**САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.03/30.07.2019.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

УБАЙДУЛЛАЕВ УЛУҒБЕК ШУКИРИЛЛАЕВИЧ

ТЎРТБУРЧАК СОҲАДА КАСР ТАРТИБЛИ ОПЕРАТОРЛАР ҚАТНАШГАН АРАЛАШ ТИПДАГИ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

01.01.02 - Дифференциал тенгламалар ва математик физика

**Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
АВТОРЕФЕРАТИ**

Самарқанд - 2021

УДК 517.95; 517.956.6

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of the doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.03/30.07.2019.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

УБАЙДУЛЛАЕВ УЛУҒБЕК ШУКИРИЛЛАЕВИЧ

ТЎРТБУРЧАК СОҲАДА КАСР ТАРТИБЛИ ОПЕРАТОРЛАР ҚАТНАШГАН АРАЛАШ ТИПДАГИ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

01.01.02 - Дифференциал тенгламалар ва математик физика

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
АВТОРЕФЕРАТИ

Самарқанд - 2021

Фалсафа доктори (PhD) диссертация мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2020.4.PhD/FM222 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (www.samdu.uz) ва "Ziyonet" Ахборот-таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Исломов Бозор Исломович** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Дурдиев Дурдимурод Қаландарович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Каримов Эркин Тўлқинович физика-математика фанлари доктори
Етакчи ташкилот:	**Урганч давлат университети**

Диссертация ҳимояси Самарқанд давлат университети ҳузуридаги DSc.03/30.07.2019.FM.02.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2021 йил «06» 07 соат 10[00] даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866)231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38, 239-12-47, e-mail: patent@samdu.uz).

Диссертация билан Самарқанд давлат университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (24 рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866) 231-06-32.)

Диссертация автореферати 2021 йил «19» 06 куни тарқатилди.
(2021 йил «19» 06 даги 2 рақамли реестр баённомаси).

А.С. Солеев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, физика-математика фанлари доктори, профессор

А.М. Халхўжаев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, физика-математика фанлари доктори

А.Б. Хасанов
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси, физика-математика фанлари доктори, профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертациясининг аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида математика соҳасидаги кўплаб жараёнларнинг математик моделлари хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар хусусан, иккинчи ва учинчи тартибли аралаш типдаги тенглама учун локал ва нолокал масалалар ечимини топиш заруратини келтириб чиқармоқда. Бугунги кунда каср тартибли операторлар қатнашган тенгламалар учун кўриб чиқилаётган илмий изланишлар геология, электродинамика, тўлқин тарқалиш жараёнлари, геофизика ва бошқа кўплаб соҳалардаги тадқиқотларнинг энг кўп ўрганилаётган асосий масалаларидан ҳисобланади. Бундан ташқари, ер ости сувлари оқимлари ҳаракати жараёнларининг математик моделлари, композицион материалларнинг хоссалари билан боғлиқ бўлган кимёвий ва механик жараёнлар, аномал диффузия жараёнлари ва бошқа амалий муаммоларни ҳал қилишга доир тадқиқотларни олиб бориш ҳозирги кунда каср тартибли дифференциал ва интеграл ҳисобининг муҳим вазифаларидан бири бўлиб қолмоқда.

Жаҳон илм-фанида каср тартибли операторлар қатнашган хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун бошланғич ва чегаравий шартлар қатнашган масалаларни ечишга алоҳида эътибор қаратилмоқда. Хусусан, замонавий математик физиканинг истиқболли йўналишлари бўлган тупроқ намлигини ўлчаш, лазер нурланиш жараёнларини математик моделлаштириш, плазма физикаси ва математик биология муаммоларига оид фундаментал тақиқотлар муҳим илмий аҳамият касб этади. Шунингдек, каср тартибли дифференциал ва интеграл назариясининг қўлланилиши биологик элементларнинг электр импедانслари, диффузия тизимларини бошқариш, ҳаракатни бошқариш, робототехника, динамик тизимлар ва механик манипуляторларни бошқаришда ишлатиладиган сигналларни таҳлил қилишда амалий-назарий жиҳатдан муҳим илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий тадбиқларга эга бўлган долзарб йўналишларига эътибор янада кучайтирилди, хусусан, мамлакатимиз олимлари томонидан каср тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун турли хил масалаларни ечишнинг самарали усулларини излашга алоҳида эътибор берилмоқда. “Алгебра ва унинг татбиқлари, дифференциал тенгламалар ва унинг татбиқлари, чизиқсиз тизимлар, динамик тизимлар ва уларнинг татбиқларини математик моделлаштириш, стохастик таҳлил, тиббий-биологик информатика, ҳисоблаш математикаси[1]” фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалари ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди. Бу

[1] Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон “Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида” ги қарори.

қарор ижросини таъминлашда математик физиканинг каср тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида” Фармони, 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон “Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида” ва 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон “Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. “Математика, механика ва информатика” устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Каср тартибли интегро-дифференциал оператор билан боғлиқ дастлабки натижалар Н.Абель ва Ж.Лиувиллга тегишли. Ушбу назарияни Г.Харди, А.В.Летников, А.Зигмунд, М.М.Ждрбашян, В.К.Вебер, А.А.Килбас, С.Г.Самко, М.Капуто, Р.Горенфло, Ф.Майнарди, А.М.Нахушев, В.И.Жегалов, М.С.Салахитдинов, Э.Р.Лов, М.Сайго, Х.М.Сривастава каби олимлар янада ривожлантирган. М.М.Джрбашян, А.Б.Нерсесян, Р.Горенфло, Ю.Ф.Лучко, С.Р.Умаров, А.А.Килбас, С.А.Марзан, А.В.Псху ишлари диффузия-тўлқин тенгламаси учун диффузия жараёнларининг математик моделларини ясашда катта аҳамиятга эга бўлган Риман-Лиувилль ёки Капуто каср тартибли операторлари қатнашган Коши ва чегаравий масалаларни ечишга бағишланган. А.А.Килбас ва О.А.Репинларнинг илмий ишларида эса каср тартибли аралаш типдаги тенгламалар учун чегаравий масалалар ўрганилган.

К.Б.Сабитовнинг илмий ишларида тўртбурчак соҳаларда бутун тартибли аралаш параболик-гиперболик типдаги тенгламалар учун тўғри масалалар ўрганилган. Ушбу ишларда y бўйича иккита улаш шарти ва бутун чегарада шартлар берилганда қўйилган масалалар ихтиёрий тўртбурчак соҳада ечилмаслиги исботланган. Ж.Аманов томонидан тўртбурчак соҳада бутун тартибли параболик-гиперболик типдаги тенглама учун чегаравий масалалар учта улаш шарти билан берилганда ихтиёрий тўртбурчак соҳада ечилиши исботланган. Каср тартибли операторлар қатнашган аралаш типдаги тенгламалар учун чегаравий масалалар учта улаш шарти билан шу пайтгача ўрганилмаган.

Р.Р.Ашуров, А.Кабада, Й.Лучко, Р.Горенфло, К.М.Шиналиев, Б.Х.Турметов, С.Р.Умаровлар каср тартибли тенгламалар учун чегаравий масалаларини ечишда оператор усулларидан фойдаланганлар. Э.Т.Каримов томонидан учта характеристик учбурчак ва битта тўртбурчакдан ташкил топган аралаш соҳада Капуто маъносида каср тартибли дифференциал оператор қатнашган аралаш типдаги тенглама учун қўйилган нолокал шартли тўғри масаланинг бир қийматли ечилиши исботланган. Ж.Аманов, А.Ашуралиев ва Б.Қодирқуловлар тўртбурчак соҳаларда ҳар хил турдаги каср тартибли дифференциал операторлар қатнашган юқори тартибли дифференциал тенгламалар учун турли хил бошланғич-чегаравий масалаларни тадқиқ қилган. К.Б.Собитов ва унинг шогирдлари тўртбурчак соҳаларда бутун тартибдаги тенглама учун тескари масалаларни ўрганган. Каср тартибли оператор қатнашган аралаш типдаги тенгламалар учун тескари масалалар яхши ўрганилмаган. Ушбу йўналишда Б.З.Қодирқулов ва Э.Т.Каримовларнинг илмий ишларини кўрсатиш мумкин. Бундан ташқари, У.Балтаева, О.Абдуллаев ишларида тенгламанинг юкланган қисмида Риман-Лиувилль маъносида касрли тартибли оператор қатнашган тенгламалар учун локал ва нолокал чегаравий масалалар ўрганилган. Бу йўналишдаги илмий изланишлар юкланган тенгламалар назарияси муаммолари долзарблигини кўрсатади. Бундан ташқари юкланган тенгламалар назарияси амалиётга қўлланилмоқда ва жадал ривожлантирилмоқда. Б.И.Исломов, О.Х.Абдуллаев ва Н.К.Очилова, Э.Т.Каримов ва Ж.С.Ахатовлар томонидан Риман-Лиувилль ва Капуто маъноларидаги каср тартибли дифференциал оператор қатнашган аралаш типдаги тенгламалар учун чегаравий масалалар ўрганилган. Лекин Риман-Лиувилль оператори қатнашган аралаш типдаги юкланган тенгламалар учун тескари масалалар ўрганилмаган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилаётган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Ўзбекистон Миллий университетининг илмий-тадқиқот ишлари режасига мувофиқ ОТ-Ф1-065 рақамли “Спектрал параметрли сингуляр коэффициентли бузилишли тенгламалар назарияси” (2017-2018) мавзудаги фундаментал тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади тўртбурчак соҳаларда каср тартибли Риман-Лиувилль ёки Капуто операторлари қатнашган аралаш типдаги тенгламалар учун тўғри ва тескари масалаларни ечишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

тўртбурчак соҳада каср тартибли диффузия тенгламасини ўз ичига олган аралаш типдаги тенглама учун Трикоми типидаги масаланинг бир қийматли ечилишини исботлаш;

тўртбурчак соҳада спектрал параметрли каср тартибли бир жинсли бўлмаган аралаш типдаги тенглама учун учта улаш шарти қатнашган тўғри масалани ечиш;

аралаш соҳадаги Капуто оператори қатнашган аралаш типдаги тенглама учун иккинчи турдаги чегаравий шарт қатнашган тўғри масалани ечиш;

тўртбурчак соҳада каср тартибли Капуто ва Риман-Лиувилль операторлари қатнашган аралаш типдаги тенглама учун тескари масалаларнинг ечиш усулларини ишлаб чиқиш;

каср тартибли ҳосилалар қатнашган юкланган хусусий ҳосилали дифференциал тенглама учун тескари масалаларининг регуляр ечилишини исботлаш.

Тадқиқотнинг объекти сифатида тўртбурчак соҳаларда каср тартибли Капуто ва Риман-Лиувилль операторлари қатнашган аралаш типдаги тенглама учун чегаравий масалаларни ечиш белгилаб олинган.

Тадқиқотнинг предмети сифатида турли каср тартибли операторлар қатнашган аралаш хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун тўғри ва тескари қўйилган масалаларни асослаш билан белгиланади .

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертацияда математик анализ, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар, математик физика, Волтерра интеграл тенгламаларини ечиш усулларидан, чизиқли операторларнинг спектрал ва Миттаг-Леффлер типидаги махсус функциялар назарияларидан ҳамда Фурье қаторлари хоссаларидан фойдаланилган.

Тадқиқот илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

тўртбурчак соҳанинг параболик қисмида Капуто оператори қатнашган аралаш типдаги тенглама учун Трикоми масаласига ўхшаш масала ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган ҳамда ечим Фурье қаторининг йиғиндиси кўринишида топилган;

тўртбурчак соҳанинг каср тартибли Капуто оператори қатнашган аралаш типдаги тенглама учун улаш чизиғида узилишли шарт қатнашган чегаравий масала ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган;

тўртбурчак соҳада бир жинсли бўлмаган Капуто маъносида каср тартибли аралаш типдаги спектрал параметрли тенглама учун учта улаш шарти билан берилган тўғри масаланинг регуляр ечими топилган;

аралаш соҳада каср тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун иккинчи турдаги шарт қатнашган чегаравий масаланинг бир қийматли ечилиши исботланган;

тўртбурчак соҳада Риман-Лиувилль ва Капуто операторлари қатнашган тенглама учун тескари масаланинг бир қийматли ечилиши исботланган. Масала ечими бир ўлчовли спектрал масаланинг хос функциялар қатори кўринишига келтирилган;

тўртбурчак соҳада Риман-Лиувилль маъносидаги каср тартибли оператор қатнашган аралаш типдаги юкланган тенглама учун тескари масала ечимининг ягоналиги, мавжудлиги ва турғунлиги исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

тўртбурчак соҳада Риман-Лиувилль ва Капуто операторлари қатнашган тенглама учун тескари масаланинг бир қийматли ечими хос функциялар қатори кўринишида топилган;

каср тартибли оператор қатнашган тескари масалалар ечимнинг турғунлик баҳосидан фойдаланиб, зилзилалар ва вулқон отилишларининг математик моделлари тузилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги дифференциал тенгламалар, математик анализ, тескари масалалар назарияси, спектрал таҳлил усуллари қўлланилганлиги, математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги, шунингдек, теоремаларнинг тўлиқ исботлари билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти олинган илмий натижаларнинг каср тартибли тенгламалар учун чегаравий масалалар назариясини янада ривожлантириши билан изохланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти табиатдаги диффузия жараёнларини, ер ости сувлари, газ ва кам сиқиладиган суюқликнинг ғовакли муҳитда ҳаракатланишини ўрганишдаги жараёнлар учун татбиқ этилиши билан изохланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Тўртбурчак соҳада каср тартибли операторлар қатнашган аралаш типдаги тенгламалар учун чегаравий масалаларга оид илмий натижалар асосида:

каср тартибли бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган аралаш типдаги тенгламалар учун чегаравий масалаларнинг корректлик тўпламидаги ечимлар кўринишидан ОТ–Ф4–(36+32) рақамли “Тоқ тартибли хусусий ҳосилали тенгламалар учун ноклассик бошланғич ва спектрал масалалар ва уларнинг тадбиқлари” мавзусидаги фундаментал лойиҳада тоқ тартибли хусусий ҳосилали тенгламалар учун ноклассик бошланғич ва спектрал масалалар ечимларини қуришда фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2020 йил 10 ноябрдаги №87-03-4543 рақамли маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши масалаларнинг корректлигини исботлаш имкониятини берган;

тескари масалаларнинг умумий ечими ва ечимнинг турғунлигини баҳолашдан АААА-А19-119072290002-9 рақамли “Природные катастрофы Камчатки - землетрясения и извержение вулканов” номли хорижий лойиҳада зилзилалар ва вулқон отилишларининг математик моделини тузишда фойдаланилди (Витус Беринг Камчатка давлат университети, 2021 йил 22 мартдаги 18-12-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши тескари масаланинг умумий ечимини аниқлашнинг сонли усулини қуриш имкониятини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Диссертациянинг асосий натижалари 3 та халқаро ва 4 та республика илмий - амалий анжуманларида, жами 7 та илмий - амалий анжуманларда муҳокамадан ўтган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 14 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестацияси комиссиясининг фалсафа доктори диссертацияларини ҳимоя қилишда тавсия этилган илмий нашрлар рўйхатида 6 та мақола, жумладан, 3 таси хорижий ва 3 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 119 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланади хамда тадқиқотнинг Ўзбекистон Республикаси фан ва техника тараққиётининг устувор йўналишларига мувофиқлиги аниқланади. Диссертация мавзуси ва муаммони ўрганиш даражаси бўйича чет эл ва МДҲ давлатларида қилинган илмий тадқиқотлари бўйича умумий маълумотлар берилган. Мақсад ва вазифалар шакллантирилиб, тадқиқот объекти ва предмети аниқланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, илмий натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган. Тадқиқот натижаларини амалга ошириш, нашр этилган ишлар ва диссертациянинг тузилиши тўғрисида маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«Каср тартибли оператор қатнашган аралаш типдаги тенгламалар учун чегаравий масалалар»** деб номланган биринчи бобида, бутун ва каср тартибли оператор қатнашган аралаш типдаги тенгламалар учун зарур маълумотлар келтирилган ва тўртбурчак соҳада каср тартибли Капуто оператори қатнашган аралаш типдаги тенглама учун янги чегаравий масалалар ўрганилган.

Ушбу бобнинг биринчи параграфида баъзи маълум бўлган фактлар келтирилган хамда бутун ва каср тартибли аралаш типдаги тенгламалар учун керакли маълумотлар берилган.

Иккинчи ва учинчи параграфларда, тўртбурчак соҳада каср тартибли Капуто оператори қатнашган аралаш типдаги бир жинсли тенглама учун тўғри масалалар ўрганилган.

$\Omega=\{(x,y):\ 0<x<1,\ -p<y<q\}$ тўртбурчак соҳада қуйидаги тенгламани қараймиз:

$$0=\begin{cases} u_{xx}-{}_cD_{0y}^{\alpha}u & при\quad y\geq 0, \\ u_{xx}-u_{yy} & при\quad y<0 \end{cases} \tag{1}$$

бу ерда $p>0,\ q>0$ $-$берилган ҳақиқий сонлар ва ${}_cD_{0y}^{\alpha}$ $-$тартиби α бўлган каср тартибли Капуто оператори.[2]

Қуйидаги белгилашлашларни киритамиз: $J=\{(x,y):0<x<1,\ y=0\}$, $\Omega_1=\Omega\bigcap\{(x,y):\ x>0,\ y>0\}$, $\Omega_2=\Omega\bigcap\{(x,y):\ x>0,\ y<0\}$, $\Omega=\Omega_1\bigcup\Omega_2\bigcup J$.

1-масала. Ω соҳада қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $u(x,y)$ функция топилсин: 1) $u(x,y)\in C(\bar{\Omega}),\ y^{1-\alpha}u_y(x,y)\in C(\Omega_1);$ 2) ${}_cD_{0y}^{\alpha}u\in C(\bar{\Omega}_1)$, $u(x,y)\in C_x^2(\bar{\Omega})\cap C_y^2(\bar{\Omega}_2)$ синфга тегишли бўлиб, $\Omega_j\,(j=1,2)$ соҳадаларда (1) тенгламани қаноатлантирсин; 3) J чизиқда қуйидаги улаш шартлари бажарилсин:

$$u(x,+0)=u(x,-0),\quad (x,0)\in\bar{J},\ \lim_{y\to+0}y^{1-\alpha}u_y(x,y)=\lim_{y\to-0}u_y(x,y),\ (x,0)\in J\,; \tag{2}$$

---

[2]Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с

4) $u(x,y)$ қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирсин:

$$u(0,y)=0,\ u(1,y)=0,\quad -p\le y\le q,\ u(x,-p)=\psi(x),\quad 0\le x\le 1, \tag{3}$$

бу ерда $\psi(x)$ – етарли даражада силлиқ функция.

Мазкур параграфнинг асосий натижаси қуйидаги теоремадан иборат.

1-теорема. *Агар* $u(x,y)$ *функция учун 1-масалани ечими мавжуд бўлса, у ҳолда фақат ва фақатгина* $\Delta_n(p)\equiv\Gamma(\alpha)\cos n\pi p+\pi n\sin n\pi p\ne 0,\ n\in N$ *шарт бажарилганда, у ягона бўлади.*

1-мисол. Агар $p=(\pi k-\nu_n)/\lambda_n,\ \nu_n=\arcsin\left\{\Gamma(\alpha)\big/\sqrt{\Gamma^2(\alpha)+\lambda_n^2}\right\},\ k,n\in N,$ $\lambda_n=\pi n$ бўлса, у ҳолда $\Delta_n(p)=0$ бўлади.

1-натижа. *Чексиз кўп* $p\in\mathbb{R}^+$ *учун* $\Delta_n(p)=0$ *тенглик ўринли бўлса, у ҳолда бундай* p *лар учун 1-масала ечими нокоррект бўлади.*

2-натижа. *Агар* $\psi(x)=0$ *ва* $\Delta_n(p)=0$ *бўлса, у ҳолда 1-масала*

$$u_r(x,y)=\begin{cases} E_{1/\alpha}\left(-\lambda_r^2y^\alpha,1\right)X_r(x), & 0<y<q,\\ \left[\Gamma(\alpha)\cos r\pi y-\lambda_r\sin\pi r y\right]X_r(x), & -p<y<0,\end{cases}$$

нолдан фарқли ечимга эга бўлади, бу ерда $X_r(x)=\sqrt{2}\sin\lambda_r x,\ r\in N,$ ва $E_{1/\alpha}(z,\mu)$ – Миттаг-Леффлер функцияси[3].

1-масала ечими мавжудлигини асослаш учун қуйидаги леммалар исботланган:

1-лемма. *Барча* $n\in N$ *ва* $p\in\mathbb{Q}^+$ *учун шундай* $C_1>0$ *мавжудки,* $|\Delta_n(p)|\ge C_1>0$ *тенгсизлик бажарилади.*

2-лемма. *Агар 1-лемма шартлари бажарилса, у ҳолда барча* $n\in N$ *лар учун қуйидаги баҳолар ўринли:*

$$\left|c_n\right|\le M_1\left|\psi_n\right|,\ \left|b_n\right|\le M_2 n\left|\psi_n\right|,\ \left|u_n(y)\right|\le M_3 n\left|\psi_n\right|,\ y\in[-p,q],$$

$$\left|{}_cD_{0y}^\alpha u_n(y)\right|\le M_4 n^2\left|\psi_n\right|,\quad y\in[0,q],\ \left|u_n''(y)\right|\le M_5 n^3\left|\psi_n\right|,\ y\in[-p,0],\ M_i=const>0,\ (i=\overline{1,5}).$$

3-лемма. *Агар* $\psi(x)\in C^4[0,1],\quad \psi^{(i)}(0)=\psi^{(i)}(1)=0,\ i=0,2$ *бўлса, у ҳолда қуйидаги ифода* $\psi_n=\psi_n^{(4)}\big/(\pi n)^4$, *ўринли бўлади,*

бу ерда $\psi_n^{(4)}=\sqrt{2}\int\limits_0^1\psi^{(4)}(x)\sin\pi n x dx,\qquad \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|\psi_n^{(4)}\right|^2\le\left\|\psi^{(4)}(x)\right\|_{L_2[0,1]}^2.$

1- масала учун қуйидаги теорема мавжуд:

---

[3]Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.

2-теорема. *Агар* $\psi(x)$ *функция 1-чи ва 3-чи лемма шартларини бажарса, у ҳолда 1- масаланинг ягона ечим мавжуд* $u(x,y)=\sqrt{2}\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(y)\sin\pi nx$ *қаторлар билан аниқланади, бу ерда* $\psi_n=\sqrt{2}\int_0^1\psi(x)\sin\pi nxdx$,

$$u_n(y)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\alpha)\psi_n}{\Delta_n(p)}E_{1/\alpha}(-\pi^2n^2y^\alpha,1), & 0<y<q,\\[2mm] \dfrac{\psi_n}{\Delta_n(p)}\left[\Gamma(\alpha)\cos n\pi y-\pi n\sin n\pi y\right], & -p<y<0.\end{cases}$$

1-масала ечимининг турғинлиги ҳақидаги теорема.

3-теорема. *Агар 1-чи ва 3-чи лемма шартлари ва* $\Delta_n(p)\neq 0,\ n=1,2,...,n_0$ *бажарилса, у ҳолда 1-масалани ечими учун қуйидаги баҳолар ўринли:*

$$\|u(x,y)\|_{L_2[0,1]}\le M_6\|\psi'(x)\|_{L_2[0,1]},\quad \|u(x,y)\|_{C(\bar\Omega)}\le M_7\|\psi''(x)\|_{C[0,1]},$$

бу ерда $M_i\,(i=6,7)$ *– мусбат ўзгармаслар бўлиб,* $\psi(x)$ *функцияга боғлиқ эмас*.

Биринчи бобнинг учинчи параграфида аралаш типдаги каср тартибли тенглама учун улаш чизиғида узилишли шарт қатнашган тўғри масала ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган.

$\Omega=\Omega_1\bigcup\Omega_2\bigcup I$ тўртбурчак соҳада қуйидаги

$$0=\begin{cases}u_{xx}-{}_cD_{0y}^{\alpha}u-\mu^2u & (x,y)\in\Omega_1,\\ u_{xx}-u_{yy}-\mu^2u & (x,y)\in\Omega_2\end{cases}\tag{4}$$

тенглама учун улаш чизиғида узилишли шарт қатнашган тўғри масалани қараймиз, бу ерда $\Omega,\ \Omega_1,\ \Omega_2$ лар § 1.2 да аниқланган, $I=\{(x,y):\ 0<x<l,\ y=0\}$.

2-масала. Ωсоҳада қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $u(x,y)$ функция топилсин: 1) $u(x,y)\in C(\bar\Omega_j),\ y^{1-\alpha}u_y(x,y)\in C(\bar\Omega_1)$; 2) ${}_cD_{0y}^{\alpha}u\in C(\bar\Omega_1)$, $u(x,y)\in C_y^2(\bar\Omega_2)\cap C_x^2(\bar\Omega)$, синфга тегишли бўлиб, $\Omega_j\,(j=1,2)$соҳадаларда (4) тенгламани қаноатлантирсин; 3) I чизиқда қуйидаги

$$u(x,+0)=a_1u(x,-0)+b_1(x),\ (x,0)\in\bar I,\quad \lim_{y\to+0}y^{1-\alpha}u_y(x,y)=a_2\lim_{y\to-0}u_y(x,y)+b_2(x),\ (x,0)\in I;$$

улаш шартлари бажарилсин; 4) $u(x,y)$ функция (3) шартларни қаноатлантирсин, бу ерда $b_j(x)\,(j=1,2)$ – етарли даражада силлиқ функциялар, бундан ташқари $a_j\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

1.3 параграфнинг асосий натижаси қуйидаги теоремалардан иборат.

4-теорема. *Агар* $u(x,y)$ *функция учун 2-масалани ечими мавжуд бўлса, у ҳолда фақат ва фақатгина* $\tilde{\Delta}_n(p) \equiv a_2\Gamma(\alpha)cos\rho_n p + \rho_n a_1 sin\rho_n p \neq 0$, $n \in N$, $\rho_n = \sqrt{\lambda_n^2 + \mu^2}$, $\lambda_n = \pi n/l$, $n \in N$ *шарт ўринли бўлса, у ягона бўлади.*

5-теорема. *Агар* $\psi(x) \in C^4[0,l]$, $b_1(x) \in C^5[0,l]$, $b_2(x) \in C^3[0,l]$, $b_2^{(i)}(0) = b_2^{(i)}(l)$, $\psi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(l) = 0$, $i = 0,2$, $b_1^{(j)}(0) = b_1^{(j)}(l) = 0$, $j = 0,2,4$, *ва* $|\tilde{\Delta}_n(p)| \geq R_0 > 0$ *бўлса, унда 2-масаланинг ягона ечими мавжуд ва у* $u(x,y) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(y)\, sin\lambda_n x$ *қатор билан аниқланади, буерда*

$$u_n(y) = \begin{cases} \dfrac{a_1}{\tilde{\Delta}_n(p)}\left\{-\left[\dfrac{\Gamma(\alpha)b_{2n}}{\rho_n} + \rho_n b_{1n}\right]sin\rho_n p + a_2\Gamma(\alpha)\psi_n\right\}E_{1/\alpha}(-\rho_n^2 y^\alpha, 1) + \\ \qquad + b_{1n}E_{1/\alpha}(-\rho_n^2 y^\alpha, 1), \qquad 0 < y < q, \\ \dfrac{1}{\tilde{\Delta}_n(p)}\left\{\left[a_2\Gamma(\alpha)\cos\rho_n y - \rho_n a_1 \sin\rho_n y\right]\psi_n - \left[\dfrac{\Gamma(\alpha)b_{2n}}{\rho_n} + \rho_n b_{1n}\right]\times\right. \\ \left.\times\left[sin\rho_n p cos\rho_n y - \dfrac{a_1\rho_n}{a_2\Gamma(\alpha)} sin\rho_n p sin\rho_n y\right]\right\}, \quad -p < y < 0. \end{cases}$$

Диссертациянинг **“Каср тартибли бир жинсли бўлмаган аралаш типдаги тенгламалар учун учта улаш шарти билан берилган тўғри масалалар”** номли иккинчи бобида тўртбурчак соҳада каср тартибли Капуто оператори қатнашган бир жинсли бўлмаган аралаш типдаги тенглама учун учта улаш шарти билан берилган тўғри чегаравий масалаларининг бир қийматли ечилиши ўрганилган.

Ушбу бобнинг § 2.1-параграфида спектрал усул ёрдамида тўртбурчак соҳада каср тартибли Капуто оператори қатнашган аралаш типдаги тенглама учун қўйилган тўғри чегаравий масала ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган.

$\Omega = \{(t,x):\ -p < t < q,\ 0 < x < l\}$ тўртбурчак соҳада қуйидаги

$$f(t,x) = \begin{cases} {}_cD_{0t}^\alpha u - u_{xx} + \lambda^2 u, & t \geq 0, \\ u_{tt} - u_{xx} + \lambda^2 u, & t < 0, \end{cases} \tag{5}$$

тенгламани қараймиз, бу ерда $\lambda \geq 0,\ l > 0,\ p > 0, q > 0 -$ берилган ҳақиқий сонлар, $f(t,x) -$ берилган функция ва ${}_cD_{0y}^\alpha -$ тартиби $\alpha(0 < \alpha \leq 1)$ бўлган Капуто маъносидаги каср тартибли оператор бўлиб, (2) формула билан аниқланади.

3-масала. Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $u(x,y)$ функция топилсин: 1) $u(t,x)\in C(\bar{\Omega})$, $t^{1-\alpha}u_t(t,x)$, $t^{2-\alpha}u_{tt}(t,x)\in C(\Omega_1)$; 2) ${}_cD_{0t}^{\alpha}u\in C(\bar{\Omega}_1)$, $u(t,x)\in C_t^2(\bar{\Omega}_2)\cap C_x^2(\bar{\Omega})$ синфга тегишли бўлиб, $\Omega_j\ (j=1,2)$ соҳаларда (5) тенгламани қаноатлантирсин; 3) I чизиқда қуйидаги улаш шартлари бажарилсин:

$$u(+0,x)=u(-0,x),\qquad (0,x)\in\bar{I}, \tag{6}$$

$$\lim_{t\to+0}t^{1-\alpha}u_t(t,x)=\lim_{t\to-0}u_t(t,x),\qquad (0,x)\in I, \tag{7}$$

$$\lim_{t\to+0}t^{2-\alpha}u_{tt}(t,x)=\lim_{t\to-0}u_{tt}(t,x),\qquad (0,x)\in I; \tag{8}$$

4) $u(t,x)$ функция қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирсин

$$u(t,0)=0,\quad u(t,l)=0,\quad -p\le t\le q. \tag{9}$$

1-Изоҳ. М.М.Хачев[4] ва К.Б.Сабитов[5] ларнинг нашр этган ишларида тўртбурчак соҳаларда иккинчи тартибли аралаш типдаги параболик-гиперболик ва эллиптик-гиперболик тенгламалар учун чегаравий масалалар иккита улаш шарти билан ўрганилган. Ушбу масалаларнинг бир қийматли ечилишида, соҳанинг гиперболик қисмининг чегараларида шартлар пайдо бўлади. Шу сабабли, ўрганилаётган масалалар ихтиёрий тўртбурчакда ҳал этилмайди. Бизнинг ҳолатимизда, агар биз (8) улаш шартини рад этсак, у ҳолада қуйидаги шартни қўйиш керак бўлади:

$$u(-p,x)=\psi(x),\qquad 0<x<l. \tag{10}$$

(10) шарт туфайли, қўйилган масаланинг бир қийматли ечилиши учун қуйидаги

$$\Delta_n(p)\equiv cos\,\lambda_n p+\lambda_n sin\,\lambda_n p\ne 0,\quad \lambda_n=\pi n/l,\quad n\in N \tag{11}$$

шарт келиб чиқади.

Академик Ш.А.Алимов[6] томонидан (11) шартнинг бажарилиши учун p сони иррационал бўлишлиги кўрсатилган. Агар 3-масала (8) шарт асосида ечилса, у ҳолда масала ихтиерий тўртбурчак соҳада ҳал қилинади.

3-масала ечимининг ягоналиги тўғрисида қуйидаги теорема мавжуд.

6-теорема. *Агар 3-масалани ечими мавжуд бўлса, у ягонадир.*

6-теорема спектрал анализ усуллари ёрдамида исботланади.

---

[4]Хачев М.М. Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лаврентьев –Бицадзе в прямоугольной области. // «Дифференциальные уравнения». 1978. Т.14. № 1 . С.136-1

[5]Сабитов К. Б. Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. Москва : Наука, 2016. 271 с.

7-теорема. *Агар* $f(t,x),\ f'_x(t,x),\ f''_{xx}(t,x),\ f'_t(t,x)\in C(\overline{\Omega})$ *ва* $f''_{tt}(t,x)\in L_2(\Omega),\ f(t,0)=f(t,l)=0,\quad -p\le t\le q$ *бўлса, у ҳолда 3-масаланинг регуляр ечими мавжуд ва қуйидаги формулалар билан аниқланади:*

$$u(t,x)=\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\vartheta_n(x)\left[\dfrac{f_n(0)}{\rho_n^2}E_{1/\alpha}(-\rho_n^2t^\alpha,1)+\int\limits_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}\left(-\rho_n^2(t-\tau)^\alpha,\alpha\right)f_n(\tau)d\tau\right], & (t,x)\in\Omega_1,\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\vartheta_n(x)\left[\dfrac{f_n(0)}{\rho_n^2}\cos\rho_n t+\dfrac{1}{\rho_n}\int\limits_t^0 f_n(\tau)\sin\rho_n(\tau-t)d\tau\right], & (t,x)\in\Omega_2,\end{cases}\tag{12}$$

бу ерда

$$f_n(t)=\int\limits_0^l f(t,x)\vartheta_n(x)dx,\ \vartheta_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\mu_n x,\ \rho_n=\sqrt{\mu_n^2+\lambda^2},\quad \mu_n=\frac{\pi n}{l},\quad n\in N.\tag{13}$$

7- теоремани исботлашда қуйидаги леммалар муҳим ўрин эгаллайди.

4-лемма. *Агар 7-теоремани шартлари бажарилса, у ҳолда ихтиёрий* $t\in[-p,q]$ *ва* $0<\varepsilon<1$ *учун*

$$\begin{cases}\left|u_n(t)\right|\le C_1\left[\dfrac{1}{\mu_n^4}+\dfrac{1}{\mu_n^{4-\varepsilon}}\right], & 0\le t\le q,\\ \left|u_n(t)\right|\le\dfrac{C_2}{\mu_n^4}, & -p\le t\le 0,\quad n\in N\end{cases}\tag{14}$$

тенгсизлик ўринли бўлади, бу ерда $C_1=M_1M_2\sqrt{\dfrac{2}{l}}max\left\{\dfrac{\ln 2q^\alpha+\alpha}{\alpha},\dfrac{2}{\alpha\varepsilon}\right\}$,
$C_2=2\sqrt{\dfrac{2}{l}}M_1,\ u_n(t)-$ *эса (12) дан аниқланади,* $M_j=const>0,\ (j=1,2)$.

5-лемма. *Агар* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}\in L_2(\Omega_2),\ f(x,t)\in C_{x,t}^{0,1}\left(\overline{\Omega_2}\right)$ *шартлар бажарилса, у ҳолда* $\left|\dfrac{1}{\rho_n}\int\limits_t^0 f_n^{(k)}(\tau)\sin\rho_n(t-\tau)d\tau\right|\le\dfrac{l\sqrt{p}}{\pi\mu_n}\left\|f_n^{(k)}\right\|_{L_2(-p,0)},\quad k=0,1,2.$ *тенгсизлик ўринли бўлади.*

6-лемма. *Агар 7-теоремани шартлари бажарилса, у ҳолда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(t)\vartheta_n(x)$ *Фурье қатори* $\overline{\Omega}$ *соҳада абсолют ва текис яқинлашувчи бўлади.*

5-ва 6-леммалар Коши-Буняковский ва Бессел тенгсизликлари ёрдамида исботланади.

4-6 леммаларни ва 7-теорема шартларини ҳисобга олиб, (12) қаторларни абсолют ва текис яқинлашувчи бўлишлиги кўрсатилган.

(12) да қатнашган қаторларнинг яқинлашувчилигидан хулоса қилишимиз мумкинки, 3-масалани регуляр ечими мавжуд бўлиб, у (6) - (9) шартларини ҳамда (5) тенгламани Ω_1 ва Ω_2соҳадаларда мос равишда қаноатлантиради.

Иккинчи бобнинг 2.2 параграфида Ω соҳада $\lambda=0$ да (5) тенглама учун 4- масалани иккинчи турдаги чегаравий шарт билан таҳлил этилган.

Диссертация ишининг **“Тўртбурчак соҳада Риман-Лиувилль ва Капуто операторлари қатнашган аралаш типдаги тенгламалар учун тескари масалалар”**деб номланган учинчи боби икки параграфдан иборат бўлиб, уларда Риман-Лиувилль ва Капуто маъносидаги каср тартибли интеграл-дифференциал оператор қатнашган аралаш типдаги тенгламалар учун тескари масалалар ўрганилган.

Учинчи бобининг биринчи параграфда тўртбурчак соҳадаги Риман-Лиувилль ва Капуто операторлар қатнашган аралаш типдаги тенглама учун тескари масала ўрганилган. Тескари масала ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги теоремалар исботланган. Масаланинг ечимига мос келадиган бир ўлчовли спектрал масаланинг хос функциялари ёрдамида тескари масала ечими Фурье қаторлар кўринишида топилган. Сунгра масаланинг бир қийматли ечилиши тўртбурчак соҳанинг чегарасини танлашга боғлиқлиги исботланган. Бир жинсли шартларида тескари масала нотривиал ечимга эга бўлишига мисол қурилган.

$\Omega=\{(x,y):\ 0<x<1,\ -p<y<q\}$ соҳада қуйидаги

$$Lu=f(x,y) \tag{15}$$

тенгламани қараймиз, бу ерда

$$Lu=\begin{cases} u_{xx}+\int\limits_y^q\left[D_{0t}^{\alpha-1}u_{tt}(x,t)\right]dt-\lambda^2u, & y\ge 0,\\ u_{xx}-u_{yy}-\lambda^2u, & y<0,\end{cases}\qquad f(x,y)=\begin{cases} f_1(x), & y>0,\\ f_2(x), & y<0,\end{cases} \tag{16}$$

$\lambda>0,\ p>0,\ q>0$ – берилган ҳақиқий сонлар ва $D_{0y}^{-\alpha}[\cdot]-\alpha\in(0,1)$ тартибли Риман-Лиувилль маъносидаги каср тартиб оператор бўлиб, қуйидаги формула билан аниқланади: $D_{0y}^{-\alpha}\upsilon(y)\equiv I_{0y}^{\alpha}\upsilon(y)=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^y\dfrac{\upsilon(t)dt}{(y-t)^{1-\alpha}}$.

Қуйидаги белгилашлашларни киритамиз: $J=\{(x,y):0<x<1,\ y=0\}$, $\Omega_1=\Omega\cap\{(x,y):\ x>0,\ y>0\}$, $\Omega_2=\Omega\cap\{(x,y):\ x>0,\ y<0\}$, $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup J$.

5-тескари масала. Ωсоҳада қуйидагишартларни қаноатлантирувчи $u(x,y)$ва $f(x,y)$ функциялар топилсин:

$$u(x,y)\in C^1(\bar{\Omega})\cap C_y^2(\bar{\Omega}_2)\cap C_x^2(\bar{\Omega}),\ \int\limits_y^q \left[D_{0t}^{\alpha-1}u_{tt}(x,t)\right]dt\in C(\bar{\Omega}_1), \tag{17}$$

$$f_j(x)\in C(0,1)\bigcap L_2\left[0,1\right], \tag{18}$$

$$Lu=\begin{cases} f_1(x), & y>0,\\ f_2(x), & y<0,\end{cases} \tag{19}$$

$$u(0,y)=0,\qquad u(1,y)=0,\qquad -p\le y\le q, \tag{20}$$

$$u(x,-p)=\psi(x),\quad u_y(x,-p)=g(x),\quad u(x,q)=\varphi(x),\quad 0\le x\le 1, \tag{21}$$

буерда $\psi(x),\ \ g(x),\ \ \varphi(x)-$етарли даражада силлиқ функциялар.

5-тескари масала учун қуйидаги теорема мавжуд:

8-теорема. *Агар (15) - (21) тескари масаланинг ечими мавжуд бўлиб, қуйидаги*

$$\Delta_{pq}(k)=2\sqrt{1+(q\rho_k)^2E_{1/\alpha}^2\left[-\rho_k^2q^\alpha,2\right]}\,sin\left(\frac{\rho_k p}{2}+\nu_k\right)sin\frac{\rho_k p}{2}\ne 0 \ \text{барча}\ k\in N, \tag{22}$$

шарт бажарилса, у ечим ягонадир, бу ерда $\rho_k=\sqrt{\mu_k^2+\lambda^2},\quad \mu_k=\pi k,\ \ E_{1/\alpha}(z,\mu)-$ *Миттаг-Леффлер функцияси,* $\nu_k=arcsin\left\{q\rho_kE_{1/\alpha}\left[-\rho_k^2\,q^\alpha,2\right]\Big/\sqrt{1+(q\rho_k)^2E_{1/\alpha}^2\left[-\rho_k^2q^\alpha,2\right]}\right\}.$

2-мисол. Агар $p=2\pi n/\rho_k,\quad n\in N$ ёки $p=(2\pi m-2\nu_k)/\rho_k,\quad m,k\in N$ бўлса, $\Delta_{pq}(k)=0$ бўлади.

3-натижа. *Агар* $\varphi(x)\equiv 0,\ \psi(x)\equiv 0,\ g(x)\equiv 0,\ \Delta_{pq}(k)=0$ *ва* $sin\,\rho_k p\ne 0$ *бўлса, 5- тескари масала қуйидаги*

$$u_k(x,y)=\begin{cases} -\sqrt{2}sin\mu_k x\int\limits_y^q E_{1/\alpha}\left[-\rho_k^2t^\alpha,1\right]d\,t, & 0\le y\le q,\\ \dfrac{\sqrt{2}sin\,\mu_k x}{sin\,\rho_k p}\Big\{\Big(1+q\rho_kE_{1/\alpha}\left[-\rho_k^2\,q^\alpha,2\right]sin\,\rho_k p\Big)cos\,\rho_k y- & \\ \qquad -1-sin\,\rho_k p sin\,\rho_k y\Big\}, & -p\le y\le 0,\end{cases} \tag{23}$$

$$f_{1k}(x)=0,\qquad f_{2k}(x)=\frac{\sqrt{2}\rho_k^2 sin\,\mu_k x}{sin\,\rho_k p},$$

кўринишдаги нотривиал ечимга эга бўлади, бу ерда $E_{1/\alpha}(z,\mu)-$*Миттаг-Леффлер функциясидир.*

4-натижа. *Агар* $\varphi(x)\equiv 0$, $\psi(x)\equiv 0$, $g(x)\equiv 0$, $\Delta_{pq}(k)=0$ *ва* $sin\,\rho_k p\neq 0$ *бўлса, у ҳолда 5- тескари масала қуйидаги*

$$u_k(x,y)=\begin{cases} 0, & 0\le y\le q, \\ \dfrac{\sqrt{2}f_{2k}}{\rho_k^2}\left(cos\,\rho_k y-1\right)sin\,\mu_k x, & -p\le y\le 0, \end{cases} \tag{24}$$

$$f_{1k}=0,\quad f_{2k}(x)=\sqrt{2}\ f_{2k}sin\mu_k x,$$

кўринишдаги нотриваиал ечимга эга бўлди, бу ерда $f_{2k}\neq 0-$ *ихтиёрий ўзгармас.*

5-тескари масала ечимининг мавжудлигини асослаш учун етарлича катта k ларда, $\Delta_{pq}(k)$ ифода нолдан фарқли асимптотиклар билан ажратиладиган $p,\ q,\ \alpha$ ва λ сонлар мавжудлигини кўрсатилади.

7-Лемма. *Агар* $p=2p_1,\quad p_1=a/b,\quad a,b\in N,\quad (a,b)=1,\ (b,2)=1$ *ва* $\lambda>0$ *бўлса, у ҳолда шундай* C_3 *ва* $k_0\in N$ *мусбат сонлар мавжуд бўладики, барча* $k>k_0$*учун*

$$\left|\Delta_{pq}(k)\right|>C_3/k \tag{25}$$

тенсизлик ўринли бўлади.

8-лемма. *Агар* $\lambda=0$ *бўлиб, чегараланмаган элементлари бўлган мусбат* $p_1=p/2-$ *иррационал сон бўлса, у ҳолда ихтиёрий* $\varepsilon>0$ *учун* k *натурал сонларнинг чексиз тўплами мавжуд бўлиб, қуйидаги* $\left|\Delta_{pq}(k)\right|\le\varepsilon C_4/k$ *тенгсизлик ўринли бўлади. Бу ерда* C_4- p *боғлиқ бўлган мусбат сон.*

Фурье усулидан фойдаланиб, 5- тескари масалани ечимни

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)u_k(y),\ f_j(x)=\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)f_{jk},\ (j=1,2), \tag{26}$$

кўринишда ифодалаймиз, бу ерда $u_k(y)$ ва $f_{jk}\ (j=1,2)-$ мос равишда, қуйидаги формула билан аниқланади:

$$u_k(y)=\begin{cases} \varphi_k-c_k\displaystyle\int_y^q E_{1/\alpha}\left[-\rho_k^2 t^{\alpha},1\right]d\,t, & 0<y<q, \\ \psi_k+\dfrac{1}{\rho_k}\left\{a_k\left(sin\,\rho_k\,y+sin\,\rho_k\,p\right)-b_k\left(cos\,\rho_k\,y-cos\,\rho_k\,p\right)\right\}, & -p<y<0 \end{cases} \tag{27}$$

ва

$$f_{1k}=-\rho_k^2\,\varphi_k,\ f_{2k}=-\rho_k^2\psi_k-\rho_k\left\{a_k sin\,\rho_k p+b_k cos\,\rho_k p\right\}, \tag{28}$$

бунда

$$a_k = c_k = \frac{1}{\Delta_{pq}(k)}\left[(cos\rho_k p - 1)g_k - \rho_k(\varphi_k - \psi_k) sin\,\rho_k p\right], \quad k \in N, \tag{29}$$

$$b_k = \frac{1}{\Delta_{pq}(k)}\left[\rho_k(\varphi_k - \psi_k) cos\,\rho_k p - \left\{q\rho_k E_{1/\alpha}\left[-\rho_k^2\, q^{\alpha}, 2\right] + sin\,\rho_k p\right\} g_k\right], \tag{30}$$

$$\varphi_k = \sqrt{2}\int_0^1 \varphi(x)\, sin\,\mu_k\, xdx,\ \psi_k = \sqrt{2}\int_0^1 \psi(x)\, sin\,\mu_k x\, dx,\ g_k = \sqrt{2}\int_0^1 g(x) sin\,\mu_k\, xdx. \tag{31}$$

Шундай қилиб, қуйидаги леммалар исботланади.

9-лемма. *7-лемма шартлари бажарилса, у ҳолда* $k > k_0$ *учун қуйидаги баҳолар ўринли:*

$$\left|c_k\right| \le M_1 k\left[k\left(\left|\varphi_k\right| + \left|\psi_k\right|\right) + \left|g_k\right|\right], \quad \left|b_k\right| \le M_2 k\left(k(\left|\varphi_k\right| + \left|\psi_k\right|) + \left|g_k\right|\right),$$

$$\left|u_k(y)\right| \le M_3 k\left[k\left(\left|\varphi_k\right| + \left|\psi_k\right|\right) + \left|g_k\right|\right], \qquad y \in [0, q],$$

$$\left|u_k(y)\right| \le M_4 k\left(k\left(\left|\varphi_k\right| + \left|\psi_k\right|\right) + \left|g_k\right|\right), \left|u_k''(y)\right| \le M_5 k\left(k\left(\left|\varphi_k\right| + \left|\psi_k\right|\right) + \left|g_k\right|\right), y \in [-p, 0],$$

$$\left|f_{1k}\right| \le M_6 k^2 \left|\varphi_k\right|, \left|f_{2k}\right| \le M_7 k^2\left(k\left(\left|\varphi_k\right| + \left|\psi_k\right|\right) + \left|g_k\right|\right), \quad M_i = const > 0,\ (i = \overline{1,7}).$$

9-лемманинг исботи (25) ва Миттаг-Леффлер функциясининг хоссаларини кўра (27)- (30) формулалардан келиб чиқади.

10-лемма. *Агар* $\varphi(x),\ \psi(x) \in C^5[0,1],\ \ g(x) \in C^4[0,1]$ *ва* $g^{(i)}(0) = g^{(i)}(1) = 0,$ $\varphi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(1) = \psi^{(i)}(1) = 0, \quad i = 0, 2, 4$ *бўлса, қуйидаги*

$$\varphi_k = -\frac{\varphi_k^{(5)}}{(\pi k)^5}, \quad \psi_k = -\frac{\psi_k^{(5)}}{(\pi k)^5}, \quad g_k = \frac{g_k^{(4)}}{(\pi k)^4}, \quad k \in N \tag{32}$$

ифодалар ўринли бўлади.

5-тескари масала ечимининг мавжудлиги ҳақидаги теорема:

9-теорема. *Агар* $\varphi(x),\ \psi(x),\ g(x)$ *функциялар учун 10-лемманинг шартлари ва (25) шарт барча* $k > k_0$ *учун бажарилса. У ҳолда,*

агар $k = 1, 2, ..., k_0$, *да* $\Delta_{pq}(k) \ne 0$ *бўлса, у ҳолда 5- тескари масаланинг ягона ечими мавжуд булиб, у (26) қаторлар билан аниқланади;*

агар $k = l_1, ..., l_m \le k_0$ *учун* $\Delta_{pq}(k) = 0$ *бўлса, у ҳолда қуйидаги*

$$\int_0^1 \varphi(x)\sin\mu_k xdx = 0,\ \int_0^1 \psi(x)\sin\mu_k xdx = 0,\ \int_0^1 g(x)\sin\mu_k xdx = 0 \quad при \quad k = l_1,...,l_m. \quad (33)$$

ортогоналлик шарти бажарилгадагина 5- тескари масала бир қийматли ечимга эга бўлади ва у

$$u(x,t) = \left(\sum_{k=1}^{l_1-1} + \sum_{k=l_1+1}^{l_2-1} + \cdots + \sum_{k=l_m+1}^{\infty} \right) u_k(y) X_k(x) + \sum_r B_r u_r(x,y), \quad (34)$$

$$f_i(x) = \left(\sum_{k=1}^{l_1-1} + \sum_{k=l_1+1}^{l_2-1} + \sum_{k=l_m+1}^{\infty} \right) f_{ik} X_k(x) + \sum_r B_r f_{ir}(x),\ (i = 1,2) \quad (35)$$

қаторлар билан аниқланади. Бунда $\sum_r$ *йиғиндининг* r *индекси* $l_1,...,l_m$ *қийматларни қабул қилади, бу ерда* $1 \le l_1 < ... < l_m \le k_0$, $m -$*берилнан натурал сонлар,* $B_r \ne 0 -$ *ихтиёрий ўзгармас сон,* $u_r(x,t)$ *ва* $f_{ir}(x)$ *функциялар эса (23) ва (24) формулалар орқали аниқланади.*

Шуни такитлаш лозимки, (34) ва (35) қаторларнинг чекли йиғиндиси нолга тенг бўлади, агар унинг қуйи чегараси юқори чегарадан катта бўлса.

11-лемма. *Агар* $\lambda < \pi$ *ва* $p_1 = \dfrac{p}{2}$ *иккинчи даражали иррационал алгебраик сон бўлиб, қуйидаги*

$$\delta - \frac{p_1}{2}\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2 - \frac{1}{2\pi} > 0 \quad и \quad \frac{p_1\lambda^2}{2} + \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}, \quad (36)$$

шартлар бажарилса, у ҳолда p_1 *ва* λ *боғлиқ шундай* C_4 *мусбат ўзгармас сон мавжуд бўладики, барча* $k \in N$ *да*

$$\left|\Delta_{pq}(k)\right| \ge \frac{C_4}{k^2} \quad (37)$$

тенгсизлик ўринли бўлади, бу ерда $\delta = \dfrac{2}{2p_1a_2 + a_1 + \sqrt{(2p_1a_2 + a_1)^2 + 4a_2}}$ *тенг агар* $2p_1a_2 + a_1 \ge \sqrt{a_2/2}$, $a_2 > 0$ *бўлса.*

12-лемма. *Агар* $\varphi(x),\ \psi(x) \in C^7[0,1],\ g(x) \in C^6[0,1]$ *и* $g^{(j)}(0) = g^{(j)}(1) = 0,\ j = 0,2,4;$ $\varphi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(1) = \psi^{(i)}(1) = 0,\ \ i = 0,2,4,6$ *бўлса, қуйидаги*

$$\varphi_k = -\varphi_k^{(7)}/(\pi k)^7,\ \ \psi_k = -\psi_k^{(7)}/(\pi k)^7,\ \ g_k = -g_k^{(6)}/(\pi k)^6,\ \ k \in N \quad (38)$$

ифодалар ўринли бўлади, бу ерда

$$g_n^{(6)} = \sqrt{2}\int_0^1 g^{(6)}(x) sin\,\mu_n x dx, \qquad \varphi_n^{(7)} = \sqrt{2}\int_0^1 \varphi^{(7)}(x) cos\,\mu_n x dx, \qquad \psi_n^{(7)} = \sqrt{2}\int_0^1 \psi^{(7)}(x) cos \mu_n \; x dx\,.$$

12-леммадан (28) қаторларнинг яқинлашиши келиб чиқади.

10-теорема. *Агар 11 ва 12 леммаларнинг шартлари бажарилса, у ҳолда 5-тескари масаланинг ягона ечими мавжуд булиб, у (26) қаторлар билан аниқланади.*

Учинчи бобнинг 3.2 параграфида, тўртбурчак $\Delta = \{(x,y):\, 0<x<l,\ -p<y<q\}$ соҳада каср тартибли Риман-Лиувилл оператор қатнашган бир жинсли бўлмаган аралаш типдаги

$$\begin{cases} f_1(x) \\ f_2(x) \end{cases} = \begin{cases} u_{xx} - D_{0y}^{\alpha-1} u_y(x,y) - \lambda^2 u + \dfrac{y^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} u_y(x,0), & y \ge 0, \\ u_{xx} - u_{yy} - \lambda^2 u, & y < 0 \end{cases} \tag{39}$$

юкланган тенглама учун (18) - (21) шарт билан тескари масала қўйилган, бу ерда $l > 0,\ p > 0,\ q > 0,\ \lambda \ge 0 -$ берилган ҳақиқий сонлар ва $D_{0y}^{\alpha-1}[\cdot] - \alpha \in (0,1)$ тартибли Риман-Лиувилль маъносидаги каср тартибли интеграл оператор бўлиб, қуйидаги формула билан аниқланади: $D_{0y}^{\alpha-1}\upsilon(y) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^y (y-t)^{-\alpha}\upsilon(t)dt.$

Спектрал анализ усулларидан фойдаланган ҳолда, (39), (18) -(21) тескари масала ечимининг ягоналиги исботланган. Тескари масаланинг регуляр ечими Фурье қатор кўринишида топилган ва бу ечим тўртбурчак соҳанинг чегарасини танлашга боғлиқ эканлиги кўрсатилган. Бир жинсли шартдаги тескари масаланинг нотривиал ечимига эга бўлишига мисол қурилган. Ечимда қатнашган қаторларнинг яқинлашувчилиги учун керакли баҳолар олинган ва тескари масала ечимнинг турғунлиги исботланган.

ХУЛОСА

Диссертация иши тўртбурчак соҳаларда каср тартибли турли операторлар қатнашган аралаш тенгламалар учун тўғри ва тескари масалаларни ечишга бағишланган. Юқорида такидланган фикрларга асосланиб шуни айтиш мумкинки, ўтказилган тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1.Тўртбурчак соҳанинг параболик қисмида Капуто оператори қатнашган аралаш типдаги тенглама учун Трикоми масаласига ўхшаш масала ечимининг мавжудлик ва ягоналик теоремалари исботланган. Масаланинг ечими Фурье қаторининг йиғиндиси кўринишида топилган;

2.Тўртбурчак соҳанинг каср тартибли Капуто оператори қатнашган аралаш типдаги тенглама учун улаш чизиғида узилишли шарт қатнашган чегаравий масала ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган;

3.Тўртбурчак соҳада бир жинсли бўлмаган Капуто маъносида каср тартибли аралаш типдаги спектрал параметрли тенглама учун учта улаш шарти билан берилган тўғри масаланинг регуляр ечими топилган;

4.Тўртбурчак соҳада Риман-Лиувилль ва Капуто операторлари қатнашган тенглама учун тескари масаланинг бир қийматли ечилиши исботланган. Масала ечими бир ўлчовли спектрал масаланинг хос функциялари қатор йиғиндиси кўринишида келтирилган;

5.Бир жинсли тескари масала нотривал ечимга эга бўлиши мисол ёрдамида кўрсатилган;

6.Тўртбурчак соҳада Риман-Лиувилль маъносидаги каср тартибли оператор қатнашган аралаш типдаги юкланган тенглама учун тескари масалани ечимининг ягоналиги, мавжудлиги ва турғунлиги исботланган.

Юқоридаги масалаларни ўрганиш учун ишлаб чиқилган усуллардан каср тартибли аралаш тенгламалар учун чегаравий масалалар назариясини янада ривожлантириш учун фойдаланиш мумкин. Диссертация ишида олинган натижалар табиатдаги диффузия жараёнлари, ер ости сувлари, газ ва кам сиқиладиган суюқликнинг ғовакли муҳитда ҳаракатланиш жараёнларни математик моделини қуришда қўллаш мумкин.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.07.2019.FM.02.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ САМАРКАНДСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УБАЙДУЛЛАЕВ УЛУҒБЕК ШУКИРИЛЛАЕВИЧ

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СМЕШАННЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРАМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА В ПРЯМОУГОЛЬННОЙ ОБЛАСТИ

01.01.02 - Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Самарканд – 2021

Тема диссертации доктора философии (PhD) зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за B2020.4.PhD/FM222.

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.samdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный консультант:	**Исломов Бозор Исломович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Дурдиев Дурдимурод Каландарович** доктор физико-математических наук, профессор
	Каримов Эркин Тулкинович доктор физико-математических наук
Ведущая организация:	**Ургенчский государственный университет**

Защита диссертации состоится «06» 07 2021 года в «10^00» часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 при Самаркандском государственном университете. (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (+99866)231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Самаркандского государственного университета (зарегистрирована за №24). (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (+99866)231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38).

Автореферат диссертации разослан «19» 06 2021 года.
(протокол рассылки № 2 от «19» 06 2021 года).

А.С.Солеев
Председатель научного совета по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н., профессор

А.М.Халхужаев
Ученый секретарь научного совета по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н.

А.Б.Хасанов
Председатель научного семинара при научном совете по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многочисленные научные и практические исследования в области математики во всем мире показывают, что математическая модель многих процессов приводит к исследованию локальных и нелокальных задач для дифференциальных уравнений с частными производными, особенно для уравнений смешанного типа второго и третьего порядка. Исследование уравнений смешанного типа с дробным оператором является наиболее широко изучаемой основной темой исследований во многих областях математики. Кроме того, математические модели процессов течения подземных вод, химических и механических процессов, связанных со свойствами композиционных материалов, процессов аномальной диффузии и другие практические исследования, остаются на сегодня одной из важных задач дробно-дифференциального и интегрального исчисления.

В мире науки особое внимание уделяется решению начальных и краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными дробного порядка. Эти вопросы относятся к перспективным направлениям современной математической физики и имеют широкий спектр приложений в измерении влажности почвы, математическом моделировании процессов лазерного излучения, задачах физики плазмы и математической биологии. В частности, применение теории дробного интегрирования и дифференцирования в дробных электрических импедансах биологических элементов, в дробном контроле диффузионных систем, в управлении движением, к сигнальному анализу используемому в робототронике, динамических системах и контроле механических манипуляторов. Кроме этого, эти задачи имеют важные практические применения.

В нашей стране больше внимания уделяется актуальным направлениям фундаментальных наук с научными и практическими приложениями, в частности, они уделяют особое внимание поиску эффективных способов решения различных задач для дифференциальных уравнений дробного порядка. Основными задачами и направлениями деятельности математической науки являются проведение исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям “ Алгебры и ее приложений, дифференциальных уравнений и их приложений, математического моделирования нелинейных систем, динамических систем и их приложений, стохастического анализа, медико-биологической информатики, вычислительной математики”[5]. В обеспечении исполнения данного постановления важное значение имеет развивать теорию дифференциальных уравнений дробного порядка частных производных математической физики.

[5]Указ Президента Республики Узбекистан ПП-4387 от 9 июля 2019 года “О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан”.

Тема и объект исследования настоящей диссертации находится в русле проблем, которые входят в тематику задач, отмеченных в Указах Президента Республики Узбекистан УП-4947 от 7 февраля 2017 года “О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан”, № УП-2789 от 17 февраля 2017 года “О дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности” и ПП-4387 от 9 июля 2019 года “О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан”, а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологии республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. “Математика, механика и информатика”.

Степень изученности проблемы. Первоначальные результаты, связанные с интегро-дифференцированием дробного порядка, принадлежат Н.Абелю и Ж.Лиувиллю. Дальнейшее развитие этой теории связано с именами учёных Г.Харди, А.В.Летникова, А.Зигмунда, М.М.Джрбашяна, В.К.Вебера, А.А.Килбаса, С.Г.Самко, М.Капуто, Р.Горенфло, Ф.Майнарди, А.М.Нахушева, В.И.Жегалова, М.С.Салахитдинова,А.М.Нахушева, Е.Р.Лов, М.Сайго, Х.М.Сиривастава, М.Сайго. В работах М.М.Джрбашяна, А.Б.Нерсесяна, Р.Горенфло, Ю.Ф.Лучкои С.Р.Умарова, А.А.Килбас, С.А.Марзан, А.В.Псху для диффузионно-волнового уравнения исследовали задачу Коши и краевые задачи с оператором дробного порядка Римана–Лиувилля и Капуто, которые имеют большое значение при построении математических моделей в процессах диффузии. В работах А.А.Килбаса и О.А.Репина исследованы краевые задачи для уравнений смешанного типа с диффузионным уравнением дробного порядка.

В работах К.Б.Сабитова исследованы прямые задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа с производными целых порядков в прямоугольных областях. В этих работах задавались два условия склеивания по y и условия на всей граничной области. В этом случае для доказательства однозначной разрешимости поставленных задачах возникает условия на стороны гиперболической части. Из-за этого условия задачи становятся неразрешимыми в произвольном прямоугольнике. Краевые задачи для уравнения параболо-гиперболического типа с тремя условиями склеивания по y в прямоугольной области почти не изучены.

Операторные методы решения краевых задач для уравнений дробного порядка рассматривались в работах Р.Р.Ашурова, А.Кабада, Ю.Лучко, Р.Горенфло, К.М.Шиналиева, Б.Х.Турметова, С.Р.Умарова. В работах Э.Т.Каримова изучены прямые задачи с нелокальными условиями для смешанного уравнения с оператором дробного дифференцирования в смысле

Капуто в смешанной области, состоящая из трех характеристических треугольников и одного прямоугольника. Дж.Амановым, А.Ашуралиевыми Б.Ж.Кадиркуловым исследованы в прямоугольных областях различные начально-краевые задачи для дифференциальных уравнений высокого порядка с дробными операторами дифференцирования разного типа.

К.Б.Сабитов и его ученики исследовали обратные задачи для уравнений смешанного типа целого порядка в прямоугольной области.Обратные задачи для уравнений смешанного типа с оператором дробного порядка являются малоизученными. По этому направлению можно указать работы Б.Ж.Кадиркулова и Э.Т.Каримова. Далее в работах У.Балтаевой, О.Х.Абдуллаева иследуются локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений, когда нагруженная часть уравнения содержит оператор дробного поряда в смысле Римана-Лиувилля. Упомянутые публикации позволяют сделать вывод, что вопросы теории нагруженных уравнений быстро развиваютсяи находят свое место в приложениях.

Заметим, что прямые краевые задачи для смешанных уравнений с оператором дробного дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля и Капуто, исследованы в работах Б.И.Исломова, О.Х.Абдуллаева и Н.К.Очиловой, Э.Т.Каримова и Ж.С.Ахатова, а обратные задачи для смешанных нагруженных уравнений с оператором Римана-Лиувилля не изучены.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждения высшего образования, где выполнялась диссертация.

Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательского проекта ОТ-Ф1-065 “Теория вырождающихся уравнений с сингулярными коэффициентами со спектральным параметром” (2017-2018гг.).

Целью исследования является решение прямых и обратных задач для уравнений смешанного типа с операторами Римана-Лиувилля или Капуто дробного порядка впрямоугольных областях.

Задачи исследования:

доказательство однозначной разрешимости задачи типа Трикоми для уравнения смешанного типа, содержащих уравнение диффузии дробного порядка в прямоугольной области;

решение прямой задачи с тремя условиями склеивания для неоднородного уравнения смешанного типа дробного порядка со спектральным параметром в прямоугольной области;

решение прямых задач с граничным условием второго рода для уравнения смешанного типа с оператором Капуто в смешанной области;

разработка способов решения обратных краевых задач для уравнения смешанного типа дробного порядка в смысле Капуто и Римана-Лиувилля в прямоугольной области;

доказательство регулярной разрешимости обратной задачи для нагруженного уравнения в частных производных с дробными производными.

Объектом исследования являются операторы интегро-дифференцирования дробного порядка в смысле Капуто, Римана-Лиувилля, функции типа Миттаг-Леффлера, однородные и недородные уравнения в частных производных дробного порядка.

Предметом исследования являются прямые и обратные задачи для смешанных уравнений в частных производных различными операторами дробного порядка.

Методы исследования. В диссертации использованы методы математического анализа, дифференциальных уравнений в частных производных, математической физики, спектральной теории линейных операторов, теория специальных функций, интегральных уравнений Вольтерра и рядов Фурье.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

доказаны теоремы существования и единственности решения задачи типа Трикоми для смешанного уравнения с оператором Капутов параболической части прямоугольной области. Решение задачи построено в виде суммы ряда Фурье;

разработан способ решения краевой задачи с разрывными условиями склеивания для уравнения смешанного типа с дробной производной Капутов прямоугольной области;

доказана регулярная разрешимость прямой задачи с тремя условиями склеивания для неоднородного смешанного уравнения дробного порядка в смысле Капуто со спектральным параметром в прямоугольной области;

доказана однозначная разрешимость прямой краевой задачи с граничным условием второго рода для уравнения в частных производных дробного порядка в смешанной области;

доказана однозначная разрешимость обратной задачи для смешанного уравнения с операторами Римана-Лиувилля и Капуто в прямоугольной области. Решение представлено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи;

установлен критерий единственности, существование и устойчивость решения обратной задачи для нагруженного уравнения смешанного типа с оператором дробного порядка в смысле Римана-Лиувилля в прямоугольной области.

Практическими результатами исследования следующие:

найдено решение обратной задачи для уравнения с операторами Римана-Лиувилля и Капуто в прямоугольной области в виде ряда собственных функций;

математические модели землетрясений и извержений вулканов были разработаны с использованием устойчивости решения обратных задач с участием дробных операторов.

Достоверность результатов исследования основана на дифференциальных уравнениях, математическом анализе, теории обратных задач, использовании методов спектрального анализа, строгими математических соображений, а также полных доказательствах теорем.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научное значение результатов исследования заключается в том, что полученные в работе научные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории краевых задач для смешанных уравнений дробного порядка.

Практическое значение диссертационной работы определяется применением полученных результатов в изучении диффузионных процессов различного характера, движения подземных вод, газа и мало сжимаемой жидкости в пористых средах, описываемых при помощи уравнений в частных производных дробного порядка.

Внедрение результатов исследования. На основе научных результатов по краевым задачам для уравнений смешанного типа с дробными операторами в прямоугольной области:

от вида решений краевых задач для однородных и неоднородных уравнений смешанного типа, были использованы в проекте “Неклассические начальные и спектральные задачи и их приложения для нечетный порядок частных производных уравнений”, регистрационный номер ОТ–Ф4–(36+32) (справка №87-03-4543 от 10 ноября 2020 года, Министерство высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан) используется для построения решений неклассических исходных и спектральных задач для уравнений-произведений нечетного порядка. Применение научных результатов дало возможность доказать корректность решений;

общие решение и оценка устойчивости обратной задачи были применены в проекте “Природные катастрофы Камчатки - землетрясения и извержение вулканов”, регистрационный номер № АААА-А19-119072290002-9 (Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга). Применение научных результатов дало возможность построить математическую модель землетрясения и извержения вулканов, а также общие решение обратной задачи использованы при численых вычеслениях.

Апробация результатов исследования.

Результаты данного исследования были обсуждены на 7 научно-практических конференциях, в том числе на 3 международных и 4 республиканских научно-практических конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано всего 14 научных работ, из них 7 научные статьи, в том числе опубликованы 3 в зарубежных и 3 в республиканских журналах, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для публикации основных научных результатов докторских диссертаций.

Объем и структура диссертации. Структура диссертации состоит из введения, трех глав, заключения, приложения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 119 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики Узбекистан. Приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы. Сформулированы цели и задачи, выявлен объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость научных результатов. Даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **“Краевые задачи для уравнений смешанного типа с оператором дробного порядка”,** даются необходимые сведения для уравнений смешанного типа с оператором целого и дробного порядка и изучаются новые краевые задачи для уравнения смешанного типа с оператором дробного порядка в смысле Капуто в прямоугольной области.

В первом параграфе данной главы приводятся некоторые известные факты и необходимые сведения для уравнений смешанного типа с оператором целого и дробного порядка.

Во втором и третьем параграфе рассматриваются прямые задачи для однородного уравнения смешанного типа с оператором дробного порядка в смысле Капуто в прямоугольной области.

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xx}-{}_cD_{0y}^{\alpha}u & при \quad y\ge 0, \\ u_{xx}-u_{yy} & при \quad y<0 \end{cases} \tag{1}$$

в прямоугольной области Ω, где $\Omega=\{(x,y):\ 0<x<1,\ -p<y<q\}$, $p>0$, $q>0$ – заданные действительные числа, а ${}_cD_{0y}^{\alpha}$ – оператор дробного порядка $\alpha(0<\alpha\le 1)$ в смысле Капуто[6].

Введем обозначения: $J=\{(x,y):0<x<1,\ y=0\}$, $\Omega_1=\Omega\bigcap\{(x,y):\ x>0,\ y>0\}$, $\Omega_2=\Omega\bigcap\{(x,y):\ x>0,\ y<0\}$, $\Omega=\Omega_1\bigcup\Omega_2\bigcup J$.

В области Ω исследуем краевую задачу типа Трикоми:

Задача 1. Требуется найти функции $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})$, $y^{1-\alpha}u_y(x,y)\in C(\Omega_1)$;

2) ${}_cD_{0y}^{\alpha}u\in C(\bar{\Omega}_1)$, $u(x,y)\in C_x^2(\bar{\Omega})\cap C_y^2(\bar{\Omega}_2)$ и удовлетворяет уравнению (1) в областях $\Omega_j\,(j=1,2)$; 3) на линии J выполняются условия склеивания

$$u(x,+0)=u(x,-0),\quad (x,0)\in\overline{J},\qquad \lim_{y\to+0}y^{1-\alpha}u_y(x,y)=\lim_{y\to-0}u_y(x,y),\ (x,0)\in J; \tag{2}$$

---

[6] Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.

4) $u(x, y)$ удовлетворяет условиям

$$u(0,y)=0,\ u(1,y)=0,\quad -p\le y\le q,\ u(x,-p)=\psi(x),\quad 0\le x\le 1, \tag{3}$$

где $\psi(x)$ – заданная достаточно гладкая функция.

Имеет место следующая теорема единственности:

Теорема 1. *Если существует решение* $u(x,y)$ *задачи 1, то оно единственно только тогда, когда выполнено условие*

$$\Delta_n(p)\equiv\Gamma(\alpha)\cos n\pi p+\pi n\sin n\pi p\ne 0 \text{ при всех } n\in N.$$

Пример 1. $\Delta_n(p)=0$ *тогда и только тогда, когда* $p=(\pi k-\nu_n)/\lambda_n$, $\nu_n=\arcsin\left\{\Gamma(\alpha)\Big/\sqrt{\Gamma^2(\alpha)+\lambda_n^2}\right\},\quad k,n\in N,\quad \lambda_n=\pi n.$

Следствие 1. *Для бесконечно многих* $p\in\mathbb{R}^+$, *имеет место равенство* $\Delta_n(p)=0$. *Для таких* p *задача 1 некорректна*.

Следствие 2. *Если* $\psi(x)=0$ *и* $\Delta_n(p)=0$, *то задача 1 имеет нетривиальное решение*

$$u_r(x,y)=\begin{cases} E_{1/\alpha}\left(-\lambda_r^2y^\alpha,1\right)X_r(x), & 0<y<q,\\ \left[\Gamma(\alpha)\cos r\pi y-\lambda_r\sin\pi ry\right]X_r(x), & -p<y<0,\end{cases}$$

где $X_r(x)=\sqrt{2}\sin\lambda_r x,\ r\in N,$ а $E_{1/\alpha}(z,\mu)$ – известная функция Миттаг-Леффлера[7].

Для обоснования существования решения задачи 1 доказаны следующие леммы:

Лемма 1. *Для всех* n *и* $p\in\mathbb{Q}^+$, *существует такое* $C_1>0$, *причем*

$$|\Delta_n(p)|\ge C_1>0.$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда для всех* n *справедливы оценки*

$$|c_n|\le M_1|\psi_n|,\quad |b_n|\le M_2 n|\psi_n|,\quad |u_n(y)|\le M_3 n|\psi_n|,\ y\in[-p,q],$$
$$\left|{}_cD_{0y}^\alpha u_n(y)\right|\le M_4 n^2|\psi_n|,\ y\in[0,q],$$
$$|u_n''(y)|\le M_5 n^3|\psi_n|,\quad y\in[-p,0],\ M_i=const>0,\quad (i=\overline{1,5}).$$

---

[7]Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.

Лемма 3. *Если* $\psi(x)\in C^4\left[0,1\right]$, $\psi^{(i)}(0)=\psi^{(\ )}(1)=0,\ i=\ 0,$ *то справедливо следующее представление,* $\psi_n=\psi_n^{(4)}\big/(\pi n)^4$, где $\psi_n^{(4)}=\sqrt{2}\int\limits_0^1\psi^{(4)}(x)\sin\pi nx dx$ и

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\psi_n^{(4)}\right|^2\le\left\|\psi^{(4)}(x)\right\|_{L_2[0,1]}^2.$$

Для разрешимости задачи 1 доказана следующая теорема:

Теорема 2. *Если* $\psi(x)$ *удовлетворяет условию леммы 3 и выполнены условия леммы 1, то существует, единственное решение* $u(x,y)$ *задачи 1 и оно определяется рядом* $u(x,y)=\sqrt{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(y)\sin\pi nx,$ где $\psi_n=\sqrt{2}\int\limits_0^1\psi(x)\sin\pi nxdx,$

$$u_n(y)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\alpha)\psi_n}{\Delta_n(p)}E_{1/\alpha}(-\pi^2n^2y^\alpha,1), & 0<y<q,\\[2ex] \dfrac{\psi_n}{\Delta_n(p)}\left[\Gamma(\alpha)\cos n\pi y-\pi n\sin n\pi y\right], & -p<y<0.\end{cases}$$

Имеет место следующая теорема о устойчивости решения задачи 1.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия леммы 1, 3 и* $\Delta_n(p)\ne0,$ $n=1,2,...,n_0$. *Тогда для решения задачи 1 справедливы оценки:*

$$\left\|u(x,y)\right\|_{L_2[0,1]}\le M_6\left\|\psi'(x)\right\|_{L_2[0,1]},\ \left\|u(x,y)\right\|_{C(\bar\Omega)}\le M_7\left\|\psi''(x)\right\|_{C[0,1]},$$

где, $M_j\ (j=6,7)-$положительные постоянные, не зависящие от функции $\psi(x)$.

В третьем параграфе первой главы представлено исследование разрешимости прямой задачи с разрывными условиями для уравнения смешанного типа дробного порядка.

В смешанной области $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup I$ для следующего уравнения

$$0=\begin{cases}u_{xx}-{}_cD_{0y}^\alpha u-\mu^2u & при\quad y\ge0,\\ u_{xx}-u_{yy}-\mu^2u & при\quad y<0\end{cases}\tag{4}$$

ставится и исследуется краевая задача с разрывными условиями сопряжения, где Ω- область, определенная в § 1.2 этой главы, $I=\{(x,y):\ 0<x<l,\ y=0\}$.

Задача 2. Требуется найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,y)\in C(\bar\Omega_j),\ y^{1-\alpha}u_y(x,y)\in C(\bar\Omega_1)$;

2) $u(x,y)\in C_y^2(\bar\Omega_2)\cap C_x^2(\bar\Omega_1\cup\bar\Omega_2),\ {}_cD_{0y}^\alpha u\in C(\bar\Omega_1)$ и удовлетворяет уравнению (4) в областях $\Omega_j\,(j=1,2)$;

3) на линии I выполняются условия склеивания

$$u(x,+0)=a_1u(x,-0)+b_1(x),\ (x,0)\in\overline{I},\ \lim_{y\to+0}y^{1-\alpha}u_y(x,y)=a_2\lim_{y\to-0}u_y(x,y)+b_2(x),\ (x,0)\in I;$$

4) $u(x,y)$ удовлетворяет условиям (3),где $b_j(x)\ (j=1,2)$ – заданные достаточно гладкие функции, причем $a_j\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 4. *Если существует решение* $u(x,y)$ *задачи 2, то оно единственно только тогда, когда выполнено условие*

$\tilde{\Delta}_n(p)\equiv a_2\Gamma(\alpha)cos\rho_n p+\rho_n a_1 sin\rho_n p\neq 0$ *при всех* $n\in N$, $\rho_n=\sqrt{\lambda_n^2+\mu^2}$, $\lambda_n=\dfrac{\pi n}{l}$.

Теорема 5. *Если* $\psi(x)\in C^4[0,l]$, $b_1(x)\in C^5[0,l]$, $b_2(x)\in C^3[0,l]$, $b_2^{(i)}(0)=b_2^{(i)}(l)$, $\psi^{(i)}(0)=\psi^{(i)}(l)=0,\quad i=0,2,\quad b_1^{(j)}(0)=b_1^{(j)}(l)=0,\quad j=0,2,4,$ *и* $|\tilde{\Delta}_n(p)|\geq R_0>0$, *то существует единственное решение* $u(x,y)$ *задачи 2 и оно определяется рядом* $u(x,y)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(y)\,sin\lambda_n x$, *где*

$$u_n(y)=\begin{cases}\dfrac{a_1}{\tilde{\Delta}_n(p)}\left\{-\left[\dfrac{\Gamma(\alpha)b_{2n}}{\rho_n}+\rho_n b_{1n}\right]sin\rho_n p+a_2\Gamma(\alpha)\psi_n\right\}E_{1/\alpha}(-\rho_n^2y^\alpha,1)+\\ \qquad +b_{1n}E_{1/\alpha}(-\rho_n^2y^\alpha,1), \qquad 0<y<q,\\ \dfrac{1}{\tilde{\Delta}_n(p)}\left\{\left[a_2\Gamma(\alpha)\cos\rho_n y-\rho_n a_1\sin\rho_n y\right]\psi_n-\left[\dfrac{\Gamma(\alpha)b_{2n}}{\rho_n}+\rho_n b_{1n}\right]\times\right.\\ \left.\times\left[sin\rho_n p\,cos\rho_n y-\dfrac{a_1\rho_n}{a_2\Gamma(\alpha)}sin\rho_n p\,sin\rho_n y\right]\right\}, \qquad -p<y<0.\end{cases}$$

В главе 2, с названием “**Прямые краевые задачи с тремя условиями склеивания для неоднородного уравнения смешанного типа дробного порядка”** исследованы две прямые краевые задачи с тремя условиями склеивания для неоднородного уравнения смешанного типа дробного порядка в прямоугольной области.

В § 2.1 данной главе для уравнения смешанного типа дробного порядка в смысле Капуто со спектральным параметром в прямоугольной области спектральным методом решаются прямые задачи. Установлены критерии единственности и существования решения этой задачи. Построено решение задачи в виде суммы рядов по собственным функциям соответствующим однородной спектральной задаче. Получены оценки позволяющие обосновать сходимость рядов в классе регулярных решений данного уравнения.

В области $\Omega=\{(t,x):\ -p<t<q,\ 0<x<l\}$ рассмотрим уравнение

$$f(t,x)=\begin{cases} {}_cD_{0t}^{\alpha}u-u_{xx}+\lambda^2u, & t\ge 0,\\ u_{tt}-u_{xx}+\lambda^2u, & t<0,\end{cases} \tag{5}$$

где $\lambda\ge 0,\ l>0,\ p>0, q>0$ заданные действительные числа, $f\left(t,x\right)-$ заданная функция, а ${}_cD_{0t}^{\alpha}$ – оператор дробного порядка в смысле Капуто[2].

Задача 3.Требуется найти функцию $u(t,x)$ со следующими свойствами: 1) $u(t,x)\in C(\bar{\Omega}),\ \ t^{1-\alpha}u_t(t,x),\ \ t^{2-\alpha}u_{tt}(t,x)\in C(\Omega_1)$; 2) $u(t,x)\in C_t^2(\bar{\Omega}_2)\cap C_x^2(\bar{\Omega})$ ${}_cD_{0t}^{\alpha}u\in C(\bar{\Omega}_1)$, и удовлетворяет уравнению (5) в областях $\Omega_j\ (j=1,2)$;

3) на линии I выполняются условия склеивания

$$u(+0,x)=u(-0,x),\qquad (0,x)\in\bar{I}, \tag{6}$$

$$\lim_{t\to+0}t^{1-\alpha}u_t(t,x)=\lim_{t\to-0}u_t(t,x),\qquad (0,x)\in I, \tag{7}$$

$$\lim_{t\to+0}t^{2-\alpha}u_{tt}(t,x)=\lim_{t\to-0}u_{tt}(t,x),\qquad (0,x)\in I; \tag{8}$$

4) $u(t,x)$ удовлетворяет граничным условиям

$$u(t,0)=0,\quad u(t,l)=0,\quad -p\le t\le q. \tag{9}$$

Замечание 1. До настоящего времени в опубликованных работах М.М.Хачева[8] и К.Б.Сабитова[9] по уравнениям второго порядка смешанного параболо-гиперболического и эллиптико-гиперболического типов целого порядка в прямоугольных областях задавались два условия склеивания по y и условия на всей граничной области. При однозначной разрешимости этих задачах возникает условия на стороны гиперболической части. Из-за этого условия задачи становятся неразрешимыми в произвольном прямоугольнике. В нашем случае, если мы откажемся от условия (8), то придется задавать условие:

$$u(-p,x)=\psi(x),\qquad 0<x<l. \tag{10}$$

Из-за условия (10), для разрешимости поставленной задачи возникает следующее условие:

$$\Delta_n(p)\equiv cos\,\mu_n p+\mu_n\,sin\,\mu_n p\ne 0,\quad \mu_n=\pi n/l,\quad n\in N. \tag{11}$$

[8]Хачев М.М. Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лаврентьев –Бицадзе в прямоугольной области. // «Дифференциальные уравнения». 1978. Т.14. № 1 . С.136-139.
[9]Сабитов К. Б. Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. Москва : Наука, 2016. 271 с.

Академик Ш.А. Алимов[10] показал, что выполнение условия(11) зависит от числа p, которое должно быть иррациональным. Задавая условие (8) в задаче 3 эти ограничения исключаются.

Имеет место следующая теорема о единственности решения задачи 3.

Теорема 6. *Если существует решение задачи 3, то оно единственно. На основе методов спектрального анализа доказывается теорема 6.*

Теорема 7. *Пустьфункции* $f(t,x),\ f'_x(t,x),\ f''_{xx}(t,x),\ f'_t(t,x)$ *непрерывны в* $\bar{\Omega}$ *и* $f''_{tt}(t,x)\in L_2(\Omega),\ f(t,0)=f(t,l)=0,\quad -p\le t\le q.$ *Тогда*

регулярное решение задачи 3 существует и определяется формулой:

$$u(t,x)=\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\vartheta_n(x)\left[\dfrac{f_n(0)}{\rho_n^2}E_{1/\alpha}(-\rho_n^2t^\alpha,1)+\int\limits_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}\left(-\rho_n^2(t-\tau)^\alpha,\alpha\right)f_n(\tau)d\tau\right],\quad (t,x)\in\Omega_1,\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\vartheta_n(x)\left[\dfrac{f_n(0)}{\rho_n^2}\cos\rho_n t+\dfrac{1}{\rho_n}\int\limits_t^0 f_n(\tau)\sin\rho_n(\tau-t)d\tau\right],\ (t,x)\in\Omega_2,\end{cases}\tag{12}$$

где

$$f_n(t)=\int\limits_0^l f(t,x)\vartheta_n(x)dx,\ \vartheta_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\mu_n x,\ \rho_n=\sqrt{\mu_n^2+\lambda^2},\quad \mu_n=\frac{\pi n}{l},\quad n\in N.\tag{13}$$

Для доказательства теоремы 7 важную роль играют следующие леммы.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия теоремы 2.2, тогда для любого* $t\in[-p,q]$ *и* $0<\varepsilon<1$ *имеет место неравенство*

$$|u_n(t)|\le\begin{cases}C_1\left[\dfrac{1}{\mu_n^4}+\dfrac{1}{\mu_n^{4-\varepsilon}}\right],\quad n\in N,\quad 0\le t\le q,\\ \dfrac{C_2}{\mu_n^4},\qquad -p\le t\le 0,\end{cases}\tag{14}$$

где $C_1=\sqrt{\frac{2}{l}}MN_1max\left\{\frac{\ln 2q^\alpha+\alpha}{\alpha},\frac{2}{\alpha\varepsilon}\right\},\ C_2=2\sqrt{\frac{2}{l}}N_1,$ *а* $u_n(t)-$ *определяются из (12).*

Лемма 5. *Если выполняются условия* $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\in L_2(\Omega_2),\ f(x,t)\in C^{0,1}_{x,t}\left(\overline{\Omega_2}\right),$ *тогда имеет место следующая оценка*

[10] Алимов Ш.А. О разрешимости одной некорректной задачи . // «Узбекский математ. журнал». 1999. № 3. С. 19-28.

$$\left|\frac{1}{\rho_n}\int_t^0 f_n^{(k)}(\tau)\sin\rho_n(t-\tau)d\tau\right| \le \frac{l\sqrt{p}}{\pi\mu_n}\| f_n^{(k)}\|_{L_2(-p,0)}, \quad k=0,1,2.$$

Лемма 6. *Пусть выполняются условия теоремы 7, тогда ряд Фурье* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\vartheta_n(x)$ *сходится абсолютно и равномерно в* $\overline{\Omega}$.

Леммы 5 и 6 доказывается с помощью неравенств Коши-Буняковского и Бесселя.

Используя леммы 4 - 6 с учетом условий теоремы 7 доказывается абсолютная и равномерная сходимость рядов (12) и

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\vartheta_n(x), \ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 u_n(t)\vartheta_n(x), \ \sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t)\vartheta_n(x), \sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_n(x)\,{}_cD_{0t}^{\alpha}u_n(t).$$

Из сходимости рядов участвующих в (12) можно сделать вывод, что решение задачи 3 удовлетворяет уравнению (5) при $\lambda=0$ в области Ω_1 и Ω_2 соответственно. Кроме того, решение (12) удовлетворяют условиям (6) - (9), т.е. регулярное решение задачи 3 существует.

В § 2.2 в области Ω решается краевая задача 4 с граничным условием второго рода:

$$u_x(t,0)=0, \ \ u_x(t,l)=0, \ \ -p\le t\le q$$

для уравнения (5) при $\lambda=0$. При исследовании задачи 4 использованы три условия склеивания, при этом некоторая часть границы освобождается от задания граничного условия, благодаря такому подходу в постановке задачи 4, снимается условия на размеры границы области. Доказана теорема о единственности и существовании регулярного решения задачи 4.

В третьей главе диссертации, названной “**Обратные задачи для уравнения смешанного типа с операторами Римана − Лиувилляи Капуто прямоугольной области”,** состоит из двух параграфов и в ней изучаются обратные задачи для смешанных уравнений с операторами интегро-дифференцирования дробного порядка в смысле Римана - Лиувилля и Капуто в прямоугольной области. Для решения этих задач использован метод спектрального анализа, а также метод решения задачи для дифференциального уравнения дробного порядка путём сведения к прямой задаче для уравнения смешанного типа дробного порядка в смысле Капуто в прямоугольной области. Доказаны теоремы о существовании и единственности решений этих задач.

В первом параграфе третий главы диссертации изучена обратная задача для смешанного уравнения с операторами Римана-Лиувилля и Капуто в прямоугольной области. Установлен критерий единственности и существования решения обратной задачи. Построено решение задачи в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи. Доказано, что однозначная разрешимость обратной задачи существенным образом зависит от выбора границы прямоугольной области. Построен пример, в котором обратная задача с однородными условиями имеет нетривиальное решение. Получены оценки, позволяющие обоснование сходимости рядов в классе регулярных решений данного уравнения и устойчивость решения обратной задачи от граничных данных.

В области $\Omega=\{(x,y):\ 0<x<1,\ -p<y<q\}$, рассмотрим уравнение

$$Lu=f(x,y) \tag{15}$$

где

$$Lu=\begin{cases} u_{xx}+\int\limits_y^q\left[D_{0t}^{\alpha-1}u_{tt}(x,t)\right]dt-\lambda^2u, & y\geq 0,\\ u_{xx}-u_{yy}-\lambda^2u, & y<0,\end{cases} \qquad f(x,y)=\begin{cases} f_1(x), & y>0,\\ f_2(x), & y<0,\end{cases} \tag{16}$$

где $\lambda>0,\ p>0,\ q>0$ – заданные действительные числа, а $D_{0y}^{-\alpha}$ – оператор дробного порядка $\alpha\in(0,1)$ в смысле Римана-Лиувилля определяется формулой: $D_{0y}^{-\alpha}\upsilon(y)\equiv I_{0y}^{\alpha}\upsilon(y)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^y\frac{\upsilon(t)dt}{(y-t)^{1-\alpha}}$.

Введем обозначения: $J=\{(x,y):0<x<1,\ y=0\}$,

$\Omega_1=\Omega\bigcap\{(x,y):\ x>0,\ y>0\}$, $\Omega_2=\Omega\bigcap\{(x,y):\ x>0,\ y<0\}$, $\Omega=\Omega_1\bigcup\Omega_2\bigcup J$.

Обратная задача 5. Найти в области Ω функции $u(x,y)$ и $f(x,y)$, удовлетворяющие условиям:

$$u(x,y)\in C^1(\bar\Omega)\cap C_y^2(\bar\Omega_2)\cap C_x^2(\bar\Omega),\ \int\limits_y^q\left[D_{0t}^{\alpha-1}u_{tt}(x,t)\right]dt\in C(\bar\Omega_1), \tag{17}$$

$$f_j(x)\in C(0,1)\bigcap L_2[0,1], \tag{18}$$

$$Lu=\begin{cases} f_1(x), & y>0,\\ f_2(x), & y<0,\end{cases} \tag{19}$$

$$u(0,y)=0,\qquad u(1,y)=0,\qquad -p\leq y\leq q, \tag{20}$$

$$u(x,-p)=\psi(x),\quad u_y(x,-p)=g(x),\quad u(x,q)=\varphi(x),\quad 0\leq x\leq 1, \tag{21}$$

где $\psi(x),\ g(x),\ \varphi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Имеет место следующая теорема для обратной задачи 5:

Теорема 8. *Если существует решение обратной задачи (15) - (21), то оно единственно тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\Delta_{pq}(k)=2\sqrt{1+(q\rho_k)^2E_{1/\alpha}^2\left[-\rho_k^2q^\alpha,2\right]}\,sin\left(\frac{\rho_kp}{2}+\nu_k\right)sin\frac{\rho_kp}{2}\neq 0\ \textit{при всех}\ k\in N, \tag{22}$$

здесь $\rho_k=\sqrt{\mu_k^2+\lambda^2}$, $\mu_k=\pi k, \nu_k=arcsin\left\{q\rho_k E_{1/\alpha}\left[-\rho_k^2\,q^\alpha,2\right]\Big/\sqrt{1+(q\rho_k)^2E_{1/\alpha}^2\left[-\rho_k^2q^\alpha,2\right]}\right\}$,

а $E_{1/\alpha}(z,\mu)$ – известная функция Миттаг-Леффлера.

Пример 2. $\Delta_{pq}(k)=0$ *тогда и только тогда, когда* $p=2\pi n/\rho_k$, $n\in N$ *или* $p=(2\pi m-2\nu_k)/\rho_k$, $m,k\in N$.

Следствие 3. *Если* $\varphi(x)\equiv 0$, $\psi(x)\equiv 0$, $g(x)\equiv 0$, $\Delta_{pq}(k)=0$ *и* $sin\,\rho_k p\neq 0$, *то обратная задача 5 имеет нетривиальное решение*

$$u_k(x,y)=\begin{cases}-\sqrt{2}sin\mu_k x\int\limits_y^q E_{1/\alpha}\left[-\rho_k^2t^\alpha,1\right]dt, \qquad 0\le y\le q,\\ \dfrac{\sqrt{2}sin\,\mu_k x}{sin\,\rho_k p}\left\{\left(1+q\rho_k E_{1/\alpha}\left[-\rho_k^2q^\alpha,2\right]sin\,\rho_k p\right)cos\,\rho_k y-\right.\\ \qquad\qquad \left.-1-sin\,\rho_k p sin\,\rho_k y\right\}, \quad -p\le y\le 0,\end{cases} \tag{23}$$

$$f_{1k}(x)=0, \qquad f_{2k}(x)=\frac{\sqrt{2}\rho_k^2 sin\,\mu_k x}{sin\,\rho_k p},$$

где $E_{1/\alpha}(z,\mu)$ – известная функция Миттаг-Леффлера.

Следствие 4. *Если* $\varphi(x)\equiv 0$, $\psi(x)\equiv 0$, $g(x)\equiv 0$, $\Delta_{pq}(k)=0$ *и* $sin\,\rho_k p=0$, *то обратная задача 5 имеет нетривиальное решение*

$$u_k(x,y)=\begin{cases}0, \qquad\qquad 0\le y\le q,\\ \dfrac{\sqrt{2}f_{2k}}{\rho_k^2}\left(cos\,\rho_k y-1\right)sin\,\mu_k x, \quad -p\le y\le 0,\end{cases} \tag{24}$$

$$f_{1k}=0, \quad f_{2k}(x)=\sqrt{2}\;f_{2k}sin\mu_k x,$$

где $f_{2k}\neq 0$ – *произвольная постоянная.*

Доказано, что построенные функции (23) и (24) соответственно являются решением обратной задачи 5 при однородных граничных условиях, в случае, когда $sin\,\rho_k p\neq 0$ и $sin\,\rho_k p=0$, $k\in N$.

Для обоснования существования решения обратной задачи 5 необходимо показать существование чисел p, q, α и λ, таких, что при достаточно больших k выражение $\Delta_{pq}(k)$ отделено от нуля с соответствующей асимптотикой.

Лемма 7. *Если* $p=2p_1$, $p_1=a/b$, $a,b\in N$, $(a,b)=1$, $(b,2)=1$ *и* $\lambda>0$, *то существуют положительные постоянные* C_3 *и* $k_0\in N$, *такие, что при всех* $k>k_0$ *справедлива оценка*

$$\left|\Delta_{pq}(k)\right| > C_3/k. \qquad (25)$$

Лемма 8. *Пусть* $p_1 = p/2$ *– положительное иррациональное число с неограниченными элементами,* $\lambda = 0$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует бесконечное множество натуральных чисел* k, *таких что* $\left|\Delta_{pq}(k)\right| \le \varepsilon C_5/k$, *где* C_3 *– положительное число, зависящее от* p.

Используя метод Фурье, решение обратной задачи 5 представим в виде

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) u_k(y), \qquad f_j(x) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) f_{jk}, \ (j=1,2), \qquad (26)$$

где $u_k(y)$ и f_{jk} $(j=1,2)$ – соответственно определяется формулой:

$$u_k(y) = \begin{cases} \varphi_k - c_k \int\limits_y^q E_{1/\alpha}\left[-\rho_k^2 t^\alpha, 1\right] dt, & 0 < y < q, \\ \psi_k + \dfrac{1}{\rho_k}\left\{a_k\left(\sin\rho_k y + \sin\rho_k p\right) - b_k\left(\cos\rho_k y - \cos\rho_k p\right)\right\}, & -p < y < 0 \end{cases} \qquad (27)$$

$$f_{1k} = -\rho_k^2 \varphi_k, \ f_{2k} = -\rho_k^2 \psi_k - \rho_k \left\{a_k \sin\rho_k p + b_k \cos\rho_k p\right\}. \qquad (28)$$

здесь

$$a_k = c_k = \frac{1}{\Delta_{pq}(k)}\left[(\cos\rho_k p - 1) g_k - \rho_k(\varphi_k - \psi_k)\sin\rho_k p\right], \quad k \in N, \qquad (29)$$

$$b_k = \frac{1}{\Delta_{pq}(k)}\left[\rho_k(\varphi_k - \psi_k)\cos\rho_k p - \left\{q\rho_k E_{1/\alpha}\left[-\rho_k^2 q^\alpha, 2\right] + \sin\rho_k p\right\} g_k\right], \qquad (30)$$

$$\varphi_k = \sqrt{2}\int_0^1 \varphi(x)\sin\mu_k x dx, \ \psi_k = \sqrt{2}\int_0^1 \psi(x)\sin\mu_k x dx, \ g_k = \sqrt{2}\int_0^1 g(x)\sin\mu_k x dx. \qquad (31)$$

Из леммы 8 следует, что для всех $p > 0$ выражение (22), которое является знаменателем отношений (29) и (30) может быть сколь угодно малым за счет малости ε. Поэтому в этом случае решение обратной задачи 5 в виде суммы рядов не существует.

Чтобы доказать однозначную разрешимость обратной задачи 5 докажем следующие леммы.

Лемма 9. *Пусть выполнены условия леммы 7. Тогда при* $k > k_0$ *справедливы оценки*

$$\left|c_k\right| \le M_1 k\left[k\left(\left|\varphi_k\right| + \left|\psi_k\right|\right) + \left|g_k\right|\right], \quad \left|b_k\right| \le M_2 k\left(k(\left|\varphi_k\right| + \left|\psi_k\right|) + \left|g_k\right|\right),$$

$$\left|u_k(y)\right| \le M_3 k\left[k\left(\left|\varphi_k\right| + \left|\psi_k\right|\right) + \left|g_k\right|\right], \qquad y \in [0,q],$$

$$\left|u_k(y)\right| \le M_4 k\left(k\left(\left|\varphi_k\right|+\left|\psi_k\right|\right)+\left|g_k\right|\right),\ \left|u_k''(y)\right| \le M_5 k\left(k\left(\left|\varphi_k\right|+\left|\psi_k\right|\right)+\left|g_k\right|\right),\ y\in[-p,0],$$

$$\left|f_{1k}\right| \le M_6 k^2\left|\varphi_k\right|,\ \left|f_{2k}\right| \le M_7 k^2\left(k\left(\left|\varphi_k\right|+\left|\psi_k\right|\right)+\left|g_k\right|\right),\quad M_i = const > 0,\ (i=\overline{1,7}).$$

Справедливость оценок следуют из (27)- (30) с учетом (25) и свойства функции Миттаг-Леффлера

Лемма 10. Если $\varphi(x),\ \psi(x)\in C^5[0,1],\ \ g(x)\in C^4[0,1]$ и $g^{(i)}(0)=g^{(i)}(1)=0,$ $\varphi^{(i)}(0)=\psi^{(i)}(0)=\varphi^{(i)}(1)=\psi^{(i)}(1)=0,\ \ i=0,2,4,$ то справедливы представления

$$\varphi_k=-\frac{\varphi_k^{(5)}}{(\pi k)^5},\quad \psi_k=-\frac{\psi_k^{(5)}}{(\pi k)^5},\quad g_k=\frac{g_k^{(4)}}{(\pi k)^4},\quad k\in N. \tag{32}$$

В силу (31) с учетом условий леммы 10 доказаны справедливость представления (32). А также из теории рядов Фурье и неравенства Бесселя с учетом условий леммы 10 доказаны, сходимости следующих рядов:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varphi_k^{(5)}\right|^2 \le \left\|\varphi^{(5)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}^2,\quad \sum_{k=1}^{\infty}\left|\psi_k^{(5)}\right|^2 \le \left\|\psi^{(5)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}^2,\ \sum_{k=1}^{\infty}\left|g_k^{(4)}\right|^2 \le \left\|g^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}^2.$$

Имеет место следующая теорема о разрешимости обратной задачи 5:

Теорема 9. *Пусть функции $\varphi(x),\psi(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям леммы 10 и выполнены условия (25) при всех $k>k_0$. Тогда, если $\Delta_{pq}(k)\ne 0$ при $k=1,2,...,k_0$, то обратная задача 5 однозначно разрешима и это решение определяются рядами(26);*

если $\Delta_{pq}(k)=0$ при некоторых $k=l_1,...,l_m\le k_0$, то обратная задача 5 разрешима тогда, когда выполнены условия ортогональности

$$\int_0^1\varphi(x)sin\,\mu_k\,xdx=0,\ \int_0^1\psi(x)sin\,\mu_k\,xdx=0,\ \int_0^1 g(x)sin\,\mu_k\,xdx=0\quad при\quad k=l_1,...,l_m. \tag{33}$$

и решение определяются рядами

$$u(x,t)=\left(\sum_{k=1}^{l_1-1}+\sum_{k=l_1+1}^{l_2-1}+\cdots+\sum_{k=l_m+1}^{\infty}\right)u_k(y)X_k(x)+\sum_r B_r u_r(x,y), \tag{34}$$

$$f_i(x)=\left(\sum_{k=1}^{l_1-1}+\sum_{k=l_1+1}^{l_2-1}+\sum_{k=l_m+1}^{\infty}\right)f_{ik}X_k(x)+\sum_r B_r f_{ir}(x),\ (i=1,2) \tag{35}$$

в суммах $\sum_r$ индекс r принимает значения $l_1,...,l_m$, где $1\le l_1<...<l_m\le k_0$, $m-$ заданные натуральные числа $B_r\ne 0-$произвольные постоянные, а функции $u_r(x,t)$ и $f_{ir}(x)$ определяются из (23) и (24).

Заметим, что конечные суммы выражений (37) и (38) следует считать равными нулю, если нижний предел больше верхнего.

Лемма 11. *Пусть* $p_1 = \frac{p}{2}$- *иррациональное алгебраическое число степени два,* $\lambda < \pi$ *и выполнены условия*

$$\delta - \frac{p_1}{2}\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2 - \frac{1}{2\pi} > 0 \quad и \; \frac{p_1\lambda^2}{2} + \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}, \tag{36}$$

где δ *определяется по формуле* $\delta = \frac{2}{2p_1a_2 + a_1 + \sqrt{(2p_1a_2 + a_1)^2 + 4}}$ *при условии* $2p_1a_2 + a_1 \geq \sqrt{\frac{a_2}{2}}$, $a_2 > 0$, *тогда существует положительная постоянная* C_4, *зависящая от* p_1 *и* λ *такая, что при всех* $k \in N$ *справедлива оценка*

$$\left|\Delta_{pq}(k)\right| \geq \frac{C_4}{k^2}. \tag{37}$$

Лемма 12. *Если* $\varphi(x),\ \psi(x) \in C^7[0,1]$, $g(x) \in C^6[0,1]$ *и* $g^{(j)}(0) = g^{(j)}(1) = 0,\ j = 0,2,4;$ $\varphi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(1) = \psi^{(i)}(1) = 0,\ \ i = 0,2,4,6,$ *то справедливы представления*

$$\varphi_k = -\frac{\varphi_k^{(7)}}{(\pi k)^7}, \quad \psi_k = -\frac{\psi_k^{(7)}}{(\pi k)^7}, \quad g_k = -\frac{g_k^{(6)}}{(\pi k)^6}, \quad k \in N, \tag{38}$$

где $g_n^{(6)} = \sqrt{2}\int_0^1 g^{(6)}(x)\sin\mu_n x dx,\ \varphi_n^{(7)} = \sqrt{2}\int_0^1 \varphi^{(7)}(x)\cos\mu_n x dx,\ \ \psi_n^{(7)} = \sqrt{2}\int_0^1 \psi^{(7)}(x)\cos\mu_n\, x dx.$

Сходимость рядов (28) следует из леммы 12.

Теорема 10. *Если выполнены условия лемм 11 и 12, то существует единственное решение обратной задачи 5, которое определяется рядами* (26).

Во втором параграфе третьей главы для нагруженного уравнения смешанного типа с оператором дробного порядка в смысле Римана-Лиувилля вида

$$\begin{cases} f_1(x) \\ f_2(x) \end{cases} = \begin{cases} u_{xx} - D_{0y}^{\alpha-1}u_y(x,y) - \lambda^2 u + \dfrac{y^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}u_y(x,0), & y \geq 0, \\ u_{xx} - u_{yy} - \lambda^2 u, & y < 0 \end{cases} \tag{39}$$

в прямоугольной области $\Delta = \{(x,y):\ 0 < x < l,\ -p < y < q\}$ изучается обратная задача с условиями (18)-(21), где $l > 0,\ p > 0,\ q > 0,\ \lambda \geq 0-$ заданные действительные числа, а $D_{0y}^{\alpha-1}[\cdot]-$определено в § 3.1, $\alpha \in (0,1)$.

Используя, методы спектрального анализа установлен критерий единственности решения обратной задачи (39), (18)-(21). Решение задачи построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи. Доказано, что однозначная разрешимость обратной задачи существенным образом зависит от выбора границы прямоугольной области. Построен пример, в котором обратная задача с однородными условиями имеет нетривиальное решение. Получены оценки, позволяющие обоснование сходимости рядов в классе регулярных решений данного уравнения и устойчивость решения обратной задачи от граничных данных.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена изучению прямых и обратных задач для смешанных уравнений с различными операторами дробного порядка в четырехугольных областях.

В заключение можно сделать следующие выводы по результатам исследований:

1.Доказаны теоремы существования и единственности решения задачи типа Трикоми для смешанного уравнения с оператором Капуто в параболической части прямоугольной области. Решение задачи построено в виде суммы ряда Фурье.

2.Разработан способ решения краевой задачи с разрывными условиями склеивания для уравнения смешанного типа с дробной производной Капуто в прямоугольной области.

3.Доказана регулярная разрешимость прямой задачи с тремя условиями склеивания для неоднородного смешанного уравнения дробного порядка в смысле Капуто со спектральным параметром в прямоугольной области.

4.Доказана однозначная разрешимость обратной задачи для смешанного уравнения с операторами Римана-Лиувилля и Капуто в прямоугольной области. Решение представлено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи;

5.Построен пример, в котором прямая и обратная задача с однородными условиями имеет нетривиальное решение.

6.Установлен критерий единственности, существования и устойчивости решения обратной задачи для нагруженного уравнения смешанного типа с оператором дробного порядка в смысле Римана-Лиувилля в прямоугольной области.

Разработанные методы исследования указаных выше задач могут быть использованы для дальнейшего развития теории краевых задач для смешанных уравнений дробного порядка. Полученные результаты в диссертационной работе применяются в изучении диффузионных процессов различного характера, движения подземных вод, газа и мало сжимаемой жидкости в пористых средах, описываемых при помощи уравнений в частных производных дробного порядка.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.03/30.07.2019.FM.02.01 AT SAMARKAND STATE UNIVERSITY

SAMARKAND STATE UNIVERSITY

UBAYDULLAEV ULUGBEK SHUKIRILLAEVICH

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR MIXED EQUATIONS WITH FRACTIONAL ORDER OPERATORS IN A RECTANGULAR DOMAIN

01.01.02 - Differential equations and mathematical physics

ABSTRACT OF DISSERTATION
of the doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences

Samarkand – 2021

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number № B2020.4.PhD/FM222.

Dissertation has been prepared at National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek.
The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.samdu.uz) and the «Ziyonet» Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Islomov Bozor Islomovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Durdiev Durdimurod Kalandarovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Karimov Erkin Tulkinovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**Urgench State University**

Defense will take place «06» 07 2021 at 10[00] at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.12.2020.FM.02.01 at Samarkand State University. (Address: University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866) 231-06-32, fax: (+99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource center at Samarkand State University (is registered № 24) (Address: University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866) 231-06-32).

Abstract of dissertation sent out on «19» 06 2021 year
(Mailing report № 2 on «19» 06 2021 year)

A.S.Soleev
Chairman of scientific council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

A.M.Khalkhuzhaev
Scientific secretary of scientific council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences

A.B.Khasanov
Chairman of the Scientific Seminar at the Scientific Council for the Awarding of Scientific Degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is to study direct and inverse problems for equations of mixed type with Riemann-Liouville or Caputo operators of fractional order in rectangular domains.

The object of the research work is the operators of integro-differentiation of fractional order in the sense of Caputo, Riemann-Liouville, functions of the Mittag-Leffler type, homogeneous and non-homogeneous partial differential equations of fractional order.

Scientific novelty of the research work is as follows:

existence and uniqueness theorems for the solution of the Tricomi type problem for a mixed equation with the Caputo operator in the parabolic part of a rectangular domain are proved. The solution to the problem is constructed as the sum of the Fourier series;

a method for solving a boundary value problem with discontinuous gluing conditions for a mixed-type equation with a fractional Caputo derivative in a rectangular domain has been developed;

the regular solvability of the direct problem with three gluing conditions was proved for an non-homogeneous mixed fractional-order equation in the Caputo sense with a spectral parameter in a rectangular domain;

studied a direct boundary value problem with a boundary condition of the second type for a partial differential equation of fractional order in a mixed domain;

the unique solvability of the inverse problem for a mixed equation with the Riemann-Liouville and Caputo operators in a rectangular domain is proved. The solution is presented as a sum of a series in eigen functions of the corresponding one-dimensional spectral problem;

a criterion for the uniqueness, existence and stability of the solution of the inverse problem for a loaded equation of mixed type with a fractional-order operator in the sense of Riemann-Liouville in a rectangular domain is established.

Implementation of the research results. Based on scientific results on boundary value problems for mixed-type equations with fractional operators in a rectangular domain:

from the solutions in the correction set of boundary value problems for homogeneous and non-homogeneous of fractional order mixed-type equations was used in the construction of solutions of nonclassical initial and spectral problems for odd-order special derivative equations in the fundamental project number of OT–F4–(36+32) “Nonclassical initial and spectral problems for odd-order special derivative equations” (Republic of Uzbekistan) Reference No. №87-03-4543 of the Ministry of Higher and Secondary Special Education of November 10, 2020). The application of scientific results provided an opportunity to prove the correctness of the solutions;

general solution and stability assessment of the inverse problem were applied in the project ”Natural disasters of Kamchatka - earthquakes and volcanic eruptions”, registration number № AAAA-A19-119072290002-9 (Kamchatka

State University named after Vitus Bering). The application of scientific results made it possible to construct a mathematical model of earthquakes and volcanic eruptions, as well as general solutions to the inverse problem were used in numerical calculations.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of introduction, three chapters, a conclusion and references. The volume of the dissertation is 119 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; I part)

1. B.I Islomov, U.Sh Ubaydullayev. On a Boundary-value Problem for a Parabolic-Hyperbolic Equation with Fractional Order Caputo Operator in Rectangular Domain // ISSN 1995-0802, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2020, Vol. 41, No. 9, pp. 1801–1810. c_ Pleiades Publishing, Ltd., 2020. (Scopus, IF 0.422).

2. Исломов Б.И., Убайдуллаев У.Ш. Обратная задача для уравнения смешанного типа с оператором дробного порядка в прямоугольной области // Известия высших учебных заведений. Математика,2021. №3. С.29-46. Россия. (Scopus, IF 0.397)

3. T.K. Yuldashev, B.I. Islomov, U.Sh. Ubaydullaev. On Boundary Value Problems for a Mixed Type Fractional Differential Equation with Caputo Operator // Bulletin of the Karaganda University, Mathematics series. pp. 127–137. 1(101)/2021, (Web of Science).

4. Исломов Б.И., Убайдуллаев У.Ш. Краевая задача для уравнения параболо - гиперболического типа с оператором дробного порядка в смысле Капуто в прямоугольной области // СамГУ “Научный вестник”. 2017. № 5. С.25-30. Самарканд.

5. Убайдуллаев У.Ш. Краевая задача с разрывными условиями склеивания для уравнения параболо - гиперболического типа с оператором дробного порядка в смысле Капуто в прямоугольной области // Доклады Акадими наук Республики Узбекистан, Ташкент, 2019. № 1 С.3-8.

6. Исломов Б.И., Убайдуллаев У.Ш. Об одной краевой задачи с граничным условиям второго рода для уравнения параболо - гиперболического типа с оператором дробного порядка в смысле Капуто в прямоугольной области // Бюллетень Института математики, Ташкент, 2020, № 2 С.47-57.

II бўлим (II часть; II part)

1. Убайдуллаев У.Ш. Обратная задача для смешанного нагруженного уравнения с оператором Римана-Лиувилля в прямоугольной области // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 31. № 2. С.18-31. ISSN 2079-6641.

2. Убайдуллаев У.Ш. Краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа со спектральним параметром в прямоугольной области // Тезисы докладов “Актуальные проблеми дифференциальных уравнений и их приложения”, Ташкент, 2017. 15-17 декабрь. С.71-72.

3. Убайдуллаев У.Ш. Краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа со спектральним параметром в прямоугольной области // Международная научная конференция ”Дифференциальные

уравнения и смежные проблемы” Россия. БашГУ.Серлитамак. 2018. 25-29 июнь.С.234 -237.

4. Убайдуллаев У.Ш. Обратная задача для уравнения параболо – гиперболического типа с оператором дробного порядка в прямоугольной области // International conference ”Mathematic analysis and its application to mathematical physics” September 17-20, 2018; Samarkand,Uzbekistan. С.56-57.

5. Исломов Б.И, Убайдуллаев У.Ш. Об одной локальной краевой задачи с разрывными условиями склеивания для уравнения смешанного в прямоугольной области // Международная научная конференция ”Обратные и некорректные задачи”. Самарканд, 2019. 2-4 октябрь. С.82 -84.

6. Убайдуллаев У.Ш. О разрешимости одной локальной краевой задачи для уравнения параболо - гиперболического типа с оператором дробного порядка в смысле Капуто в прямоугольной области // Тезисы докладов “Неклассичиские уравнения математической физики и их приложения”, Ташкент, 2019. 24-26 октябрь. С.129-132.

7. Убайдуллаев У.Ш. Об одной краевой задаче для уравнения параболо - гиперболического типа в прямоугольной области, когда оператор Капуто содержится в условие склеивания // Международная научная конференция ”Современные проблемы дифференциальных уравнений и смеждных разделов математики ”. Фаргана, 2020. 12-13 март. С.150-152.

8. Убайдуллаев У.Ш. Об одной нелокальной краевой задаче для смешанного уравнения дробного порядка в прямоугольной области // Тезисы докладов "Современные методы математической физики и их приложения", Ташкент, 2020. 17-18 ноябрь. С.417-418.

Автореферат Самарқанд давлат университетининг
“СамДУ илмий тадқиқотлар ахборотномаси” журнали таҳририятида
таҳрирдан ўтказилди (17.06.2021 йил).

2021 йил 18 июнда босишга рухсат этилди:
Офсет босма қоғози. Қоғоз бичими $60\times84_{1/16}$.
“Times” гарнитураси. Офсет босма усули.
Ҳисоб-нашриёт т.: 3,06. Шартли б.т. 2,0.
Адади 100 нусха. Буюртма № 18/06.

СамДЧТИ нашр-матбаа марказида чоп этилди.
Манзил: Самарқанд ш, Бўстонсарой кўчаси, 93.