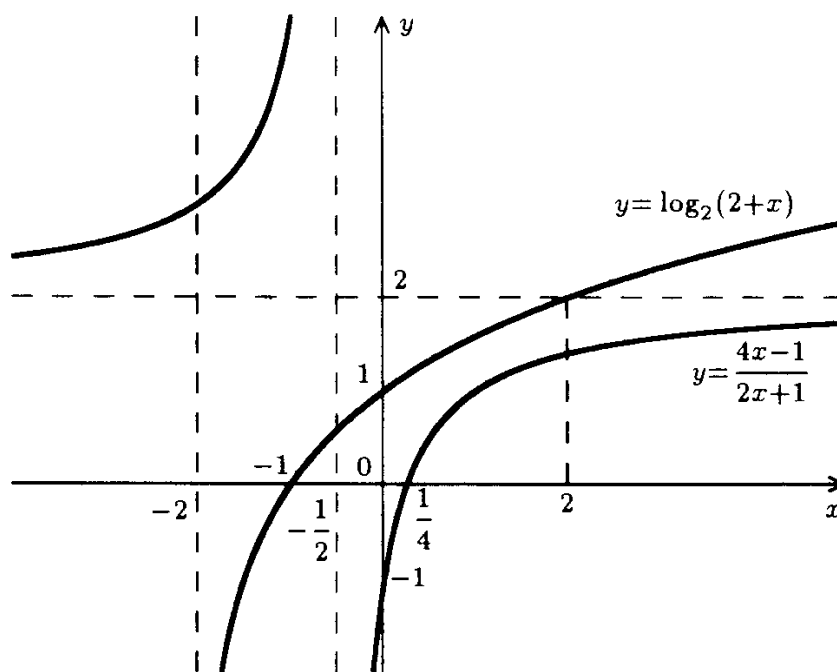
teńsizlikke teń kúshli.

Al, $x > 0$ oblastında

$$\log_2(2+x) < \frac{4x-1}{2x+1} \quad (31)$$

teńsizlikke teń kúshli.

$f(x) = \log_2(2+x)$ hám $g(x) = \frac{4x-1}{2x+1}$ funkciyalardıń grafikleriniń eskizi 4-sızılma kórsetilgen. Sızılmadan kórinip turıptı, $(-2; -1/2)$ aralıqta $f(x) > g(x)$ d $(-1/2; 0)$ hám $(0; +\infty)$ aralıqta $f(x) < g(x)$. Sonlıqtan (31) teńsizlik sheshimge iye emes, al (30) teńsizlik $(-1/2, 0)$ aralıқтағы барлық x ushın sheshimge iye.



4-Сызılма

Bunı dálilleymiz.

a) Meyli $-2 < x < -1/2$. (29) teńsizlik, bul aralıқтағы (30) teńsizlikke teń kúshli. Jeńil kóriw múmkin, bul intervadıń hár bir x ushın, tómendegi teńsizlik orınlı.

$$\log_2(2+x) < \log_2 \frac{3}{2} < 1,$$

$$\frac{4x-1}{2x+1} = 2 - \frac{3}{2x+1} > 2.$$

Bunnan kelip shıǵadı (30) teńsizlik, sonıń menen birge (29) teńsizlik $-2 < x < -1/2$ intervalda sheshimge iye emes.

b) Meyli $-1/2 < x < 0$. Onda (29) teńsizlikte (30) teńsizlikke teń kúshli. Bul intervaldaǵı hár bir x ushın

$$\log_2(2+x) > \log_2\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \log_2 \frac{3}{2} > 0,$$

$$\frac{4x-1}{2x+1} < 0.$$

Bunnan kelip shıǵadı, (30) teńsizlik, sonıń menen birge berilgen (29) teńsizliktiń $-2 < x < -1/2$ intervalda sheshimge iye bolmaydı

v) Meli $x > 0$. Bul kóplikte berilgen teńsizlik, (31) teńsizlikke teń kúshli. Kórinip turıptı, bul kóplikten, qálegen x ushın

$$\frac{4x-1}{2x+1} = 2 - \frac{3}{2x+1} < 2,$$

$$1 < \log_2(2+x).$$

teńsizlik orınlı.

Bunnan kelip shıǵadı: 1) (31) teńsizlik bunday kóplikte sheshimge iye emes, qay waqıtta $\log_2(x+2) \geq 2$ bolǵanda yaǵınıy (31) teńsizlik $2 \leq x < +\infty$ kóplikte sheshimge iye emes; 2) (31) teńsizlik bunday kóplikte sheshimge iye

emes, qay waqıtta $\frac{4x-1}{2x+1} \leq 1$ bolǵanda. Qaralıp atırǵan jaǵdayda $x > 0$ esapqa

alsaq, (31) teńsizlik $0 < x \leq 1$ kóplikte sheshimge iye emes. Endi $1 < x < 2$ intervalǵa tiyisli (31) teńsizliktiń sheshimin tabıw qaldı. Bul intervalda

$$\log_2(2+x) > \log_2 3,$$

$$\frac{4x-1}{2x+1} = 2 - \frac{3}{2x+1} > 2 - \frac{3}{5} = \frac{7}{5}.$$

Endi

$$\log_2 3 > 7/5. \quad (32)$$

sanlı teńsizliktiń durslıǵın kórsetemiz.

Hakıyqattanda, $2^5 > 2^7$ bolsa, onda $3 > 2^{7/5}$, bunnan hám kórinedi (32) teńsizlik durıs. Solay etip, $1 < x < 2$ intervalda

$$\log_2(2+x) > \log_2 3 > 7/5 > \frac{4x-1}{2x+1}.$$

iye bolamız.

Demek, (31) teńsizlik $1 < x < 2$ intervalda sheshimge iye emes. Juwmaq shıǵarsaq, berilgen teńsizliktiń sheshimi $-1/2 < x < 0$ interval ekenligin alamız.

Juwabı: $-1/2 < x < 0$.

5-§. Bazı bir teńlemelerdi hám teńsizliklerdi sistemaǵa keltirip sheshiwde, funkciyanıń shegaralanǵanlıǵınan qollanıw

1. Tenlemeler sistemasına keltiriw.

Meyli

$$f_1^2(x) + f_2^2(x) + \dots + f_k^2(x) = 0, \quad (1)$$

$$|f_1(x)| + |f_2(x)| + \dots + |f_k(x)| = 0 \quad (2)$$

kórnisindegi teńlemeler berilgen bolsın. Bul kórnistegi teńlemelerdi

$$\begin{cases} f_1(x) = 0, \\ \vdots \\ f_k(x) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

teń kúshli teńlemeler sistemasına keltiremiz.

Mısalı 1. Teńlemeni

$$x^4 + 5 \cdot 4^x + 4x^2 \cdot 2^x - 2 \cdot 2^x + 1 = 0. \quad (4)$$

sheshiń.

Sheshimi. (4) teńleni

$$(x^2 + 2 \cdot 2^x)^2 + (2^x - 1)^2 = 0, \quad (5)$$

kórnisinde jazamız. Bunnan kórinedi, (5) teńleme

$$\begin{cases} 2^x - 1 = 0, \\ x^2 + 2 \cdot 2^x = 0. \end{cases} \quad (6)$$

teńlemeler sistemasına teń kúshli.

Bul sistemaniń birinshi teńlemesi, birden bir $x=0$ sheshimge iye. Al bul sheshim (6) sistemaniń ekinshi teńlemesini qanaatlandırmaydı. Demek, (6) sistema sheshimge iye emes.

Juwapı: sheshimi joq

Mısalı 2. Teńlemeni

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{\log_{1/7}^2(x^2 - 4x + 4)} = 0. \quad (7)$$

sheshiń.

Sheshimi. (7) teńlemeni

$$|x - 3| + |\log_{1/7}(x^2 - 4x + 4)| = 0.$$

kórnisinde jazamız. Bul

$$\begin{cases} x - 3 = 0, \\ \log_{1/7}(x^2 - 4x + 4) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

teńlemeler sistemasına teń kúshli. Bul sistemaniń birinshi teńlemesi $x=3$ sheshimine iye. Tekseriw sonı kórsetedi, bul san (8) sistemaniń, ekinshi teńlemesinińde sheshimi boladı. Demek, $x=3$ mánisi (7)brilgen teńlemenińde sheshimi boladı.

Juwapı: $x=3$.

Atap ótemiz, (3) sistemaǵa, basqada bir qatar teńlemeler keltiriledi. Buǵan mısallar keltiremiz.

Mısalı 3. Teńlemeni

$$\log_2 \left(1 + \sqrt{x^4 + x^2} \right) + \log_2(1 + x^2) = 0. \quad (9)$$

sheshiń.

Sheshimi. Qálegen x ushın

$$\begin{aligned} \log_2 \left(1 + \sqrt{x^4 + x^2} \right) &\geq 0, \\ \log_2(1 + x^2) &\geq 0. \end{aligned}$$

teńsizlik orınlı. Sonıń ushın, (9) teńleme

$$\begin{cases} \log_2 \left(1 + \sqrt{x^4 + x^2} \right) = 0, \\ \log_2(1 + x^2) = 0, \end{cases}$$

teńlemeler sistemasına teń kúshli. Bul sistema birden bir $x=0$ sheshimge iye.

Juwapı: $x=0$.

2. Tensizliklerler sistemasına keltiriw.

Meyli

$$f_1^2(x) + f_2^2(x) + \dots + f_n^2(x) > 0, \quad (10)$$

$$|f_1(x)| + |f_2(x)| + \dots + |f_n(x)| > 0 \quad (11)$$

kórnisindegi teńsizlikler berilgen bolsın. Bul kórnistegi teńsizliklerdi

$$\begin{cases} f_1(x) = 0, \\ \vdots \\ f_n(x) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

teń kúshli teńlemeler sistemasına keltiremiz. Bunda, (11) hám (12) teńsizliklerdiń ózgeriwshileriniń qabıl qılıwı múmkin bolǵan mánisleri kópligi barlıq x ushın, tek (12) teńlemeler sistemasınıń sheshiminen basqası, berilgen teńsizliklerdiń sheshimi boladı.

Mısalı 4. Teńsizlikti

$$(\log_2 x - 1)^2 + (x - 2)^2 > 0. \quad (13)$$

sheshiń.

Sheshimi. Ózgeriwshiniń qabıl qılıwı múmkin bolǵan mánisleri kópligi barlıq $x > 0$ boladı. Bul (13) teńsizliktiń shimin tabıw ushın, (12) sitemanıń sheshimin, berilgen teńsizliktiń, ózgeriwshileriniń qabıl qılıwı múmkin bolǵan mánisleri kópliginen shıǵarıp taslaw kerek. Berilgen teńsizlikti, oǵan ten kúshli bolǵan

$$\begin{cases} \log_2 x - 1 = 0, \\ x - 2 = 0. \end{cases}$$

teńlemeler sisteması menen almastıramız. Bul sistema birden bir $x=2$ sheshimge iye. Demek, (13) teńsizliktiń shimin tabıw ushın, onıń ózgeriwshileriniń qabıl qılıwı múmkin bolǵan mánisleri kópliginen $x=2$ mánisti shıǵarıp taslaw kerek.

Juwapı: $0 < x < 2$; $2 < x < +\infty$.

Mısalı 5. Teńsizlikti

$$|\sin^2 x - \sin^4 x| + \sqrt{\left(\frac{x^2 - \pi^2}{1 + x^2}\right)^2} > 0. \quad (14)$$

sheshiń.

Sheshimi. (14) teńsizlikti

$$|\sin^2 x - \sin^4 x| + \left|\frac{x^2 - \pi^2}{1 + x^2}\right| > 0.$$

kórnisinde jazamız. Qálegen x ushın

$$|\sin^2 x - \sin^4 x| \geq 0, \quad \left|\frac{x^2 - \pi^2}{1 + x^2}\right| \geq 0.$$

teńsizlik orınlı. Sonlıqtan, (14) teńsizlik bir waqıtta tómendegi teńlikti qanaatlandıırıwshı x lar ushın orınlanbaydı,

$$\sin^2 x - \sin^4 x = 0, \quad \frac{x^2 - \pi^2}{1 + x^2} = 0,$$

yaǵınıy $x = \pi$ hám $x = -\pi$. Bunnan, berilgen (14) teńlemeniniń sheshimleri $x = \pi$ hám $x = -\pi$ lardan basqa barlıq x lar boladı.

Juwapı: $-\infty < x < -\pi$; $-\pi < x < \pi$; $\pi < x < +\infty$.

Atap ótemiz, geyde (12) sistemaǵa basqada teńsizlikler keltiriledi.

Mısalı 6. Teńsizlikti

$$\sqrt[4]{1 - \cos^4\left(\frac{x^2 + x}{4}\pi\right)} + 2\sqrt{1-x^4} - 1 > 0. \quad (15)$$

sheshiń.

Sheshimi. (15) teńsizlikti hám $1 - x^4 \geq 0$ shártin qanaatlandıırıwshı ózgeriwshiniń qabıl qılıwı múmkin bolǵan mánisleri kópligi, barlıq x lar boladı yaǵınıy ózgeriwshiniń qabıl qılıwı múmkin bolǵan mánisleri kópligi barlıq $x \in [-1; 1]$. Ózgeriwshiniń qabıl qılıwı múmkin bolǵan mánisleri kópligi,

$$\sqrt[4]{1 - \cos^4\left(\frac{x^2 + x}{4}\pi\right)} \geq 0, \quad 2\sqrt{1-x^4} - 1 \geq 0.$$

teńsizlik ushın orınlı.

Sonlıqtan, (15) teńsizlik ózgeriwshiniń qabıl qılıwı múmkin bolǵan mánisleri kópliginen, tek

$$\begin{cases} \sqrt[4]{1 - \cos^4\left(\frac{x^2 + x}{4}\pi\right)} = 0, \\ 2\sqrt{1-x^4} - 1 = 0. \end{cases}$$

teńlemeler sistemasın qanaatlandırıwshı barlıq x lardıń basqaları ushın. Bul sistemanıń ekinshi teńlemesiniń sheshimleri $x_1=1$ hám $x_2=-1$. Bulardan, birinshi teńlemeni, tek $x_2=-1$. Solay etip, berilgen (15) teńsizliktiń sheshimleri, barlıq x lar ushın $-1 < x \leq 1$.

Juwabı: $-1 < x \leq 1$.

3.Funkciyanıń shegaralanǵanlıǵın qollanıw. Egerde

$$f(x) = g(x) \quad (16)$$

teńlemeni sheshiwde, qandayda bir M kóplikten, barlıq x lar ushın $f(x) \leq A$ hám $g(x) \geq A$ orınlı bolıwın kórsete alsaq, onda M kóplikte (16) teńleme

$$\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases} \quad (17)$$

teńlemeler sistemasına teń kúshli boladı.

Mısalı 7. Teńlikti

$$4x^2 + 4x + 17 = \frac{12}{x^2 - x + 1}.$$

sheshiń.

Sheshimi. Bul teńlikti

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 4 = \frac{3}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}. \quad (18)$$

túrinde jazamız. Kórinip turıptı, Qálegen balıq haqıyqıy x lar ushın

$$g(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 4 \geq 4, \quad f(x) = \frac{3}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \leq 4.$$

iye bolamız

Bunnan, (18) teńleme

$$\begin{cases} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 4 = 4, \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

teńlemeler sistemasına teń kúshli boladı. Bul teńlemeler sisteması sheshimge iye emes. Sonlıqtan, berilgen tenlemede sheshimge iye emes.

Juwabı: sheshim joq

Mısalı 8. Teńlikti

$$\cos^2(x \sin x) = 1 + \log_5^2 \sqrt{x^2 + x + 1}. \quad (19)$$

sheshiń.

Sheshimi. . Bul (19) teńliktiń ózgeriwshiniń qabıl qılıwı múmkin bolǵan mánisleri kópligi barlıq haqıyqıy x boladı. Qálegen x ushın

$$\cos^2(x \sin x) \leq 1, \quad 1 + \log_5^2 \sqrt{x^2 + x + 1} \geq 1.$$

iyе боламыз. Bunnan, (19) теңлеме

$$\begin{cases} \cos^2(x \sin x) = 1 \\ \log_5^2 \sqrt{x^2 + x + 1} = 0. \end{cases} \quad (20)$$

теңлемелер системасына тең кúшлi болadı. (20) теңлемелер системасын, екiншi теңлемесiнiң шешiмлерi $x_1=0$ hám $x_2=-1$ болadı. Bul mánislerden, birinshi теңлемени тек $x_1=0$ qanaatlandıradı. Bunnan, берiлген теңлемениң birдең bir шешiмi $x_1=0$ болadı.

Juwabı: $x_1=0$.

Мисалı 9. Теңлiкти

$$\cos^7 x + \sin^5 x = 1. \quad (21)$$

шешiн.

Sheshimi. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ болғанлықтан, онда (21) теңлемени

$$\cos^7 x + \sin^5 x = \cos^2 x + \sin^2 x$$

yamasa

$$\cos^2 x (\cos^5 x - 1) = \sin^2 x (1 - \sin^3 x). \quad (22)$$

kórnisinde jazıwǵa болadı.

Qálegen haqıyqıy qálegen x ushın $\sin^2 x \geq 0$ boǵanlıqtan,

$$\cos^2 x \geq 0, \quad \cos^5 x - 1 \leq 0, \quad 1 - \sin^3 x \geq 0$$

Bolsa, онда (22) теңлеме

$$\begin{cases} \cos^2 x (\cos^5 x - 1) = 0, \\ \sin^2 x (1 - \sin^3 x) = 0. \end{cases} \quad (23)$$

теңлемелер системасына тең кúшлi болadı. (23) теңлемелер системасы

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = 1. \end{cases} \quad (24)$$

(24) теңлемелер системасын, birinshi теңлемесiнiң шешiмлерi $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$. Al, екiншi теңлемениң шешiмi $x = 2\pi m, m \in Z$ болadı. Bul barlıq шешiмлер берiлген теңлемени qanaatlandıradı. *Juwabı:* $x_1=0$.

Juwabı: $x = 2\pi m, m \in Z; \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

JUWMAQLAW

Bizge málim, ulıwma orta bilim beriw mekteplerinde, akedemiyalıq licey hám kásip-óner kolledjlerinde matematika sabaǵında funkciyalardıń qásiyetlerin qollanıw járdeminde teńlemeler hám teńsizliklerdi sheshiw qábiletin rawajlandırıw hám onı bekkemlew jolları, sonday-aq, olardı keyingi alǵan bilimlerin ańlı túrde, turmıs máselelerin sheshiwde tabıslı qollanıw ushın kónlikpe hám uqıplılıqların payda etiw- bul matematikanıń tiykarǵı máseleleriniń biri bolıp esaplanadı. Sol sebepli, bul jumıstıń tiykarǵı maqseti, oqıwshılarǵa funkciyalardıń qásiyetlerin qollanıw járdeminde teńlemeler hám teńsizliklerdi sheshiwdi úyretiw hám rawajlandırıwshı, onı bekkemlew jollarına baylanıslı metodikalıq qollanba islep shıǵıw bolıp esaplanadı. Sonıń ushında, bunda tómendegi jumıslar islendi:

- ulıwma orta bilim beriw mekteplerinde funkciyalar haqqında ulıwma túsinikler máselesi qaralıp, bunda funkciya túsiniginiń rawajlanıwınıń qısqaşa tariyxı yaǵınıy biziń dáwirimizge shekemgi funkciya túsiniginiń rawajlanıwı boyınsha tariyxıy maǵlumatlar; ulıwma orta bilim beriw mekteplerinde funkciyalardı úyretiwdiń ulıwma sxeması keltirilgen, bunda funkciyalardı úyretiwdiń metodikalıq sxema hám funkciyanıń úyrenilgen qásiyetlerinen hár qıylı máselelerdi, dara jaǵdayda, teńlemelerdi hám teńsizliklerdi sheshiwde qollanıw kórsetilgen.

- funkciyalardıń bazı bir qásiyetlerin qollanıw járdeminde teńlemeler hám teńsizliklerdi sheshiw máselesi qaralıp, buda ózgeriwshiniń qabıl qılıwı múmkin bolǵan mánisleri kópigin qollanıw boyınsha mısallar sheshiwdi úyretiwdiń metodikası keltirilgen; funkciyanıń shegaralanǵanlıǵın qollanıw yaǵınıy teńlemeler hám teńsizliklerdi sheshiwde, qandayda bir kóplikte funkciyanıń tómennen hám joqarıdan shegaralanıw qásiyeti, jiy úlken rol oynaytuǵını hám oǵan baylanıslı anıq mısallardıń sheshimleri; funkciyanıń monotonlıǵın qollanıwı, mısallar járdeminde túsindirilgen; funkciyanıń grafiklerinen qollanıwı yaǵınıy onıń teńlemeler hám teńsizliklerdi sheshiwge arnalǵan tastıyqlawlarǵa tiykarlanatuǵını hám olar járdeminde mısallardıń sheshimleri; bazı bir teńlemelerdi hám teńsizliklerdi sistemaǵa keltirip sheshiwge arnalǵan bolıp, bunda funkciyanıń shegaralanǵanlıǵınan qollanıw járdeminde sistemaǵa keltiriw boyınsha hár túrli xarakterdegi mısallardıń sheshiliwleri berilgen.

Ulıwmalastırıp aytqanıımızda, bul jumıs mazımını boyınsha metodikalıq xarakterge iye bolıp, onı usı baǵdardaǵı shuǵıllanıwshılar ushın metodikalıq qural iretinde paydalanıwına boladı

Paydalanilgan adabiyatlar.

1. Крамер В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. М.,Наука,1990.
2. Умирбеков А.У.,Шаабазов Ш.Ш.Математикани такрорланг. Т.,1989.
3. Вирченко Н. А., Ляшко И.И., Швецов К. И. График функции: Справочник. Киев, «Наука думка» 1979
4. И.П. Гурский. Функции и построение графиков. М. 1971
5. И.Х.Сивашинский. Элементарные функции и графики. М. 1975
6. Денишева Л.О. Готовимся к единому государственному экзамену. Математика. - М.: Дрофа, 2004. - 120 с.
7. Егоров А. Иррациональные неравенства. // Математика. Первое сентября, №15, 2002. - с.13-14.
8. Егоров А. Иррациональные уравнения. // Математика. Первое сентября, №5, 2002. - с.9-13.
9. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа.10-11 кл.: В двух частях. Ч.1: Учеб. для общеобразоват. учреждений. - М.: Мнемозина, 2004. - 315 с.
10. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа.10-11 кл.: В двух частях. Ч.2: Задачник для общеобразоват. учреждений. - М.: Мнемозина, 2004. - 315 с.
11. Потапов М. Как решать уравнения без ОДЗ. // Математика. Первое сентября, №21, 2003. - с.42-43.
12. Кузнецова Г.М. Программа для общеобразоват. школ, гимназий, лицеев: Математика.5-11 кл. - М.: Дрофа, 2004, 320 с.
13. <http://archiv/september.ru/mat/jurnal> «Matematika» za 1997-2005
14. http://referat.ru/folder/6/Algebraichesкая_tojdestva. Algebraicheskoe i graficheskoye resheniye uravnenii.

MAZMUNÍ

	Kirisiw.....	3
I BAP	ULIWMA ORTA BILIM BERIW MEKTEPLERINDE FUNKCIYALAR HAQQÍNDÁ ULÍWMA TÚSINIKLER.....	4
1-§.	Funkciya túsiniginiń qısqasha rawajlanıw tariyxı.....	4
2-§.	Uliwma orta bilim beriw mekteplerinde funkciyalardı úyre- tiwdiń ulıwma sxeması.....	8
II BAP	FUNKCIYALARDÍŃ BAZÍ BIR QÁSIYETLERIN QOLLANÍW JÁRDEMINDE TEŃLEMELER HÁM TEŃSIZLIKLERDI ShEShiW.....	13
1-§.	Ózgeriwshiniń qabıl qılıwı múmkin bolǵan mánisleri kópligin qollanıw.....	13
2-§.	Funkciyanıń shegaralanǵanlıǵın qollanıw.....	15
3-§.	Funkciyanıń monotonlıǵın qollanıw.....	19
4-§.	Funkciyanıń grafiklerinen qollanıw.....	22
5-§.	Bazı bir teńlemelerdi hám teńsizliklerdi sistemaǵa keltirip sheshiwde, funkciyanıń shegaralanǵanlıǵınan qollanıw.....	27
	Juwmaqlaw.....	32
	Ádebiyatlar.....	33

M. Qasimov, - Ájiniyaz atındaǵı NMPI matematika oqıtıw metodikası kafedrası docenti

A. Usakova, - Ájiniyaz atındaǵı NMPI matematika oqıtıw metodikası kafedrası assistenti.

M. Murzambetova, - Ájiniyaz atındaǵı NMPI matematika oqıtıw metodikası kafedrası assistenti.

D.Esengeldiev, - Ájiniyaz atındaǵı NMPI matematika oqıtıw metodikası kafedrası assistenti.

TEŃLEMELER HÁM TEŃSIZLIKLERDI SHESHIWDE FUNKCIYALARDÍN QÁSIYETLERINEN QOLLANÍW

(metodikalıq qollanba)

Bas redaktor: ***K.M. Koshanov***

Tex.redaktor: ***X.K. Shamuratova***

Korrektor: ***Z.B. Baltabaeva***

Operator: ***N.Nisanbaev***

Ájiniyaz atındaǵı NMPI Redakciya-baspa bólimi
Ájiniyaz atındaǵı NMPI baspaxanasında basılǵan. 2021-jıl.
Buyırtpa №0249. Nusqası 50 dana. Formatı. Kólemi 2,2 b.t
230105, Nókis qalası, P.Seytov kóshesi, Reestr № 11-3084