

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM
VAZIRLIGI**

ALISHER NAVOIY NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

**MEXANIKA-MATEMATIKA
FAKULTETI**

«MATEMATIK MODELLSHTIRISH» KAFEDRASI

**«KOMBINATORIKA MASALALARINING ALGORITMLARINI
NAMOIYISH QILISH DASTURIY TA'MINOTINI YARATISH»
mavzusidagi**

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Bajardi: «Amaliy matematika va
informatika» ta'lim yo'nalishi
bitiruvchi 4 kurs talabasi
QURBONOV OTAMUROD
BEGMURODOVICH.

Ilmiy rahbar:
dots. BOZOROV I.N.

Bitiruv malakaviy ishi kafedradan dastlabki himoyadan o'tdi.

_____ sonli bayonnomasi «_____» _____ 2013 yil.

SAMARQAND – 2013 y.

MUNDARIJA

Kirish.....	3
I BOB. Kombinatorikaning asosiy tushunchalari.....	7
1.1. Kombinatorika haqida umumiy tushunchalar.....	7
1.2. Asosiy kombinatsiyalar.....	10
1.3. Paskal uchburchagi. Nyuton binomi.....	17
1.4. Takrorli kombinatsiyalar.....	20
1.5. Fibonachchi sonlari.....	24
1.6. Bo‘laklashlar kombinatorikasi.....	24
 II BOB. Kombinatorika masalalarining algoritmlari va dasturiy vositalari.....	 29
2.1. Kombinatorika elementlarining ba’zi masalalarga tatbiqlari.....	29
2.2. Kombinatorika masalalarini yechish algoritmlari va dasturiy vositalari.....	30
2.3. Dasturdan foydalanuvchilar uchu ko‘rsatmalar.....	35
 Xulosa.....	 39
Foydalanilgan adabiyotlar.....	41
Ilovalar	

Kirish

Masalaning qo'yilishi. Kombinatorikada ko'p qo'llaniladigan usul va qoidalar: kombinatsiyalar (o'rin almashtirishlar, o'rinlashtirishlar, guruhlashlar), Paskal uchburchagi, Nyuton binomi, ko'phad formulasi, Fibonachchi sonlari va bo'laklashlar kombinatorikasini qo'llab, ular yordamida turli masalalarni yechish algoritmlari va dasuriy vositalarini (ob'ektga yo'naltirilgan "Delphi" dasturlash tilida viziullashtirilgan) ishlab chiqish.

Mavzuning dolzarbligi. Ma'lumki, jamiyatning turli sohalarida ko'pincha, narsa va hodisalarning xossalarini o'rganish jarayonida o'rganilayotgan ob'yekt elementlarini bir-birlari bilan taqqoslab, ularni birgalikda qarab yoki elementlarni bo'laklarga ajratib turli xulosalar qilishga to'g'ri keladi. **Kombinatorikada** chekli to'plamni qismlarga ajratish, ularni o'rinish va o'zaro joylash bilan bog'liq muammolar o'rganiladi. Ko'pgina iqtisodiy, ijtimoiy va boshqa sohalarning aksariyat masalalarini yechishda kombinatorikada ko'p qo'llaniladigan usul va qoidalar shuningdek, maktab, akademik litsey va kasb hunar kollejlarida ko'p uchraydigan kombinatorik masalalarni yechishda foydalaniladi.

Shu sababli ushbu ishda har xil kombinatorik masalalarni yechish algoritmlari hamda dasuriy vositalarini ishlab chiqish masalalari qaratiladi.

Ishning maqsad va vazifalari. Bitiruv malakaviy ishning asosiy maqsadi turli kombinatorik masalalarni yechishda va ularning ob'ektga yo'naltirilgan "Delphi" dasturlash tilida (viziullashtirilgan) dasuriy vositalarini yaratishdan iborat.

Ilmiy-tatqiqot usullari. Ushbu bitiruv malakaviy ishida asosan, matematik induksiya hamda dasturlashtirishda katta sonlar ustida har xil amallarni bajarish usullaridan foydalanildi.

Mavzuning o'rganilish darajasi. Kombinatorikaning ba'zi elementlari eramizdan oldingi II asrda hindistonliklarga ma'lum edi. Ular hozirgi vaqtda guruhlashlar deb ataluvchi kombinatorik tushunchadan foydalanishgan.

Umuman olganda, kombinatorikaning dastlabki rivoji qimor o'yinlarini tahlil qilish bilan bog'liq. Ba'zi atoqli matematiklar, masalan, B. Paskal, Yakob Bernulli, L. Eyler, P. L. Chebishev turli o'yinlarda (tanga tashlash, soqqa tashlash, qarta o'yinlari va shu kabilarda) ilmiy jihatdan asoslangan qaror qabul qilishda kombinatorikani qo'llashgan.

XVII asrda kombinatorika matematikaning alohida bir ilmiy yo'nalishi sifatida shakllana boshladi. B. Paskal o'zining "Arifmetik uchburchak haqida traktat" va "Sonli tartiblar haqida traktat" (1665 y) nomli asarlarida hozirgi vaqtda binomial koeffitsientlar deb ataluvchi sonlar haqidagi ma'lumotlarni keltirgan. P. Ferma esa figurali sonlar bilan birlashmalar nazariyasi orasida bog'lanish borligini bilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi. Bitiruv malakaviy ishida olingan natijalar ilmiy-uslubiy xarakterga ega bo'lib, turli kombinatorik masalalarni yechishda va ularning ob'ektga yo'naltirilgan "Delphi" dasturlash tilida (viziullashtirilgan) dasturiy vositasi ishlab chiqilgan.

Tadqiqot predmeti va ob'ekti. Tadqiqotning ob'ekti kombinatsiyalar (o'rin almashtirishlar, o'rinlashtirishlar, guruhlashlar), Paskal uchburchagi, Nyuton binomi, ko'phad formulasi, Fibonachchi sonlari va bo'laklashlar kombinatorikasidan iborat.

Tadqiqotning ilmiy va amaliy ahamiyati. Ishda olingan natijalar va unda qo'llanilgan usullardan turli iqtisodiy, ijtimoiy sohalar, ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaning, umumta'lim maktablari, akademik litsey va kasb-hunar kollejlarning ko'pgina masalalarini hamda "Informatika" fani bo'yicha o'tkaziladigan fan olimpiadalari masalalarini yechishda foydalanish mumkin.

Ishning tuzilishi. Ushbu ish kirish, ikki bob, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati va ilovalardan iborat.

I bob 6 ta paragrafdan iborat bo'lib, unda olingan natijalarni bayon qilishda zarur bo'lgan asosiy tushunchalar: kombinatorikada ko'p qo'llaniladigan usul va qoidalar: kombinatsiyalar (o'rin almashtirishlar, o'rinlashtirishlar, guruhlashlar), Paskal uchburchagi, Nyuton binomi, ko'phad formulasi, Fibonachchi sonlari va

bo‘laklashlar kombinatorikasi va ularning ba’zi xususiyatlarining kombinatorikada qo‘llanilishi bayon qilingan.

II bobda ishga oid kombinatorikaning bir necha masalalari Nyuton binomi, Fibonachchi sonlari va bo‘laklashlar kombinatorikasini qo‘llagan holda ba’zi masalalarni yechish algoritmlari keltirilib, ular uchun ob’ektga yo‘naltirilgan “Delphi” dasturlash tilida, viziullashtirilgan dasturiy vositalari ishlab chiqilgan hamda ulardan foydalanish uchun ko‘rsatmalar berilgan.

Olingan natijalarning qisqacha mazmuni. Bitiruv malakaviy ishida qaralgan masalalar va ularni yechish uchun juda qulay interfeysga ega bo‘lgan ob’ektga yo‘naltirilgan “Delphi” dasturlash tilida, viziullashtirilgan dasturiy vositalari ishlab chiqildi.

Biz quyida ishida qaralgan masalalar va ulardan olingan asosiy natijalarni qiaqacha keltirib o‘tamiz:

2.1-masala. Berilgan N va K ga ko‘ra, N ta har buyumni K tadan qilib guruhlariga ajratishlar sonini beruvchi $C(n,k) = N! / (K! * (N-K)!)$ formulaning qiymatini hisoblab beruvchi va uni barcha raqamlari bilan chiqaruvchi dastur tuzilsin.

N va K natural sonlar, $1 \leq K \leq N < 1000$.

Dasturni testlash natijasida quyidagi natijalar olindi.

1. $N=25, K=5;$ 53130;
2. $N=45, K=15;$ 344867425584
3. $N=250, K=150;$ 6063024592784106879207066654236394547840326091
95275867182946731945837710;
4. $N=720, K=660;$ 26390396795222677975727207509769281627761276
862587589456302534175336254818515595864127888

2.2-masala. Nyuton binomi (ikki handing yig‘indisi va ayirmasini n -darajaga ko‘tarish)ni hisoblovchi dastur tuzilsin.

Dasturni testlash natijasida quyidagi natijalar olindi.

1. $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5;$
2. $(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6;$

3. $(a+b)^9 = a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 + 126a^5b^4 + 126a^4b^5 + 84a^3b^6 + 36a^2b^7 + 9ab^8 + b^9$;
4. $(a-b)^8 = a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$.

2.3-masala. Fibonachchi sonlari (hadlari)ni hisoblovchi dastur tuzilsin (n ning katta qiymatlari uchun).

Dasturni testlash natijasida quyidagi natijalar olindi.

1. $n=50$; $F[50]=12586269025$;
2. $n=250$; $F[250]=78963258261317305092827389436343328936862686758$
 76375 ;
3. $n=500$; $F[500]=322456169788013972438287040728395007025658769730$
 $7264108962948325571622863290691557658876222521294125$;
4. $n=1000$; $F[1000]=3080322634775209689623239873322471161642996440$
 $906533187938298969649928516003704476137795166849228875$;

2.4-masala. Kenguru uzunligi N ta katak bo'lgan maydonda faqat oldinga sakrash mumkin. Kenguruninig sakrash imkoniyati ko'pi bilan K ta katak bo'lsin. Kenguru maydonning boshidan oxirigacha necha xil usul bilan yetib borishi mumkinligini aniqlovchi dastur tuzilsin. ($K \leq N < 1000$).

Dasturni testlash natijasida quyidagi natijalar olindi.

1. $N=25, K=5$; 11749641 ;
2. $N=70, K=6$; 345943529496197516097
3. $N=100, K=8$ $4497029078131002438828254970389$;
4. $N=25, K=5$; $107842550886781910174330383006956958971838054710$;

I BOB. Kombinatorikaning asosiy tushunchalari

Ushbu bobda kombinatorikaning asosiy tushunchalari va unda ko'p qo'llaniladigan usul va qoidalar: kombinatsiyalar (o'rin almashtirishlar, o'rinlashtirishlar, guruhlashlar), Paskal uchburchagi, Nyuton binomi, ko'phad formulasi, Fibonachchi sonlari va bo'laklashlar va ularning ba'zi xususiyatlarining kombinatorikada qo'llanilishi bayon qilingan.

1.1. Kombinatorika haqida umumiy tushunchalar

Kombinatsiya – bu kombinatorikaning asosiy tushunchasidir. Bu tushuncha yordamida ixtiyoriy to'planning qandaydir sondagi elementlaridan tashkil topgan tuzilmalar ifodalanadi. Kombinatorikada bunday tuzilmalarning **o'rin almashtirishlar**, **o'rinlashtirishlar** va **guruhlashlar** deb ataluvchi asosiy ko'rinishlari o'rganiladi.

Kombinatorikada ko'p qo'llaniladigan usul va qoidalar. Kombinatorika va graflar nazariyasida tasdiqlarni isbotlashning samarali usullaridan biri bo'lgan **matematik induksiya usuli** ko'p qo'llaniladi. Bu usulning ketma-ket bajariladigan ikkita qismi bo'lib, ular quyidagi umumiy g'oyaga asoslanadi. Faraz qilaylik, isbotlanishi kerak bo'lgan tasdiq birorta xususiy $n = n_0$ qiymat (masalan, $n_0 = 1$) uchun to'g'ri bo'lsin (usulning bu qismi **baza** yoki **asos** deb ataladi). Agar bu tasdiqning istalgan $n = k > n_0$ uchun to'g'riligidan uning $n = k + 1$ uchun to'g'riligi kelib chiqsa, u holda tasdiq istalgan natural $n \geq n_0$ son uchun to'g'ri bo'ladi (**induksion o'tish** yoki **induktiv o'tish**).

Shuni ta'kidlash kerakki, biror tasdiqni isbotlash uchun matematik induksiya usuli qo'llanilganda, bu usulning ikkala qismini ham tekshirib ko'rish muhimdir, ya'ni baza va induksion o'tish albatta tekshirilishi shart. Ulardan biri tekshirilmasa noto'g'ri natijalar hosil bo'lishi ham mumkin. Bundan tashqari, baza birorta xususiy qiymatdan boshqa ko'p, hattoki, juda ko'p xususiy hollar uchun

tekshirilib, ijobiy natija olinganda ham, bu hollarni umumlashtiruvchi natijaviy tasdiq noto'g'ri bo'lib chiqishi mumkin. Bu mulohazalarning o'rinli ekanligini quyida keltirilgan misollar ko'rsatadi.

Matematik induksiya usulining tadbqiqiga yana bir misol sifatida quyidagi tasdiqni keltiramiz.

1.1-tasdiq. *Ixtiyoriy chekli A to'plam uchun $|2^A| = 2^{|A|}$ tenglik o'rinlidir.*

Kombinatorikada sodda, o'z-o'zidan ravshan bo'lgan, ammo muhim qoidalar bor. Bunday qoidalar sifatida qo'shish, ko'paytirish hamda kiritish va chiqarish qoidalari deb ataluvchi qoidalarni ko'rsatish mumkin.

m ta elementli A to'plam va n ta elementli B to'plamlar berilgan bo'lib, ular kesishmasin. **Qo'shish qoidasiga** ko'ra, A yoki B to'plamga tegishli bo'ladigan birorta elementni tanlash imkoniyatlari soni $(m + n)$ ga tengdir. **"Yoki"** **qoidasi** deb ham ataluvchi bu qoida mazmunini quyidagi tasdiq ham ifodalaydi.

1.2-tasdiq. *Agar ixtiyoriy chekli A va B to'plamlar uchun $A \cap B = \emptyset$ bo'lsa, u holda $|A \cup B| = |A| + |B|$ bo'ladi.*

Demak, qo'shish qoidasiga ko'ra, kesishmaydigan ikkita to'plam birlashmasining quvvati shu to'plamlar quvvatlarining yig'indisiga tengdir.

Ko'paytirish qoidasiga asosan, m ta elementli A va n ta elementli B to'plamlarning elementlaridan tuzish mumkin bo'lgan barcha $\langle a, b \rangle$ ($a \in A$, $b \in B$) kortejlar (juftliklar) soni mn ga teng. Bu qoida **"va"** **qoidasi** deb ham ataladi. Uni quyidagi tasdiq ko'rinishda ifodalash ham mumkin.

1.3-tasdiq. *Ixtiyoriy chekli A va B to'plamlar uchun $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ tenglik o'rinlidir.*

Demak, ko'paytirish qoidasiga ko'ra, ixtiyoriy ikkita chekli to'plam Dekart ko'paytmasining quvvati shu to'plamlar quvvatlarining ko'paytmasiga tengdir.

Umumiy holda, agar chekli A va B to'plamlar hech bo'lmaganda bitta umumiy elementga ega bo'lsa, u holda $|A| + |B|$ yigindining qiymatini aniqlashda $A \cup B$ to'plamning ba'zi elementlarini, aniqrog'i, $A \cap B$ to'plamning

elementlarini ikki marta hisobga olishga to'g'ri keladi. Bu mulohaza asosida quyidagi tasdiqqa kelimiz.

1.4-tasdiq. *Ixtiyoriy chekli A va B to'plamlar uchun $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ tenglik o'rinlidir.*

1.4-tasdiqning tasdig'ini umumiy holda ikkita chekli to'plamlar birlashmasining quvvatini hisoblash qoidasi deyish mumkin. Bu qoidaning ma'nosidan kelib chiqqan holda, uni **kiritish va chiqarish qoidasi** deb atash qabul qilingan.

Ravshanki, 1.4- tasdiqda keltirilgan tenglikdan foydalanib $|A|$, $|B|$, $|A \cup B|$ va $|A \cap B|$ miqdorlarning ixtiyoriy uchasi ma'lum bo'lganda to'rtinchisini hisoblash formulasini hosil qilish mumkin.

Yuqorida bayon qilingan ikkita to'plam uchun qo'shish, ko'paytirish hamda kiritish va chiqarish qoidalarini chekli sondagi istalgan chekli to'plamlar uchun umumlashtirish mumkin.

Avvalo, kiritish va chiqarish qoidasining umumlasmasi sifatida quyidagi tasdiqni keltiramiz.

1.5-tasdiq (umumlashgan kiritish va chiqarish qoidasi). *Ixtiyoriy chekli $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ to'plamlar uchun*

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + \dots + |A_n| - \\ &\quad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \dots - |A_{n-1} \cap A_n| + \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \dots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| - \\ &\quad - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned}$$

munosabat o'rinlidir.

1.6-tasdiq (umumlashgan qo'shish qoidasi). *Juft-jufti bilan kesishmaydigan ixtiyoriy chekli $A_1, A_2, \dots, A_n$ to'plamlar uchun*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$$

tenglik o'rinlidir.

1.7-tasdiq. *Ixtiyoriy chekli $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ to'plamlar uchun*

$$\begin{aligned}
|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + \dots + |A_n| - \\
&- |A_1 \cup A_2| - |A_1 \cup A_3| - \dots - |A_{n-1} \cup A_n| + \\
&+ |A_1 \cup A_2 \cup A_3| + |A_1 \cup A_2 \cup A_4| + \dots + |A_{n-2} \cup A_{n-1} \cup A_n| - \\
&- \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|.
\end{aligned}$$

munosabat o‘rinlidir.

1.8-tasdiq (umumlashgan ko‘paytirish qoidasi). *Elementlari soni mos ravishda $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ bo‘lgan $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ to‘plamlardan faqat bittadan element olib tuzilgan k uzunlikka ega kortejlar soni $n_1 n_2 n_3 \dots n_k$ ga tengdir.*

1.2. Asosiy kombinatsiyalar

O‘rin almashtirishlar. Elementlari $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ bo‘lgan to‘plamni qaraymiz. Bu to‘plam elementlarini har xil tartibda joylashtirib (yozib), tuzilmalar (kombinatsiyalar) hosil qilish mumkin, masalan,

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n; a_2, a_1, a_3, \dots, a_n; a_2, a_3, a_1, \dots, a_n.$$

Bu tuzilmalarning har birida berilgan to‘plamning barcha elementlari ishtirok etgan holda ular bir-biridan faqat elementlarining joylashish o‘rinlari bilan farq qiladilar.

1.1-ta’rif. *Shu usul yordamida hosil qilingan kombinatsiyalarning har biri berilgan $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ to‘plam elementlarining **o‘rin almashtirishi** deb ataladi.*

Aslida “o‘rin almashtirish” iborasi to‘plam elementlarining o‘rinlarini o‘zgartirish harakatini anglatganda, bu yerda uni shu harakat natijasidagi hosil bo‘lgan tuzilma sifatida qo‘llaymiz. Bu iboradan uning asl ma’nosida ham foydalanamiz.

O‘rin almashtirishni ifodalashda uning elementlarini ajratuvchi belgi sifatida yuqorida “,” (vergul) belgisidan foydalanildi. Ammo bu muhim emas, bu yerda boshqa belgidan ham foydalanish, hattoki, yozuvning ixchamligi maqsadida, elementlar orasidagi ajratuvchi belgilarni tushirib qoldirilish ham mumkin. Bu

eslatma bundan keyin bayon etiladigan boshqa kombinatorik tuzilmalar uchun ham o‘rinlidir.

To‘plam tushunchasiga asoslanib, bu yerda qaralayotgan o‘rin almashtirishlar tarkibida elementlarning takrorlanmasligini eslatib o‘tamiz. Shu sababli bunday o‘rin almashtirishlarni **betakror (takrorli emas) o‘rin almashtirishlar** deb ham atash mumkin. Ushbu bobning 4- paragrafida takrorli o‘rin almashtirishlar ko‘riladi.

Berilgan n ta elementli to‘plam uchun barcha o‘rin almashtirishlar sonini P_n bilan belgilash qabul qilingan.

Bitta elementli $\{a\}$ to‘plam uchun faqat bitta a ko‘rinishdagi o‘rin almashtirish borligi ravshandir: $P_1 = 1$.

Ikkita elementli $\{a, b\}$ to‘plam elementlaridan o‘rin almashtirishlarni bitta elementli $\{a\}$ to‘plam uchun a o‘rin almashtirishidan foydalanib quyidagicha tashkil qilamiz: b element a elementdan keyin yozilsa ab o‘rin almashtirishga, oldin yozilsa esa ba o‘rin almashtirishga ega bo‘lamiz. Demak, ko‘paytirish qoidasiga binoan ikkita o‘rin almashtirish bor: $P_2 = 2 = 1 \cdot 2$.

Uchta elementli $\{a, b, c\}$ to‘plam uchun o‘rin almashtirishlar tashkil qilishda ikkita elementli $\{a, b\}$ to‘plam uchun tuzilgan ab va ba o‘rin almashtirishlardan foydalanish mumkin. Berilgan to‘plamning c elementini ab va ba o‘rin almashtirishning har biriga uch xil usul bilan joylashtirish mumkin: ularning elementlaridan keyin, elementlarining orasiga va elementlaridan oldin. Ko‘paytirish qoidasini qo‘llasak, uchta elementli $\{a, b, c\}$ to‘plam uchun oltita ($P_3 = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$) har xil o‘rin almashtirishlar hosil bo‘lishini aniqlaymiz. Ular quyidagilardir:

$$abc, acb, cab, bac, bca, cba.$$

Shu tarzda davom etib “ n ta elementli to‘plam uchun barcha o‘rin almashtirishlar soni birdan n gacha bo‘lgan barcha natural sonlarning ko‘paytmasiga teng” deb faraz qilish mumkin: $P_n = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - 1)n$.

1.9-tasdiq. *Elementlari soni n ta bo'lgan to'plam uchun o'rin almashtirishlar soni $n!$ ga teng, ya'ni $P_n = n!$.*

1.1-misol. Besh nafar tomoshabinlarning beshta o'rinni egallash imkoniyatlari (variantlari) sonini toping.

Agar tomoshabinlarni a, b, c, d, e harflar bilan belgilasak, u holda $T = \{a, b, c, d, e\}$ tomoshabinlar to'plamiga ega bo'lamiz. Tomoshabinlarni o'rinlarga joylashtirish imkoniyatlarining (variantlarining) har biriga tomoshabinlar T to'plami elementlarining qandaydir o'rin almashtirishi mos keladi. T to'plam beshta elementli bo'lgani uchun, 1.9- tasdiqga asosan, $P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ bo'ladi. Demak, besh nafar tomoshabinning beshta o'rinni egallash imkoniyatlari soni 120 ga teng. ■

O'rinlashtirishlar. n ta elementli $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ to'plam berilgan bo'lsin.

1.2-ta'rif. $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ to'plamning ixtiyoriy m ta elementidan hosil qilingan tartiblangan $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}\}$ tuzilmaga (kombinatsiyaga) n ta elementdan m tadan **o'rinlashtirish** deb ataladi.

Bu ta'rifdan ko'rinib turibdiki, elementlari soni bir xil bo'lgan ikkita har xil o'rinlashtirishlar bir-biridan elementlari bilan yoki bu elementlarning joylashish tartibi bilan farq qiladilar. Bundan tashqari, n ta elementdan m tadan o'rinlashtirishlar uchun $m \leq n$ bo'lishi ham ravshan. Bu yerda qaralayotgan o'rinlashtirishlar tarkibidagi elementlarning takrorlanmasligini eslatib o'tamiz. Shu sababli bunday o'rinlashtirishlarni **betakror (takrorli emas) o'rinlashtirishlar** deb ham atash mumkin. Ushbu bobning 4- paragrafida takrorli o'rinlashtirishlar ko'riladi.

Berilgan n ta elementdan m tadan o'rinlashtirishlar soni, odatda, A_n^m bilan belgilanadi.

Ravshanki, berilgan n ta $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ elementlardan bittadan o'rinlashtirishlar n ta bo'ladi (bular: a_1 ; a_2 ; va hokazo, a_n), ya'ni $A_n^1 = n$.

n ta elementdan bittadan o‘rinlashtirishlar yordamida n ta elementdan ikkitadan o‘rinlashtirishlarni quyidagicha tuzish mumkin. n ta elementdan bittadan o‘rinlashtirishlarning har biridagi elementdan keyin yoki oldin qolgan $(n-1)$ ta elementlardan ixtiyoriy bittasini joylashtirsa bo‘ladi. Natijada, ko‘paytirish qoidasiga binoan, jami soni $A_n^2 = n(n-1)$ ta bo‘lgan n ta elementdan ikkitadan o‘rinlashtirishlarni hosil qilamiz.

Shu kabi, n ta elementdan uchta o‘rinlashtirishlarni hosil qilish uchun n ta elementdan ikkitadan o‘rinlashtirishlarga murojaat qilish mumkin. Bu yerda n ta elementdan ikkitadan o‘rinlashtirishlarning har biri uchun uni tashkil etuvchi ikkita elementlardan oldin, elementlar orasiga yoki elementlardan keyin qolgan $(n-2)$ ta elementlardan ixtiyoriy bittasini joylashtirish imkoniyati bor. Ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra natijada jami soni $A_n^3 = n(n-1)(n-2)$ ta bo‘lgan n ta elementdan uchta o‘rinlashtirishlarni hosil qilamiz.

Shunga o‘xshash mulohaza yuritib, n ta elementdan to‘rtta, beshta va hokazo o‘rinlashtirishlar soni uchun mos ifodalarni aniqlash qiyin emas.

1.10-tasdiq. n ta elementdan m tadan o‘rinlashtirishlar soni eng kattasi n ga teng bo‘lgan m ta ketma-ket natural sonlarning ko‘paytmasiga tengdir, ya’ni $A_n^m = n(n-1)\dots(n-m+1)$.

1.2-misol. Guruh 25 nafar talabadan tashkil topgan bo‘lsin. Bu guruhda guruh sardori, guruh sardorining yordamchisi va kasaba uyushmasining guruh bo‘yicha vakilini saylash zarur. Har bir talaba bu vazifalardan faqat bittasini bajaradi deb hisoblansa, saylov natijalari uchun qancha imkoniyat mavjud?

Bu yerda 25 ta elementli talabalar to‘plamining tartiblangan uchta elementli (guruh sardori, guruh sardorining yordamchisi va kasaba uyushmasining guruh bo‘yicha vakili) qism to‘plamlari sonini aniqlash zarur. Bu esa 25 ta elementdan uchta o‘rinlashtirishlar sonini topish demakdir. Qo‘yilgan savolga javob topish maqsadida 2- tasdiqdagi isbotlangan formulani $n = 25$ va $m = 3$ bo‘lgan holda qo‘llab, $A_{25}^3 = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13800$ ekanligini aniqlaymiz. Demak, guruhdagi saylov natijalari uchun 13800 ta imkoniyat mavjud. ■

$A_n^m = n(n-1)\dots(n-m+1)$ formulani $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ ko'rinishda ham yozish

mumkin. Haqiqatdan ham,

$$A_n^m = n(n-1)\dots(n-m+1) = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)(n-m)!}{(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Yuqorida ta'kidlaganidek, n ta elementdan m tadan o'rilashtirishlar n elementli to'plamning bir-biridan tarkibi bilan ham, elementlarining joylashishi bilan ham farqlanadigan qism to'plamlaridan iboratdir. Agar bu o'rinlashtirishlarda n ta elementli to'plamning barcha elementlari qatnashsa (ya'ni $m = n$ bo'lsa), n ta elementli to'plam uchun barcha o'rin almashtirishlar hosil bo'lishi tabiiydir. Shu tufayli, o'rin almashtirishlarning oldin keltirilgan ta'rifiga ekvivalent quyidagi ta'rifni ham berish mumkin.

n ta elementli to'plam uchun o'rin almashtirishlar deb n ta elementdan n tadan o'rinlashtirishlarga aytiladi. Bunda har bir element faqat bir marta qatnashadi va ular bir-biridan faqat o'zaro joylashishlari bilan farq qiladilar.

O'rin almashtirishlarning bu ta'rifiga asoslanib n ta elementli to'plam uchun o'rin almashtirishlar soni formulasini o'rinlashtirishlar soni formulasi yordamida hosil qilish mumkin. Haqiqatdan ham,

$$P_n = A_n^n = n(n-1)\dots(n-(n-1)) = n(n-1)\dots 2 \cdot 1 = n!$$

$$\text{yoki } P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!.$$

Guruhlashlar. $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ to'plam berilgan bo'lsin. Bu n elementli to'plamning elementlaridan m ta elementga ega qism to'plamlarni shunday tashkil etamizki, ular bir-biridan elementlarining joylashish tartibi bilan emas, faqat tarkibi bilan farq qilsinlar.

1.3-ta'rif. Bunday m ta elementli qism to'plamlarning har biriga n ta elementdan m tadan guruhlash deb ataladi.

n ta elementdan m tadan guruhlashlar sonini C_n^m bilan belgilaymiz.

Guruhlashlar sonini $\binom{m}{n}$ yoki $\binom{n}{m}$ shaklda belgilashlar ham uchraydi.

Guruhlash ta'rifidan $1 \leq m \leq n$ ekanligi va agar biror guruhlashda qandaydir usul bilan elementlar o'rinlari almashtirilsa, u (guruhlash sifatida) o'zgarmasligi kelib chiqadi. Bu yerda qaralaytgan guruhlash tarkibida elementlarning takrorlanmasligini eslatib o'tamiz. Shu sababli bunday guruhlashni **betakror** (**takrorli emas**) **guruhlash** deb ham atash mumkin. Ushbu bobning 4- paragrafida takrorli guruhlashlar o'rganiladi.

Bir ($n=1$) elementli $\{a\}$ to'plam uchun faqat bitta guruhlash mavjud, u ham bo'lsa bir ($m=1$) elementlidir: a . Demak, $C_1^1 = 1$.

Ikki ($n=2$) elementli $\{a, b\}$ to'plam uchun bittadan ($m=1$) guruhlashlar ikkita (a va b), ikkitadan ($m=2$) guruhlashlar esa faqat bitta (ab). Demak, $C_2^1 = 2$, $C_2^2 = 1$.

Uch ($n=3$) elementli $\{a, b, c\}$ to'plam uchun guruhlashlar: bittadan ($m=1$) – a , b va c (uchta); ikkitadan ($m=2$) – ab , ac , bc (uchta); uchtdan ($m=3$) – abc (faqat bitta). Demak, $C_3^1 = 3$, $C_3^2 = 3$, $C_3^3 = 1$.

To'rtta ($n=4$) elementdan tashkil topgan $\{a, b, c, d\}$ to'plam elementlaridan tuzilgan guruhlashlar: bittadan – a , b , c va d (to'rtta); ikkitadan – ab , ac , ad , bc , bd , cd (oltita); uchtdan – abc , abd , acd , bcd (to'rtta); to'rttdan $abcd$ (faqat bitta). Demak, $C_4^1 = 4$, $C_4^2 = 6$, $C_4^3 = 4$, $C_4^4 = 1$.

Yuqoridagi mulsohazalar guruhlashlar sonini hisoblash formulasi qanday bo'lishiga to'liq oydinlik kiritmasada, dastlabki tahlil uchun muhimdir. Masalan, n ta elementdan barcha elementlarni o'z ichiga oladigan faqat bitta guruhlash tashkil etish mumkin degan yoki n ta elementdan bittadan n ta guruhlash bor degan xulosalar ustida o'ylab ko'rish mumkin.

C_n^m sonni hisoblash uchun formula topish maqsadida quyidagicha mulohaza yuritamiz. Ravshanki, agar n ta elementdan m tadan barcha guruhlashlarning har birida elementlarning o'rinlari imkoniyat boricha almashtirilsa, natijada n ta

elementdan m tadan barcha o‘rinlashtirishlar hosil bo‘ladi. Bu yerda n ta elementdan m tadan tuzilgan C_n^m ta guruhlashning har biridagi m ta elementdan $P_m = m!$ ta o‘rin almashtirishlar hosil qilish mumkin bo‘lganligi tufayli, ko‘paytirish qoidasiga asosan, $P_m C_n^m = A_n^m$ tenglik to‘g‘ridir. Demak,

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m}$$

formula o‘rinlidir. Shunday qilib, quyidagi tasdiq isbotlandi.

1.11-tasdiq. n ta elementdan m tadan guruhlashlar soni eng kattasi n ga teng bo‘lgan m ta ketma-ket natural sonlar ko‘paytmasining dastlabki m ta natural sonlar ko‘paytmasiga nisbati kabidir: $C_n^m = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m}$.

1.3-misol. Qurilish tashkilotining duradgorlar bo‘limida 15 nafar ishchi bor. Ko‘p qavatli uyning eshiklarini ta‘mirlash uchun 3 nafar duradgorni tanlash zarur. Agar bo‘limdagi har bir duradgor bu topshiriqni bajarishga layoqatli bo‘lsa, bunday tanlash imkoniyatlari (variantlari) qancha?

Bo‘limdagi har bir duradgor ta‘mirlash ishini bajarishga layoqatli bo‘lgani uchun, bu masalani hal qilishda guruhlashlar sonini topish formulasidan foydalanish mumkin. Bu yerda $n = 15$, $m = 3$ va $C_{15}^3 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455$. Demak, 15 nafar duradgorlar orasidan 3 nafarini tanlash imkoniyatlari soni 455 ekan. ■

Agar ta‘rif sifatida $C_n^0 = 1$ qabul qilinsa, n ta elementdan m tadan guruhlashlar soni uchun yuqorida keltirilgan formula $m = 0$ bo‘lgan holda ham to‘g‘ri bo‘ladi: $C_n^0 = \frac{n!}{0!n!} = 1$. Tabiiyki, n ta elementdan barcha elementlarni o‘z

ichiga oladigan faqat bitta guruhlash tashkil etish mumkin: $C_n^n = \frac{n!}{n!0!} = 1$.

Guruhlashlar sonini hisoblash uchun

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad C_n^m = \frac{n(n-1)\dots(m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-m)}$$

ko‘rinishdagi formulalardan ham foydalanish mumkin. Bu formulalar quyidagi tengliklardan kelib chiqadi:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{\frac{n!}{(n-m)!}}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{\frac{n!}{m!}}{(n-m)!} =$$

$$= \frac{\frac{n!}{(n-(n-m))!}}{(n-m)!} = \frac{A_n^{n-m}}{P_{n-m}} = \frac{n(n-1)\dots(m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-m)}.$$

Ixtiyoriy natural n soni uchun guruhlashlar soni bir qator xossalarga ega, masalan,

$$C_n^m = C_n^{n-m} \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n),$$

$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1} \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

1.3. Paskal uchburchagi. Nyuton binomi

Paskal uchburchagi haqida umumiy ma’lumotlar. Berilgan n ta elementdan m tadan guruhlashlar soni C_n^m uchun bir necha qatorlarni 1-jadvaldagidek yozamiz:

1- jadval

n	Guruhlashlar soni C_n^m ($m = \overline{0, n}$)
1	$C_1^0 = 1, C_1^1 = 1$
2	$C_2^0 = 1, C_2^1 = 2, C_2^2 = 1$
3	$C_3^0 = 1, C_3^1 = 3, C_3^2 = 3, C_3^3 = 1$
4	$C_4^0 = 1, C_4^1 = 4, C_4^2 = 6, C_4^3 = 4, C_4^4 = 1$
5	$C_5^0 = 1, C_5^1 = 5, C_5^2 = 10, C_5^3 = 10, C_5^4 = 5, C_5^5 = 1$
...	

Bu jadvalda guruhlashlar sonining quyidagi xossalarini kuzatish mumkin:

- har bir qatorning chetlarida birlar joylashgan (bu tasdiq $C_n^0 = C_n^n = 1$ formula bilan ifodalanadi, ushbu bobning 2- paragrafiga qarang);

- har bir qatordagi C_n^m sonlar qatorning teng o'rtasiga nisbatan simmetrik joylashgan, ya'ni qatorning boshidan va oxiridan baravar uzoqlikda turgan sonlar o'zaro teng ($C_n^m = C_n^{n-m}$);
- ikkinchi qatordan boshlab har bir qatordagi birlardan tashqari ixtiyoriy son bu qatordan yuqorida joylashgan qatordagi biri shu son ustida, ikkinchisi esa undan chapda joylashgan ikkita guruhlashlar sonining yig'indisiga teng ($C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$);
- har bir qatordagi C_n^m sonlar shu qator teng o'rtasigacha o'sib, so'ng kamayadi.

Ta'rif sifatida $C_0^0 = 1$ deb qabul qilinsa va bu son yuqoridagi jadvalning $n=1$ raqamli qatoridan oldin $n=0$ raqamli qatori sifatida joylashtirilsa, uchburchak figurasiga o'xshash 1- shakldagi sonlar jadvalini hosil qilish mumkin.

1.4-ta'rif. 1- shakldagi sonlar jadvali **Paskal uchburchagi** deb ataladi.

Bu jadval **arifmetik uchburchak** nomi bilan ham yuritiladi. Paskal uchburchagidagi qatorlar istalgancha davom ettirilishi mumkin. Shunisi qiziqki, Paskal uchburchagi yordamida istalgan n ta elementdan m tadan guruhlashlar sonini faqat qo'shish amali yordamida hosil qilish mumkin (ushbu bobning 2-paragrafdagi C_n^m sonni hisoblash $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, $C_n^m = \frac{n(n-1)\dots(m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots(n-m)}$ va

$C_n^m = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m}$ formulalariga qarang). Bu amal $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$

formulaga asoslanadi.

Nyuton binomi haqida umumiy ma'lumotlar. O'rta maktab matematikasi kursidan quyidagi ikkita qisqa ko'paytirish formulalarini eslaylik:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - \text{yig'indining kvadrati};$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - \text{yig'indining kubi}.$$

Yig'indining navbatdagi ikkita, ya'ni 4- va 5- darajalarini hisoblaymiz:

$$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)^3 = (a+b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) =$$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

$$(a+b)^5 = (a+b)(a+b)^4 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Shunday qilib, **yig'indining bikvadrati** (ya'ni to'rtinchi darajasi)

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

va yig'indining beshinchi darajasi

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

formulalariga ega bo'lamiz.

Yuqorida keltirilgan yig'indining kvadrati, kubi, bikvadrati va beshinchi darajasi formulalari o'ng tomonlaridagi ko'phad koeffitsientlari Paskal uchburchagining mos qatorlaridagi C_n^m ($n=2,3,4,5$) sonlar ekanligini payqash qiyin emas.

1.12-tasdiq. *Barcha haqiqiy a va b hamda natural n sonlar uchun*

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

formula o'rinlidir.

Ixtiyoriy a va b haqiqiy sonlar hamda n natural son uchun $(a+b)^n$ ifodaning ko'phad shaklidagi yoyilmasi (tasvirlanishi) **Nyuton binomi** deb ataladi.

C_n^m sonlarni **binomial koeffitsientlar** deb ham atashadi. Bunday ta'rif bu koeffitsientlarning Nyuton binomi formulasida tutgan o'rniga qarab berilgan bo'lib, C_n^m son

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{n-m} b^m$$

yoyilmadagi $a^{n-m}b^m$ ifodaning koeffitsientidir.

1.13-tasdiq. *Barcha haqiqiy a va b hamda natural n sonlar uchun*

$$(a-b)^n = \sum_{m=0}^n (-1)^m C_n^m a^{n-m} b^m$$

formula o'rinlidir.

1.4-misol. Oxirgi formuladan xususiyl holda quyidagi qisqa ko'paytirish formulalari kelib chiqadi:

$n = 2$ bo'lganda ayirmaning kvadrati formulasi

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$n = 3$ bo'lganda ayirmaning kubi formulasi

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \blacksquare$$

Nyuton binomi formulasini kombinatorik amallar yordamida ham hosil qilish mumkin.

1.4. Takrorli kombinatsiyalar

Takrorli o'rin almashtirishlar. Kombinatorikada oldin qaralgan birlashmalardan tashqari tarkibidagi elementlari takrorlanishi mumkin bo'lgan boshqa birlashmalar ham o'rganiladi. Masalan, takrorlanuvchi elementlar qatnashgan o'rin almashtirishlar, o'rinlashtirishlar va guruhlashlar.

Avval o'rganilgan o'rin almashtirishlar shunday tuzilmalar ediki, ular tarkibidagi elementlar bir-biridan farq qilardi. Endi o'rin almashtirishlar tarkibidagi elementlar takrorlanishi mumkin bo'lgan holni qaraymiz. Tabiiyki, aynan bir xil elementlar o'rinlari almashtirilishi natijasida yangi o'rin almashtirish hosil bo'lmaydi. Shuning uchun tarkibidagi elementlari soni o'zgarmaganda elementlari takrorlanishi mumkin bo'lgan o'rin almashtirishlar soni turli elementlardan tashkil topgan o'rin almashtirishlar soniga qaraganda kichik bo'ladi.

Faraz qilaylik, qandaydir kortejning n ta elementlari orasida bir xil (aynan bir xil) n_1 ta birinchi tur, bir xil n_2 ta ikkinchi tur, va hokazo, bir xil n_k ta k - tur elementlar bo'lsin, bu yerda $n_1, n_2, \dots, n_k$ – hech bo'lmaganda bittasi 1dan farqli natural sonlar.

1.5-ta'rif. *Bu n ta elementlarning o'rinlarini imkoniyati boricha almashtirishlar natijasida hosil bo'lgan kortejlar (kombinatsiyalar) takrorlanuvchi elementlar qatnashgan o'rin almashtirishlar (qisqacha, takrorli o'rin almashtirishlar) deb ataladi.*

n ta elementlari orasida n_1 ta birinchi tur, n_2 ta ikkinchi tur, va hokazo, n_k ta k - tur bir xil elementlar bo'lgan takrorli o'rin almashtirishlar sonini $C_n(n_1, n_2, \dots, n_k)$ bilan belgilaymiz.

1.14-tasdiq. *Takrorli o'rin almashtirishlar soni uchun*

$$C_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

formula o'rinlidir, bu yerda $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ – elementlar soni, k – turlar soni.

1.5-misol. Ikkita a , bitta b va ikkita c harflardan tashkil topgan kortej uchun barcha takrorli o'rin almashtirishlarni tuzing.

Bu misolda uch turdagi ($k = 3$) harflar soni beshga teng ($n=5$) bo'lib, $n_1 = 2$ (ikkita a), $n_2 = 1$ (bitta b) va $n_3 = 2$ (ikkita c). Dastlabki ikkita harflarning (xuddi shuningdek, oxirgi ikkita harflarning ham) o'rinlarini o'zaro almashtirsak yangi o'rin almashtirishlar hosil bo'lmaydi. Barcha takrorli o'rin almashtirishlar soni

$$C_5(2,1,2) = \frac{5!}{2!1!2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2} = 30 \quad \text{bo'ladi.} \quad \text{Bu o'ttizta o'rin}$$

almashtirishlarning hammasi quyida keltirilgan:

$aabcc, aacbc, aaccb, abacc, abcac, abcca,$
 $acabc, acacb, acbac, acbca, accab, accba,$
 $baacc, bacac, bacca, bcaac, bcaca, bccaa,$
 $caabc, caacb, cabac, cabca, cacab, cacba,$
 $cbaac, cbaca, cbcaa, ccaab, ccaba, ccbaa. \blacksquare$

Takrorli o'rinlashtirishlar. n ta elementlardan tashkil topgan to'plam berilgan bo'lsin. Bu elementlardan foydalanib, m ta elementdan tashkil topgan kortejlarni shunday tuzamizki, bu kortejlarga har bir element hohlagancha marta (albatta m dan oshmagan miqdorda) kirishi mumkin bo'lsin va bu kortejlar bir-biridan ularni tashkil etuvchi elementlar turlari bilan yoki bu elementlarning joylashishlari bilan farq qilishsin.

1.6-ta’rif. *Shunday usul bilan tuzilgan kortejlarning har biri n ta turli elementlardan takrorlanuvchi elementlar qatnashgan m tadan o‘rinlashtirish (qisqacha, **takrorli o‘rinlashtirish**) deb ataladi.*

n ta turli elementlardan m tadan takrorli o‘rinlashtirishlar sonini $\overline{A}_n^m$ bilan belgilaymiz.

1.15-tasdiq. *n ta turli elementlardan m tadan takrorli o‘rinlashtirishlar soni n^m ga teng, ya’ni $\overline{A}_n^m = n^m$.*

1.6-misol. Oila a’zolari besh kishidan iborat bo‘lib, ular ikkita ishni bajarishlari zarur (masalan, non sotib olish va uni bo‘laklash), bunda oilaning har bir a’zosi ikkala ishni ham bajarish imkoniyatiga ega. Oila a’zolariga bu ishlarni taqsimlashda mumkin bo‘lgan imkoniyatlar soni aniqlansin.

Bu masalani hal qilish uchun oila a’zolarini a, b, c, d va e harflari bilan belgilab, ishlar ikkita bo‘lgani uchun beshta turli elementlardan ikkitadan barcha takrorli o‘rinlashtirishlarni tuzamiz:

$$aa, ab, ac, ad, ae, ba, bb, bc, bd, be, ca, cb, cc, \\ cd, ce, da, db, dc, dd, de, ea, eb, ec, ed, ee.$$

Hammasi bo‘lib 25 ta ($\overline{A}_5^2 = 5^2 = 25$) takrorli o‘rinlashtirishlar tuzildi. Demak, besh kishidan iborat oila a’zolariga ikkita ishlarni taqsimlashda mumkin bo‘lgan imkoniyatlar soni 25 dir. ■

Takrorli guruhlashlar. Har bir elementi birlashmaga istalgancha marta kiritiladigan va turli n ta elementlardan m tadan olinadigan hamda elementlar tartibi e’tiborga olinmaydigan birlashmalarni (kortejlarni) qaraymiz.

1.7-ta’rif. *Bunaqa birlashmalar n ta turli elementlardan m tadan takrorlanuvchi elementlar qatnashgan guruhlashlar (qisqacha, **takrorli guruhlashlar**) deb ataladi.*

n ta elementlardan m tadan takrorlanuvchi elementlar qatnashgan guruhlashlar ta’rifidan ko‘rinib turibdiki, turli kombinatsiyalar bir-birlaridan hech bo‘lmasa bitta elementi bilan farq qiladi. n ta elementdan m tadan takrorli guruhlashlar sonini $\overline{C}_n^m$ deb belgilaymiz.

1.16-tasdiq. n ta elementdan m tadan takrorli guruhlashlar soni C_{n+m-1}^m ga teng, ya'ni $\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$.

Ko'phad formulasi. Takrorli kombinatsiyalar vositasida Nyuton binomi tushunchasini umumlashtiramiz, ya'ni $(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n$ ifodaning yoyilmasini topish muammosini qaraymiz.

1.17-tasdiq. Ixtiyoriy haqiqiy $a_1, a_2, \dots, a_m$ va natural n sonlar uchun

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n = \sum_{n_1 + n_2 + \dots + n_m = n} C_n(n_1, n_2, \dots, n_m) a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_m^{n_m}$$

formula o'rinlidir, bu formulaning o'ng tomonidagi yig'indi $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$ shartni qanoatlantiruvchi barcha manfiymas butun $n_1, n_2, \dots, n_m$ sonlar uchun amalga oshiriladi.

1.17-tasdiqda keltirilgan tenglik **ko'phad formulasi** yoki **umumlashgan Nyuton binomi formulasi** deb yuritiladi. $C_n(n_1, n_2, \dots, n_m)$ sonlarni **ko'phadiy koeffitsientlar** deb ataymiz.

C_n^k binomial koeffitsient $C_n(n_1, n_2, \dots, n_m)$ ko'phadiy koeffitsientning $m = 2$ bo'lgandagi xususiy holidir.

1.7-misol. $(a + b + c)^3$ ifodaning yoyilmasini toping. Avvalo 3 sonini bo'laklaymiz, ya'ni 3 ni mumkin bo'lgan barcha imkoniyatlar bilan manfiymas butun sonlar yig'indisi shaklida yozamiz:

$$3=3+0+0, 3=2+1+0, 3=2+0+1, 3=1+2+0, 3=1+1+1,$$

$$3=1+2+0, 3=0+3+0, 3=0+2+1, 3=0+1+2, 3=0+0+3.$$

Demak, ko'phad formulasiga ko'ra,

$$\begin{aligned} (a + b + c)^3 &= C_3(3,0,0)a^3 + C_3(2,1,0)a^2b + C_3(2,0,1)a^2c + \\ &+ C_3(1,2,0)ab^2 + C_3(1,1,1)abc + C_3(1,0,2)ac^2 + C_3(0,3,0)b^3 + \\ &+ C_3(0,2,1)b^2c + C_3(0,1,2)bc^2 + C_3(0,0,3)c^3. \end{aligned}$$

Takrorli o'rin almashtirishlar soni $C_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$ formulasini qo'llab

quyidag tenglikni hosil qilamiz:

$$(a+b+c)^3 = \\ = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3. \blacksquare$$

1.5. Fibonachchi sonlari

Fibonachchi sonlarining ta’rifi. Elementlari haqiqiy sonlardan iborat bo‘lgan

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$$

ketma-ketlikni qaraymiz. Bu ketma-ketlikdagi elementlarning uchinchisidan boshlab har biri o‘zidan oldingi ikkita elementning yig‘indisiga teng, ya’ni $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ ($n \geq 3$) bo‘lsin. Ravshanki, bu ketma-ketlikni tashkil qilishda uning dastlabki ikkita hadi muhim bo‘lib, keyingi barcha hadlari rekurrent tenglik vositasida aniqlanadi.

1.8-ta’rif. $u_1 = u_2 = 1$ bo‘lgan holda $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ ($n \geq 3$) rekurrent tenglik vositasida aniqlan ketma-ketlik **Fibonachchi qatori**, uning hadlari esa **Fibonachchi sonlari** deb ataladi.

Tabiiyki, Fibonachchi qatoridagi Fibonachchi sonlarini aniqlash jarayoni cheksizdir. Fibonachchi sonlarining dastlabki 24 tasi quyida keltirilgan:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368.

Eduard Lyuka ixtiyoriy u_1 va u_2 sonlardan boshlanuvchi hamda $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ ($n \geq 3$) rekurrent tenglik bilan aniqlanuvchi sonlar qatorini **umumlashgan Fibonachchi qatori** deb nomlagan.

1.6. Bo‘laklashlar kombinatorikasi

Bo‘laklashlar ta’rifi. Kombinatorikada o‘rin almashtirishlar, o‘rinlashtirishlar va guruhlashlar tushunchalari yordamida yechiladigan masalalar bilan bir qatorda **bo‘laklashlarga** doir masalalar ham qaraladi. Bunday masalalar

turli vaziyatlarda paydo bo'lishlari mumkin. Masalan, qutiga predmetlarni joylashda, axborotni uzatishda, pulni maydalashda, ko'phad formulasidan foydalanish uchun daraja ko'rsatkichini bo'laklashda va hokazo.

Bo'laklashlarga doir masalalar orasida natural sonlarni natural yoki manfiymas butun qo'shiluvchilar yig'indisi sifatida tasvirlash masalasi alohida o'rin tutadi. Bu masalaning mohiyati quyidagidan iborat.

Berilgan natural n sonni $a_1, a_2, \dots, a_k$ natural sonlar yig'indisi ko'rinishda ifodalash imkoniyatlari qancha?

Bu masala turli shartlarda qaralishi mumkin. Masalan:

- qo'shiluvchilar tartibi e'tiborga olinishi yoki olinmasligi mumkin;
- bo'laklashlarda faqat juft yoki toq sondagi qo'shiluvchilar qatnashish sharti qo'yilishi mumkin;
- qo'shiluvchilar bir-biridan farqli yoki ixtiyoriy deb hisoblanishi mumkin va hokazo.

Tabiiyki, bo'laklashlarga doir kombinatorik masalalarni yechishda, bo'laklanayotgan son o'rniga undan kichikroq son(lar)ni bo'laklash yoki qaralayotgan bo'laklashni kamroq sondagi qo'shiluvchilari bo'lgan bo'laklashga keltirish usuli qo'llanilishi maqsadga muvofiqdir.

1.8-ta'rif. *Natural n sonni ixtiyoriy k ta (k – natural son, $k \leq n$) $a_1, a_2, \dots, a_k$ natural sonlar yig'indisi, ya'ni $n = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ ko'rinishda tasvirlashga n sonni k ta qo'shiluvchilarga bo'laklash (qisqacha, bo'laklash) deb ataladi.*

Yuqorida ta'kidlaganimizdek, bo'laklash masalasini ikki vaziyatda, ya'ni qo'shiluvchilar tartibi e'tiborga olingan yoki olinmagan hollarda qarash mumkin. Kombinatorik nuqtai nazardan olganda ikkala hol ham qiziqarlidir.

Bo'laklash masalasini, avvalo, **qo'shiluvchilar tartibi e'tiborga olingan** holda qaraymiz.

Bu holda natural n sonning k ta qo'shiluvchilarga bo'laklanishlari sonini $B(n, k)$ bilan va shu sonning barcha bo'laklanishlari sonini $B(n)$ bilan belgilasak, ravshanki, $B(n) = \sum_{k=1}^n B(n, k)$ tenglik o'rinli bo'ladi.

1.8-misol. Faqat bir yo'nalishda harakatlenganda besh pog'onali zinapoyani hatlab o'tish imkoniyatlari sonini aniqlash talab etilgan bo'lsin.

Tabiiyki, har bir qadamda faqat bittadan pog'onani bosib o'tib, zinapoyani 5 qadamda hatlab o'tish mumkin. Bu harakatni 5 sonning $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ ko'rinishda bo'laklanishi kabi ifodalab, $B(5, 5) = 1$ ekanligini qayd etamiz. Zinapoyani 4 qadamda ham hatlab o'tish mumkin, bu ishning $B(5, 4) = 4$ imkoniyati bor: $5 = 2 + 1 + 1 + 1$, $5 = 1 + 2 + 1 + 1$, $5 = 1 + 1 + 2 + 1$ va $5 = 1 + 1 + 1 + 2$. Shu usulda davom etib, 3 qadam uchun $B(5, 3) = 6$ ta – $5 = 3 + 1 + 1$, $5 = 1 + 3 + 1$, $5 = 1 + 1 + 3$, $5 = 2 + 2 + 1$, $5 = 2 + 1 + 2$, $5 = 1 + 2 + 2$ hamda 2 qadam uchun $B(5, 2) = 4$ ta – $5 = 4 + 1$, $5 = 3 + 2$, $5 = 2 + 3$, $5 = 1 + 4$ tengliklarni yozamiz. Endi barcha pog'onalarni bir qadamda hatlab o'tishga $B(5, 1) = 1$ imkoniyat va $5 = 5$ tenglik mos kelishini e'tiborga olsak, mumkin bo'lgan barcha imkoniyatlarni bayon qilgan bo'lamiz.

Shunday qilib, faqat bir yo'nalishda harakatlenganda besh pog'onali zinapoyani hatlab o'tish imkoniyatlari soni

$$B(5) = B(5, 1) + B(5, 2) + B(5, 3) + B(5, 4) + B(5, 5) = 16$$

bo'ladi. ■

Endi $B(n, k)$ va $B(n)$ miqdorlarni hisoblash formulalarini topish bilan shug'ullanamiz.

Dastlab $n = 1$ bolgan holni qaraymiz. Tabiiyki, birni natural sonlar yig'indisi qilib bo'laklash haqida gap bo'lishi mumkin emas. Shunday bo'lishiga qaramasdan, birni faqat bitta qo'shiluvchidan iborat deb qarab, yuqorida berilgan ta'rifga mos keluvchi $B(1, 1) = 1 = C_0^0 = C_{1-1}^0 = C_{n-1}^0$ ta bo'laklashga ega bo'lamiz. Jami bo'laklashlar soni $B(1) = B(1, 1) = C_{n-1}^0 = 2^{n-1}$ bo'ladi.

$n = 2$ bo'lgan holda $k = 1$ qo'shiluvchili $B(2,1) = 1 = C_1^0 = C_{2-1}^0 = C_{n-1}^0$ ta ($2 = 2$) va $k = 2$ qo'shiluvchili $B(2,2) = 1 = C_1^1 = C_{2-1}^1 = C_{n-1}^1$ ta ($2 = 1 + 1$) bo'laklashlarga ega bo'lamiz. Bu hol uchun jami bo'laklashlar soni

$$B(2) = B(2,1) + B(2,2) = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 = 2^{n-1}.$$

Agar $n = 3$ bo'lsa, u holda $k = 1$ qo'shiluvchili $B(3,1) = 1 = C_2^0 = C_{3-1}^0 = C_{n-1}^0$ ta ($3 = 3$), $k = 2$ qo'shiluvchili $B(3,2) = 2 = C_2^1 = C_{3-1}^1 = C_{n-1}^1$ ta ($3 = 2 + 1 = 1 + 2$) va $k = 3$ qo'shiluvchili $B(3,3) = 1 = C_2^2 = C_{3-1}^2 = C_{n-1}^2$ ta ($3 = 1 + 1 + 1$) bo'laklashlar bor. Bu holda jami bo'laklashlar soni uchun

$$B(3) = B(3,1) + B(3,2) + B(3,3) = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 = 2^{n-1}$$

tenglik o'rinlidir.

Shunday davom etib, "istalgan n natural sonning k ta qo'shiluvchilarga bo'laklanishlari soni $(n-1)$ ta elementdan $(k-1)$ talab guruhlashlar soniga teng, ya'ni $B(n,k) = C_{n-1}^{k-1}$ " degan farazga kelish mumkin. Agar bu faraz tasdiqlansa, binomial koeffitsientlarning yig'indisi haqidagi xossasiga ko'ra,

$$B(n) = \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i = 2^{n-1} \text{ bo'ladi.}$$

1.18-tasdiq. *Qo'shiluvchilar tartibini e'tiborga olgan holda istalgan n natural sonning k ta qo'shiluvchilarga bo'laklanishlari soni $(n-1)$ ta elementdan $(k-1)$ talab guruhlashlar soniga teng, ya'ni $B(n,k) = C_{n-1}^{k-1}$.*

1.19-tasdiq. *Qo'shiluvchilar tartibini e'tiborga olgan holda ixtiyoriy n natural sonning barcha bo'laklanishlari soni 2^{n-1} ga teng, ya'ni $B(n) = 2^{n-1}$.*

Endi natural sonlarni **qo'shiluvchilar tartibi e'tiborga olinmagan** vaziyatda bo'laklash masalasi bilan shug'ullanamiz.

Odatda, natural n sonning ixtiyoriy k ta (k – natural son, $k \leq n$) $a_1, a_2, \dots, a_k$ qo'shiluvchilarga bo'laklanishini qandaydir shartlarga, masalan, $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k$ yoki $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$ tengsizliklarga bo'ysunadigan qilib olish qulay bo'ladi.

Qo'shiluvchilar tartibi e'tiborga olinmagan holda natural n sonning k ta qo'shiluvchilarga bo'laklanishlari sonini $R(n, k)$ bilan, uning barcha bo'laklanishlari sonini esa $R(n)$ bilan belgilaymiz.

Bundan keyin, bo'laklash deganda qo'shiluvchilar tartibi e'tiborga olinmagan holdagi bo'laklashni nazarda tutamiz.

Tabiiyki, quyidagi tenglik o'rinlidir:

$$R(n) = \sum_{k=1}^n R(n, k).$$

II BOB. Kombinatorika masalalarining algoritmlari va dasturiy vositalari

Ushbu bobda ishga oid kombinatorikaning bir necha masalalari Nyuton binomi, Fibonachchi sonlari va bo'laklashlar kombinatorikasini qo'llagan holda ba'zi masalalarni yechish algoritmlari keltirilib, ular uchun ob'ektga yo'naltirilgan "Delphi" dasturlash tilida, viziullashtirilgan dasturiy vositalari ishlab chiqilgan hamda ulardan foydalanish uchun ko'rsatmalar berilgan.

2.1. Kombinatorika elementlarining ba'zi masalalarga tatbiqlari

Ma'lumki, jamiyatning turli ijtimoiy, iqtisodiy sohalari va matematika (algebra, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika) ning turli masalalarini yechishda kombinatorikada ko'p qo'llaniladigan usul va qoidalardan foydalaniladi.

Shu sababli biz bu bandda kombinatorika elementlarining ba'zi masalalarga tatbiqlari sifatida quyidagi masalalarni qaraymiz.

Shuni eslatib o'tish joizki, n ning katta qiymatlari uchun quyida qaralayotgan masalalarni yechishda anchagina qiyinchiliklarga duch kelinadi.

2.1-masala. Berilgan N va K ga ko'ra, N ta buyumni K tadan qilib guruhlariga ajratishlar sonini beruvchi $C(n,k) = N! / (K! * (N-K)!)$ formulaning qiymatini hisoblab beruvchi va uni barcha raqamlari bilan chiqaruvchi dastur tuzilsin.

N va K natural sonlar, $1 \leq K \leq N < 1000$.

Dasturni testlash:

$N=150, K=30;$ 32198785340494567031466236484400;

$N=200, K=50;$ 453858377923246061067441390280868162761998660528.

2.2-masala. Nyuton binomi (ikki handing yig'indisi va ayirmasini n -darajaga ko'tarish)ni hisoblovchi dastur tuzilsin.

2.3-masala. Fibonachchi sonlari (hadlari)ni hisoblovchi dastur tuzilsin (n ning katta qiymatlari uchun).

2.4-masala. Kenguru uzunligi N ta katak bo'lgan maydonda faqat oldinga sakrashi mumkin. Kenguruninig sakrash imkoniyati ko'pi bilan K ta katak bo'lsin. Kenguru maydonning boshidan oxirigacha necha xil usul bilan yetib borishi mumkinligini aniqlovchi dastur tuzilsin. ($K \leq N < 1000$).

Dasturni testlash: $N=3$, $K=2$ bo'lsa, Javob 3.

2.2. Kombinatorika masalalarini yechish algoritmlari va dasturiy vositalari

Biz I bobda keltirilgan guruhlashlar kombinatsiyalari, Paskal uchburchagi, Nyuton binomi va bo'laklashlar kombinatorikasi haqida berilgan ma'lumotlardan foydalanib, quyida **2.1-2.4-masalalarni** yechish algoritmini keltiramiz.

2.1-masalani yechish algoritmi. I bobning 1.2-bandida takrorli bo'lmagan guruhlashlar haqida ma'lumot bergan edik. Bundan n ta har xil elementli $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ to'plamdan m tadan guruhlash quyidagicha amalga oshiriladi.

Bir ($n=1$) elementli $\{a\}$ to'plam uchun faqat bitta guruhlash mavjud, u ham bo'lsa bir ($m=1$) elementlidir: a . Demak, $C_1^1 = 1$.

Ikki ($n=2$) elementli $\{a, b\}$ to'plam uchun bittadan ($m=1$) guruhlashlar ikkita (a va b), ikkitadan ($m=2$) guruhlashlar esa faqat bitta (ab). Demak, $C_2^1 = 2$, $C_2^2 = 1$.

Uch ($n=3$) elementli $\{a, b, c\}$ to'plam uchun guruhlashlar: bittadan ($m=1$) – a , b va c (uchta); ikkitadan ($m=2$) – ab , ac , bc (uchta); uchtdan ($m=3$) – abc (faqat bitta). Demak, $C_3^1 = 3$, $C_3^2 = 3$, $C_3^3 = 1$.

To'rtta ($n=4$) elementdan tashkil topgan $\{a, b, c, d\}$ to'plam elementlaridan tuzilgan guruhlashlar: bittadan – a , b , c va d (to'rtta); ikkitadan – ab , ac , ad , bc , bd , cd (oltita); uchtdan – abc , abd , acd , bcd (to'rtta); to'rttdan $abcd$ (faqat bitta). Demak, $C_4^1 = 4$, $C_4^2 = 6$, $C_4^3 = 4$, $C_4^4 = 1$.

Yuqoridagi mulsohazalar guruhlashlar sonini hisoblash formulasi qanday bo'lishiga to'liq oydinlik kiritmasada, dastlabki tahlil uchun muhimdir. C_n^m sonni hisoblash uchun quyidagi formula o'rinli

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m}.$$

2.1-masalani yechish dasturi.

Bu masalani yechish uchun ishlab chiqilgan dasturiy vosita ishning ilova qismida keltirilgan (1-ilovaga qarang).

Dasturni testlash natijasida quyidagi natijalar olindi.

1. $N=25, K=5;$ 53130;
2. $N=45, K=15;$ 344867425584
3. $N=250, K=150;$ 6063024592784106879207066654236394547840326091
95275867182946731945837710;
4. $N=720, K=660;$ 26390396795222677975727207509769281627761276
862587589456302534175336254818515595864127888

2.2-masalani yechish algoritmi. O'rta maktab matematikasi kursidan quyidagi ikkita qisqa ko'paytirish formulalarini eslaylik:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ – ikki had yig'indisining kvadrati;

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ – ikki had yig'indisining kubi.

Ikki had yig'indisining kvadrati va kublaridan foydalanib, uning 4- va 5-darajalarini hisoblaymiz:

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= (a+b)(a+b)^3 = (a+b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) = \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,\end{aligned}$$

$$(a+b)^5 = (a+b)(a+b)^4 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Shunday qilib, ikki had **yig'indisining bikvadrati** (ya'ni to'rtinchi darajasi)

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

va ikki had yig'indining beshinchi darajasi

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

formulalariga ega bo'lamiz.

Yuqorida keltirilgan ikki had yig'indining kvadrati, kubi, bikvadrati va beshinchi darajasi formulalari o'ng tomonlaridagi ko'phad koeffitsientlari Paskal uchburchagining mos qatorlaridagi C_n^m ($n = 2, 3, 4, 5$) sonlar ekanligini payqash qiyin emas.

Shunday qilib, ixtiyoriy a va b haqiqiy sonlar hamda n natural son uchun

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

ifodaning ko'phad shaklidagi yoyilmasi (tasvirlanishi) **Nyuton binomi** deb ataladi.

C_n^m sonlar **binomial koeffitsientlar** deb ham ataladi. C_n^m son

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{n-m} b^m$$

yoyilmadagi $a^{n-m} b^m$ ifodaning koeffitsientidir.

Xuddi shu yo'l bilan ikki had ayirmasining n -darajasi uchun

$$(a-b)^n = \sum_{m=0}^n (-1)^m C_n^m a^{n-m} b^m$$

tenglikni keltirib chiqarish qiyin emas. Bunda yuqorida keltirilgan ikki had yig'indisining n -darajasi uchun keltirilgan tenglikda b ni $-b$ bilan almashtirish kifoya.

Endi 2.2-masalani yechish (Nyuton binomini hisoblovchi) dasturni keltiramiz.

2.2-masalani yechish dasturi.

Bu masalani yechish uchun ishlab chiqilgan dasturiy vosita ishning ilova qismida keltirilgan (2-ilovaga qarang).

Dasturni testlash natijasida quyidagi natijalar olindi.

1. $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$;
2. $(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$;
3. $(a+b)^9 = a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 + 126a^5b^4 + 126a^4b^5 + 84a^3b^6 + 36a^2b^7 + 9ab^8 + b^9$;
4. $(a-b)^8 = a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$.

2.3-masalani yechish algoritmi. Elementlari haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$$

ketma-ketlikni qaraymiz. Bu ketma-ketlikdagi elementlarning uchinchisidan boshlab har biri o'zidan oldingi ikkita elementning yig'indisiga teng, ya'ni $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ ($n \geq 3$) bo'lsin. Ravshanki, bu ketma-ketlikni tashkil qilishda uning dastlabki ikkita hadi muhim bo'lib, keyingi barcha hadlari rekurrent tenglik vositasida aniqlanadi.

Shunday qilib, $u_1 = u_2 = 1$ bo'lgan holda $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ ($n \geq 3$) rekurrent tenglik vositasida aniqlan ketma-ketlik **Fibonachchi qatori**, uning hadlari esa **Fibonachchi sonlari** deb ataladi.

Tabiiyki, Fibonachchi qatoridagi Fibonachchi sonlarini aniqlash jarayoni cheksizdir.

Biz quyida chekli (n ning katta qiymatlari uchun) hol uchun Fibonachchi sonlarini hisoblovchi dasturni keltiramiz.

2.3-masalani yechish dasturi.

Bu masalani yechish uchun ishlab chiqilgan dasturiy vosita ishning ilova qismida keltirilgan (3-ilovaga qarang).

Dasturni testlash natijasida quyidagi natijalar olindi.

1. $n=50$; $F[50]=12586269025$;
2. $n=250$; $F[250]=7896325826131730509282738943634332893686268675876375$;
3. $n=500$; $F[500]=322456169788013972438287040728395007025658769730726$
4108962948325571622863290691557658876222521294125;
4. $n=1000$; $F[1000]=308032263477520968962323987332247116164299644090653$
3187938298969649928516003704476137795166849228875;

2.4-masalani yechish algoritmi. Kenguru 1-katakda turibdi. U oldinga 1 katak 2 katak yoki K katak sakrashi mumkin, shunday qilib necha xil usulda N -katakka borish mumkin.

Masalan:

1 ta usul: 1 katakdan sakrashi mumkin, ya'ni

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow \dots \rightarrow N-3 \rightarrow N-2 \rightarrow N-1 \rightarrow N$

2-usul: 1 katak va faqat bir marta ikki katakdan sakrashi mumkin, ya'ni

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow \dots \rightarrow N-3 \rightarrow N-2 \rightarrow N$

yoki

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow \dots \rightarrow N-3 \rightarrow N-1 \rightarrow N$$

va h.k.

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow \dots \rightarrow N-3 \rightarrow N-2 \rightarrow N-1 \rightarrow N$$

3-usul: 1 katak va ikki marta ikki katakdan sakrash yoki mumkin va h.k.

Buni hisoblash uchun quyidagicha yo'l tutish kerak. Ya'ni dinamik dasturlashdan foydalanamiz:

Faraz qilaylik, N - katakka necha xil usulda borish kerakligini hisoblash kerak va $N-1, N-2, N-3, \dots, N-K$ - kataklarga necha xil usulda kelish hisoblangan bo'lsin. i -katakka kelish usullari sonini $F(i)$ deb belgilab olsak:

$$F(N) = F(N-K) + F(N-K+1) + F(N-K+2) + \dots + F(N-2) + F(N-1)$$

Buning ma'nosi shuki, N -katakka undan oldingi K ta katakdan kelish mumkin. Masalan:

Faraz qilaylik, $K = 2$, $F(14) = 1234$ va $F(15) = 2456$ bo'lsin, 16-katakka quyidagicha kelish mumkin:

14 - katakka qandaydir usul bilan kelib keyin 2 ta oldinga sakrab kelish mumkin. Bunda 16-katakka 14-katakka necha xil usulda kelinsa, shuncha usulda kelingan bo'ladi. Lekin bu katakka nafaqat 14 dan, balki 15 dan ham kelish mumkin. Bunda kelinadigan usullar soni yana $F(15)$ ga oshadi.

Shunday qilib, 16 katakka $1234 + 2456$ xil usulda kelish mumkin. Agar $K=3$ bo'lganda, bu songa $F(13)$ ham qo'shilgan bo'lardi, chunki 13 - katakdan ham kelish mumkin.

2.4-masalani yechish dasturi.

Bu masalani yechish uchun ishlab chiqilgan dasturiy vosita ishning ilova qismida keltirilgan (4-ilovaga qarang).

Dasturni testlash natijasida quyidagi natijalar olindi.

1. $N=25, K=5;$ 11749641;
2. $N=70, K=6;$ 345943529496197516097
3. $N=100, K=8$ 4497029078131002438828254970389;
4. $N=25, K=5;$ 107842550886781910174330383006956958971838054710;

2.3. Dasturdan foydalanuvchilar uchu ko‘rsatmalar

Biz bu bandda 2.1-2.4-masalalarni keltirib, ularni yechish uchun ishlab chiqilgan dasturdan foydalanuvchilarga ko‘rsatmalar berib o‘tamiz.

2.1-masala. Berilgan N va K ga ko‘ra, N ta har buyumni K tadan qilib guruhlariga ajratishlar sonini beruvchi $C(N,K) = N! / (K! * (N-K)!)$ formulaning qiymatini hisoblab beruvchi va uni barcha raqamlari bilan chiqaruvchi dastur tuzilsin (N va K natural sonlar, $1 \leq K \leq N < 1000$).

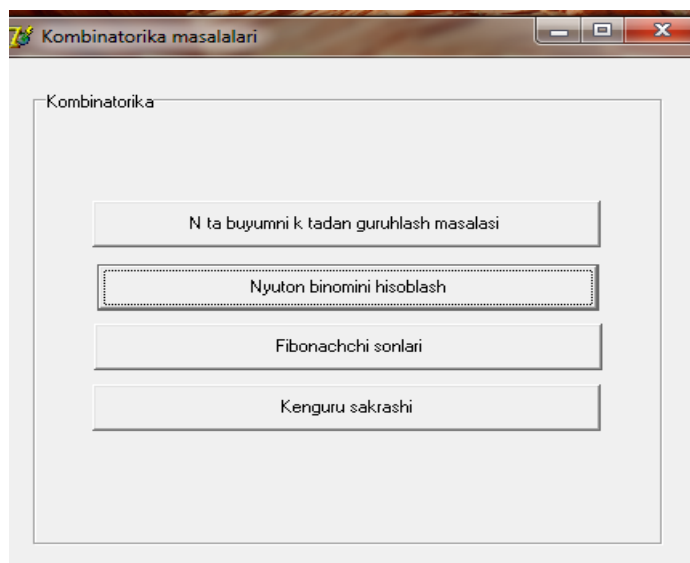
2.2-masala. Nyuton binomi (ikki handing yig‘indisi va ayirmasini n -darajaga ko‘tarish)ni hisoblovchi dastur tuzilsin.

2.3-masala. Fibonachchi sonlari (hadlari)ni hisoblovchi dastur tuzilsin (n ning katta qiymatlari uchun).

2.4-masala. Kenguru uzunligi N ta katak bo‘lgan maydonda faqat oldinga sakrashi mumkin. Kenguruninig sakrash imkoniyati ko‘pi bilan K ta katak bo‘lsin. Kenguru maydonning boshidan oxirigacha necha xil usul bilan yetib borishi mumkinligini aniqlovchi dastur tuzilsin ($K \leq N < 1000$).

Yuqorida keltirilgan masalalarni yechish uchun dasturdan quyidagicha foydalaniladi.

1. Kombinatorika masalalari.exe fayli ishga tushiriladi. Natijada quyidagi dastur oynasi hosil bo‘ladi:



2.1-rasm. Dastur bosh oynasi

2. Bu oynada quyidagi tugmalar joylashgan:

2.1. N ta buyumni K tadan guruhlash masalasi;

Masalani qo'yilishi

1. Berilgan N va K ga ko'ra, N ta har xil buyumni K tadan qilib guruhlarga ajratishlar sonini beruvchi $C(n,k) = N! / (K! * (N-K)!)$ formulaning qiymatini hisoblab beruvchi va uni barcha raqamlari bilan chiqaruvchi dastur tuzilsin.

N va K natural sonlar, $1 \leq K \leq N \leq 200$.

Testlash:

$N=150, K=30$ 32198785340494567031466236484400;

$N=200, K=50$ 453858377923246061067441390280868162761998660528.

N ta buyum

K ta dan guruhlarga ajratish

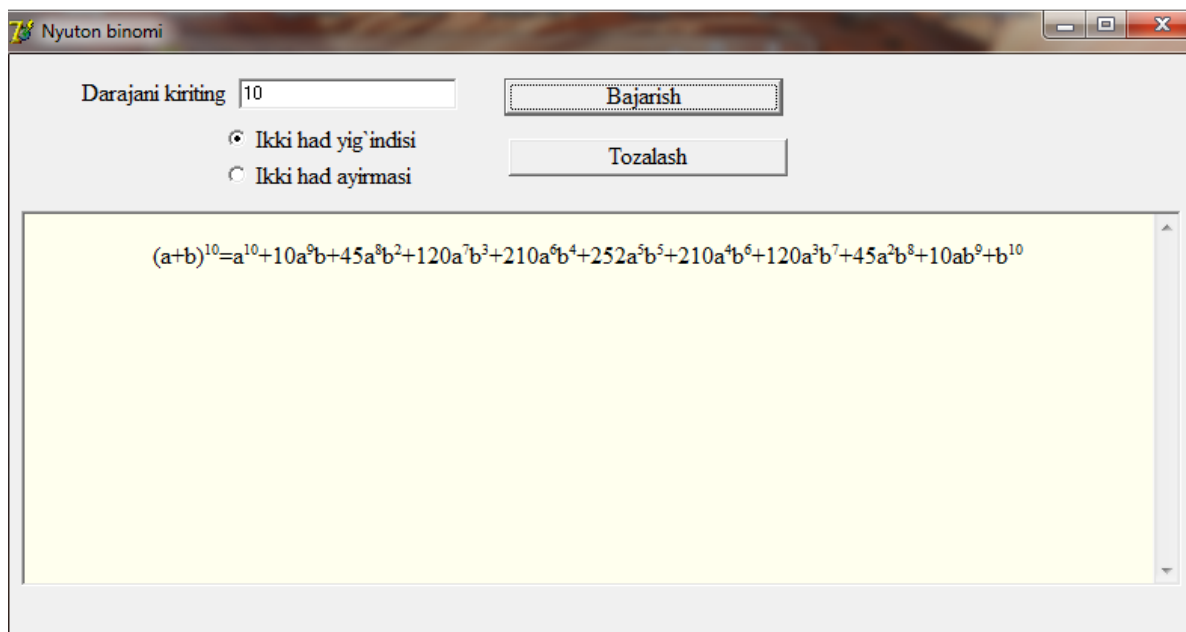
Imkoniyatlar soni

Hisoblash **Tozalash**

2.2-rasm. N ta buyumni K tadan guruhlash masalasi

Bunda oynaning yuqori qismida masalaning qo'yilishi keltiriladi. “ N ta buyum” maydoniga N ning qiymati (bu yerda N ning qiymati 1 dan 1000 gacha bo'lishi kerak) kiritiladi. “ K tadan guruhlarga ajratish” maydoniga K ning qiymati kiritiladi. “Hisoblash” tugmasini bosish bilan “Imkoniyatlar soni” maydoniga hisoblangan natijalar chiqadi. “Tozalash” tugmasi bosish orqali kiritilgan qiymatlar va natijalar aks etgan maydonlar tozalanadi. Xuddi shu tarzda N va K larning boshqa qiymatlarida hisoblashlar uchun yuqoridagi amallar takrorlanadi.

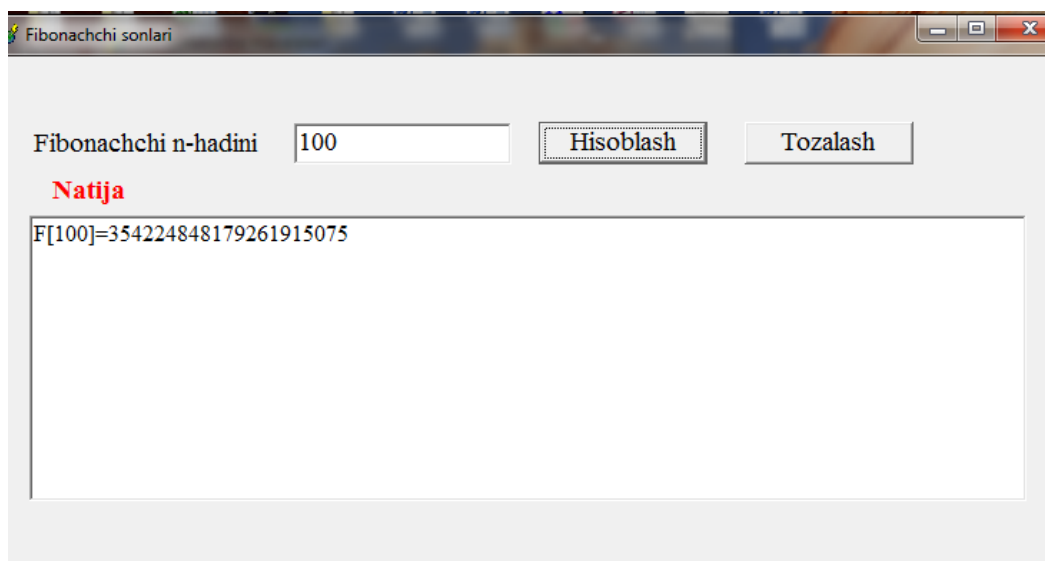
2.2. Nyuton binomini hisoblash;



2.3-rasm. Nyuton binomini hisoblash oynasi

“Darajani kiriting” maydoniga hisoblanishi kerak bo‘lgan Nyuton binomi darajasi kiritiladi. “Ikki had yig‘indisi” yoki “Ikki had ayirmasi” tanlovida biri tanlanadi. “Bajarish” tugmasi bosilib, ushbu qiymatlarga mos natijalar hisoblanadi. Natijalar oynaning pastki qismidagi maydonga chiqadi. “Tozalash” tugmasini bosilganda maydonlar qiymatlardan tozalanadi. Xuddi shu tarzda N ning boshqa qiymatlarida hisoblashlar uchun yuqoridagi amallar takrorlanadi.

2.3. Fibonachchi sonlari;



2.4-rasm. Fibonachchi sonini hisoblash oynasi

“Fibonachchi” sonini hisoblash uchun “Fibonachchci n-hadi” maydonida qiymat kiritiladi. “Hisoblash” tugmasi bosilib, natijalar hisoblanadi. “Natija” maydoniga hisoblangan natijalar aks etadi. “Tozalash” tugmasi bosilsa maydonlar qiymatlardan tozalanadi. Xuddi shu tarzda N ning boshqa qiymatlarida hisoblashlar uchun yuqoridagi amallar takrorlanadi.

2.4. Kenguru sakrashi;

Masalani qo'yilishi

Kenguru uzunligi N ta katak bo'lgan maydonda faqat oldinga sakrashi mumkin. Kenguruning sakrash imkoniyati ko'pi bilan K ta katak bo'lsin. Kenguru maydonning boshidan oxirigacha necha xil usul bilan yetib borishi mumkinligini aniqlovchi dastur tuzing. ($K \leq N \leq 60$).

Testlash,
 $N=3$, $K=2$ bo'lsa,
 Javob 3.

Barcha kataklar soni

Kenguruning maksimal katakga sakrashi

Yetib borish barcha usullar soni

Hisoblash **Tozalash**

2.5-rasm. Kenguru sakrishi

Bunda oynaning yuqori qismida masalaning qo'yilishi keltiriladi. “Barcha kataklar soni” maydoniga kataklar soni kiritiladi. “Kenguruning maksimal katakga sakrashi” maydoniga qiymat kiritiladi. “Hisoblash” tugmasini bosish bilan “Yetib borish barcha usullar soni” maydoniga hisoblangan natijalar chiqadi. “Tozalash” tugmasi bosish orqali kiritilgan qiymatlar va natijalar aks etgan maydonlar tozalanadi. Xuddi shu tarzda N va K larning boshqa qiymatlarida hisoblashlar uchun yuqoridagi amallar takrorlanadi.

Xulosa

Mazkur bitiruv malakaviy ishida turli kombinatorik masalalar qaraldi va ularni yechishda ob'ektga yo'naltirilgan "Delphi" dasturlash tilida qulay interfeysga ega bo'lgan (viziullashtirilgan) dasturiy vositalari yaratildi hamda ulardan quyidagi natijalar olindi:

2.1-masala. Berilgan N va K ga ko'ra, N ta har buyumni K tadan qilib guruhlariga ajratishlar sonini beruvchi $C(n,k) = N! / (K! * (N-K)!)$ formulaning qiymatini hisoblab beruvchi va uni barcha raqamlari bilan chiqaruvchi dastur tuzilsin.

N va K natural sonlar, $1 \leq K \leq N < 1000$.

Dasturni testlash natijasida quyidagi natijalar olindi.

1. $N=25, K=5;$ 53130;
2. $N=45, K=15;$ 344867425584
3. $N=250, K=150;$ 6063024592784106879207066654236394547840326091
95275867182946731945837710;
4. $N=720, K=660;$ 26390396795222677975727207509769281627761276
862587589456302534175336254818515595864127888

2.2-masala. Nyuton binomi (ikki handing yig'indisi va ayirmasini n -darajaga ko'tarish)ni hisoblovchi dastur tuzilsin.

Dasturni testlash natijasida quyidagi natijalar olindi.

1. $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5;$
2. $(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6;$
3. $(a+b)^9 = a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 + 126a^5b^4 + 126a^4b^5 + 84a^3b^6 + 36a^2b^7 + 9ab^8 + b^9;$
4. $(a-b)^8 = a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8.$

2.3-masala. Fibonachchi sonlari (hadlari)ni hisoblovchi dastur tuzilsin (n ning katta qiymatlari uchun).

Dasturni testlash natijasida quyidagi natijalar olindi.

1. $n=50;$ $F[50]=12586269025;$
2. $n=250;$ $F[250]=78963258261317305092827389436343328936862686758$

76375;

3. $n=500$; $F[500]=322456169788013972438287040728395007025658769730$
7264108962948325571622863290691557658876222521294125;

4. $n=1000$; $F[1000]=3080322634775209689623239873322471161642996440$
906533187938298969649928516003704476137795166849228875;

2.4-masala. Kenguru uzunligi N ta katak bo'lgan maydonda faqat oldinga sakrash mumkin. Kenguruninig sakrash imkoniyati ko'pi bilan K ta katak bo'lsin. Kenguru maydonning boshidan oxirigacha necha xil usul bilan yetib borishi mumkinligini aniqlovchi dastur tuzilsin. ($K \leq N < 1000$).

Dasturni testlash natijasida quyidagi natijalar olindi.

1. $N=25, K=5$; 11749641;
2. $N=70, K=6$; 345943529496197516097
3. $N=100, K=8$ 4497029078131002438828254970389;
4. $N=25, K=5$; 107842550886781910174330383006956958971838054710;

Ishda olingan natijalar va unda qo'llanilgan usullardan turli iqtisodiy, ijtimoiy sohalar, ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaning, umumta'lim maktablari, akademik litsey va kasb-hunar kollejlarining ko'pgina masalalarini hamda "Informatika" fani bo'yicha o'tkaziladigan fan olimpiadalari masalalarini yechishda foydalanish mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Окулов С. М. Программирование в алгоритмах.— М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. – 341 с: ил.
2. Головешкин В. А., Ульянов М. В. Теория рекурсии для программистов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 296 с.
3. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986. – 384 с.
4. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969.
5. Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. М.: Наука, 1978.
6. Успенский В. А. Треугольник Паскаля. М.: Наука, 1966.
7. Липский В. Комбинаторика для программистов. М.: Мир, 1988. – 213 с.
8. Ф.А. Новиков Дискретная математика для программистов. СПб: Питер, 2000. – 304 с.
9. Иванов Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы: Учеб. пособие / Лаборатория Базовых Знаний, 2003. –288 с.
10. То‘rayev Н.Т., Azizov I., Otaqulov S. Kombinatorika va graflar nazariyasi. Uslubiy qo‘llanma: Samarqand. 2006. – 262 b.
11. В. Гофман, А. Хоманенко. Delphi 7. – СПб.: БХВ–Петербург, 2004 г.
12. Дарахвелидзе П. Г., Марков Е. П. Д20 Программирование в Delphi 7. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 784 с : ил.
13. Краснов М. В. OpenGL. Графика в проектах Delphi. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002. – 352 с: ил.
14. <http://olo.looblogs.info/issledovanie-funkcij-maple.html>
15. <http://maple.plusby.com/index.html>

Ilova

1-ilova. Guruhlashga oid masalani yechish dasturi.

var

m1en,rem,nminusk,n,k,i,j:integer;n1,n2,n3:number;

implementation

{ \$R *.dfm }

//Massivni nol bilan to'ldirish

procedure TForm7.set0(var n:number);

var

i:integer;

begin

n[1]:=0;

for i:=2 to numlen do

n[i]:=0;

end;

//Massivni uzunligini hisoblash

function len(var n:number):integer;

var

i:integer;

begin

len:=1;

for i:=1 to numlen do

if n[i]<>0 then

len:=i;

end;

//Katta sonlar massivlarini ko'paytirish

procedure TForm7.mul(var n1,n3:number;n2:integer);

var

n22,i1,i2,i3,len1,len2,carry:integer;

```

begin
    len1:=len(n1);
    set0(n3);
    for i1:=1 to len1 do begin
        i2:=1;
        n22:=n2;
        while(n22<>0) do begin
            len2:=n22 mod 10;
            n22:=n22 div 10;
            carry:=n1[i1]*len2;
            i3:=i1+i2-1;
            inc(i2);
            while carry>0 do begin
                carry:=carry+n3[i3];
                n3[i3]:=carry mod 10;
                carry:=carry div 10;
                inc(i3);
            end;
        end;
    end;
end;

//Ekranga natijani chiqairsh
procedure TForm7.show(var n:number);
var
    i:integer;
begin
    i:=numlen;
    while (i>1)and(n[i]=0) do
        dec(i);
    Memo1.Text:="";

```

```

    for i:=i downto 1 do
        Memo1.Text:=Memo1.Text+IntToStr(n[i]);
    end;

    //Tugma orqali bajarish prosedurasi
procedure TForm7.Button1Click(Sender: TObject);
begin
    n:=StrToInt(Edit1.Text);
    k:=StrToInt(Edit2.Text);
    set0(n1);
    n1[1]:=1;
    n3:=n1;
    nminusk:=n-k;
    if(k<n-k) then
    begin
        nminusk:=k;
        k:=n-k;
    end;
    for i:=k+1 to n do
    begin
        mul(n1,n3,i);
        n1:=n3;
    end;
    for j:=2 to nminusk do begin
        rem:=0;
        mlen:=len(n3);
        for i:=mlen downto 1 do begin
            rem:=rem*10+n3[i];
            n3[i]:=rem div j;
            rem:=rem mod j;
        end;

```

```

    end;
    show(n3);
end;
//tozalash
procedure TForm7.Button2Click(Sender: TObject);
begin
    Edit1.Text:="";
    Edit2.Text:="";
    Memo1.Text:="";
end;
    end.

```

2-ilova. Nyuton binomini hisoblovchi dastur.

```

procedure TForm4.Button1Click(Sender: TObject);
var kof:string;
begin
    if(Edit1.Text="") then
        begin
            ShowMessage('Qiymatni kiriting');
            exit;
        end;
        strkod:="";
        k:=0;
        if(RadioButton1.Checked) then
            strkod:='(a+b)<sup><small>' +Edit1.Text+'</small></sup>='
        else
            strkod:='(a-b)<sup><small>' +Edit1.Text+'</small></sup>=';
        n:=StrToInt(Edit1.text);
        while n >= k do
            begin

```

```

a:=fact(n);
b:=fact(k);
c:=fact(n-k);
koef:=a/(b*c);
if(koef-1<>0) then
kof:=FloatToStr(koef)
else
kof:="";
strkod:=strkod +kof;
if(n-k>0) then
begin
kof:="";
if(n-k>1) then kof:=IntToStr(n-k);
strkod:=strkod+'a'+<sup><small>' +kof+'</small></sup>';
end
else
kof:="";
if(k>0) then
begin
kof:="";
if(k>1) then kof:=IntToStr(k);
strkod:=strkod+'b'+<sup><small>' +kof+'</small></sup>';
end
else
kof:="";
k:=k+1;
if n >= k then
if(RadioButton2.Checked) then
if(k mod 2=0) then
strkod:=strkod+'+'

```

```

else
    strkod:=strkod+'-'
else
    strkod:=strkod+'+';
    Chiqarish;
end;
end;

//Tozalash proseduras
procedure TForm4.Button2Click(Sender: TObject);
var s:string;
begin
    Edit1.Text:="";
    s:=getcurrentdir;
    if(s[Length(s)]<>'/' ) AND (s[Length(s)]<>'\\') then
        s:=s+'/' ;
        s:=s+'3.html';
    WebBrowser1.Navigate(s);
end;
    end.

```

3-ilova. Fibonachchi sonlarini hisoblovchi dastur.

```

procedure TForm2.Button1Click(Sender: TObject);
begin
    Richtext1.Text:="";
    if(Edit1.Text="") then
        begin
            ShowMessage('Tartibni kiriting');
            exit;

```

```

    end;
    Richtext1.Text:='F['+Edit1.Text+']=';
n:=StrToInt(Edit1.Text);
a[1]:=0;
b[1]:=1;
c[1]:=0;
for i:=2 to numlen do
begin
    a[i]:=0;
    b[i]:=0;
    c[i]:=0;
end;
inc(n);
for i:=3 to n do
begin
    qushish(c,a);
    qushish(c,b);
    uzlashtirish(a,b,c);
end;
if(n>1) then
chiqarish(b)
else
    Richtext1.Lines.Add('1');
end;

    //Tozalash prosedura
procedure TForm2.Button2Click(Sender: TObject);
begin
    Edit1.Text:='';
    Richtext1.Text:='';
end;

```


end.

4-ilova. Bo'laklashlar kombinatorikasiga oid masalani yechish dasturi.

var

Form5: TForm5;

n,i,k,j:integer;

s,a1:longint;

a:tnumber1;

implementation

{ \$R *.dfm }

//Katta sonlarni qo`shish prose

procedure TForm5.qushish(var n1:tnumber1;i1,j1:integer);

var

i,tmp:integer;

begin

tmp:=0;

for i:=1 to numlen do begin

tmp:=tmp+n1[i1,i]+n1[j1,i];

n1[i1,i]:=tmp mod 10;

tmp:=tmp div 10;

end;

end;

//Natijasi ekranga chiqarish prosedura

procedure TForm5.chiqarish(var n:tnumber1;i1:integer);

var

i:integer;

begin

for i:=numlen downto 1 do

if n[i1,i]<>0 then

break;

```

        Edit3.Text:="";
    for i:=i downto 1 do
        Edit3.Text:=Edit3.Text+IntToStr(n[i],i);
    end;

    //Hisoblash prosedurasi
procedure TForm5.Button1Click(Sender: TObject);
begin
    n:=StrToInt(Edit1.Text);
    k:=StrToInt(Edit2.Text);
    for i:=1 to numlen do
        for j:=1 to numlen do
            begin
                a[i,j]:=0;
            end;
        a[1,1]:=1;
        a[2,1]:=1;
        s:=0;
        for i:=3 to n+1 do
            begin
                if(i-k>0) then a1:=i-k
                    else a1:=1;
                for j:=a1 to i-1 do
                    qushish(a,i,j);
                end;
                chiqarish(a,n+1);
            end;
        {
    end.
}    //Tozalash prosedurasi
procedure TForm5.Button2Click(Sender: TObject);

```

```
begin
Edit1.Text:="";
Edit2.Text:="";
Edit3.Text:="";
end;
end.
```