

**САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ  
ИЛМий ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ  
DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМий КЕНГАШ**

---

**БУХОРО ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ**

**ЖУМАЕВ ЖОНИБЕК ЖАМОЛОВИЧ**

**ИНТЕГРО – ДИФФЕРЕНЦИАЛ ИССИҚЛИК ЎТКАЗУВЧАНЛИК  
ТЕНГЛАМАСИ УЧУН ТЕСКАРИ МАСАЛАЛАРНИ ТАДҚИҚ ҚИЛИШ**

**01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика**

**Физика–математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси  
А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И**

**Бухоро – 2021**

**Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD)  
диссертацияси автореферати мундарижаси**

**Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on  
physical-mathematical sciences**

**Оглавление автореферата диссертации  
доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам**

**Жумаев Жонибек Жамолович**

Интегро – дифференциал иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси  
учун тескари масалаларни тадқиқ қилиш ..... 3

**Jumaev Jonibek Jamolovich**

Investigation of inverse problems for the integro - differential  
equation of heat conduction ..... 21

**Жумаев Жонибек Жамолович**

Исследование обратных задач для интегро – дифференциального  
уравнения теплопроводности..... 39

**Эълон қилинган ишлар рўйхати**

List of published works  
Список опубликованных работ..... 43

**САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ  
ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ  
DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

---

**БУХОРО ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ**

**ЖУМАЕВ ЖОНИБЕК ЖАМОЛОВИЧ**

**ИНТЕГРО – ДИФФЕРЕНЦИАЛ ИССИҚЛИК ЎТКАЗУВЧАНЛИК  
ТЕНГЛАМАСИ УЧУН ТЕСКАРИ МАСАЛАЛАРНИ ТАДҚИҚ ҚИЛИШ**

**01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика  
(физика–математика фанлари)**

**Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси  
А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И**

**Бухоро – 2021**

Фалсафа доктори (PhD) диссертация мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида В2019.2.PhD/FM335 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Бухоро давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, инглиз, рус (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси ([www.samdu.uz](http://www.samdu.uz)) ва «Ziyouet» Ахборот-таълим порталида ([www.ziyouet.uz](http://www.ziyouet.uz)) жойлаштирилган.

**Илмий раҳбар:** Дурдиев Дурдимурод Қалаидарович  
физика–математика фанлари доктори, профессор

**Расмий ошпонентлар:** Бегматов Акрам Хасанович  
физика–математика фанлари доктори, профессор

Каримов Эркинжон Тўлқинович  
физика–математика фанлари доктори (DSc)

**Етабчи ташкилот:** Урганч давлат университети

Диссертация ҳимояси Самарқанд давлат университети ҳузуридаги DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2021 йил «06» «07» соат 16<sup>00</sup> даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиббони, 15-уй. Тел.: (+99866) 231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38, e-mail: [patent@samdu.uz](mailto:patent@samdu.uz))

Диссертация билан Самарқанд давлат университетининг Ахборот–ресурс марказиди таъини мумкин (№23 рақам билан рўйхатга олинган). (Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиббони, 15-уй. Тел.: (+99866) 231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38.)

Диссертация автореферати 2021 йил «19» «06» куни тарқатилди.  
(2021 йил «19» «06» даги 2 рақамли реестр баённомаси).



**А.С. Солтес**  
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, физика-математика фанлари доктори, профессор

**А.М. Халўжаев**  
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, физика-математика фанлари доктори

**А.Б. Хасанов**  
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси, физика-математика фанлари доктори, профессор

## КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

**Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати.** Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий ва амалий тадқиқотлар, изланишлар хусусий ҳосилалари дифференциал тенгламалар, улар учун тўғри ва тескари масалаларни ўрганишга олиб келинади. Тескари масалалар астрономия, квантларнинг тарқалиши назарияси, геофизика, иссиқлик физикаси, тиббиётга ҳамда ЭХМ пайдо бўлиши билан замонавий илм-фаннинг барча соҳаларига кириб борди. Математик физикада тўғри масалаларнинг ечимини топиш учун тенгламанинг коэффицентлари, соҳа чегараси, бошланғич ва чегаравий шартларни бериш лозим. Аммо амалиётда тенглама коэффицентлари, бошланғич ва чегаравий шартлар, соҳа чегараси ҳамма вақт ҳам маълум бўлавермайди. Бундай ҳолларда, тўғри масала ечимига нисбатан қўшимча маълумот киритиб, тескари масала ечимини излаш, яъни коэффицентлар, бошланғич ёки чегаравий шартлар, соҳа чегарасини топиш зарурати пайдо бўлади. Бу каби масалаларни ечиш усуллариининг тўла шаклланмаганлиги боис интегро-дифференциал иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун тескари масалалардан ядрони аниқлаш масаласи муҳим вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳон миқёсида математик физиканинг энг тез ривожланаётган соҳаси – тескари масалаларни тадқиқ қилиш усулларига алоҳида эътибор қаратилмоқда. Бу соҳа физика ва техника фанлардаги энг муҳим математик муаммолардан бирига айланди. Ушбу муаммонинг кенг доирада қўлланилиши, унинг назариясининг янгилиги ва мураккаблиги сабабли бу кўплаб олимларнинг эътиборини тортди. Сўнгги пайтларда иссиқлик ўтказиш жараёнларини бошқариш жадал ривожланмоқда, чунки ҳар бир муҳитнинг иссиқлик ўтказувчанлиги турлича бўлиб, бу параметр муҳитнинг бошланғич ҳолатига ва хоссаларига чамбарчас боғлиқдир. Шунинг учун интегро-дифференциал иссиқлик ўтказувчанлик тенгламалари учун тўғри ва тескари масалаларни ечиш амалий-назарий жиҳатдан муҳим илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий татбиқига эга бўлган математик физиканинг долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди. Бу борада параболик типдаги интегро-дифференциал тенгламалардан хотира ядросини аниқлаш бўйича тескари масалаларга алоҳида эътибор қаратилди. Ушбу изланишлар натижасида интегро-дифференциал иссиқлик ўтказувчанлик тенгламалари учун тескари масалалар ечимининг мавжудлиги, ягоналигини исботлашга эришилди. Дифференциал тенгламалар ва унинг татбиқлари соҳасида илмий-тадқиқот фаолиятининг самарадорлиги ва натижадорлигини ошириш математика фанининг устувор вазифалари ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди<sup>1</sup>. Бу қарор ижросини

---

<sup>1</sup> Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 9 июлдаги «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И. Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4387-сон қарори.

таъминлашда математик физиканинг интегро-дифференциал тенгламалар назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида» Фармони, 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И. Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида» ва 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

**Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги.** Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

**Муаммонинг ўрганилганлик даражаси.** Математик физиканинг тескари масалалари назариясини ривожлантиришга А.С.Алексеев, А.Л.Бухгейм, М.М.Лаврентьев, В.Г.Романов ва бошқалар ўз ҳиссаларини қўшганлар. Параболик типдаги тенгламалар учун тескари масалалар дастлаб Я.Янно, Л.В.Вольферсдорф, А.Лоренци, Ф.А.Коломбо, М.Е.Гуртин, А.С.Пипкин, Б.Д.Колеман, А.И.Прилепко, А.Б.Костин, А.Д.Искендаров, Н.Я.Безнощенко, М.Грассели ва В.Г.Романовлар томонидан қўйилган ва тадқиқ қилинган. Масалани ўрганишнинг турли усуллари Я.Янно, Л.В.Лоренци, Ф.А.Коломбо, М.Е.Гуртин, А.С.Пипкин, Б.Д.Колеман, Р.К.Миллер, Д.К.Дурдиев ва бошқаларнинг ишларида таклиф этилган ва ривожлантирилган.

Жумладан, Р.К.Миллер<sup>2</sup>нинг мақоласида интегро-дифференциал иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун бошланғич-чегаравий масаланинг бир қийматли ечилувчанлик теоремалари исботланган ва ечимнинг берилганларга узлуксиз боғлиқлигини ифодаловчи турғунлик баҳолари олинган. А.И.Прилепко, А.Б.Костин<sup>3</sup> тадқиқотларида ўзгарувчан коэффициентли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун бошланғич-чегаравий масалалардан тенглама коэффициентларини аниқлаш бўйича тескари масала ечимининг мавжудлиги, ягоналиги исботланган ва турғунлик баҳолари олинган. А.Д.Искендаров тадқиқотларида бу каби тенглама коэффициентларини аниқлашнинг аналитик ва сонли ечиш усуллари

---

<sup>2</sup> Miller R.K., An integro-differential equation for rigid heat conductors with memory // Journal of mathematical analysis and applications, 1978, vol. 66, 313-332.

<sup>3</sup> Prilepko A.I., Kostin A.B. On inverse problems of determining a coefficient in parabolic equation // Siberian Math. J., 1993, vol. 34, №5, pp. 923-937.

ўрганилган. Я.Янно, Л.В.Вольферсдорф<sup>4</sup> ишида  $D = \{(x, t) | x \in (0; 1), t \in (0, T]\}$ ,  $T > 0$  соҳада интегро-дифференциал иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун бошланғич-чегаравий масалада интеграл ҳади ядросини аниқлаш бўйича бир ўлчамли тескари масала қаралган ва ечимнинг мавжудлиги, ягоналиги исботланган ҳамда турғунлик баҳолари олинган.

Ушбу диссертация ишида интегро-дифференциал иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун тўғри ва тескари масалаларнинг бир қийматли ечилувчанлик муаммолари ўрганилган бўлиб, Я.Янно, Л.В.Вольферсдорф, Р.К.Миллер, В.Г.Романов ва Д.Қ.Дурдиевларнинг илмий тадқиқотлари масалаларнинг қўйилиши жиҳатидан яқин ва тадқиқ этишда улар томонидан тавсия этилган усуллардан фойдаланилган.

**Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилаётган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги.** Диссертация тадқиқоти Бухоро давлат университетининг илмий-тадқиқот ишлари режасига мувофиқ Ф-4-02-рақамли «Математик физиканинг ҳолатлар тўплами чексиз бўлган моделлари термодинамикаси»(2017-2020 й.) мавзусидаги фундаментал тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

**Тадқиқотнинг мақсади** бир ва кўп ўлчамли интегро-дифференциал иссиқлик ўтказувчанлик тенгламалари учун Коши масаласи ҳамда биринчи, иккинчи бошланғич-чегаравий масалалардан ядрони аниқлаш усулларини куриш ва бу тескари масалалар ечимларининг мавжудлиги, ягоналигини исботлашдан иборат.

**Тадқиқотнинг вазифалари** қуйидагилардан иборат:

чегараланган соҳада бир ўлчамли интегро-дифференциал иссиқлик тарқалиш тенгламаси учун биринчи бошланғич-чегаравий масаладан хотира функциясини аниқлаш бўйича тескари масаланинг бир қийматли ечилишини исботлаш;

кўп ўлчамли иссиқлик ўтказувчанлик интегро-дифференциал тенгламаси учун қўйилган Коши масаласининг бир қийматли ечилувчанлигини кўрсатиш;

тўғри масала ечими ҳақидаги қўшимча шартга кўра интеграл ҳаднинг ядросини аниқлаш масаласини тадқиқ қилиш;

ярим чегараланган соҳада бир ва кўп ўлчамли ўзгармас коэффициентли интегро-дифференциал иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун иккинчи бошланғич-чегаравий масаладан ядрони аниқлаш масаласи ечимининг мавжудлиги ва ягоналигини исботлаш.

**Тадқиқотнинг объекти** бир ва кўп ўлчамли иккинчи тартибли параболик типдаги интегро-дифференциал тенгламалардан иборат.

**Тадқиқотнинг предмети** ўрама кўринишидаги интеграл ҳадли иккинчи тартибли интегро-дифференциал иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун бир, кўп ўлчамли тўғри ва тескари масалалардан иборат.

**Тадқиқотнинг усуллари.** Диссертацияда функционал анализ, математик физика, Вольтерра типдаги иккинчи тур чизикли бўлмаган ёпиқ интеграл

---

<sup>4</sup> Janno J., Wolfersdorf L.V. Inverse problems for identification of memory kernels in heat flow // Ill-Posed Problems, 1996, vol. 4, №1, pp. 39–66.

тенгламалар системасини ечиш, кетма-кет яқинлашиш, сиқилувчан акслантириш принципи усулларидан фойдаланилган.

**Тадқиқотнинг илмий янгилиги** қуйидагилардан иборат:

чегараланган соҳада бир ўлчамли интегро-дифференциал иссиқлик тарқалиш тенгламаси учун биринчи бошланғич-чегаравий масаладан хотира функциясини аниқлаш бўйича тескари масала ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган;

кўп ўлчамли иссиқлик ўтказувчанлик интегро-дифференциал тенгламаси учун қўйилган Коши масаласининг бир қийматли ечилувчанлиги исботланган;

тўғри масала ечими ҳақидаги қўшимча шартга кўра интеграл ҳаднинг ядросини аниқлаш масаласининг бир қийматли ечилувчанлиги исботланган;

ярим чегараланган соҳада бир ва кўп ўлчамли интегро-дифференциал иссиқлик ўтказувчанлик тенгламалари учун иккинчи бошланғич-чегаравий масалалардан ядрони аниқлаш масаласи ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган.

**Тадқиқотнинг амалий натижалари** қуйидагилардан иборат:

иссиқлик ўтказувчи муҳитларда чегараланган соҳадаги ўртача ҳароратни киритиш орқали хотирали тенглама ядросининг мавжудлик шартлари топилган;

интегро-дифференциал иссиқлик ўтказувчанлик тенгламалари учун бир ва кўп ўлчамли ядрони топиш масалаларининг ечилувчанлиги аниқланган.

**Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги.** Функционал анализ, дифференциал тенгламалар, тескари масалалар назарияси, математик анализ усуллари қўлланилганлиги, ҳамда исботлар ва математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланади.

**Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти.** Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти математик физиканинг интегро-дифференциал тенгламалари учун тескари масалалар назариясини янада ривожлантириши, бир ва кўп ўлчамли ядрони аниқлаш усуллари қурилганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти сейсмологияда, нефть ва газ конларини қидиришда, иссиқлик ўтказувчи хотирали муҳитларда иссиқлик тарқалиш жараёнларини текширишда тадбиқ этилиши билан изоҳланади.

**Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши.** Интегро-дифференциал иссиқлик ўтказувчанлик тенгламалари учун тескари масалаларга оид илмий натижалар асосида:

иссиқлик ўтказувчи муҳитларда чегараланган соҳадаги ўртача ҳароратни киритиш орқали хотирали тенглама ядросини аниқлашнинг таклиф этилган усулидан Ф-4-14 «Суюқлик оқувчи ер ости эгри чизиқли қувурнинг ташқи кучлари таъсиридаги кучланиш–деформациялар ҳолатини тадқиқ қилиш назариясини ривожлантириш ва ҳисоблаш усулларини ишлаб чиқиш» мавзусидаги фундаментал лойиҳада иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасидан ядрони аниқлаш масалаларида фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2021 йил 23 февралдаги 89-03-1050-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши иссиқлик

ўтказувчи муҳитларда чегараланган соҳадаги ўртача ҳароратини киритиш орқали хотирали тенглама ядросини аниқлаш, ярим чегараланган соҳада бир ва кўп ўлчамли ўзгармас коэффицентли интегро-дифференциал иссиқлик тарқалиш тенглама учун иккинчи бошланғич-чегаравий масаланинг бир қийматли ечилувчанлигини исботлаш, иссиқлик ўтказувчи муҳитларда соҳанинг ихтиёрий нуқтадаги ҳароратини киритиш орқали хотирали тенглама ядросини аниқлаш имконини берган;

тескари масалаларни тадқиқ этишнинг таклиф этилган усулидан АААА-А19-119032590069-3 «Геофизик ва инженерлик масалларида иссиқлик вазн алмашиш ва қаттиқ муҳитлар механикаси масалаларини сонли ечиш ва математик моделлаштириш» мавзудаги хорижий грантда кўп ўлчамли интегро-дифференциал иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун тескари масалаларни тадқиқ этишда фойдаланилган (Южный Математический Институт филиал ФГНБУ ФНЦ «Владикавказский научный центр РАН», 2021 йил 24 февралдаги 16-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши интегро-дифференциал иссиқлик ўтказувчанлик тенгламалари учун бир ва кўп ўлчамли тескари масалаларнинг ечилувчанлигини исботлаш имконини берган.

**Тадқиқот натижаларининг апробацияси.** Мазкур тадқиқот натижалари, 8 та илмий-амалий анжуманларда, жумладан 3 та халқаро ва 5 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтган.

**Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги.** Диссертация мавзуси бўйича жами 15 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг диссертациялар асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрлар рўйхатида 7 та мақола, жумладан, 2 таси хорижий ва 5 таси республика журналларида нашр этилган.

**Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми.** Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат бўлиб, диссертациянинг ҳажми 117 бетни ташкил этган.

## ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

**Кириш** қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг биринчи боби «**Бир ўлчамли интегро-дифференциал иссиқлик ўтказувчанлик модел тенгламалари учун тескари масалалар**» деб номланган ва бунда бир ўлчамли интегро-дифференциал иссиқлик ўтказувчанлик тенгламалари учун ядрони аниқлаш тескари масалалари

ўрганилган. Бу бобнинг биринчи параграфида Гёльдер фазолари ҳақида дастлабки тушунчалар, иссиқлик потенциали, иссиқлик потенциалнинг Гёльдер фазосидаги баҳолари бўйича муҳим тушунчалар келтирилган.

Биринчи бобнинг иккинчи параграфида чегараланган соҳада бир ўлчамли интегро-дифференциал иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун ядрони аниқлашнинг тескари масалалари ўрганилган. Қуйидаги бошланғич-чегаравий масаладан  $u(x, t)$ ,  $x \in (0, l)$ ,  $t \in (0, T]$  функцияни аниқлашни қараймиз:

$$u_t - a^2 u_{xx} = \int_0^t k(\tau) u(x, t - \tau) d\tau + h(x, t), \quad x \in (0, l), 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in [0, l], \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u|_{x=l} = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$\varphi(0) = \mu_1(0), \varphi(l) = \mu_2(0),$$

бу ерда  $a$  ўзгармас сон,  $l$  ва  $T$  ихтиёрий мусбат сонлар,  $k(t)$ ,  $h(x, t)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\mu_1(t)$ ,  $\mu_2(t)$  берилган функциялар. (1)-(3) масалага тўғри масала дейилади.

Тескари масалада, (1) даги интеграл ҳаднинг  $k(t)$ ,  $t > 0$  ядроси номаълум деб фараз қилинади ва уни тўғри масаланинг ечимига қўйилган қуйидаги қўшимча шартлар ёрдамида аниқлаш талаб қилинади:

$$\int_0^l u(x, t) dx = f(t), \quad t \in (0, T], \quad (4)$$

ёки

$$u(x_0, t) = f(t), \quad x_0 \in (0, l), \quad t \in (0, T]. \quad (5)$$

Натижада, (1)-(4) масаладан  $u(x, t)$ ,  $k(t)$ ,  $x \in (0, l)$ ,  $t \in (0, T]$  функцияларни аниқлаш **1-тескари масала**га ва (1)-(3), (5) масаладан  $u(x, t)$ ,  $k(t)$ ,  $x \in (0, l)$ ,  $t \in (0, T]$  функцияларни аниқлаш **2-тескари масала**га эга бўламиз.

(1)-(5) масала қуйидаги тенгламалардан  $\vartheta(x, t)$ ,  $k(t)$  функцияларни аниқлаш ёрдамчи масаласига эквивалент:

$$\vartheta_t - a^2 \vartheta_{xx} = k(t) \varphi(x) + \int_0^t k(\tau) \vartheta(x, t - \tau) d\tau + h_t(x, t), \quad (6)$$

$$\vartheta|_{t=0} = a^2 \varphi''(x), \quad (7)$$

$$\vartheta|_{x=0} = \mu_1'(t), \quad \vartheta|_{x=l} = \mu_2'(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8)$$

$$a^2 \varphi''(0) = \mu_1'(0), \quad a^2 \varphi''(l) = \mu_2'(0).$$

$$1\text{-тескари масала:} \quad \int_0^l \vartheta(x, t) dx = f'(t), \quad t \in (0, T], \quad (9)$$

$$2\text{-тескари масала:} \quad \vartheta(x_0, t) = f'(t), \quad t \in (0, T], \quad (10)$$

бу ерда  $\vartheta(x, t) = u_t(x, t)$ .

(6)-(8) бошланғич-чегаравий масалага эквивалент бўлган Вольтерра типидagi интеграл тенглама билан алмаштирамиз:

$$\vartheta(x, t) = \psi(x, t) + \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t - \tau) \left[ k(\tau) \varphi(\xi) + \int_0^\tau k(\alpha) \vartheta(\xi, \tau - \alpha) d\alpha \right] d\xi d\tau, \quad (11)$$

бу ерда

$$\psi(x, t) = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t - \tau) h_\tau(\xi, \tau) d\xi d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx + \right. \\ \left. + \frac{2\pi a^2 n}{l^2} \int_0^t \left( \mu'_1(\tau) - (-1)^n \mu'_2(\tau) \right) e^{\left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 \tau} d\tau \right] e^{\left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

$G(x, \xi, t - \tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 (t-\tau)} \sin \frac{\pi a n}{l} \xi \sin \frac{\pi a n}{l} x$  - бир ўлчамли интегро-дифференциал иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун бошланғич-чегаравий масаласининг Грин функцияси.

**1-лемма.** *Фараз қилайлик  $(\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)) \in C[0, l]$ ,  $(h(x, t), h_t(x, t)) \in C(\overline{D}_{lT})$ ,  $(\mu_1(t), \mu'_1(t), \mu_2(t), \mu'_2(t)) \in C[0, T]$ ,  $k(t) \in C[0, T]$  ва (3), (8) келишувчанлик шартлари бажарилсин. У ҳолда (6)-(8) тўғри масаланинг  $C^{2,1}(\overline{D}_{lT})$  синфга тегишли ягона  $\vartheta(x, t)$  классик ечими мавжуд бўлади ( $D_{lT} = \{(x, t) | 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ ).*

(11) интеграл тенгламани  $(0, l)$  оралиғида интеграллаб, 1-тескари масала учун қўшимча шартдан фойдаланиб, бир нечта содда алмаштиришлардан сўнг куйидаги интеграл тенгламани оламиз:

$$k(t) = \frac{1}{\varphi_0} \left[ f''(t) - \int_0^l \psi_t(x, t) dx - \int_0^l \int_0^t k(\tau) \int_0^l G_t(x, \xi, t - \tau) \varphi(\xi) d\xi d\tau dx - \right. \\ \left. - \int_0^l \int_0^t k(\alpha) \vartheta(x, t - \alpha) d\alpha dx - \int_0^l \int_0^t \int_0^l G_t(x, \xi, t - \tau) \times \right. \\ \left. \times \int_0^\tau k(\alpha) \vartheta(\xi, \tau - \alpha) d\alpha d\xi d\tau dx \right], \quad (12)$$

бу ерда  $\varphi_0 = \int_0^l \varphi(x) dx$ .

**1-теорема.**  *$f(t) \in C^2[0, T]$ ,  $\varphi_0 \neq 0$  бўлсин ва 1-лемма шартлари бажарилсин. У ҳолда ихтиёрӣ тайин  $l > 0$  ва  $T > 0$  сонлар учун  $\overline{D}_{lT}$  соҳада 1-тескари масала ягона ечимга эга бўлади.*

Шундай қилиб, 1-тескари масала ягона ечимга эга бўлади ва  $k(t) \in C[0, T]$ .

(6)-(8) ва (10) иккинчи тескари масалани ўрганамиз. (11) интеграл тенгламага  $x = x_0$  ни қўйиб ва (10) қўшимча шартдан фойдаланиб  $k(t)$  номаълум функцияга нисбатан интеграл тенглама оламиз:

$$k(t) = \frac{1}{\varphi(x_0)} \left( f''(t) - \psi'_t(x_0, t) \right) - \\ - \frac{1}{\varphi(x_0)} \int_0^l G(x_0, \xi, 0) \int_0^t k(\alpha) \vartheta(\xi, t - \alpha) d\alpha d\xi - \\ - \frac{1}{\varphi(x_0)} \int_0^t \int_0^l G_t(x_0, \xi, t - \tau) \int_0^\tau k(\alpha) \vartheta(\xi, \tau - \alpha) d\alpha d\xi d\tau. \quad (13)$$

**2-теорема.**  $f(t) \in C^2[0, T]$ ,  $\varphi(x_0) \neq 0$  бўлсин ва 1-лемма шартлари бажарилсин. У ҳолда ихтиёрий тайин  $l > 0$  ва  $T > 0$  сонлар учун  $\bar{D}_{lT}$  соҳада 2-тескари масала ягона ечимга эга бўлади.

Биринчи бобнинг учинчи параграфида ярим чегараланган соҳада интегро-дифференциал иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун ядрони аниқлаш масаласи ўрганилган. Қуйидаги иккинчи бошланғич-чегаравий масаладан  $u(x, t)$ ,  $(x, t) \in D_+$ , ( $D_+ = \{(x, t) | x > 0, t > 0\}$ ) функцияни аниқлаш масаласини қараймиз:

$$u_t - a^2 u_{xx} = \int_0^t k(\tau) u(x, t - \tau) d\tau, \quad (x, t) \in D_+, \quad (14)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x > 0, \quad (15)$$

$$u_x|_{x=0} = \psi(t), \quad t > 0, \quad (16)$$

бу ерда  $a$  - ўзгармас сон,  $l$  ва  $T$  - ихтиёрий мусбат сонлар,  $k(t)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\psi(t)$  берилган функциялар. (14)-(16) масала тўғри масала дейилади.

Тескари масала тўғри масала (14)-(16) ечими ҳақида

$$u|_{x=0} = f(t), \quad t > 0. \quad (17)$$

қўшимча маълумот бўйича  $k(t)$ ,  $t > 0$  функцияни аниқлашдан иборат, бу ерда  $f(t)$  – берилган етарлича силлиқ функция.

**2-лемма.** (14)-(17) масала қуйидаги тенгламалардан  $\omega(x, t)$ ,  $k(t)$  функцияларни топиш ёрдамчи масаласига эквивалент бўлади:

$$\omega_t - \omega_{xx} = k(t)\varphi''(x) + \int_0^t k(\tau)\omega(x, t - \tau)d\tau, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad (18)$$

$$\omega|_{t=0} = \varphi^{(IV)}(x), \quad x > 0, \quad (19)$$

$$\omega_x|_{x=0} = \psi''(t) - k(t)\varphi'(0) - \int_0^t k(\tau)\psi'(t - \tau)d\tau, \quad t > 0, \quad (20)$$

$$\omega|_{x=0} = f''(t) - k(t)\varphi(0) - \int_0^t k(\tau)f'(t - \tau)d\tau, \quad t > 0, \quad (21)$$

бу ерда  $\omega(x, t) = u_{txx}$ .

(18)-(20) бошланғич-чегаравий масала қуйидаги интеграл тенгламадан  $\omega(x, t)$  топиш масаласига келтирилади:

$$\begin{aligned} \omega(x, t) = & P(x, t) + \\ & + \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) \left[ k(\tau)\varphi''(\xi) + \int_0^\tau k(\alpha)\omega(\xi, \tau - \alpha)d\alpha \right] d\xi d\tau + \\ & + \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t - \tau}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \left[ k(\tau)\varphi'(0) + \int_0^\tau k(\alpha)\psi'(\tau - \alpha)d\alpha \right] d\tau, \end{aligned} \quad (22)$$

бу ерда

$$P(x, t) = \int_0^\infty G(x, \xi, t) a^2 \varphi^{(IV)}(\xi) d\xi - \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t - \tau}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \psi''(\tau) d\tau,$$

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left[ e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2 t}} \right].$$

(22) интеграл тенглама ечими ҳақида қуйидаги лемма ўринли:

**3-лемма.** Фараз қилайлик ихтиёрий тайин  $T > 0$  учун  $\varphi(x) \in B^4(\mathbb{R}_+)$ ,  $\psi(t) \in C^3[0, T]$ ,  $k(t) \in C[0, T]$  бўлсин. У ҳолда (22) интеграл тенгламанинг ягона ечими мавжуд ва  $\omega(x, t) \in B^{4,2}(D_+)$  бўлади.

Бу ерда  $B^i(\mathbb{R}_+)$  -  $\mathbb{R}_+$  соҳада  $i$  марта  $x$  бўйича узлуксиз дифференциалланувчи,  $i$  - тартибгача ҳосилалари билан бирга чегараланган функциялар синфи,  $B^{i,j}(D_+)$  -  $D_+$  соҳада  $i$  марта  $x$  бўйича ва  $j$  марта  $t$  бўйича узлуксиз дифференциалланувчи, барча ҳосилалари билан бирга чегараланган функциялар синфи.

(22) интеграл тенгламага  $x = 0$  ни қўйиб ва (21) қўшимча шартдан фойдаланиб  $k(t)$  учун интеграл тенглама оламиз:

$$k(t) = \frac{1}{\varphi(0)} \left[ f''(t) - P(0, t) - \int_0^t k(\tau) f'(t - \tau) d\tau - \int_0^t \int_0^\infty G(0, \xi, t - \tau) k(\tau) \varphi(\xi) d\xi d\tau - \int_0^t \int_0^\infty G(0, \xi, t - \tau) \int_0^\tau k(\alpha) \omega(\xi, \tau - \alpha) d\alpha d\xi d\tau - \frac{a\varphi'(0)}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t - \tau}} k(\tau) d\tau - \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t - \tau}} \int_0^\tau k(\alpha) \psi'(\tau - \alpha) d\alpha d\tau \right], \quad (23)$$

бу ерда  $\varphi(0) \neq 0$ .

**3-теорема.** Фараз қилайлик  $f(t) \in C^3[0, T]$ ,  $\varphi(0) = f(0)$ ,  $\varphi'(0) = \psi(0)$ ,  $a^2 \varphi''(0) = \psi'(0)$ ,  $\varphi^{IV}(0) = f''(0) - k(0)\varphi(0)$ ,  $\varphi(0) \neq 0$  бўлсин ва 3-лемма шартлари бажарилсин. У ҳолда  $D_+$  соҳада (22), (23) интеграл тенгламаларнинг ягона ечими мавжуд бўлади. Шундай қилиб, тескари масаланинг  $C[0, T]$  синфга тегишли ягона ечими мавжуд.

Диссертациянинг иккинчи боби «**Муҳитнинг иссиқлик хотирасини аниқлаш масаласи**» деб номланган бўлиб, бу бобнинг биринчи параграфида масаланинг қўйилиши ва дастлабки тушунчалар келтирилган. Ўнг томони интеграл ҳадли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун Коши масаласини қараймиз:

$$u_t - \Delta u = \int_0^t K(t - \tau) \Delta u(x, \tau) d\tau, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (24)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (25)$$

$K(t)$  ва  $\varphi(x)$  берилган функциялар учун (24), (25) тенгламадан  $u(x, t)$  функциясини топиш масаласига тўғри масала дейилади.

Тескари масала (24)-(25) тўғри масала ечими ҳақида

$$u|_{x=0} = f(t), \quad t > 0, \quad f(0) = \varphi(0), \quad (26)$$

қўшимча маълумот бўйича  $k(t)$ , ( $t > 0$ ) функцияни аниқлашдан иборат, бу ерда  $f(t)$  – берилган функция,  $K(0)$  берилган сон деб фараз қилинади.

**4-лемма.** Фараз қилайлик  $T > 0$  тайинланган сон бўлиб,  $K(t) \in C^1[0, T]$  бўлсин. У ҳолда (24), (25) тўғри масала қуйидаги тенглама ва (25) шартни

қаноатлантирувчи  $u(x, t)$  функцияни топиш ёрдамчи масаласига эквивалент бўлади:

$$u_t - \Delta u + R(0)u = R(t)\varphi(x) - \int_0^t R'(t - \tau)u(x, \tau)d\tau, x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \quad (27)$$

бу ерда  $R(t) - K(t)$  ядронинг резолвентаси.

**5-лемма.** Агар  $\{\varphi, \varphi_{x_i}\} \in B(\mathbb{R}^n)$  ва  $R(t) \in C^1[0, T], R(0) \geq 0$  бўлса, у ҳолда (27), (25) масаланинг ягона ечими мавжуд ва  $u(x, t) \in B^{2,1}(D_T)$  бўлади.

Пуассон формуласи ёрдамида (27), (25) масалага эквивалент интеграл тенгламани оламиз:

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x - \xi, t)\varphi(\xi)d\xi + \int_0^t R(\tau)d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(x - \xi, t - \tau)\varphi(\xi)d\xi - \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(x - \xi, t - \tau) \int_0^\tau R'(\tau - \alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha d\xi, \quad (28)$$

$$\text{Бу ерда } G(x, t) = e^{-R(0)t}G_0(x, t), \quad G_0(x, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} - \frac{\partial}{\partial t} - \Delta$$

иссиқлик ўтказувчанлик операторининг фундаментал ечими,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ,  $d\xi = d\xi_1 \dots d\xi_n$ ,  $|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ .

Иккинчи параграфда биринчи параграфда қўйилган тўғри масалага эквивалент бўлган ёрдамчи масала олинган ва тадқиқ қилинган.  $h(t)$  орқали  $R'(t)$  функцияни белгилаймиз, яъни  $h(t) = R'(t)$ . (27), (25), (26) тескари масаладан  $(u, h)$  функциялар жуфтлигини аниқлаш масаласини қараймиз. Бунда берилган  $\varphi(x)$ ,  $f(t)$  функцияларни етарлича силлиқ деб ҳисоблаймиз.

**6-лемма.** (27), (25), (26) масала қуйидаги тенгламадан  $\vartheta(x, t)$ ,  $h(t)$  функцияларни топиш масаласига эквивалент:

$$\vartheta_t - \Delta \vartheta + R(0)\vartheta = -h(t) \Delta^2 \varphi(x) - \int_0^t h(\tau)\vartheta(x, t - \tau)d\tau, x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (29)$$

$$\vartheta|_{t=0} = \Delta^3 \varphi(x) - R(0) \Delta^2 \varphi(x), x \in \mathbb{R}^n, \quad (30)$$

$$\vartheta|_{x=0} = f'''(t) + R(0)f''(t) - h(t) \Delta \varphi(0) - \int_0^t h(\tau)f''(t - \tau)d\tau, \quad (31)$$

$$\text{бу ерда } \vartheta(x, t) = \Delta u_{tt}(x, t), \quad R(0) = \frac{\Delta^2 \varphi(0) - f''(0)}{\Delta \varphi(0)}.$$

(29), (30) Коши масаласининг ечими қуйидаги интеграл тенгламани қаноатлантиради:

$$\begin{aligned} \vartheta(x, t) = & \int_{\mathbb{R}^n} G(x - \xi, t)[\Delta^3 \varphi(\xi) - R(0) \Delta^2 \varphi(\xi)]d\xi - \\ & - \int_0^t h(\tau)d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(x - \xi, t - \tau) \Delta^2 \varphi(\xi)d\xi - \\ & - \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(x - \xi, t - \tau) \int_0^\tau h(\alpha)\vartheta(\xi, \tau - \alpha)d\alpha d\xi. \end{aligned} \quad (32)$$

Ушбу тенгламанинг ечимига нисбатан қуйидаги лемма ўринли:

**7-лемма.** Фараз қилайлик  $\varphi(x) \in B^6(\mathbb{R}^n)$ ,  $f(t) \in C^3[0, T]$ ,  $h(t) \in C[0, T]$ ,  $T > 0$ ,  $\Delta \varphi(0) \neq 0$  бўлсин ва  $f''(0) = \Delta^2 \varphi(0) - R(0) \Delta \varphi(0)$  тенглик бажарилсин. У ҳолда (32) интеграл тенгламанинг ягона ечими мавжуд ва  $\vartheta(x, t) \in B^{2,1}(D_T)$  бўлади.

Иккинчи бобнинг учинчи параграфиди тескари масала учун интеграл тенглама олинди, ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги исботланди. (32) интеграл тенгламага  $x = 0$  ни қўйиб, ҳамда (31) шартдан фойдаланиб  $h(t)$  га нисбатан интеграл тенгламани оламиз:

$$h(t) = \frac{1}{\Delta\varphi(0)} \{f'''(t) + R(0)f''(t) - \int_{\mathbb{R}^n} G(\xi, t) [\Delta^3 \varphi(\xi) - R(0) \Delta^2 \varphi(\xi)] d\xi\} + \frac{1}{\Delta\varphi(0)} \int_0^t [-f''(t - \tau) + \int_{\mathbb{R}^n} G(\xi, t - \tau) \Delta^2 \varphi(\xi) d\xi] h(\tau) d\tau + \frac{1}{\Delta\varphi(0)} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(\xi, t - \tau) \int_0^\tau h(\alpha) \vartheta(\xi, \tau - \alpha) d\alpha d\xi, \quad (33)$$

$$F(t) = \frac{1}{\Delta\varphi(0)} \{f'''(t) + R(0)f''(t) - \int_{\mathbb{R}^n} G(\xi, t) [\Delta^3 \varphi(\xi) - R(0) \Delta^2 \varphi(\xi)] d\xi\}$$

белгилаш киритиб, куйидаги операторни киритамиз

$$H[h(t)] = F(t) + \frac{1}{\Delta\varphi(0)} \int_0^t [-f''(t - \tau) + \int_{\mathbb{R}^n} G(\xi, t - \tau) \Delta^2 \varphi(\xi) d\xi] h(\tau) d\tau + \frac{1}{\Delta\varphi(0)} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(\xi, t - \tau) \int_0^\tau h(\alpha) \vartheta(\xi, \tau - \alpha) d\alpha d\xi. \quad (34)$$

(33) тенглама қулай оператор тенглама шаклида ёзилди:

$$h(t) = H[h(t)]. \quad (35)$$

$\|F\| = \max_{t \in [0, T]} |F(t)|$  бўлсин. Тайинланган  $\rho > 0$  сон учун  $\Phi^T(F, \rho) = \{l(t) : l(t) \in C[0, T], \|F - l\| \leq \rho\}$  шарни қараймиз.

**4-теорема.** *Фараз қилайлик  $f(t) \in C^3[0, T]$ ,  $T > 0$ ,  $\varphi(x) \in B^6(\mathbb{R}^n)$ ,  $\Delta \varphi(0) \neq 0$  бўлсин ва  $f''(0) = \Delta^2 \varphi(0) - R(0) \Delta \varphi(0)$  тенглик бажарилсин. У ҳолда шундай  $T^*$  сон топилиб,  $(0, T]$ ,  $T \in (0, T^*)$  кесмада (31) тенгламанинг  $\Phi^T(F, \rho)$  шарга тегишли бўлган ягона узлуксиз ечими мавжуд.*

Учинчи боб «**Интегро-дифференциал иссиқлик ўтказувчанлик тенгламалари учун кўп ўлчамли тўғри ва тескари масалалар**» деб номланиб, кўп ўлчовли тўғри ва тескари масалалар ўрганилган.

Ушбу боб биринчи параграфиди интегро-дифференциал иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун Коши масаласидан ядрони аниқлаш масаласи ўрганилган. Куйидаги тенглама учун Коши масаласини қараймиз:

$$u_t - a^2 \Delta u = \int_0^t k(\tau) u(x, t - \tau) d\tau, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (36)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (37)$$

Бу ерда  $\varphi(x)$  берилган етарлича силлиқ функция,  $a$  ( $a > 0$ ) – берилган сон.

Тескари масала (36)-(37) тўғри масала ечими ҳақида

$$u|_{x=0} = f(t), \quad t > 0, \quad f(0) = \varphi(0). \quad (38)$$

қўшимча маълумот бўйича  $k(t)$ ,  $t > 0$  функцияни аниқлашдан иборат.

Қулайлик учун,  $\omega(x, t) = \Delta u_t(x, t)$  белгилаш киритамиз. (36)-(38) тескари масалани  $\omega(x, t)$  функцияга нисбатан ёзамиз:

$$\omega_t - a^2 \omega_{xx} = k(t) \Delta \varphi(x) + \int_0^t k(\tau) \omega(x, t - \tau) d\tau, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (39)$$

$$\omega|_{t=0} = a^2 \Delta^2 \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (40)$$

$$\omega|_{x=0} = \frac{1}{a^2} f''(t) - \frac{1}{a^2} k(t) \varphi(0) - \frac{1}{a^2} \int_0^t k(\tau) f'(\tau) d\tau, \quad t > 0. \quad (41)$$

(40) ва (41) шартлардан куйидаги тенглик олинади:

$$k(0) = \frac{1}{\varphi(0)} [f''(t)|_{t=0} - a^4 \Delta^2 \varphi(x)|_{x=0}]. \quad (42)$$

Пуассон формуласидан фойдаланиб (39), (40) масалани  $\omega(x, t)$  функцияга нисбатан қуйидаги интеграл тенглама орқали ифодалаймиз:

$$\omega(x, t) = \psi(x, t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(x - \xi, t - \tau) [k(\tau) \Delta \varphi(\xi) + \int_0^\tau k(\alpha) \omega(\xi, \tau - \alpha) d\alpha] d\xi d\tau, \quad (43)$$

бу ерда

$$\psi(x, t) = a^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(x - \xi, t - \tau) \Delta^2 \varphi(\xi) d\xi d\tau,$$

$G(x, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}$ - иссиқлик ўтказувчанлик оператори  $\omega_t = a^2 \Delta \omega$  нинг фундаментал ечими.

**8-лемма.** Фараз қилайлик  $(\varphi(x), \Delta \varphi(x), \Delta^2 \varphi(x)) \in B(\mathbb{R}^n), k(t) \in C[0, T], \varphi(0) \neq 0$  бўлсин ва (38), (42) шартлар бажарилсин. У ҳолда (39)-(40) масаланинг  $B^{2,1}(\overline{D}_T)$  синфга тегишли ягона классик  $\omega(x, t)$  ечими мавжуд ( $D_T = \{(x, t) | x \in \mathbb{R}^n, 0 < t < T\}$ ).

(43) интеграл тенгламага  $x = 0$  ни қўйиб ва (41) қўшимча шартдан фойдаланиб,  $k(t)$  номаълум функцияга нисбатан қуйидаги интеграл тенглама олинди:

$$k(t) = F_0(t) - \frac{1}{\varphi(0)} \int_0^t k(\tau) f'(t - \tau) d\tau + \frac{a^2}{\varphi(0)} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(x - \xi, t - \tau) [k(\tau) \Delta \varphi(\xi) + \int_0^\tau k(\alpha) \omega(\xi, \tau - \alpha) d\alpha] d\xi d\tau, \quad (44)$$

бу ерда

$$F_0(t) = \frac{1}{\varphi(0)} [f''(t) - a^4 \int_{\mathbb{R}^n} G(\xi, t) \Delta^2 \varphi(\xi) d\xi].$$

**5-теорема.** Фараз қилайлик  $f(t) \in C^2[0, T], \varphi(0) \neq 0$  бўлсин ва 8-леммадаги шартлар бажарилсин. У ҳолда тайинланган  $T > 0$  учун (43), (44) интеграл тенгламаларнинг  $\overline{D}_T$  синфга тегишли ягона ечими мавжуд.

Учинчи бобнинг иккинчи параграфида ярим чегараланган соҳада интегро-дифференциал иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасидан ядрони аниқлаш масаласи ўрганилган.

Интегро-дифференциал иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун  $u(x, t), x = (x', x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$  функцияни аниқлаш бўйича қуйидаги иккинчи бошланғич-чегаравий масалани қараймиз:

$$u_t - a^2 \Delta u = \int_0^t k(x', \tau) u(x, t - \tau) d\tau, \quad (x, t) \in D_+, \quad (46)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^n, \quad (47)$$

$$u_{x_n}|_{x_n=0} = \psi(x', t), \quad (x', t) \in \mathbb{R}_T^{n-1} \quad (48)$$

бу ерда  $a$  – мусбат сон,  $(\mathbb{R}_T^{n-1} = \{(x', t) | x' \in \mathbb{R}^{n-1}, 0 < t \leq T\}, D_+ = \{(x, t) | x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n > 0, 0 < t \leq T\}, \mathbb{R}_+^n = \{(x', x_n) | x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n > 0\}, k(x', t), \varphi(x), \psi(x', t)$  лар берилган функциялар. (46)-(48) тўғри масала дейилади. (47) бошланғич ва (48) чегаравий шартлар учун  $\varphi_{x_n}(x', 0) = \psi(x', 0)$  келишувчанлик шarti ўринли.

Тескари масала (46)-(48) тўғри масала ечими ҳақида

$$u|_{x_n=0} = f(x', t), \quad (x', t) \in \mathbb{R}_T^{n-1} \quad (49)$$

кўшимча маълумот бўйича  $k(x', t)$ ,  $t > 0$  функцияни аниқлашдан иборат. Бунда  $\varphi(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}_+^n$ ,  $\psi(x', t)$  берилган, етарлича силлиқ функциялар, бу тескари масалада (46)-(49) тенгламадан  $u(x, t)$ ,  $k(x', t)$  функциясини топиш масаласини қаралади.

**9-лемма.** (46)-(49) масала қуйидаги тенгламалардан  $\omega(x, t)$ ,  $k(x', t)$  функцияларни аниқлаш масаласига эквивалент:

$$\omega_t - a^2 \Delta \omega = k(x', t) \varphi_{x_n x_n}(x) + \int_0^t k(x', \tau) \omega(x, t - \tau) d\tau, \quad (50)$$

$$\omega|_{t=0} = a^2 \Delta \varphi_{x_n x_n}(x), \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \omega_{x_n}|_{x_n=0} = & \frac{1}{a^2} \psi_{tt}(x', t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \psi_t(x', t) - \frac{1}{a^2} k(x', t) \varphi_{x_n}(x', 0) - \\ & - \frac{1}{a^2} \int_0^t k(x', \tau) \psi_t(x', t - \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \omega|_{x_n=0} = & \frac{1}{a^2} f_{tt}(x', t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} f_t(x', t) - \frac{1}{a^2} k(x', t) \varphi(x', 0) - \\ & - \frac{1}{a^2} \int_0^t k(x', \tau) f_t(x', t - \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (53)$$

бу ерда  $\omega(x, t) = u_{tx_n x_n}(x, t)$ .

(50)-(52) бошланғич-чегаравий масаласининг ечими қуйидаги интеграл тенгламани қаноатлантиради:

$$\begin{aligned} \omega(x, t) = & \omega_0(x, t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G(x' - \xi', 0, t - \tau) \times \\ & \times \int_0^\infty \Gamma(x_n - \xi_n, t - \tau) k(\tau, \xi') \varphi_{\xi_n \xi_n}(\xi) d\xi_n d\xi' d\tau + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G(x' - \xi', 0, t - \tau) \\ & \times \int_0^\infty \Gamma(x_n - \xi_n, t - \tau) \int_0^\tau k(\xi', \alpha) \omega(\xi, \tau - \alpha) d\alpha d\xi_n d\xi' d\tau + \\ & + \frac{2}{a^2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G(x' - \xi', x_n, t - \tau) k(\xi', \tau) \varphi_{\xi_n}(\xi', 0) d\xi' d\tau + \\ & + \frac{2}{a^2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G(x' - \xi', x_n, t - \tau) \int_0^\tau k(\xi', \alpha) \psi_\tau(\xi', \tau - \alpha) d\alpha d\xi' d\tau, \end{aligned} \quad (54)$$

бу ерда

$$\begin{aligned} \omega_0(x, t) = & \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G(x' - \xi', 0, t - \tau) \int_0^\infty \Gamma(x_n - \xi_n, t) a^2 \Delta \varphi_{\xi_n \xi_n}(\xi) d\xi_n d\xi' - \\ & - \frac{2}{a^2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G(x' - \xi', x_n, t - \tau) \psi_{\tau\tau}(\xi', \tau) d\xi' d\tau + \\ & + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G(x' - \xi', x_n, t - \tau) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial \xi_k^2} \psi_\tau(\xi', \tau) d\xi' d\tau, \end{aligned}$$

$G(x, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$ ,  $x^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$  – иссиқлик ўтказувчанлик операторининг фундаментал ечими,

$$\Gamma(x_n - \xi_n, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left[ e^{-\frac{(x_n - \xi_n)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x_n + \xi_n)^2}{4a^2 t}} \right].$$

(54) интеграл тенгламага  $x_n = 0$  ни қўйиб ва (53) шартдан фойдаланиб,  $k(x', t)$  номаълум функцияга нисбатан интеграл тенглама оламит:

$$k(x', t) = \frac{a^2}{\varphi(x', 0)} \left[ \frac{1}{a^2} f_{tt}(x', t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} f_t(x', t) - \omega_0(x', t) \right] -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{\varphi(x',0)} \int_0^t k(x',\tau) f_t(x',t-\tau) d\tau - \frac{a^2}{\varphi(x',0)} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G(x' - \xi', 0, t - \tau) \times \\
& \quad \times \int_0^\infty \Gamma(x_n - \xi_n, t - \tau) k(\xi', \tau) \varphi_{\xi_n \xi_n}(\xi) d\xi_n d\xi' d\tau - \\
& - \frac{a^2}{\varphi(x',0)} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G(x' - \xi', 0, t - \tau) \int_0^\infty \Gamma(x_n - \xi_n, t - \tau) \times \\
& \quad \times \int_0^\tau k(\xi', \alpha) \omega(\xi, \tau - \alpha) d\alpha d\xi_n d\xi' d\tau - \\
& - \frac{2}{\varphi(x',0)} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G(x' - \xi', 0, t - \tau) k(\xi', \tau) \varphi_{\xi_n}(\xi', 0) d\xi' d\tau - \\
& - \frac{2}{\varphi(x',0)} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G(x' - \xi', 0, t - \tau) \int_0^\tau k(\xi', \alpha) \psi_\tau(\xi', \tau - \alpha) d\alpha d\xi' d\tau. \quad (55)
\end{aligned}$$

$\varphi(x', 0) \neq 0$  бўлсин.

**6-теорема.** *Фараз қилайлик  $\varphi(x) \in B^4(\mathbb{R}_+^n)$ ,  $|\varphi(x', 0)| \neq 0$ ,  $f(x', t) \in B^{4,3}(\mathbb{R}_T^{n-1})$ ,  $\psi(x', t) \in B^{4,3}(\mathbb{R}_T^{n-1})$ ,  $\varphi_{x_n}(x', 0) = \psi(x', 0)$ ,  $a^2 \Delta \varphi_{x_n}(x', 0) = \psi_t(x', 0)$ ,  $f(x', 0) = \varphi(x', 0)$ ,  $f_t(x', 0) = a^2 \Delta \varphi(x', 0)$  шартлар бажарилсин. У ҳолда етарлича кичик  $T > 0$  сон учун (54), (55) интеграл тенгламаларнинг ягона  $\omega(x, t) \in B^{4,2}(D_+)$ ,  $k(x', t) \in B(\mathbb{R}_T^{n-1})$  ечими мавжуд бўлади. Бундан, (50)-(53) масаланинг ягона классик ечими эга эканлиги келиб чиқади.*

Учинчи бобнинг учинчи параграфида иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун кўп ўлчамли иссиқлик хотирасини аниқлаш масаласи ўрганилган. Қуйидаги тенгламалардан  $u(x, t)$ ,  $k(x', t)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $0 < t \leq T$  функцияларни топиш тескари масаласини қараймиз:

$$u_t - \Delta u = \int_0^t k(x', t - \tau) \Delta u(x, \tau) d\tau, \quad (x, t) \in \mathbb{R}_T^n, \quad (56)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (57)$$

$$u|_{x_n=0} = f(x', t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad f(x', 0) = \varphi(x', 0), \quad (58)$$

$\mathbb{R}_T^n = \{(x, t) | x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n, 0 < t \leq T\}$ ,  $T > 0$  – ихтиёрий тайинланган сон.

$H^l(\mathbb{R}^n)$ -  $\mathbb{R}^n$  фазода аниқланган  $l$  – тартибли Гёльдер функциялар синфи,  $H^{l,l/2}(\overline{\mathbb{R}_T^n})$ -  $\overline{\mathbb{R}_T^n}$  фазода аниқланган фазовий ўзгарувчиси бўйича  $l$  – тартибли, вақт ўзгарувчиси бўйича  $l/2$  – тартибли Гёльдер функциялар синфи бўлсин.  $H^{l+m}(\mathbb{R}^n)$  ва  $H^{l+m,(l+m)/2}(\overline{\mathbb{R}_T^n})$  функциялар синфида нормалар қуйидагича киритилади:

$$|\varphi|^{l+m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha \varphi| + \sum_{|\alpha|=m} \sup_{\substack{|x^1 - x^2| \leq \rho \\ x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n}} \frac{|D^\alpha \varphi(x^1) - D^\alpha \varphi(x^2)|}{|x^1 - x^2|^l}, \quad l \in (0,1),$$

$$\begin{aligned}
|u|_T^{l+m,(l+m)/2} &= \sum_{2r+|s|\leq m} \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}_T^n} |D^r D^s u| + \\
&+ \sum_{2r+|s|=m} \sup_{\substack{|x^1-x^2|\leq\rho \\ (x^1,t),(x^2,t)\in\mathbb{R}_T^n}} \frac{|D^r D^s u(x^1,t)-D^r D^s u(x^2,t)|}{|x^1-x^2|^l} + \\
&+ \sum_{2r+|s|=m} \sup_{\substack{|t^1-t^2|\leq\rho \\ (x,t^1),(x,t^2)\in\mathbb{R}_T^n}} \frac{|D^r D^s u(x,t^1)-D^r D^s u(x,t^2)|}{|t^1-t^2|^{l/2}}.
\end{aligned}$$

**10-лемма.** Фараз қилайлик  $k(x',t) \in H^{l+2,(l+2)/2}(\overline{\mathbb{R}_T^{n-1}})$  бўлсин, у ҳолда (56)-(58) масала

$$u_t = \Delta u - \int_0^t r(x',t-\tau)u_\tau(x,\tau)d\tau, \quad (59)$$

тенглама ҳамда (57), (58) бошланғич ва қўшимча шартларни қаноатлантирувчи  $u(x,t)$ ,  $r(x',t)$  функцияларни топиш масаласига эквивалент бўлади, бу ерда  $r(x',t) - k(x',t)$  ядро резольвентаси.

$r_t(x',t)$  функцияни  $h(x',t)$  орқали белгилаймиз, яъни  $h(x',t) = r_t(x',t)$ .

**11-лемма.** (59), (57), (58) масала қўйидаги ёрдамчи масаладан  $\vartheta(x,t)$ ,  $h(x',t)$  функцияларни топиш масаласига эквивалент бўлади:

$$\vartheta_t - \Delta \vartheta = -r(x',0)\vartheta - h(x',t) \Delta \varphi_{x_n x_n}(x) - \int_0^t h(x',\tau)\vartheta(x,t-\tau)d\tau, \quad (60)$$

$(x,t) \in \mathbb{R}_T^n,$

$$\vartheta|_{t=0} = \Delta^2 \varphi_{x_n x_n}(x) - r(x',0) \Delta \varphi_{x_n x_n}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \vartheta|_{x_n=0} &= f_{ttt}(x',t) - \Delta_{x'} f_{tt}(x',t) + r(x',0)f_{tt}(x',t) + \\ &+ h(x',t) \Delta \varphi(x',0) - \int_0^t h(x',\tau)f_{tt}(x',t-\tau)d\tau, \quad (x',t) \in \mathbb{R}_T^{n-1}, \end{aligned} \quad (62)$$

бу ерда  $\vartheta(x,t) = u_{ttx_n x_n}(x,t)$ ,  $\Delta_{x'} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ ,  $r(x',0) = \frac{\Delta^2 \varphi(x',0) - f_{tt}(x',0)}{\Delta \varphi(x',0)}$ .

(60) ва (61) Коши масаласи  $\vartheta(x,t)$  номаълум функцияга нисбатан интеграл тенглама орқали қўйидагича ифодаланади:

$$\begin{aligned} \vartheta(x,t) &= \int_{\mathbb{R}^n} G(x-\xi;t) [\Delta^2 \varphi_{\xi_n \xi_n}(\xi) - r(\xi',0) \Delta \varphi_{\xi_n \xi_n}(\xi)] d\xi - \\ &- \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(x-\xi;t-\tau) h(\xi',\tau) \Delta \varphi_{\xi_n \xi_n}(\xi) d\xi - \\ &- \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(x-\xi,t-\tau) \left[ -r(\xi',0)\vartheta(\xi,\tau) - \int_0^\tau h(\xi',\alpha)\vartheta(\xi,\tau-\alpha)d\alpha \right] d\xi \end{aligned} \quad (63)$$

(63) интеграл тенгламага  $x_n = 0$  ни қўйиб ва (62) қўшимча шартдан фойдаланиб  $h(x',t)$  функция учун интеграл тенглама олинди:

$$\begin{aligned} h(x',t) &= \frac{1}{\Delta \varphi(x',0)} \{ -f_{ttt}(x',t) + \Delta_{x'} f_{tt}(x',t) - r(x',0)f_{tt}(x',t) + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} G(x'-\xi',\xi_n;t) [\Delta^2 \varphi_{\xi_n \xi_n}(\xi) - r(\xi',0) \Delta \varphi_{\xi_n \xi_n}(\xi)] d\xi \} + \frac{1}{\Delta \varphi(x',0)} \times \\ &\times \left\{ \int_0^t h(x',\tau)f_{tt}(x',t-\tau)d\tau + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(x'-\xi',\xi_n;t-\tau) \times \right. \\ &\times \left. h(\xi',\tau) \Delta \varphi_{\xi_n \xi_n}(\xi) d\xi \right\} + \frac{1}{\Delta \varphi(x',0)} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(x'-\xi',\xi_n;t-\tau) \times \end{aligned}$$

$$\times \left[ -r(\xi', 0)\vartheta(\xi, \tau) - \int_0^\tau h(\xi', \alpha)\vartheta(\xi, \tau - \alpha)d\alpha \right] d\xi, \quad (64)$$

бу ерда  $G(x' - \xi', \xi_n; t - \tau) = G(x - \xi; t - \tau)|_{x_n=0}$ .

**7-теорема.** Агар  $\varphi(x) \in H^{l+8}(\mathbb{R}^n)$ ,  $|\Delta \varphi(x', 0)|^l \geq \text{const} > 0$ ,  $f(x', t) \in H^{l+6, (l+6)/2}(\overline{\mathbb{R}_T^{n-1}})$ ,  $l \in (0, 1)$ ,  $f(x', 0) = \varphi(x', 0)$ ,  $f_t(x', 0) = \Delta \varphi(x', 0)$  шартлар бажарилса, у ҳолда етарлича кичик  $T > 0$  сон учун (63), (64) интеграл тенгламаларнинг ягона  $\vartheta(x, t) \in H^{l+2, (l+2)/2}(\overline{\mathbb{R}_T^n})$ ,  $h(x', t) \in H^{l, l/2}(\overline{\mathbb{R}_T^n})$  ечими мавжуд бўлади. Шундай қилиб, (60)-(62) масаланинг ягона классик ечими мавжуд бўлади.

## ХУЛОСА

Диссертацияда интегро-дифференциал иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаларда интеграл ҳаднинг ядросини аниқлаш учун бир ва кўп ўлчамли тескари масалаларнинг корректлиги ўрганилган. Тескари интегро-дифференциал тенгламаларни иккинчи тур Вольтерра типидagi тенгламалар системасига келтириб тадқиқ усуллари олинган. Ҳама кўринишдаги ўнг томонида интеграл оператор бўлган параболик интегро-дифференциал тенгламаларнинг кенг синфни учун тескари масалалар кўриб чиқилган.

Асосий тадқиқот натижалари қуйидагилардан иборат:

чегараланган соҳада бир ўлчамли интегро-дифференциал иссиқлик тарқалиш тенгламаси учун биринчи бошланғич-чегаравий масалага тескари масаланинг бир қийматли ечилиши: ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган;

кўп ўлчамли иссиқлик ўтказувчанлик интегро-дифференциал тенгламаси учун қўйилган Коши масаласининг бир қийматли ечилувчанлиги исботланган;

тўғри масала ечими ҳақидаги қўшимча шартга кўра ядрони аниқлаш масаласининг глобал бир қийматли ечилувчанлиги: ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган;

ярим чегараланган соҳада бир ва кўп ўлчамли интегро-дифференциал иссиқлик ўтказувчанлик тенгламалари учун иккинчи бошланғич-чегаравий масалалардан ядрони аниқлаш масаласи ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган.

**SCIENTIFIC COUNCIL FOR AWARDING SCIENTIFIC DEGREES  
DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 AT SAMARKAND STATE UNIVERSITY**

---

**BUKHARA STATE UNIVERSITY**

**JUMAEV JONIBEK JAMOLOVICH**

**INVESTIGATION OF INVERSE PROBLEMS FOR THE INTEGRO -  
DIFFERENTIAL EQUATION OF HEAT CONDUCTION**

**01.01.02 – Differential equations and mathematical physics**

**ABSTRACT OF DISSERTATION  
for the doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences**

**Bukhara – 2021**

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2019.2.PhD/FM335.

The dissertation was performed at the Bukhara State University.

The abstract of dissertation is posted in three languages (Uzbek, English and Russian (resume)) on the website ([www.samdu.uz](http://www.samdu.uz)) and in the website «ZiyoNet» Information and educational portal ([www.ziynet.uz](http://www.ziynet.uz)).

**Scientific supervisor:** **Durdiev Durdimurod Kalandarovich**  
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

**Official opponents:** **Begmatov Akram Hasanovich**  
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

**Karimov Erkinjon Tulkinovich**  
Doctor of Physical and Mathematical Sciences

**Leading organization:** **Urganch State University**

Defense will take place «06» 07 2021 at 10<sup>00</sup> at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 at Samarkand State University. (Address: University Boulevard 15, Samarkand city, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866)231-06-32, fax: (+99866)235-19-38, e-mail: [patent@samdu.uz](mailto:patent@samdu.uz))

Dissertation is possible to review in Information-resource center at Samarkand State University (is registered №23) (Address: University Boulevard 15, Samarkand city, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866)231-06-32).

Abstract of dissertation sent out on «19» 06 2021 year  
(Mailing report № 2 on «19» 06 2021 year)



**A.S.Soleev**  
Chairman of scientific council on award of scientific degree, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor

**A.M.Khalkhuzhayev**  
Scientific secretary of scientific council on award of scientific degree, Doctor of Physical and Mathematical Sciences

**A.B.Khasanov**  
Chairman of Scientific seminar under scientific council on award of scientific degree, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor

## INTRODUCTION (Annotation of Doctor of Philosophy (PhD) dissertation)

**Actuality and demand of the theme of dissertation.** In the world, many scientific and applied researches which are carried out on a global scale, lead to the study of differential equations with special derivatives, the correct and inverse problems posed for them. Inverse problems have permeated astronomy, quantum propagation theory, geophysics, thermal physics, medicine, and all branches of modern science with the advent of computers. To find the solution to direct problem in mathematical physics, it is necessary to give the coefficients of the equation, the boundary of the domain, the initial and boundary conditions. But in practice it is not always possible to give the coefficients of the equation, the initial and boundary conditions and the boundary of the domain. In this case, adding additional data necessity to solve the direct problem and looking for a solution to the inverse problem, i.e. coefficients, initial or boundary conditions, domain boundary is found. As the methods of solving such problems are not fully formed, the problem of determining the kernel from inverse problems for the integro-differential heat conductivity equation remains one of the important tasks.

Today, special attention is paid to the most rapidly developing field of mathematical physics in the world - the methods of studying inverse problems. This field has become one of the most important mathematical problems in physics and engineering. Due to the very wide application of this problem, the novelty and complexity of its theory, it has attracted the attention of many scientists. Recently, the management of heat transfer processes is developing rapidly, because the thermal conductivity of each medium is different, and this parameter is closely related to the initial state and properties of the environment. Therefore, the solution of direct and inverse problems for integro-differential heat conductivity equations is one of the most important theoretical and practical scientific researches.

In our country, attention has been paid to the current trends in mathematical physics, which have a scientific and practical application of fundamental sciences. In this regard, special attention was paid to the identification of the memory kernel in integral-differential equations of parabolic type. As a result of these studies it was possible to construct methods for determining the kernel for integro-differential heat conductivity equations and to prove the existence and uniqueness of the solution of these inverse problems. The main tasks and areas of activity of mathematical science are the increase in the efficiency and effectiveness of research in the areas of differential equations and their applications<sup>1</sup>. The development of the theory of integro-differential equations of mathematical physics is important in ensuring the implementation of this decision.

The subject and object of research of this dissertation are in line with tasks identified in the Decrees and Resolutions of the President of the Republic of Uzbekistan of February 8, 2017, PQ-4947, "On the strategy of action development

---

<sup>1</sup> Decree of President of the Republic of Uzbekistan at the "On state support for the further development of mathematics education and science, as well as measures to radically improve the activities of the Institute of Mathematics named after V.I.Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan" PQ-4387 dated July 9, 2019.

of the Republic of Uzbekistan”, PQ-4387 date July 9, 2019 “On state support for the further development of mathematics education and science, as well as measures to radically improve the activities of the Institute of Mathematics named after V.I.Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan”, PQ-4708 of May 7, 2020 “On measures to improve the quality of education and research in field of mathematics” as well as in other regulations related to basic sciences.

**Connection of research to priority directions of development of science and technologies of the Republic.** This work was performed in accordance with the priority areas of science and technology development in the Republic of Uzbekistan IV, “Mathematics, Mechanics and Computer Science”.

**The degree of scrutiny of the problem.** The inverse problems of mathematical physics were developed by A.S. Alekseev, A.L.Buxgeym, M.M.Lavrentev, V.G.Romanov and etc. Inverse problems for parabolic-type equation were first posed and studied by J.Janno, L.V.Wolfersdorf, A.L.Buxgeym, A.Lorenzi, F.A.Colombo, M.E.Gurtin, A.S.Pipkin, B.D.Coleman, A.I.Prilepko, A.B.Kostin, A.D.Iskendarov, N.Y.Beznoshchenko, M.Grasselli and V.G.Romanov. Different ways of studying the issue were proposed and developed in works of J.Janno, L.V.Lorenzi, F.A.Colombo, M.E.Gurtin, A.S.Pipkin, B.D.Coleman, R.K.Miller, D.K.Durdiev and others.

In particular, in R.K.Miller’s<sup>2</sup> work, the initial-boundary problem for the integro-differential thermal conductivity equation is proved by the one-dimensional solubility theorems, and the stability estimates representing the continuous dependence of the given solution are obtained. In A.I.Prilepko, A.B.Kostin’s<sup>3</sup> research, the inverse of the initial-boundary problems of the parabolic type equation with variable coefficients was studied, the theorems on determining the coefficients of the equation and the existence and uniqueness of the solution were proved, and stagnation estimates were obtained representing the continuity of the solution. In A.D.Iskendarov’s researches the problems inverse of the initial-boundary problems of parabolic type equation with variable coefficients are studied, analytical and numerical methods of determination of coefficients of equations are studied. In J.Janno, L.V.Wolfersdorf’s<sup>4</sup> work, the inverse of the initial-boundary problem for the integro-differential heat conductivity equation in the domain  $D = \{(x, t) \mid x \in (0; 1), t \in (0, T]\}, T > 0$  is considered. That is, one-dimensional inverse problems are considered to determine memory kernel in the integro-differential thermal conductivity equation in a bounded domain. For these problems, the theorems on the existence and uniqueness of a solution have been proved, and stagnation estimates have been obtained that represent a continuous dependence of the solution on the data. Basically, the problems of solubility in inverse problems for parabolic

---

<sup>2</sup> Miller R.K., An integro-differential equation for rigid heat conductors with memory // Journal of mathematical analysis and applications, 66 (1978), 313–332.

<sup>3</sup> Prilepko A.I., Kostin A.B. On inverse problems of determining a coefficient in parabolic equation // Siberian Math. J., 1993, vol. 34, №5, pp. 923-937.

<sup>4</sup> Janno J., Wolfersdorf L.V. Inverse problems for identification of memory kernels in heat flow // Ill-Posed Problems, 1996, vol. 4, №1, pp. 39–66.

differential, integro-differential equations have been studied in the bounded domain only when the determined coefficients depend on one-dimensional.

The dissertation work is close to from the above scientists J.Janno, L.V.Wolfersdorf, R.K.Miller, V.G.Romanov and D.Q.Durdievs' research, the methods recommended by them were used in analysis.

**Connection of the theme of the dissertation with the research works of higher education, where the dissertation is carried out.** The dissertation research is done in accordance with the planned theme of scientific research Bukhara State University of the fundamental project F-4-02-number "Thermodynamics of models of mathematical physics with infinite set of spins".

**The aim of research work.** The main purpose of this dissertation is to construct methods for determining the kernel from the Cauchy problem and the first and second initial-boundary value problems for one- and multi-dimensional integral-differential heat conductivity equations and to prove the existence, uniqueness of solutions of these inverse problems.

**Tasks of the research:**

to prove the solution of a one-valued solution of the inverse problem to the first initial-boundary problem for a one-dimensional integro-differential heat conductivity equation in a bounded domain;

to show a one-value solubility of the solution of the Cauchy problem for the integro-differential equation of multi-dimensional heat conductivity ;

to obtain the problem of determining the kernel of an integral term according to the given additional condition of the direct problem solution;

to prove the theorems of existence and uniqueness of the solution to the problem of determining the kernel from the second initial-boundary value problem for the one-dimensional and multi-dimensional integro-differential heat conductivity equation in a half-bounded domain.

**The research object** are one- and multi-dimensional inverse problems for integro-differential equations of the second-order parabolic type.

**The research subject** are one- and multi-dimensional direct and inverse problems for the second-order integro-differential heat conductivity equation of convolution type.

**Research methods:** The research were used methods of functional analysis, mathematical physics and solution of differential equations, second type of nonlinear closed integral equations of the Volterra type, principle of series approximation, contraction mapping.

**The scientific novelty of the research** is as follows:

theorems of the existence and uniqueness of the solution of the inverse problem to the first initial-boundary problem for a one-dimensional integro-differential heat conduction equation in a bounded domain are proved;

a solution of the Cauchy problem for the integro-differential equation of multi-dimensional heat conductivity has been obtained and a one-valued solubility has been proved;

the one-valued solubility of the problem of determining the kernel of an integral term according to the additional condition of the direct problem solution is proved;

theorems on the existence and uniqueness of the solution of the problems of determining the kernel from the second initial-boundary problems for the integro-differential heat conductivity equation with one- and multi-dimensional constant coefficients in a half-bounded domain are proved.

**Practical results of the research:**

the conditions for the existence of the kernel of the equation with memory are found by introducing the average temperature in the bounded domain of heat-conduction medium;

determined of the solubility of one- and multi-dimensional kernel finding for integro-differential heat conductivity equations.

**The reliability of the results of the study.** Our results have been obtained by using the methods of functional analysis, theory of differential equations, the theory of inverse problems, the application of mathematic analysis methods. The obtained results are mathematically strongly proved.

**Scientific and practical significance of research results.** The scientific significance of the research results is explained by the further development of the theory of inverse problems for the integro-differential equations of mathematical physics, the construction of methods for determining one- and multidimensional kernel.

The practical significance of the results of the study is explained by its application in seismology, exploration of oil and gas fields, the study of heat dissipation processes in the heat conduction of medium.

**Implementation of the research results.** On the basis of scientific results on inverse problems for integro-differential heat conductivity equations:

the proposed method of finding the kernel of the equation with memory by introducing the average temperature was used in a bounded domain of body-conducting media in the fundamental project F-4-14 “Development of the theory and development of methods for studying the dynamic stress-strain state of curved sections of thin-walled underground pipelines with a flowing liquid under the influence of dynamic loads” (Certificate No. 89-03-1050 of the Ministry of Higher and Secondary Specialized Education of the Republic of Uzbekistan dated February 23, 2021). The application of scientific results made it possible to determine the kernel of the memory equation by introducing the average temperature in a bounded domain of heat-conducting media, to prove the unique solvability of the second initial-boundary value problem for one and multidimensional integro-differential equations of heat conduction with constant coefficients in a half-bounded region, to determine the kernel of the memory equation by introducing the temperature at any point in the domain of heat-conduction medium;

the proposed method for studying inverse problems was used in a foreign grant AAAA-A19-119032590069-3 “Mathematical modeling and numerical solution of problems of continuum mechanics and heat and mass transfer in geophysical and engineering problems” (Certificate of the Southern Mathematical Institute of the branch of the FGNCU FNT “Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences”, certificate 16 number dated February 24, 2021) to study inverse problems of the multidimensional integro-differential heat equation. In particular,

using the results, the solvability of one-dimensional and multidimensional inverse problems for integro-differential equations of heat conduction was proved.

**Approbation of the research results.** The main results of the research have been discussed at 3 international and 5 national scientific conferences.

**Publications of the research results.** On the topic of the dissertation, 15 research papers have been published in the scientific journals, 7 of them are included in the list of journals proposed by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for defending the Doctor of Philosophy thesis, in addition 2 of them were published in international journals of mathematics and physics and 5 paper published in national mathematical journal.

**The structure and volume of the dissertation.** The dissertation consists of introduction, three chapters, conclusion and references. The volume of the dissertation is 117 pages.

## THE MAIN CONTENT OF THE DISSERTATION

**In introduction** the motivation of research theme and correspondence to the priority research areas of science and technology of the Republic are given, we present a review of international research on the theme of the dissertation and degree of scrutiny of the problem, formulate our goals and objectives, identify the object and subject of study, and state scientific novelty and practical results of the research. Moreover, we give the theoretical and practical importance of the obtained results, and also give information on the implementation of the research results, the published works and the structure of dissertation.

The first chapter of the thesis is called “**One-dimensional inverse problems for model integro-differential heat conductivity equations**” and it is studied one-dimensional inverse problems of determining the kernel of the integral-differential heat equation. In the first section introduces concepts such as necessary information about Holder spaces, heat potential, estimations of heat potential in Holder space.

The second section of the first chapter is studied one-dimensional inverse problems of determining the kernel of the integro-differential heat equation in a bounded domain. Consider the initial-boundary problem of determining a function  $u(x, t)$ ,  $x \in (0, l)$ ,  $t \in (0, T]$  from the following equations:

$$u_t - a^2 u_{xx} = \int_0^t k(\tau) u(x, t - \tau) d\tau + h(x, t), x \in (0, l), 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), x \in [0, l], \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = \mu_1(t), u|_{x=l} = \mu_2(t), 0 \leq t \leq T, \varphi(0) = \mu_1(0), \varphi(l) = \mu_2(0), \quad (3)$$

where  $a$  is a positive constant,  $l$  and  $T$  are arbitrary positive numbers. When  $k(t)$ ,  $h(x, t)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\mu_1(t)$ ,  $\mu_2(t)$  are given functions this problem is called as a direct problem.

In the inverse problem, it is assumed that the kernel  $k(t)$ ,  $t > 0$  of the integral term in (1) is unknown and it is required to determine it using additional information about the solution of the direct problem:

$$\int_0^l u(x, t) dx = f(t), t \in (0, T], \quad (4)$$

or

$$u(x_0, t) = f(t), x_0 \in (0, l), t \in (0, T]. \quad (5)$$

In the sequel, we will call the problem of determining functions  $u(x, t)$ ,  $k(t)$ ,  $x \in (0, l)$ ,  $t \in (0, T]$  from equations (1)-(4) as the **Inverse problem 1** and the problem of determining functions  $u(x, t)$ ,  $k(t)$ ,  $x \in (0, l)$ ,  $t \in (0, T]$  from equations (1)-(3), (5) as the **Inverse problem 2**. Problem (1)-(5) is equivalent to the auxiliary problem of determining the functions  $\vartheta(x; t), k(t)$  from the following equations:

$$\vartheta_t - a^2 \vartheta_{xx} = k(t) \varphi(x) + \int_0^t k(\tau) \vartheta(x, t - \tau) d\tau + h_t(x, t), \quad (6)$$

$$\vartheta|_{t=0} = a^2 \varphi''(x), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \vartheta|_{x=0} = \mu_1'(t), \quad \vartheta|_{x=l} = \mu_2'(t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ a^2 \varphi''(0) = \mu_1'(0), a^2 \varphi''(l) = \mu_2'(0). \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{inverse problem 1:} \quad \int_0^l \vartheta(x, t) dx = f'(t), t \in (0, T], \quad (9)$$

$$\text{inverse problem 2:} \quad \vartheta(x_0, t) = f'(t), t \in (0, T], \quad (10)$$

where  $\vartheta(x, t) = u_t(x, t)$ .

We replace the initial-boundary problem (6)-(8) with the equivalent Volterra integral equation:

$$\begin{aligned} \vartheta(x, t) = \psi(x, t) + \\ + \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t - \tau) \left[ k(\tau) \varphi(\xi) + \int_0^\tau k(\alpha) \vartheta(\xi, \tau - \alpha) d\alpha \right] d\xi d\tau, \end{aligned} \quad (11)$$

where

$$\begin{aligned} \psi(x, t) = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t - \tau) h_\tau(\xi, \tau) d\xi d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx + \right. \\ \left. + \frac{2\pi a^2 n}{l^2} \int_0^t (\mu_1'(\tau) - (-1)^n \mu_2'(\tau)) e^{\left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 \tau} d\tau \right] e^{-\left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x, \end{aligned}$$

$G(x, \xi, t - \tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 (t-\tau)} \sin \frac{\pi a n}{l} \xi \sin \frac{\pi a n}{l} x$  is the Green function of the initial-boundary problem for one-dimensional heat equation.

**Lemma 1.** *Let*

$$(\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)) \in C[0, l], (h(x, t), h_t(x, t)) \in C(\overline{D}_{lT}),$$

$$(\mu_1(t), \mu_1'(t), \mu_2(t), \mu_2'(t)) \in C[0, T], k(t) \in C[0, T]$$

and the matching conditions in (3), (8) are met. Then there is the unique classical solution  $\vartheta(x, t)$  to the direct problem (6)-(8) of the class  $C^{2,1}(\overline{D}_{lT})$ .

Integrating equation (11) in the interval  $(0, l)$  and using additional condition for inverse problem 1, we obtain after simple transformations

$$k(t) = \frac{1}{\varphi_0} [f''(t) - \int_0^l \psi_t(x, t) dx - \int_0^l \int_0^t k(\tau) \int_0^l G_t(x, \xi, t - \tau) \varphi(\xi) d\xi d\tau dx -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^l \int_0^t k(\alpha) \vartheta(x, t - \alpha) d\alpha dx - \int_0^l \int_0^t \int_0^l G_t(x, \xi, t - \tau) \times \\
& \quad \times \int_0^\tau k(\alpha) \vartheta(\xi, \tau - \alpha) d\alpha d\xi d\tau dx]. \tag{12}
\end{aligned}$$

In what follows we denote

$$\varphi_0 = \int_0^l \varphi(x) dx.$$

**Theorem 1.** *Suppose  $f(t) \in C^2[0, T]$ ,  $\varphi_0 \neq 0$  and the conditions of Lemma 1 are fulfilled. Then the inverse problem 1 has a unique solution in domain  $\overline{D}_{lT}$  for arbitrary fixed  $l > 0$  and  $T > 0$ .*

Thus, the first inverse problem has the unique solution such that  $k(t) \in C[0, T]$ . We study the second inverse problem from equations (6)-(8) and (10). To obtain the integral equation for  $k(t)$  in this case we use the equation (11) for solution direct problem and additional condition (10). As result, we have

$$\begin{aligned}
k(t) = & \frac{1}{\varphi(x_0)} \left( f''(t) - \psi'_t(x_0, t) \right) - \\
& - \frac{1}{\varphi(x_0)} \int_0^l G(x_0, \xi, 0) \int_0^t k(\alpha) \vartheta(\xi, t - \alpha) d\alpha d\xi - \\
& - \frac{1}{\varphi(x_0)} \int_0^t \int_0^l G_t(x_0, \xi, t - \tau) \int_0^\tau k(\alpha) \vartheta(\xi, \tau - \alpha) d\alpha d\xi d\tau. \tag{13}
\end{aligned}$$

**Theorem 2.** *Suppose  $f(t) \in C^2[0, T]$ ,  $\varphi(x_0) \neq 0$  and the conditions of Lemma 1 are fulfilled. Then the inverse problem 2 has a unique solution in domain  $\overline{D}_{lT}$  for arbitrary fixed  $l > 0$  and  $T > 0$ .*

In the first chapter third section is solved kernel identification problem from an integro-differential heat equation in a half-bounded domain. We consider the second initial-boundary problem of determining a function  $u(x, t)$ ,  $(x, t) \in D_+$ , ( $D_+ = \{(x, t) | x > 0, t > 0\}$ ) from the following equations:

$$u_t - a^2 u_{xx} = \int_0^t k(\tau) u(x, t - \tau) d\tau, \quad (x, t) \in D_+, \tag{14}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x > 0, \tag{15}$$

$$u_x|_{x=0} = \psi(t), \quad t > 0, \tag{16}$$

where  $a$  is a positive constant. When  $k(t)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\psi(t)$  are given functions this problem is called as a direct problem.

In the inverse problem, it is assumed that the kernel  $k(t)$ ,  $t > 0$  of the integral term in (14) is unknown and it is required to determine it using additional condition

$$u|_{x=0} = f(t), \quad t > 0. \tag{17}$$

In the sequel, we will call the problem of determining functions  $u(x, t)$ ,  $k(t)$ ,  $(x, t) \in D_+$  from equations (14)-(17) as the inverse problem, where  $f(t)$  is given sufficiently smooth function.

**Lemma 2.** *Problem (14)-(17) is equivalent to the auxiliary problem of determining the functions  $\omega(x, t)$ ,  $k(t)$  from the following equations:*

$$\omega_t - \omega_{xx} = k(t) \varphi''(x) + \int_0^t k(\tau) \omega(x, t - \tau) d\tau, \quad t > 0, \quad x > 0, \tag{18}$$

$$\omega|_{t=0} = \varphi^{(IV)}(x), \quad x > 0, \tag{19}$$

$$\omega_x|_{x=0} = \psi''(t) - k(t)\varphi'(0) - \int_0^t k(\tau)\psi'(t-\tau)d\tau, \quad t > 0, \quad (20)$$

$$\omega|_{x=0} = f''(t) - k(t)\varphi(0) - \int_0^t k(\tau)f'(t-\tau)d\tau, \quad t > 0, \quad (21)$$

where  $\omega(x, t) = u_{txx}$ .

We replace the initial-boundary problem (18)-(20) with the equivalent integral equation:

$$\begin{aligned} \omega(x, t) = & P(x, t) + \\ & + \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t-\tau) [k(\tau)\varphi''(\xi) + \int_0^\tau k(\alpha)\omega(\xi, \tau-\alpha)d\alpha] d\xi d\tau + \\ & + \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \left[ k(\tau)\varphi'(0) + \int_0^\tau k(\alpha)\psi'(\tau-\alpha)d\alpha \right] d\tau, \end{aligned} \quad (22)$$

where

$$\begin{aligned} P(x, t) = & \int_0^\infty G(x, \xi, t) a^2 \varphi^{(IV)}(\xi) d\xi - \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \psi''(\tau) d\tau, \\ G(x, \xi, t) = & \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left[ e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2 t}} \right]. \end{aligned}$$

With respect to the solution of equation (22) is valid the following statement:

**Lemma 3.** *Let  $\varphi(x) \in B^4(\mathbb{R}_+)$ ,  $\psi(t) \in C^3[0, T]$ ,  $k(t) \in C[0, T]$  for arbitrary fixed  $T > 0$ . Then there exists a unique solution to the integral equation (22) that  $\omega(x, t) \in B^{4,2}(D_+)$ .*

In what follows, by  $B^i(\mathbb{R}_+)$  we denote the class of functions that are  $i$  times continuously differentiable and are bounded in  $\mathbb{R}_+$  together with all their derivatives of order  $\leq i$ ,  $B^{i,j}(D_+)$  we denote the space of continuous functions that are bounded in  $D_+$  together with their partial derivatives with respect to  $x$  of order  $\leq i$  and have bounded continuous  $j$  partial derivative with respect to  $t$ .

The integral equation for  $k(t)$  is obtained from (22) considering it at  $x = 0$  and using equality (21). We get the following integral equation:

$$\begin{aligned} k(t) = & \frac{1}{\varphi(0)} [f''(t) - P(0, t) - \int_0^t k(\tau)f'(t-\tau)d\tau - \\ & - \int_0^t \int_0^\infty G(0, \xi, t-\tau) k(\tau)\varphi(\xi) d\xi d\tau - \\ & - \int_0^t \int_0^\infty G(0, \xi, t-\tau) \int_0^\tau k(\alpha)\omega(\xi, \tau-\alpha) d\alpha d\xi d\tau - \\ & - \frac{a\varphi'(0)}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} k(\tau) d\tau - \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \int_0^\tau k(\alpha)\psi'(\tau-\alpha) d\alpha d\tau]. \end{aligned} \quad (23)$$

In what follows we assume  $\varphi(0) \neq 0$ .

**Theorem3.** *Suppose  $f(t) \in C^3[0, T]$ ,  $\varphi(0) = f(0)$ ,  $\varphi'(0) = \psi(0)$ ,  $a^2\varphi''(0) = \psi'(0)$ ,  $\varphi^{IV}(0) = f''(0) - k(0)\varphi(0)$ ,  $\varphi(0) \neq 0$  and the conditions of Lemma 3 are fulfilled. Then the integral equations (22), (23) has a unique solution in the class  $D_+$ . Thus, there exists the unique solution to the inverse problem from the class  $C[0, T]$ .*

In the second chapter is called “**The problem of determining the thermal memory of a medium**” and first section is about Problem statement and preliminary

constructions, Studying the direct problem. Consider the Cauchy problem for the heat equation with an integral term of convolution type on the right-hand side:

$$u_t - \Delta u = \int_0^t K(t - \tau) \Delta u(x, \tau) d\tau, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (24)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (25)$$

The problem of determining the function  $u(x, t)$ , satisfying equations (24), (25) for known functions  $K(t)$  and  $\varphi(x)$  will be called a direct problem. In the inverse problem, the kernel  $K(t)$  of the integral in (24) is assumed to be unknown,  $t > 0$  and it is required to find it from the following additional information on solution of the direct problem:

$$u|_{x=0} = f(t), \quad t > 0, \quad f(0) = \varphi(0). \quad (26)$$

It is assumed that  $f(t)$  is given sufficiently smooth function,  $k(0)$  is given number.

**Lemma 4.** *Let  $K(t) \in C^1[0, T]$ ,  $T > 0$  is a fixed number. Then direct problem (24), (25) is equivalent to the problem of determining a function  $u(x, t)$  from the equation*

$$u_t - \Delta u + R(0)u = R(t)\varphi(x) - \int_0^t R'(t - \tau)u(x, \tau)d\tau, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (27)$$

by condition (25), where  $R(t)$  is the resolvent of the kernel  $K(t)$ .

**Lemma 5.** *If  $\{\varphi, \varphi_{x_i}\} \in B(\mathbb{R}^n)$  and  $R(t) \in C^1[0, T]$ ,  $R(0) \geq 0$ , then there is a classical solution to problem (27), (25), which belongs to  $B^{2,1}(D_T)$ .*

We note that according to the Poisson formula, problem (27), (25) is equivalent to solving the integral equation:

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x - \xi, t)\varphi(\xi)d\xi + \int_0^t R(\tau)d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(x - \xi, t - \tau)\varphi(\xi)d\xi - \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(x - \xi, t - \tau) \int_0^\tau R'(\tau - \alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha d\xi, \quad (28)$$

where  $G(x, t) = e^{-R(0)t}G_0(x, t)$ ,  $G_0(x, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$  is fundamental solution of the heat conduction operator  $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$ ,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ,  $d\xi = d\xi_1 \dots d\xi_n$ ,  $|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ .

The second section is about auxiliary problem and investigation of direct auxiliary problem. We denote  $R'(t)$  by  $h(t)$ , i.e.  $h(t) = R'(t)$ . It is conveniently to interpret the inverse problem as the problem of determining a pair of functions  $(u, h)$  from equalities (27), (25), (26). In what follows, we assume that the given functions  $\varphi(x)$ ,  $f(t)$  are sufficiently smooth.

**Lemma 6.** *Problem (27), (25), (26) is equivalent to the auxiliary problem of determining the functions  $\vartheta(x, t)$ ,  $h(t)$  from the following equations:*

$$\vartheta_t - \Delta \vartheta + R(0)\vartheta = -h(t) \Delta^2 \varphi(x) - \int_0^t h(\tau)\vartheta(x, t - \tau)d\tau, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (29)$$

$$t > 0,$$

$$\vartheta|_{t=0} = \Delta^3 \varphi(x) - R(0) \Delta^2 \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (30)$$

$$\vartheta|_{x=0} = f'''(t) + R(0)f''(t) - h(t) \Delta \varphi(0) - \int_0^t h(\tau)f''(t - \tau)d\tau, \quad (31)$$

$$\text{where } \vartheta(x, t) = \Delta u_{tt}(x, t), \quad R(0) = \frac{\Delta^2 \varphi(0) - f''(0)}{\Delta \varphi(0)}.$$

The solution of the Cauchy problem (29), (30) satisfies the integral equation

$$\begin{aligned} \vartheta(x, t) = & \int_{\mathbb{R}^n} G(x - \xi, t) [\Delta^3 \varphi(\xi) - R(0) \Delta^2 \varphi(\xi)] d\xi - \\ & - \int_0^t h(\tau) d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(x - \xi, t - \tau) \Delta^2 \varphi(\xi) d\xi - \\ & - \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(x - \xi, t - \tau) \int_0^\tau h(\alpha) \vartheta(\xi, \tau - \alpha) d\alpha d\xi. \end{aligned} \quad (32)$$

With respect to the solution of this equation is valid the following statement:

**Lemma 7.** *Let  $\varphi(x) \in B^6(\mathbb{R}^n)$ ,  $f(t) \in C^3[0, T]$ ,  $h(t) \in C[0, T]$ ,  $T > 0$ ,  $\Delta \varphi(0) \neq 0$  and condition  $f''(0) = \Delta^2 \varphi(0) - R(0) \Delta \varphi(0)$  is satisfied. Then there is a unique solution to the integral equation (32)  $\vartheta(x, t) \in B^{2,1}(D_T)$ .*

The third section is studied derivation of integral equation for inverse problem and proved about existence and uniqueness theorem. In equation (32), setting  $x = 0$  and using condition (31), after simple transformations, we obtain the integral equation with respect to  $h(t)$ :

$$\begin{aligned} & h(t) = \\ = & \frac{1}{\Delta \varphi(0)} \left\{ f'''(t) + R(0)f''(t) - \int_{\mathbb{R}^n} G(\xi, t) [\Delta^3 \varphi(\xi) - R(0) \Delta^2 \varphi(\xi)] d\xi \right\} + \\ & + \frac{1}{\Delta \varphi(0)} \int_0^t [-f''(t - \tau) + \int_{\mathbb{R}^n} G(\xi, t - \tau) \Delta^2 \varphi(\xi) d\xi] h(\tau) d\tau + \\ & + \frac{1}{\Delta \varphi(0)} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(\xi, t - \tau) \int_0^\tau h(\alpha) \vartheta(\xi, \tau - \alpha) d\alpha d\xi, \end{aligned} \quad (33)$$

Denoting

$$F(t) = \frac{1}{\Delta \varphi(0)} \{ f'''(t) + R(0)f''(t) - \int_{\mathbb{R}^n} G(\xi, t) [\Delta^3 \varphi(\xi) - R(0) \Delta^2 \varphi(\xi)] d\xi \},$$

we introduce the operator with the identity

$$\begin{aligned} H[h(t)] = & F(t) + \frac{1}{\Delta \varphi(0)} \int_0^t [-f''(t - \tau) + \int_{\mathbb{R}^n} G(\xi, t - \tau) \Delta^2 \varphi(\xi) d\xi] h(\tau) d\tau + \\ & + \frac{1}{\Delta \varphi(0)} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(\xi, t - \tau) \int_0^\tau h(\alpha) \vartheta(\xi, \tau - \alpha) d\alpha d\xi. \end{aligned} \quad (34)$$

Then the equation (33) is written in a more convenient form

$$h(t) = H[h(t)]. \quad (35)$$

Let be  $\|F\| = \max_{t \in [0, T]} |F(t)|$ . We fix the number  $\rho > 0$  and consider the ball

$$\Phi^T(F, \rho) = \{l(t) : l(t) \in C[0, T], \|F - l\| \leq \rho\}.$$

**Theorem 4.** *Let  $f(t) \in C^3[0, T]$ ,  $T > 0$ ,  $\varphi(x) \in B^6(\mathbb{R}^n)$ ,  $\Delta \varphi(0) \neq 0$  and condition  $f''(0) = \Delta^2 \varphi(0) - R(0) \Delta \varphi(0)$  is fulfilled. Then there exists  $T^*$  such that on the segment  $[0, T]$ ,  $T \in (0, T^*)$  the equation (31) has a unique continuous solution belonging to the ball  $\Phi^T(F, \rho)$ .*

In the third chapter is called “**Multidimensional direct and inverse problems for integro-differential heat conductivity equations**” and studied multidimensional direct and inverse problems.

The first section is solved the problem determining the kernel from the Cauchy problem for the integral-differential heat equation. Consider the Cauchy problem for the following equation:

$$u_t - a^2 \Delta u = \int_0^t k(\tau)u(x, t - \tau)d\tau, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (36)$$

with the initial condition

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (37)$$

Here  $\varphi(x)$  is a given smooth function,  $a > 0$  is a known number.

In the inverse problem, the kernel  $k(t)$  of the integral in (36) is assumed to be unknown,  $t > 0$  and it is required to find it from the following additional information on solution of the direct problem:

$$u|_{x=0} = f(t), \quad t > 0, \quad f(0) = \varphi(0). \quad (38)$$

For convenience, we introduce the notation  $\omega(x, t) = \Delta u_t(x, t)$ . We rewrite the inverse problem (36) - (38) in terms of the function  $\omega(x, t)$ .

$$\omega_t - a^2 \omega_{xx} = k(t)\Delta\varphi(x) + \int_0^t k(\tau)\omega(x, t - \tau)d\tau, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (39)$$

$$\omega|_{t=0} = a^2 \Delta^2 \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (40)$$

$$\omega|_{x=0} = \frac{1}{a^2} f''(t) - \frac{1}{a^2} k(t)\varphi(0) - \frac{1}{a^2} \int_0^t k(\tau)f'(t - \tau)d\tau, \quad t > 0. \quad (41)$$

From conditions (40) and (41) the following equality is received:

$$k(0) = \frac{1}{\varphi(0)} [f''(t)|_{t=0} - a^4 \Delta^2 \varphi(x)|_{x=0}]. \quad (42)$$

The inverse problem (39) - (41) is replaced by integral equation. To do this, using the Poisson formula from (39), (40) for the function  $\omega(x, t)$  we obtain the following equation:

$$\begin{aligned} \omega(x, t) = & \psi(x, t) + \\ & + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(x - \xi, t - \tau) [k(\tau)\Delta\varphi(\xi) + \int_0^\tau k(\alpha)\omega(\xi, \tau - \alpha)d\alpha] d\xi d\tau, \end{aligned} \quad (43)$$

where  $\psi(x, t) = a^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(x - \xi, t - \tau)\Delta^2 \varphi(\xi)d\xi d\tau;$

$G(x, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}$  is fundamental solution to the heat equation  $\omega_t = a^2 \Delta \omega$ .

**Lemma 8.** *Let  $(\varphi(x), \Delta\varphi(x), \Delta^2 \varphi(x)) \in B(\mathbb{R}^n)$ ,  $k(t) \in C[0, T]$ ,  $\varphi(0) \neq 0$  and the matching conditions in (38), (42) are met. Then there is the unique classical solution  $\omega(x, t)$  to the problem (39)-(41) of the class  $B^{2,1}(\overline{D_T})$  ( $D_T = \{(x, t) | x \in \mathbb{R}^n, 0 < t \leq T\}$ ).*

Using equalities (41) and (43), at  $x = 0$  for  $k(t)$  we obtain the equation with respect to  $k(t)$ :

$$\begin{aligned} k(t) = & F_0(t) - \frac{1}{\varphi(0)} \int_0^t k(\tau)f'(t - \tau)d\tau + \\ & + \frac{a^2}{\varphi(0)} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(x - \xi, t - \tau) [k(\tau)\Delta\varphi(\xi) + \int_0^\tau k(\alpha)\omega(\xi, \tau - \alpha)d\alpha] d\xi d\tau, \end{aligned} \quad (44)$$

where

$$F_0(t) = \frac{1}{\varphi(0)} [f''(t) - a^4 \int_{\mathbb{R}^n} G(\xi, t)\Delta^2 \varphi(\xi)d\xi].$$

**Theorem 5.** Suppose  $f(t) \in C^2[0, T]$ ,  $\varphi(0) \neq 0$  and the conditions of Lemma 8 are fulfilled. Then the integral equations (43), (44) has a unique solution in domain  $\overline{D}_T$  for arbitrary fixed  $T > 0$ .

In the second section is solved Determining the kernel of the integro-differential heat equation in half space. We consider the second initial-boundary problem of determining a function  $u(x, t)$ ,  $x = (x', x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$ :

$$u_t - a^2 \Delta u = \int_0^t k(x', \tau) u(x, t - \tau) d\tau, (x, t) \in D_+, \quad (46)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), x \in \mathbb{R}_+^n, \quad (47)$$

$$u_{x_n}|_{x_n=0} = \psi(x', t), (x', t) \in \mathbb{R}_T^{n-1}, \quad (48)$$

where  $a$  is a positive constant ( $\mathbb{R}_T^{n-1} = \{(x', t) | x' \in \mathbb{R}^{n-1}, 0 < t \leq T\}$ ,  $D_+ = \{(x, t) | x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n > 0, 0 < t \leq T\}$ ,  $\mathbb{R}_+^n = \{(x', x_n) | x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n > 0\}$ ),  $k(x', t)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x', t)$  are given functions. (46)-(48) problem is called as a direct problem. In the sequel, we assume that the following matching condition between initial (47) and boundary (48) data is fulfilled:  $\varphi_{x_n}(x', 0) = \psi(x', 0)$ .

In the inverse problem, it is assumed that the kernel  $k(x', t)$ ,  $t > 0$  of the integral term in (46) is unknown and it is required to determine it using additional information about the solution of the direct problem:

$$u|_{x_n=0} = f(x', t), (x', t) \in \mathbb{R}_T^{n-1}. \quad (49)$$

In this case  $\varphi(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}_+^n$ ,  $\psi(x', t)$  are assumed to be given functions. In the sequel, we will call the problem of determining functions  $u(x, t)$ ,  $k(x', t)$  from equations (46)-(49) as the inverse problem.

**Lemma 9.** Problem (46)-(49) is equivalent to the auxiliary problem of determining the functions  $\omega(x, t)$ ,  $k(t, x')$  from the following equations:

$$\omega_t - a^2 \Delta \omega = k(x', t) \varphi_{x_n x_n}(x) + \int_0^t k(x', \tau) \omega(x, t - \tau) d\tau, \quad (50)$$

$$\omega|_{t=0} = a^2 \Delta \varphi_{x_n x_n}(x), \quad (51)$$

$$\omega_{x_n}|_{x_n=0} = \frac{1}{a^2} \psi_{tt}(x', t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \psi_t(x', t) - \frac{1}{a^2} k(x', t) \varphi_{x_n}(x', 0) - \frac{1}{a^2} \int_0^t k(x', \tau) \psi_t(x', t - \tau) d\tau, \quad (52)$$

$$\omega|_{x_n=0} = \frac{1}{a^2} f_{tt}(x', t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} f_t(x', t) - \frac{1}{a^2} k(x', t) \varphi(x', 0) - \frac{1}{a^2} \int_0^t k(x', \tau) f_t(x', t - \tau) d\tau, \quad (53)$$

where  $\omega(x, t) = u_{tx_n x_n}(x, t)$ .

The solution of the initial-boundary problem (50)-(52) satisfies the integral equation:

$$\begin{aligned} \omega(x, t) = & \omega_0(x, t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G(x' - \xi', 0, t - \tau) \times \\ & \times \int_0^\infty \Gamma(x_n - \xi_n, t - \tau) k(\xi', \tau) \varphi_{\xi_n \xi_n}(\xi) d\xi_n d\xi' d\tau + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G(x' - \xi', 0, t - \tau) \\ & \times \int_0^\infty \Gamma(x_n - \xi_n, t - \tau) \int_0^\tau k(\xi', \alpha) \omega(\xi, \tau - \alpha) d\alpha d\xi_n d\xi' d\tau + \\ & + \frac{2}{a^2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G(x' - \xi', x_n, t - \tau) k(\xi', \tau) \varphi_{\xi_n}(\xi', 0) d\xi' d\tau + \end{aligned}$$

$$+ \frac{2}{a^2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G(x' - \xi', x_n, t - \tau) \int_0^\tau k(\xi', \alpha) \psi_\tau(\xi', \tau - \alpha) d\alpha d\xi' d\tau, \quad (54)$$

where

$$\begin{aligned} \omega_0(x, t) = & \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G(x' - \xi', 0, t - \tau) \int_0^\infty \Gamma(x_n - \xi_n, t) a^2 \Delta \varphi_{\xi_n \xi_n}(\xi) d\xi_n d\xi' - \\ & - \frac{2}{a^2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G(x' - \xi', x_n, t - \tau) \psi_{\tau\tau}(\xi', \tau) d\xi' d\tau + \\ & + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G(x' - \xi', x_n, t - \tau) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial \xi_k^2} \psi_\tau(\xi', \tau) d\xi' d\tau, \end{aligned}$$

$G(x, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$ ,  $x^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ , is the fundamental solution of the heat operator  $\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta$ ,

$$\Gamma(x_n - \xi_n, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left[ e^{-\frac{(x_n - \xi_n)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x_n + \xi_n)^2}{4a^2 t}} \right].$$

The integral equation for  $k(x', t)$  is obtained from (54) considering it at  $x_n = 0$  and using equality (53):

$$\begin{aligned} k(x', t) = & \frac{a^2}{\varphi(x', 0)} \left[ \frac{1}{a^2} f_{tt}(x', t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} f_t(x', t) - \omega_0(x', t) \right] - \\ & - \frac{1}{\varphi(x', 0)} \int_0^t k(x', \tau) f_t(x', t - \tau) d\tau - \frac{a^2}{\varphi(x', 0)} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G(x' - \xi', 0, t - \tau) \times \\ & \times \int_0^\infty \Gamma(x_n - \xi_n, t - \tau) k(\xi', \tau) \varphi_{\xi_n \xi_n}(\xi) d\xi_n d\xi' d\tau - \\ & - \frac{a^2}{\varphi(x', 0)} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G(x' - \xi', 0, t - \tau) \int_0^\infty \Gamma(x_n - \xi_n, t - \tau) \times \\ & \times \int_0^\tau k(\xi', \alpha) \omega(\xi, \tau - \alpha) d\alpha d\xi_n d\xi' d\tau - \\ & - \frac{2}{\varphi(x', 0)} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G(x' - \xi', 0, t - \tau) k(\xi', \tau) \varphi_{\xi_n}(\xi', 0) d\xi' d\tau + \\ & - \frac{2}{\varphi(x', 0)} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G(x' - \xi', 0, t - \tau) \int_0^\tau k(\xi', \alpha) \psi_\tau(\xi', \tau - \alpha) d\alpha d\xi' d\tau. \quad (55) \end{aligned}$$

In what follows we denote  $\varphi(x', 0) \neq 0$ .

**Theorem 6.** *If the conditions  $\varphi(x) \in B^4(\mathbb{R}_+^n)$ ,  $|\varphi(x', 0)| \neq 0$ ,  $f(x', t) \in B^{4,3}(\mathbb{R}_T^{n-1})$ ,  $\psi(x', t) \in B^{4,3}(\mathbb{R}_T^{n-1})$ ,  $\varphi_{x_n}(x', 0) = \psi(x', 0)$ ,  $a^2 \Delta \varphi_{x_n}(x', 0) = \psi_t(x', 0)$ ,  $f(x', 0) = \varphi(x', 0)$ ,  $f_t(x', 0) = a^2 \Delta \varphi(x', 0)$  are met, then there exists a sufficiently small number  $T > 0$  that the solution to the integral equations (54), (55) in the class of functions  $\omega(x, t) \in B^{4,2}(D_+)$ ,  $k(x', t) \in B(\mathbb{R}_T^{n-1})$  exists is unique. Thus, there is the unique classical solution to the problem (50)-(53).*

In the third section is solved problem of determining a multidimensional thermal memory in a heat conductivity equation. We study an inverse problem of determining functions  $u(x, t)$ ,  $k(x', t)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $t > 0$  from the following equations:

$$u_t - \Delta u = \int_0^t k(x', t - \tau) \Delta u(x, \tau) d\tau, \quad (x, t) \in \mathbb{R}_T^n, \quad (56)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (57)$$

$$u|_{x_n=0} = f(x', t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad f(x', 0) = \varphi(x', 0), \quad (58)$$

$\mathbb{R}_T^n = \{(x, t) | x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n, 0 < t < T\}$  is a strip with thickness  $T, T > 0$  is an arbitrary fixed number.

In the sequel, we will use the Holder space  $H^l(\mathbb{R}^n)$  with exponent  $l$  for functions depending on spatial variables and for functions depending on spatial and time variables - Holder space  $H^{l, l/2}(\overline{\mathbb{R}_T^n})$  with exponents  $l$  and  $l/2$ . In the class of functions  $H^{l+m}(\mathbb{R}^n)$  and  $H^{l+m, (l+m)/2}(\overline{\mathbb{R}_T^n})$  the norms are introduced as follows:

$$|\varphi|^{l+m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha \varphi| + \sum_{|\alpha|=m} \sup_{\substack{|x^1 - x^2| \leq \rho \\ x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n}} \frac{|D^\alpha \varphi(x^1) - D^\alpha \varphi(x^2)|}{|x^1 - x^2|^l}, \quad l \in (0, 1),$$

$$\begin{aligned} |u|_T^{l+m, (l+m)/2} &= \sum_{2r+|s| \leq m} \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}_T^n} |D^r D^s u| + \\ &+ \sum_{2r+|s|=m} \sup_{\substack{|x^1 - x^2| \leq \rho \\ (x^1, t), (x^2, t) \in \mathbb{R}_T^n}} \frac{|D^r D^s u(x^1, t) - D^r D^s u(x^2, t)|}{|x^1 - x^2|^l} + \\ &+ \sum_{2r+|s|=m} \sup_{\substack{|t^1 - t^2| \leq \rho \\ (x, t^1), (x, t^2) \in \mathbb{R}_T^n}} \frac{|D^r D^s u(x, t^1) - D^r D^s u(x, t^2)|}{|t^1 - t^2|^{l/2}}. \end{aligned}$$

**Lemma 10.** *Let be  $k(x', t) \in H^{l+2, (l+2)/2}(\overline{\mathbb{R}_T^{n-1}})$ , then the problem (56)-(58) is equivalent to the problem of finding the functions  $u(x, t), r(x', t)$  from equation*

$$u_t = \Delta u - \int_0^t r(x', t - \tau) u_\tau(x, \tau) d\tau, \quad (59)$$

the initial and additional conditions (57), (58), respectively, where  $r(x', t)$  is resolvent of kernel  $k(x', t)$ .

For simplicity, we denote by  $h(x', t)$  the function  $r_t(x', t)$ , i.e.  $h(x', t) = r_t(x', t)$ .

**Lemma 11.** *Problem (59), (57), (58) is equivalent to the following auxiliary problem of determining functions  $\vartheta(x, t), h(x', t)$ :*

$$\vartheta_t - \Delta \vartheta = -r(x', 0) \vartheta - h(x', t) \Delta \varphi_{x_n x_n}(x) - \int_0^t h(x', \tau) \vartheta(x, t - \tau) d\tau, \quad (60)$$

$$\vartheta|_{t=0} = \Delta^2 \varphi_{x_n x_n}(x) - r(x', 0) \Delta \varphi_{x_n x_n}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \vartheta|_{x_n=0} &= f_{ttt}(x', t) - \Delta_{x'} f_{tt}(x', t) + r(x', 0) f_{tt}(x', t) + \\ &+ h(x', t) \Delta \varphi(x', 0) - \int_0^t h(x', \tau) f_{tt}(x', t - \tau) d\tau, \quad (x', t) \in \mathbb{R}_T^{n-1}, \end{aligned} \quad (62)$$

where  $\vartheta(x, t) = u_{tt x_n x_n}(x, t)$ ,  $\Delta_{x'} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ ,  $r(x', 0) = \frac{\Delta^2 \varphi(x', 0) - f_{tt}(x', 0)}{\Delta \varphi(x', 0)}$ .

Now we reduce the Cauchy problem (60) and (61) to an integral equation with respect to the function  $\vartheta(x, t)$ . For this purpose in accordance with Poisson's formula we have

$$\begin{aligned}
\vartheta(x, t) = & \int_{\mathbb{R}^n} G(x - \xi; t) [\Delta^2 \varphi_{\xi_n \xi_n}(\xi) - r(\xi', 0) \Delta \varphi_{\xi_n \xi_n}(\xi)] d\xi - \\
& - \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(x - \xi; t - \tau) h(\xi', \tau) \Delta \varphi_{\xi_n \xi_n}(\xi) d\xi - \\
& - \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(x - \xi, t - \tau) \left[ -r(\xi', 0) \vartheta(\xi, \tau) - \int_0^\tau h(\xi', \alpha) \vartheta(\xi, \tau - \alpha) d\alpha \right] d\xi. \quad (63)
\end{aligned}$$

The integral equation for  $h(x', t)$  is obtained from (63) considering it at  $x_n = 0$  and using equality (62):

$$\begin{aligned}
h(x', t) = & \frac{1}{\Delta \varphi(x', 0)} \{ -f_{ttt}(x', t) + \Delta_{x'} f_{tt}(x', t) - r(x', 0) f_{tt}(x', t) + \\
& + \int_{\mathbb{R}^n} G(x' - \xi', \xi_n; t) [\Delta^2 \varphi_{\xi_n \xi_n}(\xi) - r(\xi', 0) \Delta \varphi_{\xi_n \xi_n}(\xi)] d\xi \} + \\
& + \frac{1}{\Delta \varphi(x', 0)} \left\{ \int_0^t h(x', \tau) f_{tt}(x', t - \tau) d\tau + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(x' - \xi', \xi_n; t - \tau) \times \right. \\
& \times h(\xi', \tau) \Delta \varphi_{\xi_n \xi_n}(\xi) d\xi \left. \right\} + \frac{1}{\Delta \varphi(x', 0)} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(x' - \xi', \xi_n; t - \tau) \times \\
& \times \left[ -r(\xi', 0) \vartheta(\xi, \tau) - \int_0^\tau h(\xi', \alpha) \vartheta(\xi, \tau - \alpha) d\alpha \right] d\xi, \quad (64)
\end{aligned}$$

where  $G(x' - \xi', \xi_n; t - \tau) = G(x - \xi; t - \tau)|_{x_n=0}$ .

**Theorem 7.** *If the conditions  $\varphi(x) \in H^{l+8}(\mathbb{R}^n)$ ,  $|\Delta \varphi(x', 0)|^l \geq \text{const} > 0$ ,  $f(x', t) \in H^{l+6, \frac{l+6}{2}}(\overline{\mathbb{R}_T^{n-1}})$ ,  $l \in (0, 1)$ ,  $f(x', 0) = \varphi(x', 0)$ ,  $f_t(x', 0) = \Delta \varphi(x', 0)$  are met, then there exists sufficiently small number  $T > 0$  that the solution to the integral equations (63), (64) in the class of functions  $\vartheta(x, t) \in H^{l+2, (l+2)/2}(\overline{\mathbb{R}_T^n})$ ,  $h(x', t) \in H^{l, l/2}(\overline{\mathbb{R}_T^n})$  exists is unique. Thus, there is the unique classical solution to the problem (60)-(62).*

## CONCLUSION

In the dissertation is studied the correctness of one- and multi-dimensional inverse problems for determining the kernel of the integral term in integro-differential equations of parabolic type. Methods for solving inverse integro-differential equations are obtained by reducing them to a system of equations of the second type Voltaire type. Inverse problems are considered for a wide class of parabolic integro-differential equations with the integral operator on the right side of the winding view.

The main research results are as follows:

the theorems of the existence and uniqueness of the solution of the inverse problem to the first initial-boundary problem for a one-dimensional integro-differential heat conduction equation in a bounded domain are proved;

a solution of the Cauchy problem for the integro-differential equation of multi-dimensional heat conductivity has been obtained and a one-valued solubility has been proved;

the one-valued solubility of the problem of determining the kernel of an integral term according to the additional condition of the direct problem solution is proved;

the theorems on the existence and uniqueness of the solution of the problem of determining the kernel from the second initial-boundary problem for the integro-differential heat conductivity equation with one- and multi-dimensional constant coefficients in a half-bounded domain are proved.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.02.01  
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ  
САМАРКАНДСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ**

---

**БУХАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**ЖУМАЕВ ЖОНИБЕК ЖАМОЛОВИЧ**

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ИНТЕГРО-  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**  
диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

**Бухара-2021**

Тема диссертации доктора философии (PhD) зарегистрирована в Высшей гестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № В2019.2.PhD/FM335.

Диссертация выполнена в Бухарском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, английский, русский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета ([www.samdu.uz](http://www.samdu.uz)) и на Информационно-образовательном портале «Ziyounet» ([www.ziyounet.uz](http://www.ziyounet.uz))

**Научный руководитель:** Дурдиев Дурдимурод Каландарович  
доктор физико-математических наук, профессор

**Официальные оппоненты:** Бегматов Акрам Хасанович  
доктор физико-математических наук, профессор  
Каримов Эркинжон Тулкинович  
доктор физико-математических наук (DSc)

**Ведущая организация:** Ургенчкий государственный университет

Защита диссертации состоится «06» 07 2021 года в «10<sup>00</sup>» часов на заседании Научного совета DSc 03/30.12.2019.FM.02.01 при Самаркандском государственном университете. (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (+99866)231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38, e-mail: [patent@samdu.uz](mailto:patent@samdu.uz))

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Самаркандского государственного университета (зарегистрирована за №23). (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (+99866)231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38)

Автореферат диссертации разослан «19» 06 2021 года,  
(протокол рассылки № 2 от «19» 06 2021 года).



**А.С. Солеев**  
Председатель научного совета по присуждению научных степеней, доктор физико-математических наук, профессор

**А.М. Халхужаев**  
Ученый секретарь научного совета по присуждению научных степеней, доктор физико-математических наук

**А.Б. Хасанов**  
Председатель научного семинара при научном совете по присуждению научных степеней, доктор физико-математических наук, профессор

## **ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))**

**Целью исследования** - построение методов определения ядра из задачи Коши, первой и второй начально-краевых задач для одномерных и многомерных интегро-дифференциальных уравнений теплопроводности и доказательство существования, единственности решений этих обратных задач.

**Объектом исследования** являются одномерные и многомерные обратные задачи для интегро-дифференциальных уравнений параболического типа второго порядка.

**Научная новизна исследования** определяется следующими пунктами:

доказаны теоремы существования и единственности решения обратной задачи для первой начально-краевой задачи для одномерного интегро-дифференциального уравнения теплопроводности в ограниченной области;

доказана однозначная разрешимость Коши для многомерного интегро-дифференциального уравнения теплопроводности;

доказана однозначная разрешимость задачи определения ядра интегрального члена по дополнительному условию о решении прямой задачи;

доказаны существование и единственность решения задачи определения ядра из второй начально-краевой задачи для одно и многомерного интегро-дифференциальных уравнений теплопроводности в полуограниченной области.

**Внедрение результатов исследования.** На основе научных результатов по обратным задачам для интегро-дифференциальных уравнений теплопроводности:

предлагаемый метод нахождения ядра уравнения с памятью путем введения средней температуры использован в ограниченной области теплопроводящих сред в фундаментальном проекте №Ф-4-14 «Развитие теории и разработка методов исследования динамического напряженно – деформированного состояния криволинейных участков тонкостенных подземных трубопроводов с протекающей жидкостью при воздействии динамических нагрузок» (свидетельство №89-03-1050 Министерства высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан от 23 февраля 2021 года). Применение научных результатов позволило определить ядро уравнения памяти путем введения средней температуры в ограниченной области теплопроводящих сред, доказать однозначную разрешимость второй начально-краевой задачи для одно и многомерного интегро-дифференциальных уравнений теплопроводности с постоянными коэффициентами в полуограниченной области, определить ядро уравнения с памятью путем введения температуры в любой точке области теплопроводящих сред;

предлагаемый метод исследования обратных задач использован в зарубежном гранте АААА-А19-119032590069-3 «Математическое моделирование и численное решение задач механики сплошной среды и тепломассообмена в геофизических и инженерных задачах» для исследования

обратных задач многомерного интегро-дифференциального уравнения теплопроводности (Справка Южного Математического Института филиала ФГНБУ ФНТ «Владикавказский научный центр РАН», №16 от 24 февраля 2021 г.). В частности, используя результаты, была доказана разрешимость одномерных и многомерных обратных задач для интегро- дифференциальных уравнений теплопроводности.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 117 страницы.

**ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ**  
**LIST OF PUBLISHED WORKS**  
**СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ**

**I бўлим (Part I; Часть I)**

1. Durdiev D.K., Zhumaev Zh.Zh. Problem of determining a multidimensional thermal memory in a heat conductivity equation // *Methods of Functional Analysis and Topology*, 2019, Vol. 25 , № 3, pp. 219-226 SCOPUS, Web of Science, Impact Factor: 0.4.

2. Дурдиев Д.К., Жумаев Ж.Ж. Задача определения тепловой памяти проводящей среды // *Дифференциальные уравнения*, 2020, том 56, №6, с. 796-807. SCOPUS, Web of Science, Impact Factor: 1.0.  
English translation is published in *Differential Equations*, 2020, Vol. 56, №. 6, pp. 785-796.

3. Durdiev D.K., Zhumaev Zh.Zh. The problem of determining the thermal memory of a medium // *Uzbek Mathematical Journal*, 2020, №1, pp.36-51. (01.00.00, №6)

4. Zhumaev Zh.Zh. Multidimensional inverse problem of determining the kernel of the integro-differential heat equation in half space // *Uzbek Mathematical Journal*, 2020, №3, pp. 163-174. (01.00.00, №6)

5. Zhumaev Zh.Zh. Kernel identification problem from an one-dimensional integro-differential heat equation in a half-bounded domain // *Scientific reports of Bukhara state university*, 2020, № 4, pp. 74-82. (01.00.00, №3)

6. Дурдиев Д.К., Жумаев Ж.Ж. Задача определения ядра в многомерном интегро-дифференциальном уравнении теплопроводности // *Научный Вестник Бухарского государственного университета*, 2019, №1, с. 10-18. (01.00.00, №3)

7. Durdiev D.Q., Jumaev J.J. O'ng tomoni integral hadli issiqlik o'tkazuvchanlik integro-differensial tenglamasi // *Vuxoro davlat universiteti ilmiy axboroti*, 2016, №1, b.14-21. (01.00.00, №3)

**II бўлим (Part II; Часть II)**

8. Жумаев Ж.Ж. Задача определения ядра в многомерном интегро-дифференциальном уравнении теплопроводности // *XV Международная конференция «Порядковый анализ и смежные проблемы математического моделирования»*, Владикавказ, 15-20 июля, 2019 г, с.123-124.

9. Дурдиев Д.К., Жумаев Ж.Ж. Задача определения нестационарного коэффициента поглощения // *Вторая международная конференция «Математическая физика и ее приложения»*, Самара, 29 августа–4 сентября 2010, с.115-116.

10. Дурдиев Д.К., Жумаев Ж.Ж. The inverse problem for the system of neutron transport equations on the intercept // *Тезисы научно-практического семинара «Некорректные и неклассические задачи математической физики и анализа»*, Самарканд, 2012, с.27-28.

11. Zhumaev Zh.Zh. One-dimensional inverse problem of determining the kernel of the integro-differential heat equation with the over determination condition of the integral type // «Inverse and ill-posed problems», Samarkand, October 2-4, 2019, p. 24-25.

12. Durdiev D.K., Zhumaev Zh.Zh. One-dimensional inverse problems of determining the kernel of the integro-differential heat equation in a bounded domain // Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Современные методы математической физики и их приложения», Ташкент, 17-18 ноября 2020 г., с.343-344.

13. Zhumaev Zh.Zh. Multidimensional inverse problem of determining the kernel of the integro-differential heat equation in half space// «Математика ва амалий математиканинг замонавий муаммолари» мавзусида Республика ёш олимлар илмий онлайн конференцияси, Тошкент, 2020 йил 21 май, 288-291 бет.

14. Zhumaev Zh.Zh. Kernel identification problem from an one-dimensional integro-differential heat equation in a half-bounded domain // «Математиканинг замонавий масалалари: Муаммолар ва ечимлар» мавзусидаги республика миқёсидаги илмий онлайн конференция, Термиз, 21-23 октябрь 2020 йил, 104-106 бет.

15. Zhumaev Zh.Zh. One-dimensional inverse problem of determining the kernel of the second initial-boundary integro-differential heat equation in half bounded domain // «Математика, физика ва ахборот технологияларининг долзарб муаммолари» мавзусидаги Республика миқёсидаги онлайн илмий-амалий анжумани, Бухоро, 2020 йил 15 апрель, 170-171 бет.



Автореферат “Дурдона” нашриётида тахрирдан ўтказилди ҳамда ўзбек,  
инглиз ва рус тилларидаги матнларнинг мослиги текширилди.

Босишга рухсат этилди: 17.06.2021. Бичими 60x84 1/16. Рақамли босма  
усулида босилди. Times New Roman гарнитураси. Шартли босма тобоғи: 3.0.  
Адади 100 нусха. Буюртма №183

Гувоҳнома АИ № 178. 08.12.2010.  
“Sadriiddin Salim Vuxoriy” МЧЖ босмаҳонасида чоп этилди.  
Бухоро шаҳри, М.Иқбол кўчаси, 11-уй. Тел.: 0(365) 221-26-45



