

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

Qo'l yozma huquqida

UDK 517.984

NABIYEV FERUZ ABDUMANNONOVICH

**Panjaradagi ba'zi uch zarrachali model operatorining spektrini topish
algoritmi va dasturiy vositasi**

5A130202-Amaliy matematika va axborot texnologiyalari

Magistr akademik darajasini olish uchun yozilgan dissertatsiya

Ilmiy rahbar:
_____dots. I.N.Bozorov

Samarqand-2014

MUNDARIJA

	Kirish.....	3
I BOB	Hilbert fazosida o'z-o'ziga qo'shma operatorlar va ularning spektri haqida. (Asosiy tushunchalar).....	7
1.1	Chiziqli fazolar.....	7
1.2	Chiziqli normalangan fazolar. Hilbert fazolari.....	10
1.3	Hilbert fazosida chiziqli chegaralangan, o'z-o'ziga qo'shma va kompakt operatorlar	14
1.4	Operatorning spektrlari haqida.....	20
1.5	I bob bo'yicha xulosa.....	24
II BOB	Panjaradagi uch zarrachali model operatorining spektral xossalari.....	25
2.1	Masalaning qo'yilishi va uning matematik modeli.....	25
2.2	Uch zarrachali model operatorining ba'zi xossalari.....	25
2.3	Asosiy natijalar va ularning matematik talqini.....	33
2.4	Maple amaliy dasturlar paketining ba'zi buyruqlari haqida.....	36
2.5	II bob bo'yicha xulosa.....	43
III bob	Uch zarrachali diskret Shrödinger operatorining spektrini aniqlashning dasturiy vositasi.....	44
3.1	Masalani yechish algoritmi.....	44
3.2	Masalani yechishning dasturiy vositasi.....	45
3.3	Olingan natijalarning tahlili.....	47
3.4	III bob bo'yicha xulosa.....	49
	Xulosa.....	50
	Foydalanilgan adabiyotlar.....	52
	Ilovalar	

Kirish

Mavzuning dolzarbligi. Zamonaviy matematik fizika, qattiq jismlar fizikasi, kvant maydonlar nazariyasi, statistik fizika va norelyavistik kvant mexanikasining bir qancha dinamik masalalarida panjaradagi model operatorining spektral xossalarini o'rganish muhim ahamiyat kasb etadi (qar. [1], [2]). Bundan tashqari norelyativistik kvant mexanikasida paydo bo'luvchi uch va ko'p zarrachali sistema gamiltonianlarining spektral xossalari uch zarrachali sistema gamiltonianlarining spektral xossalari bilan uzviy bog'langandir.

Shrödinger tenglamasi bu kvant mexanikasining asosiy tenglamasi hisoblanadi (qar. [3]). Molekulyar fizikaning asosiy qismi, hamda plazma va qattiq jism fizikasining sezilarli qismi model operatorini o'rganishdan iboratdir. Nihoyatda katta miqdordagi ishlar model operatorini o'rganishga bag'ishlangandir, jumladan, zamonaviy matematik fizikaning ensiklopediyasi hisoblanmish M. Rid va B.Saymonlarning [4]-[5] kitoblari hamda [2], [6] kitoblarda yetarli darajadagi umumiy ma'lumotlar keltirilgan. Paydo bo'lishi va tahlilini ko'rsatuvchi nostandart model operatoriga (panjaradagi model operatori) misollar [7], [8] va [9] da keltirilgan.

Tadqiqot ob'yekti va predmeti. Tadqiqot ob'yekti panjaradagi ba'zi uch zarrachali sistemaga mos model operatori bo'lib, predmeti esa plazma va qattiq jismlar fizikasi, molekulyar hamda matematik fizika kvant mexanikasi.

Tadqiqotning maqsadi va vazifalari. Magistrlik dissertatsiyasining asosiy maqsadi uch o'lchamli panjaradagi ba'zi uch zarrachali sistema gamiltonianiga mos model operatorining muhim spektrini topish algoritmini ishlab chiqish va bu algoritm asosida dasturiy ta'minot yaratishga bag'ishlangan.

Tadqiqotning asosiy masalalari va farazlari. Magistrlik dissertatsiyasida asosan quyidagi bosqichlar amalga oshiriladi:

1. Uch o'lchamli panjaradagi uch zarrachali sistema gamiltonianiga mos model operatorining matematik modeli tavsiflanadi;

2. Uch o'lchamli panjaradagi uch zarrachali sistema gamiltonianiga mos model operatorining muhim spektrini topish:

- qaralayotgan model operatorining muhim spektri o'rnini tavsiflovchi operator parametrlaridan bog'liq shartlarni topish;
- panjaradagi uchta zarrachalarning kinetik energiyasini tavsiflovchi funksiya uchun qo'yilgan shartlarda qaralayotgan model operatorining muhim spektri o'rnini topish;

3. Ishda olingan natijalarni tahlil qilish va nazariy ma'lumotlar bilan taqqoslash (adekvatligini tekshirish).

Adabiyotlar sharhi va tahlili. [1]-[9] adabiyotlar mavzuning dolzarbligi uchun foydalanildi. [1], [2], [7], [10] adabiyotlardan qaralayotgan masalaga keltiriluvchi fizik masalalarning matematik modellari olindi. [5], [11] adabiyotlardan ishda foydalanilgan ma'lumotlar, ta'rif va teoremlar, [14] adabiyotdan masalani sonli yechish usullarida foydalanildi. Maple tizimida qo'llanilgan buyruqlar [15]-[18] adabiyotdan foydalanildi. Dissertasiyada olingan natijalar [19] va [20] adabiyotlarda e'lon qilingan.

Tatqiqot usullari. Magistrlik dissertatsiyasining muhim natijalarini olishda asosan parametrغا bog'liq funksiyalarning minimumi, maximumi va qaralayotgan uch zarrachali sistema gamiltonianiga mos model operatori va unga mos Fredgolm determinantini hisoblash, uning nollarini topish hamda undagi xosmas integrallarni hisoblash usullaridan foydalanildi.

Tadqiqotning nazariy va amaliy ahamiyati. Dissertasiyada olingan natijalar amaliy-uslubiy ahamiyatga ega bo'lib, unda qo'llanilgan usullar Shrödinger operatorlari va ko'p zarrachali sistemaga mos model operatorlarining spektral

nazariyasida muhim ahamiyat kasb etadi. Olingan natijalar, tuzilgan algoritm va dasturiy ta'minotdan kvant mexanikasi, qattiq jismlar fizikasi, statistik fizika, kvant maydonlar nazariyasi, o'z-o'ziga qo'shma chiziqli operatorlar qo'zg'alishlari nazariyasi va spektral nazariyasi rivojlanishida, zamonaviy matematik va nazariy fizikaning har xil masalalarini amaliy jihatdan yechishda hamda oliy ta'lim muassasalari talabalariga maxsus fanlardan dars berishda uslubiy ko'rsatma sifatida foydalanish mumkin.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi. Magistrlik dissertatsiyasi amaliy-uslubiy xarakterga ega bo'lib, unda qaralayotgan model operatorning muhim spektri o'rnini aniqlash algoritmi tuzilgan. Tuzilgan algoritm va yaratilgan dasturiy taminot ko'p zarrachali sistemaga mos model operatorlarining muhim spektri o'rnini aniqlash imkonini beradi.

Dissertatsiyaning tuzilishi. Magistrlik dissertatsiyasi kirish, 3 ta bob, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati va ilovadan iborat bo'lib, **kirish** qismida mavzuning dolzarbligi, tadqiqotning maqsad va vazifalari, uning ahamiyati hamda dissertatsiyaning qisqacha tarkibi keltirilgan.

Dissertatsiyaning har bir bobi paragraflarga ajratilgan bo'lib, u o'zining nomerlanishi va belgilanishiga ega. Misol uchun, Ta'rif 1.5 yozuv ta'rifni 1-bobda 5-nomer bilan yoki (2.1) yozuv formulani 2-bobda 1-nomer bilan belgilanishini anglatadi. Har bir bob so'ngida xulosalar keltirilgan.

Birinchi bob 5 ta paragrafdan iborat bo'lib, unda: o'z-o'ziga qo'shma operatorlar qo'zg'alishlari nazariyasi va spektral nazariyaning asosiy tushunchalari keltirilgan. Xususan, Hilbert fazosi unda aniqlangan chiziqli chegaralangan, o'z-o'ziga qo'shma va teskari operator tushunchalari berilgan. So'ngra, operatorning spektri: muhim spektri va xos qiymatlar tushunchalari berilgan. Dissertatsiyaning asosiy natijalarini bayon qilishda foydalanilgan Hilbert fazosidagi kompakt operatorlarning muhim xossalari keltirilgan.

Ikkinchi bob 5 ta paragrafdan iborat bo'lib, unda masalaning qo'yilishi, ya'ni uch o'lchamli panjarada uch zarrachali sistema gamiltonianiga mos model operatorining matematik modeli va ishda qarayotgan operatorning ba'zi muhim xossalari hamda uning muhim spektri o'rnini topish haqidagi tasdiqlarning matematik talqini keltirilgan.

Ishning **uchinchi bobida** masalani yechish algoritmi va bu algoritm asosida dasturiy ta'minot yaratilgan hamda dasturiy ta'minot yordamida olingan natijalar nazariy ma'lumotlar bilan solishtirilgan.

Chop ettirilgan maqola yoki tezislar. Ilmiy tadqiqotda olingan natijalar quyidagi ikkita ilmiy anjumanlarda e'lon qilingan.

1. F.A. Nabiyeu. Panjaradagi ba'zi uch zarrachali model operatorining muhim spektri haqida. "Intellectual salohiyatli iqtidorli yoshlar" mavzuidagi yosh olimlar, magistrant va talabalarning an'anaviy XI respublika ilmiy-amaliy konferensiyasi materiallari III qism. Samarqand, (2014), 50-51 b.
2. F.A. Nabiyeu. Panjaradagi uch zarrachali model operatorining muhim spektri haqida. "Magistrlarning XIV ilmiy konferensiyasi materiallari". Samarqand, (2014), 49-50 b.

I BOB. Hilbert fazosida o'z-o'ziga qo'shma operatorlar va ularning spektri haqida (Asosiy tushunchalar)

Ushbu bobda ishda natijalarni olish uchun zarur bo'lgan asosiy tushunchalar: chiziqli normalangan fazolar, Hilbert fazolari va unda aniqlangan chiziqli chegaralangan, o'z-o'ziga qo'shma operatorlar va ularning spektrlari haqidagi ba'zi tushuncha hamda tasdiqlar misollar yordamida keltirilgan.

1.1. Chiziqli fazolar

Biz bu paragrafda chiziqli (algebraik) fazolar, ba'zi funksional fazolar haqidagi asosiy tushunchalar va misollar yordamida keltirilgan.

Chiziqli fazolar. Bizga bo'sh bo'lmagan E to'plam berilgan bo'lib, bu to'plamda elementlarni qo'shish va kompleks (haqiqiy) songa ko'paytirish amallari kiritilgan bo'lsin.

Agar E to'plamda kiritilgan qo'shish amali uchun ushbu

- Yopiqlik: $\forall x, y \in E$ uchun $x + y \in E$,
- Kommutativlik: $\forall x, y \in E$ uchun $x + y = y + x$,
- Assotsiativlik: $\forall x, y, z \in E$ uchun $(x + y) + z = x + (y + z)$,
- Neytral yoki nol element mavjudligi: $\exists \Theta \in E : \forall x \in V$,

$$x + \Theta = \Theta + x = x,$$

- Qarama-qarshi element mavjudligi: $\forall x \in E$ uchun $\exists -x \in V :$

$$x + (-x) = (-x) + x = \Theta.$$

va songa ko'paytirish amali uchun ushbu

- Yopiqlik: $\forall \alpha \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ va $\forall x \in E$ uchun $\alpha x \in E$,

- Assotsiativlik: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ va $\forall x \in E$ uchun $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,
- $1 \cdot x = x \quad \forall x \in E$,
- $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ va $\forall x \in E$,
- $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ va $\forall x, y \in E$.

munosabatlar bajarilsa, E to'plam **vektor fazo** yoki **chiziqli fazo** deb ataladi. Sonlar maydonining kompleks ($\mathbb{C}$) yoki haqiqiy ($\mathbb{R}$) bo'lishiga qarab, vektor fazolar mos ravishda **kompleks** yoki **haqiqiy vektor fazolar** deb yuritiladi.

Misol 1.1. $\mathbb{Z}^3$ – uch o'lchamli butun sonli (koordinatalari butun sonlardan iborat bo'lgan) panjara, $(\mathbb{Z}^3)^3 = \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3$ – to'plamda quyidagi shartni qanoatlantiruvchi barcha $f : (\mathbb{Z}^3)^3 \rightarrow \mathbb{C}$ funksiyalar to'plamini qaraymiz

$$\sum_{s \in (\mathbb{Z}^3)^3} |f(s)|^2 < \infty.$$

Bu to'plam $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^3)$ kabi belgilanadi. $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^3)$ to'plamda qo'shish va songa ko'paytirish amallarini quyidagicha kiritamiz:

- Ixtiyoriy $f, g \in \ell_2((\mathbb{Z}^3)^3)$ uchun

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x);$$

- Ixtiyoriy $\lambda \in \mathbb{C}$ va $f \in \ell_2((\mathbb{Z}^3)^3)$ uchun

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Nol element $\Theta(x) \equiv 0$, $f(\cdot)$ ga qarama-qarshi element $-f(\cdot)$ kabi aniqlanadi. Demak, $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^3)$ to'plam chiziqli fazo bo'ladi.

Darhaqiqat, agar $f \in \ell_2((\mathbb{Z}^3)^3)$ bo'lsa, yaqinlashuvchi qatorning xossalriga ko'ra ixtiyoriy $\lambda \in \mathbb{C}$ uchun $\lambda f \in \ell_2((\mathbb{Z}^3)^3)$ bo'ladi. Ixtiyoriy $f, g \in \ell_2((\mathbb{Z}^3)^3)$ uchun $f + g \in \ell_2((\mathbb{Z}^3)^3)$ ekanligi Minkovskiy tengsizligidan kelib chiqadi.

Shunday qilib, $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^3)$ fazo qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan yopiq.

Misol 1.2. $\mathbb{T}^3 \equiv (-\pi, \pi]^3$, $(\mathbb{T}^3)^3 = \mathbb{T}^3 \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{T}^3$ bo'lsin. $\mathbb{T}^3$ da qo'shish va songa ko'paytirish amallarini $\mathbb{R}^3$ fazodagi $(2\pi\mathbb{Z})^3$ modul bo'yicha qo'shish va songa ko'paytirish amallari sifatida kiritamiz, masalan $\mathbb{T}^1$ da qo'shish va songa ko'paytirish amallari

$$\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi},$$

$$14 \cdot \frac{\pi}{3} = 4\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}.$$

Ushbu $(\mathbb{T}^3)^3$ to'plam *uch o'lchamli tor* deb ataladi. $(\mathbb{T}^3)^3$ da aniqlangan, Haar ma'nosida o'lchovga ega va

$$\int_{(\mathbb{T}^3)^3} |f(q)|^2 dq < \infty$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha $f : (\mathbb{T}^3)^3 \rightarrow \mathbb{C}$ funksiyalar to'plamini qaraymiz, bunda integralda o'lchov Haar ma'nosida olinadi. Hosil bo'lgan to'plam $L_2((\mathbb{T}^3)^3)$ kabi belgilanadi. Bu to'plamda elementlarni qo'shish va songa ko'paytirish odatdagi funksiyalarni qo'shish va songa ko'paytirish kabi kiritiladi.

$L_2((\mathbb{T}^3)^3)$ to'plam qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan yopiq: haqiqatan ham, agar $f \in L_2((\mathbb{T}^3)^3)$ bo'lsa, integralning xossalariga ko'ra ixtiyoriy $\lambda \in \mathbb{C}$ uchun $\lambda f \in L_2((\mathbb{T}^3)^3)$ bo'ladi. Ixtiyoriy $f, g \in L_2((\mathbb{T}^3)^3)$ uchun $f + g \in L_2((\mathbb{T}^3)^3)$ ekanligi esa Minkovskiyning integral tengsizligidan kelib chiqadi. Nol element $\Theta(x) \equiv 0$ kabi, $f(\cdot)$ ga qarama-qarshi element $-f(\cdot)$ kabi aniqlanadi. Demak, $L_2((\mathbb{T}^3)^3)$ ham chiziqli fazo bo'ladi.

$E' - E$ chiziqli fazoning bo'sh bo'lmagan qism to'plami bo'lsin.

Ta'rif 1.1. Agar E' ning o'zi E da kiritilgan amallarga nisbatan chiziqli fazo tashkil qilsa, u holda E' to'plam E ning **qism fazosi** deyiladi.

Misol 1.3. $L_2((\mathbb{T}^3)^3)$ fazo elementlarining shunday uzluksiz vakili mavjud bo'lib, $f(p) = f(-p), p \in (\mathbb{T}^3)^3$ shartni qanoatlantiruvchi barcha funksiyalar to'plamini qaraymiz va uni $L_2^e((\mathbb{T}^3)^3)$ kabi belgilaymiz, ya'ni

$$L_2^e((\mathbb{T}^3)^3) = \{\exists f \in C((\mathbb{T}^3)^3) \subset L_2((\mathbb{T}^3)^3) : f(p) = f(-p), p \in (\mathbb{T}^3)^3\}.$$

Bu to'plam $L_2((\mathbb{T}^3)^3)$ fazoda kiritilgan amallarga nisbatan (qar. misol 1.2) chiziqli fazo tashkil qiladi va uni $L_2((\mathbb{T}^3)^3)$ fazoning **jurt qism fazosi** deb ataymiz.

1.2. Chiziqli normalangan fazolar. Hilbert fazolari

Bu paragrafda chiziqli normalangan fazolar, skalyar ko'paytmali fazolar (Evklid fazolari) va Hilbert fazolari haqida asosiy tushunchalar bayon qilingan.

Chiziqli normalangan fazolar. E chiziqli fazo bo'lsin. Agar $p: E \rightarrow \mathbb{R}$ akslantirish

- $p(x) \geq 0, \forall x \in E$ va $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- $p(\alpha x) = |\alpha| p(x), \forall x \in E$ va $\forall \alpha \in \mathbb{C}$,
- $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in E$

munosabatlarni qanoatlantirsa, unga E fazoda aniqlangan **norma** deyiladi. Norma aniqlangan chiziqli fazolar **normalangan fazolar** deyiladi. Bitta chiziqli fazo normaning aniqlanishiga ko'ra bir necha xil normalangan fazolarga aylantirilishi mumkin. Odatda norma $\|\cdot\|$ kabi belgilanadi.

Misol 1.4. $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^3)$ fazoda norma $\|f\| = \sqrt{\sum_{x \in (\mathbb{Z}^3)^3} |f(x)|^2}$

tenglik bilan aniqlanadi.

Misol 1.5. $L_2^e((\mathbb{T}^3)^3)$ va $L_2((\mathbb{T}^3)^3)$ fazolarda norma quyidagicha aniqlanadi:

$$\|f\| = \sqrt{\int_{(\mathbb{T}^3)^3} |f(q)|^2 dq}.$$

Faraz qilaylik, V – chiziqli normalangan fazo bo'lsin.

Ta'rif 1.2. Agar $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset V$ ketma-ketlik uchun Cauchy sharti bajarilsa, ya'ni $\forall \varepsilon > 0$ uchun shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ mavjud bo'lib, $\forall n, m > n_0$ lar uchun $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda bu ketma-ketlik **fundamental ketma-ketlik** yoki **Cauchy ketma-ketligi** deb ataladi.

Ta'rif 1.3. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun shunday $x_0 \in H$ element topilib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| = 0$$

munosabat bajarilsa, bu ketma-ketlik x_0 **elementga yaqinlashuvchi** (yoki qisqacha **yaqinlashuvchi**) ketma-ketlik deyiladi.

Bu ta'rifda asosan ketma-ketlik yaqinlashadigan (ketma-ketlikning limiti) element ham shu fazoga qarashli bo'lishi talab etiladi.

Osongina ko'rsatish mumkinki, istalgan yaqinlashuvchi ketma-ketlik fundamental bo'ladi. Biroq, buning aksi doimo o'rinli emas.

Ta'rif 1.4. Agar V fazodagi istalgan fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u **to'la fazo** deyiladi.

Odatda to'la normalangan fazolar **Banach fazolari** deb ataladi.

Skalyar ko'paytmali fazolar. E chiziqli fazo bo'lsin.

Ta'rif 1.5. Agar $(\cdot, \cdot): E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ funksional $\forall x, y, z \in E$ va $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ uchun ushbu munosabatlarni qanoatlantirsa:

$$1. (x, x) \geq 0, (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$2. (x + y, z) = (x, z) + (y, z);$$

$$3. (\alpha x, y) = \alpha(x, y);$$

$$4. (x, y) = \overline{(y, x)},$$

u holda E fazo **ichki (skalyar) ko'paytmali fazo** deyiladi. $(\cdot, \cdot)$ funksional esa **ichki ko'paytma** yoki **skalyar ko'paytma** deyiladi.

Misol 1.6. $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^3)$ fazoda ichki ko'paytma quyidagicha kiritiladi:

$$(f, g) = \sum_{s \in (\mathbb{Z}^3)^3} f(s) \overline{g(s)}, \quad f, g \in \ell_2((\mathbb{Z}^3)^3).$$

Misol 1.7. $L_2((\mathbb{T}^3)^3)$ fazoda ichki ko'paytma quyidagicha aniqlanadi:

$$(f, g) = \int_{(\mathbb{T}^3)^3} f(p) \overline{g(p)} dp.$$

Izoh 1.1. Agar $(\mathbb{T}^3)^3$ da Haar o'lchovidan boshqa biror sanoqli-additiv μ o'lchov kiritilgan bo'lsa, hosil bo'lgan fazo $L_2((\mathbb{T}^3)^3, d\mu)$ kabi belgilanadi.

Ichki ko'paytma aniqlangan fazolarda x va y elementlar uchun $(x, y) = 0$ tenglik bajarilsa, ular **ortogonal elementlar** deyiladi. Agar V ichki ko'paytmali fazoda $\{x_\alpha\} \subset V$ elementlar sistemasi $(x_\alpha, x_\alpha) = 1$ va $(x_\alpha, x_\beta) = 0$, $\alpha \neq \beta$ munosabatlarni qanoatlantirsa, u holda bu sistema **ortogonal normalangan sistema** (qisqacha ONS) deyiladi.

Ichki ko'paytmali fazoda norma: $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ tenglik bilan aniqlanadi.

Tasdiq 1.1. Istalgan ichki ko'paytmali V fazo $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ norma

yordamida **normalangan fazo** bo'ladi.

Hilbert fazolari

Ta'rif 1.6. Ichki ko'paytma kiritilgan va uning yordamida aniqlangan normaga nisbatan to'la chiziqli normalangan fazo **Hilbert fazosi** deyiladi.

Misol 1.8 Yuqorida qaralgan (qar. misollar 1.6, 1.7) $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^3)$ va $L_2((\mathbb{T}^3)^3)$ fazolar Hilbert fazolaridir.

Faraz qilaylik, H – Hilbert fazosi bo'lsin. Ushbu

$$B(x_0, r) = \{x \in H : \|x - x_0\| < r\}$$

to'plam H dagi markazi x_0 nuqtada va radiusi r ga teng bo'lgan **ochiq shar** deyiladi. Xuddi shunday

$$B[x_0, r] = \{x \in H : \|x - x_0\| \leq r\}$$

to'plam H dagi markazi x_0 nuqtada va radiusi r ga teng bo'lgan **yopiq shar** deyiladi. $x_0 \in H$ **nuqtaning atrofi** deganda markazi shu nuqtada bo'lgan ixtiyoriy ochiq sharni tushunamiz. $x_0 \in H$ **nuqtaning ε atrofi** deganda esa $B(x_0, \varepsilon)$ ochiq sharni tushunamiz.

Ta'rif 1.7. Agar $M \subset H$ to'plam biror $B(x_0, r)$ sharda saqlansa, u **chegaralangan to'plam** deyiladi.

Ta'rif 1.8. M to'plam H ning biror qism to'plami bo'lsin. Agar har bir $x \in M$ nuqta biror atrofi bilan M ga tegishli bo'lsa, bu to'plam H fazoda **ochiq to'plam** deyiladi.

Agar $x_0 \in H$ nuqtaning istalgan atrofida M ning biror elementi mavjud bo'lsa, u holda bu nuqta M ning **urinish nuqtasi** deyiladi. M to'plamning barcha

urinish nuqtalari to'plami uning **yopig'i** deb ataladi va $[M]$ kabi belgilanadi. Tushunarliki, $M \subset [M]$.

Ta'rif 1.9. Agar $M = [M]$ bo'lsa, M **yopiq to'plam** deyiladi.

Faraz qilaylik, H - Hilbert fazosi, M va N uning qism to'plamlari bo'lsin. Agar $M \subset [N]$ munosabat bajarilsa, N **to'plam M da zich** deyiladi. Misol uchun irratsional sonlar to'plami ratsional sonlar to'plamida zich. Xususan, agar $[M] = H$ bo'lsa, M to'plam H da zich deyiladi. Agar M to'plam H dagi birorta ham sharda zich bo'lmasa bu to'plam H ning **hech qayerida zich emas** deyiladi.

Misol uchun butun sonlar to'plami $(\mathbb{Z}^3)^3$ haqiqiy sonlar fazosi $(\mathbb{R}^1)^3$ ning hech qayerida zich emas.

Ta'rif 1.10. Agar Hilbert fazosida hamma yerda zich sanoqli to'plam mavjud bo'lsa, u **Hilbert fazosi** deyiladi.

Izoh 1.2. Yuqorida qaralgan $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^3)$ va $L_2((\mathbb{T}^3)^3)$ Hilbert fazolari separabel Hilbert fazolari bo'ladi.

1.3. Hilbert fazosida chiziqli chegaralangan, o'z-o'ziga qo'shma va kompakt operatorlar

H_1 fazoning har bir elementiga H_2 fazoning yagona elementini mos qo'yuvchi akslantirish **operator** deyiladi va $A: H_1 \rightarrow H_2$ yoki $y = Ax$ kabi belgilanadi. Agar H_1 va H_2 lar chiziqli fazolar bo'lib, istalgan $x \in H_1$ va $\lambda \in \mathbb{C}$ uchun $A(\lambda x) = \lambda Ax$ munosabat bajarilsa, A operator **bir jinsli** deyiladi. Agar istalgan $x, y \in H_1$ uchun $A(x + y) = Ax + Ay$ munosabat bajarilsa, u holda A operator **additiv** deyiladi.

Bir jinsli additiv operator chiziqli operator deyiladi.

Demak biror A operatorni chiziqlilikka tekshirish uchun uni additivlik va bir jinslilikka tekshirish lozim. Chiziqli operatorning ta'rifiga ekvivalent quyidagi ta'rifni ham keltirib o'tish foydadan xoli bo'lmaydi:

Ta'rif 1.11. Agar ixtiyoriy $x, y \in H_1$ va $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ lar uchun

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$$

tenglik bajarilsa, u holda A operator chiziqli deyiladi.

Chiziqli operator butun fazoda aniqlangan yoki uning aniqlanish sohasi butun fazoning biror qismi bo'lishi mumkin.

Lekin chiziqli operatorning aniqlanish sohasi chiziqli ko'pxillik bo'lishi talab etiladi. Operatorning aniqlanish sohasi $D(A)$ deb belgilanadi. $R(A)$ deb esa A operatorning qiymatlar to'plamini belgilaymiz:

$$R(A) = \{y \in H_2 : \exists x \in D(A), Ax = y\}.$$

Osongina ko'rsatish mumkinki, chiziqli operatorning qiymatlar sohasi ham chiziqli ko'pxillikdir.

$A: H_1 \rightarrow H_2$ chiziqli operatorning asosiy xossalaridan biri H_1 fazodagi nol elementni H_2 fazodagi nol elementga o'tkazishidir. Haqiqatan additivlik xossasidan $A(0) = A(0 + 0) = A(0) + A(0) = 2A(0)$ ekanligi kelib chiqadi. Bundan $A(0) = 0$.

Chiziqli operatorlar uchun chegaralanganlik tushunchasi odatdagi funksiyaning chegaralanganligi tushunchasidan biroz farq qiladi.

Faraz qilaylik, H_1 va H_2 Hilbert fazolari bo'lsin.

Ta'rif 1.12. Agar $A: H_1 \rightarrow H_2$ operator H_1 dagi istalgan chegaralangan to'plamni H_2 dagi chegaralangan to'plamga o'tkazsa, u chegaralangan operator

deyiladi.

Demak chegaralanmagan operator biror chegaralangan to'plamni chegaralanmagan to'plamga o'tkazadi. Chiziqli operatorlar uchun chegaralanganlik ta'rifini quyidagicha ham berish mumkin:

H_1 va H_2 Hilbert fazolari, $A: H_1 \rightarrow H_2$ chiziqli operator bo'lsin. Agar biror $M > 0$ son va istalgan $x \in H_1$ uchun

$$\|Ax\|_{H_2} \leq M\|x\|_{H_1}$$

tengsizlik bajarilsa, A chegaralangan operator deyiladi. Agar istalgan M soni uchun shunday $x_M \in H_1$ element mavjud bo'lib, $\|Ax_M\|_{H_2} > M\|x_M\|_{H_1}$ munosabat o'rinli bo'lsa, A chegaralanmagan operator deyiladi.

Agar A chegaralanmagan operator bo'lsa, uning normasini ∞ ga teng deb qabul qilamiz.

H_1 va H_2 Hilbert fazolari va $A: H_1 \rightarrow H_2$ chiziqli operator bo'lsin. Istalgan $x \in H_1$ uchun $\|Ax\|_{H_2} \leq M\|x\|_{H_1}$ munosabat bajariluvchi $M > 0$ sonlarning aniq quyi chegarasi A operatorning normasi deyiladi va u $\|A\|$ kabi belgilanadi.

Amalda operatorning normasini topishda bu ta'rifdan foydalanish ancha noqulayliklar tug'diradi.

Tasdiq 1.13. $A: H_1 \rightarrow H_2$ chiziqli operatorning normasi uchun quyidagi tengliklar o'rinli:

$$\begin{aligned} 1. \quad \|A\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{H_2}}{\|x\|_{H_1}} \\ 2. \quad \|A\| &= \sup_{\|x\|_{H_1} \leq 1} \|Ax\|_{H_2} \end{aligned}$$

$$3. \|A\| = \sup_{\|x\|_{H_1}=1} \|Ax\|_{H_2}$$

Chiziqli operatorning uzluksizligi tushunchasi sonlar o'qi $\mathbb{R}^1$ da aniqlangan funksiyalarning uzluksizligi tushunchasi bilan bir xil kiritiladi.

Ta'rif 1.16. [Geyne] H_1 va H_2 normalangan fazolar va $A: H_1 \rightarrow H_2$ chiziqli operator bo'lsin. Agar $x_0 \in H_1$ elementga intiluvchi ixtiyoriy $\{x_n\} \in H_1$ ketma-ketlik uchun $\{Ax_n\} \in H_2$ ketma-ketlik $Ax_0 \in H_2$ elementga intilsa, A operator x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi. Agar A operator H_1 fazoning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa u butun fazoda uzluksiz deyiladi.

Chiziqli operatorning bu ta'rifiga ekvivalent Cauchy ta'rifini ham keltirib o'tamiz:

Ta'rif 1.17. [Cauchy] H_1 va H_2 normalangan fazolar va $A: H_1 \rightarrow H_2$ chiziqli operator bo'lsin. Agar $x_0 \in H_1$ element uchun $\|x - x_0\| \rightarrow 0$ bo'lgan $x \in H_1$ lar uchun $\|Ax - Ax_0\| \rightarrow 0$ munosabat bajarilsa, A operator x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Ma'lumki, uzluksiz funksiya chegaralangan bo'ladi. Chiziqli operatorlar uchun esa uzluksizlik va chegaralanganlik tushunchalari ekvivalentdir.

Tasdiq 1.3 H_1 va H_2 Hilbert fazolari va $A: H_1 \rightarrow H_2$ chiziqli operator bo'lsin. Quyidagi tasdiqlar ekvivalent:

1. A operator 0 nuqtada uzluksiz.
2. A operator butun H_1 fazoda uzluksiz.
3. A operator chegaralangan.

Odatda H_1 Hilbert fazosini H_2 Hilbert fazosiga akslantiruvchi barcha chiziqli chegaralangan operatorlar to'plamini $L(H_1, H_2)$ deb belgilaymiz. Bundan

buyon alohida aytilmagan bo'lsa, A operator H Hilbert fazosida aniqlangan deganda operatorning aniqlanish sohasi ham qiymatlar sohasi ham H da ekanligini, ya'ni $A \in L(H, H)$ ni tushunamiz.

Hilbert fazosida teskari operatorlar. H_1 va H_2 Hilbert fazolari bo'lsin. A operator H_1 fazoda aniqlanib, H_2 fazoda qiymatlar qabul qilsin, ya'ni $A: H_1 \rightarrow H_2$.

Ta'rif 1.18. Agar istalgan $y \in R(A)$ uchun $Ax = y$ tenglama yagona yechimga ega bo'lsa, A operator teskarilanuvchan deyiladi. Agar A teskarilanuvchan bo'lsa, har bir $y \in R(A)$ ga $Ax = y$ tenglamaning yagona yechimi $x \in D(A)$ ni mos qo'yuvchi akslantirish A operatorning teskarisi deyiladi va A^{-1} kabi belgilanadi.

Tasdiq 1.4. Agar chiziqli operator teskarilanuvchan bo'lsa, unga teskari operator ham chiziqlidir.

Tasdiq 1.5. $A: H_1 \rightarrow H_2$ operator teskarilanuvchan bo'lishi uchun $Ax = 0$ tenglama yagona $x = 0$ yechimga ega bo'lishi zarur va yetarli.

Ta'rif 1.19. Agar $A: H_1 \rightarrow H_2$ teskarilanuvchan operator, $R(A) = H_2$ va teskari operator A^{-1} chegaralangan bo'lsa, u holda A uzluksiz teskarilanuvchan deb ataladi.

Bundan buyon biz teskarilanuvchanlik va uzluksiz teskarilanuvchanlik tushunchalari bir xil deb hisoblaymiz.

Hilbert fazosida qo'shma operatorlar

Ta'rif 1.20. H Hilbert fazosida aniqlangan T operator uchun

$$(Tx, y) = (x, T^*y)$$

shartni qanoatlantiruvchi T^ operator T operatorning Hilbert qo'shmasi deyiladi.*

Bundan buyon operatorning qo'shmasi deganda Hilbert qo'shmasini tushunamiz.

T^* operator T ning qo'shmasi deb atalishi uchun ularning aniqlanish sohalari ustma-ust tushishi lozim. Biroq umumiy holda, masalan chegaralanmagan operatorlar uchun bunday bo'lishi shart emas.

Ta'rif 1.21. Agar $D(A) = D(A^*)$ va $A = A^*$ bo'lsa, ya'ni $\forall x, y \in H$ uchun

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

tenglik bajarilsa, A o'z-o'ziga qo'shma operator deyiladi. Agar $D(A) \subset D(A^)$ va barcha $x \in D(A)$ lar uchun $Ax = A^*x$ munosabat bajarilsa, A simmetrik operator deyiladi.*

Qo'shma operatorning mavjudligi haqidagi tasdiqqa asosan $D(A^*) \subset D(A)$ bo'lishi mumkin emas.

O'z-o'ziga qo'shma operatorlarning xossalari. H – Hilbert fazosi bo'lsin.

Tasdiq 1.6. $A, B \in L(H)$ – o'z-o'ziga qo'shma operatorlar, α, β – haqiqiy sonlar bo'lsin. U holda $\alpha A + \beta B$ ham H dagi o'z-o'ziga qo'shma operator bo'ladi.

Tasdiq 1.7. Agar $A = A^*$ bo'lsa, barcha $x \in H$ lar uchun (Ax, x) haqiqiy qiymatlar qabul qiladi.

Musbat operatorlar: H Hilbert fazosi, $A \in L(H)$ bo'lsin. 1.7 tasdiqqa ko'ra (Ax, x) kvadratik forma haqiqiy qiymatlar qabul qiladi. Bundan foydalanib, musbat operator tushunchasini kiritish mumkin.

Ta’rif 1.22. Agar 1) $A = A^*$, 2) $\forall x \in H$ uchun $(Ax, x) \geq 0$ munosabatlar o'rinli bo'lsa, A operator **nomanfiy operator** deyiladi. Agar A nomanfiy operator va barcha $0 \neq x \in H$ uchun $(Ax, x) > 0$ bo'lsa, A **musbat operator** deyiladi.

Bundan buyon qisqalik uchun qat'iy musbat operatorlarni ham nomanfiy operatorlar deb ataymiz.

Istalgan nomanfiy haqiqiy sonning yagona nomanfiy kvadrat ildizi mavjud. Chiziqli operatorlar ham xuddi shunday xossaga ega. Agar biror B musbat operator uchun $B^2 = A$ tenglik bajarilsa, B operator A ning **kvadrat ildizi** deyiladi.

Operatorlarning musbatligi tushunchasi ikkita operatorni taqqoslash imkonini beradi.

Ta’rif 1.23. Agar $A, B \in L(H)$ operatorlar uchun $A - B \geq 0$ munosabat bajarilsa, $A \geq B$ deyiladi.

Kompakt operatorlar: Faraz qilaylik, H_1, H_2 - Hilbert fazolari, $A: H_1 \rightarrow H_2$ chiziqli chegaralangan operator bo'lsin.

Ta’rif 1.24. Agar A operator H_1 fazodagi ixtiyoriy chegaralangan to'plamni H_2 fazodagi nisbiy kompakt to'plamga o'tkazsa, u kompakt operator deyiladi.

Boshqacha aytganda, H_1 fazodagi ixtiyoriy chegaralangan to'plamning operator ta'siridagi aksi nisbiy kompakt bo'lsa, bu operator kompakt deyiladi.

1.4 Operatorning spektrlari haqida

H - Hilbert fazosi, $A: H \rightarrow H$ biror chiziqli chegaralangan operator bo'lsin.

Ta’rif 1.25. Biror $z \in \mathbb{C}$ uchun $Ax = zx$ tenglama noldan farqli $x \in H$

yechimga ega bo'lsa, z soni A operatorning xos qiymati deyiladi, unga mos nolmas yechim xos vektor deyiladi.

Ta'rif 1.26. Agar $z \in \mathbb{C}$ son uchun $A - zI$ operatorning teskarisi mavjud bo'lib, H ning hamma yerida aniqlangan bo'lsa, z soni A operatorning regulyar nuqtasi deyiladi, $R_z(A) = (A - zI)^{-1}$ operator esa A operatorning z nuqtadagi rezolventasi deyiladi. Barcha regulyar nuqtalar to'plami $\rho(A)$ orqali belgilanadi.

Ta'rif 1.27. A operatorning regulyar bo'lmagan barcha nuqtalar to'plami A operatorning spektri deyiladi va $\sigma(A)$ orqali belgilanadi.

Spektr qanday nuqtalar to'plamidan iborat bo'lishi mumkin?

1. $A - zI$ operator teskarilanuvchan emas. Demak $(A - zI)x = 0$ tenglama nolmas yechimga ega. Bu holda z soni A operatorning xos qiymati, x esa xos vektori deyiladi.

2. $A - zI$ operatorning teskarisi mavjud, lekin chegaralanmagan. Bu holda z soni A operatorning muhim spektriga tegishli deyiladi.

3. $A - zI$ operatorning teskarisi mavjud, chegaralangan, lekin $A - zI$ ning qiymatlar sohasi butun fazoga teng emas. Bu holda z soni qoldiq spektrga tegishli deyiladi.

A operatorning z xos qiymatiga mos keluvchi xos vektorlaridan hosil qilingan fazoning o'lchami z xos qiymatning karraligi deyiladi. Agar z ning karraliligi 1 ga teng bo'lsa, u oddiy xos qiymat, aks holda karrali xos qiymat deb ataladi. A operatorning chekli karrali va yakkaalangan xos qiymatlari to'plamini diskret spektr deb ataymiz va $\sigma_{disc}(A)$ deb belgilaymiz. A operatorning muhim spektrini $\sigma_{ess}(A)$ deb, qoldiq spektrini esa $\sigma_{res}(A)$ deb belgilaymiz.

Endi H Hilbert fazosida aniqlangan A chiziqli chegaralangan operatorning spektr va regulyar nuqtalari haqidagi quyidagi tasdiqlarni keltiramiz.

Tasdiq 1.8. Agar $A \in L(H)$ va $|z| > \|A\|$ bo'lsa, u holda z *regulyar nuqta* bo'ladi.

Tasdiq 1.9. Agar $A \in L(H)$ bo'lsa, u holda $\sigma(A)$ – *yopiq to'plamdir*.

Umumiy holda o'z-o'ziga qo'shma operatorlarning uzluksiz spektri haqida Weylning quyidagi tasdiqsi o'rinli.

Tasdiq 1.10. $z \in \mathbb{C}$ soni A operatorning muhim spektriga tegishli bo'lishi uchun H da shunday $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ONS topilib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A - zI)\phi_n = 0$$

bo'lishi zarur va yetarli.

Tasdiq 1.11. H - Hilbert fazosi va $A \in L(H)$. U holda $R_z(A)$ $\rho(A)$ to'plamda analitik, operator qiymatli ($L(H)$) qiymatli funksiya bo'ladi va ixtiyoriy $\lambda, \mu \in \rho(A)$ uchun $R_\lambda(A)$ va $R_\mu(A)$ operatorlar o'rin almashtirish xossasiga ega. Shuningdek

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\mu - \lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A).$$

Tasdiq 1.12. H - Hilbert fazosi va $A \in L(H)$. U holda

$$\sigma(A^*) = \{z \mid \bar{z} \in \sigma(A)\} \quad \text{va} \quad R_{\bar{z}}(A^*) = R_z(A).$$

O'z-o'ziga qo'shma operatorning spektri

H Hilbert fazosi, $A \in L(H)$ o'z-o'ziga qo'shma operator bo'lsin. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$M = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x), \quad m = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x).$$

M va m sonlari mos ravishda A operatorning yuqori va quyi chegarasi deyiladi.

Tasdiq 1.13. $\|A\| = \max\{|m|, |M|\}$.

Ma'lumki operatorning $\sigma(A)$ spektri $\|A\|$ radiusli doira ichida saqlanadi. O'z-o'ziga qo'shma operatorlar uchun esa bu baholash yanada aniqroq.

Tasdiq 1.14. $\sigma(A) \subset [m, M]$. Shuningdek, $m, M \in \sigma(A)$.

Tasdiq 1.15. A - H Hilbert fazosidagi o'z-o'ziga qo'shma operator bo'lsin.

U holda

- A qoldiq spektrga ega emas;
- $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$;
- A operatorning har xil xos qiymatlariga mos keluvchi xos vektorlari ortogonal.

1.5. I bob bo'yicha xulosa

I bobda ishda qo'yilgan masalani yechishda kerak bo'ladigan asosiy tushunchalar: chiziqli normalangan fazolar, Hilbert fazolari va unda aniqlangan chiziqli chegaralangan, o'z-o'ziga qo'shma operatorlar va ularning spektrlari haqidagi ta'riflar hamda tasdiqlar misollar yordamida keltirilgan.

BOB. Panjaradagi uch zarrachali model operatorining spektral xossalari

Mazkur bobda masalaning qo'yilishi, uning matematik modeli va uni yechish algoritmi hamda kutilayotgan natijalarning qisqacha matematik talqini keltirilgan.

2.1 Masalaning qo'yilishi va uning matematik modeli

Masalaning qo'yilishi. $L_2((\mathbb{T}^3)^2) - (\mathbb{T}^3)^2$ da aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalarning Hilbert fazosida aniqlangan uch o'lchamli butun sonli panjara $\mathbb{Z}^3$ dagi uch zarrachali sistema gamiltonianiga mos quyidagi model operatorni qaraymiz

$$H = H_0 - \mu_1 V_1 - \mu_2 V_2, \quad (2.1)$$

bunda

$$(H_0 f)(p, q) = E(p - q) f(p, q),$$

$$(V_1 f)(p, q) = \int_{\mathbb{T}^3} f(s, q) ds, \quad (V_2 f)(p, q) = \int_{\mathbb{T}^3} f(p, s) ds,$$

$E(\cdot) - \mathbb{T}^3$ da aniqlangan va $E(p) \geq cp^2$, $p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy uzluksiz funksiya, μ_1, μ_2 va c musbat sonlar.

2.2. Uch zarrachali model operatorining ba'zi xossalari

Biz ushbu paragrafda (2.1) tenglik bilan aniqlangan H model operatorining ba'zi muhim xossalarni keltiramiz.

Lemma 2.1. (2.1) tenglik bilan aniqlangan H operator $L_2((\mathbb{T}^3)^2)$ Hilbert fazosida chiziqli chegaralangan, o'z-o'ziga qo'shma operator bo'ladi.

Isbot. Chiziqliligi. H operatorning chiziqliligini ta'rif 1.12 bo'yicha ya'ni ixtiyoriy $f, g \in L_2((\mathbb{T}^3)^2)$ va $\alpha, \beta \in C$ lar uchun $H(\alpha f + \beta g) = \alpha Hf + \beta Hg$ tenglik bajarilishini ko'rsatamiz.

$$\begin{aligned}
H(\alpha f + \beta g)(p, q) &= E(p - q)(\alpha f + \beta g)(p, q) - \\
&- \mu_1 \int_{\mathbb{T}^3} (\alpha f + \beta g)(s, q) ds - \mu_2 \int_{\mathbb{T}^3} (\alpha f + \beta g)(p, s) ds = \\
&= E(p - q)(\alpha f(p, q) + \beta g(p, q)) - \mu_1 \int_{\mathbb{T}^3} (\alpha f(s, q) + \beta g(s, q)) ds - \\
&- \mu_2 \int_{\mathbb{T}^3} (\alpha f(p, s) + \beta g(p, s)) ds = \alpha E(p - q) f(p, q) + \beta E(p - q) g(p, q) - \\
&- \alpha \mu_1 \int_{\mathbb{T}^3} f(s, q) ds - \beta \mu_1 \int_{\mathbb{T}^3} g(s, q) ds - \alpha \mu_2 \int_{\mathbb{T}^3} f(p, s) ds - \beta \mu_2 \int_{\mathbb{T}^3} g(p, s) ds.
\end{aligned}$$

Oxirgi ifodada qo'shiluvchilarni α va β larga nisbatan guruhlab, quyidagiga ega bo'lamiz.

$$\begin{aligned}
H(\alpha f + \beta g)(p, q) &= \alpha (E(p - q) f(p, q) - \mu_1 \int_{\mathbb{T}^3} f(s, q) ds - \mu_2 \int_{\mathbb{T}^3} f(p, s) ds) + \\
&+ \beta (E(p - q) g(p, q) - \mu_1 \int_{\mathbb{T}^3} g(s, q) ds - \mu_2 \int_{\mathbb{T}^3} g(p, s) ds).
\end{aligned}$$

Bundan

$$H(\alpha f + \beta g)(p, q) = \alpha Hf(p, q) + \beta Hg(p, q)$$

tenglikni hosil qilamiz. Demak, H chiziqli operator ekan.

Chegaralanganligi. H operatorning ta'rif 1.14 ga ko'ra chegaralanganligini ko'rsatish uchun uning chiziqliligidan H_0 va V_l , $l=1,2$ operatorlarning har

birining chegaralanganligini ko'rsatish yetarli.

$$\begin{aligned}\|H_0 f\|^2 &= \int_{\mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{T}^3} |H_0 f(p, q)|^2 dp dq = \int_{\mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{T}^3} |E(p, q) f(p, q)|^2 dp dq = \\ &= \int_{\mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{T}^3} |E(p, q)|^2 |f(p, q)|^2 dp dq;\end{aligned}$$

$E(\cdot)$ – funksiya shartiga ko'ra $\mathbb{T}^3$ ga aniqlangan uzluksiz funksiya bo'lganligi uchun shunday $M > 0$ soni topilib, $|E(p)| \leq M$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Shunday qilib, quydagi munosabatga ega bo'lamiz

$$\|H_0 f\|^2 = \int_{\mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{T}^3} |E(p, q)|^2 |f(p, q)|^2 dp dq \leq \mu^2 \int_{\mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{T}^3} \|f(p, q)\|^2 dp dq = \mu^2 \|f\|^2$$

Demak, H_0 - chegaralangan operator ekan.

Endi V_l operatorning chegaralanganligini ko'rsatish uchun dastlab V_1 operatorning chegaralanganligini ko'rsatamiz

$$\begin{aligned}\|V_1 f\|^2 &= \int_{\mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{T}^3} |(v, f(p, q))|^2 |f(p, q)|^2 dp dq = \int_{\mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{T}^3} |\mu_1 \int_{\mathbb{T}^3} f(p, s) ds|^2 dp dq = \\ &= \mu_1^2 \int_{\mathbb{T}^3} dq \int_{\mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{T}^3} |f(p, s) ds|^2 dp = (2\pi)^3 \mu_1^2 \int_{\mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{T}^3} |f(p, s) ds|^2 dp \leq \\ &\leq \left[(2\pi)^{\frac{3}{2}} \mu_1 \right]^2 \int_{\mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{T}^3} |f(p, q)|^2 ds dp = \left[(2\pi)^{\frac{3}{2}} \mu_1 \right]^2 \|f\|^2.\end{aligned}$$

Bundan $\|V_1\| \leq (2\pi)^{\frac{3}{2}} \mu_1$ ekanligi kelib chiqadi demak, V_1 operator ham chegaralangan ekan. Shunga o'xshash V_2 operatorning chegaralanganligi ko'rsatiladi.

O'z-o'ziga qo'shmaligi. H operator o'z-o'ziga qo'shma operator ekanligi ta'rif 1.21 bo'yicha, ya'ni ixtiyoriy $f, g \in L_2((\mathbb{T}^3)^2)$ lar uchun $(Hf, g) = (f, Hg)$ tenglik

bajarilishini ko'rsatamiz. H operator chiziqliligidan H_0 va V_l , $l=1,2$ operatorlarning har biri o'z-o'ziga qo'shmaligini ko'rsatish yetarli.

$$\begin{aligned}(H_0 f, g) &= \int_{\mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{T}^3} (H_0 f)(p, q) \overline{g(p, q)} dp dq = \\ &= \int_{\mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{T}^3} E(p, q) (p, q) \overline{g(p, q)} dp dq = \int_{\mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{T}^3} f(p, q) \overline{E(p, q) g(p, q)} dp dq.\end{aligned}$$

Bundan $(Hf, g) = (f, Hg)$ tenglikka ega bo'lamiz.

Endi V_1 operatorning o'z-o'ziga qo'shmaligini ko'rsatamiz.

$$\begin{aligned}(V_1 f, g) &= \int_{\mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{T}^3} (V_1 f)(p, q) \overline{g(p, q)} dp dq = \\ &= \int_{\mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{T}^3} \left\{ \mu_1 \int_{\mathbb{T}^3} f(p, q) ds \right\} \overline{g(p, q)} dp dq =\end{aligned}$$

Oxirgi ifodada haqiqiy sonining qo'shmasi o'ziga tengligi yig'indining qo'shmasi qo'shmalar yig'indisiga tengligi hamda integral belgisi ostidagi s va g o'zgaruvchilarning o'zaro almashtirib uni quydagicha ifodalaymiz.

$$(V_1 f, g) = \int_{\mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{T}^3} f(p, q) \left\{ \mu_1 \int_{\mathbb{T}^3} \overline{g(p, s)} ds \right\} dp dq$$

Bundan $(V_1 f, g) = (f, V_1 g)$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak, V_1 o'z-o'ziga qo'shma operator ekan. Shunga o'xshash V_2 operatorning o'z-o'ziga qo'shmaligini ko'rsatish mumkin.

H model operatorning muhim spektri haqida

Ushbu ishning asosiy maqsadi (2.1) formula orqali aniqlangan H model operatorning spektrini (muhim spektrini) aniqlovchi algoritm tuzish. Bu algoritm

asosida Maple amaliy dasturlar paketida dasturiy ta'minot yaratish hamda turli misollarda tekshirib, nazariy ma'lumotlar bilan solishtirishdan iborat.

$L_2(\mathbb{T}^3)$ fazoda quyidagi formula bilan aniqlangan h_α operatorlarni

$$h_\alpha = h_0 - \mu_\alpha v, \quad \alpha \in \{1, 2\}, \quad (2.2)$$

$$(h_0 f)(p) = \varepsilon(p) f(p), \quad (vf)(p) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} f(s) ds$$

va quyidagi belgilashlarni kiritamiz

$$m = \min_{p \in \mathbb{T}^3} \varepsilon(p), \quad M = \max_{p \in \mathbb{T}^3} \varepsilon(p).$$

Lemma 2.2 h_0 operatorning uzluksiz spektri $[m, M]$ kesmadan iborat.

Isbot. Muhim spektr haqidagi Veyl kriteriyasiga asosan $z \in \sigma_{cont}(h_0)$ bo'lishi uchun shunday $\{f_n\}$ ortonormal sistema topilib $\|(h_0 - z)f_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ bo'lishi zarur va yetarli.

Faraz qilaylik z soni $[m, M]$ segmentdagi ixtiyoriy son bo'lsin, $\{f_n\}$ ortonormal sistema sifatida quyidagi funksiyalar sistemasini olamiz:

$$f_n(p) = \frac{\chi_{v_n}(p)}{\sqrt{\mu(v_n)}}$$

Bu yerda

$$v_n = \{p \in \mathbb{T}^3 : \frac{1}{n+1} \leq \varepsilon(p) - z < \frac{1}{n}\}, n \in N, n > N_0$$

(N_0 soni shunday tanlanadiki, ixtiyoriy $n > N_0$ uchun $v_n \subset [m, M]$ munosabat o'rinli bo'ladi). χ_{v_n} esa v_n ning xarakteristik funksiyasi.

$n \rightarrow \infty$ da ushbu

$$\|(h_0 - z)f_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \quad (2.3)$$

munosabatni ko'rsatamiz.

Buning uchun $(h_0 - z)f_n$ ning normasini quyidagicha baholaymiz

$$\|(h_0 - z)f_n\|^2 = \int_{V_n} |f_n(p)|^2 dp = \sup_{p \in V_n} |\mathcal{E}(p) - z|^2 = \frac{1}{n^2} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Shunday qilib biz ixtiyoriy $n > N_0$ uchun

$$\|(h_0 - z)f_n\| \leq \frac{1}{n}$$

tengsizlikni hosil qildik. Bu tengsizlik (2.3) munosabatning o'rinli ekanligini ko'rsatadi, ya'ni $z \in \sigma_{cont}(h_0)$ sonining ixtiyorligidan esa

$$\sigma_{cont}(h_0) \supset [m, M] \quad (2.4)$$

ekanligi kelib chiqadi.

Bizga ma'lumki,

$$\rho(h_0) \subset \mathbb{C} \setminus [m, M] \quad (2.5)$$

munosabat o'rinli. (2.3) va (2.4) munosabatlardan operatorning muhim spektri uchun

$$\sigma_{cont}(h_0) = [m, M]$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Lemma 2.2 to'liq isbot bo'ldi.

h_0 operator $L_2(\mathbb{T}^3)$ fazoda $\mathcal{E}(\cdot)$ funksiyaga ko'paytirish operatori hamda v kompakt operator bo'lganligi uchun Veyl (muhim spektr turg'unligi haqidagi) teoremasiga ko'ra h operatorning uzluksiz spektri $\sigma_{cont}(h)$ (v operatoridan bog'liqsiz) h_0 operatorning spektri $\sigma(h_0)$ bilan mos tushadi.

Bundan esa

$$\sigma_{cont}(h) = [m, M] \quad (2.6)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Lemma 2.3. v operator nomanfiy, ya'ni ixtiyoriy $f \in L_2(T^3)$ uchun $(vf, f) \geq 0$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Isbot. v operatorning nomanfiyligini ko'rsatish uchun ixtiyoriy $f \in L_2(T^3)$ uchun $(vf, f) \geq 0$ tengsizlik bajarilishini ko'rsatamiz.

$$\begin{aligned} (vf, f) &= \int_{T^3} (vf)(q) \overline{f(q)} dq = \int_{T^3} \left\{ \int_{T^3} f(s) ds \right\} \overline{f(q)} dq = \\ &= \left\{ \int_{T^3} f(s) ds \int_{T^3} \overline{f(q)} dq \right\} = \left\{ \int_{T^3} f(s) ds \int_{T^3} \overline{f(s)} ds \right\} = \left| \int_{T^3} f(s) ds \right|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Shunday qilib, $(vf, f) \geq 0$ tengsizlik bajariladi, ya'ni ixtiyoriy $f \in L_2(T^3)$ uchun v nomanfiy operator bo'ladi.

Lemma 2.4. (2.2) formula bilan aniqlangan h_α , $\alpha = 1, 2$ operator $(M, +\infty)$ integralda xos qiymatga ega emas.

Isbot. Ma'lumki, ixtiyoriy $\mu_\alpha > 0$, $\alpha = 1, 2$ va $f \in L_2(T^3)$ lar uchun

$$(h_\alpha f, f) = (h_0 f, f) - \mu_\alpha (vf, f)$$

tenglik o'rinli. Lemma 2.3 ga ko'ra $(vf, f) \geq 0$ bo'lganligi uchun oxirgi tenglikdan ushbu

$$\begin{aligned} (h_\alpha f, f) &\leq (h_0 f, f) = \int_{T^3} \varepsilon(p) f(p) \overline{f(p)} dp \leq \\ &\leq \int_{T^3} \sup_{p \in T^3} |\varepsilon(p)| f(p) \overline{f(p)} dp = M(f, f). \end{aligned}$$

Ma'lumki, har qanday o'z-o'ziga qo'shma A operator va ixtiyoriy $f \in L_2(T^3)$ lar uchun quyidagi

$$\sigma(A) \subset \left[\inf_{f \in L_2(T^3)} (Af, f), \sup_{f \in L_2(T^3)} (Af, f) \right]$$

munosabat o'rinli. Bu yerdan $\sigma(h_\alpha) \subset [m, M]$ munosabatga ega bo'lamiz.

Bu esa h_α operatorning $(M, +\infty)$ intervalda xos qiymati mavjud emasligini keltirib chiqaradi.

Lemma 2.4 isbot bo'ldi.

Har bir $z \notin [m, M]$ uchun quyidagi funksiyalarni aniqlaymiz:

$$\Delta_\alpha(z) = 1 - \mu_\alpha \int_{\mathbb{T}^3} \frac{ds}{\mathcal{E}(s) - z}, \quad \alpha = 1, 2, \quad z < 0. \quad (2.7)$$

Ushbu to'plam va belgilashlarni kiritamiz

$$\lambda_\alpha = \left\{ z : \Delta_\alpha(z) = 0 \quad \text{kamida bitta } p \in \mathbb{T}^3 \quad \text{uchun} \right\}, \quad \mu_\alpha^0 = \left(\int_{\mathbb{T}^3} \frac{ds}{\mathcal{E}(s)} \right)^{-1}.$$

Elementar hisoblashlar shuni ko'rsatadiki, barcha $\mu_\alpha > 0$, $\alpha = 1, 2$ lar uchun h_α operator yagona manfiy xos qiymatga ega bo'ladi. Shuning uchun quyidagi lemma o'rinli.

Lemma 2.5. *Ixtiyoriy $\mu_\alpha > 0$, $\alpha = 1, 2$ uchun h_α operatorning spektri $\sigma(h_\alpha)$ uchun ushbu tasdiqlar o'rinli:*

1. Agar $\mu \leq \mu_\alpha^0$ bo'lsa, $\sigma_{ess}(h_\alpha) = [m, M]$;
2. Agar $\mu > \mu_\alpha^0$ bo'lsa, $\sigma_{ess}(h_\alpha) = [m, M] \cup \sigma_{disc}(h_\alpha)$

to'plamdan iborat.

Quyidagi operatorlarni kiritamiz

$$H_\alpha = H_0 - V_\alpha, \quad \alpha = 1, 2. \quad (2.7)$$

Lemma 2.6. *Ixtiyoriy $\mu_\alpha > 0$, $\alpha = 1, 2$ uchun H_α operatorning spektri*

(muhim spektri) $\sigma(H_\alpha) = \sigma_{ess}(H_\alpha)$ uchun ushbu tasdiqlar o'rinli:

1. Agar $\mu \leq \mu_\alpha^0$ bo'lsa, $\sigma(H_\alpha) = [m, M]$;
2. Agar $\mu > \mu_\alpha^0$ bo'lsa, $\sigma(H_\alpha) = [m, M] \cup \{\lambda_\alpha\}$

to'plamdan iborat.

Lemma 2.7. H operatorning muhim spektri $\sigma_{ess}(H)$, H_α , $\alpha = 1, 2$ kanal operatorlarning spektrlari birlashmasidan iborat, ya'ni

$$\sigma_{ess}(H) = \sigma(H_1) \cup \sigma(H_2).$$

Bu lemmaning isboti [13] ishda keltirilgan.

Endi $\mu = \mu_1 = \mu_2$ holda ishga oid asosiy natijani keltiramiz.

Tasdiq 2.1. Ixtiyoriy $\mu > 0$ uchun H operatorning muhim spektri $\sigma_{ess}(H)$ uchun ushbu tasdiqlar o'rinli:

1. Agar $\mu \leq \mu_0$ bo'lsa, $\sigma_{ess}(H) = [m, M]$;
2. Agar $\mu > \mu_0$ bo'lsa, $\sigma_{ess}(H) = [m, M] \cup \{\lambda_\alpha\}$.

to'plamdan iborat.

2.3. Asosiy natijalar va ularning matematik talqini

Mazkur paragrafda (2.1) tenglik bilan aniqlangan H model operatorning muhim spektrini tasvirlash uchun E funksiyaning turli xususiy hollarida (aniq misollarda) tahlil qilish masalalari qaratiladi.

2.1-misol. (2.1) formula bilan aniqlangan H model operatorini aniqlovchi E funksiya quyidagi tenglik bilan aniqlangan bo'lsin

$$E(p - q) = l \sum_{i=1}^3 (1 - \cos(p^{(i)} - q^{(i)})),$$

bunda $l = \frac{1}{m}$, $m > 0$ – zarrachalarning massasini ifodalaydi (zaraachalar massalari o'zaro teng deb qaralgan). U holda H operatorining muhim spektri topilsin.

Yechish. Lemma 2.1. ga ko'ra, (2.1) tenglik bilan aniqlangan H chiziqli, chegaralangan, o'z-o'ziga qo'shma operator bo'ladi. H operatorning muhim spektrini tadqiq qilishda (2.2) tenglik bilan aniqlangan h_α operatorning spektrini tadqiq qilishga to'g'ri keladi. Bu operatorning muhim (uzluksiz) spektri $[m_1, M_1]$ segmentdan iborat ekanligi 2.2 da isbotlangan. Bu yerda m_1 va M_1 mos holda

$$\varepsilon(p) = l \sum_{i=1}^3 (1 - \cos p^{(i)})$$

Funksiyaning minimum va maksimum qiymatlari va bu sonlar $m_1 = 0$,

$$M_1 = 2l, \quad l > 0.$$

Shunday qilib, h_α operatorning muhim (uzluksiz) spektri $[0, 2l]$ segmentdan iborat ekan. Shuni takidlash joizki, h_α operatorning muhim spektri H_0 spektorining muhim spektri bilan ustma-ust tushadi, yani

$$\sigma_{ess}(h_\alpha) = \sigma_{ess}(H_0) = \sigma(H_0)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Lemma 2.3 va Lemma 2.4 ga ko'ra $h_\alpha, \alpha = 1, 2$ operator h_0 operatorning muhim spektridan o'ngda, yani $(2l, +\infty)$ intervalda spektrga (xos qiymatga) ega emas.

Lemma 2.5 ga ko'ra $h_\alpha, \alpha = 1, 2$ operator $\mu \leq \mu_\alpha^0$ bo'lsa, muhim spektrdan tashqarida xos qiymatga ega emas, $\mu > \mu_\alpha^0$ bo'lganda muhim spektrdan chapda yagona (manfiy) xos qiymatga ega bo'ladi. Bu yerda

$$\mu_\alpha^0 = \left(\int_{T^3} \frac{ds}{\mathcal{E}(s)} \right)^{-1}, \quad \mathcal{E}(s) = l \sum_{i=1}^3 (1 - \cos p^{(i)})$$

va $\int_{T^3} \frac{ds}{\mathcal{E}(s)}$ -integral mavjud va uni hisoblashda approksimatsiya usulidan foydalanamiz.

Endi (2.7) tenglik bilan aniqlangan $H_\alpha, \alpha = 1, 2$ kanal operatorining muhim spektri haqidagi tasdiqdan (qar. Lemma 2.6) foydalanib, H operatorining muhim spektri haqidagi tasdiqqa ega bo'lamiz (qar. Lemma 2.7)

$$\sigma_{ess}(H) = \sigma(H_1) \cup \sigma(H_2) = [0, 2l] \cup \bigcup_{\alpha} \{\lambda_\alpha\}.$$

xususiyl holda operator parametri $\mu_\alpha, \alpha = 1, 2$ o'zaro teng, yani $\mu = \mu_1 = \mu_2$ bo'lsa, u holda H operatorining muhim spektri uchun tasdiq 2.1 o'rinli bo'ladi.

Quyidagi 2.2 va 2.3 misollarning yechilishi ham 2.1-misolni yechish kabi amalga oshiriladi. Bunda operatorni anqlovchi parametrlarning ba'zi qiymatlari uchun natijalar olinadi.

2.2-misol. (2.1) formula bilan aniqlangan H model operatorini aniqlovchi E funksiya quyidagi tenglik bilan aniqlangan bo'lsin.

$$E(p - q) = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{m_i} (1 - \cos(p^{(i)} - q^{(i)})),$$

bunda $m_i > 0$ bo'lib, zarrachalarning massasini ifodalaydi. Bu holda H operatorining muhim spektri topilsin.

2.3-misol. E funksiya ushbu $E := E_K(\cdot, \cdot), K \in (-\pi; \pi]$ ya'ni

$$E_K(p - q) = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{m_i} [1 - \cos(K - (p^{(i)} - q^{(i)}))],$$

ko'rinishda aniqlangan bo'lsin bunda $m_i > 0$ bo'lib, zarrachalarning massasini

ifodalaydi. U holda (2.1) tenglik bilan aniqlangan H operatorning muhim spektri topilsin.

2.4. Maple amaliy dasturinig ba'zi buyruqlari va ulardan foydalanish

Ifodani hisoblash komandasi. Maple tizimida birorta o'zgaruvchining qiymatini hisoblash uchun unga birorta qiymat ta'minlanganligi tekshiriladi. Agar o'zgaruvchiga birorta qiymat ta'minlangan va bu qiymatda noma'lum ishtirok etgan bo'lsa, ushbu noma'lumga ham oldin qiymat ta'minlanganligi tekshiriladi va h.k. Bu jarayon barcha o'zgaruvchilarning qiymati aniqlangunga qadar rekursiv davom etadi.

Misol:

```
> z:=5;
```

```
z := 5
```

```
> x;
```

```
5
```

O'zgaruvchining qiymatini hisoblashda, unga ta'minlangan ifodadagi noma'lumlarning qiymatini bosqichma-bosqich aniqlash jarayoniga hisoblash bosqichi deyiladi. O'zgaruvchilarning qiymatini hisoblashni oxirgi bosqichida bajariladigan komandaning ko'rinishi quyidagicha: **eval(<o'zgaruvchi>)**; Agar hisoblash **n**-bosqichgacha bajarilish kerak bo'lsa, **eval(<o'zgaruvchi>, n)**; ko'rinishdagi komanda ishlatiladi. Misollar:

```
> eval(x);
```

```
5
```

```
> eval(x,1);
```

```
y
```

```
> eval(x,2);
```

```
z
```

```
> eval(x,3);
```

```
5
```

Ba'zan o'zgaruvchilarga qiymat ta'minlangan bo'lsa ham, ularni parametr sifatida ishlatish maqsadida ta'minlangan qiymatini «**inkor**» etish maqsadli komandaning **evaln(<o'zgaruvchi>)** ko'rinishi qo'llaniladi.

Misol:

```
> x:=u;
```

```
x := u
```

```
> x;
```

```
u
```

```
> evaln(x);
```

```
x
```

Agar o'zgaruvchining nomi ifodalarda, komandalarda yoki funksiyalarda **<o'zgaruvchi>** ko'rinishida ishlatilsa, u **evaln(<o'zgaruvchi>)** komandasiga ekvivalent vazifani bajaradi.

Misol:

```
> sum(i^2, i=1..1);      # xato
```

```
> sum('i'^2, 'i'=1..3);
```

```
14
```

Agar **<o'zgaruvchi>:=ifoda** komandasi bajarilsa, unga ta'minlangan oldingi qiymatlar o'chiriladi (o'zgaruvchi tozalanadi).

Misol:

```
> x:=1;
```

```
x := 1
```

```
> x:='y+1';
```

```
x := y + 1
```

assigned(<o‘zgaruvchi>) komandasi **<o‘zgaruvchi>**ga oldin qiymat ta’minlangan bo‘lsa, **true**, aks holda **false** natijani beradi. Ba’zan ifodalarni unda ishtirok etgan noma’lumlarning biror qiymatida hisoblamoqchi bo‘lsak **eval(<ifoda>, <o‘zgaruvchi>=<qiymat>)** ko‘rinishdagi komandani ishlatish kerak.

Misol:

```
> g:=x^2+x+1;
```

```
g := x2 + x + 1
```

```
> eval(g,x=1);
```

```
3
```

```
> g;
```

```
x2 + x + 1
```

Agar **g** ifodaning qiymatini **eval()** komandasini ishlatmasdan **x** o‘zgaruvchining oshkor qiymati uchun hisoblasak, uning ifodasi yo‘qoladi.

Misol:

```
> g:=x^2+x+1;
```

```
g := x2 + x + 1
```

```
> x:=1;
```

```
x := 1
```

Ifodada rasional kasrli miqdorlar bo‘lsa, natijani o‘nli kasr ko‘rinishida hosil qilish uchun **evalf(<ifoda>); evalf(<ifoda >, n);** ko‘rinishdagi komandalar ishlatiladi, bunda **n** parametr ko‘rsatilsa, u hisoblashdagi aniqlik darajasini belgilaydi, ko‘rsa-tilmasa jimlik qoidasiga ko‘ra aniqlik 10 xona bo‘ladi.

Misol:

> evalf(Pi);

3.141592654

> evalf(3/4*x^2+1/3*x-sqrt(2),20);

-.3308802290397617155

Bu komandalarning **evalb()** kompleks ifodalarni hisoblash, **evalhf()** suzuvchan vergul formada hisoblash, **evalm()** matrisalarni hisoblash, **evala** har xil turdagi miqdorlar ishtirok etgan ifodalarni hisoblash variantlari ham mavjud. Ushbu komandalar to'g'risida **?eval** komandasini bajarib, ma'lumot olish mumkin.

Integrallash komandasi. Ifodalarning ma'lum o'zgaruvchiga nisbatan aniqmas integralini topishni **int (<ifoda>, <o'zgaruvchi>);** komandasi bajaradi. Aniq integralni esa **int(<ifoda>, <o'zgaruvchi>=a..b);** ko'rinishdagi komanda hisoblaydi, bu yerda **a** va **b** lar integrallash chegaralari bo'lib, analitik ko'rinishdagi ifoda bo'lishi ham mumkin.

Misol:

> f:=a*x^2*sin(b*x);

$f := a x^2 \sin(b x)$

> int(f,x);

$$\frac{a (-b^2 x^2 \cos(b x) + 2 \cos(b x) + 2 b x \sin(b x))}{b^3}$$

> int(f,x=0..a);

$$-\frac{a (b^2 \cos(b a) a^2 - 2 \cos(b a) - 2 b \sin(b a) a + 2)}{b^3}$$

> Int(f,x=0..Pi)=int(f,x=0..Pi);

$$\int_0^{\pi} a x^2 \sin(b x) dx = -\frac{a (-2 \cos(\pi b) + b^2 \cos(\pi b) \pi^2 - 2 b \sin(\pi b) \pi + 2)}{b^3}$$

Analitik sonli integrallash. Aniqmas integralni $\int f(x)dx$ hisoblash ikki xil

komanda orqali bajariladi:

- 1) komandaning aktiv holati – $\text{int}(f, x)$, bu yerda f – integrallanuvchi funksiya;
- 2) komandaning passiv holati – **Int(f, x)** . **Int** komandasi formulaning matematik talqini ekranda hosil qiladi..

Aniq integralni $\int_a^b f(x)dx$ hisoblash uchun int va **Int** komandalarga qo'shimcha

integrallash chegaralari kiritiladi. Masalan :

> Int((1+cos(x))^2, x=0..Pi)=

int((1+cos(x))^2, x=0..Pi);

$$\int_0^{\pi} (1 + \cos(x))^2 dx = \frac{3}{2} \pi$$

Agar integrallash komandasiga continuous opsiyasini kiritsak $\text{int}(f, x, \text{continuous})$, u holda *Maple* integrallash soxasining barcha uzilishlaridagi integralni ham hisoblash imkonini beradi. Agar **int** komandasining parametrlarida, $x=0..\text{infinity}$ chegara kiritilsa, chegaralari cheksiz bo'lgan xosmas integralni hisoblaydi.

Sonli integral, **evalf(int(f, x=x1..x2), e)** komanda orqali aniqlanadi , e), bu yerda e – hisoblash aniqligi.

Integrallashni asosiy usullari. *Maple* da **student** paketi mavjud bo'lib, u matematikani o'qitishga mo'ljallangan. Va u bir qancha programmalar yordamida qadamma qadam hisoblanadigan murakkab misollarni yechishda qo'l keladi. Bunday komandalarga bulaklab integrallash komandasi **inparts** va o'zgaruvchini almashtirish komandasi **changevar** kiradi.

Bo'laklab integrallash formulasi. $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$

Agar $f=u(x)v'(x)$ integral ostidagi funksiya bo'lsa, bo'laklab integrallash komandasi parametrlari quyidagicha bo'ladi: `intparts(Int(f, x), u)`, bunda $u(x)$ – funksiya sifatida hosilasi mavjud funksiya.

Agar integralda $x=g(t)$ yoki $t=h(x)$ ko'rinishdagi o'zgaruvchilarni almashtirish talab etilsa, u holda o'zgaruvchilarni almashtirish buyrug'i quyidagicha bo'ladi: `changevar(h(x)=t, Int(f, x), t)`, bunda t – yangi o'zgaruvchi.

intparts va **changevar** buyruqlarning har ikkalasi integralni hisoblamaydi, balki oraliq ixchamlashtirishlarni bajaradi. Yakunlovchi hisobni olish uchun esa, bu buyruqlar bajarilgandan keyin ushbu **value(%)**; komandani berish lozim bo'ladi, bunda **gde %** - oldingi satrni belgilaydi.

Matrisa hosil qilish. *Maple* da matrisa hosil qilish uchun quyidagi komandadan foydalanamiz **matrix(n, m, [[a11,a12,...,a1n], [a21,a22,...,a2m],..., [an1,an2,...,anm]])**, bu yerda **n** – satr soni, **m** – ustunlar soni. Satr va ustunlar sonini ko'rsatmasdan, matrisa elementlarini berish xam mumkin. Masalan:

> A:=matrix([[1,2,3],[-3,-2,-1]]);

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Maple da diogonal matrisa hosil qilish uchun **diag** komandasidan foydalanamiz. Masalan:

> J:=diag(1,2,3);

$$J := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$f(i, j)$ funksiya orqali matrisani generatsiya qilish mumkin i, j – matrisa indekslari: **matrix(n, m, f)**, bu yerda **n** – satrlar soni, **m** – ustunlar soni. Masalan:

> f:=(i, j)->x^i*y^j;

$$f := (i, j) \rightarrow x^i y^j$$

> A:=matrix(2,3,f);

$$A := \begin{bmatrix} xy & xy^2 & xy^3 \\ x^2y & x^2y^2 & x^2y^3 \end{bmatrix}$$

A matrisaning satrlari soni **rowdim(A)**, ustunlari soni **coldim(A)** buyrug'i orqali aniqlanadi.

Matrisalar ustida arifmetik amallar. O'lchamlari bir xil bo'lgan ikki matrisani qo'shish uchun, ikkita vektorni qo'shish kabi **evalm(A+B)** yoki **matadd(A,B)** buyruqlaridan foydalaniladi. Ikkita matrisani ko'paytmasi quyidagi buyruqlar yordamida topiladi:

- 1) **evalm(A*B);**
- 2) **multiply(A,B);**

2.5. II bob bo'yicha xulosa

II bobda ishda qaralayotgan masalaning qo'yilishi, yani panjaradagi uch zarrachali sistemaga mos model operatori $L_2\left(\left(T^3\right)^2\right)$ Hilbert fazosida chegaralangan, o'z-o'ziga qo'shma operator bo'lishi ko'rsatilgan (qar. Lemma 2.1). Bu operatorning muhim spektri (2.2) tenglik bilan aniqlangan ikki zarrachali sistemaga mos h_α , $\alpha=1,2$ operatorning spektral xossalarini (muhim va diskret spektri), h_α spektri yordamida, (2.7) tenglik bilan aniqlangan H_α , $\alpha=1,2$ kanal operatorining spektri orqali tavsiflandi.

2.3 paragrafda (2.1) tenglik bilan aniqlangan H model operatorning muhim spektrini tasvirlash uchun E funksiyaning turli xususiy hollarida (aniq misollarda) tahlil qilish masalalari qaralgan. Bunda olingan natijalarning matematik talqini keltirilgan.

III BOB. Uch zarrachali diskret Shrödinger operatorining spektrini aniqlashning dasturiy vositasi

Ushbu bobda masalani yechishalgoritmi tuzilgan, dasturiy ta'minoti yaratilgan va olingan natijalarning tahlili keltirilgan.

3.1. Masalani yechish algoritmi

(2.1) tenglik bilan aniqlangan H model operatorning muhim spektrini tadqiq qilish uchun quyidagi qadamlar ketma-ketligi amalga oshiriladi, yani algoritmi quyidagilardan iborat:

1-qadam. (2.1) formula bilan aniqlangan H model operatorning ko'rinishini kiritish;

Uch o'lchamli panjaradagi uch zarrachali sistema gamiltonianiga mos H model operatorning muhim spektrini tadqiq qilishda dastlab (2.2) tenglik bilan aniqlangan h_α , $\alpha = 1, 2$ operatorning spektrini tadqiq qilishga to'g'ri keladi

2-qadam. h_α , $\alpha = 1, 2$ operatorning ko'rinishini kiritish;

3-qadam. Operatorning aniqlovchi ba'zi parametrlarning muhim qiymatlari kiritiladi;

4-qadam. h_α , $\alpha = 1, 2$ model operatorning muhim spektrini topish, bunda h_α , $\alpha = 1, 2$ operatorni aniqlovchi E funksiyaning qiymatlar sohasi topiladi;

5-qadam. h_α , $\alpha = 1, 2$ operatorning xos qiymatini topish;

bunda (2.7) tenglik bilan aniqlangan Δ_α funsiya kiritiladi;

6-qadam. Δ_α funksiyaadagi xosmas integral (approksimatsiya usulidan

foydalangan holda) hisoblash;

7-qadam. Δ_α funksiyaning nollari topiladi;

8-qadam. h_α , $\alpha = 1, 2$ operatorning spektri tavsiflanadi;

9-qadam. H_{12} operatorning ko'rinishini kiritish;

10-qadam. H_α , $\alpha = 1, 2$ kanal operatorining ko'rinishi kiritiladi;

H_α , $\alpha = 1, 2$ operatorning muhim spektri (spektri) h_α , $\alpha = 1, 2$ operatorning spektri orqali tavsiflanadi;

11-qadam. H_α , $\alpha = 1, 2$ ning muhim spektri esa H_α , $\alpha = 1, 2$ operatorining spektri orqali ifodalanadi;

12-qadam. Olingan natijalar nazariy ma'lumotlar bilan solishtiriladi (adekvatligi tekshiriladi);

13-qadam. Tamom.

3.2. Masalani yechishning dasturiy vositasi

Ushbu paragrafda ishda tadqiq qilinayotgan uch o'lchamli panjaradagi ba'zi uch zarrachali sistema gamiltonianiga mos model operatorining muhim spektrini hisoblash uchun tasvirlash uchun E funksiyaning turli xususiy hollarida (aniq misollarda), 3.1-paragrafda tuzilgan algoritm bo'yicha dasturiy ta'minotini 2.1-misolda qaralgan operator misolida keltiramiz. Bunda quyidagi bosqichlarni amalga oshirish talab etiladi.

1. Tadqiq qilinayotgan operatorning aniqlanishi quyidagicha tavsiflanadi

```
> H=H[0]-mu[1]*V[1]-mu[2]*V[2] ;  
> "OPERATORNI KO'RINISHINI YOZING";
```

```

(H[0]*f(x))*(p,q)=1*Sum(1-cos(p[i]-q[i]),i=1..3)*(f(p,q));
(V[1]*f(x))*(p,q)=Int(Int(Int(f(s,q),s1=-Pi..Pi),s2=-
Pi..Pi),s3=-Pi..Pi);
(V[2]*f(x))*(p,q)=Int(Int(Int(f(p,s),s1=-Pi..Pi),s2=-
Pi..Pi),s3=-Pi..Pi);

```

2. Malumki, qaralayotgan uch zarrachali sistema gamiltonianiga mos model operatorining muhim spektrini tadqiq qilishda uning turli ikki zarrachali qism sistemasiga mos h_α , $\alpha=1,2$ model operatorining spektrini tadqiq qilishga to'g'ri keladi (qar. 2.3-paragraf) va bu operatorlarning ko'rinishi quyidagicha aniqlanadi

```

> "IKKI ZARRACHALI QISM SISTEMALARGA MOS OPERATOR
KO`RINISHI";
h[alpha]=h[0]-mu[alpha]*v;
(h[0]*f(x))*(p)=1*Sum(1-cos(p[i]),i=1..3)*(f(p));
v*f(x)(p)=Int(Int(Int(f(s),s1=-Pi..Pi),s2=-Pi..Pi),s3=-
Pi..Pi);

```

3. h_α , $\alpha=1,2$ operatorni aniqlovchi ba'zi parametrlarning muhim qiymatlari kiritiladi;

```

> mu1:=5;
l:=> 3*10^19;

```

4. h_α , $\alpha=1,2$ model operatorning muhim spektri va xos qiymatini topish, bunda tegishli belgilashlar kiritiladi va h_α , $\alpha=1,2$ operatorni aniqlovchi E funksiyaning qiymatlar sohasi topiladi, bunda (2.7) tenglik bilan aniqlangan Δ_α funsiya kiritiladi undagi xosmas integral (approksimatsiya usulidan foydalangan holda) hisoblanadi hamda uning noli topiladi;

```

mk:=evalf(minimize(U, x=-Pi..Pi));
Mk:=evalf(maximize(U, x=-Pi..Pi));
> with(Student[MultivariateCalculus]):
E:=sum(1-cos(s[i]),i=1..3);

```

```

B:=(ApproximateInt(int(1/(E+10^(-14))),s[1]=-Pi..Pi),s[2]=-
Pi..Pi,s[3]=-Pi..Pi,output = value, partition = [200,200]))
assuming l>0;

> "Quyidagi belgilashlarni kiritamiz";
mu[0]:=(B/l)^(-1);
m:=0;
M:=2*1;
if (mul<=evalf(mu[0])) then sigma[ess]=[m, M]
else
with(Student[MultivariateCalculus]):
B:=(ApproximateInt(int(1/(E+10^(-14))-lambda),s[1]=-
Pi..Pi),s[2]=-Pi..Pi,s[3]=-Pi..Pi,output = value, partition
= [200,200])) assuming lambda<0;
deltalambda:=1-mu*(B/l);
solve(deltalambda=0,lambda);

end if;
"H operatorning muhim spektri quyidagicha ekan";
sigma[ess]=[m, M];

```

3.3. Olingan natijalarning tahlili

2.1-misolda uch o'lchamli panjaradagi ba'zi uch zarrachali sistema gamiltonianiga mos model operatorning muhim spektrini tavsiflashda dasturiy ta'minotdan foydalanish va undan olingan natijalar quyidagi tartibda amalga oshirilgan

$$H_0 f(x)(p, q) = l \left(\sum_{i=1}^3 (1 - \cos(p_i - q_i)) \right) f(p, q)$$

$$V_1 f(x)(p, q) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s, q) ds_1 ds_2 ds_3$$

$$V_2 f(x)(p, q) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(p, s) ds_1 ds_2 ds_3$$

operatorning umumiy ko'rinishi tavsiflangach, bu operatorning turli ikki zarrachali

qism sistemasiga mos model operatorining ko'rinishi tavsiflangan

$$h_{\alpha} = h_0 - \mu_{\alpha} \nu$$

$$h_0 f(x) p = l \left(\sum_{i=1}^3 (1 - \cos(p_i)) \right) f(p)$$

$$\nu f(x)(p) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s_1, s_2, s_3) ds_1 ds_2 ds_3$$

bu operatorni aniqlovchi parametrlarning aniq qiymatlarida uning spektri (muhim va diskret spektri)ni hisoblash natijasida quyidagi natijalar olindi

"Demak H operatorning muhim spektri to'plamdan iborat ekan"

$$\left[0, \frac{2}{3} \right], \{ -1200.0 \}$$

Shunday qilib, hisoblash natijalari shuni ko'rsatadiki, operatorni aniqlovchi parametrlarning turli qiymatlarida ularga mos holda qaralayotgan operatorning muhim spektri aniq sonli to'plamlar orqali ifodalanadi va bu nazariy jihatdan olingan natijalar bilan mos tushadi. Bundan turli uch zarrachali (zarrachalarning fizikaviy xarakteristik xususiyatlariga bog'liq) sistemaga mos operatorlarning spektri haqida xulosalar qilish mumkin.

2.2-misolda qaralgan operatorning muhim spektri quyidagi to'plamdan iborat ekan.

$$\left[0, \frac{143}{420} \right], \{ -1220.0 \}$$

2.3-misolda qaralgan operatorning muhim spektri quyidagi to'plamdan iborat ekan.

$$\left[0, \frac{1706}{9165} \right], \{ -1753.7 \}$$

3.4. III bob bo'yicha xulosa

III bobda ishda tadqiq qilinayotgan uch o'lchamli panjaradagi ba'zi uch zarrachali sistema gamiltonianiga mos model operatorining muhim spektrini topish, bunda dastlab ikki zarrachali qism sistemaga mos operatorning spektri, so'ngra kanal operatorlar aniqlanib, uning spektri aniqlandi bular orqali qaralayotgan operatorning muhim spektri algoritmi tuzilgan. Bu algoritm asosida dasturiy ta'minot yaratildi. Dasturiy ta'minot yordamida olingan natijalar tahlil qilingan, ya'ni nazariy jihatdan olingan natijalar bilan solishtirilgan va mos tushishi kuzatilgan.

Xulosa

Magistrlik dissertatsiyasi uch o'lchamli panjaradagi ba'zi uch zarrachali sistema gamiltonianiga mos model operatorining muhim spektrini topish algoritmini ishlab chiqish va bu algoritm asosida dasturiy ta'minot yaratishga bag'ishlangan.

Mazkur magistrlik dissertatsiyasi kirish, 3 ta bob, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati va ilovadan iborat bo'lib, ishda qaralgan masalani yechish, asosiy natijalarni olishda foydalanilgan asosiy tushunchalar va bular asosida amalga oshirilgan ishlar quyidagi tarkibiy qismlar ketma-ketligidan tashkil topgan.

I bobda ishda qo'yilgan masalani yechishda kerak bo'ladigan asosiy tushunchalar: chiziqli normalangan fazolar, Hilbert fazolari va unda aniqlangan chiziqli chegaralangan, o'z-o'ziga qo'shma operatorlar va ularning spektrlari haqidagi ta'riflar hamda tasdiqlar misollar yordamida keltirilgan.

II bobda ishda qaralayotgan masalaning qo'yilishi, yani panjaradagi uch zarrachali sistemaga mos model operatorning muhim spektri (2.2) tenglik bilan aniqlangan ikki zarrachali sistemaga mos h_α , $\alpha=1,2$ operatorning spektri yordamida, (2.7) tenglik bilan aniqlangan H_α , $\alpha=1,2$ kanal operatorining spektri orqali tavsiflandi.

2.3 paragrafda (2.1) tenglik bilan aniqlangan H model operatorning muhim spektrini tasvirlash uchun E funksiyaning turli xususiy hollarida (aniq misollarda) tahlil qilish masalalari qaralgan. Bunda olingan natijalarning matematik talqini keltirilgan.

III bobda ishda tadqiq qilinayotgan uch o'lchamli panjaradagi ba'zi uch zarrachali sistema gamiltonianiga mos model operatorining muhim spektrini topish, bunda dastlab ikki zarrachali qism sistemaga mos operatorning spektri, so'ngra

kanal operatorlar aniqlanib, uning spektri aniqlandi bular orqali qaralayotgan operatorning muhim spektri algoritmi tuzilgan. Bu algoritm asosida dasturiy ta'minot yaratildi. Dasturiy ta'minot yordamida olingan natijalar tahlil qilingan, ya'ni nazariy jihatdan olingan natijalar bilan solishtirilgan va mos tushishi kuzatilgan.

Dissertasiyada olingan natijalar amaliy-uslubiy ahamiyatga ega bo'lib, unda qo'llanilgan usullar Shrödinger operatorlari va ko'p zarrachali sistemaga mos model operatorlarining spektral nazariyasida muhim ahamiyat kasb etadi. Olingan natijalar, tuzilgan algoritm va dasturiy ta'minotdan kvant mexanikasi, qattiq jismlar fizikasi, statistik fizika, kvant maydonlar nazariyasi, o'z-o'ziga qo'shma chiziqli operatorlar qo'zg'alishlari nazariyasi va spektral nazariyasi rivojlanishida, zamonaviy matematik va nazariy fizikaning har xil masalalarini amaliy jihatdan yechishda hamda oliy ta'lim muassasalari talabalariga maxsus fanlardan dars berishda uslubiy ko'rsatma sifatida foydalanish mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar

- [1] С. А. Степин, Несамосопряженная модель Фридрихса в теории гидродинамической устойчивости // Функц. анализ и его прил. , 29:2 (1995), s. 22-35.
- [2] Меркурьев С.П., Фаддеев Л.Д. Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. М.: Наука. 1985.
- [3] Х. Цикон, Р. Фрези, В. Криши, Б. Саймон. Операторы Шредингера. М.: Мир, 1990.
- [4] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.3. Теория рассеяния. М.: Мир. 1982.
- [5] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.4. Анализ операторов. М.: Мир. 1982.
- [6] Березин Ф.А., Шубин М.А. Уравнение Шредингера. М.:Изд. МГУ.1978.
- [7] Mogilner A.I. Hamiltonians of solid state physics as few-particle discrete Schrodinger operators: problems and results // Advance of Soviet Mathematics. 1991. V.5. P.139-194.
- [8] D.C.Mattis: The few-body problem on lattice, Rev.Modern Phys. 58 (1986), No. 2, 361-379.
- [9] Минлос Р.А. Введение в математическую статическую физику. М.: МЦНМО, 2002.
- [10] Minlos R.A., Mogilner A.I. Some problems concerning spectra of lattice models. In Schodinger operators: Standard and Nonstandard (eds. P.Exner, P.Sebe). World. Scientific. Singapoer. 1989.
- [11] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.1. Функциональный анализ. М.: Мир. 1977.

- [12] A.I.Mogilner: The problem of a quasi-particles in solidstate physics I n; Application of Self-adjoint Extensions in Quantum Physics (P.Exner and P.Sebe eds.) Lect.Notes Phys.) 324, (1998), Springer-Verlag, Berlin.
- [13] S. Albeverio, S. N. Lakaev and Z. I. Muminov: Schrödinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics. Ann. Henri Poincare. **5**, (2004),743-772.
- [14] Qobulov V. Q. Funktsional analiz va hisoblash matematikasi, "O'qituvchi", Toshkent – 1976 y.
- [15] Савотченко С.Е., Кузмичева Т.Г. Методы решения математических задач в Maple: Учебное пособие - Белгород: Изд. Белаудит, 2001. – 116 с.
- [16] Дяконов В. Maple 7: учебный курс - СПб.: Питер, 2002.
- [17] Матросов А.В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики – СПб.: БХВ – Петербург, 2001.
- [18] С.А.Лактионов, М.И.Журавлева, С.Ф.Гаврикова. Построение графиков в пакете Maple: СибГИУ. -Новокузнецк, 2012. - 40 с.
- [19] F.A. Nabiyeu. Panjaradagi ba'zi uch zarrachali model operatorining muhim spektri haqida. “Intellectual salohiyatli iqtidorli yoshlar” mavzuidagi yosh olimlar, magistrant va talabalarning an’anaviy XI respublika ilmiy-amaliy konferensiyasi materiallari III qism. Samarqand, (2014), 50-51 b.
- [20] F.A. Nabiyeu. Panjaradagi uch zarrachali model operatorining muhim spektri haqida. "Magistrlarning XIV ilmiy konferensiyasi materiallari". Samarqand, (2014), 49-50 b.

Ilovalar

1-ilova.

```
> with(student):
```

```
restart;
```

```
> H=H[0]-mu[1]*V[1]-mu[2]*V[2] ;
```

$$H = H_0 - \mu_1 V_1 - \mu_2 V_2$$

```
> "OPERATORNI KO'RINISHINI YOZING";
```

```
(H[0]*f(x))*(p,q)=l*Sum(1-cos(p[i]-q[i]),i=1..3)*(f(p,q));
```

```
(V[1]*f(x))*(p,q)=Int(Int(Int(f(s,q),s1=-Pi..Pi),s2=-Pi..Pi),s3=-Pi..Pi);
```

```
(V[2]*f(x))*(p,q)=Int(Int(Int(f(p,s),s1=-Pi..Pi),s2=-Pi..Pi),s3=-Pi..Pi);
```

"OPERATORNI KO'RINISHINI YOZING"

$$H_0 f(x)(p, q) = l \left(\sum_{i=1}^3 (1 - \cos(p_i - q_i)) \right) f(p, q)$$

$$V_1 f(x)(p, q) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s, q) ds_1 ds_2 ds_3$$

$$V_2 f(x)(p, q) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(p, s) ds_1 ds_2 ds_3$$

```
> "IKKI ZARRACHALI QISM SISTEMALARGA MOS OPERATOR KO`RINISHI";
```

```
h[alpha]=h[0]-mu[alpha]*v;
```

```
(h[0]*f(x))*(p)=l*Sum(1-cos(p[i]),i=1..3)*(f(p));
```

```
v*f(x)(p)=Int(Int(Int(f(s),s1=-Pi..Pi),s2=-Pi..Pi),s3=-Pi..Pi);
```

```
mk:=evalf(minimize(U, x=-Pi..Pi));
```

```
Mk:=evalf(maximize(U, x=-Pi..Pi));
```

"IKKI ZARRACHALI QISM SISTEMALARGA MOS OPERATOR KO`RINISHI"

$$h_{\alpha} = h_0 - \mu_{\alpha} v$$

$$h_0 f(x) p = l \left(\sum_{i=1}^3 (1 - \cos(p_i)) \right) f(p)$$

$$v f(x)(p) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) ds_1 ds_2 ds_3$$

$$mk := U$$

$$Mk := U$$

```

> with(Student[MultivariateCalculus]):
E:=sum(1-cos(s[i]), i=1..3);
B:=(ApproximateInt(int(1/(E+10^(-14))), s[1]=-Pi..Pi), s[2]=-
Pi..Pi, s[3]=-Pi..Pi, output = value, partition = [10,10])) ;
E:=3-cos(s1)-cos(s2)-cos(s3)
B:=12.05326942 π2

> mul:=5;
l:=1/3;

"H operatorning muhim spektri quyidagicha ekan";
sigma[ess]=[m, M];
"Quyidagi belgilashlarni kiritamiz";
mu[0]:=(B/l)^(-1);
m:=0;
M:=2*l;
if (mul<=evalf(mu[0])) then sigma[ess]=[m, M]
end if:
"H operatorning muhim spektri quyidagicha ekan";
sigma[ess]:=[m, M];
> E:=sum(1-cos(s[i]), i=1..3);

> with(Student[MultivariateCalculus]):
for lambda from -1250 by 0.5 to -1200 do
MDelta21:=1-mul*ApproximateInt(Int(1/(E-lambda), s[1]=-
Pi..Pi), s[2]=-Pi..Pi,
s[3]=-Pi..Pi, output = value, partition = [10,10]));

if (evalf(MDelta21))<10^(-10) then kk:=MDelta21;
ll:=lambda;
exit;

```

fi;

od:

$$\mu_1 := 5$$

$$l := \frac{1}{3}$$

"H operatorning muhim spektri quyidagicha ekan"

$$\sigma_{ess} = \left[0, \frac{2}{3} \right]$$

"Quyidagi belgilashlarni kiritamiz"

$$\mu_0 := \frac{0.02765501390}{\pi^2}$$

$$m := 0$$

$$M := \frac{2}{3}$$

"H operatorning muhim spektri quyidagicha ekan"

$$\sigma_{ess} := \left[0, \frac{2}{3} \right]$$

$$E := 3 - \cos(s_1) - \cos(s_2) - \cos(s_3)$$

**> "Demak H operatorning muhim spektri to`plamlar birlashmasidan
iborat ekan";**

"Demak H operatorning muhim spektri to`plamdan iborat ekan"

> print(sigma[ess], {11});

$$\left[0, \frac{2}{3} \right], \{ -1200.0 \}$$

2-ilova.

```
> with(student):
```

```
restart:
```

```
> H=H[0]-mu[1]*V[1]-mu[2]*V[2] ;
```

$$H = H_0 - \mu_1 V_1 - \mu_2 V_2$$

```
> "OPERATORNI KO'RINISHINI YOZING";
```

```
(H[0]*f(x))*(p,q)=Sum(1/m[i]*(1-cos(p[i]-q[i])),i=1..3)*(f(p,q));
```

```
(V[1]*f(x))*(p,q)=Int(Int(Int(f(s,q),s1=-Pi..Pi),s2=-Pi..Pi),s3=-Pi..Pi);
```

```
(V[2]*f(x))*(p,q)=Int(Int(Int(f(p,s),s1=-Pi..Pi),s2=-Pi..Pi),s3=-Pi..Pi);
```

"OPERATORNI KO'RINISHINI YOZING"

$$H_0 f(x)(p, q) = \left(\sum_{i=1}^3 \frac{1 - \cos(p_i - q_i)}{m_i} \right) f(p, q)$$

$$V_1 f(x)(p, q) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s, q) ds_1 ds_2 ds_3$$

$$V_2 f(x)(p, q) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(p, s) ds_1 ds_2 ds_3$$

```
> "IKKI ZARRACHALI QISM SISTEMALARGA MOS OPERATOR KO`RINISHI";
```

```
h[alpha]=h[0]-mu[alpha]*v;
```

```
(h[0]*f(x))*(p)=Sum(1-cos(p[i]),i=1..3)*(f(p));
```

```
v*f(x)(p)=Int(Int(Int(f(s),s1=-Pi..Pi),s2=-Pi..Pi),s3=-Pi..Pi);
```

"IKKI ZARRACHALI QISM SISTEMALARGA MOS OPERATOR KO`RINISHI"

$$h_{\alpha} = h_0 - \mu_{\alpha} v$$

$$h_0 f(x) p = \left(\sum_{i=1}^3 (1 - \cos(p_i)) \right) f(p)$$

$$v f(x)(p) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) ds_1 ds_2 ds_3$$

```
> with(Student[MultivariateCalculus]):
```

```
m[1]:=10;
```

```

m[2]:=24;
m[3]:=35;
E:=sum(1/m[i]*(1-cos(s[i])),i=1..3);
B:=(ApproximateInt(int(1/(E+10^(-14))),s[1]=-Pi..Pi),s[2]=-
Pi..Pi,s[3]=-Pi..Pi,output = value, partition = [10,10])) ;

```

$$m_1 := 10$$

$$m_2 := 24$$

$$m_3 := 35$$

$$E := \frac{143}{840} - \frac{1}{10} \cos(s_1) - \frac{1}{24} \cos(s_2) - \frac{1}{35} \cos(s_3)$$

$$B := 235.1259451 \pi^2$$

```

> mu1:=7;

```

```

"Quyidagi belgilashlarni kiritamiz";

```

```

mu[0]:=(B)^(-1);

```

```

mk:=0;

```

```

Mk:=2*sum(1/m[i],i=1..3);

```

```

if (mu1<=evalf(mu[0])) then sigma[ess]=[mk, Mk]

```

```

end if:

```

```

"H operatorning muhim spektri quyidagicha ekan";

```

```

sigma[ess]:=[mk, Mk];

```

```

>

```

```

> with(Student[MultivariateCalculus]):

```

```

for lambda from -1250 by 0.5 to -1220 do

```

```

MDelta21:=1-mu1*ApproximateInt(Int(1/(E-lambda),s[1]=-
Pi..Pi),s[2]=-Pi..Pi,

```

```

s[3]=-Pi..Pi, output = value, partition = [10,10]));

```

```

if abs(evalf(MDelta21))<10^(-10) then kk:=MDelta21;

```

```

ll:=lambda;

```

```

exit;

```

```

fi;

```

```

od:

```

$$\mu_1 := 7$$

"Quyidagi belgilashlarni kiritamiz"

$$\mu_0 := \frac{0.004253039789}{\pi^2}$$

$$mk := 0$$

$$Mk := \frac{143}{420}$$

"H operatorning muhim spektri quyidagicha ekan"

$$\sigma_{ess} := \left[0, \frac{143}{420} \right]$$

> "Demak H operatorning muhim spektri to`plamlar birlashmasidan
iborat ekan";

"Demak H operatorning muhim spektri to`plamlar birlashmasidan iborat ekan"

> print(sigma[ess], {11});

$$\left[0, \frac{143}{420} \right], \{ -1220.0 \}$$

3-ilova.

```
> with(student):
```

```
restart:
```

```
> H=H[0]-mu[1]*V[1]-mu[2]*V[2] ;
```

$$H = H_0 - \mu_1 V_1 - \mu_2 V_2$$

```
> "OPERATORNI KO'RINISHINI YOZING";
```

```
(H[0]*f(x))* (p,q)=Sum(1/m[i]*(1-cos(K-(p[i]-q[i]))),i=1..3)*(f(p,q));
```

```
(V[1]*f(x))* (p,q)=Int(Int(Int(f(s,q),s1=-Pi..Pi),s2=-Pi..Pi),s3=-Pi..Pi);
```

```
(V[2]*f(x))* (p,q)=Int(Int(Int(f(p,s),s1=-Pi..Pi),s2=-Pi..Pi),s3=-Pi..Pi);
```

"OPERATORNI KO'RINISHINI YOZING"

$$H_0 f(x)(p, q) = \left(\sum_{i=1}^3 \frac{1 - \cos(K - p_i + q_i)}{m_i} \right) f(p, q)$$

$$V_1 f(x)(p, q) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s, q) ds_1 ds_2 ds_3$$

$$V_2 f(x)(p, q) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(p, s) ds_1 ds_2 ds_3$$

```
> "IKKI ZARRACHALI QISM SISTEMALARGA MOS OPERATOR KO`RINISHI";
```

```
h[alpha]=h[0]-mu[alpha]*v;
```

```
(h[0])* (p)=Sum(1-cos(K-(p[i]-q[i])),i=1..3)*(f(p));
```

```
v*f(x)(p)=Int(Int(Int(f(s),s1=-Pi..Pi),s2=-Pi..Pi),s3=-Pi..Pi);
```

"IKKI ZARRACHALI QISM SISTEMALARGA MOS OPERATOR KO`RINISHI"

$$h_{\alpha} = h_0 - \mu_{\alpha} v$$

$$h_0 p = \left(\sum_{i=1}^3 (1 - \cos(K - p_i + q_i)) \right) f(p)$$

$$v f(x)(p) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) ds_1 ds_2 ds_3$$

$$m_1 := 30$$

$$m_2 := 26$$

$$m_3 := 47$$

$$K := \frac{\pi}{8}$$

$$\mu_1 := 7$$

$$E := \frac{853}{9165} - \frac{1}{30} \sin\left(\frac{3\pi}{8} + s_1\right) - \frac{1}{26} \sin\left(\frac{3\pi}{8} + s_2\right) - \frac{1}{47} \sin\left(\frac{3\pi}{8} + s_3\right)$$

$$B := 440.1170372 \pi^2$$

$$\lambda := -1750$$

$$MDelta21 := 0.0078519110$$

> mu1:=7;

"Quyidagi belgilashlarni kiritamiz";

mu[0] := (B) ^ (-1);

mk:=0;

Mk:=2*sum(1/m[i], i=1..3);

if (mu1<=evalf(mu[0])) then sigma[ess]=[mk, Mk]

end if:

"H operatorning muhim spektri quyidagicha ekan";

sigma[ess]:=[mk, Mk];

>

> with(Student[MultivariateCalculus]):

for lambda from -1770 by 0.1 to -1740 do

MDelta21:=1-mu1*ApproximateInt(Int(1/(E-lambda), s[1]=-Pi..Pi), s[2]=-Pi..Pi,

s[3]=-Pi..Pi, output = value, partition = [10,10]);

if (evalf(MDelta21))<10^(-2) then kk:=MDelta21;

ll:=lambda;

break;

fi;

od:

$$\mu_1 := 7$$

"Quyidagi belgilashlarni kiritamiz'

$$\mu_0 := \frac{0.002272122902}{\pi^2}$$

$$mk := 0$$

$$Mk := \frac{1706}{9165}$$

"H operatorning muhim spektri quyidagicha ekan"

$$\sigma_{ess} := \left[0, \frac{1706}{9165} \right]$$

> "Demak H operatorning muhim spektri to`plamlar birlashmasidan iborat ekan";

"Demak H operatorning muhim spektri to`plamlar birlashmasidan iborat ekan"

> print(sigma[ess], {11});

$$\left[0, \frac{1706}{9165} \right], \{ -1753.7 \}$$