

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM
VAZIRLIGI**

ALISHER NAVOIY NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

**MEXANIKA-MATEMATIKA
FAKULTETI**

«MATEMATIK MODELLSHTIRISH» KAFEDRASI

**«ELEMENTAR FUNKSIYALARNI TEKSHIRISHNING ALGORITMLARI
VA DASTURIY VOSITALARI» mavzusidagi**

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Bajardi: «Amaliy matematika va
informatika» ta'lim yo'nalishi
bitiruvchi 4 kurs talabasi

**ERGASHEVA FARANGIZ
AVAZBOYEVNA.**

Ilmiy rahbar:
dots. BOZOROV I.N.

Bitiruv malakaviy ishi kafedradan dastlabki himoyadan o'tdi.

_____ sonli bayonnomasi «_____» _____ 2013 yil.

SAMARQAND – 2013 y.

MUNDARIJA

Kirish.....	3
I Bob. Funksiyalarni tekshirishga oid asosiy tushunchalar.....	6
1.1. Funksiya tushunchasi va uning berilish usullari.....	6
1.2. Ba'zi elementar funksiyalar.....	10
1.3. Funksiya limiti, uzluksizligi va uzilish turlari	12
1.4. Funksiya hosilasi va uning ba'zi tatbiqlari.....	16
1.5. Funksiyalarni tekshirish. Grafiklarni yasash.....	22
II Bob. Funksiyalarni tekshirishning algoritmlari va dasturiy vositalari.....	23
2.1. Funksiyalarni tekshirishda Maple tizimining ba'zi buyruqlari va ularning qo'llanilishi haqida ma'lumotlar.....	23
2.2. Funksiyalarni tekshirish va ularning grafiklarini yasash algoritmlari va dasturiy vositalari.....	27
Xulosa.....	39
Foydalanilgan adabiyotlar.....	41
Ilovalar	

Kirish

Masalaning qo'yilishi. Ba'zi elementar funksiyalarning xossalari: aniqlanish sohasini topish, berilgan funktsiyani uzluksizlikka va juft yoki toqlikka tekshirish, ekstremumlari, o'sish va kamayish oraliqlari, qavariqlik va botiqlik oraliqlari, asimptotalarini (agar mavjud bo'lsa), egilish nuqtalarini aniqlash, koordinata o'qlarini kesib o'tish nuqtalarini topish hamda ularning grafiklarini yasash algoritmlari hamda dasuriy vositalarini ishlab chiqish.

Mavzuning dolzarbligi. Tabiatda ko'pgina, jumladan fizika, kimyoviy, biologik, iqtisodiy va boshqa jarayonlar va hodisalarni kuzatishda ko'pincha funksiyalarni tahlil qilishga to'g'ri keladi. O'z navbatida kuzatilayotgan hodisa jarayonining tabiatiga qarab, ba'zan bu funksiyalarning o'zgarishini kuzatish maqsadida, shuningdek, maktab, akademik litsey va kasb hunar kollejlari elementar funksiyalarning xossalari o'rganishga va ularning grafiklarini yasashga to'g'ri keladi.

Shu sababli ushbu ishda har xil funksiyalarni tekshirish va ularning grafiklarini yasash algoritmlari hamda dasuriy vositalarini ishlab chiqish masalalari qaratiladi.

Ishning maqsad va vazifalari. Maple tizimida elementar funksiyalarni tekshirishning algoritmlari va dasuriy vositalarini ishlab chiqishdan iborat.

Ilmiy-tatqiqot usullari. Ushbu bitiruv malakaviy ishida asosan, Maple tizimida uzluksiz va uzilishga ega bo'lgan har xil funksiyalarning grafiklarini yasash usulidan foydalanildi.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi. Bitiruv malakaviy ishida olingan natijalar referativ xarakterga ega.

Tadqiqot predmeti va ob'ekti. Tadqiqotning predmeti matematik tahlil, ob'ekti elementar funksiyalardan iborat.

Tadqiqotning ilmiy va amaliy ahamiyati. Bitiruv malakaviy ishida olingan natijalar va unda qo'llanilgan usullardan turli funksiyalarni tekshirish,

ularning grafiklarini yasashda hamda elementar matematikadagi yuqori darajali tenglamalarni yechishda foydalanish mumkin.

Ishning tuzilishi. Ushbu ish kirish, ikki bob, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati va ilovalardan iborat.

I bob 5 ta paragrafdan iborat bo'lib, unda olingan natijalarni bayon qilishda zarur bo'lgan asosiy tushunchalar: funksiya tushunchasi va uning berilish usullari, funksiya limiti, uzluksizligi va uzilish turlari, funksiya hosilasi va uning ba'zi tatbiqlari ta'rif va tasdiqlar, shuningdek funksiyalarni tekshirish hamda ularning grafiklarini yasash algoritmi (umumiy sxemasi) keltirilgan.

II bobda Maple tizimida funksiyalarni tekshirishda zarur bo'ladigan asosiy tushunchalar: Maple tizimida standart funksiyalarning yozilishi, Maple tizimining ba'zi buyruqlari va ularning qo'llanilishi haqida qisqacha ma'lumotlar keltirilib, unda turli funksiyalarni tekshirish va ularning grafiklarini yasash algoritmlari va dasturiy vositalari bir necha misollarda namoyon qilingan.

Olingan natijalarning qisqacha mazmuni. Bitiruv malakaviy ishida har xil elementar funksiyalarning xossalari (aniqlanish sohasini topish, berilgan funksiyaning uzluksizlikka va juft yoki toqlikka tekshirish, ekstremumlari, o'sish va kamayish oraliqlari, qavariqlik va botiqlik oraliqlari, asimptotalarini (agar mavjud bo'lsa), egilish nuqtalarini aniqlash, koordinata o'qlarini kesib o'tish nuqtalarini topish hamda ularning grafiklarini yasash) o'rganishga oid bir necha misollar qaralib, ularning algoritmlari hamda dasturiy vositalarini ishlab chiqirilgan.

Quyida olingan asosiy natijalarni qisqacha keltirib o'tamiz:

2.1-misol. $f(x) = x^3 - 1,5x^2 - 6x + 1$ darajali funksiyaning tekshirish.

- 1.1. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f) = (-\infty, +\infty)$ to'plamdan iborat, ya'ni $R = (-\infty, +\infty)$ da uzluksiz;
- 1.2. Berilgan funksiya na juft va na toq funksiya;
- 1.3. Qaralayotgan funksiyaning ekstremumlari – $\{-9; 4,5\}$;
- 1.4. Berilgan funksiya $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ oraliqlarda o'suvchi, $(1, 2)$ oraliqda esa kamayuvchi;

- 1.5. Bu funksiya $(-\infty; 0,5)$ oraliqda botiq, $(0,5; +\infty)$ oraliqda qavariq va $x=0,5$ nuqta esa f funksiya grafigining egilish nuqtasi bo'ladi;
- 1.6. Bu funksiya grafigi asimptotaga ega emas, bundan esa uning qiymatlar sohasi $R(f) = (-\infty, +\infty)$ to'plamdan iborat;
- 1.7. Ushbu funksiya grafigi ilovalarda keltirilgan (qar. 2.1-chizma).

2.2-misol. $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ ratsional funksiyaning tekshiring.

- 2.1. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $R \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ to'plamdan iborat;
- 2.2. Berilgan funksiya na juft va na toq funksiya;
- 2.3. Qaralayotgan funksiyaning ekstremumlari $\{-1; 3\}$;
- 2.4. Berilgan funksiya $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ da o'suvchi, $(0, 1) \cup (1, 2)$ da esa kamayuvchi;
- 2.5. Bu funksiya $(-\infty; 1)$ oraliqda botiq, $(1; +\infty)$ oraliqda qavariq bo'ladi;
- 2.6. Bu funksiya grafigining asimptotasi $y = x$ to'g'ri chiziqdan iborat;
- 2.7. Ushbu funksiya grafigi ilovalarda keltirilgan (qar. 2.2-chizma).

2.3-misol. $g(x) = (3 - x)e^{x-2}$ ko'rsatkichli funksiyaning tekshiring.

- 3.1. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $D(g) = (-\infty, +\infty)$ to'plamdan iborat, ya'ni $R = (-\infty, +\infty)$ da uzluksiz;
- 3.2. Berilgan funksiya na juft va na toq funksiya;
- 3.3. Qaralayotgan funksiyaning ekstremumlari $\{1\}$;
- 3.4. Berilgan funksiya $(-\infty, 2)$ oraliqlarda o'suvchi, $(2, +\infty)$ oraliqda esa kamayuvchi;
- 3.5. Bu funksiya $(-\infty; 1)$ oraliqda qavariq, $(1; +\infty)$ oraliqda botiq va $x=1$ nuqta esa g funksiya grafigining egilish nuqtasi bo'ladi;
- 3.6. Bu funksiya grafigi asimptotasi $x \rightarrow \infty$ da $y = 0$;
- 3.7. Ushbu funksiya grafigi ilovalarda keltirilgan (qar. 2.3-chizma).

I Bob. Funksiyalarni tekshirishga oid asosiy tushunchalar

Ushbu bobda funksiyalarni tekshirish uchun muhim bo'lgan asosiy tushunchalar: funksiya tushunchasi va uning berilish usullari, funksiya limiti, uzluksizligi va uzilish turlari, funksiya hosilasi va uning ba'zi tatbiqlari ta'rif va tasdiqlar, shuningdek funksiyalarni tekshirish hamda ularning grafiklarini yasash algoritmi (umumiy sxemasi) keltirilgan.

1.1. Funksiya tushunchasi va uning berilish usullari

Funksiya – matematikaning asosiy tushunchalaridan biridir. Tabiatda, texnikada va fanning turli sohalarida uchraydigan ko'pgina jarayonlar funksiya tushunchasi bilan bog'liq (bu jarayonlarning matematik modellari funksiyalar bilan ifodalanadi). Binobarin, bu jarayonlar bilan bog'liq masalalarni o'rganish va yechish funksiyalarni tahlil qilishni taqozo etadi.

O'zgaruvchi va o'zgarmas miqdorlar. Biz tabiatni kuzatish va o'rganish jarayonida ko'pincha yuza, hajm, vaqt, temperatura, massa va shu kabi miqdorlarga duch kelamiz. Ma'lum sharoitda bu miqdorlar ba'zan turli qiymatlarni qabul qilsa, ba'zan bir xil qiymatlarga teng bo'ladi. Matematikada bir necha o'zgaruvchi miqdorlar hamda bu o'zgaruvchi miqdorlar orasidagi bog'lanishlar o'rganiladi. Masalan, doira radiusi r ham, uning yuzasi ham o'zgaruvchi miqdor bo'lib, $S = \pi r^2$ munosabat bu o'zgaruvchilar S orasidagi bog'lanishni ifodalaydi. Bu yerda r – erkli ravishda o'zgaradigan o'zgaruvchi bo'lib, S esa unga bog'liq, erksiz o'zgaruvchidir. Shunday qilib, ikki xil: erkli va erksiz o'zgaruvchilar bo'lar ekan.

Funksiya ta'rifi. X va Y lar haqiqiy sonlarning biror to'plamlari ($X \subset R, Y \subset R$) bo'lib, x va y o'zgaruvchilar mos ravishda shu to'plamda o'zgarsin: $x \in X, y \in Y$.

Ta’rif 1.1. Agar X to’plamdagi har bir x songa biror f qoida bilan Y to’plamdan yagona y son mos qo’yilgan bo’lsa, X to’plamda *funksiya berilgan* deyiladi.

Ba’zan X to’plamda berilgan deyish o’rniga funksiya to’plamda aniqlangan deb ham yuritiladi. Funksiya

$$f : x \rightarrow y \text{ yoki } y = f(x)$$

kabi belgilanadi.

Bunda X funksiyaning aniqlanish to’plami (sohasi), Y esa funksiyaning *o’zgarish to’plami* (sohasi) deb ataladi. x erkli o’zgaruvchi yoki argument, y esa *erksiz o’zgaruvchi* yoki x *o’zgaruvchining funksiyasi* deyiladi.

Biz bundan buyon $f : R \rightarrow R$ funksiyaning aniqlanish sohasini $D(f) \subset R$, qiymatlar sohasini esa $E(f) \subset R$ orqali belgilaymiz.

Misol 1.1. f – har bir haqiqiy x songa uning butun qismi $[x]$ ni mos qo’yuvchi qoida bo’lsin. Demak, $f : x \rightarrow [x]$ yoki $y = [x]$ funksiyaga ega bo’lamiz. Bu funksiyaning aniqlanish to’plami $X = R$ o’zgarish to’plami (qiymatlar sohasi) esa, $Y = Z$ bo’ladi.

Funksiyaning berilish usullari. Funksiya ta’rifidagi har bir x ga bitta y ni mos qo’yadigan qoida yoki qonun turli usulda berilishi mumkin. Biz ularni qisqacha qarab o’tamiz.

Ko’pincha x va y orasidagi bog’lanish formulalar yordamida ifodalanadi. Bunda argument x ning har bir qiymatiga mos keladigan y funksiyaning qiymatini x ustida turli amallar – qo’shish, ayirish, ko’paytirish, bo’lish, darajaga ko’tarish, ildiz chiqarish, logariflash va hakoza amallarni bajarish natijasida topiladi. Odatda bunday usul *analitik usulda berilish* deyiladi.

Ba’zi hollarda $x(x \in X)$ va $y(y \in Y)$ o’zgaruvchilar orasidagi bog’lanish formulalar yordamida berilmasdan jadval orqali berilgan bo’lishi mumkin. Masalan, kun davomida havo haroratini kuzatganimizda, t_1 – vaqtda havo harorati T_1 , t_2 – vaqtda havo harorati T_2 va hakoza bo’lsin. Natijada quyidagi jadvalga kelamiz:

<i>Vaqt, t</i>	t_1	t_2	t_3	t_4	$\dots$	t_k
<i>Harorat, T</i>	T_1	T_2	T_3	T_4	$\dots$	T_k

Bu jadval t vaqt bilan harorati T orasidagi funksional bog'lanishni ifodalaydi. bunda t argument, T esa funksiya bo'ladi. Bog'lanishning bunday berilishini jadval usulda berilish deyiladi.

XOY tekisligida shunday L chiziq berilgan bo'lsaki, OX o'qida joylashgan nuqtalardan shu o'qqa o'tkazilgan perpendikulyar, L chiziqni faqat bitta nuqtada kesib o'tsin.

OX o'qidagi bunday nuqtalardan iborat to'plamni X orqali belgilaylik. X to'plamdan ixtiyoriy x ni olib, bu nuqtadan OX o'qiga perpendikulyarlar o'tkazamiz. Bu perpendikulyarlarning L chiziq bilan kesishgan nuqtasining ordinatasini y bilan belgilaymiz va olingan x ga bu yni mos qo'yamiz. Natijada X to'plamdan olingan har bir x ga yuqorida ko'rsatilgan qoidaga ko'ra bitta y mos qo'yilib, funksiya hosil bo'ladi. Bunda x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish L chiziq bilan belgilangan bo'ladi. Odatda f ning bunday berilishi usuli *grafik usulda berilishi* deb ataladi.

Davriy funksiyalar. Aytaylik, f funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan va $T \subset R$ bo'lib, $T \neq 0$ bo'lsin.

Ta'rif 1.2. Agar

$$\begin{aligned} 1) \quad & \forall x \in X \quad da \quad x-T \in X, \quad x+T \in X \\ 2) \quad & f(x+T) = f(x) \end{aligned} \tag{1.1}$$

bo'lsa, $f(x)$ *davriy funksiya*, T soni esa *funksiyaning davri* deyiladi.

Agar f davriy funksiya bo'lib, uning davri T ga ($T \neq 0$) teng bo'lsa, kT ($k=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) ko'rinishdagi sonlar ham shu funksiyaning davri bo'ladi. f funksiyaning musbat davrlari to'plami M deb belgilaylik. Agar

$$T = \inf M$$

ham f funksiyaning davri, yani $T_0 \in M$ bo'lsa, u eng kichik musat davr (asosiy davr) deyiladi. Eng kichik musat davr mavjud bo'lishi ham mumkin, mavjud bo'lmasligi ham mumkin.

Monoton funksiya. Faraz qilaylik, f funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lsin.

Ta'rif 1.3. Agar $\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X$ uchun

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

bo'lsa, f funksiya X to'plamda *o'suvchi*,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

bo'lsa, f funksiya X to'plamda *qat'iy o'suvchi* deyiladi.

Ta'rif 1.4. Agar $\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X$ uchun

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

bo'lsa, f funksiya X to'plamda *kamayuvchi*, $\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X$ uchun

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

bo'lsa, f funksiya X to'plamda *qat'iy kamayuvchi* deyiladi.

O'suvchi ham kamayuvchi ham funksiya *monoton funksiya* deb ataladi.

Teskari funksiya. Bizga $X \subset R$ to'plamni $Y \subset R$ to'plamga akslantiruvchi $y = f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. Faraz qilaylik, $D(f) = X$ va $E(f) = Y$ bo'lsin.

Ta'rif 1.5. Agar har bir $y \in Y$ uchun

$$f(x) = y \tag{1.2}$$

tenglama yagona $x \in D(f)$ yechimga ega bo'lsa, f funksiya *teskarilanuvchan* deyiladi. Agar f teskarilanuvchan funksiya bo'lsa, u holda har bir $y \in E(f)$ ga (1.2) tenglamaning yagona yechimi bo'lgan $x \in D(f)$ ni mos qo'yuvchi akslantirish f ga *teskari funksiya* deyiladi va u f^{-1} kabi belgilanadi, ya'ni $x = f^{-1}(y)$.

Murakkab funksiya. $y = f(x)$ funksiya X to'plamda aniqlangan bo'lib, $z = \varphi(y)$ funksiya o'z navbatida $Y = \{f(x) : x \in X\} \{f : X \rightarrow Y\}$ to'plamda aniqlangan bo'lsin ($\varphi : Y \rightarrow Z$):

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\varphi} Z$$

Natijada X to'plamdan olingan har bir x ga yagona $z \in Z$ son mos qo'yiladi. Bunday holda f va g funksiyalarning *murakkab funksiyasi* berilgan deyiladi va $z = \varphi(f(y))$ kabi belgilanadi.

Juft va toq funksiyalar. $y = f(x)$ funksiya $X (X \subset R)$ to'plamda aniqlangan bo'lsin.

Ta'rif 1.6. Agar $\forall x \in X$ uchun $f(-x) = f(x)$ bo'lsa, f *juft funksiya*, $f(-x) = -f(x)$ bo'lsa, f funksiya *toq funksiya* deb ataladi.

1.2. Ba'zi elementar funksiyalar

Biz ushbu bitiruv malakaviy ishda asosan elementar (uzluksiz) funksiyalar bilan ish ko'ramiz. Shu sababli, ularning ba'zilarini keltirib o'tamiz.

Butun va kasr ratsional funksiyalar. Ushbu

$$y = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

ko'rinishdagi funksiya (bunda $n \in N$ va $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ - o'zgarmas sonlar) *butun ratsional funksiya* deb ataladi. Butun ratsional funksiya *ko'phad* deb ham yuritiladi. Bu ratsional funksiya $R = (-\infty; +\infty)$ da aniqlangan. Xususan, $y = ax + b$ chiziqli funksiya va $y = ax^2 + bx + c$ kvadrat uchhadlar butun ratsional funksiyalardir. Malumki, chiziqli funksiyaning grafigi tekislikda to'g'ri chiziqdan iborat, kvadrat uchhadning grafigi esa paraboladan iborat.

Darajali funksiyalar. Ushbu

$$y = x^k$$

ko'rinishdagi funksiya darajali funksiyalar deb ataladi, bunda ixtiyoriy o'zgarmas haqiqiy son. Darajali funksiyaning aniqlanish sohasi k ga bog'liq. k butun son bo'lganda ratsional funksiya ega bo'lamiz.

Agar k ratsional, masalan $y = \frac{1}{n} > 0$ bo'lsa, n juft bo'lganda $x^k = x^{\frac{1}{n}}$ funksiyaning aniqlanish sohasi $X = [0; +\infty)$, toq bo'lganda esa funksiyaning aniqlanish sohasi $R = (-\infty; +\infty)$ oraliqdan iborat bo'ladi. k irratsional bo'lganda esa $x > 0$ deb olinadi. Darajali funksiyaning grafigi esa $k > 0$ bo'lganda har doim tekislikning $(0;0)$ hamda $(1;1)$ nuqtalaridan o'tadi. Darajali funksiya $y = x^k$ ushbu $(0; +\infty)$ oraliqda $k > 0$ bo'lganda o'suvchi, $k < 0$ bo'lganda esa kamayuvchi bo'ladi.

Ko'rsatkichli funksiya. Ushbu

$$y = a^x$$

ko'rinishdagi funksiya ko'rsatkichli funksiya deb ataladi, bunda $a > 0$ va $a \neq 1$. Ko'rsatkichli funksiyaning aniqlanish sohasi R to'plamdan iborat bo'lib, funksiya qiymatlari esa har doim musbat bo'ladi. Bu funksiyaning grafigi OX o'qidan yuqorida bo'ladi va doim tekislikning $(0;1)$ nuqtasidan o'tadi.

Logarifmik funksiyalar. Ushbu

$$y = \log_a x$$

ko'rinishdagi funksiya logarifmik funksiya deb ataladi, bunda $a > 0$ va $a \neq 1$. Logarifmik funksiya $X = (0; +\infty)$ intervalda aniqlangan. Bu funksiyaning grafigi OY o'qining o'ng tomonida joylashgan va doim tekislikning $(1;0)$ nuqtasidan o'tadi.

Natural argumentli funksiyalar (Sonli ketma-ketliklar). Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ to'plamda aniqlangan bo'lsin. Bu holda funksiyaning argumenti natural son bo'ladi. Shuning uchun funksiyaning natural argumentli funksiya deyiladi va $f(n)$ kabi yoziladi.

Bu funksiyaning qiymatlari

$$x_n = f(n), \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

dan tashkil topgan ushbu

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \quad (1.3)$$

to'plam sonlar ketma-ketligi deyiladi, to'plamning elementlari esa ketma-ketlikning *hadlari* deyiladi.

Ta'rif 1.7. Agar

$$\exists M \in R, \forall n \in N : x_n \geq m$$

tengsizlik bajarilsa, (1.3) ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan,

$$\exists M \in R, \forall n \in N : x_n \leq m$$

tengsizlik bajarilsa, (1.3) ketma-ketlik *quyidan chegaralangan* deyiladi.

Ta'rif 1.8. Agar (1.3) ketma-ketlik ham quyidan ham yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u *chegaralangan* ketma-ketlik deyiladi.

Ta'rif 1.9. Agar $\forall n \in N$ uchun

$$x_n \geq x_{n-1}$$

tengsizlik bajarilsa, (1.3) ketma-ketlik *o'suvchi*,

$$x_n > x_{n-1}$$

tengsizlik bajarilsa, (1.3) ketma-ketlik *qat'iy o'suvchi* deyiladi.

Ta'rif 1.10. Agar $\forall n \in N$ uchun

$$x_n \leq x_{n-1}$$

tengsizlik bajarilsa, (1.3) ketma-ketlik *kamayuvchi*,

$$x_n < x_{n-1}$$

tengsizlik bajarilsa, (1.3) ketma-ketlik *qat'iy kamayuvchi* deyiladi.

O'suvchi va kamayuvchi ketma-ketliklar umumiy nom bilan monoton ketma-ketliklar deyiladi.

1.3. Funksiya limiti, uzluksizligi va uzilish turlari

Funksiyaning limiti (limitga o'tish amali) matematik analizning dastlabki muhim tushunchalaridan biridir.

Funksiyaning limiti nazaryasini dastlab sodda hol sonlar ketma-ketlik uchun o'rganamiz.

Sonli ketma-ketlik limiti. Biror

$$x_n : x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

ketma-ketlik hamda biror $a \in R$ son berilgan bo'lsin.

Ta'rif 1.11. Agar $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham natural son $\forall n_0 \in N$ mavjud bo'lsaki, $n > n_0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha natural sonlar uchun

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, a son x_n ketma-ketlikning limiti deyiladi. Limit uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ yoki $n \rightarrow \infty$ da $x_n \rightarrow a$ belgilashdan foydalaniladi.

Ta'rif 1.12. Agar a nuqtaning ixtiyoriy $\bigcup_\varepsilon(a)$ atrofi olinganida ham x_n ketma-ketlikning biror hadidan keyingi barcha hadlari shu atrofga tegishli bo'lsa, a soni x_n ketma-ketlikning limiti deb ataladi.

Funksiya limiti. $X \subset R$ to'plam berilgan bo'lib, a nuqta uning limit nuqtasi bo'lsin. Bu to'plamda f funksiya aniqlangan bo'lsin. Modomiki, a nuqta X ning limitik nuqtasi ekan, X to'plamning nuqtalaridan a ga intiluvchi turli, $(x_n \in X, x_n \neq a, n = 1, 2, 3, \dots)$ ketma-ketliklar tuzish mumkin: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

Ta'rif 1.11 (Heine). Agar X to'plamning nuqtalaridan tuzilgan, a ga intiluvchi har qanday $x_n (x_n \neq a, n = 1, 2, 3, \dots)$ ketma-ketlik olganimizda ham mos $f(x_n)$ ketma-ketlik hamma vaqt yagona b limitga intilsa, shu b ga f funksiyaning a nuqtadagi limiti deb ataladi. Funksiyaning limiti $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ kabi belgilanadi.

Ta'rif 1.12. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki, argument x ning $0 < |x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b son f funksiyaning a nuqtadagi limiti deb ataladi.

Ta'rif 1.13. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki, argument x ning $0 < |x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $|f(x)| < \varepsilon$

$f(x) > \varepsilon$, $(f(x) > \varepsilon, f(x) < -\varepsilon)$ bo'lsa, f funksiyaning a nuqtadagi limiti ∞ $(+\infty; -\infty)$ deyiladi. Funktsiyani limitga berilgan bu ta'rif Koshi ta'rifi deyiladi.

Chekli limitga ega bo'lgan funksiylar ustida arifmetik amallar. X to'plam berilgan bo'lib, a uning limit nuqtasi bo'lsin. Bu to'plamda f va g funksiylar aniqlangan bo'lsin.

- 1) Agar $x \rightarrow a$ da f va g funksiylar limitga ega bo'lsa, $f \pm g$ funksiya ham limitga ega va

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

tenglik o'rinli.

- 2) Agar $x \rightarrow a$ da f va g funksiylar limitga ega bo'lsa, $f \cdot g$ funksiya ham limitga ega va

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

tenglik o'rinli.

- 3) Agar $x \rightarrow \delta > 0$ a da f va g funksiylar limitga ega bo'lib,

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ bo'lsa, $\frac{f(x)}{g(x)}$ funksiya ham limitga ega va

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

tenglik o'rinli.

Ta'rif 1.14. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki, argument x ning $0 < |x' - a| < \delta, 0 < |x'' - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x' va x'' qiymatlarida

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, f funksiya uchun a nuqtada Koshi sharti bajariladi deyiladi.

Funksiya uzluksizligi. Funksiyaning uzluksizligi matematik analizning muhim tushunchalaridan biri bo'lib, u funksiya tushunchasi bilan bevosita bog'langan.

Funksiyaning nuqtada uzluksizligi. $X \subset R$ to'plamda f aniqlangan bo'lib, $a \in X$ esa X to'plamning limitik nuqtasi bo'lsin.

Ta'rif 1.15. Agar

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

bo'lsa, f funksiya a nuqtada uzluksiz deb ataladi.

Ta'rif 1.16 (Heine). Agar $X \subset R$ to'plamning elementlaridan tuzilgan va a ga intiluvchi har qanday x_n ketma-ketlik olinganda ham funksiya qiymatlaridan tuzilgan mos $f(x_n)$ ketma-ketlik hamma vaqt $f(a)$ ga intilsa, f funksiya a nuqtada uzluksiz deb ataladi.

Ta'rif 1.17 (Koshi). Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki, funksiya argument x ning $|x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, ya'ni

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X \cap \bigcup_{\delta}(a) : |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

bo'lsa, f funksiya a nuqtada uzluksiz deb ataladi.

Koshi ta'rifidagi $|x - a| < \delta$ va $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ tengsizliklar mos ravishda

$$x \in \bigcup_{\delta}(a) \text{ va } f(x) \in \bigcup_{\varepsilon}(f(a))$$

ko'rinishda ham yozish mumkin ekanligini hisobga olsak, atrof tushunchasi yordamida funksiyaning uzluksizligini quyidagicha ta'riflash mumkin.

Ta'rif 1.18. Agar

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, x \in \bigcup_{\delta}(a) \Rightarrow f(x) \in \bigcup_{\varepsilon}(f(a))$$

bo'lsa, f funksiya a nuqtada uzluksiz deyiladi.

Funksiyaning uzilishi. Uzilishning turlari. f funksiya $X \subset R$ to'plamda aniqlangan bo'lib, $a \in X$ nuqtada X to'plam limit nuqtasi bo'lsin.

Ta'rif 1.19. Agar $x \rightarrow a$ da f funksiyaning limiti mavjud, chekli bolib, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq f(a)$ yoki $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ($-\infty; +\infty$) bo'lsa yoki funksiyaning limiti mavjud bo'lmasa, $f(x)$ funksiya a nuqtada uzilishga ega deyiladi.

Endi $x \rightarrow a$ da f funksiyaning limiti mavjud emas deylik. Bu holat, avvalo $x \rightarrow a$ da f funksiyaning o'ng va chap limiti mavjud va chekli bolib, $f(a-0) = f(a+0)$ bo'lganda ro'y beradi. Shu holda funksiya *a nuqtada birinchi tur uzilishga ega* deyiladi va $f(a-0) = f(a+0)$ ayirma funksiyaning a nuqtadagi sakrashi deyiladi. $x \rightarrow a$ da f funksiyaning limiti mavjud bo'lmaydigan boshqa hamma hollarda funksiya a nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega deyiladi.

Endi $x \rightarrow a$ da

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad (-\infty; +\infty)$$

bo'lsin. Unda funksiyaning o'ng va chap limiti ham $(-\infty; +\infty)$ bo'ladi.

Bu holda f funksiya *a nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega* deyiladi.

Uzluksiz funksiyalar ustida arifmetik amallar. Uzluksiz funksiyalarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbatlarining uzluksizligi.

Tasdiq 1.1. Agar f va g funksiyalar $X \subset R$ to'plamda aniqlangan bo'lib, ularning har biri $a \in X$ nuqtada uzluksiz bo'lsa,

$$f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)}, \quad (g(x) \neq 0, \forall x \in X)$$

funksiyalar ham shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

1.4. Funksiya hosilasi va uning ba'zi tatbiqlari

Funksiyaning hosilasi. $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda aniqlangan bo'lsin. Bu intervalda x_0 nuqta olib, unga shunday $\Delta x (\Delta x \geq 0)$ orttirma beraylikki, $x_0 + \Delta x \in (a, b)$ bo'lsin. Natijada $f(x)$ funksiya ham x_0 nuqtada $\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ortirmaga ega bo'ladi.

Ushbu

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (\Delta x \neq 0)$$

nisbatni qaraymiz. Bu nisbat Δx ning funksiyasi bo'lib, u Δx ning noldan farqli qiymatlarida, jumladan nol nuqtaning yetarli kichik

$$U_\delta(0) = \{\Delta x \in \mathbb{R} : -\delta < \Delta x < \delta, \quad \Delta x \neq 0\}$$

($\delta > 0$) atrofida aniqlangan. $\Delta x = 0$ nuqta $U_\delta(0)$ to'plamning limit nuqtasi. Endi $\Delta x \rightarrow 0$ da $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatning limitini qaraymiz, bu limit funksiyaning hosilasi tushunchasiga olib keladi.

Ta'rif 1.20. Agar $\Delta x \rightarrow 0$ da $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatning limiti

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

mavjud va chekli bo'lsa, bu limit $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deb ataladi. Funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi ortganda odatda, $f'(x_0)$, yoki $y'_{x=x_0}$, yoki $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$ belgilar yordamida yoziladi.

Demak ,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Bunda $x_0 + \Delta x = x$ deb olaylik. Unda $\Delta x = x - x_0$ va $\Delta x \rightarrow 0$ da $x \rightarrow x_0$ bo'lib, natijada

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

bo'ladi. Demak $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi $x \rightarrow x_0$ da $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ nisbatning limiti sifatida ham ta'riflanishi mumkin.

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Agar $f(x)$ funksiya (a, b) intervalning har bir x nuqtasida hosilaga ega bo'lsa, bu hosila x o'zgaruvchining funksiyasi bo'ladi

Endi hosilalar jadvalini keltiramiz.

1. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \quad (x > 0);$
2. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a \quad (a > 0, a \neq 1);$
3. $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e \quad (x > 0, a > 0, a \neq 1);$
- Xususan, $(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0);$
4. $(\sin x)' = \cos x;$

$$5. (\cos x)' = -\sin x;$$

$$6. (tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; \quad k \in Z \right);$$

$$7. (ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (x \neq k\pi; \quad k \in Z);$$

$$8. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1);$$

$$9. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1);$$

$$10. (\arctgx)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$11. (\text{arcctgx})' = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$12. (shx)' = chx;$$

$$13. (chx)' = shx;$$

$$14. (thx)' = \frac{1}{ch^2 x};$$

$$15. (cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x} \quad (x \neq 0);$$

Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilalari: $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo'lib, uning har bir x nuqtasida $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Ravshanki, $f'(x)$ hosilaga x o'zgaruvchining funksiyasi bo'ladi. Bu $f'(x)$ hosila ham o'z navbatida biror $x_0 \in (a,b)$ da hosilaga ega bo'lishi mumkin.

Ta'rif 1.21. Agar $f(x)$ funksiya (a,b) intervalning har bir $x \in (a,b)$ nuqtasida $f'(x)$ hosilaga ega bo'lamiz, bu $f'(x)$ funksiya $x_0 \in (a,b)$ nuqtadagi hosilaga ega bo'lamiz, u $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi ikkinchi tartibli hosilasi deb ataladi.

Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi $y''_{x=x_0}$, $f''(x_0)$, $\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{x=x_0}$ belgilarni biri orqali yoziladi.

Funksiyaning ekstremum qiymatlari. $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo'lsin.

Ta'rif 1.22. $x_0 \in (a,b)$ nuqtaning shunday atrofi

$$U_\delta(x_0) = \{x : x \in R, x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \delta > 0\} \subset (a,b)$$

topilib, $\forall x \in U_\delta(x_0)$ uchun

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga (minimumga) ega deyiladi, $f(x_0)$ qiymat $f(x)$ funksiyaning $U_\delta(x_0)$ dagi maksimumi (minimumi) deyiladi.

Funksiyaning maksimum va minimumi umumiy nom bilan uning ekstremumi deb ataladi.

Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari. Biz yuqorida funksiyaning ekstremumi ta'rifini keltirdik va bu ta'rifdan funksiya biror oraliqda bir nechta maksimum va minimumlarga ega bo'lishi mumkinligini eslatib o'tamiz.

Endi funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini topish masalasini qaraymiz.

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Veyershtassning ikkinchi teoremasiga ko'ra funksiyaning $[a,b]$ da eng katta va eng kichik qiymatlari mavjud bo'ladi va bu qiymatlarga $[a,b]$ segmentning nuqtalarida erishiladi. Funksiyaning eng katta qiymati quyidagicha topiladi:

1) $f(x)$ funksiyaning (a,b) intervaldagi maksimum qiymatlari topiladi.

Funksiyaning hamma maksimum qiymatlaridan iborat tuplam $\{ \max f(x) \}$ bo'lsin.

2) Funksiyaning $[a,b]$ segmentning chegaralaridagi, ya'ni $x=a$, $x=b$ nuqtalarida $f(a)$ va $f(b)$ qiymatlari hisoblanadi. So'ngra $\{ \max f(x) \}$ to'plamning barcha elementlari bilan $f(a)$ va $f(b)$ lar taqqoslanadi. Bu qiymatlar ichida eng kattasi $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ segmentdagi eng katta qiymati bo'ladi.

Shunga o'xshash funksiyaning eng kichik qiymati topiladi.

1') $f(x)$ funksiyaning (a,b) intervaldagi barcha minimum qiymatlari topilib, ulardan $\{\min f(x)\}$ to'plam tuziladi.

2') $[a,b]$ segmentning chegaralari $x=a, x=b$ nuqtalarda $f(x)$ funksiyaning $f(a), f(b)$ qiymatlari hisoblanadi.

$\{\min f(x)\}$ to'lamning barcha elementlari hamda $f(a), f(b)$ qiymatlari ichida eng kichigi $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ segmentdagi eng kichik qiymati bo'ladi.

Funksiyaning qavariqligi va botiqligi. $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo'lib bu intervaldan olingan $x_1 \in (a,b), x_2 \in (a,b)$ nuqtalar uchun $x_1 < x_2$ bo'lsin. Ravshanki, $(x_1, x_2) \subset (a,b)$.

Endi $f(x)$ funksiya grafigida $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$ nuqtalarni olaylik. Ma'lumki, bu $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagi

$$\frac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Uni

$$y = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

kabi yozib olib, qulaylik uchun bu tenglamaning o'ng tomonini $l(x)$ orqali belgilaylik

$$l(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Shu belgilashga ko'ra $y=l(x)$ tenglama $A(x_1, f(x_1))$ va $B(x_2, f(x_2))$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqni ifodalaydi. Bundan $l(x_1) = f(x_1), l(x_2) = f(x_2)$ tengliklar kelib chiqadi

Ta'rif 1.23. Agar har qanday $(x_1, x_2) \subset (a,b)$ olinganda ham $\forall x \in (x_1, x_2)$ uchun

$$f(x) \leq l(x) \quad (f(x) < l(x))$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda botiq (qatiy botiq) funksiya deb ataladi.

Ta'rif 1.24. Agar har qanday $(x_1, x_2) \subset (a,b)$ olinganda ham $\forall x \in (x_1, x_2)$ uchun

$$f(x) \geq l(x) \quad (f(x) > l(x))$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda qavariq (qatiy qavariq) funksiya deb ataladi.

Funksiyaning egilish nuqtalari. Funksiya hosilasi yordamida uning egilish nuqtalarini topish mumkin. $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$U_{\delta}^{-}(x_0) = \{x: x \in R, x_0 - \delta < x < x_0\} \quad (\delta > 0)$$

$$U_{\delta}^{+}(x_0) = \{x: x \in R, x_0 < x < x_0 + \delta\} \quad (\delta > 0).$$

Ta'rif 1.25. Agar $f(x)$ funksiya $U_{\delta}^{-}(x_0)$ oraliqda botiq (qavariq) bo'lib, $U_{\delta}^{+}(x_0)$ oraliqda esa qavariq (botiq) bo'lsa, u holda x_0 nuqta funksiyaning (funksiya grafigining) egilish nuqtasi deb ataladi.

$f(x)$ funksiya $U_{\delta}(x_0)$ da ikkinchi tartibli $f''(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Agar

$$\forall x \in U_{\delta}^{-}(x_0) \text{ uchun } f''(x) \geq 0 \quad (f''(x) \leq 0),$$

$$\forall x \in U_{\delta}^{+}(x_0) \text{ uchun } f''(x) \leq 0 \quad (f''(x) \geq 0)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $U_{\delta}^{-}(x_0)$ da $f'(x)$ o'suvchi (kamayuvchi), $U_{\delta}^{+}(x_0)$ da $f'(x)$ kamayuvchi (o'suvchi) bo'lib, $f'(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishadi. U holda x_0 nuqtada $f''(x_0) = 0$ bo'ladi.

Demak, $f(x)$ funksiyaning egilish nuqtasida ikkinchi tartibli hosila $f''(x)$ nolga teng bo'ladi.

Funksiya grafigining asimptotallari. $f(x)$ funksiya $a \in R$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin.

Ta'rif 1.26. Agar ushbu

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

limitlardan biri yoki ikkalasi cheksiz bo'lsa, u holda $x=a$ to'g'ri chiziq $f(x)$ funksiya grafigining vertikal asimptotasi deb ataladi.

Ta'rif 1.27. Agar shunday o'zgarmas k va b sonlar mavjud bo'lsaki, $x \rightarrow +\infty$ da $f(x)$ funksiya ushbu

$$f(x) = kx + b + \alpha(x)$$

ko'rinishda ifodalansa ($\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0$), u holda $y = kx + b$ to'g'ri chiziq $f(x)$ funksiyaning grafigining og'ma asimptotasi deb ataladi.

1.5. Funksiyalarni tekshirish. Grafiklarini yasash

Biz ushbu bobning o'tgan paragraflarida funksiyaning o'zgarish harakterini hosilalari yordamida keltirdik. Bu hol funksiyaning yaqqol tasavvur etishda, shuningdek, funksiya grafigini aniqroq yasashda qo'l keladi.

Funksiyaning tekshirish va ularni grafiklarini yasashni quyidagi sxema bo'yicha olib borish maqsadga muvofiqdir:

1. Funksiyaning aniqlanish sohasini topish;
2. Funksiyaning uzluksizlikka tekshirish va uzulish nuqtalarini topish;
3. Funksiyaning juft, toq hamda davriyligini aniqlash;
4. Funksiyaning monotonlikka tekshirish;
5. Funksiyaning ekstremumga tekshirish
6. Funksiya grafigining qavariq hamda botiqligini aniqlash, egilish nuqtalarini tekshirish;
7. Funksiya grafigining asimptotalarini topish;
8. Funksiyaning haqiqiy ildizlarini (agar ular mavjud bo'sa), shuningdek argument x ning bir nechta harakterli qiymatlarida funksiyaning grafigini yasash.

II Bob. Funksiyalarni tekshirishning algoritmlari va dasturiy vositalari

Bu bobda Maple tizimida funksiyalarni tekshirishda zarur bo'ladigan asosiy tushunchalar: Maple tizimida standart funksiyalarning yozilishi, Maple tizimining ba'zi buyruqlari va ularning qo'llanilishi haqida qisqacha ma'lumotlar keltirilib, unda turli funksiyalarni tekshirish va ularning grafiklarini yasash algoritmlari va dasturiy vositalari bir necha misollarda namoyon qilingan.

2.1. Funksiyalarni tekshirishda Maple tizimining ba'zi buyruqlari va ularning qo'llanilishi haqida ma'lumotlar

Maple tizimida standart funksiyalarning yozilishi.

<i>Maple</i> standart funksiyalari	
Matematik yozilishi	<i>Maple</i> da yozilishi
e^x	exp(x)
$\ln x$	ln(x)
$\lg x$	log10(x)
$\log_a x$	log[a](x)
$\sqrt{x}$	sqrt(x)
$ x $	abs(x)
$\sin x$	sin(x)
$\cos x$	cos(x)
tgx	tan(x)
$ctgx$	cot(x)
$\sec x$	sec(x)
$\operatorname{cosec} x$	csc(x)
$\arcsin x$	arcsin(x)
$\arccos x$	arccos(x)
$\arctgx$	arctan(x)
$\operatorname{arcctg} x$	arccot(x)
shx	sinh(x)
chx	cosh(x)
thx	tanh(x)
$cth x$	coth(x)
$\delta(x)$ – Dirak funksiyasi	Dirac(x)
$\theta(x)$ – Xevissayd funksiyasi	Heaviside(x)

Funksiyalarni tekshirishda Maple tizimining ba'zi buyruqlari va ularning qo'llanilishi. Maple tizimida berilgan funksiya quyidagi buyruq orqali kiritiladi:

```
> f:=x->f(x).
```

Masalan,

```
> f:=x->2*x^3/(x^2-4);
```

$$f:=x \rightarrow \frac{2x^3}{x^2-4}$$

Biz quyida funksiyaning tekshirishning umumiy sxemasi bo'yicha Maple tizimida ko'rsatmalar berib o'tamiz.

1. Funksiyaning aniqlanish sohasini topish. Berilgan f funksiyaning aniqlanish sohasini topish uning barcha uzilish nuqtalarini aniqlash orqali topiladi.

2. Funksiyaning uzluksizlikka tekshirish. Maple tizimida berilgan f funksiyaning biror $[a,b]$ segmentda uzluksizlikka tekshirish **iscont** buyrug'i orqali quyidagicha yoziladi:

```
> iscont(f(x), x = a .. b)
> iscont(f(x), x = a .. b, 'closed')
> iscont(f(x), x = a .. b, 'open')
```

Agar f funksiya bu oraliqda uzluksiz bo'lsa, u holda javob maydonida *true* – rostdir; agar f funksiya bu oraliqda uzluksiz bo'lmasa, u holda javob maydonida *false* – yolg'on yozuvi hosil bo'ladi. Agar oraliq $x=-\infty..+\infty$ kabi berilsa, u holda f to'liq sonlar o'qi bo'yicha tekshiriladi. Bu holda, *true* javob hosil bo'lsa, u holda berilgan funksiya sonlar o'qining hamma joyida aniqlangan va uzluksiz bo'ladi.

Agar berilgan f funksiya qaralayotgan oraliqda uzluksiz bo'lmasa, ya'ni birinchi yoki ikkinchi tur uzilishga ega bo'lsa, u holda uning barcha uzilisish nuqtalarini aniqlashga to'g'ri keladi. Bu f funksiyaning uzilisish nuqtalarini aniqlash esa **discont(f(x),x)** buyruq orqali amalga oshiriladi. Masalan,

```
> discont(f(x), x);
```

$\{-2, 2\}$

Shunday qilib, berilgan f funksiyaning aniqlanish sohasi $R \setminus \{-2, 2\}$ yoki $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$ to'plamdan iborat ekan.

3. Funksiyani juft yoki toqlikka tekshirish quyidagi buyruqlar ketma-ketligi orqali amalga oshiriladi:

```
> if f(-x)=f(x) then
    print('f juft funksiya')
    elif f(x)=-f(-x) then
    print('f toq funksiya ')
else
    print('f na juft, na toq funksiya ')
fi;
```

4. Funksiyaning ekstremumini topish. Berilgan f funksiyaning ekstremumlarini topishda uning birinchi tartibli hosilasi hisoblanadi, so'ngra funksiya hosilasining nollari topiladi.

f funksiyaning birinchi tartibli hosilasi

```
Diff(f(x), x);
```

buyrug'i bilan, uning ekstremumlarini topish esa

```
Extrema(f, { }, x, 's');
```

buyrug'i yordamida topiladi.

Maple tizimida berilgan f funksiyaning maksimum va minimum qiymatlari mos holda **maximize** va **minimize** buyruqlari orqali topiladi va u quyidagicha yoziladi:

```
> maximize(f(x), x=-infinity..infinity);
> minimize(f(x), x=-infinity..infinity);
```

5. Funksiyani monotonlikka tekshirish. Berilgan funksiyaning uzluksizlikka tekshilirib hamda birinchi tartibli hosilasi yordamida uning ekstremumlari topilib, sonlar o'qida ekstremumlari va agar uzilish nuqtalariga ega bo'lsa, bu nuqtalar orqali hosil qilingan har bir oraliqdan biror nuqtani olamiz va bu nuqtada funksiyaning birinchi tartibli hosilasining qiymati ishorasi aniqlanadi. Agar bu nuqtada funksiyaning birinchi tartibli hosilasining qiymati ishorasi musbat (manfiy) bo'lsa, u holda berilgan funksiya shu oraliqda o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.

6. Funksiya botiqligi va qavariqligi oraliqlari hamda funksiya grafigining egilish nuqtalarini aniqlash. f funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi

`Diff(f(x), x, x);` yoki `Diff(f(x), x$2);`

buyruqlari bilan hisoblanadi.

f funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi topilib, uning qiymatini nolga aylantiruvchi argument x lar aniqlanadi va sonlar o'qida bu nuqtalar orqali hosil qilingan har bir oraliqdan biror nuqtada funksiya ikkinchi tartibli hosilasining qiymati ishorasi aniqlanadi. Agar bu nuqtada funksiya ikkinchi tartibli hosilasining qiymati ishorasi musbat (manfiy) bo'lsa, u holda berilgan funksiya shu oraliqda botiq (qavariq) bo'ladi.

Agar qaralayotgan funksiya ikkinchi tartibli hosilasining qiymatini nolga aylantiruvchi argument x larda funksiya ikkinchi tartibli hosilasining qiymati ishorasi o'zgarsa, u holda bunday x nuqtalar funksiya grafigining egilish nuqtasi bo'ladi.

7. Funksiya grafigining asimptotalari. f funksiya grafigining asimptotalari koeffitsiyentlari (agar ular bir nechta bo'lsa)

```
k1:=limit(f(x)/x,x=-infinity);  
k2:=limit(f(x)/x,x=infinity);  
b1:=limit(f(x)-k1*x, x=-infinity);  
b2:=limit(f(x)-k2*x, x=infinity);
```

buyrug'i bilan topiladi.

Agar $k_1 = \infty$ va $k_2 = \infty$ bo'lsa, u holda f funksiya grafigining asimptotasi mavjud bo'lmaydi.

8. Funksiyaning haqiqiy ildizlarini topish va argument x ning bir nechta harakterli qiymatlarida funksiyaning grafigini yasash.

Maple tizimida berilgan f funksiya grafigining koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topish: Ox o'qi bilan kesishishi

```
>unassign('x');  
>fsolve(f(x)=0,x);
```

va Oy o'qi bilan kesishishi esa

```
> f(0);
```

ko'rinishda yoziladi.

Funksiya grafigini oraliqda chizish

```
>plot(f(x), x=a.. b);
```

Funksiya grafigini biror oraliqda asimptotalari bilan chizish

```
Plot({f(x), kx+b}, x = a .. b);
```

buyruq yordamida amalga oshiriladi.

2.2. Funksiyalarni tekshirish va ularning grafiklarini yasash algoritmлари va dasturiy vositalari

Ushbu badda oldingi badda bayon qilingan algoritmlar asosida berilgan funksiyalarni tekshirish va uning grafigini hosil qiluvchi dasturiy vositalarni keltiramiz.

2.1-misol. Ushbu $f(x) = x^3 - 1,5x^2 - 6x + 1$ darajali funksiyani qaraymiz.

Maple tizimida berilgan funksiya quyidagi buyruq orqali kiritiladi:

```
> f:= x->x^3-1.5*x^2-6*x+1;  
f:= x → x3 - 1.5 x2 - 6 x + 1
```

Biz quyida funksiyani tekshirishning umumiy sxemasi bo'yicha Maple tizimida qaralayotgan f funksiyani tekshiramiz va grafigini hosil qilamiz.

1. Funksiyaning aniqlanish sohasi. Berilgan f funksiyaning aniqlanish sohasi uning barcha uzilish nuqtalarini aniqlash orqali topiladi.

2. Funksiyani uzluksizlikka tekshirish. Berilgan f funksiyani $R = (-\infty, -\infty)$ da uzluksizlikka tekshiramiz. Bu quyidagicha amalga oshiriladi:

```
> iscont(f(x), x=-infinity..+infinity);  
true
```

Demak, berilgan f funksiya $R = (-\infty, -\infty)$ da uzluksiz ekan.

Bundan esa berilgan f funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f) = R$ to'plamdan iborat ekan.

3. f funksiyani juft yoki toqlikka tekshiramiz.

```
> if f(-x)=f(x) then  
  print("Javob: berilgan f juft funksiya")  
elif f(x)=-f(-x) then  
  print("Javob: berilgan f toq funksiya")
```

```

else
    print("Javob: berilgan f na juft, na toq funksiya")
fi;
"Javob: berilgan f na juft, na toq funksiya"

```

4. Funksiyaning ekstremumini topish. Berilgan f funksiyaning ekstremumlarini topamiz. Buning uchun uning birinchi tartibli hosilasini hisolaymiz.

```

> f1:=diff(f(x),x);
                                 $f1 := 3x^2 - 3.0x - 6$ 
> extrema(f(x), {}, x, 's');
s;
                                { -9., 4.500000000 }
                                { { x = -1. }, { x = 2. } }

```

Endi f funksiya 1-tartibli hosilasining nollarini topamiz:

```

> solve(f1,x);
                                2., -1.

```

Endi $x=-1$ va $x=2$ nuqtalarda mos holda eng katta va eng kichik qiymatlarini topamiz.

```

> fmax:=f(-1);
                                 $fmax := 4.5$ 
> fmin:=f(2);
                                 $fmin := -9.0$ 

```

Qaralayotgan funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini topamiz.

```

> maximize(f(x), x=-infinity..infinity);
                                Float( $\infty$ )
> minimize(f(x), x=-infinity..infinity);
                                Float( $-\infty$ )

```

5. Funksiyaning monotonlikka tekshirish. Berilgan funksiyaning uzluksizlikka tekshilirib hamda birinchi tartibli hosilasi yordamida uning ekstremumlari topilib, sonlar o'qida ekstremumlari va agar uzilish nuqtalariga ega bo'lsa, bu nuqtalar orqali hosil qilingan har bir oraliqdan biror nuqtani olamiz va bu nuqtada funksiyaning birinchi tartibli hosilasining qiymati ishorasini aniqlaymiz.

```

> x:=-10;
                                 $x := -10$ 
> f(x):=f1;
                                 $f(-10) := 324.0$ 
> x:=1.5;
                                 $x := 1.5$ 
> f(x):=f1;

```

```

                                f(1.5) := -3.75
> x:=10;
                                x := 10
> f(x) :=f1;
                                f(10) := 264.0

```

Yuqoridagi hisoblashlardan argument x ning $(-\infty, -1)$ oraliqdan olingan qiymatlarida f funksiya birinchi tartibli hosilasining qiymati musbat, demak f funksiya bu oraliqda o'suvchi, argument x ning $(-1, 2)$ oraliqdan olingan qiymatlarida esa f funksiya birinchi tartibli hosilasining qiymati manfiy, demak f funksiya bu oraliqda kamayuvchi, argument x ning $(2, +\infty)$ oraliqdan olingan qiymatlarida f funksiya birinchi tartibli hosilasining qiymati musbat, demak f funksiya bu oraliqda yana o'suvchi bo'ladi.

Shunday qilib, $x=-1$ nuqta orqali qarayotgan f funksiya birinchi tartibli hosilasining qiymati ishorasi musbatdan manfiyga almashayapti, u holda bundan qarayotgan f funksiya $x=-1$ nuqtada eng katta qiymat (maksimum)ga va $x=2$ nuqta orqali qarayotgan f funksiya birinchi tartibli hosilasining qiymati ishorasi manfiydan musbatga almashayapti, u holda bundan qarayotgan f funksiya $x=2$ nuqtada eng kichik qiymat (minimum)ga erishadi.

6. Funksiya botiqligi va qavariqligi oraliqlari hamda funksiya grafigining egilish nuqtalari. f funksiyaning botiqlik va qavariqlik oraliqlarini topamiz. Buning uchun esa dastlab f funksiyaning 2-tartibli hosilasini topamiz.

```

> f2:=diff(f(x), x$2);
                                f2 := 6 x - 3.0

```

Endi f funksiya 2-tartibli hosilasining nollarini topamiz.

```

> fsolve(f2=0, x);
                                0.5000000000

```

Endi $(-\infty; 0,5)$ va $(0,5; +\infty)$ oraliqlardagi argument x ning biror qiymatida f funksiyaning 2-tartibli hosilasining ishorasini aniqlaymiz:

```

> x:=-10;
                                x := -10
> f(x) :=f2;
                                f(-10) := -63.0
> x:=10;
                                x := 10
> f(x) :=f2;

```

$$f(10) := 57.0$$

Yuqoridagi hisoblashlardan argument x ning $(-\infty; 0,5)$ oraliqdan olingan qiymatlarida f funksiya ikkinchi tartibli hosilasining qiymati manfiy, demak f funksiya bu oraliqda botiq, argument x ning $(0,5; +\infty)$ oraliqdan olingan qiymatlarida f funksiya ikkinchi tartibli hosilasining qiymati musbat, demak f funksiya bu oraliqda qavariq bo'ladi.

Shunday qilib, $x=0,5$ nuqta orqali qaralayotgan f funksiya ikkinchi tartibli hosilasining qiymati ishorasi manfiydan musbatga almashayapti, u holda bu yerdan $x=0,5$ nuqta f funksiya grafigining egilish nuqtasi bo'ladi. Berigan f funksiyaning $x=0,5$ nuqtadagi qiymatini topamiz.

```
> f(0.5);
```

-2.250

7. Funksiya grafigining asimptotalari. Berilgan f funksiya vertikal asimptotaga ega emas, chunki u haqiqiy sonlar o'qining hamma joyida aniqlangan. Og'ma asimptotasi $f(x)=kx+b$ ko'rinishga ega. k va b koeffitsiyentlarni ularga mos quyidagi limitlarni hisoblash orqali topamiz.

```
> k1:=limit(f(x)/x, x=-infinity);
```

$k1 := \text{Float}(\infty)$

```
> k2:=limit(f(x)/x, x=infinity);
```

$k2 := \text{Float}(\infty)$

```
> b1:=limit(f(x)-k1*x, x=-infinity);
```

$b1 := \text{Float}(-\infty)$

```
> b2:=limit(f(x)-k2*x, x=infinity);
```

$b2 := \text{Float}(\infty)$

Demak, $k_1 = \infty$, $k_2 = \infty$ va $b_1 = \infty$, $b_2 = \infty$ ekanligidan berilgan f funksiya grafigining asimptotasi mavjud bo'lmaydi.

8. Funksiyaning haqiqiy ildizlarini topish va argument x ning bir nechta harakterli qiymatlarida funksiyaning grafigini yasash.

Berilgan funksiyaning grafigini yasaymiz.

```
> pf:=plot({f(x)}, x=-5..5, f=-10..10, color=blue):
c:=plottools[circle]([-1, 4.5], 0.1, color=red):
b:=plottools[circle]([2, -9], 0.1, color=red):
plots[display]({pf, b, c}, view=[-5..5, -10..5], scaling=constrained);
```

Berilgan funksiyaning grafigi ilovalarda keltirilgan (qar. 2.1-chizma).

2.2-misol. Ushbu $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ ratsional funksiyaning qaraymiz.

```
> y:=x-(x^2-x+1)/(x-1);
```

$$y := x \rightarrow \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

Beirlgan funksiyaning uzluksizlikka tekshiramiz:

```
> iscont(y(x), x=-infinity..+infinity);  
false
```

Demak, qarayotgan funksiya $R=(-\infty, +\infty)$ da uzluksiz emas. Uning barcha uzilish nuqtalari to'plamini aniqlaymiz.

```
> discont(y(x), x);  
{ 1 }  
  
> limit(y(x), x=1, left);  
limit(y(x), x=1, right);  
-∞  
∞
```

Shunday qilib, tekshirilayotgan funksiyaning $x=1$ nuqtada limiti cheksiz, demak, u bu nuqtada 2-tur uzilishga ega. Bundan esa qarayotgan funksiya $R \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ to'plamda aniqlangan.

Beirlgan funksiyaning juft yoki toqlikka tekshiramiz.

```
> if y(-x)=y(x) then  
  print("Javob: berilgan y juft funksiya")  
  elif y(x)=-y(-x) then  
  print("Javob: berilgan y toq funksiya")  
else  
  print("Javob: berilgan y na juft, na toq funksiya")  
fi;  
"Javob: berilgan y na juft, na toq funksiya"
```

Endi funksiyaning ekstremumlarini topamiz. Buning uchun uning birinchi tartibli hosilasini hisolaymiz.

```
> p1:=diff(y(x), x);  
p1 := \frac{2x-1}{x-1} - \frac{x^2-x+1}{(x-1)^2}  
  
> extrema(y(x), {}, x, 's');  
s;  
{ -1, 3 }  
{ { x = 0 }, { x = 2 } }
```

Endi funksiya hosilasining nollarini topamiz:

```
> solve(p1, x);
```

0, 2

Qaralayotgan funksiyani monotonlikka tekshiramiz, ya'ni o'sish va kamayish oraliqlarini topamiz. Buning uchun $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ va $(2, \infty)$ oraliqlardan mos holda biror nuqta olamiz va bu nuqtalarda funksiyaning birinchi tartibli hosilasi qiymati ishorasini aniqlaymiz:

> **x:=-10;**

$$x := -10$$

> **y(x):=p1;**

$$y(-10) := \frac{120}{121}$$

> **x:=1/2;**

$$x := \frac{1}{2}$$

> **y(x):=p1;**

$$y\left(\frac{1}{2}\right) := -3$$

> **x:=3/4;**

$$x := \frac{3}{4}$$

> **y(x):=p1;**

$$y\left(\frac{3}{4}\right) := -15$$

> **x:=10;**

$$x := 10$$

> **y(x):=p1;**

$$y(10) := \frac{80}{81}$$

Yuqoridagi hisoblashlardan argument x ning $(-\infty, 0)$ va $(2, \infty)$ oraliqdan olingan qiymatlarida funksiya birinchi tartibli hosilasining qiymati musbat, demak funksiya bu oraliqda o'suvchi, argument x ning $(0, 1)$ va $(1, 2)$ oraliqdan olingan qiymatlarida esa funksiya birinchi tartibli hosilasining qiymati manfiy, demak funksiya bu oraliqda kamayuvchi.

Shunday qilib, $x=0$ nuqta orqali qaralayotgan funksiya birinchi tartibli hosilasining qiymati ishorasi musbatdan manfiyga almashayapti, u holda bundan qaralayotgan funksiya $x=0$ nuqtada eng katta qiymat (maksimum)ga va $x=2$ nuqta orqali qaralayotgan funksiya birinchi tartibli hosilasining qiymati ishorasi manfiydan musbatga almashayapti, u holda bundan qaralayotgan funksiya $x=2$ nuqtada eng kichik qiymat (minimum)ga erishadi.

Endi $x=0$ va $x=2$ nuqtalarda mos holda eng katta va eng kichik qiymatlarini topamiz.

> **y_{max}:=y(0);**

$y_{max} := -1$

> **y_{min}:=y(2);**

$y_{min} := 3$

Qaralayotgan funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini topamiz.

> **maximize(y(x), x=-infinity..infinity);**

∞

> **minimize(y(x), x=-infinity..infinity);**

$-\infty$

Berilgan funksiyaning botiqlik va qavariqlik oraliqlari hamda egilish nuqtalarini topamiz. Buning uchun esa dastlab funksiyaning 2-tartibli hosilasini topamiz.

> **p2:=diff(y(x), x\$2);**

$$p2 := \frac{2}{x-1} - \frac{2(2x-1)}{(x-1)^2} + \frac{2(x^2-x+1)}{(x-1)^3}$$

Endi berilgan funksiya 2-tartibli hosilasining nollarini topamiz.

> **solve(p2=0, x);**

Bu funksiya **2-tartibli hosilasining nollari** mavjud emas, ya'ni hosil bo'lgan $p2$ funksiya grafigi Ox o'qini kesib o'tmaydi. Demak, y funksiya grafigi egilish nuqtasiga ega emas. U holda berilgan funksiyaning $x=1$ uzilishga ega ekanligidan foydalanib, uning botiqlik va qavariqlik oraliqlarini topamiz. Buning uchun qaralayotgan funksiya 2-tartibli hosilasining $(-\infty, 1)$ va $(1, \infty)$ oraliqlarda qanday ishoralarga ega bo'lishini tekshiramiz.

Endi $(-\infty, 1)$ va $(1, \infty)$ oraliqlardagi argument x ning biror qiymatida y funksiyaning 2-tartibli hosilasining ishorasini aniqlaymiz.

> **x:=-10;**

$x := -10$

> **y(x):=p2;**

$$y(-10) := \frac{-2}{1331}$$

> **x:=10;**

$x := 10$

> **y(x):=p2;**

$$y(10) := \frac{2}{729}$$

Yuqoridagi hisoblashlardan argument x ning $(-\infty, 1)$ oraliqdan olingan qiymatlarida berilgan funksiya ikkinchi tartibli hosilasining qiymati manfiy, demak bu funksiya bu oraliqda botiq, argument x ning $(1, \infty)$ oraliqdan olingan qiymatlarida berilgan funksiya ikkinchi tartibli hosilasining qiymati musbat, demak bu funksiya bu oraliqda qavariq bo'ladi.

Berilgan funksiya grafigining asimptotalarini topamiz. Berilgan funksiya vertikal asimptotaga ega emas, chunki u haqiqiy sonlar o'qining hamma joyida aniqlangan. Og'ma asimptotasi $f(x)=kx+b$ ko'rinishga ega. k va b koeffitsiyentlarni ularga mos quyidagi limitlarni hisoblash orqali topamiz.

```
> k1:=limit(y(x)/x,x=-infinity);
                                k1:=1
```

```
> k2:=limit(y(x)/x,x=infinity);
                                k2:=1
```

Demak, $k=1$, endi b koeffitsiyentni topamiz.

```
> k:=1;
                                k:=1
```

```
> b:=limit(y(x)-k*x,x=infinity);
                                b:=0
```

$b=0$ ekanligidan og'ma asimptota quyidagi ko'rinishga ega:

```
> y1:=k*x+b;
                                y1:=x
```

Berilgan funksiyaning grafigini yasaymiz. Bining uchun dastlab qaralayotgan funksiya grafigining Ox va Oy o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topamiz.

```
> unassign('x');
> fsolve(y(x)=0,x);
```

Berilgan funksiya grafigining Ox o'qi bilan kesishish nuqtasiga ega emasligini hosil qildik, Oy o'qi bilan kesishish nuqtasini topamiz:

```
> y(0);
                                -1
> plot({y(x),k*x+b},x=-5..5,view=[-5..5,-5..5],scaling=constrained);
```

Bu funksiyaning grafigi ilovalarda keltirilgan (qar. 2.2-chizma).

2.3-misol. Ushbu $g(x) = (3-x)e^{x-2}$ ko'rsatkichli funksiyanini qaraymiz.

```
> g:=x->(3-x)*exp(x-2);
                                g:=x -> (3-x) e(x-2)
```

Beirlgan g funksiyani uzluksizlikka teksiramiz:

```
> iscont(g(x), x=-infinity..+infinity);  
true
```

Qaralayotgan g funksiya $R=(-\infty, +\infty)$ da uzluksiz ekan. Demak, g funksiya haqiqiy sonlar o'qining hamma joyida aniqlangan.

Beirlgan g funksiyani juft yoki toqlikka tekshiramiz.

```
> if g(-x)=g(x) then  
    print("Javob: berilgan g juft funksiya")  
    elif f(x)=-g(-x) then  
    print("Javob: berilgan g toq funksiya")  
else  
    print("Javob: berilgan g na juft, na toq funksiya")  
fi;  
"Javob: berilgan g na juft, na toq funksiya"
```

g funksiyaning ekstremumlarini topamiz. Buning uchun uning birinchi tartibli hosilasini hisolaymiz.

```
> g1:=diff(g(x), x);  
g1 := -e(x-2) + (3-x) e(x-2)  
> extrema(g(x), {}, x, 's');  
s;  
{ 1 }  
{ { x = 2 } }
```

Endi g funksiya hosilasining nollarini topamiz:

```
> solve(g1, x);  
2
```

Qaralayotgan g funksiyani monotonlikka tekshiramiz, ya'ni o'sish va kamayish oraliqlarini topamiz. Buning uchun $(-\infty, 2)$ va $(2, \infty)$ oraliqlardan mos holda biror nuqta olamiz va bu nuqtalarda funksiyaning birinchi tartibli hosilasi qiymati ishorasini aniqlaymiz:

```
> x:=-10;  
x := -10  
> g(x):=g1;  
g(-10) := 12 e(-12)  
> evalf(%);  
0.00007373054824  
> x:=10;  
x := 10  
> g(x):=g1;  
g(10) := -8 e8  
> evalf(%);  
-23847.66390
```

Yuqoridagi hisoblashlardan argument x ning **(-infinity,2)** oraliqdan olingan qiymatlarida g funksiya birinchi tartibli hosilasining qiymati musbat, demak g funksiya bu oraliqda o'suvchi, argument x ning **(2,infinity)** oraliqdan olingan qiymatlarida esa g funksiya birinchi tartibli hosilasining qiymati manfiy, demak g funksiya bu oraliqda kamayuvchi.

Shunday qilib, $x=2$ nuqta orqali qarayotgan g funksiya birinchi tartibli hosilasining qiymati ishorasi musbatdan manfiyga almashayapti, u holda bundan qarayotgan funksiya $x=2$ nuqtada eng katta qiymat (maksimum)ga almashayapti, u holda bundan qarayotgan funksiya $x=2$ nuqtada eng katta qiymat (maksimum)ga erishadi.

Endi $x=2$ nuqtada eng katta qiymatini topamiz.

```
> gmax:=g(2);
```

```
gmax := 1
```

Qarayotgan funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini topamiz.

```
> maximize(g(x), x=-infinity..infinity);
```

```
1
```

```
> minimize(g(x), x=-infinity..infinity);
```

```
-∞
```

g funksiyaning botiqlik va qavariqlik oraliqlari hamda egilish nuqtalarini topamiz. Buning uchun esa dastlab g funksiyaning 2-tartibli hosilasini topamiz.

```
> g2:=diff(g(x), x$2);
```

```
g2 := -2 e(x-2) + (3-x) e(x-2)
```

Endi f funksiya 2-tartibli hosilasining nollarini topamiz.

```
> fsolve(g2=0, x);
```

```
1.
```

Endi **(-infinity,1)** va **(1, infinity)** oraliqlardagi argument x ning biror qiymatida g funksiyaning 2-tartibli hosilasining ishorasini aniqlaymiz.

```
> x:=-10;
```

```
x := -10
```

```
> g(x):=g2;
```

```
g(-10) := 11 e(-12)
```

```
> evalf(%);
```

```
0.00006758633588
```

```
> x:=10;
```

```
x := 10
```

```
> g(x):=g2;
```

```
g(10) := -9 e8
```

```
> evalf(%);
```

-26828.62188

Yuqoridagi hisoblashlardan argument x ning $(-\infty, 1)$ oraliqdan olingan qiymatlarida g funksiya ikkinchi tartibli hosilasining qiymati musbat, demak g funksiya bu oraliqda qavariq, argument x ning $(1, \infty)$ oraliqdan olingan qiymatlarida g funksiya ikkinchi tartibli hosilasining qiymati musbat, demak g funksiya bu oraliqda botiq bo'ladi.

Shunday qilib, $x=1$ nuqta orqali qaralayotgan g funksiya ikkinchi tartibli hosilasining qiymati ishorasi o'zgarayapti, bundan esa $x=1$ nuqta g funksiya grafigining egilish nuqtasi bo'ladi. g funksiyaning $x=1$ nuqtadagi qiymatini topamiz.

```
> g(1);
```

$2e^{(-1)}$

```
> evalf(%);
```

0.7357588824

Berilgan funksiya grafigining asimptotalarini topamiz. Berilgan funksiya vertikal asimptotaga ega emas, chunki u haqiqiy sonlar o'qining hamma joyida aniqlangan. Og'ma asimptotasi $f(x)=kx+b$ ko'rinishga ega. k va b koeffitsiyentlarni ularga mos quyidagi limitlarni hisoblash orqali topamiz.

```
> k1:=limit(g(x)/x, x=-infinity);
```

$k1 := 0$

```
> k2:=limit(g(x)/x, x=infinity);
```

$k2 := -\infty$

Demak, koeffitsiyent $k=0$. b koeffitsiyentni topamiz.

```
> k:=0;
```

$k := 0$

```
> b:=limit(g(x)-k1*x, x=-infinity);
```

$b := 0$

U holda qaralayotgan funksiyaning og'ma asimptotasi, x , cheksizlikka intilganda quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

```
> y1:=k*x+b;
```

$y1 := 0$

Endi berilgan funksiya grafigining koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topamiz.

```
> unassign('x');
```

```
> fsolve(g(x)=0, x);
```

3.

```
> g(0);
```

$3e^{(-2)}$

```
> evalf(%);
```

0.4060058496

Berilgan funksiyaning grafigini yasaymiz.

```
> plot({g(x), y1}, x=-5..5, view=[-5..5, -  
5..5], scaling=constrained, color=[red, blue]);
```

Bu funksiyaning grafigi ilovalarda keltirilgan (qar. 2.3-chizma).

Xulosa

Mazkur bitiruv malakaviy ishi Maple tizimida elementar funksiyalarni tekshirishning algoritmlari va dasturiy vositalarini ishlab chiqishga bag'ishlangan.

Shu sababli ushbu ishda har xil elementar funksiyalarning xossalarini o'rganish maqsadida ularni tekshirishga oid bir nechta misollar qaraldi va ulardan quyidagi natijalar olindi:

I. $f(x) = x^3 - 1,5x^2 - 6x + 1$ funksiya quyidagi tasdiqlar o'rinli:

- 1.1. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f) = (-\infty, +\infty)$ to'plamdan iborat, ya'ni $R = (-\infty, +\infty)$ da uzluksiz;
- 1.2. Berilgan funksiya na juft va na toq funksiya;
- 1.3. Qaralayotgan funksiyaning ekstremumlari $\{-9; 4,5\}$;
- 1.4. Berilgan funksiya $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ oraliqlarda o'suvchi, $(1, 2)$ oraliqda esa kamayuvchi;
- 1.5. Bu funksiya $(-\infty; 0,5)$ oraliqda botiq, $(0,5; +\infty)$ oraliqda qavariq va $x=0,5$ nuqta esa f funksiya grafigining egilish nuqtasi bo'ladi;
- 1.6. Bu funksiya grafigi asimptotaga ega emas, bundan esa uning qiymatlar sohasi $R(f) = (-\infty, +\infty)$ to'plamdan iborat;
- 1.7. Ushbu funksiya grafigi ilovalarda keltirilgan (qar. 2.1-chizma).

II. $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ funksiya quyidagi tasdiqlar o'rinli:

- 2.1. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f) = R \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ to'plamdan iborat;
- 2.2. Berilgan funksiya na juft va na toq funksiya;
- 2.3. Qaralayotgan funksiyaning ekstremumlari $\{-1; 3\}$;
- 2.4. Berilgan funksiya $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ da o'suvchi, $(0, 1) \cup (1, 2)$ da esa kamayuvchi;
- 2.5. Bu funksiya $(-\infty; 1)$ oraliqda botiq, $(1; +\infty)$ oraliqda qavariq bo'ladi;

- 2.6. Bu funksiya grafigining asimptotasi $y = x$ to'g'ri chiziqdan iborat;
- 2.7. Ushbu funksiya grafigi ilovalarda keltirilgan (qar. 2.2-chizma).
- $g(x) = (3 - x)e^{x-2}$ ko'rsatkichli funksiyani tekshiring.
- 3.1. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $D(g) = (-\infty, +\infty)$ to'plamdan iborat, ya'ni $R = (-\infty, +\infty)$ da uzluksiz;
- 3.2. Berilgan funksiya na juft va na toq funksiya;
- 3.3. Qaralayotgan funksiyaning ekstremumlari – $\{1\}$;
- 3.4. Berilgan funksiya $(-\infty, 2)$ oraliqlarda o'suvchi, $(2, +\infty)$ oraliqda esa kamayuvchi;
- 3.5. Bu funksiya $(-\infty; 1)$ oraliqda qavariq, $(1; +\infty)$ oraliqda botiq va $x=1$ nuqta esa g funksiya grafigining egilish nuqtasi bo'ladi;
- 3.6. Bu funksiya grafigi asimptotasi $x \rightarrow \infty$ da $y = 0$;
- 3.7. Ushbu funksiya grafigi ilovalarda keltirilgan (qar. 2.3-chizma).

Ishda olingan natijalar va unda qo'llanilgan usullardan elementar funksiya (ko'phad) larni tekshirishda hamda elementar matematikada har xil tipdagi tenglama va tengsizliklarni yechishda foydalanish mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. T. Azlarov, X. Mansurov. *Matematik analiz*. 1-qism. T. “O’qituvchi”. 1994.
2. Sh. Alimov, R. Ashurov. *Matematik analiz*. O’zMU. (Mexanika-matematika fakulteti talabalari uchun ma’ruzalar matni) 2005.
3. В.А Зорич, *Математический анализ*. ч. 1. М, “Наука”. 1981.
4. Sh. Alimov. *Algebra va analiz asoslari*. O’rta maktabning 10-11 sinfi uchun darslik. T. “O’qituvchi” 1996. 350 b.
5. Б.П. Демидович, *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*, М 1990.
6. С.М. Николский, *Курс математического анализа*. Т. 1. М.” Наука” 1973.
7. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учебное пособие для вузов. – 20-е изд. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 384 с.
8. A.N. Kolmogorov va boshq. *Algebra va analiz asoslari*. O’rta maktabning 10-11 sinfi uchun darslik. T. “O’qituvchi” 1994. 350 b.
9. Савотченко С.Е., Кузьмичева Т.Г. Методы решения математических задач в *Maple*: Учебное пособие – Белгород: Изд. Белаудит, 2001. – 116 с.
10. Дьяконов В. *Maple 7: учебный курс* - СПб.: Питер, 2002.
11. Матросов А.В. *Maple 6. Решение задач высшей математики и механики* – СПб.: БХВ – Петербург, 2001.
12. С.А.Лактионов, М.И.Журавлева, С.Ф.Гаврикова. Построение графиков в пакете Maple: СибГИУ. –Новокузнецк, 2012. - 40 с.
13. <http://olo.looblogs.info/issledovanie-funkcij-maple.html>
14. <http://maple.plusby.com/index.html>

Ilovalar

I. $f(x) = x^3 - 1.5x^2 - 6x + 1$ funksiyani tekshirish:

```
> f := x -> x^3 - 1.5*x^2 - 6*x + 1;
```

$$f := x \rightarrow x^3 - 1.5x^2 - 6x + 1$$

Funksiyani uzluksizlikka tekshirish:

```
> iscont(f(x), x=-infinity..+infinity);  
true
```

Funksiyani juft yoki toqlikka tekshirish:

```
> if f(-x)=f(x) then  
  print("Javob: berilgan f juft funksiya")  
  elif f(x)=-f(-x) then  
  print("Javob: berilgan f toq funksiya")  
else  
  print("Javob: berilgan f na juft, na toq funksiya")  
fi;
```

"Javob: berilgan f na juft, na toq funksiya"

Funksiyaning birinchi tartibli hosilasini topish:

```
> f1:=diff(f(x), x);
```

$$f1 := 3x^2 - 3.0x - 6$$

Funksiyaning ekstremumini topish:

```
> extrema(f(x), {}, x, 's');  
s;
```

$$\{-9., 4.500000000\}$$
$$\{\{x = -1.\}, \{x = 2.\}\}$$

Funksiya 1-tartibli hosilasining nollarini topish:

```
> fmax:=f(-1);
```

$$fmax := 4.5$$

```
> fmin:=f(2);
```

$$fmin := -9.0$$

Funksiyani monotonlikka tekshirish:

```
> x:=-10;
```

$$x := -10$$

```
> f(x):=f1;
```

$$f(-10) := 324.0$$

```
> x:=1.5;
```

$$x := 1.5$$

```
> f(x):=f1;
```

$$f(1.5) := -3.75$$

```
> x:=10;
```

$$x := 10$$

```
> f(x):=f1;
```

$$f(10) := 264.0$$

Funksiya botiqligi va qavariqligi oraliqlari hamda funksiya grafigining egilish nuqtalarini topish:

```
> f2:=diff(f(x), x$2);
```

$$f2 := 6x - 3.0$$

Funksiya 2-tartibli hosilasining nollarini topish:

```

> fsolve (f2=0, x);
                                0.5000000000
> x:=-10;
                                x := -10
> f (x) :=f2;
                                f(-10) := -63.0
> x:=10;
                                x := 10
> f (x) :=f2;
                                f(10) := 57.0

```

Funksiya grafigining asimptotalarini topish:

```

> k1:=limit (f (x) /x, x=-infinity);
                                k1 := Float(∞)
> k2:=limit (f (x) /x, x=infinity);
                                k2 := Float(∞)
> b1:=limit (f (x)-k1*x, x=-infinity);
                                b1 := Float(-∞)
> b2:=limit (f (x)-k2*x, x=infinity);
                                b2 := Float(∞)

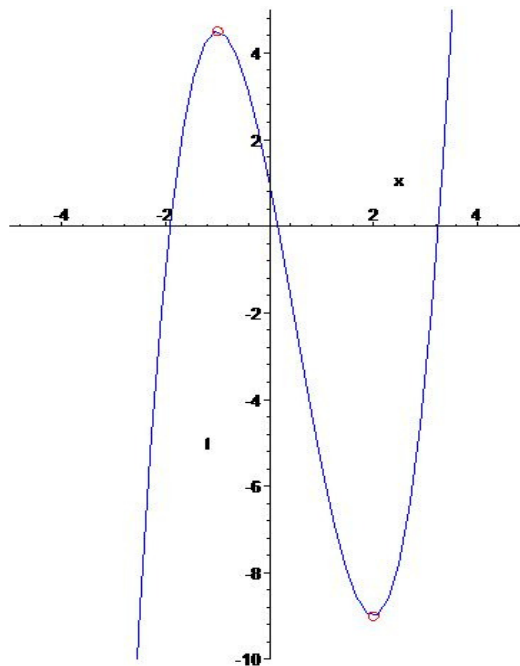
```

Funksiyaning grafigini yasash:

```

> pf:=plot ({f (x) }, x=-5..5, f=-10..10, color=blue):
c:=plottools[circle]([-1,4.5], 0.1, color=red):
b:=plottools[circle]([2,-9], 0.1, color=red):
plots[display] ({pf,b,c}, view=[-5..5,-
10..5], scaling=constrained);

```



2.1-chizma.

II. $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ ratsional funksiyani tekshirish:

```
> y:=x-(x^2-x+1)/(x-1);
```

$$y := x \rightarrow \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

Funksiyani uzluksizlikka tekshirish:

```
> iscont(y(x), x=-infinity..+infinity);
```

false

```
> discont(y(x), x);
```

{ 1 }

```
> limit(y(x), x=1, left);
```

```
limit(y(x), x=1, right);
```

$-\infty$

∞

Funksiyani juft yoki toqlikka tekshirish:

```
> if y(-x)=y(x) then
```

```
    print("Javob: berilgan y juft funksiya")
```

```
    elif y(x)=-y(-x) then
```

```
    print("Javob: berilgan y toq funksiya")
```

```
else
```

```
    print("Javob: berilgan y          na juft, na toq funksiya")
```

```
fi;
```

"Javob: berilgan y na juft, na toq funksiya"

Funksiyaning ning birinchi tartibli hosilasini hisolash:

```
> p1:=diff(y(x), x);
```

$$p1 := \frac{2x - 1}{x - 1} - \frac{x^2 - x + 1}{(x - 1)^2}$$

Funksiyaning ekstremumlarini topish:

```
> extrema(y(x), {}, x, 's');
```

```
s;
```

{ -1, 3 }

{ { x = 0 }, { x = 2 } }

```
> solve(p1, x);
```

0, 2

```
> x:=-10;
```

x := -10

```
> y(x):=p1;
```

$$y(-10) := \frac{120}{121}$$

```
> x:=1/2;
```

$$x := \frac{1}{2}$$

```
> y(x):=p1;
```

$$y\left(\frac{1}{2}\right) := -3$$

```
> x:=3/4;
```

$$x := \frac{3}{4}$$

> **y(x):=p1;**

$$y\left(\frac{3}{4}\right) := -15$$

> **x:=10;**

$$x := 10$$

> **y(x):=p1;**

$$y(10) := \frac{80}{81}$$

> **ymax:=y(0);**

$$ymax := -1$$

> **ymin:=y(2);**

$$ymin := 3$$

Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini topish:

> **maximize(y(x), x=-infinity..infinity);**

$$\infty$$

> **minimize(y(x), x=-infinity..infinity);**

$$-\infty$$

Funksiyaning botiqlik va qavariqlik oraliqlari hamda 2-tartibli hosilasini topish:

> **p2:=diff(y(x), x\$2);**

$$p2 := \frac{2}{x-1} - \frac{2(2x-1)}{(x-1)^2} + \frac{2(x^2-x+1)}{(x-1)^3}$$

> **solve(p2=0, x);**

> **x:=-10;**

$$x := -10$$

> **y(x):=p2;**

$$y(-10) := \frac{-2}{1331}$$

> **x:=10;**

$$x := 10$$

> **y(x):=p2;**

$$y(10) := \frac{2}{729}$$

> **k1:=limit(y(x)/x, x=-infinity);**

$$k1 := 1$$

> **k2:=limit(y(x)/x, x=infinity);**

$$k2 := 1$$

> **k:=1;**

$$k := 1$$

> **b:=limit(y(x)-k*x, x=infinity);**

$$b := 0$$

> **y1:=k*x+b;**

$$y1 := x$$

Berilgan funksiyaning grafigini yasash:

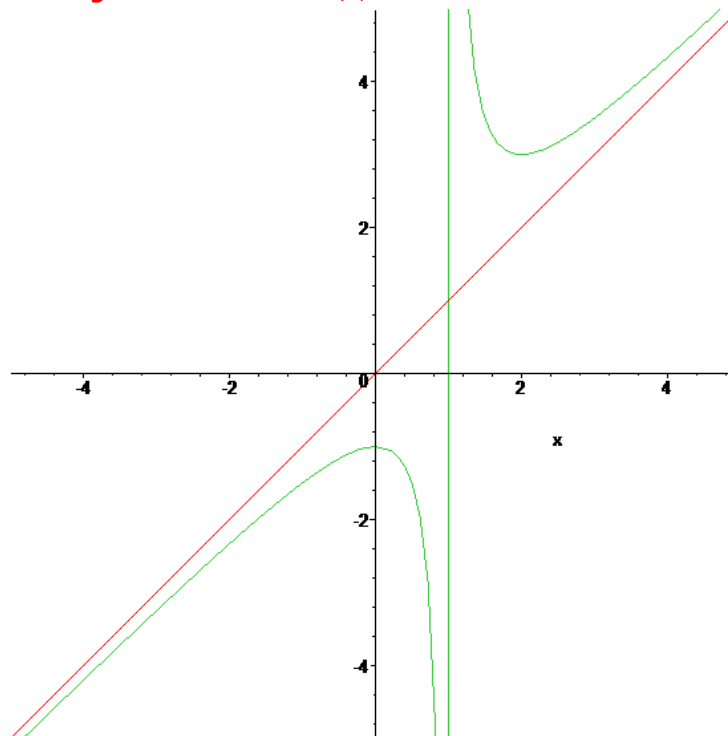
> **unassign('x');**

> **fsolve(y(x)=0, x);**

```
> y(0);
```

-1

```
> plot({y(x), k*x+b}, x=-5..5, view=[-5..5, -5..5], scaling=constrained);
```



2.2-chizma.

III. $g(x) = (3-x)e^{x-2}$ ko'rsatkichli funktsiyani tekshirish:

```
> g:=x->(3-x)*exp(x-2);
```

$g := x \rightarrow (3-x)e^{(x-2)}$

Beirlgan g funktsiyani uzluksizlikka teksirish:

```
> iscont(g(x), x=-infinity..+infinity);
```

true

Beirlgan g funktsiyani juft yoki toqlikka tekshirish:

```
> if g(-x)=g(x) then
  print("Javob: berilgan g juft funksiya")
elif f(x)=-g(-x) then
  print("Javob: berilgan g toq funksiya")
else
  print("Javob: berilgan g na juft, na toq funksiya")
fi;
```

"Javob: berilgan g na juft, na toq funksiya"

Funksiyaning birinchi tartibli hosilasini hisolash:

```
> g1:=diff(g(x), x);
```

$g1 := -e^{(x-2)} + (3-x)e^{(x-2)}$

Funksiyaning ekstremumlarini topish:

```
> extrema(g(x), {}, x, 's');
```

```
s;
```

$$\{1\}$$

$$\{\{x=2\}\}$$

Funksiya hosilasining nollarini topish:

> **solve(g1,x);**

$$2$$

Funksiyani monotonlikka tekshirish:

> **x:=-10;**

$$x := -10$$

> **g(x):=g1;**

$$g(-10) := 12 e^{(-12)}$$

> **evalf(%);**

$$0.00007373054824$$

> **x:=10;**

$$x := 10$$

> **g(x):=g1;**

$$g(10) := -8 e^8$$

> **evalf(%);**

$$-23847.66390$$

Funksiyaning maksimumini qiymatini topish:

> **gmax:=g(2);**

$$gmax := 1$$

Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini topish:

> **maximize(g(x),x=-infinity..infinity);**

$$1$$

> **minimize(g(x),x=-infinity..infinity);**

$$-\infty$$

Funksiyaning botiqlik va qavariqlik oraliqlari hamda egilish nuqtalarini topish:

> **g2:=diff(g(x),x\$2);**

$$g2 := -2 e^{(x-2)} + (3-x) e^{(x-2)}$$

Funksiya 2-tartibli hosilasining nollarini topish:

> **fsolve(g2=0,x);**

$$1.$$

> **x:=-10;**

$$x := -10$$

> **g(x):=g2;**

$$g(-10) := 11 e^{(-12)}$$

> **evalf(%);**

$$0.00006758633588$$

> **x:=10;**

$$x := 10$$

> **g(x):=g2;**

$$g(10) := -9 e^8$$

```
> evalf(%);
-26828.62188

> g(1);
2 e(-1)

> evalf(%);
0.7357588824
```

Funksiyaning asimptotalarini topish:

```
> k1:=limit(g(x)/x,x=-infinity);
k1:=0
> k2:=limit(g(x)/x,x=infinity);
k2:=-∞
> k:=0;
k:=0
> b:=limit(g(x)-k1*x, x=-infinity);
b:=0
> y1:=k*x+b;
y1:=0
```

Funksiya grafigining koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topish:

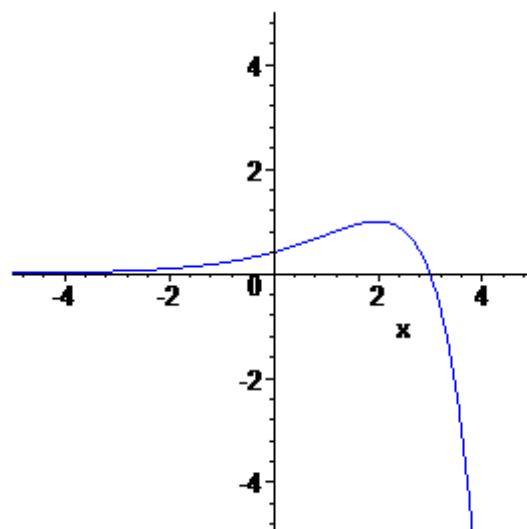
```
> unassign('x');
> fsolve(g(x)=0,x);
3.

> g(0);
3 e(-2)

> evalf(%);
0.4060058496
```

Berilgan funksiyaning grafigini yasash:

```
> plot({g(x),y1},x=-5..5,view=[-5..5,-5..5],scaling=constrained,color=[red,blue]);
```



2.3-chizma.

IV. $q(x) := \sin(x+3) - 2$ funksiyani tekshirish:

```
> restart;  
> q:=x->sin(x+3)-2;  
q := x → sin(x + 3) - 2
```

Beirlgan q funksiyani uzluksizlikka teksirish:

```
> iscont(q(x), x=-infinity..+infinity);  
true
```

Qaralayotgan q funksiya $R=(-\infty, +\infty)$ da uzluksiz ekan. Demak, q funksiya haqiqiy sonlar o'qining hamma joyida aniqlangan.

Beirlgan q funksiyani juft yoki toqlikka tekshirish:

```
> if q(-x)=q(x) then  
  print("Javob: berilgan q juft funksiya")  
elif q(x)=-q(-x) then  
  print("Javob: berilgan q toq funksiya")  
else  
  print("Javob: berilgan q na juft, na toq funksiya")  
fi;  
"Javob: berilgan q na juft, na toq funksiya"
```

```
> T:=2*Pi;  
solve(q(x+T)=q(x));  
T := 2 π  
x
```

```
> limit(q(x), x=-infinity);  
-3 .. -1
```

```
> limit(q(x), x=+infinity);  
-3 .. -1
```

Funksiyaning birinchi tartibli hosilasini hisolash:

```
> q1:=diff(q(x), x);  
q1 := cos(x + 3)
```

Funksiyaning ekstremumlarini topish:

```
> extrema(q(x), {}, x, 's');  
s;  
{ -1 }  
{ { x = -3 +  $\frac{\pi}{2}$  } }
```

Funksiya hosilasining nollarini topish:

```
> fsolve(q1=0, x=-4*Pi..4*Pi);  
-1.429203673  
> evalf(%, 2);  
-1.4  
> solve(q1, x);  
-3 +  $\frac{\pi}{2}$ 
```

Funksiyani monotonlikka tekshirish:

```

> x:=-10;
x := -10
> q(x):=q1;
q(-10) := cos(7)
> evalf(%);
0.7539022543
> x:=10;
x := 10
> q(x):=q1;
q(10) := cos(13)
> evalf(%);
0.9074467815

```

Yuqoridagi hisoblashlardan argument x ning **(-infinity,-1.4)** oraliqdan olingan qiymatlarida q funksiya birinchi tartibli hosilasining qiymati musbat, demak g funksiya bu oraliqda o'suvchi, argument x ning **(-1.4,infinity)** oraliqdan olingan qiymatlarida esa q funksiya birinchi tartibli hosilasining qiymati musbat, demak q funksiya bu oraliqda ham o'suvchi.

Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini topish:

```

> maximize(q(x),x=-infinity..infinity);
-1
> minimize(q(x),x=-infinity..infinity);
-3

```

Funksiyaning botiqlik va qavariqlik oraliqlari hamda egilish nuqtalarini topish:

```

> q2:=diff(q(x),x$2);
q2 := -sin(x + 3)

```

Funksiya 2-tartibli hosilasining nollarini topish:

```

> fsolve(q2=0,x);
0.1415926536
> x:=-10;
x := -10
> q(x):=q2;
q(-10) := sin(7)
> evalf(%);
0.6569865987
> x:=10;
x := 10
> q(x):=q2;
q(10) := -sin(13)
> evalf(%);
-0.4201670368

```

Yuqoridagi hisoblashlardan $(-\infty, 0.14)$ va $(0.14, \infty)$ oraliqlarda funksiya ikkinchi tartibli hosilasining qiymati manfiy, demak funksiya bu oraliqlarda botiq.

Berilgan funksiya grafigining asimptotalarini topish:

```
> k1:=limit(q(x)/x,x=-infinity);
                                k1:=0
> k2:=limit(q(x)/x,x=infinity);
                                k2:=0
> k:=0;
                                k:=0
> b:=limit(q(x)-k*x, x=-infinity);
                                b:=-∞
> u1:=k*x+b;
                                u1:=-∞
```

Funksiya grafigining koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topish:

```
> unassign('x');
> fsolve(q(x)=0,x);
                                fsolve(sin(x+3)-2=0,x)
> q(0);
                                sin(3)-2
> evalf(%);
                                -1.858879992
```

Berilgan funksiyaning grafigini yasash:

```
> plot({q(x),k*x+b},x=-2*Pi..2*Pi,view=[-2*Pi..2*Pi,-
2*Pi..2*Pi],scaling=constrained,color=blue);
```

