

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIIY VA O‘RTA MAXSUS TA‘LIM VAZIRLIGI**

**ALISHER NAVOIY NOMIDAGI
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI**

Qo‘lyozma huquqida

UDK 517.984

**ABRAYEV BUNYOD O‘RINBOYEVICH
«NOKOMPAKT QO‘ZG‘ALISHLI BIR MODEL
OPERATORINING MUHIM VA DISKRET SPEKTRI»**

**5A130101 «Matematika» mutaxassisligi
Matematika bo‘yicha magistr akademik darajasini olish uchun**

MAGISTRLIK DISSERTATSIYASI

**„Dissertatsiya kaferda majlisida ko‘rib
chiqildi va himoyaga tavsiya etildi“**

**Ilmiy rahbar
f.-m.f.n. S.M. Samatov**

**“Matematik fizika va funksional
analiz” kafedrasi mudiri**

dots. A.M.Xalxo‘jayev

SAMARQAND-2014

M U N D A R I J A

KIRISH.	3
Masalaning dolzarbliga va uning tarixi.	3
 I bob. Chiziqli operatorlar.	 8
1-§. Funksional fazolar.	8
2-§. Chiziqli operatorlar fazosi.	15
 II bob. Shryodinger operatorining spektri	 40
3-§ . Ikki zarrachali Hamiltonianning aniqlanishi	41
4-§. Shryodinger operatorining uzluksiz spektri	30
 III bob. Shryodinger operatori uchun nokompakt qo'zg'alishlar	 52
5-§. Shryodinger operatori uchun invariant qism fazolar	52
6-§. Shryodinger operatori uchun kompakt bo'lmagan qo'zg'alishlar	52
 Xulosa	 61
 Foydalanilgan adabiyotlar	 62

K I R I S H

1. Masalaning dolzarbliga va uning tarixi. Kvant mexanikasining bir qator masalalari ([1-7,9-16] larga qarang) quyidagi

$$(H_\lambda f)(x) = u(x) f(x) + \lambda \int_{-1}^1 K(x, y) f(y) dy \quad (0.1)$$

operatorning spektral xossalarini o'rganishga keltiriladi. Jumladan, ikki zarrachali sistema Hamiltonianlarining xossalarini o'rganish (0.1) ko'rinishdagi H operatorning spektral xossalari bilan uzviy bog'liq ([1-6, 9-10] larga qarang). (0.1) ko'rinishdagi operator, aniqrog'i

$$(H_\lambda f)(x) = x f(x) + \lambda \int_{-1}^1 K(x, y) f(y) dy \quad (0.2)$$

operator birinchilardan bo'lib Fridriks tomonidan uzluksiz spektr qo'zg'alishlari nazariyasining sodda modeli sifatida [11] ishda qaralgan. Bunda $K(x, y)$ yadro o'z o'zgaruvchilarining uzluksiz funksiyasi bo'lib, Gyolder hamda quyidagi chegaraviy

$$K(x, -1) = K(x, 1) = K(-1, y) = K(1, y) = 0, \quad \forall x, y \in [-1, 1]$$

shartlarni qanoatlantirishi talab qilingan. Bu shartlarda Fridriks λ ning yetarlicha kichik qiymatlarida H_0 va H_λ operatorlarning unitar ekvivalentligini, ya'ni H_λ operator $[-1, 1]$ kesmani to'ldiruvchi oddiy Lebeg spektriga ega ekanligi isbotlagan. Keyinchalik bu model Fridriks modeli deb nom olgan.

Fridriks ishlarining bevosita davomi O.A.Ladijenskaya, L.D.Faddeev [13] va L.D.Faddeev [14] ishlarda o'z aksini topgan, ya'ni bu ishlarda Fridriks modelida qo'yilgan qo'zg'alishning kichiklik shartini olib tashlab va $K(x, y)$ yadro

$\mu > \frac{1}{2}$ daraja bilan Gyolder sinfiga qarashlilik shartida H_λ operator $[-1, 1]$

kesmani to'ldiruvchi uzluksiz spektrga va $[-1, 1]$ kesmadan tashqarida yotuvchi ko'pi bilan chekli sondagi chekli karrali xos qiymatlarga ega bo'lishi isbotlangan.

Agar $u(x)$ va $K(x, y) = K(y, x)$ lar haqiqiy qiymatli analitik funksiyalar bo'lsa, u holda (0.1) tipidagi H operatorning xos qiymatlari soni chekliligi

S.N.Laqayevning [15] ishida isbotlangan. Jumladan, S.N.Laqayev tomonidan qaralgan [12] ishda H operatorning uzluksiz spektri $u(x)$, $x \in [a, b]$ funksiyaning qiymatlar to'plami bilan ustma-ust tushishi hamda qaralayotgan operatorning fizik rezonanslari uzluksiz spektr maxsus nuqtalarining $\varepsilon > 0$ atrofida yotishi ko'rsatilgan. I.A.Ikromov va F.Sharipovlar [16] ishda $u(x)$ va $K(x, y)$ funksiyalar analitik bo'lmagan holda ham H operatorning xos qiymatlari soni chekliligini ko'rsatishgan. Diskret spektrning chekliligi H operator o'z-o'ziga qo'shma bo'lmagan holda, M.E.Muminov tomonidan [17] ishda keltirilgan. Keyinchalik (0.1) ko'rinishdagi operatorning ikki yo'nalish bo'yicha umumlashmasi, (birinchidan, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - n -o'lchamli vektor, ikkinchidan $u(x) = (u_{ij}(x))_{i,j=1}^n$ - $n \times n$ o'lchamli matritsa ko'rinishli funksiya) [7, 18-19] ishlarda qaralgan, ya'ni H operator $L_2(T^n, C^n)$ fazoda (0.1) formula bilan aniqlangan operatoridir. J.I.Abdullayev va S.N.Laqayevlarning [7] ishida ham [12] ishdagi natijalarga o'xshash natijalar olingan, [19] ishda esa (0.1) ko'rinishdagi H operatorning uzluksiz spektr ichida yotuvchi ixtiyoriy sondagi xos qiymatlari mavjudligi ko'rsatilgan va bu xos qiymatlar kichik qo'zg'alishlar natijasida fizik rezonanslarga aylanishi hamda bu fizik rezonanslarning kengligining tartibi topilgan.

J.Abdullayevning [18] ishida H operator xos qiymatining karraligi bilan unga mos Fredholm determinanti nolining karraligi ustma-ust tushishi isbotlangan.

Ikki zarrachali uzluksiz Shryodinger operatori $H(\lambda) = -\Delta + \lambda V$ ning diskret spektri ko'plab mualliflar tomonidan tadqiq qilingan bo'lib, potensial V ga quyilgan shartlar koordinat fazoda berilgan. Masalan, V potensial chekli radiusli shardan tashqarida $|V(x)| \leq C(1 + |x|)^{-\alpha}$ shartni qanoatlantirib, $\alpha > 1$ bo'lsa $H(\lambda)$ operator musbat xos qiymatlarga ega emasligi T.Kato tomonidan [20] ishda isbotlangan. $H(\lambda)$ operator manfiy xos qiymatlari sonining chekliligi haqida juda ko'p alomatlar keltirilgan. Masalan, L.D.Faddeev [21] ishda $\alpha > 2$ bo'lganda $H(\lambda)$ operatorning $(-\infty, 0)$ da yotuvchi spektri chekli sondagi chekli karrali xos

qiymatlardan iborat ekanligini ko'rsatgan. M.Sh.Birmanning [22] ishida manfiy xos qiymatlar soni chekli bo'lishligining umumiy shartlari keltirilgan.

Panjaradagi ikki zarrachali Shryodinger operatorining ba'zi spektral xossalari [10] ishda tahlil qilingan. Kontakt potentsiallar uchun xos qiymatning mavjudligi va yagonaligi [23] ishda keltirilgan.

Bundan tashqari [6] ishda bir o'lchamli panjarada ikki zarrachali Shryodinger operatori $H(\pi)$ ning ikki karrali xos qiymatlari kvaziimpulsning kichik qo'zg'alishlarida ikkita oddiy xos qiymatlarga ajrab ketishi isbotlangan.

J.Abdullayevning [2] ishida esa ikki o'lchamli panjarada berilgan ikki zarrachali Shryodinger operatori $H(k)$ ning kvaziimpuls koordinatalaridan biri $k^{(1)} = \pi$ yoki $k^{(2)} = \pi$ bo'lganda cheksiz ko'p xos qiymatlarga ega bo'lishligi isbotlangan. Xos qiymatlar uchun asimptotik formula [5] ishda keltirilgan.

2. Masalaning qo'yilishi. Ushbu magistrlik dissertatsiyasida ikki o'lchamli panjarada ikki zarrachali sistemaga mos Shryodinger operatori ixtiyoriy hamda 3.1-shartni qanoatlantiruvchi potentsiallar bilan qaraladi. Qo'zg'almas $H_0(k)$ operatorning spektrini to'liq o'rganish, $H(k)$ operator uzluksiz spektri kengligini $k \in T^v$ ga bog'liqligini tekshirish. Qo'zg'atuvchi v operatorning spektrini, xos qiymatlari va xos funksiyalarini topish, uni izli operatorlar sinfiga qarashli ekanligini ko'rsatish. Ikki zarrachali Shryodinger operatori $H(k)$ ning nokompakt qo'zg'alishlarida xos qiymatlar uchun asimptotik formulalar olish.

3. Ishning maqsadi va vazifalari. Panjaradagi ikki zarrachali sistemaga mos Shryodinger operatori haqidagi ma'lumotlarni o'rganish va tahlil qilish. Bu natijalardan foydalanib qo'yilgan masalani yechish.

4. Ilmiy tadqiqot metodlari. Ushbu magistrlik dissertatsiyasini bajarish jarayonida funksional metodlardan, o'z-o'ziga qo'shma operatorlar nazariyasidan, qo'zg'alishlar nazariyasi metodlaridan hamda analitik funksiyalar nazariyasi metodlaridan foydalanildi.

5. Ishning ilmiy ahamiyati. Magistrlik dissertatsiyasi ishida olingan natijalar yangi, undan matematik fizika, kvant maydonlar nazariyasi, statistik fizika va bir qator dinamik masalalarda foydalanish mumkin.

6. Ishning amaliy ahamiyati. Magistrlik dissertatsiyasida Shryodinger operatori $H(k)$ ning spektral xossalardan va to'plangan materiallardan fizik sistemalarning holatlari haqida ma'lumotlar olish mumkin. Bundan tashqari chiziqli operatorlar nazariyasidan masalalar yechishda foydalanish mumkin.

7. Ishning tuzilishi. Magistrlik dissertatsiyasi kirish qismi, 3 bob, 6 paragraf hamda o'z ichiga 33 adabiyotni olgan foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat. Belgilashlar ikki sonli bo'lib, ular orasi nuqta bilan ajratilgan. Birinchi raqam paragraf nomerini bildiradi, ikkinchi son esa tartib nomerini bildiradi. Masalan, 1.2-teorema yozuvi – birinchi paragrafning 2-teoremasi ekanligini bildiradi, yoki (2.3) belgilash 2-paragrafdagi 3-formula ekanligini anglatadi.

8. Olingan natijalarning qisqacha bayoni. Ushbu dissertatsiyada ikki o'lchamli panjarada ikki zarrachali sistemaga mos Shryodinger operatori ixtiyoriy potensial (3.1-shartni, qo'shimcha 5.1-shartni qanoatlantiruvchi) bilan qaraladi. Erkin operator $H_0(k)$ ning spektri $H(k)$ operatorning uzluksiz spektri bilan ustma-ust tushadi. Biz $H(k)$ operator xos qiymatlarining nokompakt qo'zg'alishlarda kichik parametr $\beta > 0$ ga bog'liq o'zgarishini o'rganamiz.

Panjaradagi ikki zarrachali sistemaga mos Shryodinger operatorining impuls ko'rinishi kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalarning $L_2(T^2)$ Hilbert fazosida quyidagi formula yordamida beriladi:

$$(H(k)f)(q) = \left(\varepsilon\left(\frac{1}{2}k + q\right) + \varepsilon\left(\frac{1}{2}k - q\right) \right) f(q) - (2\pi)^{-1} \int_{T^2} v(q-s) f(s) ds .$$

Bu yerda $\varepsilon(q) \geq 0$ alohida olingan zarrachaning $q \in T^2$ momentdagi energiyasi, $v(q)$ esa T^2 da aniqlangan haqiqiy qiymatli, uzluksiz va juft funksiya. Bu shartlarda ikki zarrachali Shryodinger operatori $H(k)$ o'z-o'ziga qo'shma chegaralangan operator bo'ladi.

1-§ da biz chiziqli fazo, normalangan fazo, Evklid fazosi va Hilbert fazolarini ta'riflab, ularga doir misollar keltiramiz. Evklid fazolarida Koshi – Bunyakovskiy tengsizligini keltirib, ortonormal bazislar haqida ma'lumotlar beramiz

2-§ da biz to'la normalangan (Banach va Hilbert) fazolarida chiziqli operatorlarga oid asosiy ma'lumotlarni beramiz. Chiziqli operator, chegaralangan operator, uzluksiz operator, operator normasi, teskari operator, qo'shma operatorlar ta'riflarini keltiramiz. Bundan tashqari o'z-o'ziga qo'shma va kompakt operatorlar xossalari bayon qilamiz. Chiziqli operator spektri, yadroli operator, Hilbert-Schmidt tipidagi operatorlarni ta'riflab, ularning ba'zi xossalari isbotsiz keltiramiz.

3-§ da qarayotgan ikki zarrachali sistema Hamiltonianining koordinata va impuls fazolardagi tasvirlari keltirilib, masalaning qo'yilishi va olingan asosiy natijalar matematik tilda bayon etiladi. Ikki zarrachali sistema Hamiltoniani $\hat{H}$ ning «siljitish» gruppasi $U_s, s \in \mathbb{Z}^v$ lar bilan o'rin almashinuvchi ekanligi isbotlanadi.

4-§ va 5-§ paragraflarda Shryodinger operatorining muhim va diskret spektri va nokompakt qo'zg'alishlarda xos qiymatlar haqidagi teoremlar hamda asimptotik formulalar keltirilib isbotlanadi.

4-§ da $H(k)$ operator uzluksiz spektri kengligi $w(k)$ ning sistema to'la kvaziimpulsi $k \in T^2$ ga bog'liqligi tekshirilgan. Uzluksiz spektr kengligi $w(k)$ va uzluksiz spektrning $e^{(i)}, i = 1, 2$ yo'nalish bo'yicha kengligi $w_j(k^{(j)})$ lar orasida $w(k) = w_1(k^{(1)}) + w_2(k^{(2)})$ tenglik isbotlangan. Uzluksiz spektr kengligi $w(k)$ va yo'nalish bo'yicha kenglik $w_j(k^{(j)})$ larning $k^{(i)}, i = 1, 2$ koordinatalar bo'yicha $[0, \pi]$ kesmada kamayuvchi ekanligi isbotlangan. Erkin operator $H_0(k)$ ning musbatligi ko'rsatilib, uning spektri $[m(k), M(k)]$ kesmadan iboratligi isbotlangan. Zarrachalar o'zaro ta'sirini ifodalovchi V operatorning musbatligi ko'rsatilib, uning barcha xos qiymatlari va ularga mos xos fuksiyalar aniq topilgan.

5-§ da panjaradagi ikki zarrachali Shryodinger operatori $H(k)$ ning invariant qism fazolari o'rganilgan.

6-§ da Shryodinger operatori $H(k)$ ning nokompakt qo'zg'alishlarda xos qiymatlarining chetlanishlari o'rganilgan.

Dissertatsiyaning asosiy natijalari quyidagi teoremlardir.

6.1-lemma. Qo'zg'almas operator $H(\pi)$ ning 3 ta xos qiymati bor: bular $z_0 = 4 - \hat{v}(n,0)$ oddiy xos qiymat, $z_1 = 4 - \hat{v}(n,1)$ ikki karrali xos qiymat $z_\infty = 4$ cheksiz karrali xos qiymat.

6.2-teorema. Har bir $n \in \mathbb{Z}$ uchun shunday $\delta = \delta_n > 0$ mavjudki, barcha $\beta \in (-\delta, \delta)$ larda $H_0(\pi - 2\beta) - V_n = H(\pi) - \sin \beta W$ operatorning $z_0 = 4 - \hat{v}(n,0)$ nuqta atrofida yagona $z_n(\beta)$ oddiy xos qiymati mavjud bo'lib, uning uchun quyidagi asimptotik formula o'rinli:

$$z_n(\beta) = 4 - \hat{v}(n,0) + \frac{2}{\hat{v}(n,0) - \hat{v}(n,1)} \beta^2 + O(\beta^4), \quad \beta \rightarrow 0.$$

6.3-teorema. Har bir $n \in \mathbb{Z}$ uchun shunday $\delta = \delta_n > 0$ mavjudki, barcha $\beta \in (-\delta, \delta)$ larda $H(\pi) - \sin \beta W$ operatorning $z_1 = 4 - \hat{v}(n,1)$ atrofida rosa 2 ta $z_1^\pm(\beta)$ oddiy xos qiymalarti mavjud bo'lib, uning uchun quyidagi asimptotik formula o'rinli:

$$z_1^\pm(\beta) = 4 - \hat{v}(n,1) - c_2^\pm \beta^2 + O(\beta^4), \quad \beta \rightarrow 0.$$

I bob. Chiziqli operatorlar

Bu bobda biz ushbu dissertatsiyani bayon qilishda ishlatiladigan bir qator ta'rif va teoremlarni keltirib o'tamiz. Bu bob 2 paragrafdan (1-2-§§ lar) iborat bo'lib, unda biz chiziqli operatorlarning asosiy xossalarini o'rganamiz. Bu yerda keltiriladigan yordamchi ma'lumotlar [24-27] adabiyotlardan olingan.

Funksional analiz va operatorlar nazariyasining boshlang'ich tushunchalaridan biri chiziqli fazo tushunchasidir. 1-§ da chiziqli fazo o'lchami ta'riflanib, chekli va cheksiz o'lchamli fazolarga misollar keltirilgan. Chiziqli funksionallar, ularning ayrim xossalari qarab chiqilgan. Banach fazosi, Evklid fazosi va Hilbert fazolariga misollar ham shu paragrafda keltirilgan.

2-§ chiziqli uzluksiz operatorlar xossalariga bag'ishlangan bo'lib, unda chiziqli operatorlarning asosiy xossalari isbotsiz keltirilgan. Chiziqli operatorlarning aniqlanish sohasi, qiymatlar sohasi va yadrolariga ta'rif berilgan. Chiziqli operatorlar uchun uzluksizlik va chegaralanganlik ekvivalent tushunchalar ekanligi haqidagi teorema keltirilgan. X chiziqli normalangan fazoni Y chiziqli normalangan fazoga akslantiruvchi chiziqli uzluksiz operatorlar to'plami - $L(X, Y)$ chiziqli normalangan fazo bo'lishi ko'rsatilgan. Agar Y to'la normalangan fazo bo'lsa, u holda $L(X, Y)$ chiziqli normalangan fazoning Banach fazosi bo'lishi aytib o'tilgan. Teskari operatorlar, ularning asosiy xossalari berilgan. Bundan tashqari chiziqli operator teskarilanuvchan bo'lishining zaruriy va yetarli shartlari keltirilgan. Hilbert fazolarida berilgan qo'shma operatorlar, ularning asosiy xossalari bayon qilingan. Hilbert fazolari $\ell_2(Z)$ va $L_2[a; b]$ larda ko'paytirish operatorining o'z-o'ziga qo'shmalik kriteriysi berilgan. $L_2[a; b]$ fazoda $K(x, y)$ yadro bilan aniqlanuvchi integral operatorning o'z-o'ziga qo'shmalik sharti keltirilgan. Paragraf so'nggida chiziqli operatorlarning spektri klassifikatsiya qilinib, ularga doir misollar qaralgan. Chiziqli uzluksiz operatorning spektri bo'sh bo'lmagan yopiq to'plam ekanligi ko'rsatilgan. Muhim spektr, qoldiq spektr va chiziqli operatorning xos qiymatlarini topishga doir misollar qaralgan.

1-§. Funksional fazolar

Biz asosan funksional fazolar bilan ishlaymiz. Chiziqli fazo ta'rifini ma'lum deb hisoblaymiz. Ma'lumki, bo'sh bo'lmagan L to'plam chiziqli fazo bo'lishi uchun bu to'plam elementlarini qo'shish va songa ko'paytirish amallari aniqlangan bo'lib, bu amallar 8 shartni qanoatlantirishi kerak.

1.1-ta'rif. *Elementlari funksiyalar yoki sonli ketma-ketliklardan iborat bo'lgan chiziqli fazolar funksional fazolar deyiladi.*

Funksional fazolarga misollar keltiramiz:

1.1-misol. $\ell_2(Z)$ - butun sonlar to'plamida aniqlangan va modulining kvadratlaridan tuzilgan qator yaqinlashuvchi bo'lgan barcha funksiyalar to'plami, ya'ni

$$\ell_2(Z) = \left\{ f : Z \rightarrow C : \sum_{n \in Z} |f(n)|^2 < \infty \right\}.$$

Bu to'plamda elementlarni qo'shish va songa ko'paytirish amallari quyidagicha kiritiladi:

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n) \quad (1.1)$$

va

$$(\alpha f)(n) = \alpha f(n). \quad (1.2)$$

(1.1) va (1.2) tengliklar bilan aniqlangan qo'shish va songa ko'paytirish amallari chiziqli fazoning 1-8 aksiomalarini qanoatlantiradi. Demak, $\ell_2(Z)$ to'plam chiziqli fazo tashkil qiladi.

1.2-misol. $C[a, b] - [a, b]$ kesmada aniqlangan uzluksiz funksiyalar to'plami. Bu to'plam ham funksiyalarni qo'shish va funksiyani songa ko'paytirish amallari (1.1) va (1.2) tengliklar bilan aniqlanadi. Demak, $C[a, b]$ to'plam chiziqli fazo tashkil qiladi.

1.3-misol. $L_2[a, b] - [a, b]$ kesmada aniqlangan va kvadrati bilan integrallanuvchi ekvivalent funksiyalar sinfi. Bu to'plamda ham elementlarni

qo'shish va songa ko'paytirish amallari (1.1) va (1.2) tengliklar bilan aniqlanadi. Bu to'plam ham chiziqli fazo tashkil qiladi.

Odatda chekli o'lchamli fazolar bilan cheksiz o'lchamli fazolar xossalari jihatidan bir-biridan muhim farq qiladi. Shu maqsadda chekli va cheksiz o'lchamli fazolarni ta'riflaymiz.

1.2-ta'rif. Agar L chiziqli fazoning $x_1, x_2, \dots, x_n$ elementlar sistemasi uchun hech bo'lmaganda birortasi noldan farqli bo'lgan $a_1, a_2, \dots, a_n$ sonlar mavjud bo'lib,

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0 \quad (1.3)$$

tenglik bajarilsa, u holda $x_1, x_2, \dots, x_n$ elementlar sistemasi chiziqli bog'langan deyiladi. Aks holda, ya'ni (1.3) tenglikdan

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

ekanligi kelib chiqsa, $x_1, x_2, \dots, x_n$ elementlar sistemasi chiziqli bog'lanmagan yoki chiziqli erkli deyiladi.

1.3-ta'rif. Agar $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ cheksiz elementlar sistemasining ixtiyoriy chekli qism sistemasi chiziqli erkli bo'lsa, u holda $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sistema chiziqli erkli deyiladi.

1.4-ta'rif. Agar L chiziqli fazoda n elementli chiziqli erkli sistema mavjud bo'lib, bu fazoning ixtiyoriy $n+1$ ta elementdan iborat sistemasi chiziqli bog'langan bo'lsa, u holda L n -o'lchamli chiziqli fazo deyiladi va $\dim L = n$ kabi yoziladi. n -o'lchamli L chiziqli fazoning ixtiyoriy n ta elementdan iborat chiziqli erkli sistemasi shu fazoning bazisi deyiladi.

1.5-ta'rif. Agar L chiziqli fazoda ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ uchun n elementli chiziqli erkli sistema mavjud bo'lsa, u holda L cheksiz o'lchamli chiziqli fazo deyiladi va $\dim L = \infty$ ko'rinishda yoziladi.

X chiziqli fazoning har bir elementiga aniq bir sonni mos qo'yuvchi $p : X \rightarrow \mathbb{C}$ akslantirishga funksional deyiladi.

Ko'plab amaliy masalalarni hal etishda fazo elementlari yaqinligi, masofa tushunchasiga tayaniladi. Masofa tushunchasini kiritishning sinalgan usullaridan biri fazoda norma kiritishdir.

1.6-ta'rif. Bizga L chiziqli fazo va unda aniqlangan p funksional berilgan bo'lsin. Agar p quyidagi uchta shartni qanoatlantirsa, unga norma deyiladi:

$$1) p(x) \geq 0, \quad \forall x \in L; \quad p(x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta;$$

$$2) p(ax) = |a|p(x), \quad \forall a \in C, \quad \forall x \in L;$$

$$3) p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in L.$$

1.7-ta'rif. Norma kiritilgan L chiziqli fazo chiziqli normalangan fazo deyiladi va $x \in L$ elementning normasi $\|x\|$ orqali belgilanadi.

X chiziqli normalangan fazoda $\{x_n\}$ ketma-ketlik va $x \in X$ element berilgan bo'lsin.

1.8-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $n(\varepsilon)$ natural son mavjud bo'lib, barcha $n > n(\varepsilon)$ larda $\|x_n - x\| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik x elementga yaqinlashadi deyiladi.

1.9-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $n(\varepsilon) > 0$ mavjud bo'lib, ixtiyoriy $n > n(\varepsilon)$ va barcha $p \in N$ sonlar uchun $\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa $\{x_n\}$ ga fundamental ketma-ketlik deyiladi.

Shuni ta'kidlash lozimki, har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlik fundamentaldir, lekin teskarisi doim o'rinli emas.

1.10-ta'rif. Agar X chiziqli normalangan fazoda ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda X to'la normalangan fazo yoki Banach fazosi deyiladi.

Bizni bundan keyin faqat to'la normalangan fazolar qiziqtiradi.

Chiziqli normalangan fazolarga misollar keltiramiz.

1.4-misol. $C[a, b]$ chiziqli fazoda f elementning normasi quyidagicha aniqlanadi:

$$\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

1.5-misol. $\ell_2(Z)$ chiziqli fazoda elementning normasi quyidagi aniqlanadi:

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|^2} = \sqrt{\sum_{n \in Z} |f(n)|^2}.$$

Bizga L – kompleks chiziqli fazo berilgan bo‘lsin.

1.11-ta’rif. $L \times L$ dekart ko‘paytmada aniqlangan $p : L \times L \rightarrow C$ funksional quyida keltirilgan to‘rtta shartni qanoatlantirsa, unga skalyar ko‘paytma deyiladi:

- 1) $p(x, x) \geq 0$, $\forall x \in L$; $p(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,
- 2) $p(x, y) = \overline{p(y, x)}$, $\forall x, y \in L$;
- 3) $p(\alpha x, y) = \alpha p(x, y)$, $\forall x, y \in L$ va $\forall \alpha \in C$;
- 4) $p(x_1 + x_2, y) = p(x_1, y) + p(x_2, y)$, $\forall x_1, x_2, y \in L$.

Odatda $x, y \in L$ elementlarning skalyar ko‘paytmasi (x, y) orqali belgilanadi.

1.12-ta’rif. Skalyar ko‘paytma kiritilgan chiziqli fazo Evklid fazosi deyiladi.

Evklid fazosida skalyar ko‘paytma orqali kiritilgan quyidagi $p : E \rightarrow R$ funksionalni qaraymiz:

$$p(x) = \sqrt{(x, x)}.$$

Bu funksional norma shartlarini qanoatlantiradi, xususan, uchburchak tengsizligini isbotlashda quyidagi Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan foydalaniladi:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Evklid fazosiga misollar keltiramiz:

1.6-misol. $\ell_2(Z)$ chiziqli fazoda skalyar ko‘paytmani quyidagicha aniqlanadi:

$$(f, g) = \sum_{n \in Z} f(n) \overline{g(n)}. \quad (1.4)$$

1.7-misol. $C_2[a, b]$ va $L_2[a, b]$ chiziqli fazolarda skalyar ko‘paytma

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \cdot \overline{g(x)} dx \quad (1.5)$$

formula bilan aniqlanadi.

1.13-ta'rif. Cheksiz o'lchamli to'la Evklid fazosiga Hilbert fazosi deyiladi.

Demak, H Hilbert fazosi quyidagi 3 ta shartni qanoatlantirishi lozim:

- 1) H Evklid fazosi, ya'ni skalyar ko'paytma kiritilgan chiziqli fazo;
- 2) H fazo $p(x) = \sqrt{(x, x)} = \|x\|$ normaga nisbatan to'la;
- 3) H fazo cheksiz o'lchamli, ya'ni H fazoda cheksiz ko'p chiziqli erkli elementlar sistemasi mavjud bo'lishi kerak.

1.8-misol. $L_2(R^n)$ - R^n da aniqlangan va modulining kvadrati integrallanuvchi bo'lgan funksiyalar fazosi, unda skalyar ko'paytma quyidagicha aniqlanadi:

$$(f, g) = \int_{R^n} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Aytish joyizki, $L_2(R^n)$ Hilbert fazosida Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi quyidagi ko'rinishga ega:

$$\left| \int_{R^n} f(x) \overline{g(x)} dx \right|^2 \leq \int_{R^n} |f(x)|^2 dx \int_{R^n} |g(x)|^2 dx.$$

1.6 va 1.7- misollarda keltirilgan $\ell_2(Z)$ va $L_2[a, b]$ lar Hilbert fazosi, lekin $C_2[a, b]$ Hilbert fazosi emas, chunki $C_2[a, b]$ to'la emas.

Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi bilan bir qatorda biz integrallash tartibini almashtirish haqidagi Fubini teoremasining natijasidan ham foydalanamiz. Fubini teoremasi natijasining quyidagi bayoni biz uchun qulaydir.

1.1-teorema (Fubini). Agar $|K(x, y)|^2$ funksiya $T \times T$ da integrallanuvchi bo'lsa, u holda deyarli barcha $x \in T$ ($y \in T$) da

$$\int_T |K(x, y)|^2 dy \left(\int_T |K(x, y)|^2 dx \right)$$

integral mavjud va quyidagilar o'rinli

$$\int_T \int_T |K(x, y)|^2 dx dy = \int_T dx \int_T |K(x, y)|^2 dy = \int_T dy \int_T |K(x, y)|^2 dx.$$

Bizga H Hilbert fazosi va undagi $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

1.14-ta'rif. Agar ixtiyoriy $y \in H$ va biror $x \in H$ uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y) = (x, y)$ munosabat bajarilsa, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik $x \in H$ elementga kuchsiz ma'noda yaqinlashadi deyiladi.

1.15-ta'rif. Agar $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$ munosabat bajarilsa, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik $x \in H$ elementga kuchli ma'noda yaqinlashadi deyiladi.

1.9-misol. H Hilbert fazosi bo'lsin. Barcha $x, y \in H$ lar uchun

$$-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \quad (1.6)$$

tengsizlikni isbotlang.

Isbot. Barcha $x, y \in H$ lar uchun normaning uchburchak aksiomasiga ko'ra quyidagi tengsizlik o'rinli

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|. \quad (1.7)$$

(1.7) tengsizlik istalgan $x, y \in H$ lar o'rinli. Demak, (1.7) da x va y ning joyini almashtirish mumkin.

$$\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|x - y\| + \|x\|. \quad (1.8)$$

Bu ikki (1.7) va (1.8) tengsizliklardan

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|, \quad -(\|x\| - \|y\|) \leq \|x - y\| \quad (1.9)$$

tengsizliklarni olamiz. (1.9) dan esa isbotlash lozim bo'lgan (1.6) tengsizlik kelib chiqadi.

1.9-misol. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik $x \in H$ elementga kuchli ma'noda yaqinlasha, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'ladi. Isbotlang.

Isbot. (1.7) tengsiizlikdan

$$\|x_n\| \leq \|x_n - x\| + \|x\|. \quad (1.10)$$

Misol shartiga ko'ra $\{\|x_n - x\|\}_{n=1}^{\infty}$ sonli ketma-ketlik nolga yaqinlashadi. Demak, u chegaralangan. Bundan $\{\|x_n - x\| + \|x\|\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning ham chegaralangan ekanligi kelib chiqadi. Element normasi manfiymas ekanligidan hamda (1.10) dan $\{x_n\}$ ketma-ketlikning chegaralangan ekanligini olamiz.

1.10-misol. $\ell_2(Z^v)$ Hilbert fazosida

$$\tilde{\varphi}_n(s) = \begin{cases} 1, & \text{agar } s = n, \\ 0, & \text{agar } s \neq n \end{cases} \quad (1.11)$$

ketma-ketlikni kuchsiz ma'noda nolga yaqinlashuvchi ekanligini isbotlang.

Isbot. Biz isbotni $v = 1$ hol uchun keltiramiz. $\ell_2(Z)$ Hilbert fazosida skalyar ko'paytma (1.4) tenglik bilan aniqlanadi. Shuning uchun ixtiyoriy $n \in Z$ da

$$\|\tilde{\varphi}_n\|^2 = (\tilde{\varphi}_n, \tilde{\varphi}_n) = 1$$

o'rinli. $\ell_2(Z)$ fazodagi skalyar ko'paytmadan foydalansak quyidagini olamiz:

$$(\tilde{\varphi}_n, g) = \sum_{s \in Z} \tilde{\varphi}_n(s) \overline{g(s)} = \overline{g(n)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Oxirgi munosabat $g \in \ell_2(Z)$ shartdan kelib chiqadi. Demak, $\{\tilde{\varphi}_n\}$ ketma-ketlik $\theta \in \ell_2(Z)$ elementga kuchsiz ma'noda yaqinlashar ekan. Δ

Shuni ta'kidlaymizki, $\{\tilde{\varphi}_n\}$ ketma-ketlik nol elementga kuchli ma'noda yaqinlashmaydi, chunki qurilishiga ko'ra $\|\tilde{\varphi}_n - \theta\| = 1$ bo'lib, $\|\tilde{\varphi}_n - \theta\|$ nolga intilmaydi. Agar $g_n = \frac{1}{n} \tilde{\varphi}_n$ ketma-ketlikni qarasak, u holga $\{g_n\}$ nolga kuchli ma'noda yaqinlashuvchi bo'ladi.

1.1-lemma. Evklid fazosida yig'indi, songa ko'paytirish va skalyar ko'paytma amallari uzluksizdir, ya'ni agar $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ (kuchli yaqinlashish ma'nosida), $\alpha_n \rightarrow \alpha$ (sonli ketma-ketlik sifatida) bo'lsa, u holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(x_n + y_n) - (x + y)\| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha_n x_n - \alpha x\| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x, y)$$

tengliklar o'rinli.

Isbot. Birinchi tasdiqning isboti quyidagicha:

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| = \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Ikkinchi tasdiqning isbotiga o'tamiz:

$$\begin{aligned} \|\alpha_n x_n - \alpha x\| &= \|\alpha_n x_n - \alpha x_n + \alpha x_n - \alpha x\| \leq \\ &\leq \|(\alpha - \alpha_n)x_n\| + \|\alpha(x_n - x)\| = |\alpha - \alpha_n| \cdot \|x_n\| + |\alpha| \cdot \|x_n - x\|. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Matematik analiz kursidan ma'lumki, nolga yaqinlashuvchi ketma-ketlikning chegaralangan ketma-ketlikka yoki songa ko'paytmasi yana nolga yaqinlashuvchi ketma-ketlik bo'ladi. Nolga yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning yig'indisi ham nolga yaqinlashuvchi ketma-ketlik bo'lganligidan hamda (1.12) dan ikkinchi tasdiqning isbotini olamiz.

Uchinchi tasdiqning isboti quyidagicha:

$$\begin{aligned} |(x_n, y_n) - (x, y)| &= |(x_n, y_n) - (x, y_n) + (x, y_n) - (x, y)| \leq \\ &\leq |(x_n - x, y_n)| + |(x, y_n - y)| \leq \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad \Delta \end{aligned}$$

Haqiqiy Evklid fazolarida vektorning normasini, balki vektorlar orasidagi burchak tushunchasini ham kiritish mumkin. Noldan farqli x va y vektorlar orasidagi φ burchakning kosinusi

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \quad (1.13)$$

formula bilan aniqlanadi. Koshi-Bunyakovskiy tengsizligiga ko'ra (1.13) ning o'ng tomoni moduli bo'yicha birdan oshmaydi va demak (1.13) formula haqiqatan ham, nolmas x va y vektorlar orasidagi φ , $0 \leq \varphi \leq \pi$ burchakni bir qiymatli aniqlaydi.

Agar $(x, y) = 0$ bo'lsa, u holda x va y vektorlar ortogonal deyiladi.

1.16-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\alpha \neq \beta$ da $(x_\alpha, x_\beta) = 0$ bo'lsa, u holda nolmas $\{x_\alpha\}$ vektorlar sistemasiga ortogonal sistema deyiladi. Agar bu holda har bir elementning normasi birga teng bo'lsa, $\{x_\alpha\}$ ortogonal normalangan sistema, qisqacha ortonormal sistema deyiladi.

Agar $\{x_\alpha\}$ vektorlar ortogonal sistemani tashkil qilsa, u holda $\{x_\alpha\}$ chiziqli bog'lanmagan bo'ladi. Haqiqatan ham,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \theta$$

bo'lsin. Bu tenglikning ikkala qismini x_i ga skalyar ko'paytirib, quyidagiga ega bo'lamiz

$$(x_i, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) = \alpha_i (x_i, x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$(x_i, x_i) \neq 0$ bo'lgani uchun, barcha $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ larda $\alpha_i = 0$ bo'ladi.

1.17-ta’rif. Agar $\{x_\alpha\} \subset E$ sistemani o‘zida saqllovchi minimal yopiq qism fazo E fazoga teng bo‘lsa, u holda $\{x_\alpha\}$ sistema to‘la deyiladi.

1.18-ta’rif. Agar $\{x_\alpha\}$ ortonormal sistema to‘la bo‘lsa, u holda bu sistema E fazodagi ortonormal (ortogonal normalangan) bazis deyiladi.

Ravshanki, agar $\{x_\alpha\}$ - ortogonal sistema bo‘lsa, u holda

$$\left\{ \|x_\alpha\|^{-1} \cdot x_\alpha \right\}$$

ortonormal sistema bo‘ladi.

1.11-misol. $L_2[-\pi, \pi]$ fazoda skalyar ko‘paytma quyidagicha kiritiladi

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt \quad (1.14)$$

Bu fazoda ortonormal bazisga

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1.15)$$

funksiyalardan tashkil topgan sistema misol bo‘ladi [8, 25].

1.19-ta’rif. Agar E Evklid fazosining hamma yerida zich bo‘lgan sanoqli to‘plam mavjud bo‘lsa, E separabel Evklid fazosi deyiladi.

Yuqorida keltirilgan $\ell_2(\mathbb{Z})$, $C_2[a, b]$ va $L_2[a, b]$ fazolar separabel Evklid fazolariga misol bo‘ladi. Har qanday separabel Evklid fazosidagi ixtiyoriy ortonormal sistema ko‘pi bilan sanoqlidir.

1.1-natija. Har qanday separabel Evklid fazosida sanoqli ortonormal bazis mavjud.

Cheksiz o‘lchamli E Evklid fazosining

$$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots \quad (1.16)$$

ortonormal sistemasi va $f \in E$ ixtiyoriy elementi berilgan bo‘lsin. f elementga

$$c_k = (f, \phi_k), \quad k = 1, 2, \dots, n, \dots \quad (1.17)$$

sonlar ketma-ketligini mos qo‘yamiz va c_k sonlarni f elementning koordinatalari yoki $\{\phi_n\}$ sistemadagi Furrye koeffitsiyentlari deb ataymiz.

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k \quad (1.18)$$

formal qatorni esa f elementning $\{\phi_n\}$ ortonormal sistema bo'yicha Furiye qatori deb ataymiz.

Furiye koeffitsiyentlari quyidagi tengsizlikni qanoatlantiradi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|f\|^2. \quad (1.19)$$

So'nggi (1.19) tengsizlik *Bessel tengsizligi* deyiladi.

1.20-ta'rif. Agar ixtiyoriy $f \in E$ uchun

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|f\|^2, \quad c_k = (f, \phi_k) \quad (1.20)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $\{\phi_n\}$ ortonormal sistema yopiq sistema deyiladi. (1.20) tenglik Parseval tengligi deyiladi.

(1.20) tenglikdan kelib chiqadiki, $\{\phi_n\}$ ortonormal sistemaning yopiq bo'lishi uchun, har bir $f \in E$ da

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k$$

Furiye qatorining qisman yig'indilar ketma-ketligi f elementga yaqinlashishi kerak.

1.2-teorema. Separabel Evklid fazosida har qanday to'la ortonormal sistema yopiq va aksincha.

Bizni asosan to'la Evklid fazolari qiziqtiradi.

1.21-ta'rif. E Evklid fazosi $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ normaga nisbatan to'la bo'lsa, u to'la Evklid fazosi deyiladi.

1.12-misol. $\ell_2(Z)$ va $L_2[a, b]$ to'la separabel Evklid fazolariga misol bo'ladi.

E - to'la separabel Evklid fazosi va $\{\phi_n\}$ -undagi ortonormal sistema bo'lsin. Bessel tengsizligidan kelib chiqadiki, $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ sonlar biror f elementning Furiye koeffitsiyentlari bo'lishi uchun

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \quad (1.21)$$

qatorning yaqinlashishi zarur.

To'la Evklid fazolarida bu shart yetarli ham ekan.

1.3-teorema. (Riss-Fisher). $\{\phi_n\}$ - E to'la Evklid fazosidagi ixtiyoriy ortonormal sistema va $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ sonlar shunday bo'lsinki, (1.21) qator yaqinlashsin. U holda shunday $f \in E$ element mavjudki,

$$c_k = (f, \phi_k), \quad k = 1, 2, \dots, n, \dots \quad \text{va} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = (f, f) = \|f\|^2$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

Ortogonal sistemaning to'laligi haqida quyidagi teoremani keltiramiz.

1.4-teorema. To'la separabel Evklid fazosidagi $\{\phi_n\}$ ortonormal sistema to'la bo'lishi uchun E da $\{\phi_n\}$ sistemaning barcha elementlariga ortogonal bo'lgan nolmas elementning mavjud bo'lmashligi yetarli va zarurdir.

1.22-ta'rif. Agar R va R^* Evklid fazolari o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin bo'lib,

$$x \leftrightarrow x^*, \quad y \leftrightarrow y^*, \quad x, y \in R, \quad x^*, y^* \in R^*$$

ekanligidan

$$x + y \leftrightarrow x^* + y^*, \quad \lambda x \leftrightarrow \lambda x^* \quad \text{va} \quad (x, y) = (x^*, y^*)$$

munosabatlar kelib chiqsa, R va R^* lar izomorf fazolar deyiladi.

Boshqacha aytganda, Evklid fazolarining izomorfligi shundan iboratki, bu fazolar o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud bo'lib, bu moslik shu fazolardagi chiziqli amallarni va ulardagi skalyar ko'paytmani saqlaydi.

Ma'lumki, n - o'lchamli ixtiyoriy ikkita Evklid fazosi o'zaro izomorfdir. Cheksiz o'lchamli Evklid fazolari o'zaro izomorf bo'lishi shart emas. Masalan, $\ell_2(Z)$ va $C_2[a, b]$ Evklid fazolari izomorf emas, chunki $\ell_2(Z)$ to'la, $C_2[a, b]$ esa to'la emas.

Quyidagi teorema o'rinli.

1.5-teorema. Ixtiyoriy ikkita separabel Hilbert fazosi o'zaro izomorfdir.

1.2-lemma. R separabel Evklid fazosining har qanday R' qismi yana separabeldir.

Hilbert fazosining qism fazolari ayrim maxsus xossalarga egaki, ixtiyoriy normalangan fazoning qism fazolari bu xossalarga ega emas. Bu xossalar Hilbert fazosida kiritilgan skalyar ko'paytma va unga mos ortogonallik tushunchasiga asoslangan.

1.6-teorema. H separabel Hilbert fazosining ixtiyoriy M qism fazosida shunday $\{\phi_n\}$ ortonormal sistema mavjudki, uning chiziqli qobig'ining yopig'i M ga teng.

1.7-teorema. Agar M - H Hilbert fazosining yopiq qism fazosi bo'lsa, u holda ixtiyoriy $f \in H$ element yagona usul bilan $f = h + h'$ yig'indiga yoyiladi, bu yerda $h \in M$, $h' \in M^\perp$.

1.2-natija. $M \subset H$ qism fazoning ortogonal to'ldiruvchisining ortogonal to'ldiruvchisi M ning o'ziga teng, ya'ni $(M^\perp)^\perp = M$.

Shunday qilib, H fazoning o'zaro to'ldiruvchi qism fazolari haqida fikr yuritish mumkin. Agar M va $M^\perp$ ikkita shunday bir-birini to'ldiruvchi qism fazolar va $\{\phi_n\}$, $\{\phi'_n\}$ - mos ravishda M va $M^\perp$ dagi to'la ortonormal sistema bo'lsa, u holda $\{\phi_n\}$ va $\{\phi'_n\}$ sistemalarning birlashmasi butun H fazoda to'la ortonormal sistema bo'ladi.

1.3-natija. H fazodagi har qanday ortonormal sistemani to'la sistemagacha to'ldirish mumkin.

Agar $\{\phi_n\}$ sistema chekli bo'lsa, u holda bu sistemaga kiruvchi elementlar soni $\{\phi_n\}$ sistemadan hosil qilingan M qism fazoning o'lchamiga va $M^\perp$ qism fazoning koo'lchamiga teng. Shunday qilib, quyidagiga egamiz.

1.4-natija. Chekli n - o'lchamli qism fazoning ortogonal to'ldiruvchisi n - koo'lchamga ega va aksincha.

1.23-ta'rif. Agar H Hilbert fazosining ixtiyoriy $f \in H$ elementi

$$f = h_1 + h_2, \quad h_1 \in M_1, \quad h_2 \in M_2$$

ko‘rinishda tasvirlansa, u holda H fazo o‘zaro ortogonal M_1 va M_2 qism fazolarning to‘g‘ri yig‘indisiga yoyilgan deyiladi va

$$H = M_1 \oplus M_2$$

ko‘rinishda yoziladi.

To‘g‘ri yig‘indini chekli yoki sanoqli sondagi qism fazolar uchun ham umumlashtirish mumkin, ya’ni H o‘zining $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ qism fazolarining to‘g‘ri yig‘indisiga yoyilgan deyiladi, agarda quyidagi shartlar bajarilsa:

a) M_i qism fazolar juft-jufti bilan o‘zaro ortogonal, ya’ni M_i dagi ixtiyoriy vektor M_k dagi ixtiyoriy vektorga ortogonal, $i \neq k$;

b) ixtiyoriy $f \in H$ element

$$f = h_1 + h_2 + \dots + h_n + \dots, \quad h_n \in M_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.22)$$

ko‘rinishda tasvirlanadi, agar qo‘shiluvchilar soni cheksiz bo‘lsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2$$

qator yaqinlashuvchi bo‘ladi. Bu holda $H = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus M_n$ ko‘rinishda yoziladi.

Osongina ko‘rsatish mumkinki, agar f uchun (1.22) yoyilma mavjud bo‘lsa, u yagona va

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2.$$

Qism fazolarning to‘g‘ri yig‘indisi bilan bir qatorda chekli yoki sanoqli sondagi Hilbert fazolarining to‘g‘ri yig‘indisi haqida ham gapirish mumkin. Agar H_1 va H_2 lar ixtiyoriy Hilbert fazolari bo‘lsa, u holda ularning to‘g‘ri yig‘indisi $H = H_1 \oplus H_2$ quyidagicha aniqlanadi. H fazoning elementlari barcha (h_1, h_2) , $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$ juftliklardan iborat. $H = H_1 \oplus H_2$ da skalyar ko‘paytma quyidagicha kiritiladi:

$$((h_1, h_2), (h'_1, h'_2)) = (h_1, h'_1)_{H_1} + (h_2, h'_2)_{H_2}, \quad h_1, h'_1 \in H_1, \quad h_2, h'_2 \in H_2.$$

Chekli sondagi $H_1, H_2, \dots, H_n$ Hilbert fazolarining to'g'ri yig'indisi ham xuddi shunday aniqlanadi.

2-§. Chiziqli operatorlar

Bu paragrafda biz to'la normalangan (Banach va Hilbert) fazolarida chiziqli operatorlarga oid asosiy ma'lumotlarni beramiz. Chiziqli operator, chegaralangan operator, uzluksiz operator, operator normasi, teskari operator, qo'shma operatorlar ta'riflarini keltiramiz. Bundan tashqari o'z-o'ziga qo'shma va kompakt operatorlar xossalarini bayon qilamiz. Chiziqli operator spektri, yadroli operator, Hilbert-Schmidt tipidagi operatorlarni ta'riflab, ularning ba'zi xossalarini isbotsiz keltiramiz.

Bizga H va H_1 chiziqli normalangan fazolar bo'lsin.

2.1-ta'rif. H fazoning har bir x elementiga H_1 fazoning yagona y elementini mos qo'yuvchi A akslantirishga operator deyiladi va u $Ax = y$ yoki $A : H \rightarrow H_1$ kabi yoziladi.

H normalangan fazoni H_1 normalangan fazoga akslantiruvchi $A : H \rightarrow H_1$ operator berilgan bo'lsin.

Bundan keyin biz $D(A)$ bilan A operatorni aniqlash sohasini belgilaymiz. $D(A) = H$ bo'lishi shart emas. Lekin $D(A)$ ni chiziqli ko'pxillilik bo'lishi talab qilinadi.

2.2-ta'rif. Agar ixtiyoriy $x, y \in D(A)$ elementlar va $\alpha, \beta \in C$ sonlar uchun

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda A ga chiziqli operator deyiladi.

Agar shunday $C > 0$ son mavjud bo'lib, barcha $x \in M$ lar uchun $\|x\| \leq C$ bo'lsa, u holda $M \subset H$ to'plam chegaralangan deyiladi.

2.3-ta'rif. Bizga $x_0 \in D(A)$ berilgan bo'lsin. Agar $y_0 = Ax_0 \in H_1$ ning ixtiyoriy V atrofi uchun x_0 ning shunday U atrofi mavjud bo'lib, barcha $x \in U \cap D(A)$ lar uchun $Ax \in V$ bo'lsa, A operator $x = x_0$ nuqtada uzluksiz deyiladi. Agar A operator ixtiyoriy $x \in D(A)$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda A ga uzluksiz operator deyiladi.

2.4-ta’rif. Agar $n \rightarrow \infty$ da $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $\{x_n\} \subset D(A)$ ketma-ketlik uchun $\|Ax_n - Ax_0\| \rightarrow 0$ munosabat bajarilsa, u holda A operator $x = x_0$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

Bizga $A : H \rightarrow H_1$ chiziqli operator berilgan bo’lsin.

2.5-ta’rif. Agar shunday $C > 0$ son mavjud bo’lib, barcha $x \in D(A)$ lar uchun

$$\|Ax\| \leq C\|x\| \quad (2.1)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda A chegaralangan operator deyiladi.

2.6-ta’rif. (2.1) tengsizlikni qanoatlantiruvchi C sonlar to’plamining aniq quyi chegarasi A operatorning normasi deyiladi va u $\|A\|$ bilan belgilanadi, ya’ni

$$\|A\| = \inf C.$$

2.7-ta’rif. $Ax = \theta$ tenglikni qanoatlantiruvchi $x \in H$ lar to’plamini A operatorning yadrosi deb ataymiz va uni $\text{Ker } A$ bilan belgilaymiz.

2.8-ta’rif. Biror $x \in D(A)$ uchun $y = Ax$ tenglik bajariladigan $y \in H_1$ lar to’plamini A operatorning qiymatlar sohasi deb ataymiz va uni $\text{Im } A$ yoki $R(A)$ bilan belgilaymiz.

Chiziqli operator yadrosi va qiymatlar sohasini matematik simvollar yordamida quyidagicha yozish mumkin:

$$\text{Ker } \{A\} = \{x \in H : Ax = \theta\},$$

$$R(A) = \{y \in H_1 : \text{biror } x \in D(A) \text{ uchun } y = Ax\}.$$

Chiziqli operator aniqlanish sohasi, qiymatlar sohasi va yadrosini quyidagi misollarda tushuntiramiz.

2.1-misol. X chiziqli normalangan fazo bo’lsin. Har bir $x \in X$ uchun $Ix = x$ deymiz. Bu akslantirish birlik operator deyiladi va $D(I) = X$, $R(I) = X$, $\text{Ker } I = \{0\}$ bo’ladi.

2.2-misol. $L_2[-\pi; \pi]$ Hilbert fazosida

$$(Af)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos x \cos y) f(y) dy \quad (2.2)$$

integral operatorni qaraymiz. Uning aniqlanish sohasi, qiymatlar sohasi va yadrosini toping.

Yechish. Qaralayotgan integral operatorning aniqlanish sohasi $D(A)$, $L_2[-\pi; \pi]$ fazo bilan ustma-ust tushadi. Chunki istalgan $f \in L_2[-\pi; \pi]$ uchun

$$g(x) = (Af)(x) = \alpha + \beta \cos x \quad (2.3)$$

ko'rinishda tasvirlanadi. Bu yerda

$$\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} f(y) dy \quad \text{va} \quad \beta = \int_{-\pi}^{\pi} \cos y f(y) dy. \quad (2.4)$$

Demak, $g = Af \in L_2[-\pi, \pi]$. Bundan $D(A) = L_2[-\pi, \pi]$ tenglik kelib chiqadi. A operatorning qiymatlar sohasi (2.3) ga ko'ra 1 va $\cos x$ elementlarga tortilgan ikki o'lchamli qism fazo bo'ladi. Endi A operatorning yadrosini topamiz. $f \in L_2[-\pi; \pi]$ element $Af = 0$ tenglamaning yechimi bo'lishi uchun u 1 va $\cos x$ elementlarga ortogonal bo'lishi zarur va yetarli ((2.3) va (2.4) ga qarang). Shunday qilib, A operatorning yadrosi 1 va $\cos x$ larga ortogonal bo'lgan qism fazodan iborat. Bu misol uchun quyidagi tenglik o'rinli:

$$\text{Im } A = \{g \in L[-\pi, \pi] : g(x) = \alpha + \beta \cos x\}, \quad \text{Ker } A = (\text{Im } A)^\perp.$$

2.9-ta'rif. H normalangan fazoni H_1 normalangan fazoga akslantiruvchi A chiziqli operatorning aniqlanish sohasi $D(A) = H$ bo'lib, birlik sharni chegaralangan to'plamga akslantirsa unga chegaralangan operator deyiladi.

2.1-teorema. H normalangan fazoni H_1 normalangan fazoga akslantiruvchi A chiziqli chegaralangan operator normasi $\|A\|$ uchun

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

tengliklar o'rinli.

$A, B : H \rightarrow H_1$ operatorlarning yig'indisi deb ixtiyoriy $x \in D(A) \cap D(B)$ elementga $y = Ax + Bx \in H_1$ elementni mos qo'yuvchi $C = A + B$ operatorga aytiladi. A chiziqli operatorning α songa ko'paytmasi $x \in D(A)$ elementga αAx elementni mos qo'yuvchi operator sifatida aniqlanadi, ya'ni

$$(\alpha A)(x) = \alpha Ax.$$

Ma'lumki, chiziqli operatorlar yig'indisi yana chiziqli operator bo'ladi, xuddi shunday chiziqli operatorning songa ko'paytmasi ham chiziqli operatoridir. Agar A va B lar chegaralangan operatorlar bo'lsa, ularning yig'indisi bo'lgan C operator ham chegaralangan operator bo'ladi.

Operatorlarni qo'shish va ko'paytirish assotsiativdir. Qo'shish amali kommutativ, lekin ko'paytirish amali kommutativ emas, ya'ni

$$(A + B) + C = A + (B + C), \quad (AB)C = A(BC),$$

$$A + B = B + A, \quad AB \neq BA.$$

2.2-teorema. H normalangan fazoni H_1 normalangan fazoga akslantiruvchi $A : H \rightarrow H_1$ chiziqli operator berilgan bo'lsin. U holda quyidagi tasdiqlar teng kuchli:

- 1) A operator biror x_0 nuqtada uzluksiz,
- 2) A operator uzluksiz,
- 3) A operator chegaralangan.

Bizga H Hilbert fazosini o'zini-o'ziga akslantiruvchi A chiziqli chegaralangan operator (ya'ni $A : H \rightarrow H$) berilgan bo'lsin.

O'z-o'ziga qo'shma operatorlar sinfi ko'pgina ajoyib xossalarga ega. Dissertatsiyada qarayotgan operatorlar ham o'z-o'ziga qo'shma operatorlar bo'lganligi uchun biz bu sinf operatorlarining ta'rif va ba'zi xossalarini keltiramiz.

2.10-ta'rif. H Hilbert fazosini o'zini-o'ziga akslantiruvchi A chiziqli chegaralangan operator berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $x, y \in H$ lar uchun $(Ax, y) = (x, A^*y)$ tenglik, biror $A^* : H \rightarrow H$ chiziqli operator uchun o'rinli bo'lsa, u holda A^* operator A ga qo'shma operator deyiladi.

2.11-ta'rif. Agar $A^* = A$ bo'lsa, ya'ni ixtiyoriy $x, y \in H$ uchun

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda A o'z-o'ziga qo'shma operator deyiladi.

Chiziqli operatorlar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri spektr tushunchasidir. Spektr tushunchasini bayon qilish uchun bizga teskari operator tushunchasi kerak bo'ladi. Quyida biz chiziqli operatorlarning spektriga oid bo'lgan ba'zi bir ta'rif va tushunchalarni keltiramiz.

2.12-ta'rif. Bizga H_1, H_2 Hilbert fazolari va $A : H_1 \rightarrow H_2$ chiziqli operator berilgan bo'lsin. Agar istalgan $y \in \text{Im } A = R(A)$ uchun $y = Ax$ tenglama yagona yechimga ega bo'lsa, u holda A teskarilanuvchan operator deyiladi. Har bir $y \in \text{Im } A$ elementga H_1 fazodan $y = Ax$ tenglikni qanoatlantiruvchi yagona $x \in H_1$ elementni mos qo'yuvchi operator A ga teskari operator deyiladi va u A^{-1} kabi belgilanadi.

2.1-tasdiq. H Hilbert fazosida aniqlangan A chiziqli operator teskarilanuvchan bo'lishi uchun $Ax = 0$ tenglama faqat nol yechimga ega bo'lishi zarur va yetarlidir.

2.3-teorema. A chiziqli operatorga teskari bo'lgan A^{-1} operator ham chiziqlidir.

2.4-teorema. X Banax fazosi va $A : X \rightarrow X$ bo'lsin. Agar $\|A\| \leq q < 1$ bo'lsa, u holda $I - A$ operatorga chegaralangan teskari operator mavjud.

2.5-teorema. (Teskari operator uchun Banax teoremasi). $A \in X$ Banax fazosini X_1 Banax fazosiga biyektiv akslantiruvchi chiziqli chegaralangan operator bo'lsin, u holda A^{-1} operator mavjud va chegaralangan.

Bizga H Hilbert fazosini o'zini-o'ziga akslantiruvchi A chiziqli operator berilgan bo'lsin. I orqali H da aniqlangan birlik operatorni belgilaymiz.

2.13-ta'rif. Agar $(A - zI)$ operator teskarilanuvchan va $(A - zI)^{-1}$ operator butun H fazoda aniqlangan bo'lsa, z ga A operatorning regulyar nuqtasi deyiladi. A operatorning barcha regulyar nuqtalari to'plami $\rho(A)$ kabi belgilanadi.

2.14-ta'rif. A operatorning regulyar bo'lmagan barcha nuqtalari to'plami A operatorning spektri deyiladi va u $\sigma(A)$ ko'rinishda belgilanadi.

Spektr xos qiymat, uzluksiz spektr, diskret spektr, muhim spektr kabi qismlarga bo'linadi.

2.15-ta'rif. Agar biror z soni uchun $Af = zf$ tenglama nolmas yechimga ega bo'lsa, u holda ushbu z soni A operatorning xos qiymati, unga mos yechim $f \in H$ esa z ga mos xos vektor deyiladi.

Agar z soni A operatorning xos qiymati bo'lib, u $\sigma(A)$ to'plamning yakkaalangan nuqtasi bo'lsa, u holda z soni A operatorning yakkaalangan xos qiymati deyiladi.

2.16-ta'rif. Agar z soni A operatorning xos qiymati bo'lib,

$$\dim \text{Ker } A = n$$

bo'lsa, u holda z xos qiymatning karrasi n ga teng deyiladi. Agar $n = 1$ bo'lsa, u holda z oddiy xos qiymat deyiladi.

2.17-ta'rif. A operatorning barcha chekli karrali yakkaalangan xos qiymatlari to'plami A operatorning diskret spektri deyiladi va u $\sigma_{\text{disc}}(A)$ kabi belgilanadi.

Qayd etish kerakki, agar z soni A operator uchun xos qiymat bo'lsa, u holda $(A - zI)$ operatorga teskari operator mavjud emas.

2.18-ta'rif. Agar normasi birga teng bo'lgan va nolga kuchsiz ma'noda yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ sistema mavjud bo'lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(A - zI)x_n\| = 0$$

tenglik o'rinli bo'lsa, z soni o'z-o'ziga qo'shma A operatorning muhim spektriga qarashli deyiladi. Muhim spektr $\sigma_{\text{ess}}(A)$ simvol bilan belgilanadi.

Agar bu ta'rifda $\{x_n\}$ ortonormal sistema bo'lsa, u holda 2.18-ta'rif Veyl mezoni deb yuritiladi [27].

2.2-tasdiq. 1) Chiziqli chegaralangan operatorning spektri bo'sh bo'lmagan yopiq to'plamdir.

2) O'z-o'ziga qo'shma operatorning spektri haqiqiy sonlar to'plamining qismi bo'ladi.

3) *O'z-o'ziga qo'shma operatorning har xil xos qiymatlariga mos keluvchi xos vektorlari o'zaro ortogonaldir.*

Ba'zi bir sinf operatorlarning spektrini biz to'laroq o'rganishimiz mumkin. Operatorlarning bunday sinfi kompakt operatorlar deb nomlangan. Bu sinf operatorlari o'zlarining xossalari bo'yicha chekli o'lchamli operatorlarga o'xshab ketadi. Biz quyida bu sinf operatorlarining ta'rif va ba'zi xossalarini keltiramiz.

2.19-ta'rif. *X Banach fazosi va M uning qism to'plami bo'lsin. M to'plamdan olingan ixtiyoriy $\{x_n\} \subset M$ ketma-ketlikdan M da yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratish mumkin bo'lsa, yoki M ning ixtiyoriy ochiq qoplamasidan chekli qoplama ajratish mumkin bo'lsa, M kompakt to'plam deyiladi.*

2.20-ta'rif. *Agar N to'plamning yopig'i kompakt bo'lsa yoki ixtiyoriy $\{x_n\} \subset N$ ketma-ketlikdan X da yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratish mumkin bo'lsa, u holda N nisbiy kompakt to'plam deyiladi.*

$L(H, H_1)$ orqali H Hilbert fazosini H_1 Hilbert fazosiga akslantiruvchi chiziqli chegaralangan operatorlar to'plamini belgilaymiz.

2.21-ta'rif. *$A \in L(H, H_1)$ va $\dim \operatorname{Im} A < \infty$ bo'lsa, u holda A chekli o'lchamli operator deyiladi.*

2.22-ta'rif. *Bizga $A: H \rightarrow H_1$ operator berilgan bo'lsin. Agar A operator H dagi har qanday chegaralangan to'plamni H_1 dagi nisbiy kompakt to'plamga o'tkazsa, u holda A kompakt yoki to'la uzluksiz operator deyiladi.*

Chekli o'lchamli fazolarda to'plam kompakt bo'lishi uchun uning chegaralangan va yopiq bo'lishi zarur va yetarlidir. Demak, chekli o'lchamli fazodagi har qanday chegaralangan to'plam nisbiy kompaktdir va aksincha.

Shunday qilib, chekli o'lchamli fazolarda aniqlangan har qanday chegaralangan operator kompaktdir. Haqiqatan ham, operator chegaralangan bo'lgani uchun u chegaralangan to'plamni yana chegaralangan to'plamga o'tkazadi. Har qanday chegaralangan to'plam esa chekli o'lchamli fazoda nisbiy kompaktdir. Shunday qilib, quyidagi teoremlar o'rinli.

2.6-teorema. $A : C^n \rightarrow C^n$ chiziqli operator kompaktidir.

2.7-teorema. $A \in L(H, H_1)$ va $\dim \operatorname{Im} A < \infty$ bo'lsin. U holda A kompakt operator bo'ladi.

Cheksiz o'lchamli fazolarda kompaktlik talabi chegaralanganlik talabidan ancha kuchliroq hisoblanadi. Masalan, H Hilbert fazosidagi birlik operatorni qaraymiz. Bu operator chegaralangan, lekin kompakt emas. Haqiqatan ham, birlik operatorning chegaralanganligi bevosita ta'rifdan kelib chiqadi. H dagi birlik shar $B[\theta, 1]$ ni qaraymiz. U chegaralangan to'plam bo'ladi, uning birlik akslantirishdagi obrazi o'ziga teng. Lekin birlik shar cheksiz o'lchamli fazoda kompakt emas [24].

2.8-teorema. Agar $A_n : X \rightarrow Y$ (X, Y -Banax fazolari) kompakt operatorlar ketma-ketligi A operatorga tekis (norma bo'yicha) yaqinlashsa, u holda A ham kompakt operator bo'ladi.

2.3-misol. $A : \ell_2(Z) \rightarrow \ell_2(Z)$, $(Af)(n) = v(n)f(n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} v(n) = 0$

operatorni kompakt ekanligini isbotlang.

Isbot. Berilgan operatorning kompakt ekanligini 2.8-teoremadan foydalanib isbotlaymiz. Buning uchun A ga tekis yaqinlashuvchi $A_n : \ell_2(Z) \rightarrow \ell_2(Z)$ operatorlar ketma-ketligini quyidagicha quramiz:

$$(A_n f)(m) = \begin{cases} v(m)f(m), & \text{agar } |m| \leq n \text{ bo'lsa} \\ 0, & \text{agar } |m| > n \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

Qurilgan A_n operator chekli o'lchamli ($2n+1$ o'lchamli), 2.7-teoremaga ko'ra har bir $n \in N$ da A_n lar kompakt operator bo'ladi. Endi $\|A - A_n\|$ normani baholaymiz:

$$\|(A - A_n)f\|^2 = \sum_{|m| > n} |v(m)f(m)|^2 \leq \sup_{|m| > n} |v(m)|^2 \cdot \sum_{|m| > n} |f(m)|^2 \leq \sup_{|m| > n} |v(m)|^2 \cdot \|f\|^2.$$

Bu tengsizlikdan

$$\|A - A_n\| \leq \sup_{|m| > n} |v(m)| \quad (2.5)$$

tengsizlik kelib chiqadi. $\lim_{n \rightarrow \infty} v(n) = 0$ shartdan va (2.5) dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A - A_n\| = 0$

ekanligi kelib chiqadi. Demak, 2.8-teoremaga ko'ra A kompakt operator bo'ladi.

2.9-teorema. Agar $A : H \rightarrow H$ kompakt operator, $B \in L(H)$ bo'lsa, u holda AB va BA operatorlar ham kompakt operator bo'ladi.

2.10-teorema. Kompakt operatorga qo'shma operator kompaktidir.

2.11-teorema. X Banach fazosida A kompakt operator va ixtiyoriy $\rho > 0$ son berilgan bo'lsin. A operatorning absolyut qiymati bo'yicha ρ dan katta bo'lgan xos qiymatlariga mos keluvchi chiziqli erkli xos vektorlarining soni cheklidir.

2.12-teorema. Agar $|K(s, t)|^2$ integrallanuvchi bo'lsa, u holda

$$(A\varphi)(s) = \int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt \quad (2.6)$$

tenglik bilan aniqlangan A operator $L_2[a, b]$ fazoda chiziqli kompakt va uning normasi

$$\|A\| \leq \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 ds dt}$$

tengsizlikni qanoatlantiradi [24-25].

(2.6) tenglik bilan aniqlanuvchi operatorlar Fredholm tipidagi operatorlar deyiladi. $K(s, t)$ funksiya esa integral operatorning yadrosi deyiladi.

2.13-teorema. Agar $A = K(s, t)$ yadro bilan aniqlanuvchi Fredholm operatori bo'lsa, u holda unga qo'shma bo'lgan A^* operator $\overline{K(t, s)}$ yadro bilan aniqlanadi.

2.23-ta'rif. Agar $U : H \rightarrow H_1$ chiziqli operator H va H_1 Hilbert fazolaridagi skalyar kopaytmani saqlasa, ya'ni barcha $f, g \in H$ lar uchun

$$(Uf, Ug) = (f, g) \quad (2.7)$$

tenglik bajarilsa, $U : H \rightarrow H_1$ ga izometrik operator deyiladi. Agar $U : H \rightarrow H_1$ operator hamma yerida aniqlangan bo'lib qiymatlar sohasi H_1 ga teng bo'sa U ga unitar operator deb ataladi [8, 24, 25-27].

Unitar operatorlar quyidagi xossalarga ega:

$$U^* U = U U^* = I, \quad U^{-1} = U^*. \quad (2.8)$$

(2.7) tenglikdan $\|Uf\| = \|f\|$ tenglik kelib chiqadi.

2.24-ta'rif. Bizga H Hilbert fazosini o'zini-o'ziga akslantiruvchi A chiziqli operator berilgan bo'lsin. Agar biror $U : H \rightarrow H_1$ unitar operator va $B : H_1 \rightarrow H_1$ uchun

$$B = UAU^{-1} = UAU^*$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda A va B operatorlar unitar ekvivalent operatorlar deb ataladi.

Ma'lumki, unitar ekvivalent operatorlarning spektrlari ustma-ust tushadi [8, 25-27, 30]. Spektrning qismlari ham saqlanadi, ya'ni xos qiymatlar xos qiymatlarga, muhim spektr esa muhim spektrga o'tadi. Faraz qilaylik, λ son A operatorning xos qiymati, f_λ esa unga mos xos vektor bo'lsin. U holda B operatorning λ xos qiymatiga mos keluvchi xos vektori $g_\lambda = Uf_\lambda$ bo'ladi. Shuning uchun A va B unitar ekvivalent operatorlardan qay birining spektral xossalari tekshirish oson bo'lsa, ushasi tekshiriladi.

2.25-ta'rif. Bizga $A : H \rightarrow H$ chiziqli operator va $H_0 \subset H$ qism fazo berilgan bo'lsin. Agar $AH_0 \subset H_0$ bo'lsa, u holda H_0 qism fazo A operatorga nisbatan invariant qism fazo deyiladi [8, 24-27].

L biror H Hilbert fazosining qism fazosi bo'lsin. U holda har bir $x \in H$ element yagona usul bilan quyidagicha tasvirlanadi

$$x = y + z, \text{ bu yerda } y \in L, z \in L^\perp.$$

2.26-ta'rif. Har bir $x \in H$ uchun $Px = y$ ni mos qoyib, H ning hamma yerida aniqlangan P operatorni hosil qilamiz. Bu operator proyeksiyalash operatori yoki L ning ustiga orthogonal proyeksiyalash deb ataladi.

Uning qiymatlar sohasi L bo'ladi. Shuni ta'kidlash kerakki, agar $x \in L$ bo'lsa $x = y$ va $z = 0$ bo'ladi. Ya'ni barcha $x \in L$ uchun $Px = x$ bo'ladi.

Orthogonal proyeksiyalash operatori uchun quyidagi tasdiqlar o'rinli:

$$1) P^* = P, \quad 2) \|P\| = 1, \quad 3) P^2 = P.$$

2.27-ta’rif. Agar $A \in L(H, H) = L(H)$ operator va istalgan $f \in H$ uchun $(Af, f) \geq 0$ bo’lsa, u holda A ga musbat operator deyiladi va $A \geq 0$ kabi belgilanadi. $A \geq B$ belgilash $A - B \geq 0$ ekanligini bildiradi [8, 24, 25-26, 30].

H separabel Hilbert fazosi va $\{\varphi_n\}$ undagi ortonormal bazis bo’lsin. U holda ixtiyoriy musbat $A \in L(H)$ operator uchun

$$\text{tr}A = \sum_{n=1}^{\infty} (A\varphi_n, \varphi_n) \quad (2.9)$$

ni kiritamiz va bu sonni $A \in L(H)$ musbat operatorning izi *deb* ataymiz.

Agar (2.9) qator yaqinlashsa, u holda uning yig’indisi $\{\varphi_n\}$ ortonormal bazisning tanlanishidan bog’liq emas.

2.28-ta’rif. Agar $A \in L(H)$ musbat operator va $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ sistema H separabel Hilbert fazosidagi ortonormal bazis bo’lsin. Agar

$$\text{tr}A = \sum_{n=1}^{\infty} (A\varphi_n, \varphi_n) < \infty$$

bo’lsa, u holda A ga yadroli (izli, iz qoldiruvchi) operator deyiladi [26] va yadroli operatorlar sinfi Σ_1 orqali belgilanadi.

2.29-ta’rif. Agar $\text{tr}AA^* < \infty$ bo’lsa, u holda $A \in L(H)$ Hilbert-Shmidt tipidagi operator deyiladi.

Hilbert-Shmidt tipidagi operatorlar to’plamini Σ_2 bilan belgilaymiz. Quyidagi tasdiq o’rinli.

2.14-teorema. $A \in \Sigma_1$ bo’lishi uchun shunday $B \in \Sigma_2$ va $C \in \Sigma_2$ operatorlar mavjud bo’lib $A = BC$ ko’rinishda tasvirlanishi zarur va yetarli.

Endi $L_2(D)$, $D \subset R^n$ fazoda berilgan

$$(Af)(x) = \int_D K(x, y) f(y) dy \quad (2.10)$$

integral operatorlarning Σ_2 sinfga qarashli bo’lishligining kriteriysini keltiramiz.

2.15-teorema. (2.10) tenglik bilan aniqlanuvchi A integral operator Σ_2 sinfga qarashli bo’lishi uchun

$$\int_D \int_D |K(x, y)|^2 dx dy < \infty \quad (2.11)$$

bo'lishi zarur va yetarli.

Agar $A \in \Sigma_2$ bo'lsa, u holda $tr AA^*$ chekli bo'ladi va uni

$$\|A\|_2^2 = tr AA^*$$

bilan belgilaymiz. Agar A integral operator (2.10) formula bilan aniqlangan bo'lsa, u holda

$$\|A\|_2^2 = \int_D \int_D |K(x, y)|^2 dx dy$$

tenglik o'rinli.

2.4-misol. $A : \ell_2(Z) \rightarrow \ell_2(Z)$, $(Af)(n) = v(n)f(n)$

operatorni qaraymiz. Bu yerda $v : Z \rightarrow R$ funksiya quyidagi

$$v(n) \geq 0, \quad \sum_{n \in Z} v(n) < \infty$$

shartlarni qanoatlantiradi. Uni musbat va izli (yadroli) operator ekanligini isbotlang.

Isbot. Musbat operator ta'rifiga ko'ra (Af, f) ning barcha $f \in \ell_2(Z)$ larda manfiymas ekanligini korsatishimiz kerak. Demak,

$$(Af, f) = \sum_{n \in Z} (Af)(n) \overline{f(n)} = \sum_{n \in Z} v(n) f(n) \overline{f(n)} = \sum_{n \in Z} v(n) |f(n)|^2 \geq 0$$

A musbat operator ekan. $\ell_2(Z)$ Hilbert fazosida 1.10-misolda (1.11) tenglik bilan aniqlangan $\{\tilde{\varphi}_n\}$, $n \in Z$, sistema ortonormal bazis bo'ladi. Endi bu ortonormal bazisda A operatorning izini topamiz. Ta'rifga ko'ra

$$tr A = \sum_{n \in Z} (A\tilde{\varphi}_n, \tilde{\varphi}_n) = \sum_{n \in Z} v(n) < \infty.$$

Demak, A yadroli (izli) operator bo'ladi. Δ

2.5-misol. Standart Furrye almashtirishi

$$\mathfrak{F} : L_2[-\pi, \pi] \rightarrow \ell_2(Z), \quad (\mathfrak{F}f)(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x) dx \quad (2.12)$$

operatorni qaraymiz. Uni unitar operator ekanligini isbotlang.

Isbot. $L_2[-\pi, \pi]$ kompleks Hilbert fazosida (1.15) tenglik bilan aniqlangan $\{\varphi_n\}, n \in \mathbb{Z}$ to'la ortonormal sistemani (1.11-misolga qarang) olamiz va $f \in L_2[-\pi, \pi]$ ixtiyoriy element bo'lsin. U holda $f \in L_2[-\pi, \pi]$ ning $\{\varphi_n\}, n \in \mathbb{Z}$ to'la ortonormal sistemadagi Furiye koeffitsiyentlari

$$(f, \varphi_n) = (\mathfrak{F}f)(n), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.13)$$

bo'ladi. Bessel tengsizligiga ko'ra

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |(\mathfrak{F}f)(n)|^2 \leq \|f\|^2 \quad (2.14)$$

tengsizlik o'rinli. Demak, Furiye almashtirishi $\mathfrak{F}$ ning aniqlanish sohasi $L_2[-\pi, \pi]$ fazo bilan ustma-ust tushadi. Ikkinchi tomondan Riss-Fisher teoremasiga ko'ra istalgan $\tilde{f} \in \ell_2(\mathbb{Z})$ uchun shunday $f \in L_2[-\pi, \pi]$ element mavjudki, uning $\{\varphi_n\}, n \in \mathbb{Z}$ ortonormal sistemadagi Furiye koeffitsiyentlari

$$(f, \varphi_n) = \tilde{f}(n), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.15)$$

bo'lib

$$\|f\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\tilde{f}(n)|^2 = \|\tilde{f}\|^2 \quad (2.16)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu yerdan Furiye almashtirishi $\mathfrak{F}$ ning qiymatlar sohasi $\ell_2(\mathbb{Z})$ ga tengligi kelib chiqadi. (2.13), (2.15) va (2.16) lardan

$$(f, f) = \|f\|^2 = \|\tilde{f}\|^2 = (\mathfrak{F}f, \mathfrak{F}f) \quad (2.17)$$

tenglikni olamiz. Demak, $\mathfrak{F}$ unitar operator ekan. Δ

Furiye almashtirishi $\mathfrak{F}$ ga qo'shma operator quyidagi

$$\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}^{-1} : \ell_2(\mathbb{Z}) \rightarrow L_2[-\pi, \pi], \quad (\mathfrak{F}^{-1}f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx} f(n)$$

formula yordamida beriladi.

Siljitish va burish operatorlari ham unitar operatorlarga misol bo'ladi.

2.6-misol. Har bir $s \in \mathbb{Z}^\nu$ ga

$$U_s : \ell_2\left(\left(\mathbb{Z}^\nu\right)^2\right) \rightarrow \ell_2\left(\left(\mathbb{Z}^\nu\right)^2\right), \quad (U_s f)(n_1, n_2) = f(n_1 + s, n_2 + s) \quad (2.18)$$

operatorni mos qo'yamiz. $U_s, s \in Z^\nu$ ni unitar operator ekanligini va

$$U_s U_t = U_t U_s = U_{s+t}$$

tenglikni isbotlang.

Isbot. Istalgan $f \in \ell_2\left((Z^\nu)^2\right)$ va $s \in Z^\nu$ uchun

$$\|U_s f\|^2 = (U_s f, U_s f) = \sum_{n_1, n_2 \in Z^\nu} |f(n_1 + s, n_2 + s)|^2 = \sum_{m_1, m_2 \in Z^\nu} |f(m_1, m_2)|^2 = (f, f)$$

tenglikdan $U_s, s \in Z^\nu$ butun fazoda aniqlangan ekanligi kelib chiqadi. Istalgan

$g \in \ell_2\left((Z^\nu)^2\right)$ da

$$(U_s f)(n_1, n_2) = g(n_1, n_2)$$

tenglama $f(n_1, n_2) = g(n_1 - s, n_2 - s)$ yechimga ega. Bu yerdan $U_s, s \in Z^\nu$

operatorning qiymatlar sohasi $\ell_2\left((Z^\nu)^2\right)$ ga teng ekanligi kelib chiqadi. Shunday

qilib $U_s, s \in Z^\nu$ lar unitar operatorlar ekan.

II bob. Shryodinger operatorining spektral xossalari

Ikki o'lchamli panjarada ikki zarrachali sistemaga mos Shryodinger operatorini qaraymiz. Xuddi uzluksiz fazodagidek panjarada ham ikki zarrachali sistemani tadqiq qilish muammolari sistemaning to'la kvaziimpulsi ajratilgandan so'ng bir zarrachali sistemani tekshirish masalasiga keladi. Panjaradagi Laplas operatorining uzluksiz fazodagi Laplas operatoridan farqi shundan iboratki u «fazoviy aylanish»ga nisbatan invariant emas. Natijada panjaradagi ikki zarrachali Shryodinger operatori to'g'ri integralga yoyilganda uning qatlamlari $H(k)$ sistemaning to'la kvaziimpulsi $k \in T^V \equiv (-\pi, \pi]^V$ ([1-7,9] qarang) ga bog'liq bo'ladi. Erkin operator $H_0(k)$ ning spektri $H(k)$ operatorning uzluksiz spektri bilan ustma-ust tushadi. Biz $H(k)$ operator uzluksiz spektri kengligining $k \in T^2$ parametr ga bog'liqligini tekshiramiz. Uzluksiz spektr kengligi $w(k)$ quyidagicha aniqlanadi

$$w(k) \equiv \sup (H_0(k)f, f) - \inf (H_0(k)f, f).$$

Bu yerda aniq yuqori va aniq quyi chegaralar $L_2(T^2)$ fazodagi yopiq birlik shar bo'yicha olinadi. Biz $w_j(k^{(j)})$ - bilan uzluksiz spektrning $e^j, j \in \{1, 2\}$ (e^j bilan Z^2 fazodagi birlik vektor belgilangan) yo'nalish bo'yicha kengligini belgilaymiz va ko'rsatamizki,

$$w(k) = \sum_{j=1}^2 w_j(k^{(j)})$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Ikki zarrachali $H(k)$ Shryodinger operatori $L_2(T^2)$ Hilbert fazosida quyidagi formula yordamida beriladi:

$$(H(k)f)(q) = \left(\varepsilon\left(\frac{1}{2}k + q\right) + \varepsilon\left(\frac{1}{2}k - q\right) \right) f(q) - \frac{1}{2\pi} \int_{T^2} v(q-s) f(s) ds,$$

bu yerda $\varepsilon(q)$ zarrachaning $q \in T^2$ kvazimomentdagi energiyasi, $v(q)$ esa T^2 da aniqlangan haqiqiy qiymatli, uzluksiz va juft funksiya.

Ko'rsatilgan shartlarda ikki zarrachali Shryodinger operatori $H(k)$ o'z-o'ziga qo'shma chegaralangan operator bo'ladi.

Biz ko'rsatamizki $e^j, j \in \{1, 2\}$ yo'nalish bo'yicha uzluksiz spektrning kengligi $w_j(p) = 4 \cos \frac{p_j}{2}$ bo'lib, u $[-\pi, \pi]$ da juft va $[0, \pi]$ kamayuvchi funksiyadir. Ravshanki, $k = \tilde{\pi} = (\pi, \pi)$ bo'lsa uzluksiz spektrning kengligi nol bo'lib, ikki zarrachali Shryodinger operatori $H(\tilde{\pi})$ ning spektri faqat xos qiymatlardan iborat bo'ladi.

Biz bu bobda Shryodinger operatori $H(k)$ ning bir qator ajoyib xossalarini isbotlaymiz. Jumladan barcha $k \in T^2$ uchun $H(k)$ operatorning uzluksiz spektrdan chapda yotuvchi xos qiymatlari soni uchun quyidan va yuqoridan baholar olamiz.

3-§ . Ikki zarrachali Hamiltonianning aniqlanishi

Ikki kvant zarrachali sistemaning erkin Hamiltoniani $\tilde{H}_2^0$ ikki o'lchamli panjara Z^2 da o'z-o'ziga qo'shma chegaralangan operator bo'lib u $\ell_2((Z^2)^2)$ Hilbert fazosida quyidagi formula yordamida beriladi

$$\tilde{H}_2^0 = \frac{1}{2m_1} \Delta_1 + \frac{1}{2m_2} \Delta_2, \quad (3.1)$$

bu yerda $m_1 > 0$ birinchi ($m_2 > 0$ ikkinchi) zarrachaning massasi, $\Delta_1 = \Delta \otimes I$ va $\Delta_2 = I \otimes \Delta$, Δ – ayirmali Laplas operatori bo'lib, u zarrachaning bir tugundan qo'shni tugunga o'tishini ifodalaydi, yani

$$(\Delta f)(x) = \sum_{|s|=1} [f(x) - f(x+s)], \quad f \in \ell_2(Z^2).$$

Ikki zarrachali $\tilde{H}_2$ Hamiltonian Hilbert fazosi $\ell_2((Z^2)^2)$ da erkin Hamiltonian $\tilde{H}_2^0$ ga zarrachalarning o'zaro ta'sirini tavsiflovchi $\tilde{V}_2$ operatori ayirish bilan ifodalanadi, ya'ni

$$\tilde{H}_2 = \tilde{H}_2^0 - \tilde{V}_2,$$

bu yerda

$$(\tilde{V}_2 f)(x_1, x_2) = \tilde{v}(x_1 - x_2) f(x_1, x_2), \quad f \in \ell_2((\mathbb{Z}^2)^2).$$

3.1-shart. Faraz qilamiz $\tilde{v}(x) \geq 0$ haqiqiy qiymatli $\mathbb{Z}^2$ da aniqlangan juft funksiya bo'lib, quyidagi shartni qanoatlantirsin

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^2} \tilde{v}(x) < \infty.$$

3.1-shartda ikki zarrachali sistema Hamiltoniani $\tilde{H}_2$ Hilbert fazosi $\ell_2((\mathbb{Z}^2)^2)$ da o'z-o'ziga qo'shma chegaralangan operator bo'ladi.

Hamiltonianning koordinat ko'rinishidan impuls ko'rinishga o'tish Furiye almashtirishi orqali amalga oshiriladi. Biz $\mathfrak{T} : L_2((T^2)^2) \rightarrow \ell_2((\mathbb{Z}^2)^2)$ bilan standard Furiye almastirishini belgilaymiz (2.5-misolga qarang), bu yerda $(T^2)^2$ bilan ikki o'lchamli tor $T^2 = (-\pi, \pi]^2$ ning o'ziga o'zini dekart ko'paytmasi belgilangan.

Ikki zarrachali Hamiltonianning (impuls tasviri) o'z-o'ziga qo'shma chegaralangan operator sifatida $L_2((T^2)^2)$ Hilbert fazosida quyidagicha aniqlanadi

$$H_2 = \mathfrak{T}^{-1} \tilde{H}_2 \mathfrak{T} \equiv H_2^0 - V_2.$$

Erkin Hamiltonian H_2^0 o'z-o'ziga qo'shma chegaralangan operator bo'lib $L_2((T^2)^2)$ Hilbert fazosida quyidagicha

$$(H_2^0 f)(k_1, k_2) = \left(\frac{1}{m_1} \varepsilon(k_1) + \frac{1}{m_2} \varepsilon(k_2) \right) f(k_1, k_2),$$

aniqlanadi, qaysikim

$$\varepsilon(k) = \sum_{j=1}^2 (1 - \cos k^{(j)}).$$

Zarrachalarning o'zaro ta'sirlashuvini tavsiflovchi V_2 operator $L_2((T^2)^2)$ Hilbert fazosida quyidagi formula bilan beriladi

$$(V_2 f)(k_1, k_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{(T^2)^2} v \left(\frac{k_1 - k_2 - k_1' + k_2'}{2} \right) \delta(k_1 + k_2 - k_1' - k_2') f(k_1', k_2') dk_1' dk_2'.$$

Bu yerda $\delta(k)$ Dirakning delta-funksiyasi, yadro funksiya v Furiye qatori yordamida aniqlanadi

$$v(k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s \in \mathbb{Z}^2} \tilde{v}(s) e^{i(k,s)}.$$

3.1-shartdan kelib chiqadiki, $v(k)$ funksiya T^2 da aniqlangan uzluksiz, juft funksiya bo'ladi.

Biz $\tilde{U}_s, s \in \mathbb{Z}^2$ bilan $\ell_2((\mathbb{Z}^2)^2)$ Hilbert fazosida unitar operatorlarning

$$(\tilde{U}_s f)(n_1, n_2) = f(n_1 + s, n_2 + s), \quad f \in \ell_2((\mathbb{Z}^2)^2).$$

oilasini belgilaymiz. Osongina ko'rish mumkinki

$$\tilde{U}_{s+p} = \tilde{U}_s \tilde{U}_p, \quad s, p \in \mathbb{Z}^2,$$

ya'ni, $\tilde{U}_s, s \in \mathbb{Z}^2$ operatorlar $\mathbb{Z}^2$ da Abel gruppasini tashkil qiladi. Bu $\tilde{U}_s, s \in \mathbb{Z}^2$ gruppasi Furye almashtirishi yordamida $L_2((T^2)^2)$ Hilbert fazosidagi unitar operatorlar oilasi $U_s = \mathfrak{T}^{-1} \tilde{U}_s \mathfrak{T}, s \in \mathbb{Z}^2$, ga o'tadi. Uning $f \in L_2((T^2)^2)$ elementga tasirini beramiz:

$$(U_s f)(k_1, k_2) = \exp(-i(s, k_1 + k_2)) f(k_1, k_2). \quad (3.2)$$

$L_2((T^2)^2)$ Hilbert fazosini quyidagicha to'g'ri integralga yoyamiz

$$L_2((T^2)^2) = \int_{T^2} \oplus L_2(G_k) dk, \quad (3.3)$$

bunda

$$G_k = \{(k_1, k_2) \in (T^2)^2 : k_1 + k_2 = k\}, \quad k \in T^2.$$

Bu yoyilmaga unitar gruppasi $U_s, s \in \mathbb{Z}^2$ ning quyidagi yoyilmasi mos keladi

$$U_s = \int_{T^2} \oplus U_s(k) dk,$$

qaysikim, $U_s(k)$ operator $L_2(G_k)$ Hilbert fazosida $\exp(-i(s, k))$ funksiyaga ko'paytirish operatoridir.

Ikki zarrachali Hamiltonian $\tilde{H}_2$ (koordinat tasvirida) siljish gruppasi $\tilde{U}_s, s \in \mathbb{Z}^2$ bilan o'rin almashinish xossasiga ega, ya'ni,

$$\tilde{U}_s \tilde{H}_2 = \tilde{H}_2 \tilde{U}_s, \quad s \in \mathbb{Z}^2.$$

Shunday ekan, Hamiltonian H_2 (impuls tasviri) (3.2) formula bilan berilgan $U_s, s \in \mathbb{Z}^2$ gruppasi bilan o'rin almashinish xossasiga ega. Demak, H_2 operator to'g'ri integralga yoyiladi

$$H_2 = \int_{T^2} \oplus \tilde{H}_2(k) dk.$$

3.1-lemma. Ikki o'lchamli ko'pxillilik G_k ikki o'lchamli tor T^2 ga izomorfdir.

Ko'rsatish mumkinki, H_2 operatorning qatlamlari $\tilde{H}_2(k)$, $k \in T^2$ quyida aniqlanuvchi $H(k)$, $k \in T^2$, operatorlarga unitar ekvivalent bo'ladi

$$H(k) = H_0(k) - V. \quad (3.4)$$

Ikki zarrachali erkin $H_0(k)$ Hamiltonian $L_2(T^2)$ Hilbert fazosida quyidagicha tasvirlanadi

$$(H_0(k)f)(q) = \varepsilon_k(q)f(q),$$

qaysikim,

$$\varepsilon_k(q) = \frac{1}{m_1} \varepsilon\left(\frac{1}{2}k + q\right) + \frac{1}{m_2} \varepsilon\left(\frac{1}{2}k - q\right). \quad (3.5)$$

Zarrachalarning o'zaro ta'sirlashuv operatori V Hilbert fazosi $L_2(T^2)$ da

$$(Vf)(q) = \frac{1}{2\pi} \int_{T^2} v(q-s)f(s)ds$$

formula bilan beriladi.

4-§. Shryodinger operatorining uzluksiz spektri

Dastlab Shryodinger operatori $H(k)$ ning uzluksiz va diskret spektri haqida qisqacha ma'lumotlar beramiz. Zarrachalarning o'zaro ta'sirini ifodalovchi V operator kompakt bo'lganligi uchun (4.4-teoremaga qarang) muhim spektr haqidagi Veyl mezoniga ko'ra $H(k)$ va $H_0(k)$ operatorlarning uzluksiz spektrlari ustma-ust tushadi. Erkin operator $H_0(k)$ ning spektri esa $[m(k), M(k)]$ kesmadan iborat (4.3-teoremaga qarang). Demak,

$$\sigma_{cont}(H(k)) = [m(k), M(k)]$$

ekan. Bu kesma uzunligi $w(k) = M(k) - m(k)$ ga $H(k)$ operator uzluksiz spektrining kengligi deb ataladi. $H(k)$ operator uzluksiz spektrining kengligi

$w(k)$ ning ba'zi xossalarini keltiramiz. Murakkab bo'lmagan hisoblashlar shuni ko'rsatadiki, $w(k)$ uchun $m_1 = m_2 = 1$ holda

$$w(k) = 4 \cos \frac{k^{(1)}}{2} + 4 \cos \frac{k^{(2)}}{2} \quad (4.1)$$

tenglik o'rinli. Bu yerdan $w(k) = w(k^{(1)}, k^{(2)})$ funksiya $k^{(i)} \in [-\pi, \pi]$, $i \in \{1, 2\}$ koordinatalarning juft funksiyasi ekanligi kelib chiqadi. Biz bu $w(k) = w(k^{(1)}, k^{(2)})$ funksiyaning xossalarini bayon qilamiz. Bu xossalar aslida barcha $\nu \geq 1$ larda o'rinli. Bundan tashqari $w(k) = w(k^{(1)}, k^{(2)})$ funksiya $k^{(i)}$, $i \in \{1, 2\}$ lar bo'yicha simmetrik funksiya, ya'ni

$$w(k) = w(k^{(1)}, k^{(2)}) = w(k^{(2)}, k^{(1)}).$$

(4.1) tenglikdan $w(k) = w(k^{(1)}, k^{(2)})$ funksiyaning $k^{(i)}$, $i = 1, 2$ koordinatalar bo'yicha $[0, \pi]$ kesmada kamayuvchi ekanligi kelib chiqadi. Bulardan

$$\min_{k \in T^3} w(k) = w(\pi, \pi) = 0$$

tenglik kelib chiqadi. Bu holda $H(\pi) = 4I - V$ operator cheksiz ko'p

$$z_n(\pi) = 4 - \tilde{v}(n), \quad n \in \mathbb{Z}^2$$

xos qiymatlarga ega bo'lishi kelib chiqadi. 4.4-teorema isbotidan kelib chiqadiki, $z_n(k)$, $n \in \mathbb{Z}^2$ xos qiymatga

$$\varphi_n(p) = (2\pi)^{-1} \exp(i(n, p)), \quad n \in \mathbb{Z}^2 \quad (4.2)$$

normasi bir bo'lgan xos funksiya mos keladi.

Agar $V = 0$ bo'lsa, u holda $H(k)$ operator faqat uzluksiz spektrga ega bo'ladi. Uzluksiz spektrning kengligi (aniqlanishiga asosan) quyidagiga teng:

$$w(k) \equiv \max_{q \in T^2} \varepsilon_k(q) - \min_{q \in T^2} \varepsilon_k(q).$$

Bundan tashqari biz uzluksiz spektrning e^j , $j = 1, 2$, yo'nalish bo'yicha (e^j orqali $\mathbb{Z}^2$ fazodagi birlik vektor belgilangan) kengligini quyidagicha kiritamiz

$$w_j(k, q - q^{(j)} e^j) \equiv \max_{q^{(j)} \in (-\pi, \pi]} \varepsilon_k(q) - \min_{q^{(j)} \in (-\pi, \pi]} \varepsilon_k(q). \quad (4.3)$$

4.1-lemma. Uzluksiz spektrning e^j , $j \in \{1, 2\}$ yo'nalish bo'yicha kengligi

$w_j(k, q - q^{(j)} e^j)$ faqat $k^{(j)}$ dan bog'liq va quyidagi tenglik o'rinli:

$$w_j(k, q - q^{(j)} e^j) \equiv w_j(k^{(j)}), \quad w(k) = w_1(k^{(1)}) + w_2(k^{(2)}).$$

Isbot. (3.5) formula bilan aniqlangan $\varepsilon_k(p)$ funksiya

$$\varepsilon_k(p) = 3 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) - \sum_{i=1}^3 a(k^{(j)}) \cos p^{(j)} + b(k^{(j)}) \sin p^{(j)}, \quad (4.4)$$

ko‘rinishda tasvirlanadi. Bunda $a(k^{(j)})$ va $b(k^{(j)})$ koeffitsiyentlar mos ravishda quyidagi tengliklar bilan aniqlanadi:

$$a(k^{(j)}) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \cos \frac{k^{(j)}}{2}, \quad b(k^{(j)}) = \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right) \sin \frac{k^{(j)}}{2}$$

(4.4) tenglik $\varepsilon_k(p)$ ning

$$\varepsilon_k(p) = 3 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) - \sum_{i=1}^3 r(k^{(j)}) \cos (p^{(j)} - p(k^{(j)}))$$

tasviridan kelib chiqadi. Bunda

$$r(k^{(j)}) = \sqrt{a^2(k^{(j)}) + b^2(k^{(j)})}, \quad p(k^{(j)}) = \arcsin \frac{b(k^{(j)})}{r(k^{(j)})}, \quad k^{(j)} \in (-\pi, \pi].$$

U holda quyidagi munosobatlarga ega bo‘lamiz:

$$w_j(k^{(j)}) = 2r(k^{(j)}) \quad \text{va} \quad w(k) = 2r(k^{(1)}) + 2r(k^{(2)}). \quad (4.5)$$

Ravshanki, $w_j(k^{(j)}) \equiv 2r(k^{(j)})$ funksiya juft va $(-\pi, \pi)$ da musbatdir. Qayd etamizki,

$$w_j(k^{(j)}) = 0$$

tenglik faqat va faqat $m_1 = m_2$ va $k^{(j)} = \pi$ bo‘lgandagina o‘rinlidir.

$H(k)$ operator uzluksiz spektrining chap chegarasini $m(k)$ orqali belgilaymiz.

Erkin $H_0(k)$ operator spektri haqida quyidagi teorema o‘rinli.

4.1-teorema. Erkin operator $H_0(k)$ barcha $k \in T^2$ larda o‘z-o‘ziga qo‘shma, musbat operator bo‘lib uning spektri $[m(k), M(k)]$ kesmadan iborat.

Isbot. Avvalo, $H_0(k)$ operatorni o‘z-o‘ziga qo‘shma ekanligini ko‘rsatamiz.

2.11-ta’rifga ko‘ra ixtiyoriy $f, g \in L_2(T^2)$ uchun

$$(H_0(k) f, g) = (f, H_0(k) g) \quad (4.6)$$

tenglikning bajarilishini ko'rsatish yetarli. $L_2(T^2)$ dagi skalar ko'paytmadan foydalansak (4.6) ning chap tomonini quyidagicha yozish mumkin

$$(H_0(k) f, g) = \int_{T^2} \varepsilon_k(q) f(q) \overline{g(q)} dq = \int_{T^2} f(q) \overline{\varepsilon_k(q) g(q)} dq = (f, H_0(k) g).$$

Biz bu yerda $\varepsilon_k(q)$ funksiyaning haqiqiy qiymatli ekanligidan foydalandik.

Endi $H_0(k)$ operatorni musbatligini ko'rsatamiz. 2.27-ta'rifga ko'ra ixtiyoriy $f \in L_2(T^2)$ uchun

$$(H_0(k) f, f) \geq 0$$

ekanligini ko'rsatish kifoya. Agar biz barcha $q \in T^2$ larda $\varepsilon_k(q) \geq 0$ va integralning monotonlik xossasidan foydalansak, quyidagiga kelamiz

$$(H_0(k) f, f) = \int_{T^2} \varepsilon_k(q) |f(q)|^2 dq \geq 0.$$

$H_0(k)$ operatorning spektri $[m(k), M(k)]$ kesmadan iborat ekanligini Veyl mezonidan foydalanib isbotlash mumkin ([26] qarang). Δ

Qo'shimcha qilib shuni aytish mumkinki, $H_0(k)$ operator xos qiymatlarga ega emas. Qo'zg'atuvchi V operator spektri haqida quyidagi tasdiq o'rinli.

4.2-teorema. *3.1-shart bajarilganda V operator musbat bo'lib, yadroli operatorlar sinfi Σ_1 ga qarashli bo'ladi. Bundan tashqari uning spektri $\sigma(V)$ uchun quyidagi tenglik o'rinli*

$$\sigma(V) = \{0, \tilde{v}(n), n \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Isbot. Furry almashtirishining aniqlanishiga ko'ra

$$\mathfrak{F}: \ell_2(\mathbb{Z}^2) \rightarrow L_2(T^2), \quad (\mathfrak{F}f)(p) = (2\pi)^{-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} f(n) e^{i(n,p)},$$

va $\tilde{V}: \ell_2(\mathbb{Z}^2) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z}^2)$ orqali $\mathfrak{F}V\mathfrak{F}^{-1}$ operatorni belgilaymiz. U holda

$$(\tilde{V}f)(n) = \tilde{v}(n) f(n), \quad f \in \ell_2(\mathbb{Z}^2)$$

o'rinli. Demak, $\tilde{V}$ operatorining xos qiymatlari $\tilde{v}(n), n \in \mathbb{Z}^2$ lar ekan. Ularga mos xos funksiyalar (1.11) tenglik (1.10-misolga qarang) bilan aniqlanuvchi $\tilde{\varphi}_n, n \in \mathbb{Z}^2$ lar bo'ladi. 3.1-shartga asosan

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^2} (\tilde{V} \tilde{\varphi}_n, \tilde{\varphi}_n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \tilde{v}(n)$$

qator yaqinlashuvchi bo'ladi. Bu esa $\tilde{V}$ operatorning Σ_1 sinfga tegishli ekanligini anglatadi.

Bundan tashqari yuqorida berilgan Furje almashtirishi unitar operator (2.5-misolga qarang) bo'lganligi uchun V operatorning ham xos qiymatlari $\tilde{v}(n), n \in \mathbb{Z}^2$ sonlar bo'ladi va bu sonlardan tuzilgan qator yaqinlashuvchi bo'ladi. Bu yerdan V operatorning Σ_1 sinfga qarashli ekanligi kelib chiqadi. Chegaralangan operator spektri yopiq to'plam. Shuning uchun xos qiymatlar ketma-ketligi $\tilde{v}(n), n \in \mathbb{Z}^2$ ning limiti bo'lgan nol soni ham $\sigma(V)$ ga qarashli bo'ladi. Δ

III bob. Shryodinger operatori uchun nokompakt qo'zg'alishlar

5-§. Shryodinger operatori uchun invariant qism fazolar

Bir o'lchamli panjarada ikki zarrali Shryodinger operatorining xos qiymatlarining qo'zg'alishlari [1] ishda o'rganilgan. [2] ishda esa ikki o'lchamli panjarada berilgan ikki zarrali sistema Hamiltonianining kvaziimpuls koordinatalaridan biri $k^{(1)} = \pi$ yoki $k^{(2)} = \pi$ bo'lganda cheksiz ko'p xos qiymatlarga ega ekanligi isbotlangan. Ikki o'lchamli panjarada berilgan ikki zarrali Shryodinger operatorining invariant qism fazolari [29] ishda o'rganilgan. Biz bu paragrafda ikki o'lchamli panjarada Shryodinger operatori uchun kompakt bo'lmagan qo'zg'alishlarni qaraymiz va kompakt bo'lmagan qo'zg'alishlarda xos qiymatlar uchun asimptotik formulalar olamiz.

Biz Shryodinger operatorlari deb ataluvchi $H(k) = H_0(k) - V$, $k \in T^2$ operatorlarni qaraymiz. Bu yerda erkin $H_0(k)$ Hamiltonian $L_2(T^2)$ Hilbert fazosida quyidagicha tasvirlanadi

$$(H_0(k)f)(q) = \varepsilon_k(q)f(q),$$

qaysikim,

$$\varepsilon_k(q) = 4 - 2 \cos \frac{k_1}{2} \cos q_1 - 2 \cos \frac{k_2}{2} \cos q_2. \quad (5.1)$$

Zarralarning o'zaro ta'sirlashuv operatori V Hilbert fazosi $L_2(T^2)$ da

$$(Vf)(q) = \frac{1}{2\pi} \int_{T^2} v(q-s)f(s)ds$$

formula bilan beriladi. Bu yerda v potensial $\hat{v}$ ning Furye tasviri. 3.1-shartdan v ning haqiqiy qiymatli uzluksiz va juft funksiya ekanligi kelib chiqadi.

Ma'lumki, $L_2(T^2)$ fazosi, juft funksiylardan tashkil topgan qism fazo

$$L_2^+(T^2) = \{f \in L_2(T^2) : f(-q) = f(q)\}$$

va toq funksiylardan tashkil topgan qism fazo

$$L_2^-(T^2) = \{f \in L_2(T^2) : f(-q) = -f(q)\}$$

larning to'g'ri yig'indisidan iborat, ya'ni

$$L_2(T^2) = L_2^+(T^2) \oplus L_2^-(T^2).$$

5.1-lemma. Har bir $k \in T^2$ da $L_2^+(T^2)$ va $L_2^-(T^2)$ qism fazolar $H(k)$ operator uchun invariant qism fazolar bo'ladi.

Isbot. Dastlab $L_2^+(T^2)$ qism fazoni V operator uchun invariant qism fazo ekanligini ko'rsatamiz. Yani ixtiyoriy $f^+ \in L_2^+(T^2)$ uchun $Vf^+ = \varphi \in L_2^+(T^2)$ ekanligini ko'rsatamiz. Shu maqsadda $\varphi(-q)$ ni qaraymiz

$$\varphi(-q) = Vf^+(-q) = \frac{1}{2\pi} \int_{T^2} v(-q-s) f^+(s) ds.$$

Bu tenglikda $f^+(s)$ ni $f^+(-s)$ bilan almashtiramiz va integralda $t = -s$ almashtirish qilamiz, natijada

$$\varphi(-q) = \frac{1}{2\pi} \int_{T^2} v(-q+t) f^+(t) dt \quad (5.2)$$

tenglikni olamiz. Nihoyat, $v(q-t) = v(-q+t)$ tenglikdan foydalansak, (5.2) dan quyidagi tenglikka kelamiz:

$$\varphi(-q) = \frac{1}{2\pi} \int_{T^2} v(q-t) f^+(t) dt = \varphi(q).$$

Shunday qilib, $Vf^+ \in L_2^+(T^2)$ munosabat ko'rsatildi. Juft funksiyalar ko'paytmasi juft ekanligidan hamda $\varepsilon_k \in L_2^+(T^2)$ munosabatdan

$$H_0(k) f^+(q) = \varepsilon_k(q) f^+(q), \quad H_0(k) f^+ \in L_2^+(T^2)$$

munosabat kelib chiqadi. Shunday qilib $H_0(k)$ operator uchun $L_2^+(T^2)$ qism fazo invariant ekan. Natijada $L_2^+(T^2)$ qism fazoning $H(k) = H_0(k) - V$ uchun ham invariant qism fazo ekanligini olamiz. $H(k)$ operatorning o'z-o'ziga qo'shmaligidan $L_2^+(T^2)$ qism fazoning ortogonal to'ldiruvchisi bo'lgan $L_2^-(T^2)$ qism fazo ham $H(k)$ operator uchun invariant bo'ladi. Lemma isbotlandi.

Ravshanki, $\varphi_n(q) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{inq}$, $n \in \mathbb{Z}$ sistema $L_2(T)$ fazoda ortonormal bazis tashkil qiladi. $L(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ bilan $\varphi_n(q)$, $n \in \mathbb{Z}$ funksiyaga tortilgan bir o'lchamli qism fazoni belgilaymiz. U holda $L_2(T)$ Hilbert fazosi quyidagi to'g'ri integralga yoyiladi

$$L_2(T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \oplus L(n).$$

Bu yoyilmadan quyidagi yoyilma kelib chiqadi:

$$L_2(T^2) = L_2(T) \otimes L_2(T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \oplus \{L(n) \otimes L_2(T)\} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \oplus H^n$$

5.2-lemma. Agar $k_1 = \pi$ bo'lsa, u holda har bir $n \in \mathbb{Z}$ uchun $H^n := L(n) \otimes L_2(T)$ qism fazo $H_0(\pi, k_2)$ operatorning invariant qism fazosi bo'ladi.

Isbot. Agar $k_1 = \pi$ bo'lsa, u holda $\varepsilon_k(q_1, q_2)$ funksiya q_1 o'zgaruvchiga bog'liq bo'lmaydi va

$$\varepsilon_k(q_1, q_2) = 4 - 2 \cos \frac{k_2}{2} \cos q_2 \quad (5.3)$$

tenglik o'rinli. Endi $f(q_1, q_2) = \varphi_n(q_1) f_2(q_2) \in H^n$ elementga $H_0(\pi, k_2)$ operator ta'sirini qaraymiz:

$$H_0(\pi, k_2) \varphi_n(q_1) f_2(q_2) = \varphi_n(q_1) \cdot (4 - 2 \cos \frac{k_2}{2} \cos q_2) \cdot f_2(q_2) \in L(n) \otimes L_2(T).$$

Shunday qilib,

$$H^n := L(n) \otimes L_2(T)$$

qism fazo $H_0(\pi, k_2)$ operatorning invariant qism fazosi bo'ladi.

Endi $H^n := L(n) \otimes L_2(T)$ qism fazoni v uchun invariant qism fazo ekanligini ko'rsatamiz. Endi $f(q_1, q_2) = \varphi_n(q_1) f_2(q_2) \in H^n$ elementga v operator ta'sirini qaraymiz:

$$(Vf)(q_1, q_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{T^2} v^{\frac{1}{2}}(q_1 - s_1, q_2 - s_2) \varphi_n(s_1) f_2(s_2) ds_1 ds_2.$$

Bu tenglikdan hamda $\{\varphi_n(s_1) \varphi_m(s_2)\}_{n,m \in \mathbb{Z}}$ ortonormal bazis elementlari v ning xos funksiyalari ekanligidan quyidagiga kalamiz:

$$(Vf)(q_1, q_2) = \varphi_n(q_1) (V_n f_2)(q_2) \quad (5.4)$$

Bu yerda

$$(V_n f_2)(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_T v_n(q - s) f_2(s) ds, \quad (5.5)$$

$$v_n(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{v}(n, m) \exp \{imq\}. \quad (5.6)$$

Bu yerdan $H^n = L(n) \otimes L_2(T)$ qism fazo v operatorga nisbatan invariant ekanligi kelib chiqadi. Natijada $H^n = L(n) \otimes L_2(T)$ qism fazoning ayirma operator $H(\pi, k_2) = H_0(\pi, k_2) - V$ uchun ham invariant ekanligi kelib chiqadi. 5.2-lemma isbot bo'ldi.

$H(\pi, k_2)$ operatorning H^n qism fazodagi qismi quyidagicha tasvirlanadi

$$H(\pi, k_2)|_n = I \otimes H^{(n)}(k_2), \quad H^{(n)}(k_2) = H_0(k_2) - V_n \quad (5.7)$$

Bu yerda $H_0(k_2)$ va V_n operatorlar $L_2(T)$ fazoni $L_2(T)$ fazoga akslantiruvchi operator sifatida quyidagicha aniqlanadi:

$$(H_0(k_2)f)(q) = (4 - 2 \cos \frac{k_2}{2} \cos q) f(q), \quad (V_n f)(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_T v_n(q-s) f(s) ds.$$

Bu yerda v_n -- integral operatorning yadrosi quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$v_n(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{v}(n, m) \exp \{imq\}. \quad (5.8)$$

5.1-shart. Endi $\hat{v}(n, m)$ potensialni $|m| \geq 2$ da nol va $\hat{v}(n, 0) > \hat{v}(n, 1) = \hat{v}(n, -1)$ deb faraz qilamiz.

Natijada (5.7) tenglik bilan aniqlanuvchi $H^{(n)}(k_2) = H_0(k_2) - V_n$ operator $L_2(T)$ fazoda quyidagicha aniqlanadi:

$$(H_0(k_2) - V_n)f(q) = (4 - 2 \cos \frac{k_2}{2} \cos q) f(q) - \frac{1}{2\pi} \int_T [\hat{v}(n, 0) + 2\hat{v}(n, 1) \cos(q-s)] f(s) ds. \quad (5.9)$$

Agar $k_1 = k_2 = \pi$ bo'lsa, $H(\pi, \pi)$ operator $4 - \hat{v}(n, m)$, $n, m \in \mathbb{Z}$ ko'rinishdagi xos qiymatlarga ega bo'ladi. $H^{(n)}(\pi - 2\beta) = H_0(\pi - 2\beta) - V_n$ operatorni $H(\pi) - 2 \sin \beta W$ ko'rinishda yozib olamiz. Bu yerda $H(\pi) = H_0(\pi) - V_n$ qo'zg'almas operator, $(Wf)(q) = \cos q f(q)$, $f \in L_2(T)$ nokompakt qo'zg'atuvchi operator.

6-§. Shryodinger operatori uchun nokompakt qo'zg'alishlar

Bizning asosiy maqsadimiz $H(\pi, \pi)$ operator xos qiymatlarining kvaziimpuls k_1, k_2 ning π nuqta atrofida kichik qo'zg'algandagi chetlanishlarini tekshirishdan iborat, ya'ni $k_1 = \pi, k_2 = \pi - 2\beta$ ($k_1 = \pi - 2\beta, k_2 = \pi$), $\beta \in R$ bo'lganda $H(k)$ operator xos qiymatlarini "qo'zg'almas" $H(\pi, \pi)$ operator xos qiymatlaridan qanchalik chetlanishini tekshirishdan iborat. Bu paragrafda potentsiallar 5.1-shartni qanoatlantiradi deb faraz qilamiz.

Beshinchi paragrafda $H(\pi, k_2)$ operatorning xos qiymatlarini tekshirish masalasi $H(\pi, k_2)$ operatorning H^n qism fazodagi ((5.7) ga qarang) qismini $H^{(n)}(k_2) = H_0(k_2) - V_n$ ya'ni (5.9) formula bilan aniqlanuvchi $H^{(n)}(k_2) = H_0(k_2) - V_n$ operatorning xos qiymatlarini o'rganish masalasiga keltirildi. Bu operator $H_0(\pi - 2\beta) - V_n = H(\pi) - \sin \beta W$ ni o'zimizga qulay shaklda yozib olamiz:

$$(H(\pi)f)(q) = 4f(q) - (V_n f)(q) \quad (6.1)$$

qo'zg'almas operator,

$$(Wf)(q) = \cos q f(q), \quad f \in L_2(T) \quad (6.2)$$

nokompakt qo'zg'atuvchi operator.

6.1-lemma. Qo'zg'almas operator $H(\pi)$ ning 3 ta xos qiymati bor: bular $z_0 = 4 - \hat{v}(n, 0)$ oddiy xos qiymat, $z_1 = 4 - \hat{v}(n, 1)$ ikki karrali xos qiymat $z_\infty = 4$ cheksiz karrali xos qiymat.

Isbot. 4.2-teorema isbotidan kelib chiqadiki V_n operatorning xos qiymatlari $z_0 = 4 - \hat{v}(n, 0)$, $z_1 = 4 - \hat{v}(n, 1)$ va $z_\infty = 4$ lar bo'ladi. $z_0 = 4 - \hat{v}(n, 0)$ oddiy xos qiymat bo'lib, unga

$$\varphi_0^+(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

xos funksiya mos keladi, $z_1 = 4 - \hat{v}(n, 1)$ ikki karrali xos qiymat bo'lib, unga

$$\varphi_1^+(p) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos p, \quad \varphi_1^-(p) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin p$$

xos funksiyalar mos keladi, $z_\infty = 4$ cheksiz karrali xos qiymat bo'lib, unga

$$\varphi_n^+(p) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos np, \quad \varphi_n^-(p) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin np, \quad n \geq 2$$

cheksiz ko'p xos funksiyalar mos keladi. Endi $H(\pi)$ ni $H(\pi) = 4I - V_n$

ko‘rinishda yozib 6.1-lemmaning isbotiga ega bo‘lamiz.

Qo‘zg‘alishlar nazariyasining asosiy teoremlaridan biri bo‘lgan Kato-Rellix teoremasini keltiramiz, qaysikim keyinchalik biz bu teoremadan foydalanamiz.

6.1-teorema (Kato-Rellix [20, 27]). Faraz qilaylik, z_0 soni B operatorning yakkaolangan oddiy xos qiymati bo‘lsin. U holda yetarlicha kichik $\beta \in \mathbb{R}$ lar uchun $T(\beta) = B - \beta W$ operator yagona oddiy $z_0(\beta)$ xos qiymatga ega bo‘ladi. Bu xos qiymat $U_\delta(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}$ atrofda yotadi va $\beta = 0$ nuqtaning atrofida analitik. $z_0(\beta)$ xos qiymat $\beta = 0$ nuqtaning atrofida quyidagicha darajali qatorga yoyiladi

$$z_0(\beta) = z_0 - \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \beta^n}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \beta^n} = z_0 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \beta^n. \quad (6.3)$$

Agar $T(\beta)$ o‘z-o‘ziga qo‘shma operator bo‘lsa, u holda Reley-Shryodinger koefitsiyentlari deb ataluvchi a_n va b_n lar quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi

$$a_n = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\varepsilon} (\varphi_0, [W(B-zI)^{-1}]^n \varphi_0) dz, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6.4)$$

$$b_n = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\varepsilon} (\varphi_0, (B-zI)^{-1} [W(B-zI)^{-1}]^n \varphi_0) dz, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6.5)$$

Bu yerda $\varepsilon > 0$ soni shunday tanlanganki $|z - z_0| < \varepsilon$ doira o‘z ichiga $T(\beta)$ operatorning yagona $z_0(\beta)$ xos qiymatini oladi. φ_0 esa B operatorning z_0 xos qiymatiga mos keluvchi normalangan (normasi birga teng) xos vektori.

6.2-lemma. $H(\pi)$ va W operator uchun quyidagi tengliklar o‘rinli:

$$(H(\pi) - zI)^{-1} \varphi_m^\pm = \frac{\varphi_m^\pm}{z_m - z}, \quad (6.6)$$

$$W\varphi_0^+ = \varphi_1^+ + \varphi_1^-, \quad W_1(\varphi_1^+ + \varphi_1^-) = 2\varphi_0^+ + \varphi_2^+ + \varphi_2^-, \quad (6.7)$$

Isbot. $H(\pi)\varphi_m^\pm = z_m\varphi_m^\pm$ tenglikdan (6.6) tenglikka ega bo'lamiz. (6.7) tenglik esa W operatorning aniqlanishidan kelib chiqadi.

6.2-teorema. Har bir $n \in \mathbb{Z}$ uchun shunday $\delta = \delta_n > 0$ mavjudki, barcha $\beta \in (-\delta, \delta)$ larda $H_0(\pi - 2\beta) - V_n = H(\pi) - \sin \beta W$ operatorning $z_0 = 4 - \hat{v}(n, 0)$ atrofida yagona $z_n(\beta)$ oddiy xos qiymati mavjud bo'lib, uning uchun quyidagi asimptotik formula o'rinli:

$$z_n(\beta) = 4 - \hat{v}(n, 0) + \frac{2}{\hat{v}(n, 0) - \hat{v}(n, 1)} \beta^2 + O(\beta^4), \quad \beta \rightarrow 0.$$

Isbot. Kato-Rellix teoremasiga ko'ra $z_0(\beta)$ xos qiymat uchun

$$z_0(\beta) = z_0 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \beta^n$$

ni yozishimiz mumkin. Biz $z_0(\beta)$ xos qiymatni β^2 aniqlikda hisoblaymiz.

Buning uchun Reley-Shryodinger qatorining a_1, a_2, b_1 koefitsiyentlarini topish yetarli, chunki

$$c_1 = a_1, \quad c_2 = a_2 - a_1 b_1. \quad (6.8)$$

a_n va b_n koefitsiyentlarni topish uchun $(\varphi_0, [W(H(\pi) - z)^{-1}]^n \varphi_0^+)$ skalyar

ko'paytmani hisoblashimiz kerak. (6.6) va (6.7) tengliklardan quyidagi tenglikni olamiz

$$[W(H(\pi) - zI)^{-1}]^{2n-1} \varphi_0^+ = d_1(z)(\varphi_1^+ + \varphi_1^-) + d_2(z)(\varphi_2^+ + \varphi_2^-) + \dots + d_{2n-1}(z)(\varphi_{2n-1}^+ + \varphi_{2n-1}^-), \quad n \in \mathbb{N}.$$

$(\varphi_0^+, \varphi_n^\pm) = 0, \quad n \in \mathbb{N}$ tengliklardan

$$(\varphi_0^+, [W(H(\pi) - zI)^{-1}]^{2n-1} \varphi_0^+) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(6.4) ga asosan ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ uchun $a_{2n-1} = 0$ kelib chiqadi.

$$(\varphi_0^+, (H(\pi) - zI)^{-1} [W(H(\pi) - zI)^{-1}]^{2n-1} \varphi_0^+) = \frac{1}{z_0 - z} (\varphi_0^+, [W(H(\pi) - zI)^{-1}]^{2n-1} \varphi_0^+) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

tenglikdan esa $b_{2n-1} = 0$ ni olamiz. Demak ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ uchun $c_{2n-1} = 0$ ekan

Murakkab bo'lmagan hisoblashlar ko'rsatadiki,

$$(\varphi_0^+, [W(H(\pi) - zI)^{-1}]^2 \varphi_0^+) = \frac{2}{(z_0 - z)(z_1 - z)}.$$

Bu tenglikni ikkala tomonini $(-2\pi)^{-1}$ ga ko'paytiramiz va $|z - z_0| = \varepsilon$ aylana bo'yicha integrallaymiz, u holda $a_2 = \frac{2}{1-v}$ kelib chiqadi. (6.8) tengliklardan $c_1 = 0$, $c_2 = a_2$ tengliklar kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Bu yerda shuni ta'kidlash kerakki, $z_n(\beta)$ xos qiymat β ning juft funksiyasi bo'ladi.

6.3-teorema. *Har bir $n \in \mathbb{Z}$ uchun shunday $\delta = \delta_n > 0$ mavjudki, barcha $\beta \in (-\delta, \delta)$ larda $H(\pi) - \sin \beta W$ operatorning $z_1 = 4 - \hat{v}(n,1)$ atrofida rosa 2 ta $z_1^\pm(\beta)$ oddiy xos qiymalarti mavjud bo'lib, uning uchun quyidagi asimptotik formula o'rinli:*

$$z_1^\pm(\beta) = 4 - \hat{v}(n,1) - c_2^\pm \beta^2 + O(\beta^4), \quad \beta \rightarrow 0.$$

Xulosa

Ushbu ishda panjaradagi ikki zarrachali sistema Hamiltonianining koordinata va impuls fazolardagi tasvirlari keltirilgan. Ikki zarrachali sistema Hamiltoniani H ning «siljitish» gruppasi $U_s, s \in Z^\nu$ lar bilan o‘rin almashinuvchi ekanligi isbotlanadi.

Ikki zarrachali Shryodinger operatori $H(k)$ uzluksiz spektri kengligi $w(k)$ ning sistema to‘la kvaziimpulsi $k \in T^\nu$ ga bog‘liqligi tekshirilgan. Uzluksiz spektr kengligi $w(k)$ va uzluksiz spektrning $e^j, j \in \{1, 2, \dots, \nu\}$ yo‘nalish bo‘yicha kengligi $w_j(k^{(j)})$ lar orasida $w(k) = w_1(k^{(1)}) + w_2(k^{(2)}) + \dots + w_\nu(k^{(\nu)})$ tenglik isbotlangan. Uzluksiz spektr kengligi $w(k)$ va yo‘nalish bo‘yicha kenglik $w_j(k^{(j)})$ larning $k^{(i)}, i = 1, 2, 3$ koordinatalar bo‘yicha $[0, \pi]$ kesmada kamayuvchi ekanligi isbotlangan. Erkin operator $H_0(k)$ ning musbatligi ko‘rsatilib uning spektri $[m(k), M(k)]$ kesmadan iboratligi isbotlangan. Zarrachalar o‘zaro ta‘sirini ifodalovchi V operatorning musbatligi ko‘rsatilib, uning barcha xos qiymatlari va ularga mos xos fuksiyalar aniq topilgan. Bir zarrachali H_1 operatori va ikki zarrachali Shryodinger operatorlari $H(k)$ orasidagi bog‘lanishlar ochib berilgan.

Ikki zarrachali Shryodinger operatori $H(k)$ ning xos qiymatlari o‘rganilgan. Shryodinger operatori $H(k)$ ning uzluksiz spektridan tashqarida yotuvchi xos qiymatlarini o‘rganish o‘z-o‘ziga qo‘shma, kompakt $G(k, z)$ operatorning qo‘zg‘almas nuqtalarini topish masalasiga keltirilgan. Panjaradagi ikki zarrachali Shryodinger operatori $H(k)$ uchun Birman-Shvinger prinsipi keltirililgan. Agar $k \in (-\pi, \pi)^3$ bo‘lib, $\tilde{v}$ potensial 3.1-shartni qanoatlantirganda $H(k)$ operatorning xos qiymatlari soni uchun yuqoridan baho olingan. Agar $k^{(j)} = \pi$ bo‘lsa, u holda $H(k)$ operatorning xos qiymatlari soni uchun quyidan baho olish mumkin ekan.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Абдуллаев Ж.И., Теория возмущения для двухчастичного оператора Шредингера на одномерной решетке. Теоретическая и математическая физика, Т. 145, № 2, 2005.
2. Абдуллаев Ж.И., Собственные значения двухчастичного оператора Шредингера на двумерной решетке, Узбекский Математический Журнал, № 1, 2005. С.3-11.
3. Абдуллаев Ж.И., Монотонность собственных значений двухчастичного оператора Шредингера на решетке, ДАН РУз, 2005, № 2, с.11-16.
4. Абдуллаев Ж.И. Связанные состояния системы двух фермионов на одномерной решетке. Теоретическая и математическая физика. 2006 Т. 147, № 1. 36-47.
5. Абдуллаев Ж.И. Асимптотика собственных значений двухчастичного оператора Шредингера на решетке. Труды международной конференции «Современные проблемы математической физики и информационной технологий». Тошкент 2005. Т.1, С.18-23.
6. Абдуллаев Ж.И. Теория возмущений для двухчастичного оператора Шрёдингера на решетке. Теоретическая и математическая физика. 2005. Т. 145, № 1, 212-220.
7. Abdullayev J.I., Lakaev S. N. On the spectral Properties of the Matrix-valued Friedrichs Model. Manyparticles Hamiltonians, spectrum and scattering. Advances in Soviet Mathematics. American Mathematical Society. 1991. V. 5. P. 1-37.
8. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. –М.: Наука, 1966.
9. S.Albeverio, S.N.Lakaev, Abdullaev J.I. Estimates on the number of eigenvalues of two-particle discrete Schrödinger operators, arXiv: math-ph/0501036, v 1, 12 Jan 2005.

10. P P.A. Faria da Viega, L.Ioriatti and M.O'Carrol. Energy-momentum spectrum of some two-particle lattice Schrödinger Hamiltonian. Phys. Rev. E(3) 66, 016130, 9 pp. (2002).
11. Friedrichs K.O. Über die Spectralzerlegung einer Integral operators. Math. Ann. 1938. V.115. P.249-272.
12. Лакаев С.Н. Некоторые спектральные свойства обобщенной модели Фридрихса. Труды семинара им. И.Г.Петровского. 1986. Вып. II. С. 210-138.
13. Ладыженская О.А., Фаддеев Л.Д., К теории возмущений непрерывного спектра. ДАН СССР. 1962. Т.145, № 2, С.301-304.
14. Фаддеев Л.Д. О модели Фридрихса в теории возмущений непрерывного спектра. В книге: Труды математического института АН СССР. Т.73. М.: Наука. 1964. С.292-313.
15. Лакаев С.Н. О дискретном спектре обобщенной модели Фридрихса, ДАН. Уз ССР. 1985. №.4. с.9-10.
16. Икромов И.А., Шарипов Ф. О дискретном спектре неаналитической матричнозначной модели Фридрихса. Функциональный анализ и его приложения, 1998, Т.32, № 1, С.63-65.
17. Муминов М.Э. О спектре несамосопряженного оператора Фридрихса. Кандидатская диссертация (01.01.01- математический анализ). Ташкент - 1997.
18. Абдуллаев Ж.И. О кратности собственных значений обобщенной модели Фридрихса. Узбекский математический журнал. 1996, №1, 3-10.
19. Абдуллаев Ж.И., Икромов И.А., Лакаев С.Н. О вложенных собственных значений и резонансах обобщенной модели Фридрихса. Теоретическая и математическая физика. 1995. Т. 103, №1. С. 54-62.
20. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир. 1972.
21. Фаддеев Л.Д. О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора Шредингера. Вестник ЛГУ. № 7. Вып. 2. (1957). 147-166.

22. Бирман М.Ш. О числе собственных значений в задаче квантового рассеяния. Вестник ЛГУ. № 13. Вып.3. 1961. 163-166.
23. Абдуллаев Ж.И., Лакаев С.Н. Асимптотика дискретного спектра разностного трехчастичного оператора Шредингера на решетке. Теоретическая и математическая физика. 2003, Вып. 136, №.2, 231-245.
24. J.I.Abdullayev, R.N.G'anixojayev, M.H.Shermatov, O.I.Egamberdiyev. Funksional analiz va integral tenglamalar. Darslik. Toshkent, Yangi asr avlodi. 2013. 460.
25. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва, Наука, 1989. 624.
26. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.1, Функциональный анализ, Москва, Наука, 1977.
27. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.4, Анализ операторов, Москва, Наука, 1982.
28. Абдуллаев Ж.И., Лакаев С.Н. Спектральные свойства разностного трехчастичного оператора Шредингера. Функциональный анализ и его приложения. 1999. Т.33, №.2. С.82-86.
29. Абдуллаев Ж.И., Файзиев М.Ш., Шотемиров Й.С. Инвариантные подпространства двухчастичного оператора Шредингера на решетке, Узбекский Математический Журнал, № 3, 2009. С.3-10.
30. Ф. Рисс, Б. Сёкефальви-Надь. Лекции по функциональному анализу. Москва, Мир. 1979.
31. Халхужаев А.М. О числе собственных значений двухчастичного оператора Шредингера на решетке с взаимодействием на соседних узлах. УЗМЖ, 2000, № 3, с. 32-39.
32. Саматов С.М. Собственные значения и резонансы гамильтониана системы двух произвольных частиц на решетке. Тезисы докладов конференции "Некорректные и неклассические задачи математической физики и анализа", Самарканд-2000. с. 76.
33. Муминов З. И. О числе собственных значений двухчастичного

оператора Шредингера. ДАН РУз, 2003, № 1, с. 7-10.

34. С.Н.Лакаев, С.М.Саматов, О конечности дискретного спектра гамильтониана системы трех произвольных частиц на решетке. ТМФ, 2001, Т 129, № 3, 415-431.
35. С.Н.Лакаев, С.М.Саматов, Условия конечности дискретного спектра гамильтониана системы трех произвольных частиц на решетке. УМН, Т.57, (2002) вып.1, 155-156.
36. С.М.Саматов, О существенном спектре гамильтониана системы трех произвольных частиц на решетке. УзМЖ, (2002), № 1, 54-61.
37. С.М.Саматов, Собственные значения и резонансы гамильтониана системы двух произвольных частиц на решетке. Тезисы докладов конференции "Некорректные и неклассические задачи математической физики и анализа", Самарканд-2000, с.76.
38. С.М.Саматов, Спектр трехчастичного дискретного оператора Шредингера Тезисы докладов Всероссийской конференции "Актуальные проблемы прикладной математики и механики", посвященной 70-летию со дня рождения академика А.Ф.Сидорова, февраль 2003, Екатеринбург.