

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН**

**САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Алишера Навои**

МЕХАНИКО – МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ»

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ
РАБОТА**

**для получения степени бакалавра по направлению образования
«5480100 – Прикладная математика и информатика»**

Адилова Ахтама

тема:

**«ОПТИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ
ИНТЕГРАЛОВ, РАЗРАБОТКА РЕКОМЕНДАЦИИ И ПРИМЕНЕНИЯ
ЕГО ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ»**

Допущено к защите:

Декан факультета:

проф. Солеев А.

Заведующий кафедрой:

доц. Абдирашидов А.

Научный руководитель:

доц. Амридинов С.

Самарканд – 2014

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.	8
1. ОПТИМАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ.	10
2. АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ФОРМУЛ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ.	24
3. ПРИМЕНЕНИЕ РАЗРАБОТАННОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ ПРОВЕРКИ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЙ СОВМЕСТИМОСТИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ ПО ПАРОЖИДКОСТНОМУ РАВНОВЕСИЮ.	27
4. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ИЗГИБА ПЛАСТИНКИ ПРИ ПОМОЩИ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ	31
ПРИЛОЖЕНИЕ	43
ВЫВОДЫ	52
ЛИТЕРАТУРА	53

ВВЕДЕНИЕ

Постановка задачи. Как нам известно, вычисления определенного интеграла, основанные на представлении подынтегральной функции в виде суммы, производных, имеют ограниченное применение на практике инженерных расчётов. Используется также прием аппроксимации подынтегральной функции полиномиальным рядом, однако это требует больших вычислений.

Поэтому, в связи с появлением современных компьютеров, широкое распространение получили методы численного интегрирования.

В данной выпускной квалификационной работе разрабатываются оптимальные алгоритмы численного интегрирования и они применяются для решения задач прикладной математики.

Актуальность темы. Во многих случаях подынтегральная функция задается в виде таблицы. В этом случае полезно и эффективно использовать приближенные методы интегрирования. Поэтому, при наличии современных компьютеров, легче разрабатывать оптимальные алгоритмы численного интегрирования и применять их для решения конкретных прикладных задач.

Цели и задачи работы. Разработка оптимального алгоритма, блок-схемы и программы служит для решения задач химии и химической технологии, механики. Решаются задачи об изгибе прямоугольных пластин, которые сводятся к вычислению интегралов и проверке термодинамической совместимости экспериментальных данных по парожидкостному равновесию.

Методы исследования. В качестве метода исследования выбран метод трапеций, Симпсона и другие. Разрабатывается автоматический выбор оптимального алгоритма, блок-схемы и программы для решения той или иной решаемой задачи. Полученные результаты сравниваются с экспериментальными данными.

Научная ценность работы. Не проводя лабораторных экспериментов, можно решить поставленную задачу с помощью вычислительного метода и современных компьютерных технологий.

Полученные численные результаты сравниваются с данными, выполненными в лабораторных условиях.

Практическая ценность работы. Разработанные алгоритмы, блок-схемы и программы можно использовать при решении задач механики, химии и химической технологии. Приводится ряд рекомендации по применению этих разработок.

Содержание работы. В данной выпускной квалификационной работе дается методика оптимального применения численного интегрирования. Исследуются все методы численного интегрирования на компьютере. И эти оптимальные алгоритмы используются при решении конкретных задач механики и химической технологии.

Аннотация. В данной работе рассматриваются задачи механики, химической технологии, которые приводятся к численному интегрированию.

В качестве примера рассматривается задача из области химической технологии.

§ 1. ОПТИМАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Пусть на интервале (a, b) определена и ограничена функция $f(x)$

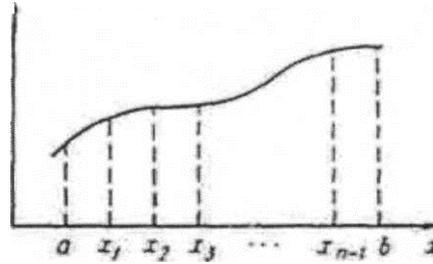


Рис 1.

(рис.1). Выберем на оси x точки $a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_{n-1} < x_n = b$

Такой набор точек называется разбиением интервала (a, b) , а интервалы (x_{k-1}, x_k) , $k = 1, 2, \dots, n$, - интервалами разбиения, длина каждого из которых определяется

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

Выберем внутри каждого из интервалов разбиения произвольные точки ξ_k ($k = 1, \dots, n$) и составим интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

Функция $f(x)$ называется интегрируемой на интервале (a, b) , если существует предел интегральной суммы при стремлении длины максимального интервала разбиения к нулю и соответственно – числа интервалов разбиения к бесконечности

$$\lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = 1 \quad (1-1)$$

Величина предела I называется определенным интегралом от функции $f(x)$ на интервале (a, b) и обозначается

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (1-2)$$

Если $f(x)$ на (a, b) неотрицательная, то интеграл (1-2) определяет площадь, ограниченную кривой $f(x)$, двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью абсцисс. Если функция $f(x)$ отрицательная, то интеграл выражает площадь, взятую с обратным знаком. Для знакопеременных функций интеграл выражает алгебраическую сумму площадей, соответствующих интервалам знакопостоянства функции.

Для того, чтобы функция $f(x)$ была интегрируема на интервале (a, b) , достаточно, чтобы она была ограничена и непрерывна на данном интервале. Условие непрерывности функции не является абсолютным. Если функция имеет конечное число точек разрыва, то она также интегрируема, поскольку эти точки могут быть опущены при составлении интегральной суммы. Интеграл функции, имеющей конечное число точек разрыва, может быть получен как сумма интегралов на отдельных отрезках между соответствующими точками разрыва.

Для вычисления определенного интеграла численным методом необходимо его представить в виде суммы площадей. Чем меньше интервалы разбиения, тем точнее будет вычислена интегральная сумма. Однако при этом значительно увеличивается объем вычислений. Максимальная точность получается при бесконечном числе отрезков разбиения. На практике приходится ограничиваться конечным разбиением интервала интегрирования функции, заранее допуская некоторую погрешность.

Разнообразие методов численного интегрирования обусловлено стратегией выбора точек разбиения, обеспечивающей в каждом конкретном случае минимально возможную ошибку. Возможны два способа выбора точек разбиения исходного интервала. Первый способ заключается в том, что

число интервалов фиксируется заранее, а во втором - число и величины интервалов определяются в процессе вычисления интеграла, исходя из требования заданной точности. В обоих случаях исходная функция на каждом интервале аппроксимируется соответствующей зависимостью, например линейной или квадратичной.

Метод прямоугольников основан непосредственно на определении интеграла

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (1-3)$$

где $\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$ - интегральная сумма, соответствующая данному разбиению,

а $\xi_1, \xi_2, \xi, \dots, \xi_n$ - некоторые точки на интервалах разбиения, в которых вычисляются значения функции (называемые в дальнейшем узловыми). Если интервал (a, b) разбить на достаточно большое число малых частей, то получаемая при этом интегральная сумма будет мало отличаться от точного значения интеграла, однако при этом равенство (1-3) выполняется лишь приближенно:

$$\int_a^b f(x) dx \cong f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n \quad (1-4)$$

Существенно заметить, что в равенстве (1-3) предел не зависит ни от способа разбиения интервала (a, b) , ни от способа выбора узловых точек. Однако на практике интервал (a, b) обычно делится на равные части, а в качестве узловых точек выбираются границы интервалов разбиения. Равенство (1-4) для равных интервалов разбиения запишется в виде

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} (f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})) \quad (1-5)$$

или

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} (f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)) \quad (1-6)$$

Правые части формул (1-5) и (1-6) представляют собой площади ступенчатых фигур, состоящих из прямоугольников, поэтому эти формулы носят название формул прямоугольников. Для функции, представленной на рис. 2, интегральная сумма, подсчитанная по формуле (1-5), меньше истинного значения интеграла, а сумма, подсчитанная по формуле (1-6), дает завышенное значение интеграла. Эти суммы называются нижней и верхней интегральными суммами соответственно. Очевидно, при $n \rightarrow \infty$ предел как верхней, так и нижней интегральной сумм будет равен истинному значению интеграла. Равенство пределов нижней и верхней интегральных сумм является одним из основных критериев интегрируемости функции, и он достаточно просто проверяется при вычислении интеграла от сложной функции.

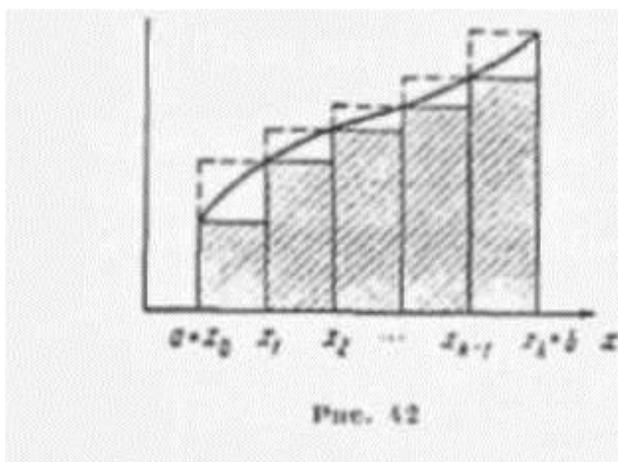


Рис 2

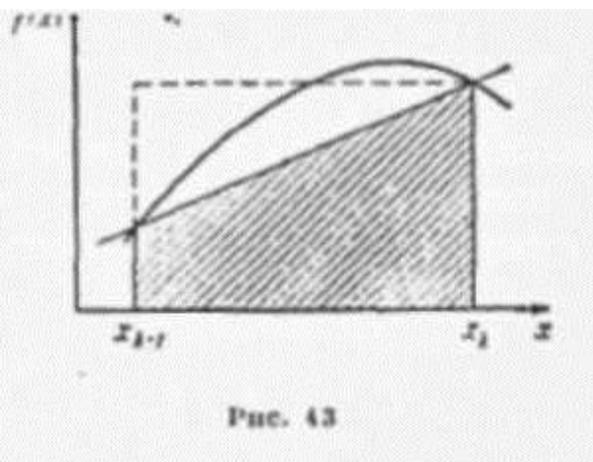


Рис 3

Формулы прямоугольников на практике редко используются для вычисления интегралов с помощью ЦВМ, поскольку при определении интеграла с высокой точностью число интегралов разбиения должно быть

весьма большим, что может потребовать значительных затрат машинного времени.

Метод трапеций основан на том, что график подынтегральной функции на отрезке разбиения (рис. 3) заменяется стягивающей его хордой и площадь, ограниченная интервалом разбиения, заменяется площадью трапеции. Тогда для интеграла (9-3) при фиксированном отрезке (x_{k-1}, x_k) можно записать

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \cong (x_k - x_{k-1}) \frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{2} \quad (1-7)$$

где правая часть является площадью трапеции. Аналогичные построения можно произвести и для соседних отрезков разбиения, например для отрезка (x_{k-2}, x_{k-1}) :

$$\int_{x_{k-2}}^{x_{k-1}} f(x) dx \cong (x_{k-1} - x_{k-2}) \frac{f(x_{k-1}) + f(x_{k-2})}{2}$$

Если обозначить

$$(x_k - x_{k-1}) = (x_{k-1} - x_{k-2}) = \dots = (x_2 - x_1) = \frac{b - a}{n} = h$$

то площадь, ограниченная графиком функции $f(x)$ на отрезке (x_{k-2}, x_k) , приближенно будет равна

$$\int_{x_{k-2}}^{x_k} f(x) dx \cong h \left(\frac{f(x_k)}{2} + f(x_{k-1}) + \frac{f(x_{k-2})}{2} \right)$$

и соответственно

$$\int_a^b f(x) dx \cong h \left(\frac{f(b)}{2} + f(x_{k-1}) + f(x_{k-2}) + \dots + f(x_2) + \frac{f(a)}{2} \right) \quad (1-8)$$

Формула (1-8) называется формулой трапеций для численного интегрирования. Заметим, что эта же формула может быть получена как среднее арифметическое правых частей формул (1-5) и (1-6)

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + \sum_{k=1}^n f(x_k)}{2} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \quad (1-9)$$

Метод Симпсона является одним из наиболее распространенных и часто применяемых методов численного интегрирования. В отличие от метода трапеций подынтегральная функция аппроксимируется в пределах двух прилежащих интервалов разбиения квадратичной зависимостью, поскольку для вычисления коэффициентов параболы необходимо располагать тремя значениями функции. Общее число интервалов разбиения при этом должно быть четным.

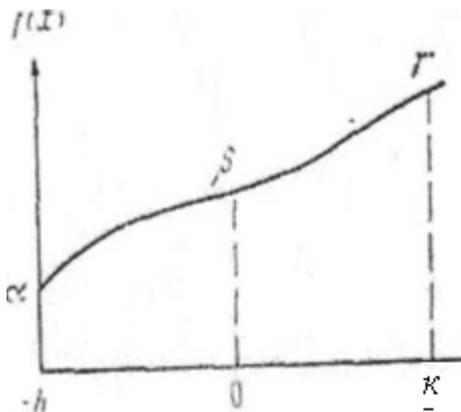


рис.4

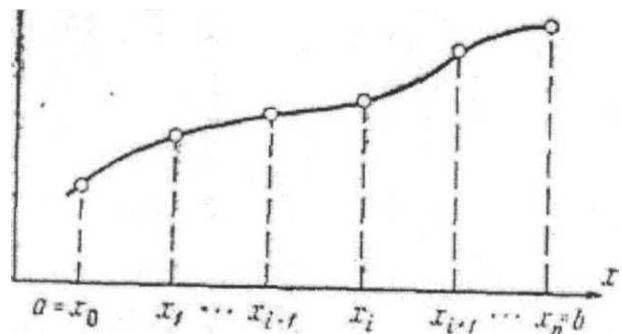


рис.5

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на интервале (a, b) . Разобьем интервал (a, b) на $2n$ равных частей и рассмотрим два прилежащих интервала разбиения (x_{i-1}, x_i) и (x_i, x_{i+1}) , каждый из которых имеет длину $h = (b-a)/2n$ (рис. 4). Точки x_{i-1} и x_{i+1} отстоят на величину h от точки x_i поэтому, вводя обозначения

$$\begin{aligned} (x_i - x_{i-1}) &= -h, & f(x_i) &= \beta, & (x_i - x_{i+1}) &= +h, \\ f(x_{i-1}) &= \alpha, & f(x_{i+1}) &= \gamma, \end{aligned}$$

запишем координаты точек, через которые проходит функция $f(x)$ соответственно как $(-h, a)$, $(0, \beta)$, (h, γ) (рис.5). Интерполяционной полином Лагранжа с узлами $-h, 0, h$, согласно формуле, имеет вид

$$y = P(x) = a \frac{x(x-h)}{2h^2} + \beta \frac{x^2 - h^2}{-h^2} + \gamma \frac{x(x+h)}{2h^2} =$$

$$= \frac{1}{2h^2} (ax(x-h) - 2\beta(x^2 - h^2) + \gamma x(x+h)) \quad (1-10)$$

Соотношение (1-10) определяет уравнение параболы. Для того чтобы найти площадь, ограниченную параболой, необходимо вычислить интеграл

$$\int_{-h}^h P(x) dx = \frac{1}{2h^2} \left(a \frac{2h^3}{3} - 2\beta \frac{2h^3}{3} + 2\gamma \frac{2h^3}{3} \right) = \frac{4}{3} (a + 4\beta + \gamma)$$

Переходя к исходным обозначениям для площади, ограниченной параболой на интервале (x_{i-1}, x_{i+1}) , можно окончательно записать

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) dx = \frac{h}{3} (f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1})) \quad (1-11)$$

Аналогично, интерполируя подынтегральную функцию для интервала (x_{i-1}, x_{i+3}) , с узлами $x_{i+1}, x_{i+3}, x_{i+3}$ получим

$$\int_{x_{i+1}}^{x_{i+3}} f(x) dx = \frac{h}{3} (f(x_{i+1}) + 4f(x_{i+2}) + f(x_{i+3})) \quad (1-12)$$

Если подобную операцию произвести для каждой тройки точек, начиная с (x_0, x_1, x_2) и кончая $(x_{2n-2}, x_{2n-1}, x_{2n})$, и затем сложить поочередно полученные формулы, то окончательно можно записать

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6n} [f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 4f(x_{2n-1}) + f(b)] \quad (1-13)$$

Заметим, что в полученной сумме элементы с коэффициентом 4 соответствуют нечетным точкам, а элементы с коэффициентом 2 – четным точкам.

При вычислении интеграла по Симпсону число точек обычно задается заранее, но может быть и изменено в процессе вычислений, если не обеспечивается заданная точность. Программы, в которых число точек изменяется в зависимости от точности вычислений, носят название программ с автоматическим выбором шага.

Метод трапеций и метод Симпсона используют множество равноотстоящих узловых точек для построения некоторого интерполяционного выражения, интегрирование которого и обеспечивает вычисление интеграла. Так, в формуле трапеций подынтегральная функция заменяется в пределах каждого отрезка линейной, а на всем интервале – кусочно-линейной функцией. Формула Симпсона использует квадратичное приближение, когда площадь криволинейной трапеции заменяется суммой площадей параболических трапеций. Очевидно, имея в распоряжении набор точек, можно построить полином более высокой степени. Но при этом возрастает число требуемых узловых точек, и формулы становятся громоздкими. Вообще же выбор формулы для интегрирования определяется классом функций. Может оказаться, что формула более высокого порядка приведет к большим ошибкам. Например, при интегрировании линейных функций максимальная точность будет достигнута при использовании формулы трапеций. Формулы для построения многочленов произвольной степени при наличии равноотстоящих узлов известны в литературе как формулы Ньютона-Котеса. Представленные выше формулы являются частным случаем формул Ньютона-Котеса.

Метод Гаусса основан на том, что вычисление интеграла как площади, ограниченной подынтегральной функцией, может быть выполнено с более

высокой точностью, если выбор местоположения узловых точек производить исходя из минимума отклонений между интегралом и площадью, ограниченной аппроксимирующей зависимостью. В отличие от методов трапеций и Симпсона здесь при выводе формул полагается, что определению подлежат как коэффициенты аппроксимирующей зависимости, так и положение узловых точек. Заранее фиксируется, например, только степень полинома, для которого формула будет давать точное решение.

Рассмотрим порядок вывода формулы Гаусса на примере двух узловых точек. При наличии двух точек формула трапеций дает точное решение для подынтегральных функций, представляющих собой многочлены первой степени. Однако формула Гаусса при соответствующем выборе этих точек позволяет получить точный результат и для многочлена третьего порядка, поскольку аппроксимирующая зависимость имеет четыре независимых параметра.

Пусть функция $f(x)$ интегрируется на интервале $(-1, 1)$. Интеграл $(-1, 1)$ выбран исходя из удобства рассуждений, и не ограничивает общности формул, поскольку для перехода от произвольного интервала (a, b) к интервалу $(-1, 1)$ достаточно воспользоваться заменой переменных $y = \frac{1}{2}(b - a)x + \frac{1}{2}(b + a)$, где x - новая переменная.

Для двух узловых точек можно записать

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) \quad (1-14)$$

где A_1, A_2, x_1, x_2 - неизвестные величины.

Поскольку формула (1-14) имеет четыре параметра, то наивысшая степень полинома, для которого можно вычислить точное значение интеграла, будет равна $2n - 1$ (n - число узловых точек).

В рассматриваемом случае коэффициенты A_1, A_2 и положение узловых точек x_1, x_2 определяются решением системы уравнений, которая получается при подстановке $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ в правую и левую части уравнения (1-14)

$$\begin{aligned} 2 &= A_1 + A_2 \\ 0 &= A_1 x_1 + A_2 x_2, \\ \frac{1}{3} &= A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 \\ 0 &= A_1 x_1^3 + A_2 x_2^3 \end{aligned} \quad (1-15)$$

Система (1-15) может быть решена аналитически, в результате чего получим

$$A_1 = A_2 = 1 \text{ и } x_1 = -3^{-1/2}; \quad x_2 = 3^{-1/2}.$$

Таким образом, уравнение (1-14) запишется в виде

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad (1-16)$$

Аналогично можно получить формулу Гаусса для трех узловых точек ($n = 3$)

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{9} \left[5 f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8 f(0) + 5 f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \right] \quad (1-17)$$

В зависимости от числа узловых точек изменяется степень полинома, для которого формула даст точное значение интеграла, так как при добавлении одной точки его степень увеличивается на два.

Формулы Гаусса для произвольного числа m узловых точек имеют вид

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^m A_k f(x_k) \quad (1-18)$$

Как и ранее, неизвестные A_k, x_k могут быть определены решением системы нелинейных уравнений аналитически или численными методами. Однако коэффициенты могут быть вычислены исходя из других соображений значительно проще. Оказывается, что местоположения узловых точек, т.е. значения x_k , является корнями полиномов Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], \quad (1-19)$$

В этом случае решение системы линейных уравнений для определения коэффициентов A_k выполняется проще, поскольку значения корней полиномов Лежандра могут быть заранее протабулированы для различных значений n . Например, при наличии четырёх узловых точек корни полинома

$$P_4(x) = \frac{1}{8} [35x^4 - 30x^2 + 3] = 0 \quad \text{равны}$$

$$x_{1,4} = \pm 0,8611363116 \quad , \quad x_{2,3} = \pm 0,3399810436 \quad .$$

Коэффициенты A_i можно также найти из соотношения

$$A_i = \frac{2}{(1 - x_i^2) P_n'(x_i)^2}$$

для каждого n , т.е. могут быть также протабулированы.

Формулы Гаусса весьма эффективны при вычислении интеграла по немногим узловым точкам при условии, что функция может быть хорошо аппроксимирована многочленом. Их недостатком является то, что при изменении числа узловых точек изменяются коэффициенты аппроксимирующей зависимости, т.е. изменяется все уравнение, и решение не может быть продолжено простым добавлением точек.

Вычисление кратного интеграла связано с интегрированием функции нескольких переменных, заданной в некоторой области, ограниченной в общем случае криволинейными поверхностями. Существует большое число методов вычисления кратных интегралов, которые обычно аналогичны

методам вычисления однократных интегралов. Так же как и для однократного интеграла, кратный интеграл заменяется линейной комбинацией значений интегрируемой функции в конечном числе точек. Отличие заключается в том, что область интегрирования является совокупностью точек n -мерного пространства, где n - кратность интеграла. Например, при вычислении двойного интеграла областью интегрирования будет часть плоскости, ограниченной пределами интегрирования по двум измерениям. При вычислении кратных интегралов используется те же формулы, что были рассмотрены для однократных интегралов, только примененные по каждой из переменных подынтегральной функции. Разнообразие методов объясняется тем, что по тем или иным соображениям по разным переменным могут быть использованы различные формулы.

Простейшими формулами вычисления кратных интегралов являются формулы интегрирования в прямоугольной области, т.е. при фиксированных значениях пределов интегрирования по каждой из переменных. Однако эти формулы могут быть использованы и для интегрирования в произвольной области, если вписать область в прямоугольник, а при суммировании точек не учитывать точки, не принадлежащие допустимой области. Другим способом применения таких формул является способ, при котором криволинейная область интегрирования делится на ряд прямоугольников, наилучшим образом вписываемых в исходную область, а интеграл подсчитывается как сумма интегралов по отдельным прямоугольникам. Следует заметить, что оценка точности формул вычисления кратных интегралов еще более затруднительна и чаще всего при машинном интегрировании производится путем вычисления интеграла по различным формулам с последующим сравнением полученных значений.

В качестве примера рассмотрим порядок получения формулы вычисления двойного интеграла в прямоугольные области, дважды используя формулу трапеций.

Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой прямоугольной области $P [a \leq x \leq b, c \leq y \leq d]$ (рис. 6). Положим, что каждый из отрезков (a, b) и (c, d) делится на n отрезков меньшей длины, так что $h = (b - a) / n$ и $k = (d - c) / n$. Воспользовавшись формулой трапеций (1-8),

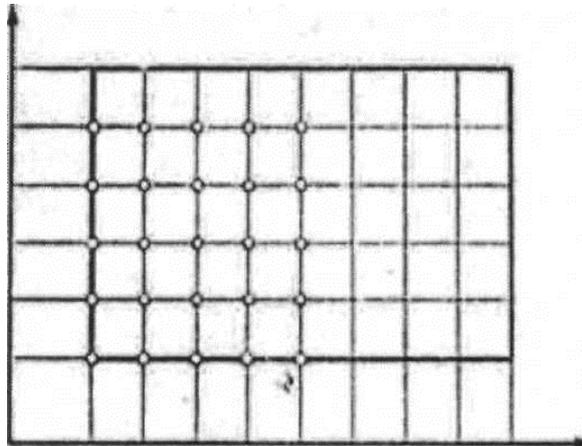


Рис. 6

вычислим интеграл:

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} f(x, y) dy \quad (1-20)$$

Для этого дважды применим формулу трапеций по каждой из переменных.

Для внутреннего интеграла можно записать:

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} f(x, y) dy = \int_{x_0}^{x_1} dx \frac{h}{2} [f(x, y_0) + f(x, y_1)] = \frac{h}{2} \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_0) dx + \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1) dx$$

К каждому из интегралов применим снова формулу трапеций:

$$\int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} f(x, y) dx dy = \frac{hk}{4} [f(x_0, y_0) + f(x_1, y_0) + f(x_0, y_1) + f(x_1, y_1)]$$

Формула для вычисления двойного интеграла во всей области интегрирования может быть записана соответственно:

$$\int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} f(x, y) dx dy = \frac{hk}{4} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} [f(x_i, y_j) + f(x_i, y_{j+1}) + f(x_{i+1}, y_j) + f(x_{i+1}, y_{j+1})]$$

(1-21)

Аналогично могут быть получены и любые другие формулы для вычисления, как двойного интеграла, так и интегралов более высокого порядка.

§ 2. АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ФОРМУЛ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Любая формула интегрирования позволяет вычислить лишь приближенное значение интеграла. Поэтому можно записать, что

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^m A_i f(x_i) + R \quad (2-1)$$

где R - погрешность используемой формулы интегрирования. Очевидно, ошибка формулы зависит от величины шага интегрирования (от числа узловых точек), а также от класса подынтегральной функции. Чем меньше шаг интегрирования, тем меньше ошибка. Погрешность формулы целесообразно оценивать, используя следующую более высокую степень подынтегральной функции, чем та, для которой она дает точное значение интеграла. Например, для формул прямоугольников и трапеций это будет функция вида $y = x^2$, для формул Симпсона и Гаусса – $y = x^4$. При вычислении интеграла на отрезке $(0, 1)$ от указанных функций ошибка формул будет соответственно:

формула прямоугольников с выбором узловой точки в середине интеграла

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} = f\left(\frac{1}{2}\right) + R, \quad R = 1/12 \quad (2.2)$$

формула трапеций

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} [f(0) + f(1)] + R, \quad R = 1/6$$

формула Симпсона

$$\int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5} = \frac{1}{6} \left[f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) \right] + R, \quad R = \frac{1}{120}$$

формула Гаусса с двумя узловыми точками

$$\int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5} = \frac{1}{2} [f(0,2113) + f(0,7887)] + R, \quad R = 0,000546 \quad (2.3)$$

Эта приближенная оценка позволяет сделать заключение о сравнительно высокой точности формул с оптимальным выбором узловых точек – формул Гауссовского типа. Несмотря на то, что формула Симпсона фактически использована с тремя узловыми точками, ее погрешность все же существенно выше.

Методы, представленные выше, являются наиболее распространенными в практике как ручных, так и машинных вычислений. При расчетах вручную предпочтение, как правило, отдается наиболее простым методам, а именно методу трапеций и методу Симпсона. При машинных расчетах чаще всего используются методы Симпсона и Гаусса.

Точность вычисления интеграла обычно задается заранее, поэтому в программах предусматриваются меры по её обеспечению. Например, вычисление интеграла при различном числе узловых точек или различных шагах интегрирования, т.е. шаг интегрирования, уменьшается до тех пор, пока два последующих решения отличаются по величину, превышающую заданную точность. Изменение шага интегрирования обычно производится автоматически в программе.

Если подынтегральная функция имеет относительно простой вид и не требует большого объема вычислений, то выбор того или иного метода численного интегрирования не имеет принципиального значения, поскольку необходимая точность всегда может быть обеспечена увеличением числа узловых точек.

Если же вычисление подынтегральной функции трудоемко, то выбор метода интегрирования может оказать существенное влияние на общее быстродействие программы. При одинаковом числе узловых точек один и тот же интеграл по различным формулам будет вычислен с различной точностью. Например, если функция имеет непрерывные высшие

производные, то анализ ошибок позволяет разместить формулы по точности в следующем порядке: метод Гаусса, метод Симпсона, метод прямоугольников, метод трапеций.

При вычислении интеграла $\int_0^{\pi} \sin(x) dx$ метод Гаусса с шестью

узловыми точками обеспечивает точность порядка 10^{-10} , в то время как метод Симпсона при равных условиях – 10^{-4} . Чтобы получить точность 10^{-10} по формуле Симпсона, необходимо проделать работу, в 80 раз большую по сравнению с методом Гаусса. Указанная оценка точности не может быть принята абсолютно, тем не менее, в большинстве практических случаев оказывается, что при интегрировании аналитических функций формулы Гаусса обеспечивают более высокую точность.

При выборе метода следует еще иметь в виду, что если функция задана таблично, то в редких случаях можно прямо воспользоваться гауссовскими формулами, поскольку узловые точки этих обычно более удобны, в особенности, если функция табулирована в равноотстоящих узлах. Аппроксимация же табличных зависимостей для метода Гаусса может привести к дополнительным ошибкам.

§ 3. ПРИМЕНЕНИЕ РАЗРАБОТАННОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ ПРОВЕРКИ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЙ СОВМЕСТИМОСТИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ ПО ПАРОЖИДКОСТНОМУ РАВНОВЕСИЮ

Опытные данные по парожидкостному равновесию могут содержать различного рода погрешности вследствие некорректности методики и т.п. Поэтому прежде чем использовать такие данные в дальнейших расчётах, необходимо каким-либо образом убедиться в их достоверности.

Одним из способов проверки экспериментальных данных по парожидкостному равновесию является проверка их на термодинамическую совместимость, т.е. удовлетворение термодинамических соотношений равновесных систем.

Состояние равновесной системы при постоянном давлении и температуре описывается уравнениями Гиббса-Дюгема .

$$\sum_{k=1}^n x_k d \ln \gamma_k = 0 \quad (3.1)$$

где n - число компонентой системы; x - концентрация компонентов в жидкой фазе; γ - коэффициент активности компонента.

Коэффициенты активности отдельных компонентов вычисляются по следующим соотношениям:

$$\gamma_i = \frac{y_i P}{x_i P_i^0}, \quad (3.2)$$

где P - давление системы, *атм.* y - концентрация компонентов в паровой фазе; P^0 - давление пара чистых компонентов, *атм.* Можно показать, что при интегрировании уравнения (3.1), записанного для бинарной системы, по всему диапазону изменения концентраций жидкой фазы должно выполняться условие:

$$\int_0^1 \ln \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 0 \quad (3.3)$$

или для произвольного интервала изменения концентраций

$$\int_{x_1^{(0)}}^{x_1^{(1)}} x_1 d \ln \gamma_1 + \int_{x_1^{(0)}}^{x_1^{(1)}} x_2 d \ln \gamma_2 = c = const . \quad (3.4)$$

Соотношение (3.4) является необходимым условием термодинамической совместимости экспериментальных данных по равновесию в бинарных системах.

Достаточное условие можно получить, если при вычислении интеграла (3.1) учесть погрешность в определении концентраций, давления и температуры.

Интегрирование уравнения (3.4) при наличии экспериментальных значений $x_{1,i}, x_{2,i}, \gamma_{1,i}, \gamma_{2,i}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$ — число точек измерения) удобно производить по методу трапеций. Тогда для двух прилежащих точек можно записать:

$$\delta_{i-1,i} = (x_i - x_{i-1}) \ln \frac{\gamma_{1,i}}{\gamma_{1,i-1}} + (2 - x_i - x_{i-1}) \ln \frac{\gamma_{2,i}}{\gamma_{2,i-1}} \quad (3.5)$$

где $\delta_{i-1,i}$ — функция ошибки эксперимента в точках x_{i-1}, x_i .

Выражение для максимально возможной ошибки эксперимента имеет вид:

$$\begin{aligned}
|D_{\max i-1,i}| = & \left((x_i + x_{i+1}) \left(\frac{1}{x_{i-1}} + \frac{1}{x_i} + \frac{1}{y_i} + \frac{1}{y_{i-1}} \right) + (2 - x_i - x_i) \right. \\
& \left(\frac{1}{1 - x_{i-1}} + \frac{1}{1 - x_i} + \frac{1}{1 - y_{i-1}} + \frac{1}{1 - y_i} \right) + \left(\left| 21n \frac{\gamma_{1,i}}{\gamma_{1,i-1}} \right| + 2 \left| 1n \frac{\gamma_{2,i}}{\gamma_{2,i-1}} \right| \right) \\
& F(y) + 2 \left(\frac{1}{P_i^0} + \frac{1}{P_{i-1}^0} \right) F(P) + (x_i + x_{i-1}) \left(2 \left| \frac{1nP_{1,i}^0}{T_i - T_{i-1}} \right| \right) + \\
& + (2 - x_i - x_{i-1}) \left(2 \left| \frac{1nP_{2,i}^0}{T_i - T_{i-1}} \right| \right) \left. \right) F(T)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

где $F(y)$, $F(p)$, $F(T)$ — погрешность эксперимента в определении составов, давления и температуры соответственно.

Условием достоверности экспериментальных данных является выполнение для всех прилежащих пар точек соотношения:

$$|\delta_{i-1,i}| \leq |D_{\max i-1,i}| \tag{3.7}$$

Программа, предназначенная для проверки термодинамической совместимости бинарных равновесных данных с использованием соотношений (3.4), (3.5), (3.6), представлена в конце работы. Исходными данными для расчета являются: N — число экспериментальных точек; x , y , T — массивы составов жидкой и паровой фаз и температуры; AN — коэффициенты уравнения для расчета давления пара чистого компонента при заданной температуре; EX , EP , ET — погрешность в определении концентрации, давления и температуры; P — давление системы для заданных значений X и Y .

В процессе выполнения программы рассчитываются активность компонентов по уравнениям (3.2) значения интегралов I_1 и I_2 для каждой пары точек по формулам:

$$I_1 = x_i + x_{i-1} \ln \frac{\gamma_{1,i}}{\gamma_{1,i-1}}, \quad I_2 = 2 - x_i - x_{i-1} \ln \frac{\gamma_{2,i}}{\gamma_{2,i-1}}$$

величина S по уравнению (3.4) и D_{max} по уравнению (3.6).

Полученные значения для каждой пары точек выводятся на печать.

В конце программы представлен пример расчета системы хлороформ — этанол. В качестве исходных использовались следующие данные:

$P = 1 \text{ атм}$			<i>Хлороформ</i>			<i>Этанол</i>		
$EX = 0,001$			$AN_1 = 1459,496$			$AN_1 = 234,5656$		
$EP = 0,001$			$AN_2 = -45325,25$			$AN_2 = -11974,98$		
$ET = 0,1$			$AN_3 = 0,3720708$			$AN_3 = 0,04804228$		
$N = 14$			$AN_4 = -249,19$			$AN_4 = -37,08189$		
X	Y	$T^\circ C$	X	Y	$T^\circ C$	X	Y	$T^\circ C$
0,075	0,203	74,6	0,382	0,645	63,6	0,807	0,823	59,25
0,156	0,375	70,95	0,506	0,707	61,5	0,831	0,834	59,2
0,204	0,459	68,85	0,633	0,752	60,15	0,895	0,872	59,55
0,23	0,499	67,9	0,693	0,77	59,75	0,95	0,95	60,5
0,265	0,533	66,9						
0,295	0,569	65,9						

§-4. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ИЗГИБА ПЛАСТИНКИ ПРИ ПОМОЩИ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Для иллюстрации метода Ритца – Тимошенко рассмотрим изгиб прямоугольной пластинки, шарнирно опертой по контуру и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой (рис. 7). Приближенное выражение функции прогибов выбираем в виде ряда:

$$W_{mn} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m a_{kl} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} \quad (a)$$

где функции

$$\varphi_{kl} = \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b}$$

удовлетворяют всем граничным условиям шарнирного описания пластинки – и геометрическим и статическим.

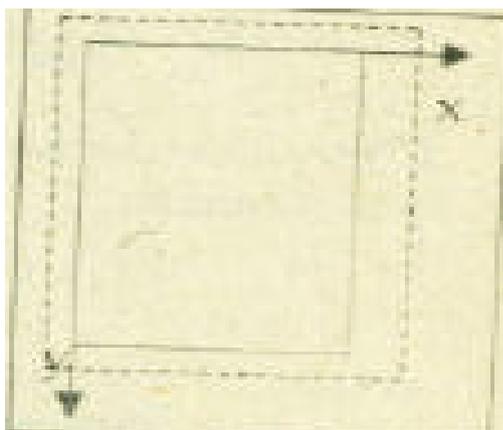


Рис.7

Для определения коэффициентов ряда a_{kc} подсчитаем потенциальную энергию системы. Потенциальная энергия U , накапливается при изгибе

прямоугольной шарнирно опертой по контуру пластинки, может быть определена по формуле.

$$U = \frac{D}{2} \iint_s (\Delta^2 W)^2 dx dy$$

Подсчитаем оператор Лапласа над функцией $W_{mn}(x, y)$:

$$\Delta^2 W_{mn} = \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial y^2} = -\pi^2 \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b},$$

и подставим это выражение в формулу

$$U = \frac{\pi^2 D}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} \right] dx dy \quad (б)$$

Возведение в квадрат двойного ряда, стоящего под интегралом в квадратных скобках, равносильно перемножению двух многочленов, где каждый член первого ряда умножается на каждый член второго ряда. Чтобы отличить члены одного ряда от членов другого ряда, в одном из них индексы R и L заменим соответственно на c и d . Тогда выражение, стоящее в квадратных скобках под интегралом в формуле (б), сведется к следующему ряду:

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} \right]^2 = \left[\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} \right] \times \\ & \times \left[\sum_{c=1}^m \sum_{d=1}^n a_{cd} \left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{d^2}{b^2} \right) \sin \frac{c\pi x}{a} \sin \frac{d\pi y}{b} \right] = \left[\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \sum_{c=1}^m \sum_{d=1}^n a_{kl} a_{cd} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right) \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{d^2}{b^2} \right) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} \sin \frac{c\pi x}{a} \sin \frac{d\pi y}{b} \right] \end{aligned}$$

Подставим это выражение в формулу (б). Меняя порядок интегрирования и суммирования и вынося постоянные величины за знак интеграла, получаем:

$$U = \frac{\pi^2 D}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \sum_{c=1}^m \sum_{d=1}^n a_{kl} a_{cd} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right) \left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{d^2}{b^2} \right) \int_0^a \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{c\pi y}{b} \int_0^a \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{d\pi y}{b} dy dx \quad (\text{в})$$

Подсчитаем входящие сюда интегралы. Первый из них равен:

$$\int_0^a \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{c\pi y}{b} dx = \begin{cases} = 0, & \text{àãàð} \quad k \neq c \\ = 0, & \text{àãàð} \quad k = c \end{cases}$$

Следовательно, рассматриваемый интеграл отличен от нуля только при $k = c$; этот интеграл равен

$$\int_0^a \sin \frac{k\pi x}{a} dx = \frac{a}{2}$$

Рассматривая второй интеграл в формуле (в), аналогично первому получаем:

$$\int_0^a \sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{d\pi y}{b} dy = \begin{cases} 0, & \text{àãàð} \quad l \neq d \\ \frac{d}{2}, & \text{àãàð} \quad l = d \end{cases} \quad (\text{г})$$

Подставляя полученные значения интегралов и (г) формулу (в) и учитывая, что они отличны от нуля только при значениях индексов суммирования $c = k$ и $d = l$, находим:

$$U = \frac{\pi^4 Dab}{8} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl}^2 \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right)^2$$

Работу внешних сил при изгибе пластинки под действием поперечной нагрузки можно подсчитать по формуле. Подставим в эту формулу функцию прогибов W_{mn} (а) и учтем, что $q = const$:

$$A = q \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl} \int_0^a \sin \frac{k\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{l\pi y}{b} dy$$

Интегрируя, получаем:

$$A = \frac{4qab}{\pi^2} \sum_k \sum_l \frac{a_{kl}}{kl} \quad \left(\begin{array}{l} k = 1,3,5,\dots, m \\ l = 1,3,5,\dots, n \end{array} \right) \quad (д)$$

Подставим соотношения и (д) в формулу, сохраняя в том и другом ряду только члены, содержащие нечетные индексы k и L (четные индексы $a_{kl} = 0$);

дадут значения коэффициентов

$$\dot{Y} = \sum_k \sum_l \left[\frac{\pi^4 Dab}{8} a_{kl}^2 \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right)^2 - \frac{4qab}{\pi^2} \frac{a_{kl}}{kl} \right] \quad (k = 1,3,5,\dots, m \quad l = 1,3,5,\dots, n)$$

Коэффициенты a_{kl} нужно выбирать так, чтобы потенциальная энергия системы имела минимум, а значит должны выполняться условия. Вычисляя производные полученной функции \dot{Y} по a_{kl} и приравняв их нулю, находим:

$$\frac{\partial \dot{Y}}{\partial a_{kl}} = \frac{\pi^4 Dab}{8} 2 a_{kl} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right)^2 - \frac{4qab}{\pi^2} \frac{l}{kl} = 0. \quad (k = 1,3,5,\dots, m \quad l = 1,3,5,\dots, n)$$

После деления на величину ab , получаем следующую систему уравнений для определения постоянных a_{kl} .

$$\frac{\pi^4 D}{4} a_{kl} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right)^2 - \frac{4qab}{\pi^2 kl} = 0; \quad (k = 1,3,5,\dots, m \quad l = 1,3,5,\dots, n)$$

откуда находим значения постоянных коэффициентов ряда (а):

$$a_{kl} = \frac{16 q}{\pi^6 D k l \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right)^2}; \quad (k = 1, 3, 5, \dots, m \quad l = 1, 3, 5, \dots, n)$$

Подставим эти коэффициенты в уравнение прогибов (а) и вынесем за знак суммы постоянный множитель a^4 .

$$W_{mn} = \frac{16 q a^4}{\pi^6 D} \sum_k \sum_l \frac{\sin \frac{k \pi x}{a} \sin \frac{l \pi y}{b}}{k l \left(k + \frac{a^2}{b^2} l^2 \right)^2} \quad (e)$$

$(k = 1, 3, 5, \dots, m \quad l = 1, 3, 5, \dots, n)$

Если в формуле (е) взять бесконечно большое число членов, т.е. положить $m = n = \infty$, то получим решение задачи, совпадающее с точным.

Возьмем приближенное решение, ограничиваясь одним членом ряда. Тогда из формулы (е) имеем:

$$W_{11} = \frac{16 q a^4}{\pi^6 D} \frac{\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}}{\left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \quad (ж)$$

Максимальный прогиб возникает в центре пластинки при

$x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{b}{2}$, где он равен:

$$\max W_{11} = \frac{16 q a^4}{\pi^6 D} \frac{1}{\left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2}$$

В случае квадратной пластинки, когда $\frac{a}{b} = 1$, максимальный прогиб равен:

$$\max W_{11} = \frac{4 q a^4}{\pi^6 D}$$

Подставляя в это соотношение выражение цилиндрической жесткости D из формулы и принимая коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, находим:

$$\max W_{11} = \frac{4qa^4}{\pi^6 Eh^3} 12(1 - \nu^2) = 0,0455 \frac{qa^4}{Eh^3}$$

Это приближение отличается от точного, равного

$$\max W = 0,0443 \frac{4qa^4}{Eh^3}$$

Всего на 2,7 %.

Погонные изгибающие моменты найдем по формулам. Подставляя в эти формулы функцию прогибов в первом приближении (ж), получаем:

$$M_x = \frac{16qa}{\pi^4} \frac{1 + \nu \frac{a^2}{b^2}}{\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b};$$

$$M_y = \frac{16qa}{\pi^4} \frac{\frac{a^2}{b^2}}{\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

Максимальные изгибающие моменты возникают в центре пластинки

при $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$, где они равны:

$$\max M_x = \frac{16qa^2}{\pi^4} \frac{1 + \nu \frac{a^2}{b^2}}{\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2};$$

$$\max M_y = \frac{16qa^2}{\pi^4} \frac{\frac{a^2}{b^2} + \nu}{\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2}.$$

В случае квадратной пластинки, т.е. при отношении сторон $\frac{a}{b} = 1$, находим:

$$\max M_x = \max M_y = \frac{4qa^2}{\pi^4}(1 + \nu) = 0,0535 qa^2$$

Точное значение максимальных изгибающих моментов для квадратной пластинки, приводимое в справочниках, равно:

$$\max M = 0,0479 qa^2$$

Следовательно, максимальный изгибающий момент для квадратной пластинки, подсчитанный в первом приближении, отличается от точного значения на 11,7 %. Поэтому при вычислении изгибающих моментов в рассматриваемой пластинке следует брать ещё несколько членов ряда. Ещё менее точный результат получается при вычислении в первом приближении погонных поперечных сил.

Решения задачи методом Бубнова – Галёркина

Для иллюстрации метода Бубнова – Галёркина рассмотрим изгиб прямоугольной пластинки, защемленной по контуру и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой. Расположение координатных осей показано на рис.

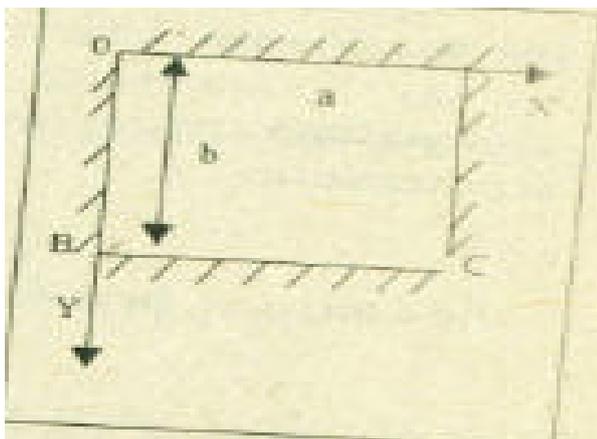


Рис.8

Из характера закрепления пластинки вытекают следующие граничные условия. На гранях пластинки OB и AC

$$\left. \begin{array}{l} x = 0, \quad x = a, \quad \text{закрепленные} \quad \text{свободные} \quad w = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \\ \text{OA} \quad \text{и} \quad \text{BC} \\ y = 0, \quad y = b, \quad \text{закрепленные} \quad \text{свободные} \quad w = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = 0 \end{array} \right\}$$

Чтобы удовлетворить этим условиям, приближенное выражение функции прогибов можно выбирать в виде такого ряда:

$$W_{mn} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl} \left(1 - \cos \frac{2k\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2l\pi y}{b}\right)$$

где

$$\varphi_{kl} = \left(1 - \cos \frac{2k\pi y}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2l\pi x}{b}\right)$$

Каждого члена ряда удовлетворяет всем граничным условиям.

Так, на грани OB $\cos \frac{2k\pi y}{a} /_{x=0} = \cos 0 = 1$

и, следовательно, $W_{mn} = 0$. На грани AC

$$\cos \frac{2k\pi x}{a} /_{x=a} = \cos 2k\pi = 1,$$

и тоже $W_{mm} = 0$. Точно так же выполняются условия для прогибов на гранях OA и BC .

Для проверки граничных условий – равенство нулю углов поворота на контуре пластинки – вычисляем производные от функции прогибов W_{mn} по x и y :

$$\frac{\partial W_{mn}}{\partial x} = \frac{2\pi}{a} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl} k \sin \frac{2k\pi x}{a} (1 - \cos \frac{2l\pi y}{b})$$

$$\frac{\partial W_{mn}}{\partial y} = \frac{2\pi}{b} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl} l (1 - \cos) \frac{2k\pi x}{a} (\sin \frac{2l\pi y}{b})$$

На грани OB

$$\sin \frac{2k\pi x}{a} /_{x=0} = \sin 0 = 0$$

и, следовательно, производная $\frac{\partial w_{mn}}{\partial x} = 0$. Точно так же на грани AC

$$\sin \frac{2k\pi x}{a} /_{x=0} = \sin 2k\pi = 0$$

и производная $\frac{\partial w_{mn}}{\partial x} = 0$. Аналогично на гранях OA и BC обращается в

нуль производная $\frac{\partial w_{mn}}{\partial x} = 0$. Таким образом, функция прогибов удовлетворяет всем граничным условиям закрепления пластинки и.

Для отыскания неопределенных параметров a_{kl} нужно составить систему уравнений Бубнова – Галёркина. В первом приближении ограничимся одним членом ряда :

$$W_{11} = a_{11} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right)$$

Тогда функция φ_{kl} для этого члена ряда будет

$$\varphi_{11} = \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right)$$

Подставляя соотношения и в уравнения, получаем:

$$\int_0^a \int_0^b \left\{ -16 \pi^4 a_{11} D \left[\frac{1}{a^4} \cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) - \frac{2}{a^2 b^2} \cos \frac{2\pi x}{a} \frac{2\pi y}{b} + \frac{1}{b^4} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \cos \frac{2\pi y}{b} \right] - q \right\} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(-\cos \frac{2\pi y}{b}\right) dx dy = 0$$

и после преобразования приходим к сумме произведений интегралов:

$$\begin{aligned} & -16 \pi^4 a_{11} D \left[\frac{1}{a^4} \int_0^a \left(\cos \frac{2\pi x}{a} - \cos^2 \frac{2\pi x}{a} \right) dx \int_0^b \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} + \cos^2 \frac{2\pi y}{b} \right) dy \right. \\ & \frac{2}{a^2 b^2} \int_0^a \left(\cos \frac{2\pi x}{a} - \cos^2 \frac{2\pi x}{a} \right) dx \int_0^b \left(\cos \frac{2\pi y}{b} - \cos^2 \frac{2\pi y}{b} \right) dy + \frac{1}{b^4} \times \\ & \left. \times \int_0^a \left(1 - 2 \cos \frac{2\pi x}{a} + \cos^2 \frac{2\pi x}{a} \right) dx \int_0^b \left(\cos \frac{2\pi y}{b} + \cos^2 \frac{2\pi y}{b} \right) dy \right] - \\ & - q \int_0^a \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) dx \int_0^b \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right) dy = 0 \end{aligned}$$

После интегрирования получаем:

$$-16 \pi^4 a_{11} D \left[\frac{1}{a^4} \left(-\frac{a}{2}\right) \left(b + \frac{b}{2}\right) - \frac{2}{a^2 b^2} \left(-\frac{a}{2}\right) \left(-\frac{b}{2}\right) + \frac{1}{b^4} \left(a + \frac{a}{2}\right) \left(-\frac{b}{2}\right) - qab = 0 \right]$$

или после упрощения

$$-16 \pi^4 a_{11} D \left(\frac{3b}{4a^3} + \frac{1}{2ab} + \frac{3a}{4b^3} \right) - qab = 0$$

откуда коэффициент

$$a_{11} = \frac{qa^4}{4\pi^4 D} \frac{1}{3 + 2 \frac{a^2}{b^2} + 3 \frac{a^4}{b^4}};$$

Внося полученной коэффициент в формулу, получаем функцию прогибов в первом приближении:

$$W_{11} = \frac{qa^4}{4\pi^4 D} \frac{(1 - \cos \frac{2\pi x}{a})(1 - \cos \frac{2\pi y}{b})}{3 + 2 \frac{a^2}{b^2} + 3 \frac{a^4}{b^4}}$$

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{b}{2}.$$

Максимальный прогиб возникает в центре пластинки при

Для квадратной пластинки при $\frac{a}{b} = 1$, принимая коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, найдем следующее значение максимального прогиба:

$$\max W_{11} = \frac{qa^4}{8\pi^6 D} = \frac{qa^4}{8\pi^4 Eh^3} 12(1 - \nu^2) = 0,0140 \frac{qa^4}{Eh^3}$$

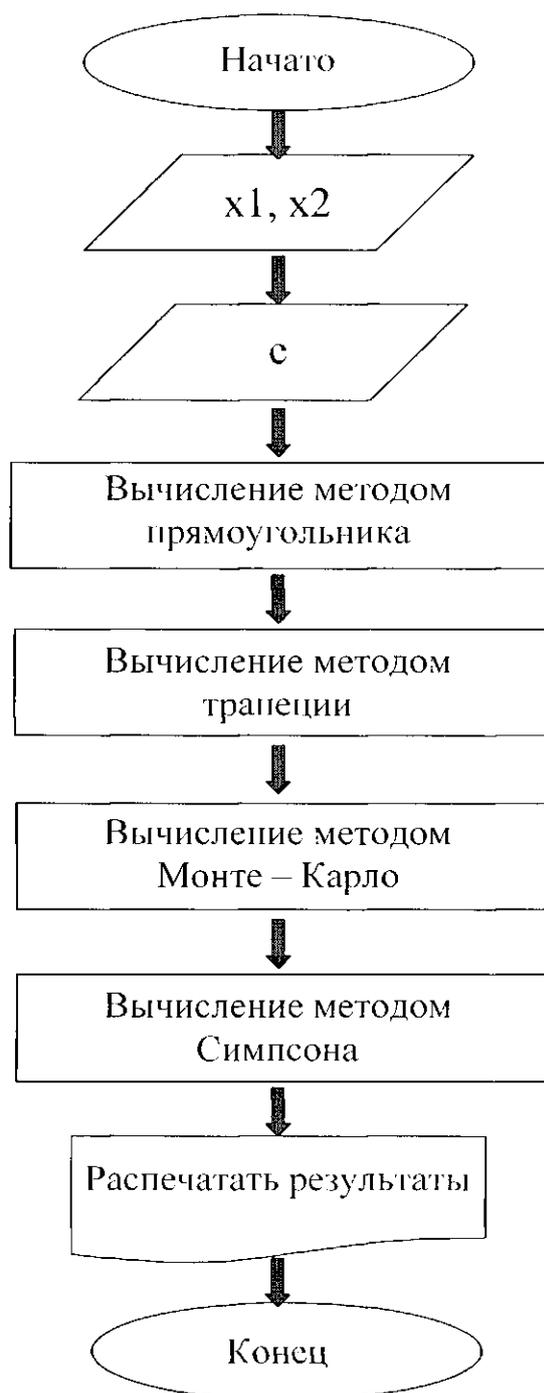
Точное значение максимального прогиба в квадратной пластинке, защемленной по контуру и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой, равно:

$$\max W = 0,0138 \frac{qa^4}{Eh^3}$$

Таким образом, полученное первое приближение для максимального прогиба отличается от точного менее чем на 1,5%.

При вычислении изгибающих моментов и поперечных сил ряды сходятся значительно хуже.

Блок – схема решения задач.



Программирование сделанное на языке Borland Delphi 6 программы.

1. Создаем проект
2. Первую форму называем Asosiy

3. В форме frmAsosiy создадим 2 Label и 1 Label назовем Label и в свойство "Способы вычисления точного интеграла" запишем. 2 - Label а назовем Label 2 и свойство Caption запишем. С помощью методов прямой четырехугольник, трапеция, Мойте - Карло, Симпсон точный вычисление интеграла.

4. В форме создадим 2 Button а и название свойство Caption запишем "OK" и "Cancel".

5. Запишем в код 1 Button а form2.show и в код 1 Button а form1.Close.

```
Procedure TForm1.Button2Click(Sender: TObject);
```

```
begin
```

```
form1. Close;
```

```
end;
```

```
procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
```

```
begin
```

```
form2.show
```

```
end;
```

6. Создаем вторую форму. Называем её Hisoblash и помещаем в неё 4 та Label, 2 та Edit, 2 та Button, 1 та ComboBox.

7. В форме Create вписывать ниже указанные коды.

```
Procedure TForm2.FormCreate(Sender: TObject);
```

```
Begin
```

```
Combobox1 .Items. Add( '0,1');
```

```
Combobox1. Items. Add('0,01');
```

```
Combobox1.Items.Add('0,001');
```

```
Combobox1.Items.Add('0,0001');
```

```
Combobox1 .Items.Add('0,00001');
```

```
Combobox1.Items.Add('0,000001');
```

```

Combobox1.Items.Add('0,0000001');
Combobox1.Items.Add('0,00000001');
End;

```

8. Для полной работы перемещающихся выделяем их.

```

var
  k, p, s, g, m, x, Integral: real;
  dx, x1, x2, e, i, ii: real;
  a, b: real;
  r, r2: real; n, j:
  integer;

```

9. В Button 1 вписывать ниже указанные.

```

Procedure TForm2.Button1Click(Sender: TObject);
var
  xx1, xxx1, xx2, xxx2, xx3, xxx3: real;
  c: Longint;
  mal: string;
begin
  mal: = "";
  x1: strtofloat(edit1.text);
  x2: strtofloat(edit2.text);
  e: stroffloat(combobox1.text);
  mal: mal+'Iteratsiyalar soni: '+inttostr(round(abs(x2-x 1)/e))+# 13;
  i:=0;
  ii:=0;
  for c:=1 to round(abs(x2-x1)/e) do
  begin
    xx1:= Fx(x1+c*e);
    xxx1:= Fx(x1+c*e);

```

```

xx2:= Fx(x1+c*e*e);
xxx2:= Fx(x1+c*e*e);
i:= i+abs(xx1+xx2)/2*e;
if xxx2>xxx1 then xxx3:=xxx1 else xxx3:=xxx2;
ii :=ii+abs(xxx2-xxx 1 )* e+abs(xxx3 )* e;
end;
mal:=mal+'To'g'ri to'rtburchaklar usuli bo'yicha'+#13+' ntegral='+floattostr(i)+#13;
mal:=mal+'Trapetsiyalar usuli bo'yicha'+#13+' Integral='+floattostr(ii)+#13;

a:=x1;
b:=x2;
n:=3;
r:=simpson(a,b,n);
repeat
  r2:=r;
  n:=n+2;
  r:=simpson(a,b,n);
until (abs(r-r2)<e);
mal:=mal+'Simpsonmetodi bo'yicha:'+#13+' Integral='+floattostr(r)+#13;
s:=0;
randomize;
m:=(b-a)/e;
k:=b-a;
n:=trunk(m);
for j:=1 to n do
begin
g:=random;
x:=a+g*(b-a);
s:=s+Fx(x)
//sqrt(1.5*x+0,6)/(1.6+sqrt(0.8*x*x+2));

```

```

//delay(10000);

End;
Integral:=( 1 /n) * k* s;
mal:=mal+'Monte-Karlo usuli bo'yicha:'+#13+' ntegral='+floattostr(Integral)+#13;
showmessage(mal);
form2.Hide;
end;

```

10. В код Command2 вписываем следующие.

```

Procedure TForm2.Button2Click(Sender: TObject);
begin
Form2.Hide;
end;

```

11. Вводим функцию.

```

Function Fx(x:real): real;
begin
Fx:=(2-sqr(cos(x+1.5)))/(0.6+sin(1. 1 *x-2)); {}
end;

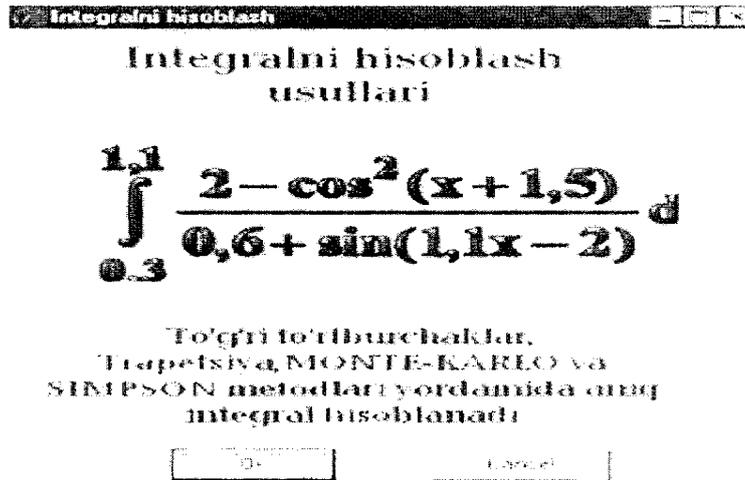
```

12. Сохраняем форму и программа готова.

Результат.

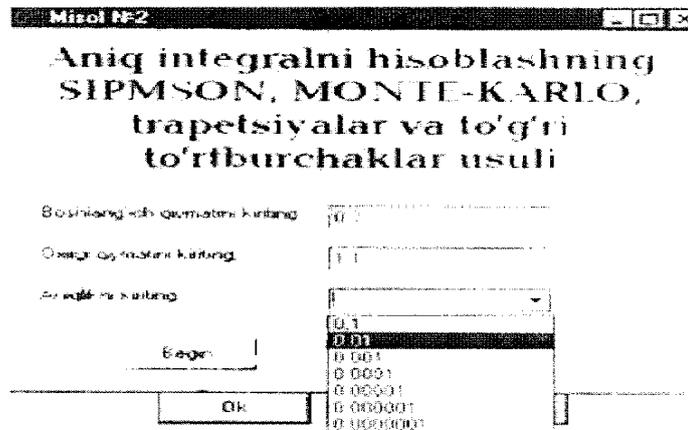
1-Общий вид форм.

В этой форме имеется сведения о программе. Нажатием клавиши ОК переходят к основной форме.

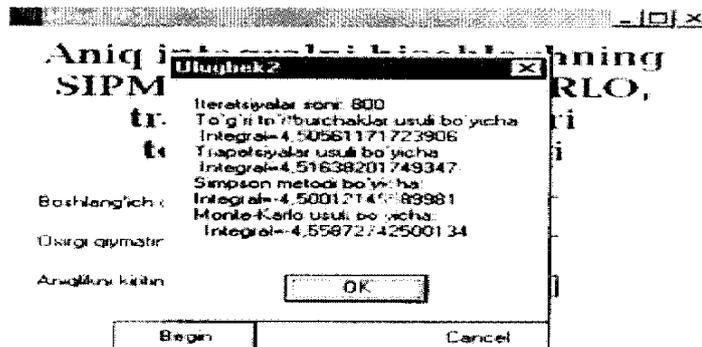


2-Общий вид формы.

Водят верхние и нижние границы, выбирают точность и нажатием Begin. На экране появляются результаты.



Результат.



Program INTEG;

var

i, n : integer;
a,b,h,s,s1,s2 : real;
x,y : array of real;
txt : text;

Procedure SIMP;

Begin

s1:=0; s2:=0;
for i:=1 to n-1 do Begin
if i mod 2=0 then s1:=s1+2*y[i];
if i mod 2<>0 then s2:=s2+4*y[i]; End;
s:=(h/3)*(y[0]+y[n]+s1+s2);
End;

Procedure Trap;

Begin

s:=0;
for i:=1 to n-1 do s:=s+h*y[i];
s:=s+h*(y [0] +y [n])/2;
End;

Begin

assign (txt, 'Simp.otv'); rewrite(txt);
a:=0.0; b:=1.0; n:=(b-a)/h
for i:=0 to n do Begin
x[i]:=a+i*h; y[i]:=1/(1+x[i]); End;
Trap;
Writeln(txt, 'Формулы Трапеции I= ', s: 12:4); Writeln(txt);
SIMP;

```
writeln(txt, 'Формулы Симпсона I=', s: 12:4);  
Close(txt);  
END.
```

Формулы Трапеции I= 0.6938

Формулы Симпсона I= 0.6932

Alg integral;

Arg I,n: целый; a,b,h,s,s1,s2: действительные; x,y: vector;

Nat s;

Нач

a:=0.6; b:=1.4; n:=20; h:=(b-a)/n;

i:=0; toki i n

sb

x[i]:=a+i*h;

y[i]:=1/sqrt(2*sqr(x[i])+3); i:=i+1;

so

s:=0; i:=1 toki i n-1

sb

s:=s+h*y[i]; i:=i+1;

so

s:=s+h*(y[0]+y[n])/2;

s1:=0; s2:=0; i:=1 toki i n-1

sb

если i mod 2=0 **то** s1:=s1+2*y[i];

если i mod 2<>0 **то** s2:=s2+4*y[i];

s:=(h/3)*(y[0]+y[n]+s1+s2);

Кон.

ВЫВОДЫ

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, 4-х параграфов, выводов, программы и списка литературы.

Во введении приводятся постановки задачи, актуальность темы, цели и задачи работы, методы исследования, научная ценность работы, практическая ценность работы, содержание работы.

В первом и во втором параграфах подробно рассматриваются методы численного интегрирования. Разрабатываются оптимальные алгоритмы, блок-схемы и программы.

Приводятся численные примеры, которые сводятся к приближенному вычислению интеграла.

Рассматривается сравнительный анализ этих методов и оценка точности.

В § 3 и § 4 параграфах рассматривается применение разработанного алгоритма в решении прикладных задач: задача об изгибе прямоугольной пластинки, которая сводится к вычислению интегралов, а также задача проверки термодинамической совместимости экспериментальных данных по парожидкостному равновесию.

Все рассмотренные примеры снабжены алгоритмом, блок-схемой и программой. Составленные примеры апробированы на конкретные примеры.

Полученные результаты представляют научный интерес специалистов в области механики и химической технологии.

Литература

1. Кафаров В.В., Ветохин В.Н., Бояринов А.И. Программирование и вычислительные методы в химии и химической технологии. М.: Наука, 1972.
2. Химминг Р.В. Численные методы – М.:, 1972 г
3. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.Э. Численные методы анализа. - М.: Физматгиз, 1963.
4. Прауэниц Дж. и др. Машинный расчёт парожидкостного равновесия многокомпонентных смесей М.: Химия, 1971.