В.И. РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ЮЛДАШЕВ ТУРСУН КАМАЛДИНОВИЧ

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ВА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ТЎҒРИ ВА ТЕСКАРИ МАСАЛАЛАР

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ–2021

УДК: 517.968.74+517.91

Докторлик (DSc) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата докторской (DSc) диссертации

Content of Doctoral (DSc) Dissertation Abstract

В.И. РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ЮЛДАШЕВ ТУРСУН КАМАЛДИНОВИЧ

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ВА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ТЎҒРИ ВА ТЕСКАРИ МАСАЛАЛАР

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ–2021

Фан доктори (DSc) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2020.3.DSc/FM161 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (http://kengash.mathinst.uz) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Расмий оппонентлар:	**Асанова Анар Турмағанбетқизи (Қозоғистон)** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Ашуров Равшан Раджапович физика-математика фанлари доктори, профессор
	Ўринов Ахмаджон Қўшақович физика-математика фанлари доктори, профессор
Етакчи ташкилот:	**Самарқанд Давлат университети**

Диссертация ҳимояси В.И. Романовский номидаги Математика институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2021 йил «___» _________соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси. Тел.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz.)

Диссертация билан В.И. Романовский номидаги Математика Институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (______ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси. Тел.: (+99871)-207-91-40).

Диссертация автореферати 2021 йил «____» _______________куни тарқатилди.
(2021 йил «____» _______________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

У.А. Розиков
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

Ж.К. Адашев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.н., катта илмий ходим

А. Азамов
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш ҳузуридаги Илмий семинар раиси, ф.-м.ф.д., академик

КИРИШ (докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурияти. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда гидродинамика ва фильтрлаш жараёнлари моделларини тадқиқ қилиш каби масалаларга келтирилади. Гидродинамиканинг фундаментал қонуниятларини математик физиканинг классик ва ноклассик тенгламалари учун қўйилган тўғри ва тескари масалаларнинг ечимлари ёрдамида топиш муҳим аҳамиятга эга. Чизиқли ва ночизиқли дифференциал тенгламалар учун тескари ва нолокал чегаравий масалаларни ечиш астрономия, квант назарияси, геофизика, иссиқлик ўтказиш, математик биология ва бошқариш назарияси билан боғлиқ муаммоларни ҳал этишда муҳим вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда интегралли шартлар билан берилган дифференциал ва интегро-дифференциал тенгламаларни тадқиқ этиш муҳим аҳамият касб этмоқда. Берилган параметрларнинг қийматларидан келиб чиққан ҳолда ечимларни қуриш, бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган тенгламаларнинг ечимларини ошкор кўринишларда топиш, тенгламалар квазичизиқли ёки ночизиқли бўлган ҳолларда эса уларни эквивалент тарзда ночизиқли интеграл тенгламага келтириш ва турли итерацион схемаларни қўллаш; амалий математикада қўлланилаётган математик моделларнинг назарий асосларини яратиш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда ўзгарувчилардан биттаси бўйича иккинчи ёки учинчи тартибли хусусий ҳосилали ва бошқа ўзгарувчилар бўйича жуфт тартибли хусусий ҳосилаларни ўз ичига олган тенгламаларни тадқиқ этишга алоҳида эътибор кучайтирилди. Чунки бундай масалалар тадқиқотчидан алоҳида ёндошувни ва янгича мулоҳазалар юритишни талаб этади. Бундай тенгламаларни стандарт усуллар билан тадқиқ этишда нафақат техник характердаги қийинчиликларга дуч келинади. Жумладан, охирги йилларда параметр интегралли шартлар билан берилган дифференциал ва интегро-дифференциал тенгламаларнинг структурасида иштирок этганда, параметрнинг турли қийматларига мос келган ечимларни қуриш, бу ечимларнинг мавжуд ёки мавжуд эмаслигини, ягона бўлиши ёки бўлмаслигини текшириш борасида салмоқли натижаларга эришилди. «Дифференциал тенгламалар ва математик физика, динамик системалар назарияси ва оптимал бошқариш» фанларининг устивор йўналишларида халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалари ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Қарорнинг ижросини таъминлашда илмий натижалардан илм-фаннинг турдош соҳаларида фойдаланиш мақсадида айниган ядроли Фредгольм дифференциал ва интегро-дифференциал тенгламалари учун қўйилган

---

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш чора-тадбирлари тўғрисида»ги 292-сон қарори.

нолокал тўғри ва тескари масалаларнинг бир қийматли ечилишини тадқиқ этиш ва ечимларни конструктив қуриш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича харакатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони, 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И. Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив–ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий тадқиқотлар шарҳи[2].

Оддий ва хусусий ҳосилали дифференциал ва интегро-дифференциал тенгламалар учун қўйилган нолокал тўғри ва тескари чегаравий масалалар бўйича дунёнинг етакчи илмий марказлари ва олий таълим муассасалари, жумладан, University of New Haven (АҚШ), Ghent University (Бельгия), University of Tokyo (Япония), М.В. Ломоносов номли Москва давлат университети, Москва физика-техника институти (миллий тадқиқот университети), Москва инженер-физика институти (миллий тадқиқот ядро университети), Москва энергетика институти (миллий тадқиқот университети), Н.Э. Бауман номли Москва давлат техника университети, Россия Халқлар дўстлиги университети, Белгород давлат миллий тадқиқот университети, Бошқирдистон давлат университети, Воронеж давлат университети, Белорусь давлат университети, Самара давлат университети, Урал федерал университети, Кабардин-Балқор давлат университети, Қозон (Волга бўйи) федерал университети, Новосибирск давлат университети, Иркутск давлат университети, Жанубий федерал университети, Самара давлат техника университети, Киев миллий университети, Козоғистон Миллий университети, Institute of Mathematics of Chinese Academy of Sciences, Россия ФА В.А. Стеклов номли Математика институти, Россия ФА Сибирь бўлимининг Математика институти, Украина МФА Математика институти, Қозоғистон МФА Математика ва математик моделлаштириш институти ва бошқа хорижий илмий муассасаларда кенг қамровли илмий тадқиқотлар олиб борилмоқда.

[2] Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи: www.inderscience.com.jhome; www.springer.com.journal; www.link.springer.com/journal/10625 ва бошқа шунга ўхшаш манбалар асосида ишлаб чиқилган.

Оддий интегро-дифференциал тенгламаларни тадқиқ этишга A. Lorenzi, A.I. Prilepko, H. Oka, И.И. Белов, М.В. Булатов, М.М. Вайнберг, В.В. Васильев, М.И. Иманалиев, С. Искандаров, Н.Д. Копачевский, Н.А. Сидоров, В.Г. Трубин, М.В. Фалалаев, Г.А. Шишкин ва бошқаларнинг ишлари бағишланган. А.М. Самойленко, А.А. Бойчук, С.А. Кривошея, А.П. Страх ва Д.С. Джумабаевнинг ишларида биринчи тартибли айниган ядроли интегро-дифференциал тенгламалар тадқиқ этилган. А.А. Самарский биринчи бўлиб нолокал чегаравий масалаларни тадқиқ этишни бошлаб берди ва кейинчалик Д.Г. Гордезиани, Г.А. Авалишвили, А.Л. Скубачевский, А.И. Кожанов, Я.Т. Мегралиев, А.М. Нахушев, Л.С. Пулькина, К.Б. Сабитов, А.Т. Асанова томонидан салмоқли илмий натижалар олинди.

О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева, В.А. Ильин, В.П. Михайлов, Е.И. Моисеев, В.А. Чернятин, L.D. Akulenko, S.V. Nesterov ва бошқаларнинг ишларида параболик ва гиперболик тенгламалар учун хос қийматларга доир масалалар ўрганилди ва бундай тенгламаларни ечишда Фурье қаторлари усулининг қўлланилиши асослаб берилди. Ночизиқли параболик ва гиперболик тенгламалар ва уларнинг умумлашмалари А.Н. Боголюбов, М.Д. Малых, А.И. Вагабов, В.С. Владимиров, М.О. Корпусов, С.Н. Кружков, Н.А. Кудряшов, М.Б. Сухарев, Э. Митидиери, С.И. Похожаев, О.А. Олейник ва Г.И. Чандиров томонидан тадқиқ этилди. А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин, М.М. Лаврентьев, Л.Я. Савельев, В.Г. Романов, А.И. Прилепко, Д.С. Ткаченко, А.Л. Бухгейм, Н.И. Калинина, А.М. Денисов, С.И. Кабанихинларнинг ишларида эса тескари масалаларни ечиш бўйича муҳим тадқиқотлар олиб борилди.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. В.А. Ильиннинг ишларидан кейин параболик ва гиперболик типдаги чизиқли дифференциал тенгламаларни ўрганишга бағишланган кўплаб илмий ишлар пайдо бўлди. Хусусан, Қ. Бойқўзиев бузиладиган гиперболик ва параболик тенгламалар учун асосий аралаш масалаларни ўрганди. В.А. Чернятин ўз ишларида гиперболик ва параболик типдаги бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламалар учун қўйилган чегаравий масалаларни ечишда Фурье қаторларининг қўлланилишини асослаб берди. Ю.А. Дубинский ихтиёрий тартибли квазичизиқли эллиптик ва параболик тенгламалар бўйича тадқиқотлар олиб борди. Н.И. Ионкин иссиқлик ўтказиш назариясида ноклассик чегаравий шартли масалани ўрганди.

Г.И. Чандировнинг ишларида ночизиқли гиперболик ва параболик тенгламалар учун қўйилган аралаш масалани ечишга Фурье қаторлари усулининг қўлланилиши асослаб берилди. Қ.Х. Шабадиков эса аралаш ҳосилалари олдида кичик параметр қатнашадиган псевдогиперболик ва псевдопараболик турдаги ночизиқли дифференциал тенгламалар учун аралаш масалани Фурье қаторлари усулида тадқиқ этди.

Ҳозирги кунда бузиладиган, аралаш, сингуляр ва ноклассик тенгламаларнинг турли кўринишлари учун тўғри ва тескари масалаларни ечиш назариялари Ш.А. Алимов, Ю.П. Апаков, Р.Р. Ашуров, А.С. Бердишев, С.Ж. Жамолов, Т.Ж. Жўраев, Б.И. Исломов, О.С. Зикиров, Э.Т. Каримов, Б.В.

Логинов, М. Мамажонов, М. Мирсабуров, М.Х. Рўзиев, М.С. Салоҳиддинов, А. Сопуев, Ж.О. Тохиров, Р.Н. Тўраев, А. Хасанов, С. Умаров, П. Фенг, А.Қ. Ўринов, Б.Ж. Қодирқулов ва бошқаларнинг ишларида яратилган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Ўзбекистон Миллий университети қошидаги Ўзбекистон-Исроил қўшма факультети илмий-тадқиқот ишлари режаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади дифференциал тенгламалар ва айниган ядроли Фредгольм интегро-дифференциал тенгламалари учун қўйилган нолокал тўғри ва тескари масалаларнинг бир қийматли ечиш ва ечимларни конструктив қуришдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари қуйидагилардан иборат:

тўртинчи тартибли хусусий ҳосилали бир жинсли дифференциал тенгламалар учун қўйилган нолокал чегаравий масалаларни параметрнинг регуляр қийматларида бир қийматли ечишнинг етарли шартларини топиш ва параметрнинг норегуляр қийматларида эса ечимлар мавжудлигининг зарурий шартларини аниқлаш;

учинчи ва тўртинчи тартибли ҳамда айниган ядроли хусусий ҳосилали интегро-дифференциал тенгламалар учун нолокал тўғри ва тескари масалалар бир қийматли ечилишининг етарли шартларини топиш, ечимнинг қайта аниқлаш функцияси ва чегаравий шартларга нисбатан турғунлигини исботлаш ҳамда параметрнинг норегуляр қийматларида чегаравий масалалар ечимларининг мавжудлиги ёки мавжуд эмаслигини исботлаш;

ихтиёрий даражали параболик операторни ўз ичига олган ночизиқли интегро-дифференциал тенгламалар учун аралаш масалалар умумлашган бир қийматли ечилишининг етарли шартларини топиш;

иккинчи тартибли Фредгольм оддий интегро-дифференциал тенгламалар учун параметрнинг регуляр қийматларида нолокал тўғри ва тескари масалалар бир қийматли ечилишининг етарли шартларини топиш, ечимнинг қайта аниқлаш функцияси ва чегаравий шартлар бўйича турғунлигини исботлаш ҳамда спектрал параметрларнинг норегуляр қийматларида чегаравий масалалар ечимларининг мавжудлиги ёки мавжуд эмаслигини исботлаш.

Тадқиқотнинг объекти. Айниган ядроли ва ҳақиқий параметрли иккинчи тартибли Фредгольм интегро-дифференциал тенгламалари ҳамда ҳақиқий параметрларни ўз ичига олган хусусий ҳосилали дифференциал ва интегро-дифференциал тенгламалар.

Тадқиқотнинг предмети. Фурье қаторлари, хусусий ҳосилали дифференциал ва интегро-дифференциал тенгламалар назарияси, айнийдиган ядроли Фредгольм интегро-дифференциал тенгламалар назарияси.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертацияда функциялар назарияси, функционал анализ назарияси, оддий дифференциал тенгламалар назарияси, интеграл тенгламалар ва тенгсизликлар назариялари ҳамда математик физика назарияси усуллари қўлланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

параметрнинг регуляр қийматларида тўртинчи тартибли хусусий ҳосилали бир жинсли дифференциал тенгламалар учун қўйилган нолокал чегаравий масалалар ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган;

параметрнинг регуляр қийматларида учинчи ва тўртинчи тартибли аралаш турдаги ҳамда айниган ядроли хусусий ҳосилали интегро-дифференциал тенгламалар учун нолокал тўғри ва тескари масалалар ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган ҳамда ечимнинг қайта аниқлаш функцияси ва чегаравий шартлар бўйича турғунлиги исботланган;

ихтиёрий даражали параболик операторни ўз ичига олган ночизиқли интегро-дифференциал тенгламалар учун аралаш масалалар умумлашган ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган;

иккинчи тартибли оддий Фредгольм интегро-дифференциал тенгламалари учун параметрларнинг регуляр қийматларида нолокал тўғри ва тескари масалалар ечимларининг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган, ечимнинг қайта аниқлаш функцияси ва чегаравий шартларга нисбатан турғунлиги исботланган ҳамда спектрал параметрларнинг норегуляр қийматларида эса чегаравий масалалар ечимларининг бир қийматли эмаслиги ёки ечим мавжуд бўлмаслиги исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижаси дифференциал тенгламалар ва айниган ядроли интегро-дифференциал тенгламаларнинг бир қийматли ечимларини қуришда ҳақиқий параметрли функцияларнинг ва Фредгольм детерминантининг хоссаларидан фойдаланиш усули таклиф этилганлиги ва параметрларнинг норегуляр қийматларида эса бир қийматли бўлмаган ечимларни қуришда ортогоналлик ҳусусиятини хисобга олувчи услуб таклиф этилганлигидан иборат.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги масалаларнинг коррект қўйилганлиги, қатъий математик усулларнинг қўлланилганлиги, математик исботларнинг тўла бажарилганлиги ва график тасвирлар билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти ишда олинган натижалардан юқори тартибли дифференциал ва интегро-дифференциал тенгламаларнинг сифат назариясида фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти уларни автоматик бошқарув, ночизиқли механика ва математик физиканинг амалий масалаларини ечишда татбиқ этиш мумкинлиги билан белгиланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Дифференциал ва интегро-дифференциал тенгламалар учун тўғри ва тескари масалалар бўйича олинган натижалар асосида:

айниган ядроли хусусий ҳосилали Бенни-Люк туридаги интегро-дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларни ечиш усулидан хорижнинг етакчи илмий журналларида (Lobachevskii J. of Math.: 2020, Vol. 41, P. 1031-1042; 2021, Vol. 42, P. 526-535, P. 587-597, 632-640, 479-489; Russian Math.: 2020, Vol. 64, P. 1-11; International J. of Math. and Phys., 2020, Vol. 11, № 1, P. 28-35) хусусий ҳосилали чизиқли, юкланган ва ночизиқли тенгламалар учун Геллерстедт масаласи, икки ва кўп нуқтали чегаравий масалаларнинг ечимини топишда фойдаланилган. Илмий натижанинг қўлланиши хусусий ҳосилали чизиқли ва юкланган тенгламалар учун Геллерстедт масаласи, икки ва кўп нуқтали чегаравий масалаларнинг ечими мавжудлигини исботлаш имконини берган;

псевдопараболик-псевдогиперболик турдаги интегро-дифференциал тенгламалар учун нолокал чегаравий масалаларда ечимни қуриш усулидан етакчи илмий журналларида (Lobachevskii J. of Math.: 2021, Vol. 41, P. 560-571, P. 572-578, P. 632-640; Axioms 2020, Vol. 9, № 4(135); Chaos, Solitons & Fractals, 2021, Vol. 146, ID 110835) аралаш турдаги дифференциал тенгламалар ва айниган дифференциал тенгламалар учун турли хил чегаравий масалаларнинг бир қийматли ечимларини қуришда фойдаланилган. Илмий натижанинг қўлланиши аралаш турдаги дифференциал тенгламалар, учта сингуляр коэффициентли эллиптик тенгламалар, айниган дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларнинг бир қийматли ечимларининг мавжудлигини исботлаш имконини берган;

хусусий ҳосилали айниган ядроли интегро-дифференциал тенгламалар учун нолокал чегаравий масалаларнинг ечиш усулидан №AP05131220 рақамли «Юқори тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун бошланғич-чегаравий масалаларни ечиш усуллари ва уларнинг тадбиқлари» мавзусидаги хорижий грант лойиҳасида чизиқли дифференциал тенгламалар, айниган ночизиқли дифференциал тенгламалар учун нолокал чегаравий масалаларнинг бир қийматли ечимларини қуришда фойдаланилган (Қозоғистон Республикаси таълим ва фан вазирлиги қарашли математика ва математик моделлаштириш институтининг 2021 йил 25 майдаги № 01-06/082-сонли маълумотномаси, Қозоғистон). Илмий натижанинг қўлланиши тўртинчи тартибли хусусий ҳосилали чизиқли ва ночизиқли дифференциал тенгламалар учун бошланғич-чегаравий ва нолокал чегаравий масалалар ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги теоремани исботлаш имконини берган;

таркибида параметри бўлган хусусий ҳосилали чизиқли ва ночизиқли дифференциал тенгламалар учун нолокал чегаравий масалаларнинг бир қийматли ечимини қуриш усулидан №AP05131268 рақамли «Хусусий ҳосилали нолокал дифференциал тенгламалар учун чегаравий ва бошланғич-чегаравий масалаларни ечиш» мавзусидаги хорижий грант лойиҳасида чизиқли ва ночизиқли параболик ва гиперболик дифференциал тенгламалар учун бошланғич-чегаравий масалаларнинг ечимини қуришда фойдаланилган (Хўжа Ахмад Яссавий номидаги Қозоқ-Турк халқаро университетининг 2021 йил 25 майдаги № 05/1159-сонли маълумотномаси, Қозоғистон). Илмий натижанинг қўлланиши параболик ва гиперболик турлардаги дифференциал тенгламалар учун бошланғич-чегаравий масалалар ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги теоремани исботлаш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 20 та халқаро ва 2 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 60 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 37 та илмий мақола чоп этилган. Бу 37 та илмий мақола хорижий журналларда эълон қилинган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, тўртта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат. Диссертациянинг ҳажми 216 бетни ташкил этган.

Муаллифнинг миннатдорчилиги. Диссертацияни ёзиш жараёнида фойдали маслаҳатлар берганликлари, ҳамда маънавий қўллаб қувватлагаанликлари учун устозлари С.И. Сенашов ва Н.А. Сидоровларга муаллиф ўзининг самимий миннатдорчилигини билдиради. Узоқ вақт давомида ушбу диссертацион тадқиқотни қўллаб қувватлаганликлари учун Б.В. Логинов ва Қ.Х. Шабадиковларнинг номларини ёд этишни муаллиф ўзининг бурчи деб билади.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурияти асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи ва муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертациянинг тузилиши бўйича маълумотлар берилган.

Диссертация мазмунининг асосий қисмини баён қилишда қуйидаги белгилашлардан фойдаланамиз.

а). $C^r(\Omega)$ – шундай $U(t,x,y)$ функциялар синфи бўлиб, Ω соҳада $\dfrac{\partial^r U}{\partial t^r}, \dfrac{\partial^r U}{\partial x^r}, \dfrac{\partial^r U}{\partial y^r}$ узлуксиз ҳосилаларга эга;

б). $C^{r,s,s}_{t,x,y}(\Omega)$ – шундай $U(t,x,y)$ функциялар синфи бўлиб, Ω соҳада $\dfrac{\partial^r U}{\partial t^r}, \dfrac{\partial^s U}{\partial x^s}, \dfrac{\partial^s U}{\partial y^s}$ узлуксиз ҳосилаларга эга;

в). $C^{r+s+0}_{t,x,y}(\Omega)$ – шундай $U(t,x,y)$ функциялар синфи бўлиб, Ω соҳада $\dfrac{\partial^{r+s}U}{\partial t^r \partial x^s}$ узлуксиз ҳосилага эга, $C^{r+0+s}_{t,x,y}(\Omega)$ – шундай $U(t,x,y)$ функциялар синфи бўлиб, Ω соҳада $\dfrac{\partial^{r+s}U}{\partial t^r \partial y^s}$ узлуксиз ҳосилага эга, $r,\ s-$ берилган натурал сонлар.

Диссертациянинг «Бир жинсли дифференциал тенгламалар учун нолокал чегаравий масалаларнинг классик ечилувчанлиги» деб номланган биринчи боби тўртинчи тартибли хусусий ҳосилали бир жинсли бўлган дифференциал тенгламалар учун қўйилган ноклассик чегаравий масалаларни тадқиқ этишга бағишланган бўлиб, унда ўзгарувчиларни ажратиш усулини қўллаб спектрал параметр қийматлари ҳисобланган, топилган қийматларнинг алоҳида хусусиятларидан келиб чиққан ҳолда эса қаралаётган масаланинг ечимлари қурилган ҳамда масала ечимининг мавжудлик критерийлари топилган.

Мазкур бобнинг биринчи параграфи ёрдамчи характерда бўлиб, бу ерда келгуси параграфлар ва бобларда фойдаланиладиган маълумотлар келтирилган.

Иккинчи параграфда уч ўлчовли $\Omega=\{(t,x,y)|\ 0<t<\beta,\ 0<x,y<l\}$ соҳада қуйидаги

$$U_{tt}-U_{ttxx}-U_{ttyy}+\nu^2U_{xx}+\nu^2U_{yy}=0, \qquad (1)$$

бу ерда $\nu-$ мусбат параметр, псевдоэллиптик дифференциал тенгламани тадқиқ этиш методикаси таклиф этилган. (1) тенглама қуйидаги шартлар бажарилганда ўрганилади:

$$U(t,x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)\cap C^{2+2+0}_{t,x,y}(\Omega)\cap C^{2+0+2}_{t,x,y}(\Omega), \qquad (2)$$

$$U(0,x,y)=U(\beta,x,y),\ \ 0\le x,y\le l, \qquad (3)$$

$$\int_0^\beta U(t,x,y)\,dt=\varphi(x,y),\ \ 0\le x,y\le l, \qquad (4)$$

$$U(t,0,y)=U(t,l,y)=U(t,x,0)=U(t,x,l)=0,\quad 0\le t\le\beta, \qquad (5)$$

бу ерда $\varphi(x,y)-$ берилган етарлича силлиқ функция, $\varphi(0,y)=\varphi(l,y)=$ $=\varphi(x,0)=\varphi(x,l)=0,\quad \overline{\Omega}=\{(t,x,y)|\ 0\le t\le\beta,\ 0\le x,y\le l\}.$

1-масала. *Уч ўлчовли Ω соҳада* (1) *тенгламани ва берилган* (2)-(5) *шартларни қаноатлантирувчи номаълум $U(t,x,y)$ функция топилсин.*

1-шартлар. $\varphi(x,y)\in C^2([0;l]\times[0;l])$ функция $[0;l]$ кесмада учинчи тартибли бўлакли-узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин ва

$$\varphi(0,y)=\varphi(l,y)=\varphi(x,0)=\varphi(x,l)=0,$$

$$\varphi_{xx}(0,y)=\varphi_{xx}(l,y)=\varphi_{xx}(x,0)=\varphi_{xx}(x,l)=0,$$

$$\varphi_{yy}(0,y)=\varphi_{yy}(l,y)=\varphi_{yy}(x,0)=\varphi_{yy}(x,l)=0\,.$$

1-теорема. 1-*шартлар бажарилган бўлсин. У ҳолда* 1-*масала уч ўлчовли* Ω *соҳада* $\nu \in (0, \infty)$ *параметрнинг барча қийматларида бир қийматли ечимга эга. Ечим Фурье қатори кўринишида топилади.*

Учинчи параграфда тўртинчи тартибли уч ўлчовли Буссинеск[3] дифференциал тенгламаси учун қўйилган нолокал чегаравий масала тадқиқ этилган. Уч ўлчовли $\Omega = \{(t, x, y) | \, 0 < t < \beta, \, 0 < x, y < l\}$ соҳада қуйидаги дифференциал тенглама қаралади:

$$U_{tt} - U_{ttxx} - U_{ttyy} - \nu^2 U_{xx} - \nu^2 U_{yy} = 0, \qquad (6)$$

бу ерда β ва $l-$ берилган мусбат ҳақиқий сонлар, $\nu -$ мусбат параметр.

(6) тенглама қуйидаги чегаравий шартларда ўрганилади:

$$U(0, x, y) = U(\beta, x, y), \;\; 0 \le x, y \le l, \qquad (7)$$

$$\int_0^\beta U_t(t, x, y) t \, dt = \varphi(x, y), \;\; 0 \le x, y \le l, \qquad (8)$$

$$U(t, 0, y) = U(t, l, y) = U(t, x, 0) = U(t, x, l) = 0, \quad 0 \le t \le \beta, \qquad (9)$$

бу ерда $\varphi(x, y) -$ берилган етарлича силлиқ функция, $\varphi(0, y) = \varphi(l, y) = \varphi(x, 0) = \varphi(x, l) = 0$.

2-масала. *Уч ўлчовли* Ω *соҳада* (6) *тенгламани қаноатлантирувчи, берилган* (7)-(9) *шартларни ҳамда*

$$U(t, x, y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \cap C^{2+2+0}_{t,x,y}(\Omega) \cap C^{2+0+2}_{t,x,y}(\Omega)$$

шартларни қаноатлантирувчи $U(t, x, y)$ *функцияни топилсин, бу ерда* $\overline{\Omega} = \{(t, x, y) | \; 0 \le t \le \beta, \; 0 \le x, y \le l\}$.

Барча m, n натурал сонларда ν параметрнинг $\left| A_{n,m}(\nu) \right| = \left| 1 - \cos \lambda_{n,m} \nu \, \beta \right| > 0$, $\left| B_{n,m}(\nu) \right| = \left| 2 - 2\cos \lambda_{n,m} \nu \, \beta - \lambda_{n,m} \nu \, \beta \sin \lambda_{n,m} \nu \, \beta \right| > 0$ тенгсизликлар бажариладиган ҳар қандай мусбат қийматини регуляр қиймат деб атаймиз ва шундай қийматлар тўпламини Λ билан белгилаймиз. Қолган мусбат қийматларни норегуляр қийматлар деб атаймиз ва уларнинг $(0; \infty) \setminus \Lambda$ тўпламини $\Im$ билан белгилаймиз.

Барча m, n ларда $\nu \in \Im$ тўпламни ёзамиз. $A_{n,m}(\nu) = 1 - \cos \lambda_{n,m} \nu \, \beta = 0$ шарт $\cos \lambda_{n,m} \nu \, \beta = 1$ тригонометрик тенгламага тенг кучли бўлиб, бу тенгламанинг мусбат ечимлари тўплами

$$\nu'_k = \frac{2\pi k}{\lambda_{n,m} \beta}, \;\; k \in N \qquad (10)$$

кўринишдан иборат, бу ерда $N -$ натурал сонлар тўплами, бу ерда

$$\lambda_{n,m} = \sqrt{\frac{\mu^2_{n,m}}{1 + \mu^2_{n,m}}}, \;\; \mu_{n,m} = \frac{\pi}{l} \sqrt{n^2 + m^2} \; .$$

---

[3] Wang S., Chen G. Small amplitude solutions of the generalized IMBq equation // Mathematical Analysis and Application. 2002. Vol. 274. P. 846–866.

Ёзувни соддалаштириш учун $z=\lambda_{n,m}\nu\beta$ белгилаш киритамиз. У ҳолда

$$B_{n,m}(\nu)=2-2\cos\lambda_{n,m}\nu\beta-\lambda_{n,m}\nu\beta\sin\lambda_{n,m}\nu\beta=0$$

тенглама $2\cos z+z\sin z-2=0$ кўринишни олади. Бу тенглама $\sin\frac{z}{2}=0$ ёки $z\cos\frac{z}{2}-2\sin\frac{z}{2}=0$ тенгламаларга тенг кучли. Биринчи тенгламанинг мусбат ечимлари (10) формуладаги ечимлар билан устма-уст тушиши очиқ-равшан. Иккинчи тенглама $tg\frac{z}{2}=\frac{z}{2}$ трансцендент тенгламага тенг кучли. Демак, агар $tg\,\vartheta=\vartheta$ тенгламанинг ўсиш тартибида олинган мусбат ечимлари кетма-кетлиги $\left\{\vartheta_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ бўлса, у ҳолда иккинчи тенгламанинг мусбат ечимлари тўплами

$$\nu_k''=\frac{2\vartheta_k}{\lambda_{n,m}\beta},\ k\in N \tag{11}$$

кўринишда тузилган бўлади.

Шундай қилиб, $B_{n,m}(\nu)=0$ тенгламанинг мусбат ечимлари (10) ва (11) формулалар билан берилади. (10) ечимнинг мумкин бўлган барча $k,n,m\in N$ лардаги қийматлари тўпламини $\Im_1$ билан, (11) ечимнинг эса мумкин бўлган барча $k,n,m\in N$ лардаги қийматлари тўпламини $\Im_2$ билан белгилаймиз.

2-шартлар. $\varphi(x,y)\in C^2([0;l]\times[0;l])$ функция $[0;l]$ кесмада учинчи тартибли бўлакли-узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин ва

$$\varphi(0,y)=\varphi(l,y)=\varphi(x,0)=\varphi(x,l)=0,$$
$$\varphi_{xx}(0,y)=\varphi_{xx}(l,y)=\varphi_{xx}(x,0)=\varphi_{xx}(x,l)=0,$$
$$\varphi_{yy}(0,y)=\varphi_{yy}(l,y)=\varphi_{yy}(x,0)=\varphi_{yy}(x,l)=0.$$

2-теорема. 2-*шартлар бажарилсин. У ҳолда барча* m,n *ва барча* $\nu\in\Lambda$ *регуляр қийматларда 2-масала* Ω *соҳада ягона ечимга эга.* $\nu\in\Im_1$ *ёки* $\nu\in\Im_2$ *норегуляр қийматлар тўпламида 2-масала чексиз кўп ечимларга эга бўлади, агар* $\varphi_{n,m}=0$ *шарт бажарилса.*

Диссертациянинг иккинчи боби «Айниган ядроли интегро-дифференциал тенгламалар учун нолокал чегаравий масалаларнинг классик ечилувчанлиги» деб номланган бўлиб, у хусусий ҳосилали айниган ядроли интегро-дифференциал тенгламалар учун қўйилган нолокал чегаравий масалалар классик ечимларининг мавжудлиги масалаларига бағишланган. Ўзгарувчиларни ажратишнинг Фурье қаторлари усули қўлланилади. Қаралаётган масалалар ечимлари мавжуд ва ягоналигинин етарли шартлари топилган. Берилган параметрларнинг қийматлари ҳисобланади ва ўрганилаётган масаланинг мос ечимлари қурилади.

Биринчи параграфда $\Omega=\{(t,x)|-T<t<T,\,0<x<l\}$ соҳада айниган ядроли аралаш псевдопараболо-псевдогиперболик интегро-дифференциал тенглама қаралади:

$$\begin{cases} U_t-U_{txx}-U_{xx}+\nu\int\limits_0^T K_1(t,s)U(s,x)\,ds=0,\ t>0, \\ U_{tt}-U_{ttxx}-\omega^2 U_{xx}+\nu\int\limits_{-T}^0 K_2(t,s)U(s,x)\,ds=0,\ t<0, \end{cases} \tag{12}$$

бу ерда T ва $l-$ берилган мусбат ҳақиқий сонлар, $\omega-$ мусбат параметр, $\nu-$ нолдан фарқли ҳақиқий параметр, $0\neq K_j(t,s)=a_j(t)b_j(s)$, $a_j(t)$, $b_j(s)$ $\in C[-T;T]$, $j=1,2$.

3-масала. Ω *соҳада* (12) *тенгламани ва*

$$\int\limits_0^T U(t,x)\,dt=\varphi(x),\ U(t,0)=U(t,l)=0$$

шартларни қаноатлантирувчи

$$U(t,x)\in C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega)\cap C^{1,2}(\Omega_+)\cap C^{2,2}(\Omega_-)\cap C^{1+2}_{t,x}(\Omega_+)\cap C^{2+2}_{t,x}(\Omega_-)$$

функцияни топиш талаб этилади, бу ерда $\varphi(x)$ *− берилган етарлича силлиқ функция,* $\varphi(0)=\varphi(l)=0$, $\Omega_-=\{(t,x)|\ -T<t<0,\ 0<x<l\}$,
$\Omega_+=\{(t,x)|\ 0<t<T,\ 0<x<l\}$, $\overline{\Omega}=\{(t,x)|\ -T\le t\le T,\ 0\le x\le l\}$.

(12) тенгламанинг Ω соҳадаги ечими Фурье қатори кўринишида изланади:

$$U(t,x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\mu_n x,$$

бу ерда $\vartheta_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\mu_n x$, $\mu_n=\dfrac{n\pi}{l}$ − мос хос қийматлар.

Фурье қаторини (12) тенгламага қўйиб, оддий интегро-дифференциал тенгламаларнинг саноқли системасига эга бўламиз:

$$u'_n(t)+\lambda_n^2 u_n(t)=\nu\int\limits_0^T a_1(t)\,b_1(s)u_n(s)\,ds,\ t>0,$$

$$u''_n(t)+\lambda_n^2\omega^2 u_n(t)=\nu\int\limits_{-T}^0 a_2(t)\,b_2(s)u_n(s)\,ds,\ t<0,$$

бу ерда $\lambda_n^2=\dfrac{\mu_n^2}{1+\mu_n^2}$, $\mu_n=\dfrac{\pi n}{l}$.

Белгилашлар киритамиз: $\alpha_n=\int\limits_0^T b_1(s)u_n(s)\,ds$, $\beta_n=\int\limits_{-T}^0 b_2(s)u_n(s)\,ds$.

У ҳолда бу янги номаълум катталикларни аниқлаш учун алгебраик тенгламалар системасини тузамиз:

$$\begin{cases}\alpha_n(1-\nu P_{2n}) = \varphi_n P_{1n}, \\ \alpha_n \nu\, Q_{2n}(\omega) + \beta_n(1-\nu Q_{3n}) = \varphi_n Q_{1n}(\omega),\end{cases}$$

бу ерда

$$P_{1n} = \int_0^T b_1(s) M_{1n}(s)\,ds,\; P_{2n} = \int_0^T b_1(s) M_{2n}(s)\,ds,\; Q_{1n}(\omega) = \int_{-T}^0 b_2(s) N_{1n}(s,\omega)\,ds,$$

$$Q_{2n}(\omega) = \int_{-T}^0 b_2(s) N_{2n}(s,\omega)\,ds, \quad Q_{3n} = \int_{-T}^0 b_2(s)\delta_n(s)\,ds,$$

$$M_{2n}(t) = h_n(t) - M_{1n}(t)\int_0^T h_n(t)\,dt,\; \delta_n(t) = \frac{1}{\lambda_n\omega}\int_0^t \sin\lambda_n\omega(t-s)\,a_2(s)\,ds,$$

$$N_{1n}(t,\omega) = \frac{\lambda_n^2}{\sigma_n}\left[\cos\lambda_n\omega t - \frac{\lambda_n}{\omega}\sin\lambda_n\omega t\right], \quad N_{2n}(t,\omega) = N_{1n}(t,\omega)\int_0^T h_n(t)\,dt,$$

$$h_n(t) = \int_0^t \exp\{-\lambda_n^2(t-s)\}\,a_1(s)\,ds, \quad 0<\lambda_n = \sqrt{\frac{\mu_n^2}{1+\mu_n^2}}<1,\; \mu_n = \frac{\pi n}{l}.$$

Бу алгебраик тенгламалар системасидан

$$\nu = \nu_n \neq \frac{1}{P_{2n}}, \quad \nu = \nu_n \neq \frac{1}{Q_{3n}}, \tag{13}$$

$$Q_{2n}(\omega) \neq 0. \tag{14}$$

кўринишлардаги шартларга эга бўламиз.

Энди $\nu_{1n} = \dfrac{1}{P_{2n}}$ ва $\nu_{2n} = \dfrac{1}{Q_{3n}}$ тенгликларни қараймиз. Сўнгра, $\int_0^T \exp\left\{-\lambda_n^2 t\right\}dt = \dfrac{\sigma_n}{\lambda_n^2} \neq 0$ эканлигидан $P_{2n} \neq 0$ бўлиши келиб чиқади. Q_{3n} катталик ω параметрга боғлиқ. ω параметрнинг қайси қийматларида $Q_{3n}(\omega) \neq 0$ бўлишини аниқлаймиз. Ҳақиқатан ҳам, агар $Q_{3n}(\omega) = 0$ деб олсак, бу ердан $\sin 2y_n - 2\sin y_n = y_n$ трансцендент тенгламага эга бўламиз, бу ерда $y_n = \lambda_n \omega T$. Мазкур тенглама мусбат ечимга эга эмас. Иккинчи ν параметрнинг $\nu_{1n} = \dfrac{1}{P_{2n}}$ ва $\nu_{2n} = \dfrac{1}{Q_{3n}}$ қийматларини норегуляр қийматлар деб атаймиз ва бундай сонлар тўпламини $\Im_1 = \{\nu_{1n}, \nu_{2n}\}$ билан белгилаймиз. Бу тўпламни ҳақиқий сонларнинг ушбу $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$ тўпламидан ажратиб оламиз. $\Lambda_1 = \left[(-\infty;0)\cup(0;\infty)\right] \setminus \Im_1$ тўпламни ν параметрнинг регуляр қийматлари тўплами деб атаймиз. Барча $\nu \in \Lambda_1$ қийматлар учун (13) шарт бажарилади. Энди (14) шарт бажарилмаган ҳолни қараймиз. Бу ҳолда $\lambda_n \cos\lambda_n\omega T - \omega\sin\lambda_n\omega T = \lambda_n\omega^2$ тенгламани ечамиз. Мазкур тенгламани

$$\lambda_n T^2 \cos\lambda_n z - T z \sin\lambda_n z = \lambda_n z^2,\ 0 < z,\ 0 < \lambda_n < 1$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу трансцендент тенглама бўлиб, уни график усулда ечиш мумкин ва у битта мусбат ечимга эга. Бу ечимни тўплам сифатида $\Im_2$ билан белгилаймиз. $\omega \in \Im_2$ қийматда (14) шарт бузилганлиги сабали уни норегуляр қиймат деб атаймиз. (14) шарт бажариладиган $\Lambda_2 = (0;\infty)\setminus\Im_2$ тўпламни эса ω параметрнинг регуляр қийматлари тўплами деб атаймиз. Белгилашлар киритамиз:

$$\Phi_n(t,\nu) = M_{1n}(t) + \nu\, M_{2n}(t)\,\frac{P_{1n}}{1-\nu P_{2n}},$$

$$\Psi_n(t,\nu,\omega) = N_{1n}(t,\omega) - \nu\, N_{2n}(t,\omega)\,\frac{P_{1n}}{1-\nu P_{2n}} +$$

$$+\nu\,\delta_n(t)\left[\frac{Q_{1n}(\omega)}{1-\nu Q_{3n}} - \nu\,\frac{Q_{2n}(\omega)}{1-\nu Q_{3n}}\,\frac{P_{1n}}{1-\nu P_{2n}}\right].$$

Сонларнинг $(n,\nu,\omega) \in \aleph_1 = \{(n,\nu,\omega): n \in N,\ \nu \in \Lambda_1,\ \omega \in \Lambda_2\}$ учлиги учун 3 масаланинг ечими қуйидаги қаторлар кўринишида ёзилади:

$$U(t,x,\nu) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n \Phi_n(t,\nu)\sin\frac{\pi n}{l}x,\ t > 0,$$

$$U(t,x,\nu) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n \Psi_n(t,\nu,\omega)\sin\frac{\pi n}{l}x,\ t < 0.$$

Бу ечим Ω соҳада ягонадир. Сонларнинг $(n,\nu,\omega) \in \aleph_2 = \{(n,\nu,\omega): n \in N,\ \nu \in \Im_1,\ \omega \in \Im_2\}$ учлиги учун эса 3 масаланинг Ω соҳадаги ечими қуйидаги қаторлар кўринишида ёзилади

$$U(t,x,\nu) = \sqrt{\frac{2}{l}}\ \nu\sum_{n=1}^{\infty} C_n M_{2n}(t)\sin\frac{\pi n}{l}x,\ t > 0,$$

$$U(t,x,\nu) = \sqrt{\frac{2}{l}}\ \nu\sum_{n=1}^{\infty} C_n\left[-N_{2n}(t,\omega) + \delta_n(t)\right]\sin\frac{\pi n}{l}x,\ t < 0,$$

бу ерда C_n – ихтиёрий ўзгармас. $\varphi(x) \equiv 0$ шарт сонларнинг $(n,\nu,\omega) \in$ $\in \aleph_2 = \{(n,\nu,\omega): n \in N,\ \nu \in \Im_1,\ \omega \in \Im_2\}$ учлиги учун 3 масала ечимининг мавжуд бўлиши учун етарлидир.

3-теорема. $\varphi(x) \in C^2[0;l]$ *функция* $[0;l]$ *оралиқда учинчи тартибли бўлакли-узлуксиз ҳосилаларга эга бўлиб,* $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\varphi_{xx}(0) = \varphi_{xx}(l) = 0$ *бўлсин. У ҳолда сонларнинг* $(n,\nu,\omega) \in \aleph_1$ *учлиги учун 3-масала* Ω *соҳада бир қийматли ечимга эга. Сонларнинг* $(n,\nu,\omega) \in \aleph_2$ *учлиги учун эса 3-масала* Ω *соҳада чексиз кўп ечимларга эга, агарда* $\varphi(x) \equiv 0$ *шарт бажарилса.*

Иккинчи параграфда $\Omega = \{(t,x) \mid -T < t < T,\ 0 < x < l\}$ соҳада тўртинчи тартибли аралаш турдаги ядролари айниган интегро-дифференциал тенглама

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{ttxx} + U_{xx} + \nu \int\limits_0^T K_1(t,s)U(s,x)\,ds = 0,\ t > 0, \\ U_{tt} - U_{ttxx} - \omega^2 U_{xx} + \nu \int\limits_{-T}^0 K_2(t,s)U(s,x)\,ds = 0,\ t < 0 \end{cases} \qquad (15)$$

қаралган, бу ерда T ва $l-$ берилган мусбат ҳақиқий сонлар, $\omega-$ мусбат параметр, $\nu-$ нолдан фарқли ҳақиқий параметр, $0 \neq K_j(t,s) = a_j(t)b_j(s)$, $a_j(t), b_j(s) \in C[-T;T]$, $j = 1,2$.

4-масала. Ω *соҳада* (15) *тенгламани ва*

$$\int\limits_0^T U(t,x)\,dt = \varphi(x), \quad \int\limits_{-T}^0 U(t,x)\,dt = \psi(x),\ U(t,0) = U(t,l) = 0$$

шартларни қаноатлантирувчи

$$U(t,x) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_+ \cup \Omega_-) \cap C^{2+2}_{t,x}(\Omega_+ \cup \Omega_-),$$

функцияни топиш талаб этилади, бу ерда $\varphi(x), \psi(x)$ *− берилган етарлича силлиқ функциялар,*

$$\varphi(0) = \varphi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0,\ \Omega_- = \{(t,x) |\ -T < t < 0,\ 0 < x < l\},$$

$$\Omega_+ = \{(t,x) |\ 0 < t < T,\ 0 < x < l\}, \quad \overline{\Omega} = \{(t,x) |\ -T \le t \le T,\ 0 \le x \le l\}.$$

Бу параграф бундан аввалги параграф каби ўрганилади.

Учинчи параграфда уч ўлчовли $\Omega = \{(t,x,y) |\ 0 < t < \beta,\ 0 < x, y < l\}$ соҳада тўртинчи тартибли айниган ядроли Буссинеск интегро-дифференциал тенгламаси

$$U_{tt}(t,x,y) - U_{ttxx}(t,x,y) - U_{ttyy}(t,x,y) - U_{xx}(t,x,y) - U_{yy}(t,x,y) =$$

$$= \nu \int\limits_0^\beta K(t,s)U(s,x,y)\,ds \qquad (16)$$

учун нолокал чегаравий масала ечимининг мавжуд ва ягона ёки ягона эмаслиги масалалари тадқиқ этилади, бу ерда β ва $l-$ берилган мусбат ҳақиқий сонлар, $\nu-$ нолдан фарқли ҳақиқий параметр, $0 \neq K(t,s) = \sum\limits_{i=1}^k a_i(t)b_i(s)$, $a_i(t), b_i(s) \in C[0;\beta]$. Шунингдек, $a_i(t),\ i = \overline{1,k}$, функциялар системаси ва $b_i(s),\ i = \overline{1,k}$, функциялар системаси чизиқли эркли деб фараз қилинади.

(16) тенгламани қуйидаги нолокал

$$U(0,x,y) + \int\limits_0^\beta U(t,x,y)\,dt = \varphi(x,y),\ 0 \le x, y \le l, \qquad (17)$$

$$U_t(0,x,y) + \int\limits_0^\beta U_t(t,x,y)\,dt = \psi(x,y),\ 0 \le x, y \le l \qquad (18)$$

ва чегаравий

$$U(t,0,y) = U(t,l,y) = U(t,x,0) = U(t,x,l) = 0, \quad 0 \le t \le \beta \qquad (19)$$

шартларда ўрганамиз, бу ерда $\varphi(x,y),\psi(x,y)-$ берилган етарлича силлиқ функциялар,

$$\varphi(0,y)=\varphi(l,y)=\varphi(x,0)=\varphi(x,l)=0,$$
$$\psi(0,y)=\psi(l,y)=\psi(x,0)=\psi(x,l)=0.$$

5-масала. *Уч ўлчовли* Ω *соҳада* (16) *тенгламани ва* (17)-(19) *берилган чегаравий шартларни ҳамда*

$$U(t,x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)\cap C^{2+2+0}_{t,x,y}(\Omega)\cap C^{2+0+2}_{t,x,y}(\Omega)$$

шартларни қаноатлантирувчи $U(t,x,y)$ *функция топилсин, бу ерда* $\overline{\Omega}=\{(t,x,y)|\ 0\le t\le\beta,\ 0\le x,y\le l\}.$

Масаланинг нотривиал ечимлари Фурье қаторлари кўринишида изланади:

$$U(t,x,y)=\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}u_{n,m}(t)\vartheta_{n,m}(x,y),$$

бу ерда $\vartheta_{n,m}(x,y)=\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{l}y\right).$

Чегаравий шартларни ҳисоблаш чоғида $c_{n,m}$ ва $d_{n,m}$ коэффициентларни аниқлаш учун саноқли сондаги алгебраик тенгламалар системаси (ССАТС) га эга бўламиз:

$$\begin{cases} c_{n,m}\left(\lambda_{n,m}+\sin\left(\lambda_{n,m}\beta\right)\right)+d_{n,m}\left(1-\cos\left(\lambda_{n,m}\beta\right)\right)=\lambda_{n,m}\left(\varphi_{n,m}-\gamma_{n,m}\right), \\ c_{n,m}\left(\cos\left(\lambda_{n,m}\beta\right)-1\right)+d_{n,m}\left(\lambda_{n,m}+\sin\left(\lambda_{n,m}\beta\right)\right)=\lambda^2_{n,m}\left(\psi_{n,m}-\eta_{n,m}(\beta)\right). \end{cases} \quad (20)$$

(20) кўринишдаги ССАТС бир қийматли ечимга эга бўлиши учун

$$A_{n,m}=\left(\lambda_{n,m}+\sin\left(\lambda_{n,m}\beta\right)\right)^2+\left(1-\cos\left(\lambda_{n,m}\beta\right)\right)^2=$$
$$=\lambda^2_{n,m}+2\left(1+\lambda_{n,m}\sin\left(\lambda_{n,m}\beta\right)-\cos\left(\lambda_{n,m}\beta\right)\right)\neq 0$$

шартнинг бажарилиши талаб этилади, бу ерда

$$\lambda^2_{n,m}=\frac{\mu^2_{n,m}}{1+\mu^2_{n,m}},\quad \mu^2_{n,m}=\frac{\pi}{l}\sqrt{n^2+m^2}.$$

5-шартлар. Берилган $\varphi(x,y)\in C^2\left([0;l]\times[0;l]\right),\ \psi(x,y)\in C^2\left([0;l]\times[0;l]\right)$ функциялар $[0;l]\times[0;l]$ соҳада учинчи тартибли бўлакли-узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин:

$$\varphi(0,y)=\varphi(l,y)=\varphi(x,0)=\varphi(x,l)=$$
$$=\varphi_{xx}(0,y)=\varphi_{xx}(l,y)=\varphi_{xx}(x,0)=\varphi_{xx}(x,l)=$$
$$=\varphi_{yy}(0,y)=\varphi_{yy}(l,y)=\varphi_{yy}(x,0)=\varphi_{yy}(x,l)=$$
$$=\psi(0,y)=\psi(l,y)=\psi(x,0)=\psi(x,l)=$$
$$=\psi_{xx}(0,y)=\psi_{xx}(l,y)=\psi_{xx}(x,0)=\psi_{xx}(x,l)=$$
$$=\psi_{yy}(0,y)=\psi_{yy}(l,y)=\psi_{yy}(x,0)=\psi_{yy}(x,l)=0.$$

Фредгольм детерминантини қараймиз:

$$\Delta_{n,m}(\nu)=\begin{vmatrix} 1+\nu H_{11n,m} & \nu H_{12n,m} & ... & \nu H_{1kn,m} \\ \nu H_{21n,m} & 1+\nu H_{22n,m} & ... & \nu H_{2kn,m} \\ ... & ... & ... & ... \\ \nu H_{k1n,m} & \nu H_{k2n,m} & ... & 1+\nu H_{kkn,m} \end{vmatrix} \neq 0,$$

бу ерда

$$H_{ijn,m}=\int_0^{\beta} b_i(s)E_{jn,m}(s)\,ds,$$

$$E_{in,m}(t)=B_{1n,m}(t)\int_0^{\beta}\xi_{in,m}(t)\,dt+B_{2n,m}(t)\xi_{in,m}(\beta)-\xi_{in,m}(t),$$

$$B_{1n,m}(t)=\frac{\lambda_{n,m}}{A_{n,m}(T)}\Big[\cos\lambda_{n,m}t\Big(\lambda_{n,m}+\sin\lambda_{n,m}\beta\Big)+\sin\lambda_{n,m}t\Big(1-\cos\lambda_{n,m}\beta\Big)\Big],$$

$$B_{2n,m}(t)=\frac{\lambda_{n,m}^2}{A_{n,m}(T)}\Big[\cos\lambda_{n,m}t\Big(\cos\lambda_{n,m}\beta-1\Big)+\sin\lambda_{n,m}t\Big(\lambda_{n,m}+\sin\lambda_{n,m}\beta\Big)\Big],$$

$$\xi_{i,n,m}(t)=\frac{1}{\lambda_{n,m}\Big(1+\mu_{n,m}^2\Big)}\int_0^t\sin\Big(\lambda_{n,m}(t-s)\Big)a_i(s)\,ds.$$

$\Delta_{n,m}(\nu)$ детерминант ν га нисбатан кўпҳад бўлиб, бу кўпҳаднинг даражаси k дан катта эмас. $\Delta_{n,m}(\nu)=0$ тенглама k тадан кўп бўлмаган турли ҳақиқий илдизларга эга. Бу илдизлар интегро-дифференциал тенглама ядроси ν параметрининг норегуляр қийматларидир. ν параметрнинг бундай норегуляр қийматлари тўпламини $\Im$ билан белгилаймиз. Параметрнинг $\nu\in\Lambda=\big((-\infty;0)\cup(0;\infty)\big)\setminus\Im$ қийматлари тўпламини регуляр қийматлар тўплами деб атаймиз. $\nu\in\Lambda$ параметрнинг регуляр қийматларида Фредгольм шарти бажарилади. Шунинг учун бундай $\nu\in\Lambda$ қийматларда қўйилган нолокал масала бир қийматли ечилади.

4-теорема. 5-*шартлар бажарилсин. Параметрнинг* $\nu\in\Lambda$ *регуляр қийматларида уч ўлчовли* Ω *соҳада масала бир қийматли ечилади. Параметрнинг* $\nu\in\Im$ *иррегуляр қийматларида масала* Ω *соҳада чексиз кўп ечимга эга. Бунда 5-масала ечимининг мавжуд бўлиши учун чегаравий шартларнинг* $\varphi(x,y)\equiv 0,\ \psi(x,y)\equiv 0$ *бир жинсли бўлиши етарлидир.*

Тўртинчи параграфда $\Omega=\{(t,x,y)\,|\,0<t<T,\ 0<x,y<l\}$ соҳада тўртинчи тартибли айниган ядроли Бенни-Люк (Benney-Luke[4]) туридаги интегро-дифференциал тенглама учун

$$U_{tt}-(U_{ttxx}+U_{ttyy})-\omega^2(U_{xx}+U_{yy})+\omega^2(U_{xxxx}+U_{yyyy})=$$

[4] Benney D. J., Luke J. C. Interactions of permanent waves of finite amplitude // Journal of Mathematical Physics. 1964. Vol. 43. P. 309–313.

$$=\nu\int_0^T K(t,s)U(s,x,y)\,ds+\alpha(t)\beta(x,y) \qquad (25)$$

тескари нолокал масаланинг бир қийматли ечилиши масалалари ўрганилган, бу ерда T ва $l-$ берилган мусбат ҳақиқий сонлар, $\omega-$ мусбат параметр, $\nu-$ нолдан фарқли ҳақиқий параметр, $0\neq\alpha(t)\in C[0;T]$, $\beta(x,y)-$ қайта аниқланиш функцияси, $K(t,s)=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i(t)b_i(s)$, $0\neq a_i(t),b_i(s)\in C[0;T]$. Бу ерда $a_i(t),\ i=\overline{1,k}$ функциялар системаси ва $b_i(s),\ i=\overline{1,k}$ функциялар системаси чизиқли эркли системалардир.

6-масала. *Шундай*

$$U(t,x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^{2,4,4}_{t,x,y}(\Omega)\cap C^{2+2+0}_{t,x,y}(\Omega)\cap C^{2+0+2}_{t,x,y}(\Omega), \qquad (26)$$

$$\beta(x,y)\in C\{0\leq x,y\leq l\}$$

функциялар жуфтини топиш керакки, бу функциялар жуфти Ω *соҳада* (25) *тенгламани ва*

$$U(0,x,y)=U(T,x,y),\quad \int_0^T U(t,x,y)\,dt=\varphi(x,y),\ \ 0\leq x,y\leq l, \qquad (27)$$

$$U(t,0,y)=U(t,l,y)=U(t,x,0)=U(t,x,l)=$$
$$=U_{xx}(t,0,y)=U_{xx}(t,l,y)=U_{xx}(t,x,0)=U_{xx}(t,x,l)=$$
$$=U_{yy}(t,0,y)=U_{yy}(t,l,y)=U_{yy}(t,x,0)=U_{yy}(t,x,l)=0,\ \ 0\leq t\leq T, \qquad (28)$$

$$\int_0^T \Theta(t)U(t,x,y)\,dt=\psi(x,y),\ \ 0\leq x,y\leq l \qquad (29)$$

шартларни қаноатлантирсин, бу ерда $0\neq\Theta(t)\in C[0;T]$, $\psi(x,y),\varphi(x,y)-$ $\{0\leq x,y\leq l\}$ *соҳада берилган етарлича силлиқ функциялар,*

$$\varphi(0,y)=\varphi(l,y)=\varphi(x,0)=\varphi(x,l)=$$
$$=\varphi_{xx}(0,y)=\varphi_{xx}(l,y)=\varphi_{xx}(x,0)=\varphi_{xx}(x,l)=$$
$$=\varphi_{yy}(0,y)=\varphi_{yy}(l,y)=\varphi_{yy}(x,0)=\varphi_{yy}(x,l)=$$
$$=\varphi_{xxxx}(0,y)=\varphi_{xxxx}(l,y)=\varphi_{xxxx}(x,0)=\varphi_{xxxx}(x,l)=$$
$$=\varphi_{yyyy}(0,y)=\varphi_{yyyy}(l,y)=\varphi_{yyyy}(x,0)=\varphi_{yyyy}(x,l)=0,$$
$$\overline{\Omega}=\{(t,x,y)|\ 0\leq t\leq T,\ 0\leq x,y\leq l\}.$$

6-масаланинг бир қийматли ечилиши учун биринчи шарт

$$\sigma_{n,m}(\omega)=1-\cos\mu_{n,m}\omega T\neq 0$$

кўринишда бўлади.

Бирор ω да $\sigma_{n,m}(\omega)=1-\cos\mu_{n,m}\omega T=0$ бўлсин. Бу шарт $\cos\mu_{n,m}\omega T=1$ тенгликка тенг кучли, бу ерда $\mu_{n,m}=\dfrac{\pi}{l}\sqrt{n^2+m^2}$. Бу тенглама мусбат ечимлар тўпламига эга: $\omega_k=\dfrac{2\pi k}{\mu_{n,m}T}$, $k\in N$, бу ерда $N-$ натурал сонлар тўплами. Бу формула ёрдамида аниқланган $0<\omega_k$ қийматларнинг тўпламини норегуляр тўплам деб атаймиз ва $\Im_1$ билан белгилаймиз. ω_k нинг бошқа қийматлари тўпламини регуляр тўплам деб атаймиз ва $\Lambda_1=(0,\infty)\setminus\Im_1$ билан белгилаймиз.

Ушбу

$$\Delta_{n,m}(\nu,\omega)=\begin{vmatrix} 1-\nu H_{11\,n,m} & -\nu H_{12\,n,m} & \dots & -\nu H_{1k\,n,m} \\ -\nu H_{21\,n,m} & 1-\nu H_{22\,n,m} & \dots & -\nu H_{2k\,n,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\nu H_{k1\,n,m} & -\nu H_{k2\,n,m} & \dots & 1-\nu H_{kk\,n,m} \end{vmatrix}\neq 0$$

детерминант ν га нисбатан даражаси k дан катта бўлмаган кўпҳаддир, бу ерда

$$H_{i\,j\,n,m}(\omega)=\int\limits_0^T b_i(s)D_{j\,n,m}(s,\omega)\,d\,s,$$

$$D_{i\,n,m}(t,\omega)=h_{i\,n,m}(T,\omega)\delta_{2n,m}(t,\omega)+h_{i\,n,m}(t,\omega)-B_{n,m}(t,\omega)\int\limits_0^T h_{i\,n,m}(t,\omega)\,d\,t,$$

$$h_{i\,n,m}(t,\omega)=\frac{1}{\mu_{n,m}(1+\mu^2_{n,m})\omega}\int\limits_0^t \sin\,\mu_{n,m}\omega(t-s)a_i(s)\,d\,s,\; i=\overline{1,k},$$

$$B_{n,m}(t,\omega)=\frac{\mu_{n,m}\omega}{2}\cdot\delta_{0n,m}(t,\omega),\quad \mu_{n,m}=\frac{\pi}{l}\sqrt{n^2+m^2},$$

$$\delta_{0n,m}(t,\omega)=\sin\mu_{n,m}\omega t+\frac{\sin\mu_{n,m}\omega T}{\sigma_{n,m}(\omega)}\cdot\cos\mu_{n,m}\omega t,$$

$$\delta_{2n,m}(t,\omega)=\frac{1}{\sigma_{n,m}(\omega)}\left[\cos\mu_{n,m}\omega t-\frac{\delta_{0n,m}(t,\omega)}{2}\sin\mu_{n,m}\omega T\right].$$

$\Delta_{n,m}(\nu,\omega)=0$ тенглама k тадан кўп бўлмаган турли ҳақиқий илдизларга эга бўлиши мумкин. Бундай сонлар тўпламини норегуляр тўплам деб атаймиз ва $\Im_2$ билан белгилаймиз. ν нинг бошқа қийматларини регуляр қийматлар деб атаймиз ва уларнинг тўпламини $\Lambda_2=\left[(-\infty,\,0)\cup(0,\,\infty)\right]\setminus\Im_2$ билан белгилаймиз. Белгилаш киритамиз: $\aleph_1=\left\{(\omega,\nu):\,\omega\in\Lambda_1,\,\nu\in\Lambda_2\right\}$.

6.1-шарт. $\varphi(x,y),\beta(x,y)\in C^5([0;l]\times[0;l])$ функциялар $[0;l]$ оралиқда олтинчи тартибгача бўлакли-узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин:

$$\beta(0,y)=\beta(l,y)=\beta(x,0)=\beta(x,l)=$$
$$=\beta_{xx}(0,y)=\beta_{xx}(l,y)=\beta_{xx}(x,0)=\beta_{xx}(x,l)=$$
$$=\beta_{yy}(0,y)=\beta_{yy}(l,y)=\beta_{yy}(x,0)=\beta_{yy}(x,l)=$$
$$=\beta_{xxxx}(0,y)=\beta_{xxxx}(l,y)=\beta_{xxxx}(x,0)=\beta_{xxxx}(x,l)=$$
$$=\beta_{yyyy}(0,y)=\beta_{yyyy}(l,y)=\beta_{yyyy}(x,0)=\beta_{yyyy}(x,l)=0.$$

5-теорема. 6.1-*шартлар бажарилсин. У ҳолда* (25)-(28) *масала* Ω *соҳада мумкин бўлган барча* n, m *ва* $(\nu,\omega)\in\aleph_1$ *ларда бир қийматли ечимга эга. Бу ечим Фурье қатори кўринишида аниқланади:*

$$U(t,x,y,\omega,\nu)=\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\varphi_{n,m}F_{n,m}(t,\omega,\nu)+\beta_{n,m}M_{n,m}(t,\omega,\nu)\right]\times$$

$$\times\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\sin\frac{\pi m}{l}y, \qquad (30)$$

бу ерда $F_{n,m}(t,\omega,\nu)=B_{n,m}(t,\omega)+\nu\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{1in,m}(\nu,\omega)}{\Delta_{n,m}(\nu,\omega)}D_{i\,n,m}(t,\omega)$,

$$\Delta_{jin,m}(\nu,\omega)=$$

$$=\begin{vmatrix} 1-\nu H_{11n,m} & \ldots & -\nu H_{1(i-1)n,m} & \Psi_{j1n,m} & -\nu H_{1(i+1)n,m} & \ldots & -\nu H_{1kn,m} \\ -\nu H_{21n,m} & \ldots & -\nu H_{2(i-1)n,m} & \Psi_{j2n,m} & -\nu H_{2(i+1)n,m} & \ldots & -\nu H_{2kn,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\nu H_{k1n,m} & \ldots & -\nu H_{k(i-1)n,m} & \Psi_{jkn,m} & -\nu H_{k(i+1)n,m} & \ldots & 1-\nu H_{kkn,m} \end{vmatrix},$$

$j=1,2,$

$$M_{n,m}(t,\omega,\nu)=E_{n,m}(t,\omega)+\nu\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{2in,m}(\nu,\omega)}{\Delta_{n,m}(\nu,\omega)}D_{i\,n,m}(t,\omega).$$

(29) шартдан фойдаланиб, қайта аниқлаш функциясини Фурье қатори кўринишида топамиз:

$$\beta(x,y)=\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{\Psi_{n,m}-\varphi_{n,m}\chi_{1n,m}(\omega,\nu)}{\chi_{2n,m}(\omega,\nu)}\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi m}{l}y. \qquad (31)$$

(31) да қуйидаги белгилашлардан фойдаландик:

$$\chi_{1n,m}(\omega,\nu)=\int_0^T\Theta(t)F_{n,m}(t,\omega,\nu)dt, \quad \chi_{2n,m}(\omega,\nu)=\int_0^T\Theta(t)M_{n,m}(t,\omega,\nu)dt.$$

Энди $\chi_{2n,m}(\omega,\nu)\neq 0$ шартнинг бажарилишини текширамиз. Фараз қилайлик,

$$\chi_{2n,m}(\omega,\nu)\int_0^T\Theta(t)M_{n,m}(t,\omega,\nu)dt=0 \qquad (32)$$

бўлсин.

Ўрта қиймат ҳақидаги теоремани қўллаймиз. Масаланинг қўйилиш шартига кўра, $\Theta(t)\neq 0,\, t\in[0,T]$. У ҳолда (32) тенгликдан топамиз: $\int_0^T M_{n,m}(t,\omega,\nu)dt=0.$ $M_{n,m}(t,\omega,\nu)$ функциянинг таҳлили шуни кўрсатадики, охирги тенглик бажарилиши учун қуйидаги тенгликлар бажарилиши лозим:

$$\int_0^T \sin\mu_{n,m}\omega(T-t)a_i(t)\,dt = 0\,,\ \int_0^T \sin\mu_{n,m}\omega(T-t)\alpha(t)\,dt = 0. \qquad (33)$$

(33) тенгликка ўрта қиймат ҳақидаги теоремани қўллаймиз. Масаланинг шартига кўра, $a_i(t)\neq 0,\ \alpha(t)\neq 0,\ t\in[0,T]$. У ҳолда (33) дан топамиз: $\int_0^T \sin\mu_{n,m}\omega(T-t)\,dt = 0.$ Бу интегрални ҳисоблаш чоғида ω параметрга нисбатан $\cos\mu_{n,m}\omega T = \dfrac{1}{\mu_{n,m}}$ тригонометрик тенгламага келамиз, бу ерда $\mu_{n,m} = \dfrac{\pi}{l}\sqrt{n^2+m^2}$. Бу тенглама $l\geq\sqrt{2}\pi$ шарт бажарилганда ечимга эга. Бу тенгламанинг ω_k мусбат ечимлари тўпламини $\Im_3$ билан белгилаймиз. $l=\sqrt{2}\pi$ бўлганда $\Im_3=\Im_1$ муносабат ўринли. $l>\sqrt{2}\pi$ бўлганда эса $\Im_3\subset\Lambda_1$ бўлади. Шунинг учун $\omega_k\in\Lambda_3=\Lambda_1\setminus\Im_3$. Барча $\omega_k\in\Lambda_3$ учун $\chi_{2n,m}(\omega,\nu)\neq 0$ шарт бажарилади.

Белгилаш киритамиз: $\aleph_2 = \{(\omega,\nu):\omega\in\Lambda_3,\ \nu\in\Lambda_2\}$.

6.2-шартлар. $\psi(x\ ,y\in)\ ^5C\ \ (\times[\ l0\ ;$ функциялар $[0;l]$ кесмада олтинчи тартиблигача бўлакли-узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин:

$$\psi(0,y)=\psi(l,y)=\psi(x,0)=\psi(x,l)=$$
$$=\psi_{xx}(0,y)=\psi_{xx}(l,y)=\psi_{xx}(x,0)=\psi_{xx}(x,l)=$$
$$=\psi_{yy}(0,y)=\psi_{yy}(l,y)=\psi_{yy}(x,0)=\psi_{yy}(x,l)=$$
$$=\psi_{xxxx}(0,y)=\psi_{xxxx}(l,y)=\psi_{xxxx}(x,0)=\psi_{xxxx}(x,l)=$$
$$=\psi_{yyyy}(0,y)=\psi_{yyyy}(l,y)=\psi_{yyyy}(x,0)=\psi_{yyyy}(x,l)=0.$$

6-теорема. *Фараз қилайлик,* 6.1- *ва* 6.2-*шартлар бажарилсин. Мумкин бўлган барча* n,m *ва* $(\omega,\nu)\in\aleph_2$ *ларда қайта аниқлаш функцияси* (30) *қатор ёрдамида, асосий номаълум функция эса*

$$U(t,x,y,\omega,\nu)=\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\left[\psi_{n,m}\frac{M_{n,m}(t,\omega,\nu)}{\chi_{2n,m}(\omega,\nu)}+\right.$$
$$\left.+\varphi_{n,m}\left(F_{n,m}(t,\omega,\nu)-M_{n,m}(t,\omega,\nu)\frac{\chi_{1n,m}(\omega,\nu)}{\chi_{2n,m}(\omega,\nu)}\right)\right].$$

қатор ёрдамида бир қийматли аниқланади.

Бунда (25) *интегро-дифференциал тенгламанинг* $U(t,x,\omega,\nu)$ *ечими* $\beta(x,y)$ *қайта аниқлаш функцияси ва берилган* $\varphi(x,y)$ *функцияга нисбатан турғун бўлади.*

Норегуляр ҳоллар ҳам шу каби ўрганилади. Бу ерда 4 та ҳол бўлиши мумкин. Ҳар бир ҳол учун Фурье қаторлари кўринишидаги чексиз кўп ечимлар қурилади.

Учинчи боб хусусий ҳосилали айниган ядроли интегро-дифференциал тенгламалар учун параметрнинг регуляр қийматларида қўйилган аралаш масалаларни бир қийматли ечишга бағишланган бўлиб, у учта параграфлардан иборат. Аралаш масалалар ўзгарувчиларга ажратишнинг Фурье усули билан ечилган. Қўйилган масалалар бир қийматли ечилишининг етарли шартлари топилган. Учинчи тартибли хусусий ҳосилали бузиладиган параметрли ночизиқли интегро-дифференциал тенглама учун тескари масала қаралган.

Биринчи параграфда тўғри тўртбурчакли Ω соҳада айниган ядроли чизиқли интегро-дифференциал тенглама

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^{4m+1}}{\partial t\,\partial x^{4m}}+\frac{\partial^{4m}}{\partial x^{4m}}\right)^3 U(t,x)=\mu\int_0^T K(t,s)U(s,x)\,ds+\alpha(t)U(t,x) \qquad (34)$$

учун берилган μ параметрнинг регуляр қийматларида

$$U(t,x)_{|\,t=0}=\varphi_1(x),\quad \frac{\partial^{j-1}}{\partial t^{j-1}}U(t,x)_{|\,t=0}=\varphi_j(x),\ j=2,3 \qquad (35)$$

бошланғич ва

$$U(t,x)_{|\,x=0}=U_{xx}(t,x)_{|\,x=0}=\ldots=\frac{\partial^{2(6m-1)}}{\partial x^{2(6m-1)}}U(t,x)_{|\,x=0}=$$

$$=U(t,x)_{|\,x=l}=U_{xx}(t,x)_{|\,x=l}=\ldots=\frac{\partial^{2(6m-1)}}{\partial x^{2(6m-1)}}U(t,x)_{|\,x=l}=0 \qquad (36)$$

чегаравий шартлар билан берилган аралаш масаланинг умумлашган ечилиши масалалари ўрганилади, бу ерда

$\varphi_j(x)\in C^{12m+1}(\Omega_l)$, $\varphi_j(x)_{|\,x=0}=\varphi''_j(x)_{|\,x=0}=\ldots=\varphi_j^{(12m-2)}(x)_{|\,x=0}=\varphi_j(x)_{|\,x=l}=$

$=\varphi''_j(x)_{|\,x=l}=\ldots=\varphi_j^{(12m-2)}(x)_{|\,x=l}=0$, $j=\overline{1,n}$, $K(t,s)=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i(t)b_i(s)$,

$a_i(t),b_i(s)\in C(\Omega_T)$, $\alpha(t)\in C(\Omega_T)$, $\mu-$ нолдан фарқли ҳақиқий параметр, $\Omega\equiv\Omega_T\times\Omega_l$, $\Omega_T\equiv[0,T]$, $\Omega_l\equiv[0,l]$, $0<l<\infty$, $0<T<\infty$, $m-$ тайин натурал сон. Шунингдек, $a_i(t)$, $i=\overline{1,k}$, функциялар системаси ва $b_i(s)$, $i=\overline{1,k}$, функциялар системаси чизиқли эркли деб фараз қилинади.

$W_{2,t,x}^{3,12m}(\Omega)$ орқали шундай $U(t,x)$ функциялар синфи белгиланадики, бунда $U(t,x)$, $\frac{\partial}{\partial x}U(t,x)$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(t,x),\ldots,$ $\frac{\partial^{12m}}{\partial x^{12m}}U(t,x)$, $\frac{\partial}{\partial t}U($ $t,$ $\frac{\partial^2}{\partial t^2}U(t,x)$, $\frac{\partial^3}{\partial t^3}U(t,x)$ функциялар $L_2(\Omega)$ фазога тегишли бўлади[5].

[5] Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

1-Таъриф. (34)-(36) *аралаш масаланинг умумлашган ечими деб деярли ҳамма ерда* (34) *тенгламани* (35) *ва* (36) *шартлар билан қаноатлантирувчи* $U(t,x)\in W^{3,12m}_{2,t,x}(\Omega)$ *функцияга айтилади.*

Иккинчи параграфда ихтиёрий натурал даражали параболик операторли ва айниган ядроли ночизиқли интегро-дифференциал тенглама

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^{4m}}{\partial x^{4m}}\right)^n U(t,x)-\mu\int_0^T K(t,s)U(s,x)\,ds=f(t,x,U(t,x))$$

учун Ω соҳада μ параметрнинг регуляр қийматларида

$$U(t,x)_{|t=0}=\varphi_1(x),\quad \frac{\partial^{j-1}}{\partial t^{j-1}}U(t,x)_{|t=0}=\varphi_j(x),\ j=\overline{2,n}$$

бошланғич ва

$$U(t,x)_{|x=0}=U_{xx}(t,x)_{|x=0}=\ldots=\frac{\partial^{2(2nm-1)}}{\partial x^{2(2nm-1)}}U(t,x)_{|x=0}=$$

$$=U(t,x)_{|x=l}=U_{xx}(t,x)_{|x=l}=\ldots=\frac{\partial^{2(2nm-1)}}{\partial x^{2(2nm-1)}}U(t,x)_{|x=l}=0$$

чегаравий шартлар билан берилган аралаш масаланинг умумлашган ечилиши масалалари ўрганилган, бу ерда

$f(t,x,U)\in C(\Omega\times R),\ \varphi_j(x)\in C^{4mn+1}(\Omega_l),\ \varphi_j(x)_{|x=0}=\varphi''_j(x)_{|x=0}=$

$=\ldots=\varphi_j^{(4nm-2)}(x)_{|x=0}=\varphi_j(x)_{|x=l}=\varphi''_j(x)_{|x=l}=\ldots=\varphi_j^{(4nm-2)}(x)_{|x=l}=0,\quad j=\overline{1,n},$

$K(t,s)=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i(t)b_i(s)$, $a_i(t),b_i(s)\in C(\Omega_T),\ \alpha(t)\in C(\Omega_T),\ \mu-$ ҳақиқий параметр, $\Omega\equiv\Omega_T\times\Omega_l,\ \Omega_T\equiv[0,T],\ \Omega_l\equiv[0,l],\quad 0<l<\infty, 0<T<\infty$, $n,m-$ тайин натурал сонлар. Шунингдек, $a_i(t)$, $i=\overline{1,k}$, функциялар системаси ва $b_i(s)$, $i=\overline{1,k}$, функциялар системаси чизиқли эркли деб фараз қилинади.

Учинчи параграфда учинчи тартибли хусусий ҳосилали айниган ядроли ночизиқли интегро-дифференциал тенглама учун тескари масала тадқиқ этилган.

Тўртинчи боб иккинчи боб материалларини мисолларда тасвирлашга бағишланган. Бу ерда масалаларни ечишда параметрларнинг аҳамияти янада аниқроқ кўрсатилган. Шундай қилиб, тўртинчи бобда иккинчи тартибли айниган ядроли оддий Фредгольм интегро-дифференциал тенгламалари учун интеграл шартлар билан берилган нолокал чегаравий масалалар тадқиқ этилади.

Биринчи параграфда иккинчи тартибли айниган ядроли Фредгольм интегро-дифференциал тенглама учун спектрал масала ўрганилган.

7-масала. $(0;\pi)$ *интервалда*

$$u''(t)+\lambda^2u(t)=\nu\int_0^\pi K(t,s)u(s)\,ds \tag{37}$$

тенгламани ва

$$u(\pi)=\int_0^{\pi}u(s)\,ds, \qquad u'(\pi)=0 \tag{38}$$

бир жинсли чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $u(t)$ *функцияни топиш талаб этилади, бу ерда* $\lambda-$ *мусбат параметр,* $\nu-$*нолдан фарқли ҳақиқий параметр,* $K(t,s)=\sum_{i=1}^{k}a_i(t)b_i(s)\neq 0$, $a_i(t),b_i(s)\in C[0;\pi]$. *Шунингдек,* $a_i(t)$, $i=\overline{1,k}$, *функциялар системаси ва* $b_i(s)$, $i=\overline{1,k}$, *функциялар системаси чизиқли эркли деб фараз қилинади.*

(38) чегаравий шартлар бир жинсли бўлганлиги учун, (37) интегро-дифференциал тенглама ёки нотривиал ечимларга эга эмас, ёки чексиз кўп ечимларга эгадир. Мазкур параграфда λ,ν параметрларнинг қандай қийматларида (37), (38) масала нотривиал ечимларга эга бўлмаслиги ва λ,ν параметрларнинг қандай қийматларида спектрал масала чексиз кўп ечимларга эга бўлиши ҳал этилган ҳамда мавжуд ечимлар қурилган.

Иккинчи параграфда айниган ядроли, акслануввчи аргументли ва иккита ҳақиқий параметрли Фредгольм оддий интегро-дифференциал тенглама учун нолокал чегаравий масала тадқиқ этилган. Ҳақиқий параметрларнинг қаралаётган масала бир қийматли ечиладиган қийматлари ҳисобланган.

8-масала. $(-T;T)$ *интервалда*

$$u''(t)+\lambda^2u(t)=\nu\int_{-T}^{T}K(t,s)u(\omega-s)\,ds$$

тенгламани ва

$$u(T)=\int_{-T}^{T}u(t)\,dt, \qquad u'(T)=\varphi, \qquad u(t)=\psi(t),\ t\in[T;T+\omega]$$

шартларни қаноатлантирувчи $u(t)\in C[-T;T]\cap C^1(-T;T]\cap C^2(-T;T)$ *функцияни топиш талаб этилади, бу ерда* $0<\omega<T<\infty-$ *берилган ҳақиқий сонлар,* $\lambda-$ *параметр,* $\varphi=const\neq 0$, $\nu-$ *нолдан фарқли ҳақиқий параметр,* $K(t,s)=\sum_{i=1}^{k}a_i(t)b_i(s)\neq 0$, $a_i(t)\in C[-T;T+\omega]$, $b_i(s)\in C[-T;T]$, $\psi(t)\in C[-T;T]$, $\psi(T)=u(T)$. *Шунингдек,* $a_i(t)$, $i=\overline{1,k}$, *функциялар системаси ва* $b_i(s)$, $i=\overline{1,k}$, *функциялар системаси чизиқли эркли деб фараз қилинади.*

Учинчи параграфда иккинчи тартибли айниган ядроли ва спектрал параметрли Фредгольм оддий интегро-дифференциал тенгламаси учун қўйилган нолокал тескари масаланинг бир қийматли ечилиши тадқиқ этилади. Чекли $[0;T]$ кесмада

$$u''(t)+\lambda^2u(t)=\nu\int_0^{T}K(t,s)u(s)\,ds+\beta\alpha(t)$$

тенглама қуйидаги

$$u(T)=\int_0^T u(t)t\,dt, \quad u'(T)=\varphi, \quad u(0)=r$$

шартларда қаралади, бу ерда $0<T-$ берилган ҳақиқий сон, $0<\lambda-$ мусбат параметр, $0\neq\alpha(t)\in C[0;T]$, $\varphi, r=const$, $\nu-$ нолдан фарқли ҳақиқий параметр, $\beta-$ қайта аниқлаш коэффициенти, $0\neq K(t,s)=\sum_{i=1}^{k}a_i(t)b_i(s)$, $a_i(t)\in C[0;T]$, $b_i(s)\in C[0;T]$. Шунингдек, $a_i(t)$, $i=\overline{1,k}$, функциялар системаси ва $b_i(s)$, $i=\overline{1,k}$, функциялар системаси чизиқли эркли деб фараз қилинади.

Тўртинчи параграфда иккинчи тартибли Фредгольм оддий интегро-дифференциал тенгламани ечишга оид мазмунли мисоллар келтирилган.

ХУЛОСА

Мазкур диссертация иши оддий ва хусусий ҳосилали дифференциал ва интегро-дифференциал тенгламаларнинг бирор синфи учун қўйилган аралаш, нолокал чегаравий ва тескари масалаларнинг бир қийматли ечилишини тадқиқ этишга бағишланган.

Иккинчи тартибли айниган ядроли ва ҳақиқий параметрли оддий интегро-дифференциал тенгламалар қаралади. Бундан ташқари, ҳақиқий параметрларни ва математик физиканинг хусусий ҳосилали дифференциал операторларидан бирортасини ўз ичига олган тенгламалар тадқиқ этилган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Ҳақиқий параметрнинг регуляр қийматларида тўртинчи тартибли хусусий ҳосилали бир жинсли дифференциал тенгламалар учун қўйилган нолокал чегаравий масалалар бир қийматли ечилишининг етарли шартлари топилган; параметрнинг норегуляр қийматларида чегаравий масалалар бир қийматли бўлмаган ечимлари қурилган.
2. Ҳақиқий параметрнинг регуляр қийматларида учинчи ва тўртинчи тартибли хусусий ҳосилали интегро-дифференциал тенгламалар учун қўйилган нолокал тўғри ва тескари чегаравий масалалар бир қийматли ечилишининг етарли шартлари топилган; қайта аниқлаш функциялари ва чегаравий шартлари бўйича ечимнинг турғун бўлиши исботланган; параметрнинг норегуляр қийматларида чегаравий масалалар бир қийматли бўлмаган ечимлаари қурилган.
3. Ихтиёрий даражали параболик операторни ўз ичига олган ночизиқли интегро-дифференциал учун қўйилган аралаш масалан бир қийматли умумлашган ечилишининг етарли шартлари топилган.
4. Ҳақиқий параметрларнинг регуляр қийматларида иккинчи тартибли Фредгольм оддий интегро-дифференциал тенгламалари қўйилган нолокал тўғри ва тескари чегаравий масалалар бир қийматли ечилишининг етарли шартлари топилган; қайта аниқлаш функциялари ва чегаравий шартлари бўйича ечимнинг турғун бўлиши исботланган; параметрнинг норегуляр қийматларида чегаравий масалалар бир қийматли бўлмаган ечимлари қурилган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В. И. РОМАНОВСКОГО

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

ЮЛДАШЕВ ТУРСУН КАМАЛДИНОВИЧ

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА (DSc)

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ТАШКЕНТ–2021

Тема докторской (DSc) диссертации зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2020.3.DSc/FM161.

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу www.ziyonet.uz.

Официальные оппоненты:	**Асанова Анар Турмаганбеткызы (Казахстан)** доктор физико-математических наук, профессор
	Ашуров Равшан Раджапович доктор физико-математических наук, профессор
	Уринов Ахмаджон Кушакович доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	**Самаркандский государственный университет**

Защита диссертации состоится «___» _________ 2021 г. в _______ часов на заседании научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская. Тел.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz , Website: www.mathinst.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (регистрационный номер ___). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская. Тел.: (+99871)-207-91-40).

Автореферат диссертации разослан «___» _________ 2021 г.
(протокол рассылки № ___ от «___» _________ 2021 г.).

У.А. Розиков
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

Ж.К. Адашев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник

А. Азамов
Председатель Научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. В современном математическом исследовании краевые задачи встречаются при решении задач гидродинамики. Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, часто приводит к изучению прямых и обратных задач для уравнений, не имеющих аналогов в классической математической физике. Теория обратных задач возникла прежде всего при решении задач астрономии, квантовой теории рассеяния, геофизики и т.д. Нелокальные краевые задачи возникают при математическом моделировании влагопереноса, при изучении задач математической биологии, задач управления и других.

Сейчас в мировом масштабе стало актуальным исследование дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с заданными интегральными условиями. Во многих ведущих научных центрах мира проводятся исследования нелокальных краевых и обратных задач для линейных и нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений; изучаются существование и единственность решений. Большой интерес представляют: построение решений исходя из значений заданных параметров, в случае однородных и неоднородных уравнений построение явного вида решений, а в случае квазилинейных и нелинейных уравнений приведение такого уравнения к эквивалентному нелинейному интегральному уравнению и применение различных итерационных схем.

В Узбекистане особое значение имеет исследование дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, содержащих производную второго или третьего порядка по одной из переменных и производные четного порядка по другим переменным. Потому что исследования таких уравнений требуют от ученого особого подхода и привлечения ряда новых соображений. При использовании стандартных методов исследования таких уравнений возникают трудности не только технического характера. Особенно, если параметр участвует в структуре дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с интегральными условиями, построение решений в соответствии с различными значениями параметров и проверка существования или не существования, единственности или не единственности этих решений представляют совершенно новые рассуждения.

Проведение исследований на уровне мировых стандартов по приоритетным направлениям математики «Дифференциальные уравнения и математическая физика, теория динамических систем и оптимальное управление» обозначены как основные цели и направления деятельности исследователей[1]. Исследования, проводимые в рамках данной диссертации, в

[1] Постановление Кабинета Минстров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан»

определенной степени служат решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан №УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в постановлениях №ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В.И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан» и №ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», и в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологии республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации[2].

Научные исследования по нелокальным прямым и обратным краевым задачам для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в обыкновенной производной и в частных производных ведутся в крупных научных центрах, высших учебных заведениях мира, в частности: в University of New Haven (США), Ghent University (Бельгия), University of Tokyo (Япония), Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, Московском физико-техническом институте (национальный исследовательский университет), Московском инженерно-физическом институте (национальный исследовательский ядерный университет), Московском энергетическом институте (национальный исследовательский университет), Московском государственном техническом университете имени Н.Э. Баумана, Российском университете дружбы народов, Белгородском государственном национальном исследовательском университете, Башкирском государственном университете, Воронежском государственном университете, Белорусском государственном университете, Самарском университете, Уральском федеральном университете, Кабардино-Балкарском государственном университете, Казанском (Приволжском) федеральном университете, Новосибирском государственном университете, Иркутском государственном университете, Южном федеральном университете, Киевском национальном университете, Казахском национальном университете, Institute of Mathematics of Chinese Academy of Sciences, Математическом институте имени В.А. Стеклова Российской академии наук, Институте математики Сибирского отделения Российской академии наук, Институте математики Национальной академии наук

[2] Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации: International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations, www.inderscience.com.jhome; Boundary value problems, www.link.springer.com.journal; Journal of Ellipric and Parabolic Equations, www.springer.com.journal; Journal of Partial Differential Equations, www.global-sci.org.jpde; Дифференциальные уравнения, www.link.springer.com/journal/10625, также были использованы и другие источники .

Украины, Институте математики и математического моделирования Национальной академии наук Казахстана и т.д.

Исследованию обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений посвящено большое колечество публикаций. Здесь можно отметить работы авторов: A. Lorenzi, A.I. Prilepko, H. Oka, И.И. Белов, М.В. Булатов, М.М. Вайнберг, В.В. Васильев, М.И. Иманалиев, С. Искандаров, Н. Д. Копачевский, Н.А. Сидоров, В.Г. Трубин, М.В. Фалалаев, Г.А. Шишкин и многие другие. Исследованию интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с вырожденным ядром посвящены работы авторов: А.М. Самойленко, А.А. Бойчук, С.А. Кривошея, А.П. Страх, Д.С. Джумабаев и другие. Исследование нелокальных краевых задач началось после публикаций работ А.А. Самарского. Здесь заметные результаты получены математиками: Д.Г. Гордезиани, Г.А. Авалишвили, А.Л. Скубачевский, А.И. Кожанов, Я.Т. Мегралиев, А.М. Нахушев, Л.С. Пулькина, К.Б. Сабитов, А.Т. Асанова и многие другие.

Задачи на собственные значения для параболических и гиперболических уравнений и обоснование метода рядов Фурье для решения таких уравнений были исследованы такими видными математиками как О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева, В.А. Ильин, В.П. Михайлов, Е.И. Моисеев, В.А. Чернятин, L.D. Akulenko, S.V. Nesterov и многими другими математиками. Нелинейные параболические и гиперболические уравнения и их обобщения исследованы многими авторами, в частности отметим математиков: А.Н. Боголюбов, М.Д. Малых, А.И. Вагабов, В.С. Владимиров, М. О. Корпусов, С.Н. Кружков, Н.А. Кудряшов, М.Б. Сухарев, Э. Митидиери, С.И. Похожаев, О.А. Олейник и Г.И. Чандиров. Что касается исследованию обратных задач в зарубежных странах, можно выделить работы таких видных математиков и их учеников как: А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин, М.М. Лаврентьев, Л.Я. Савельев, В.Г. Романов, А.И. Прилепко, Д.С. Ткаченко, А.Л. Бухгейм, Н.И. Калинина, А.М. Денисов, С.И. Кабанихин и многие другие.

Степень изученности проблемы. После известных работ В.А. Ильина появились большое количество работ, посвященные изучению линейных дифференциальных уравнений параболического и гиперболического типов. В частности, здесь можно отметить К. Байкузиева, который исследовал основные смешанные задачи для вырождающихся гиперболических и параболических уравнений. В.А. Чернятин в своих работах проводил обоснование применения рядов Фурье к исследованию смешанных задач для неоднородных дифференциальных уравнений гиперболического и параболического типов. Ю.А. Дубинский исследует квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка. Н.И. Ионкин изучает краевую задачу теории теплопроводности с неклассическим краевым условием.

Г.И. Чандиров в своей докторской диссертации обосновал применения метода рядов Фурье к решению смешанной задачи для нелинейных гиперболических и параболических уравнений. К.Х. Шабадиков в своей кандидатской диссертации методом рядов Фурье изучал смешанную задачу для нелинейных дифференциальных уравнений псевдогиперболического и псевдопараболического типов с малым параметром при смешанных производных.

Сегодня во всем мире встречается большое количество работ математиков, где исследуются разные нелокальные краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных. Здесь можно отметить работы: Р.Р. Ашурова, С. Умарова, О.С. Зикирова, Т.Д. Джураева, Б.В. Логинова, Ж.О. Тахирова и Р.Н. Тураева. Важные результаты получены при исследовании дифференциальных уравнений эллиптического и смешанного типов. В этом направлении следует отметить работы: Ш.А. Алимова, Ю.П. Апакова, Р.Р. Ашурова, А.С. Бердышева, Б.Ж. Кадиркулова, Т.Д. Джураева, М. Мамажанова, Б.И. Исломова, О.Х. Абдуллаева, А. Сопуева, М. Мирсабурова, М.Х. Рузиева, М.С. Салахитдинова, А.К. Уринова, А. Хасанова и А.В. Юлдашевой. Следует отметить, что теория обратных задач как раздел теории дифференциальных уравнений в частных производных развивается очень быстрыми темпами. По обратным задачам подчеркнем работы следующих авторов: Ш.А. Алимова, Р.Р. Ашурова, P. Feng, E.T. Karimov, М.С. Салахитдинова, А.С. Бердышева, С.З. Джамалова, Б.И. Исломова и других.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего образовательного учреждения, где выполнена диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ Узбекско-Израильского совместного факультета Национального университета Узбекистана.

Целью исследования является исследования разрешимости и конструктивное построение решений нелокальных прямых и обратных задач для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром.

Задачи исследования, решаемые в данной работе:

установить для регулярных значений параметра достаточные условия однозначной разрешимости нелокальных краевых задач для однородных дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка; построить бесконечное множество решений краевых задач для иррегулярных значений параметра;

установить для регулярных значений параметров достаточные условия однозначной разрешимости нелокальных прямых и обратных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных третьего и четвертого порядков с вырожденным ядром; доказать устойчивость решения по функциям переопределения и граничным данным; построить бесконечное множество решений краевых задач для иррегулярных значений параметров или доказать несуществование решения;

установить для регулярных значений параметра достаточные условия однозначной обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, содержащих произвольную степень параболического оператора;

установить для регулярных значений параметров достаточные условия однозначной разрешимости нелокальных прямых и обратных краевых задач для обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма второго порядка; доказать устойчивость решения по функциям переопределения и граничным данным; построить бесконечное множество решений краевых задач для иррегулярных значений параметров или доказать отсутствие решений.

Объект исследования. Обыкновенные интегро-дифференциальные уравнения второго порядка с вырожденным ядром и действительными параметрами; дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных, содержащие действительные параметры.

Предмет исследования. Ряды Фурье, теория дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, теория интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром.

Методы исследования. При выводе результатов диссертации используются идеи и методы теории функций, функционального анализа, обыкновенных дифференциальных и интегральных уравнений, интегральных неравенств и уравнений математической физики.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

для регулярных значений параметра доказана однозначная разрешимость нелокальных краевых задач для однородных дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка;

для регулярных значений параметров доказана однозначная разрешимость нелокальных прямых и обратных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных третьего и четвертого порядков с вырожденным ядром; доказана устойчивость решения по функциям переопределения и граничным данным;

для регулярных значений параметра доказана однозначная обобщенная разрешимость смешанной задачи для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, содержащих произвольную степень параболического оператора;

для регулярных значений параметров доказана однозначная разрешимость нелокальных прямых и обратных краевых задач для обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма второго порядка; доказана устойчивость решения по функциям переопределения и граничным данным; построены бесконечное множество решений краевых задач для иррегулярных значений параметров или доказана отсутствие решений.

Практические результаты исследования состоят в том, что для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с вырожденным ядром предложена методика построения решений, учитывающая свойства функций с действительными параметрами и свойства определителя Фредгольма, и предложена методика построения бесконечного множества решений, учитывающая свойство ортогональности функций при иррегулярных значениях параметров.

Достоверность результатов исследования. Достоверность и обоснованность полученных результатов исследования обеспечивается корректной постановкой задач, применением строгих математических методов, полными математическими доказательствами и графическими иллюстрациями.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научное значение результатов исследования заключается в том, что полученные в работе научные результаты могут быть использованы в качественной теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка.

Практическое значение результатов, полученных в диссертационной работе, определяется тем, что полученные результаты могут найти применение при решении ряда прикладных задач теории автоматического регулирования, нелинейной механики и математической физики.

Внедрение результатов исследования. Результаты, полученные в диссертации по:

исследованию краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Бенни-Люк с вырождением ядра, использованы в ведущих международных научных журналах (Lobachevskii J. of Math.: 2020, Vol. 41, P. 1031-1042; 2021, Vol. 42, P. 526-535, P. 587-597, P. 632-640, P. 479-489; Russian Math.: 2020, Vol. 64, P. 1-11; International J. of Math. and Phys., 2020, Vol. 11, № 1, P. 28-35) при исследовании вопросов однозначной разрешимости задачи Геллерстедта, двухточечных и многоточечных краевых задач для линейных, нагруженных и нелинейных уравнений в частных производных. Использование научного результата позволило доказать теорем об однозначной разрешимости задачи Геллерстедта, двухточечных и многоточечных краевых задач для линейных, нагруженных и нелинейных уравнений в частных производных;

исследованию нелокальной краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных псевдопараболо-псевдогиперболического типа, использованы в ведущих международных научных журналах (Lobachevskii J. of Math.: 2021, Vol. 41, P. 560-571, P. 572-578, P. 632-640; Axioms 2020, Vol. 9, № 4(135); Chaos, Solitons & Fractals, 2021, Vol. 146, ID 110835) при исследовании различных краевых задач для смешанных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений с вырождением. Использование научного результата позволило доказать теорем об однозначной разрешимости краевых задач для смешанных дифференциальных уравнений, эллиптических дифференциальных уравнений с тремя сингулярными коэффициентами, дифференциальных уравнений с вырождением.

Результаты, полученные в диссертации по разрешимости нелокальных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с вырожденным ядром были использованы при построении решений нелокальных краевых и смешанных (начально-краевых) задач для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка в институте математики и математического моделирования министерства образования и науки Республики Казахстан при выполнении проекта №AP05131220 «Методы решения начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка и их приложения» (Справка института математики и математического моделирования министерства образования и науки Республики Казахстан за номером № 01-06/082 от 25 мая 2021 г., Казахстан). Использование научного результата позволило им доказать однозначную разрешимость нелокально краевых и начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка;

Методика исследования нелокальных краевых задач для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с действительным параметром были использованы при исследовании однозначной разрешимости нелокальных краевых задач для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных параболического и гиперболического типов при выполнении научно-исследовательских работ международного Казахско-Турецкого университета имени Ходжа Ахмеда Ясави по проекту № AP05131268 «Вопросы разрешимости краевых и начально-краевых задач для нелокальных дифференциальных уравнений в частных производных», номер госрегистрации 0120PK00547 (Справка международного Казахско-Турецкого университета имени Ходжа Ахмеда Ясави за номером № 05/1159 от 25 мая 2021 г., Казахстан). Использование научного результата позволило им доказать однозначную разрешимость начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных параболического и гиперболического типов.

Апробация результатов исследования. Обсуждались на 20 международных и 2 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования.

По теме диссертационного исследования опубликовано 60 научных работ, из них 37 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора наук. Эти 37 статьи опубликованы в зарубежных журналах.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 216 страниц.

Благодарность автора. Автор выражает глубокую благодарность своим наставникам С.И. Сенашову и Н.А. Сидорову за полезные советы при подготовке данной диссертационной работы и за моральную поддержку. Автор считает своим долгом вспоминать имена Б.В. Логинова и К.Х. Шабадикова, которые в течение большого интервала времени поддерживали данное диссертационное исследование.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссер-тации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объекты и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскры-та теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

При изложении основного содержания диссертации используем следующие обозначения.

а). $C^r(\Omega)$ – класс функций $U(t,x,y)$, имеющих непрерывные производные $\dfrac{\partial^r U}{\partial t^r}, \dfrac{\partial^r U}{\partial x^r}, \dfrac{\partial^r U}{\partial y^r}$ в области Ω;

б). $C^{r,s,s}_{t,x,y}(\Omega)$ – класс функций $U(t,x,y)$, имеющих непрерывные производные $\dfrac{\partial^r U}{\partial t^r}, \dfrac{\partial^s U}{\partial x^s}, \dfrac{\partial^s U}{\partial y^s}$ в области Ω;

в). $C^{r+s+0}_{t,x,y}(\Omega)$ – класс функций $U(t,x,y)$, имеющих непрерывную производную $\dfrac{\partial^{r+s} U}{\partial t^r \partial x^s}$ в области Ω, $C^{r+0+s}_{t,x,y}(\Omega)$ – класс функций $U(t,x,y)$, имеющих непрерывную производную $\dfrac{\partial^{r+s} U}{\partial t^r \partial y^s}$ в области Ω, r, s – заданные натуральные числа.

Первая глава диссертации называется “Классическая разрешимость нелокальных краевых задач для однородных дифференциальных уравнений”. Она посвящена исследованию вопросов о классической разрешимости нелокальных краевых задач для однородных дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. Применяется метод разделения переменных. Вычисляются значения положительного параметра и исходя из специфических особенностей значений параметра строятся решения исследуемой задачи. Устанавливается критерий разрешимости. Данная глава состоит из трёх параграфов. В первом параграфе приведены вспомогательные материалы, которые будут использовании в последующих параграфах и главах.

Во втором параграфе в трехмерной области $\Omega = \{(t, x, y) | \, 0 < t < \beta, \, 0 < x, y < l\}$ предлагается методика исследования следующего псевдоэллиптического дифференциального уравнения

$$U_{tt} - U_{ttxx} - U_{ttyy} + \nu^2 U_{xx} + \nu^2 U_{yy} = 0, \qquad (1)$$

где $\nu -$ положительный параметр. Уравнение (1) изучается в классе функций

$$U(t, x, y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \cap C^{2+2+0}_{t,x,y}(\Omega) \cap C^{2+0+2}_{t,x,y}(\Omega), \qquad (2)$$

и при краевых условиях

$$U(0, x, y) = U(\beta, x, y), \; 0 \le x, y \le l, \qquad (3)$$

$$\int_0^\beta U(t, x, y) \, dt = \varphi(x, y), \; 0 \le x, y \le l, \qquad (4)$$

$$U(t, 0, y) = U(t, l, y) = U(t, x, 0) = U(t, x, l) = 0, \quad 0 \le t \le \beta, \qquad (5)$$

где $\varphi(x, y) -$ заданная достаточно гладкая функция, $\varphi(0, y) = \varphi(l, y) = = \varphi(x, 0) = \varphi(x, l) = 0$, $\overline{\Omega} = \{(t, x, y) | \; 0 \le t \le \beta, \; 0 \le x, y \le l\}$.

Задача 1. *Найти в трехмерной области* Ω *неизвестную функцию* $U(t, x, y)$ *из класса* (2), *удовлетворяющую уравнению* (1) *и заданным краевым условиям* (3)-(5).

Условия 1. Пусть функция $\varphi(x, y) \in C^2([0; l] \times [0; l])$ на сегменте $[0; l]$ имеет кусочно-непрерывные производные третьего порядка и

$$\varphi(0, y) = \varphi(l, y) = \varphi(x, 0) = \varphi(x, l) = 0,$$

$$\varphi_{xx}(0, y) = \varphi_{xx}(l, y) = \varphi_{xx}(x, 0) = \varphi_{xx}(x, l) = 0,$$

$$\varphi_{yy}(0, y) = \varphi_{yy}(l, y) = \varphi_{yy}(x, 0) = \varphi_{yy}(x, l) = 0 .$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* 1. *Тогда задача* 1 *однозначно разрешима при всех значениях параметра* $\nu \in (0, \infty)$ *в трехмерной области* Ω. *Решение определяется в виде ряда Фурье.*

В третьем параграфе исследуются вопросы разрешимости нелокальной краевой задачи для трехмерного дифференциального уравнения Буссинеска[3] четвертого порядка. В трехмерной области $\Omega = \{(t, x, y) | \, 0 < t < \beta, \, 0 < x, y < l\}$ рассматривается дифференциальное уравнение вида

$$U_{tt} - U_{ttxx} - U_{ttyy} - \nu^2 U_{xx} - \nu^2 U_{yy} = 0, \qquad (6)$$

где β и $l -$ заданные положительные действительные числа, $\nu -$ положительный параметр.

Уравнение (6) рассматривается при следующих краевых условиях

---

[3] Wang S., Chen G. Small amplitude solutions of the generalized IMBq equation // Mathematical Analysis and Application. 2002. Vol. 274. P. 846–866.

$$U(0,x,y)=U(\beta,x,y),\ \ 0\le x,y\le l, \tag{7}$$

$$\int_0^{\beta} U_t(t,x,y)\,t\,dt=\varphi(x,y),\ \ 0\le x,y\le l, \tag{8}$$

$$U(t,0,y)=U(t,l,y)=U(t,x,0)=U(t,x,l)=0,\quad 0\le t\le\beta, \tag{9}$$

где $\varphi(x,y)-$ заданная достаточно гладкая функция, $\varphi(0,y)=\varphi(l,y)=$ $=\varphi(x,0)=\varphi(x,l)=0$.

Задача 2. *Требуется найти в области* Ω *функцию* $U(t,x,y)$ *из класса*

$$U(t,x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)\cap C^{2+2+0}_{t,x,y}(\Omega)\cap C^{2+0+2}_{t,x,y}(\Omega),$$

удовлетворяющую уравнению (6) *и заданным краевым условиям* (7)-(9) *где* $\overline{\Omega}=\{(t,x,y)|\ 0\le t\le\beta,\ 0\le x,y\le l\}$.

Любое положительное число ν, для которого при всех натуральных m,n выполняются условия $\left|A_{n,m}(\nu)\right|=\left|1-\cos\lambda_{n,m}\nu\,\beta\right|>0$, $\left|B_{n,m}(\nu)\right|=$ $=\left|2-2\cos\lambda_{n,m}\nu\,\beta-\lambda_{n,m}\nu\,\beta\sin\lambda_{n,m}\nu\,\beta\right|>0$, назовём регулярным и множество таких чисел обозначим через Λ, где $\lambda_{n,m}=\sqrt{\dfrac{\mu^2_{n,m}}{1+\mu^2_{n,m}}}$, $\mu_{n,m}=\dfrac{\pi}{l}\sqrt{n^2+m^2}$. Остальные положительные числа назовём иррегулярными и их множество $(0;\infty)\setminus\Lambda$ обозначим через $\Im$.

Опишем множество $\nu\in\Im$ при всех m,n. Условие $A_{n,m}(\nu)=1-\cos\lambda_{n,m}\nu\,\beta=0$ эквивалентно тригонометрическому уравнению $\cos\lambda_{n,m}\nu\,\beta=1$, множество положительных решений которого состоит из чисел

$$\nu'_k=\frac{2\pi k}{\lambda_{n,m}\beta},\ k\in N, \tag{10}$$

где $N-$ множество натуральных чисел.

Для упрощения записи обозначим $z=\lambda_{n,m}\nu\,\beta$. Тогда уравнение $B_{n,m}(\nu)=2-2\cos\lambda_{n,m}\nu\,\beta-\lambda_{n,m}\nu\,\beta\sin\lambda_{n,m}\nu\,\beta=0$ примет вид $2\cos z+z\sin z-2=0$. Это уравнение равносильно совокупности уравнений: $\sin\dfrac{z}{2}=0$ или $z\cos\dfrac{z}{2}-2\sin\dfrac{z}{2}=0$. Очевидно, что положительные решения первого уравнения совпадают с решениями (10). Второе уравнение равносильно трансцендентному уравнению $tg\dfrac{z}{2}=\dfrac{z}{2}$. Следовательно, если $\left\{\vartheta_k\right\}_{k=1}^{\infty}-$ упорядоченная по возрастанию последовательность положительных решений уравнения $tg\,\vartheta=\vartheta$, то множество положительных решений второго уравнения состоит из чисел

$$\nu''_k = \frac{2\vartheta_k}{\lambda_{n,m}\beta}, \; k \in N. \tag{11}$$

Итак, положительные решения уравнения $B_{n,m}(\nu) = 0$ задаются формулами (10) и (11). Через $\Im_1$ обозначим множество значений (10) при всевозможных $k, n, m \in N$, а через $\Im_2$ множество чисел (11) при всевозможных $k, n, m \in N$.

Условие 2. Пусть функция $\varphi(x, y) \in C^2([0;l] \times [0;l])$ на сегменте $[0;l]$ имеет кусочно-непрерывные производные третьего порядка и

$$\varphi(0, y) = \varphi(l, y) = \varphi(x, 0) = \varphi(x, l) = 0,$$
$$\varphi_{xx}(0, y) = \varphi_{xx}(l, y) = \varphi_{xx}(x, 0) = \varphi_{xx}(x, l) = 0,$$
$$\varphi_{yy}(0, y) = \varphi_{yy}(l, y) = \varphi_{yy}(x, 0) = \varphi_{yy}(x, l) = 0 .$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия 2. *Тогда для всех регулярных значений* $\nu \in \Lambda$ при всех m, n *задача* 2 *имеет единственное решение в области* Ω. *При иррегулярных значениях* $\nu \in \Im_1$ *или* $\nu \in \Im_2$ *задача* 2 *имеет бесконечное множество решений, если выполняется равенство* $\varphi_{n,m} = 0$.

Вторая глава называется «Классическая разрешимость нелокальных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений с вырожденным ядром» посвящена иссследованию вопросов классической разрешимости нелокальных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с вырожденным ядром. Применяется метод ряда Фурье, при котором разделяются переменные. Устанавливаются достаточные условия разрешимости рассматриваемых задач. Вычисляются значения заданных параметров и строятся соответствующие решения изучаемой задачи. Здесь важную роль в вопросе разрешимости играют заданные параметры. Данная глава состоит из четырех параграфов.

В первом параграфе второй главы в области $\Omega = \{(t, x) | -T < t < T, \, 0 < x < l\}$ рассматривается смешанное псевдопараболо-псевдогиперболическое интегро-дифференциальное уравнение с вырожденными ядрами

$$\begin{cases} U_t - U_{txx} - U_{xx} + \nu \int\limits_0^T K_1(t, s) U(s, x) \, ds = 0, \; t > 0, \\ U_{tt} - U_{ttxx} - \omega^2 U_{xx} + \nu \int\limits_{-T}^0 K_2(t, s) U(s, x) \, ds = 0, \; t < 0, \end{cases} \tag{12}$$

где T и $l-$ заданные положительные действительные числа, $\omega -$ положительный параметр, $\nu -$ действительный ненулевой параметр, $0 \neq K_j(t, s) = a_j(t) b_j(s)$, $a_j(t), b_j(s) \in C[-T; T]$, $j = 1, 2$.

Задача 3. *Требуется найти в области* Ω *функцию*

$$U(t, x) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^{1,2}(\Omega_+) \cap C^{2,2}(\Omega_-) \cap C^{1+2}_{t,x}(\Omega_+) \cap C^{2+2}_{t,x}(\Omega_-),$$

удовлетворяющую уравнению (12) *и следующим условиям*

$$\int_0^T U(t,x)\,dt = \varphi(x),\ U(t,0) = U(t,l) = 0,$$

где $\varphi(x)$ – *заданная достаточно гладкая функция,* $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\Omega_- = \{(t,x)|\ -T < t < 0,\ 0 < x < l\}$, $\Omega_+ = \{(t,x)|\ 0 < t < T,\ 0 < x < l\}$, $\overline{\Omega} = \{(t,x)|\ -T \le t \le T,\ 0 \le x \le l\}$.

Отметим, что из условия $U(t,x) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ следует, что для функций $U(t,x)$ и $U_t(t,x)$ выполняется непрерывное условие склеивания в точке $t = 0$. Решение уравнения (12) в области Ω разыскивается в виде ряда Фурье

$$U(t,x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \mu_n x,$$

где $\vartheta_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}} \sin \mu_n x$, $\mu_n = \dfrac{\pi n}{l}$.

Подставляя ряд Фурье в уравнение (12), получаем счетную систему обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений

$$u'_n(t) + \lambda_n^2 u_n(t) = \nu \int_0^T a_1(t)\, b_1(s) u_n(s)\, ds,\ t > 0,$$

$$u''_n(t) + \lambda_n^2 \omega^2 u_n(t) = \nu \int_{-T}^0 a_2(t)\, b_2(s) u_n(s)\, ds,\ t < 0,$$

где $\lambda_n^2 = \dfrac{\mu_n^2}{1+\mu_n^2}$, $\mu_n = \dfrac{\pi n}{l}$. Примем обозначений $\alpha_n = \int\limits_0^T b_1(s) u_n(s)\, ds$, $\beta_n = \int\limits_{-T}^0 b_2(s) u_n(s)\, ds$. Тогда для определения этих новых неизвестных величин получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \alpha_n (1 - \nu P_{2n}) = \varphi_n P_{1n}, \\ \alpha_n \nu\, Q_{2n}(\omega) + \beta_n (1 - \nu Q_{3n}) = \varphi_n Q_{1n}(\omega), \end{cases}$$

где

$$P_{1n} = \int_0^T b_1(s) M_{1n}(s)\, ds,\ P_{2n} = \int_0^T b_1(s) M_{2n}(s)\, ds,\ Q_{1n}(\omega) = \int_{-T}^0 b_2(s) N_{1n}(s,\omega)\, ds,$$

$$Q_{2n}(\omega) = \int_{-T}^0 b_2(s) N_{2n}(s,\omega)\, ds,\quad Q_{3n} = \int_{-T}^0 b_2(s) \delta_n(s)\, ds,$$

$$M_{2n}(t) = h_n(t) - M_{1n}(t) \int_0^T h_n(t)\, dt,\ \delta_n(t) = \frac{1}{\lambda_n \omega} \int_0^t \sin \lambda_n \omega (t-s)\, a_2(s)\, ds,$$

$$N_{1n}(t,\omega) = \frac{\lambda_n^2}{\sigma_n} \left[\cos \lambda_n \omega t - \frac{\lambda_n}{\omega} \sin \lambda_n \omega t \right],\quad N_{2n}(t,\omega) = N_{1n}(t,\omega) \int_0^T h_n(t)\, dt,$$

$$h_n(t)=\int_0^t \exp\{-\lambda_n^2(t-s)\}\,a_1(s)\,ds,\quad 0<\lambda_n=\sqrt{\frac{\mu_n^2}{1+\mu_n^2}}<1,\ \mu_n=\frac{\pi n}{l}.$$

Из этой системы алгебраических уравнений получаем условия

$$\nu=\nu_n\neq\frac{1}{P_{2n}},\quad \nu=\nu_n\neq\frac{1}{Q_{3n}}, \tag{13}$$

$$Q_{2n}(\omega)\neq 0. \tag{14}$$

Рассмотрим равенства $\nu_{1n}=\dfrac{1}{P_{2n}}$ и $\nu_{2n}=\dfrac{1}{Q_{3n}}$. Из того, что $\int_0^T \exp\left\{-\lambda_n^2 t\right\}dt=\dfrac{\sigma_n}{\lambda_n^2}\neq 0$ следует что $P_{2n}\neq 0$. Величина Q_{3n} зависит от параметра ω. Выясним, при каких значениях параметра ω будет $Q_{3n}=Q_{3n}(\omega)\neq 0$. Если положим $Q_{3n}(\omega)=0$, то отсюда получим трансцендентное уравнение $\sin 2y_n-2\sin y_n=y_n$, где $y_n=\lambda_n\omega T$. Данное уравнение не имеет положительное решение. Значения $\nu_{1n}=\dfrac{1}{P_{2n}}$ и $\nu_{2n}=\dfrac{1}{Q_{3n}}$ параметра ν назовём иррегулярными и обозначим множество таких чисел через $\Im_1=\{\nu_{1n},\nu_{2n}\}$. Это множество отнимем из следующего множества действительных чисел $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$. Множество $\Lambda_1=\left[(-\infty;0)\cup(0;\infty)\right]\setminus\Im_1$ назовем множеством регулярных значений параметра ν. Для всех значений $\nu\in\Lambda_1$ выполняется условие (13). Теперь рассмотрим случай, когда нарушается условие (14): $Q_{2n}(\omega)\neq 0$. В этом случае рассматриваем уравнение $\lambda_n\cos\lambda_n\omega T-\omega\sin\lambda_n\omega T=\lambda_n\omega^2$. Данное уравнение запишем в виде:

$$\lambda_n T^2\cos\lambda_n z-T\,z\sin\lambda_n z=\lambda_n z^2,\ \ 0<z,\ \ 0<\lambda_n<1.$$

Оно является трансцендентным уравнением и его можно решить графическим методом. Данное уравнение имеет одно положительное решение. Это решение как множество обозначим через $\Im_2$. Число $\omega\in\Im_2$ назовём иррегулярным, так как для него нарушается условие (14). Множество $\Lambda_2=(0;\infty)\setminus\Im_2$ назовем множеством регулярных значений параметра ω, для которых выполняется условие (14). Примем обозначения

$$\Phi_n(t,\nu)=M_{1n}(t)+\nu\,M_{2n}(t)\,\frac{P_{1n}}{1-\nu P_{2n}},$$

$$\Psi_n(t,\nu,\omega)=N_{1n}(t,\omega)-\nu\,N_{2n}(t,\omega)\,\frac{P_{1n}}{1-\nu P_{2n}}+$$

$$+\nu\,\delta_n(t)\left[\frac{Q_{1n}(\omega)}{1-\nu Q_{3n}}-\nu\,\frac{Q_{2n}(\omega)}{1-\nu Q_{3n}}\,\frac{P_{1n}}{1-\nu P_{2n}}\right].$$

Для тройки чисел $(n,\nu,\omega)\in\aleph_1=\{(n,\nu,\omega){:}\,n\in N,\ \nu\in\Lambda_1,\ \omega\in\Lambda_2\}$ решение задачи 3 представляется в виде рядов

$$U(t,x,\nu)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\Phi_n(t,\nu)\sin\frac{\pi n}{l}x,\ t>0,$$

$$U(t,x,\nu)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\Psi_n(t,\nu,\omega)\sin\frac{\pi n}{l}x,\ t<0.$$

Это решение единственно в области Ω. А для тройки чисел $(n,\nu,\omega)\in\aleph_2=\{(n,\nu,\omega){:}\,n\in N,\ \nu\in\Im_1,\ \omega\in\Im_2\}$ решение задачи 3 представляется в области Ω в виде следующих рядов

$$U(t,x,\nu)=\sqrt{\frac{2}{l}}\ \nu\sum_{n=1}^{\infty}C_n M_{2n}(t)\sin\frac{\pi n}{l}x,\ t>0,$$

$$U(t,x,\nu)=\sqrt{\frac{2}{l}}\ \nu\sum_{n=1}^{\infty}C_n\left[-N_{2n}(t,\omega)+\delta_n(t)\right]\sin\frac{\pi n}{l}x,\ t<0,$$

если $\varphi_n=0$, где C_n – произвольное постоянное.

Теорема 3. *Пусть функция* $\varphi(x)\in C^2[0;l]$ *на сегменте* $[0;l]$ *имеет кусочно-непрерывные производные третьего порядка и* $\varphi(0)=\varphi(l)=0$, $\varphi_{xx}(0)=\varphi_{xx}(l)=0$. *Тогда для тройки чисел* $(n,\nu,\omega)\in\aleph_1$ *задача* 3 *однозначно разрешима в области* Ω. *А для тройки чисел* $(n,\nu,\omega)\in\aleph_2$ *задача* 3 *в области* Ω *имеет бесконечное множество решений, если выполняется условие* $\varphi_n=0$.

В параграфе 2.2 в области $\Omega=\{(t,x)|-T<t<T,\,0<x<l\}$ рассматривается смешанное интегро-дифференциальное уравнение четвертого порядка с вырожденными ядрами

$$\begin{cases}U_{tt}-U_{ttxx}+U_{xx}+\nu\displaystyle\int_0^T K_1(t,s)U(s,x)\,ds=0,\ t>0,\\ U_{tt}-U_{ttxx}-\omega^2U_{xx}+\nu\displaystyle\int_{-T}^0 K_2(t,s)U(s,x)\,ds=0,\ t<0,\end{cases}\tag{15}$$

где T и l – заданные положительные действительные числа, ω – положительный параметр, ν – действительный ненулевой параметр, $0\neq K_j(t,s)=a_j(t)b_j(s)$, $a_j(t),b_j(s)\in C[-T;T]$, $j=1,2$.

Задача 4. *Требуется найти в области* Ω *функцию*

$$U(t,x)\in C(\overline{\Omega})\cap C^1\left(\Omega\right)\cap C^2(\Omega_+\cup\Omega_-)\cap C^{2+2}_{t,x}(\Omega_+\cup\Omega_-),$$

удовлетворяющую уравнению (15) *и следующим краевым условиям*

$$\int_0^T U(t,x)\,dt=\varphi(x),\qquad \int_{-T}^0 U(t,x)\,dt=\psi(x),\ U(t,0)=U(t,l)=0,$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *– заданные достаточно гладкие функции,*

$$\varphi(0)=\varphi(l)=\psi(0)=\psi(l)=0,\ \Omega_-=\{(t,x)|\ -T<t<0,\ 0<x<l\},$$

$$\Omega_+=\{(t,x)|\ 0<t<T,\ 0<x<l\},\qquad \overline{\Omega}=\{(t,x)|\ -T\le t\le T,\ 0\le x\le l\}.$$

Этот параграф 2.2 изучается аналогично предыдущему параграфу 2.1.

В параграфе 2.3 в трехмерной области $\Omega=\{(t,x,y)|\,0<t<\beta,\,0<x,y<l\}$ изучаются вопросы разрешимости нелокальной краевой задачи для трехмерного интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска четвертого порядка с вырожденным ядром

$$U_{tt}(t,x,y)-U_{ttxx}(t,x,y)-U_{ttyy}(t,x,y)-U_{xx}(t,x,y)-U_{yy}(t,x,y)=$$

$$=\nu\int_0^\beta K(t,s)U(s,x,y)\,ds, \tag{16}$$

где β и l– заданные положительные действительные числа, ν– действительный параметр отличный от нуля, $0\ne K(t,s)=\sum_{i=1}^{k}a_i(t)b_i(s)$, $a_i(t),b_i(s)\in C^2[0;\beta]$. Здесь предполагается, что система функций $a_i(t)$ и система функций $b_i(s)$, $i=\overline{1,k}$, являются линейно независимыми.

Уравнение (16) будем рассматривать при следующих нелокальных условиях

$$U(0,x,y)+\int_0^\beta U(t,x,y)\,dt=\varphi(x,y),\ \ 0\le x,y\le l, \tag{17}$$

$$U_t(0,x,y)+\int_0^\beta U_t(t,x,y)\,dt=\psi(x,y),\ \ 0\le x,y\le l \tag{18}$$

и граничных условиях

$$U(t,0,y)=U(t,l,y)=U(t,x,0)=U(t,x,l)=0,\quad 0\le t\le\beta, \tag{19}$$

где $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$– заданные достаточно гладкие функции,

$$\varphi(0,y)=\varphi(l,y)=\varphi(x,0)=\varphi(x,l)=$$
$$=\varphi_{xx}(0,y)=\varphi_{xx}(l,y)=\varphi_{xx}(x,0)=\varphi_{xx}(x,l)=$$
$$=\varphi_{yy}(0,y)=\varphi_{yy}(l,y)=\varphi_{yy}(x,0)=\varphi_{yy}(x,l)=$$
$$=\psi(0,y)=\psi(l,y)=\psi(x,0)=\psi(x,l)=$$
$$=\psi_{xx}(0,y)=\psi_{xx}(l,y)=\psi_{xx}(x,0)=\psi_{xx}(x,l)=$$
$$=\psi_{yy}(0,y)=\psi_{yy}(l,y)=\psi_{yy}(x,0)=\psi_{yy}(x,l)=0.$$

Задача 5. *Найти в области* Ω *функцию* $U(t,x,y)$ *из класса*

$$U(t,x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)\cap C^{2+2+0}_{t,x,y}(\Omega)\cap C^{2+0+2}_{t,x,y}(\Omega),$$

удовлетворяющую уравнению (16) *и заданным краевым условиям* (17)-(19), *где* $\overline{\Omega}=\{(t,x,y)|\ 0\le t\le\beta,\ 0\le x,y\le l\}$.

Нетривиальные решения задачи разыскиваются в виде ряда Фурье

$$U(t,x,y)=\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}u_{n,m}(t)\,\vartheta_{n,m}(x,y),$$

где $\vartheta_{n,m}(x,y)=\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{l}y\right).$

При вычислении граничных условий получаем следующую систему из счетных систем алгебраических уравнений (СССАУ) для определения коэффициентов $c_{n,m}$ и $d_{n,m}$

$$\begin{cases} c_{n,m}\left(\lambda_{n,m}+\sin\left(\lambda_{n,m}\beta\right)\right)+d_{n,m}\left(1-\cos\left(\lambda_{n,m}\beta\right)\right)=\lambda_{n,m}\left(\varphi_{n,m}-\gamma_{n,m}\right), \\ c_{n,m}\left(\cos\left(\lambda_{n,m}\beta\right)-1\right)+d_{n,m}\left(\lambda_{n,m}+\sin\left(\lambda_{n,m}\beta\right)\right)=\lambda_{n,m}^{2}\left(\psi_{n,m}-\eta_{n,m}(\beta)\right), \end{cases}\tag{20}$$

где

$$\lambda_{n,m}^{2}=\frac{\mu_{n,m}^{2}}{1+\mu_{n,m}^{2}},\quad \mu_{n,m}=\frac{\pi}{l}\sqrt{n^{2}+m^{2}}.$$

Для однозначной разрешимости СССАУ (20) требуется выполнение следующего условия

$$A_{n,m}=\left(\lambda_{n,m}+\sin\left(\lambda_{n,m}\beta\right)\right)^{2}+\left(1-\cos\left(\lambda_{n,m}\beta\right)\right)^{2}=$$
$$=\lambda_{n,m}^{2}+2\left(1+\lambda_{n,m}\sin\left(\lambda_{n,m}\beta\right)-\cos\left(\lambda_{n,m}\beta\right)\right)\neq 0.$$

Условия 5. Пусть $\varphi(x,y)\in C^{2}\left([0;l]\times[0;l]\right)$, $\psi(x,y)\in C^{2}\left([0;l]\times[0;l]\right)$ и в области $[0;l]\times[0;l]$ имеют также кусочно-непрерывные производные третьего порядка по x,y.

Рассматривается определитель Фредгольма

$$\Delta_{n,m}(\nu)=\begin{vmatrix} 1+\nu H_{11n,m} & \nu H_{12n,m} & \ldots & \nu H_{1k\,n,m} \\ \nu H_{21n,m} & 1+\nu H_{22n,m} & \ldots & \nu H_{2k\,n,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \nu H_{k1n,m} & \nu H_{k2n,m} & \ldots & 1+\nu H_{kk\,n,m} \end{vmatrix}\neq 0,$$

где

$$H_{ij\,n,m}=\int_{0}^{\beta}b_{i}(s)E_{j\,n,m}(s)\,ds,$$

$$E_{i\,n,m}(t)=B_{1n,m}(t)\int_{0}^{\beta}\xi_{i\,n,m}(t)\,dt+B_{2n,m}(t)\,\xi_{i\,n,m}(\beta)-\xi_{i\,n,m}(t),$$

$$B_{1n,m}(t)=\frac{\lambda_{n,m}}{A_{n,m}(T)}\left[\cos\lambda_{n,m}t\left(\lambda_{n,m}+\sin\lambda_{n,m}\beta\right)+\sin\lambda_{n,m}t\left(1-\cos\lambda_{n,m}\beta\right)\right],$$

$$B_{2n,m}(t)=\frac{\lambda_{n,m}^{2}}{A_{n,m}(T)}\left[\cos\lambda_{n,m}t\left(\cos\lambda_{n,m}\beta-1\right)+\sin\lambda_{n,m}t\left(\lambda_{n,m}+\sin\lambda_{n,m}\beta\right)\right],$$

$$\xi_{i,n,m}(t) = \frac{1}{\lambda_{n,m}\left(1+\mu_{n,m}^2\right)} \int_0^t \sin\left(\lambda_{n,m}(t-s)\right) a_i(s)\, d\, s.$$

Определитель $\Delta_{n,m}(\nu)$ есть многочлен относительно ν степени не выше k. Уравнение $\Delta_{n,m}(\nu)=0$ имеет не более k различных корней. Эти корни являются иррегулярными значениями параметра ν ядра интегро-дифференциального уравнения. Множество иррегулярных значений параметра ν обозначим через $\Im$. А множество значений параметра $\nu \in \Lambda = \left((-\infty;0)\cup(0;\infty)\right)\setminus \Im$ назовём регулярным. Для регулярных значений параметра $\nu \in \Lambda$ условие Фредгольма выполняется. Поэтому для таких значений $\nu \in \Lambda$ устанавливается однозначная разрешимость поставленной нелокальной задачи.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* 5. *Для регулярных значений параметра* $\nu \in \Lambda$ *задача однозначно разрешима в области* Ω. *Для иррегулярных значений параметра* $\nu \in \Im$ *задача имеет бесконечное множество решений в* Ω, *если* $\varphi_{n,m} = \psi_{n,m} = 0$.

В параграфе 2.4 в области $\Omega = \{(t,x,y) \mid 0<t<T,\ 0<x,y<l\}$ изучаются вопросы разрешимости нелокальной обратной задачи для интегро-дифференциального уравнения типа Бенни-Люк (Benney-Luke[4]) четвертого порядка с вырожденным ядром

$$U_{tt} - (U_{ttxx}+U_{ttyy}) - \omega^2\,(U_{xx}+U_{yy}) + \omega^2\,(U_{xxxx}+U_{yyyy}) =$$
$$= \nu \int_0^T K(t,s)U(s,x,y)\,d\,s + \alpha(t)\beta(x,y), \tag{25}$$

где T и $l-$ заданные положительные действительные числа, $\omega-$ положительный параметр, $\nu-$ отличный от нуля действительный параметр, $0 \ne \alpha(t) \in C[0;T]$, $\beta(x,y)-$ функция переопределения, $K(t,s) = \sum_{i=1}^{k} a_i(t) b_i(s)$, $0 \ne a_i(t), b_i(s) \in C[0;T]$. Здесь предполагается, что система функций $a_i(t),\ i=\overline{1,k}$ и система функций $b_i(s),\ i=\overline{1,k}$ являются линейно независимыми.

Задача 6. *Найти в области* Ω *пару функций*

$$U(t,x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C_{t,x,y}^{2,4,4}(\Omega) \cap C_{t,x,y}^{2+2+0}(\Omega) \cap C_{t,x,y}^{2+0+2}(\Omega), \tag{26}$$
$$\beta(x,y) \in C\{0 \le x,y \le l\},$$

удовлетворяющую уравнению (25) *и следующим условиям*

$$U(0,x,y) = U(T,x,y), \quad \int_0^T U(t,x,y)\,d\,t = \varphi(x,y), \ \ 0 \le x,y \le l, \tag{27}$$
$$U(t,0,y) = U(t,l,y) = U(t,x,0) = U(t,x,l) =$$

[4] Benney D. J., Luke J. C. Interactions of permanent waves of finite amplitude // Journal of Mathematical Physics. 1964. Vol. 43. P. 309–313.

$$=U_{xx}(t,0,y)=U_{xx}(t,l,y)=U_{xx}(t,x,0)=U_{xx}(t,x,l)=$$

$$=U_{yy}(t,0,y)=U_{yy}(t,l,y)=U_{yy}(t,x,0)=U_{yy}(t,x,l)=0,\ 0\le t\le T, \tag{28}$$

$$\int_0^T \Theta(t)U(t,x,y)\,dt=\psi(x,y),\ 0\le x,y\le l, \tag{29}$$

где $0\neq\Theta(t)\in C[0;T]$, $\psi(x,y),\varphi(x,y)-$ *заданные достаточно гладкие функции в области* $\{0\le x,y\le l\}$, $\bar{\Omega}=\{(t,x,y)|\ 0\le t\le T,\ 0\le x,y\le l\}$,

$$\varphi(0,y)=\varphi(l,y)=\varphi(x,0)=\varphi(x,l)=$$

$$=\varphi_{xx}(0,y)=\varphi_{xx}(l,y)=\varphi_{xx}(x,0)=\varphi_{xx}(x,l)=$$

$$=\varphi_{yy}(0,y)=\varphi_{yy}(l,y)=\varphi_{yy}(x,0)=\varphi_{yy}(x,l)=$$

$$=\varphi_{xxxx}(0,y)=\varphi_{xxxx}(l,y)=\varphi_{xxxx}(x,0)=\varphi_{xxxx}(x,l)=$$

$$=\varphi_{yyyy}(0,y)=\varphi_{yyyy}(l,y)=\varphi_{yyyy}(x,0)=\varphi_{yyyy}(x,l)=0.$$

Если из задачи 6 исключим условию (6), то такую задачу назовем прямой задачей. Первое условие для однозначной разрешимости задачи 6 имеет вид

$$\sigma_{n,m}(\omega)=1-\cos\mu_{n,m}\omega T\neq 0,$$

где $\mu_{n,m}=\frac{\pi}{l}\sqrt{n^2+m^2}$. Пусть $\sigma_{n,m}(\omega)=1-\cos\mu_{n,m}\omega T=0$ при некоторых ω. Это условие эквивалентно равенству $\cos\mu_{n,m}\omega T=1$. Данное уравнение имеет совокупность положительных решений: $\omega_k=\frac{2\pi k}{\mu_{n,m}T}$, $k\in N$, где $N-$ множество натуральных чисел. Множество значений $0<\omega_k$, определенных этой формулой, назовём иррегулярным и обозначим через $\Im_1$. Множество других значений ω_k назовём регулярным и обозначим через $\Lambda_1=(0,\infty)\setminus\Im_1$.

Определитель

$$\Delta_{n,m}(\nu,\omega)=\begin{vmatrix}1-\nu H_{11\,n,m} & -\nu H_{12\,n,m} & \ldots & -\nu H_{1k\,n,m}\\ -\nu H_{21\,n,m} & 1-\nu H_{22\,n,m} & \ldots & -\nu H_{2k\,n,m}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ -\nu H_{k1\,n,m} & -\nu H_{k2\,n,m} & \ldots & 1-\nu H_{kk\,n,m}\end{vmatrix}\neq 0$$

есть многочлен относительно ν степени не выше k, где

$$H_{ij\,n,m}(\omega)=\int_0^T b_i(s)D_{j\,n,m}(s,\omega)\,ds,$$

$$D_{i\,n,m}(t,\omega)=h_{i\,n,m}(T,\omega)\delta_{2\,n,m}(t,\omega)+h_{i\,n,m}(t,\omega)-B_{n,m}(t,\omega)\int_0^T h_{i\,n,m}(t,\omega)\,dt,$$

$$h_{i\,n,m}(t,\omega)=\frac{1}{\mu_{n,m}(1+\mu_{n,m}^2)\omega}\int_0^t \sin\mu_{n,m}\omega(t-s)a_i(s)\,ds,\ i=\overline{1,k},$$

$$B_{n,m}(t,\omega)=\frac{\mu_{n,m}\omega}{2}\cdot\delta_{0n,m}(t,\omega),\quad \mu_{n,m}=\frac{\pi}{l}\sqrt{n^2+m^2},$$

$$\delta_{0n,m}(t,\omega)=\sin\mu_{n,m}\omega t+\frac{\sin\mu_{n,m}\omega T}{\sigma_{n,m}(\omega)}\cdot\cos\mu_{n,m}\omega t,$$

$$\delta_{2n,m}(t,\omega)=\frac{1}{\sigma_{n,m}(\omega)}\left[\cos\mu_{n,m}\omega t-\frac{\delta_{0n,m}(t,\omega)}{2}\sin\mu_{n,m}\omega T\right].$$

Уравнение $\Delta_{n,m}(\nu,\omega)=0$ имеет не более k различных действительных корней. Множество таких чисел назовём иррегулярным и обозначим через $\Im_2$. Другие значения ν назовём регулярными и их множество обозначим через $\Lambda_2=\left[(-\infty,\,0)\cup(0,\,\infty)\right]\setminus\Im_2$. Примем обозначение $\aleph_1=\{(\omega,\nu)\colon \omega\in\Lambda_1,\ \nu\in\Lambda_2\}$.

Условия 6.1. Пусть функции $\varphi(x,y),\beta(x,y)\in C^5([0;l]\times[0;l])$ на сегменте $[0;l]$ имеют кусочно-непрерывные производные до шестого порядка и

$$\beta(0,y)=\beta(l,y)=\beta(x,0)=\beta(x,l)=$$
$$=\beta_{xx}(0,y)=\beta_{xx}(l,y)=\beta_{xx}(x,0)=\beta_{xx}(x,l)=$$
$$=\beta_{yy}(0,y)=\beta_{yy}(l,y)=\beta_{yy}(x,0)=\beta_{yy}(x,l)=$$
$$=\beta_{xxxx}(0,y)=\beta_{xxxx}(l,y)=\beta_{xxxx}(x,0)=\beta_{xxxx}(x,l)=$$
$$=\beta_{yyyy}(0,y)=\beta_{yyyy}(l,y)=\beta_{yyyy}(x,0)=\beta_{yyyy}(x,l)=0.$$

Теорема 5. *Пусть выполняются условия* 6.1. *Тогда прямая задача* (25)-(28) *однозначно разрешима в области* Ω *при всевозможных* n,m *и* $(\omega,\nu)\in\aleph_1$. *Это решение определяется в виде ряда Фурье*

$$U(t,x,y,\omega,\nu)=\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\varphi_{n,m}F_{n,m}(t,\omega,\nu)+\beta_{n,m}M_{n,m}(t,\omega,\nu)\right]\times$$
$$\times\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\sin\frac{\pi m}{l}y, \tag{30}$$

где $F_{n,m}(t,\omega,\nu)=B_{n,m}(t,\omega)+\nu\sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{\Delta_{1in,m}(\nu,\omega)}{\Delta_{n,m}(\nu,\omega)}D_{i\,n,m}(t,\omega)$,

$$\Delta_{jin,m}(\nu,\omega)=$$
$$=\begin{vmatrix} 1-\nu H_{11n,m} & \dots & -\nu H_{1(i-1)n,m} & \Psi_{j1n,m} & -\nu H_{1(i+1)n,m} & \dots & -\nu H_{1kn,m} \\ -\nu H_{21n,m} & \dots & -\nu H_{2(i-1)n,m} & \Psi_{j2n,m} & -\nu H_{2(i+1)n,m} & \dots & -\nu H_{2kn,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\nu H_{k1n,m} & \dots & -\nu H_{k(i-1)n,m} & \Psi_{jkn,m} & -\nu H_{k(i+1)n,m} & \dots & 1-\nu H_{kkn,m} \end{vmatrix},$$
$$j=1,2,$$

$$M_{n,m}(t,\omega,\nu)=E_{n,m}(t,\omega)+\nu\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{2i\,n,m}(\nu,\omega)}{\Delta_{n,m}(\nu,\omega)}D_{i\,n,m}(t,\omega).$$

Пользуясь условием (29), находим функцию переопределения в виде ряда Фурье:

$$\beta(x,y)=\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{\psi_{n,m}-\varphi_{n,m}\,\chi_{1n,m}(\omega,\nu)}{\chi_{2n,m}(\omega,\nu)}\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi m}{l}y. \qquad (31)$$

В (31) использовали обозначения

$$\chi_{1n,m}(\omega,\nu)=\int_0^T\Theta(t)F_{n,m}(t,\omega,\nu)dt,\quad \chi_{2n,m}(\omega,\nu)=\int_0^T\Theta(t)M_{n,m}(t,\omega,\nu)dt.$$

Проверяем выполнения условия $\chi_{2n,m}(\omega,\nu)\neq 0$. Предположим, что

$$\chi_{2n,m}(\omega,\nu)=\int_0^T\Theta(t)M_{n,m}(t,\omega,\nu)dt=0. \qquad (32)$$

Применяем теорему о среднем. По условию постановки задачи $\Theta(t)\neq 0,\ t\in[0,T]$. Тогда из (32) получим, что $\int_0^T M_{n,m}(t,\omega,\nu)dt=0$. Анализ функций $M_{n,m}(t,\omega,\nu)$ показывает, что это возможно, если справедливы следующие равенства

$$\int_0^T\sin\mu_{n,m}\omega(T-t)a_i(t)dt=0\,,\quad \int_0^T\sin\mu_{n,m}\omega(T-t)\alpha(t)dt=0. \qquad (33)$$

Применяем теорему о среднем к равенству (33). По условию постановки задачи $a_i(t)\neq 0,\ \alpha(t)\neq 0,\ t\in[0,T]$. Тогда из (33) получаем, что $\int_0^T\sin\mu_{n,m}\omega(T-t)dt=0$. Вычисляя этот интеграл, приходим относительно параметра ω к тригонометрическому уравнению $\cos\mu_{n,m}\omega T=\dfrac{1}{\mu_{n,m}}$, $\mu_{n,m}=\dfrac{\pi}{l}\sqrt{n^2+m^2}$. Это уравнение имеет решение, если $l\geq\sqrt{2}\pi$. Множество положительных решений ω_k этого уравнения обозначим через $\Im_3$. При $l=\sqrt{2}\pi$ имеет место $\Im_3=\Im_1$. А при $l>\sqrt{2}\pi$ имеет место включение $\Im_3\subset\Lambda_1$. Поэтому рассмотрим $\omega_k\in\Lambda_3=\Lambda_1\setminus\Im_3$. Для всех $\omega_k\in\Lambda_3$ выполняется условие $\chi_{2n,m}(\omega)\neq 0$. Через $\aleph_2$ обозначим множество $\aleph_2=\{(\omega,\nu)\colon \omega\in\Lambda_3,\ \nu\in\Lambda_2\}$.

Условия 6.2. Предположим, что функция $\psi(x,y)\in C^5([0;l]\times[0;l])$ на сегменте $[0;l]$ имеет кусочно-непрерывные производные до шестого порядка и

$$\psi(0,y)=\psi(l,y)=\psi(x,0)=\psi(x,l)=$$
$$=\psi_{xx}(0,y)=\psi_{xx}(l,y)=\psi_{xx}(x,0)=\psi_{xx}(x,l)=$$
$$=\psi_{yy}(0,y)=\psi_{yy}(l,y)=\psi_{yy}(x,0)=\psi_{yy}(x,l)=$$
$$=\psi_{xxxx}(0,y)=\psi_{xxxx}(l,y)=\psi_{xxxx}(x,0)=\psi_{xxxx}(x,l)=$$
$$=\psi_{yyyy}(0,y)=\psi_{yyyy}(l,y)=\psi_{yyyy}(x,0)=\psi_{yyyy}(x,l)=0.$$

Теорема 6. *Предположим, что выполняются условия* 6.1 *и* 6.2*. При всевозможных* n, m *и* $(\omega,\nu)\in\aleph_2$ *функция переопределения однозначно определяется из ряда* (30)*, а основная неизвестная функция – из следующего ряда*

$$U(t,x,y,\omega,\nu)=\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\left[\psi_{n,m}\frac{M_{n,m}(t,\omega,\nu)}{\chi_{2n,m}(\omega,\nu)}+\right.$$
$$\left.+\varphi_{n,m}\left(F_{n,m}(t,\omega,\nu)-M_{n,m}(t,\omega,\nu)\frac{\chi_{1n,m}(\omega,\nu)}{\chi_{2n,m}(\omega,\nu)}\right)\right].$$

При этом решение $U(t,x,\omega,\nu)$ *интегро-дифференциального уравнения* (25) *устойчиво по функции переопределения* $\beta(x,y)$ *и по заданной функции* $\varphi(x,y)$.

Далее, изучаются иррегулярные случаи. Здесь возможно 4 случаев. Для каждого случая строится бесконечное множество решений в виде рядов Фурье.

Третья глава посвящена изучению однозначной разрешимости смешанных задач для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с вырожденным ядром при регулярных значениях параметра. Данная глава состоит из трех параграфов. Изучаются смешанные задачи методом ряда Фурье разделения переменных. Устанавливаются достаточные условия однозначной разрешимости рассматриваемых задач для регулярных значений заданного параметра. Рассматривается обратная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка с вырожденным ядром.

В первом параграфе третьей главы в прямоугольной области Ω для регулярных значений заданного параметра μ исследуются вопросы обобщенной разрешимости смешанной задачи для следующего линейного интегро-дифференциального уравнения с вырожденным ядром

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^{4m+1}}{\partial t\,\partial x^{4m}}+\frac{\partial^{4m}}{\partial x^{4m}}\right)^{3}U(t,x)=\mu\int_0^T K(t,s)U(s,x)\,ds+\alpha(t)U(t,x) \tag{34}$$

с начальными

$$U(t,x)_{|t=0}=\varphi_1(x),\quad \frac{\partial^{j-1}}{\partial t^{j-1}}U(t,x)_{|t=0}=\varphi_j(x),\ j=2,3 \tag{35}$$

и граничными условиями

$$U(t,x)_{|\,x=0}=U_{xx}(t,x)_{|\,x=0}=\ldots=\frac{\partial^{2(6m-1)}}{\partial x^{2(6m-1)}}U(t,x)_{|\,x=0}=$$

$$=U(t,x)_{|\,x=l}=U_{xx}(t,x)_{|\,x=l}=\ldots=\frac{\partial^{2(6m-1)}}{\partial x^{2(6m-1)}}U(t,x)_{|\,x=l}=0, \qquad (36)$$

где $\varphi_j(x)\in C^{12m+1}\left(\Omega_l\right)$, $\varphi_j(x)_{|\,x=0}=\varphi''_j(x)_{|\,x=0}=$ $=\ldots=\varphi_j^{(12m-2)}(x)_{|\,x=0}=\varphi_j(x)_{|\,x=l}=\varphi''_j(x)_{|\,x=l}=\ldots=\varphi_j^{(12m-2)}(x)_{|\,x=l}=0$, $j=\overline{1,n}$, $K(t,s)=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i(t)b_i(s)$, $a_i(t),b_i(s)\in C(\Omega_T)$, $\alpha(t)\in C(\Omega_T)$, μ – действительный отличный от нуля параметр, $\Omega\equiv\Omega_T\times\Omega_l$, $\Omega_T\equiv[0,T]$, $\Omega_l\equiv[0,l]$, $0<l<\infty, 0<T<\infty$, m– фиксированное натуральное число. Здесь предполагается, что система функций $a_i(t)$, $i=\overline{1,k}$, и система функций $b_i(s)$, $i=\overline{1,k}$, являются линейно независимыми.

Через $W_{2,t,x}^{3,12m}(\bar{\Omega})$ обозначается класс функций $U(t,x)$, что функции

$U(t,x)$, $\frac{\partial}{\partial x}U(t,x)$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(t,x),\ldots,$ $\frac{\partial^{12m}}{\partial x^{12m}}U(t,x)$, $\frac{\partial}{\partial t}U(t,x)$ $\frac{\partial^2}{\partial t^2}U(t,x)$,

$\frac{\partial^3}{\partial t^3}U(t,x)$ принадлежат $L_2(\bar{\Omega})$[5].

Определение 1. *Обобщённым решением смешанной задачи* (34)-(36) *будем называть функцию* $U(t,x)\in W_{2,t,x}^{3,12m}(\Omega)$, *удовлетворяющую уравнению* (34) *с условиями* (35), (36) *почти всюду.*

В параграфе 3.2 в прямоугольной области Ω для регулярных значений параметра μ изучаются вопросы обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с параболическим оператором произвольной натуральной степени и с вырожденным ядром

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^{4m}}{\partial x^{4m}}\right)^n U(t,x)-\mu\int\limits_0^T K(t,s)U(s,x)\,ds=f(t,x,U(t,x))$$

с начальными

$$U(t,x)_{|\,t=0}=\varphi_1(x),\ \ \frac{\partial^{j-1}}{\partial t^{j-1}}U(t,x)_{|\,t=0}=\varphi_j(x),\ \ j=\overline{2,n}$$

и граничными условиями

$$U(t,x)_{|\,x=0}=U_{xx}(t,x)_{|\,x=0}=\ldots=\frac{\partial^{2(2nm-1)}}{\partial x^{2(2nm-1)}}U(t,x)_{|\,x=0}=$$

[5] Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

$$= U(t,x)_{|\,x=l} = U_{xx}(t,x)_{|\,x=l} = \ldots = \frac{\partial^{2(2nm-1)}}{\partial x^{2(2nm-1)}} U(t,x)_{|\,x=l} = 0,$$

где $f(t,x,U) \in C(\Omega \times R)$, $\varphi_j(x) \in C^{4mn+1}\left(\Omega_l\right)$, $\varphi_j(x)_{|\,x=0} = \varphi''_j(x)_{|\,x=0} =$ $= \ldots = \varphi_j^{(4nm-2)}(x)_{|\,x=0} = \varphi_j(x)_{|\,x=l} = \varphi''_j(x)_{|\,x=l} = \ldots = \varphi_j^{(4nm-2)}(x)_{|\,x=l} = 0,$ $j = \overline{1,n}$, $K(t,s) = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i(t) b_i(s)$, $a_i(t), b_i(s) \in C(\Omega_T)$, $\alpha(t) \in C(\Omega_T)$, $\mu-$ действительный параметр, $\Omega \equiv \Omega_T \times \Omega_l$, $\Omega_T \equiv [0,T]$, $\Omega_l \equiv [0,l]$, $0 < l < \infty, 0 < T < \infty$, $n,m-$ фиксированные натуральные числа. Здесь предполагается, что системы функций $a_i(t)$, $i = \overline{1,k}$, и системы функций $b_i(s)$, $i = \overline{1,k}$, являются линейно независимыми.

В параграфе 3.3 исследуется обратная задача для нелинейного интегро-диффференциального уравнения в частных производных третьего порядка с вырожденным ядром.

Четвертая глава носит характер примеров для иллюстрации материалов второй главы. Здесь более четко выражается роль параметров в изучении вопросов разрешимости и построения решений. Итак, в четвертой главе исследуются нелокальные краевые задачи для обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма второго порядка с вырожденным ядром, параметрами и интегральными условиями. Вычисляются значения параметров, при которых исследуется разрешимость рассматриваемой задачи и строятся соответствующие решения в случае их существования.

В первом параграфе четвертой главы изучается спектральная задача для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма второго порядка с вырожденным ядром.

Задача 7. *Требуется найти функцию* $u(t)$, *удовлетворяющую на интервале* $(0;\pi)$ *уравнению*

$$u''(t) + \lambda^2 u(t) = \nu \int_0^{\pi} K(t,s) u(s)\, ds \tag{37}$$

и следующим однородным краевым условиям

$$u(\pi) = \int_0^{\pi} u(s)\, ds, \qquad u'(\pi) = 0, \tag{38}$$

где $\lambda-$ *положительный параметр,* $\nu-$ *действительный ненулевой параметр,* $K(t,s) = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i(t) b_i(s) \neq 0$, $a_i(t), b_i(s) \in C[0;\pi]$. *Здесь предполагается, что каждая из систем функций* $a_i(t)$, $i = \overline{1,k}$, *и* $b_i(s)$, $i = \overline{1,k}$, *линейно независима.*

Поскольку краевые условия (38) однородны, интегро-дифференциальное уравнение (37) либо не имеет нетривиальных решений, либо имеет бесконечное множество решений. В данном параграфе определяется роль параметра λ, что при каких значениях параметра задача (37), (38) не имеет нетривиальных решений, а при каких значениях параметра λ спектральная задача имеет бесконечное множество решений и построятся эти решения.

В параграфе 4.2 исследуется разрешимость нелокальной краевой задачи для обыкновенного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром, отражающим отклонением и двумя действительными параметрами. Вычисляются значения параметров, при которых исследуется разрешимость рассматриваемой краевой задачи.

Задача 8. *Требуется найти функцию* $u(t)\in C[-T;T]\cap \cap C^1(-T;T]\cap C^2(-T;T)$, *удовлетворяющую на интервале* $(-T;T)$ *уравнению*

$$u''(t)+\lambda^2 u(t)=\nu\int_{-T}^{T}K(t,s)u(\omega-s)\,ds$$

и следующим условиям

$$u(T)=\int_{-T}^{T}u(t)\,dt,\qquad u'(T)=\varphi,\qquad u(t)=\psi(t),\ t\in[T;T+\omega],$$

где $0<\omega<T<\infty-$ *заданные действительные числа,* $\lambda-$ *положительный параметр,* $\varphi=const\neq 0$, $\nu-$ *действительный ненулевой параметр,* $K(t,s)=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i(t)b_i(s)\neq 0$, $a_i(t)\in C[-T;T+\omega]$, $b_i(s)\in C[-T;T]$, $\psi(t)\in C[-T;T]$, $\psi(T)=u(T)$. *Здесь предполагается, что каждая из систем функций* $a_i(t)$, $i=\overline{1,k}$, *и* $b_i(s)$, $i=\overline{1,k}$, *линейно независима.*

В третьем параграфе главы 4 исследуется однозначная разрешимость нелокальной обратной задачи для обыкновенного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма второго порядка с вырожденным ядром и действительными параметрами. На конечном отрезке $[0;T]$ рассматривается уравнение вида

$$u''(t)+\lambda^2 u(t)=\nu\int_{0}^{T}K(t,s)u(s)\,ds+\beta\alpha(t)$$

при следующих условиях

$$u(T)=\int_{0}^{T}u(t)t\,dt,\quad u'(T)=\varphi,\quad u(0)=r,$$

где $0<T-$ заданное действительное число, $0<\lambda-$ положительный параметр, $0\neq\alpha(t)\in C[0;T]$, $\varphi, r=const$, $\nu-$ действительный ненулевой параметр, $\beta-$ коэффициент переопределения, $0\neq K(t,s)=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i(t)b_i(s)$, $a_i(t)\in C[0;T]$, $b_i(s)\in C[0;T]$. Здесь предполагается, что каждая из систем функций $a_i(t)$, $i=\overline{1,k}$, и $b_i(s)$, $i=\overline{1,k}$, линейно независима.

В последнем параграфе 4.4 диссертации приводится содержательные примеры для обыкновенного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма первого и второго порядка.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная диссертационная работа посвящена исследованию вопросов разрешимости смешанных, нелокальных краевых и обратных задач для некоторых классов дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений.

Рассматрены обыкновенные интегро-дифференциальные уравнения второго порядка с вырожденным ядром и действительными параметрами. Исследованы дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных, содержащие действительные параметры и одного из дифференциальных операторов математической физики.

В заключение можно сделать следующие выводы по результатам исследований:

1. Для регулярных значений действительного параметра доказана однозначная разрешимость нелокальных краевых задач для однородных дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка; построено бесконечное множество решений краевых задач при иррегулярных значениях параметра.
2. Для регулярных значений действительных параметров доказана однозначная разрешимость нелокальных прямых и обратных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных третьего и четвертого порядков; доказана устойчивость решения по функциям переопределения и граничным данным; построено бесконечное множество решений краевых задач при иррегулярных значениях параметров.
3. Доказана однозначная обобщенная разрешимость смешанной задачи для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, содержащих произвольную степень параболического оператора.
4. Для регулярных значений действительных параметров доказана однозначная разрешимость нелокальных прямых и обратных краевых задач для обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма второго порядка; доказана устойчивость решения по функциям переопределения и граничным данным; построено бесконечное множество решений краевых задач при иррегулярных значениях параметров.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 AT V.I. ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

YULDASHEV TURSUN KAMALDINOVICH

DIRECT AND INVERSE PROBLEMS FOR DIFFERENTIAL AND INTEGRO- DIFFERENTIAL EQUATIONS

01.01.02 – Differential equations and mathematical physics

DISSERTATION ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION (DSc) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT–2021

The theme of dissertation of doctor of science (DSc) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2020.3.DSc/FM161

Dissertation has been prepared at National university of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Official opponents:	**Assanova Anar Turmaganbetkyzy (Kazakhstan)** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Ashurov Ravshan Radjapovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Urinov Akhmadjon Kushakovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Leading organization:	**Samarkand State University**

Defense will take place «____» __________ 2021 at ____ at the meeting of Scientific council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics (Address: University str., Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871)- 207-91-40). E-mail: uzbmath@umail.uz , Website: www.mathinst.uz

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre of V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics (is registered № _____) (Address: University str., Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871)- 207-91-40). E-mail: uzbmath@umail.uz , Website: www.mathinst.uz).

Abstract of dissertation sent out on « ___ » _________ 2021.
(mailing report №__ on « ___ » ____________ 2021).

U.A. Rozikov
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.Sc., Professor

J.K. Adashev
Scientific secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, PhD. senior researcher

A. Azamov
Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.Sc., Academician

INTRODUCTION (abstract of DSc thesis)

The aim of the research work is to study the solvability of direct and inverse boundary value problems and construct their solutions for differential and integro-differential equations.

The object of the research work are mixed, boundary and inverse problems for differential and integro-differential equations.

Scientific novelty of the research work is as follows:

For regular values of the parameter the unique solvability of nonlocal boundary value problems for homogeneous partial differential equations of the fourth order has been proved.

The unique solvability of nonlocal direct and inverse boundary value problems for partial integro-differential equations of the third and fourth orders with a degenerate kernel has been proved; the stability of the solution with respect to redefinition functions and boundary data has been proved.

For regular values of the parameter, sufficient conditions are established for the unique generalized solvability of the mixed problem for nonlinear integro-differential equations containing an arbitrary power of the parabolic operator.

The unique solvability of nonlocal direct and inverse boundary value problems for ordinary Fredholm integro-differential equations of the second order has been proved for regular values of the parameters; the stability of the solution with respect to redefinition functions and boundary data has been proved; necessary conditions for the solvability of boundary value problems for irregular values of spectral parameters are found or has been proved the absence of solutions.

Implementation of the research results. The results obtained in the dissertation on:

Study of the boundary value problem for partial integro-differential equations of Benny-Luke type with degeneration of the kernel, used in leading international scientific journals (Lobachevskii J. of Math.: 2020, Vol. 41, P. 1031-1042; 2021, Vol. 42, P. 526-535, P. 587-597, P. 632-640, P. 479-489; Russian Math.: 2020, Vol. 64, P. 1-11; International J. of Math. And Phys., 2020, Vol. 11, No. 1, P. 28-35) in the study of questions of the unique solvability of the Gellerstedt problem, two-point and multi-point boundary value problems for linear, loaded and nonlinear partial differential equations. The use of the scientific result made it possible to prove theorems on the unique solvability of the Gellerstedt problem, two-point and multi-point boundary value problems for linear, loaded and nonlinear partial differential equations;

study of a nonlocal boundary value problem for partial integro-differential equations of pseudoparabolic-pseudohyperbolic type, used in leading international scientific journals (Lobachevskii J. of Math.: 2021, Vol. 41, P. 560-571, P. 572-578, P . 632-640; Axioms 2020, Vol. 9, No. 4 (135); Chaos, Solitons & Fractals, 2021, Vol. 146, ID 110835) in the study of various boundary value problems for mixed differential equations, differential equations with degeneration. The use of the scientific result made it possible to prove theorems on the unique solvability of boundary value problems for mixed differential equations, elliptic differential equations with three singular coefficients, differential equations with degeneration.

The results obtained in the thesis on the solvability of integro-differential equations were used in the implementation of research work of the Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan under the project No. AP05131220 "Methods for solving initial-boundary value problems for high-order partial differential equations and their applications” (Reference from the Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan No. 01-06/082 dated May 25, 2021, Kazakhstan). The application of the methodology for constructing solutions for integro-differential equations made it possible to prove the unique solvability of initial-boundary value and nonlocal boundary value problems for partial differential equations of the fourth order;

The research methodology of nonlocal boundary value problems for linear and nonlinear differential equations with a real parameter was used in the implementation of research work of the International Kazakh-Turkish University named after Khoja Ahmed Yasawi under the project No. AP05131268 "Questions of the solvability of boundary value and initial boundary value problems for nonlocal partial differential equations", State registration number 0120RK00547 (Certificate of the International Kazakh-Turkish University named after Khoja Ahmed Yasavi, number 05/1159 dated May 25, 2021, Kazakhstan). The use of the methodology for studying nonlocal boundary value problems made it possible to prove the unique solvability of initial boundary value problems for partial differential equations of parabolic and hyperbolic types.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, four chapters, conclusion and titles of used literature. The full volume of the thesis is 216 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; I part)

1. Юлдашев Т. К. Прямые и обратные задачи для уравнений в частных производных третьего и четвертого порядков. Красноярск: СибирскийГУ им. М. Ф. Решетнева, 2018. 180 с.
2. Yuldashev T. K. Mixed value problem for a nonlinear differential equation of fourth order with small parameter on the parabolic operator // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2011. Vol. 51. № 9. P. 1596–1604. (3. Scopus. IF=0.301).
3. Yuldashev T. K. Mixed value problem for nonlinear integro-differential equation with parabolic operator of higher power // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2012. Vol. 52. № 1. P. 105–116. (3. Scopus. IF=0.408).
4. Юлдашев Т. К. О разрешимости одной смешанной задачи для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных высокого порядка // Вестник СамарскГТУ. Серия: Физико-математические науки. 2013. № 4. С. 46–57. (35. CrossRef).
5. Yuldashev T. K. Inverse problem for a nonlinear Benney–Luke type integro-differential equations with degenerate kernel // Russian Mathematics. 2016. Vol. 60. № 9. P. 53–60. (3. Scopus. IF=0.31).
6. Юлдашев Т. К. Обратная задача для обыкновенного интегро-дифференциального уравнения с вырожденным ядром и нелокальными интегральными условиями // Вестник ТверГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 3. С. 19–33. (35. CrossRef).
7. Юлдашев Т. К. Об одном смешанном дифференциальном уравнении четвертого порядка // Известия ИМИ УдмуртГУ. 2016. Т. 47. № 1. С. 119–128. (1. WoS).
8. Юлдашев Т. К. Об одной краевой задаче для трехмерного аналога дифференциального уравнения Буссинеска // Ученые записки Казанского ун-та. Серия: Физико-математические науки. 2016. Т. 158. № 3. С. 424–433. (1. WoS. IF=0.22).
9. Юлдашев Т. К. Обыкновенное интегро-дифференциальное уравнение с вырожденным ядром и интегральным условием // Вестник СамарскГТУ. Серия: Физико-математические науки. 2016. Т. 20. № 4. С. 644–655. (1. WoS).
10. Юлдашев Т. К. Нелокальная краевая задача для неоднородного псевдопараболического интегро-дифференциального уравнения с вырожденным ядром // Вестник ВолГУ. Серия 1. Математика. Физика. 2017. № 1 (38). С. 42–54. (35. CrossRef).

11. Юлдашев Т. К. Об одной нелокальной задаче для неоднородного интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска с вырожденным ядром // Ученые записки Казанского ун-та. Серия: Физико-математические науки. 2017. Т. 159. № 1. С. 88–99. (1. WoS. IF=0.306)
12. Юлдашев Т. К. Разрешимость и определение коэффициента в одной краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром // Доклады НАН Украины. 2017. № 5. С. 8–16. (35. CrossRef).
13. Юлдашев Т. К. Обобщенная разрешимость смешанной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения высокого порядка с вырожденным ядром // Известия ИМИ УдмуртГУ. 2017. Т. 50. С. 121–132. (1. WoS).
14. Yuldashev T. K. Mixed problem for pseudoparabolic integro-differential equation with degenerate kernel // Differential equations. 2017. Vol. 53. No. 1. P. 99–108. (3. Scopus. IF=0.674).
15. Yuldashev T. K. On a boundary-value problem for a fourth-order partial integro-differential equation with degenerate kernel // Journal of Mathematical Sciences. 2020. Vol. 245. № 4. P. 508–523. (3. Scopus. IF=0.42).
16. Yuldashev T. K. Inverse boundary-value problem for an integro-differential Boussinesq-type equation with degenerate kernel // Journal of Mathematical Sciences. 2020. Vol. 250. № 5. P. 847–858. (3. Scopus. IF=0.42).
17. Юлдашев Т. К. О разрешимости одной краевой задачи для дифференциального уравнения типа Буссинеска // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 10. С.1411–1419. (3. Scopus. IF=0.659).
18. Юлдашев Т. К. Об одной нелокальной обратной задаче для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Benney-Luke с вырожденным ядром // Вестник ТверГУ. Сер. Прикл. математика. 2018. № 3. С. 19–41. (35. CrossRef).
19. Юлдашев Т. К. Об одной нелокальной краевой задаче для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырождением ядра // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 12. С. 1687–1694. (3. Scopus. IF=0.659)
20. Юлдашев Т. К. Спектральная задача для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма второго порядка // Доклады НАН Украины. 2018. № 12. С. 3–13. (35. CrossRef).
21. Yuldashev T. K. Determining of coefficients and the classical solvability of a nonlocal boundary-value problem for the Benney–Luke integro-differential equation with degenerate kernel // Journal of Mathematical Sciences. 2021. Vol. 254. № 6. P. 793–807. (3. Scopus. IF=1.02).
22. Юлдашев Т. К. Обобщенное решение смешанной задачи для линейного интегро-дифференциального уравнения с псевдопараболическим оператором высокой степени // Математическая физика и компьютерное моделирование. 2018. Т. 21. № 4. С. 34–43. (35. CrossRef).

23. Юлдашев Т. К. О разрешимости одной краевой задачи для обыкновенного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. Т. 59. № 2. С. 252–263. (3. Scopus. IF=0.565).
24. Юлдашев Т. К. Определение коэффициента в нелокальной задаче для интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска с вырожденным ядром // Владикавказский математический журнал. 2019. Т. 21. № 2. С. 67–84. (3. Scopus. IF=0.239).
25. Юлдашев Т. К. Интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма с интегральными условиями и спектральными параметрами // Математическая физика и компьютерное моделирование. 2019. Т. 22. № 3. С. 40–51. (35. CrossRef. IF=0.45).
26. Юлдашев Т. К. Спектральные особенности решения одной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма второго порядка с отражением аргумента // Известия ИМИ УдмуртГУ. 2019. Т. 54. С. 122–134. (1. WoS).
27. Yuldashev T. K. On differentiability by small parameters the solution of the mixed value problem for a nonlinear pseudohyperbolic equation // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2014. Vol. 7. № 2. P. 260–271. (3. Scopus. IF=0.274).
28. Yuldashev T. K. Mixed value problem for a Boussinesq type integro-differential equation with reflecting deviation and degenerate kernel // Advanced Studies in Contemporary Mathematics. 2016. Vol. 26. № 4. P. 723–732. (3. Scopus. IF=0.721).
29. Yuldashev T. K. Mixed value problem for a pseudoparabolic type integro-differential equation with delay and degenerate kernel // Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society. 2016. Vol. 19. № 2. P. 309–317. (3. Scopus. IF=0.8).
30. Yuldashev T. K. Nonlocal mixed-value problem for a Boussinesq-type integro-differential equation with degenerate kernel // Ukrainian Mathematical Journal. 2016. Vol. 68. № 8. P. 1278–1296. (3. Scopus. IF=0.20).
31. Yuldashev T. K. Determination of the coefficient and boundary regime in boundary value problem for integro-differential equation with degenerate kernel // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017. Vol. 38. № 3. P. 547–553. (3. Scopus. IF=0.728).
32. Yuldashev T. K. On an integro-differential equation of pseudoparabolic-pseudohyperbolic type with degenerate kernels // Proceedings of the Yerevan State University. Physical and Mathematical Sciences. 2018. Vol. 52. № 1. P. 19–26. (35. CrossRef. IF=0.171).
33. Yuldashev T. K. On inverse boundary value problem for a Fredholm integro-differential equation with degenerate kernel and spectral parameter // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2019. Vol. 40. № 2. P. 230–239. (3. Scopus. IF=0.422).

34. Yuldashev T. K. Spectral features of the solving of a Fredholm homogeneous integro-differential equation with integral conditions and reflecting deviation // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2019. Vol. 40. № 12. P. 2116–2123. (3. Scopus. IF=0.422).
35. Yuldashev T. K. On a boundary-value problem for Boussinesq type nonlinear integro-differential equation with reflecting argument // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41. № 1. P. 111–123. (3. Scopus. IF=0.347).
36. Yuldashev T. K. Nonlocal inverse problem for a pseudohyperbolic-pseudoelliptic type integro-differential equations // Axioms. 2020. Vol. 9. № 2. ID 45. P. 1–21. (3. Scopus. IF=2.11).
37. Yuldashev T. K. On Fredholm partial integro-differential equation of the third order // Russian Mathematics. 2015. Vol. 59. № 9. P. 62–66. (3. Scopus. IF=0.31).
38. Юлдашев Т. К. Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма третьего порядка с вырожденным ядром // Владикавказский математический журнал. 2016. Т. 18. № 2. С. 76–85. (3. Scopus. IF=0.239).

II бўлим (II часть; II Part)

39. Юлдашев Т. К. Разрешимость краевой задачи для смешанного интегро-дифференциального уравнения со спектральными параметрами // Эпоха науки. 2018. № 16. С. 323–333.
40. Юлдашев Т. К. Смешанная задача для интегро-дифференциального уравнения с псевдопараболическим оператором кубической степени // Эпоха науки. 2018. № 16. С. 333–342.
41. Юлдашев Т. К. Определение коэффициента в обратной задаче для интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа со спектральными параметрами // Эпоха науки. 2019. № 17. С. 134–149.
42. Юлдашев Т. К. Об одной спектральной задаче для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с интегральными условиями // Эпоха науки. 2019. № 18. С. 172–182.
43. Юлдашев Т. К. Смешанная задача для нелинейного уравнения с псевдопараболическим оператором высокой степени // Вестник ВоронежГУ. Серия: Физика. Математика. 2013. № 2. С. 237–255.
44. Юлдашев Т. К. Об особенностях решения одной краевой задачи для гиперболического интегро-дифференциального уравнения с отражающим отклонением // Эпоха науки. 2019. № 19. С. 157–169.
45. Yuldashev T. K. Nonlocal problem for a mixed type differential equation in rectangular domain // Proceedings of the Yerevan State University. Physical and Mathematical Sciences. 2016. № 3. P. 70–78.
46. Юлдашев Т. К. Обратная задача для нелинейного уравнения третьего порядка // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Сборник докладов Воронежской зимней математической школы, Воронеж, ВоронежГУ, 2013. С. 3–4.

47. Юлдашев Т. К. Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных высокого порядка // Уравнения смешанного типа, родственные проблемы анализа и информатики. Материалы 3-го международного Российско-Казахского симпозиума, Нальчик, 3-7 декабря 2014 г., С. 235–237.
48. Юлдашев Т. К. О приложениях интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма // Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения. Сб. тезисов докладов конф. Ташкент, 15–17 декабря 2017 г., С. 185–187.
49. Юлдашев Т. К. Смешанное интегро-дифференциальное уравнение четвертого порядка с вырожденным ядром // Тезисы докладов XIV межд. научной конференции, с. Цей, Северная Осетия, 3–8 июля 2017 г., С. 132–133.
50. Юлдашев Т. К. Интегро-дифференциальное уравнение второго порядка с вырожденным ядром // Межд. математическая конференция по теории функций, посвященная 100-летию чл.-корр. АН СССР А.Ф. Леонтьева. Уфа, 24–27 мая, 2017 г., С. 174–176.
51. Юлдашев Т. К. Об одной краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. Тезисы Всероссийской конф. Иркутск, 13–18 марта 2017 г., С. 75.
52. Юлдашев Т. К. Обратная коэффициентная краевая задача для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма второго порядка // Спектральная теория и смежные вопросы. Международная научная конференция. Уфа, 1–4 октября 2018 г., С. 170–171.
53. Юлдашев Т. К. Краевые задачи для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма // Спектральные и эволюционные задачи. XXIX Крымская Осенняя Математическая школа (КРОМШ-2018). Сборник материалов международной конференции, Симферополь – пос. Батилиман, 17–29 сентября 2018 г., С. 139–140.
54. Yuldashev T. K. Singularities of solutions of the boundary value problems for integro-differential equations with degenerate kernel // Nonlinear Analysis and Extremal Problems (NLA-2018). Proceedings of the 6th International Conference, Irkutsk, Russia, June 25–30, 2018, P. 149–150.
55. Юлдашев Т. К. Об одной краевой задаче для сингулярного гиперболического уравнения с интегральным условием и спектральным параметром // Порядковый анализ и смежные проблемы математического моделирования. Тезисы докладов XV международной научной конференции, Владикавказ, 15–20 июля, 2019 г., С. 152–153.
56. Yuldashev T. K. Fredholm integro-differential equation with spectral parameters // Борубаевские чтения. Сборник тезисов докладов межд. научной конф. Бишкек, 21–22 мая 2019 г., С. 51.
57. Юлдашев Т. К. Об одной краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения в частных производных // Молодёжный форум. Прикладная

математика. Математическое моделирование систем и механизмов. Актуальные направления научных исследований XXI века: Теория и практика. Воронеж, 10–12 декабря 2018 г., С. 505–508.
58. Yuldashev T. K. On nonlinear stochastic processes with maxima for a heat equations driven by Levy noise // Modern Problems of Stochastic Analysis. Proceedings of scientific conference, Tashkent, 21-21 September, 2020, P. 84–87.
59. Yuldashev T. K. Integro-differential equations of third order with spectral parameters // Теория управления и математическое моделирование. Материалы Всероссийской конференции с международным участием, Ижевск, 15–19 июня 2020 г., P. 23–24.
60. Юлдашев Т. К. Интегро-дифференциальное уравнение Буссинеска с интегральными условиями // Актуальные проблемы стохастического анализа. Материалы научной конференции, посвященной 80-летию академика Ш. К. Форманова, Ташкент, 20–21 февраля 2021 г., С. 782–784.