САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

МЎМИНОВ МУХИДДИН ЭШҚОБИЛОВИЧ

ПАНЖАРАДАГИ ШРЁДИНГЕР ОПЕРАТОРЛАРИНИНГ МУҲИМ ВА ДИСКРЕТ СПЕКТРЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSC) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Самарқанд – 2021

УДК: 517.984

Докторлик (DSc) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата докторской (DSc) диссертации

Content of the abstract of doctoral (DSc) dissertation

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

МЎМИНОВ МУХИДДИН ЭШҚОБИЛОВИЧ

ПАНЖАРАДАГИ ШРЁДИНГЕР ОПЕРАТОРЛАРИНИНГ МУҲИМ ВА ДИСКРЕТ СПЕКТРЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Самарқанд– 2021

Фан доктори (Doctor of Science) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси рлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2021.2.DSc/FM176 рақам н рўйхатга олинган.

Диссертация Самарқанд давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (www.samdu.uz) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий маслаҳатчи: **Лақаев Саидахмат Норжигитович**
физика-математика фанлари доктори, академик

Расмий оппонентлар: **Розиқов Ўткир Абдуллоевич**
физика-математика фанлари доктори, профессор

Рахимов Абдумалик Абдумаджидович
физика-математика фанлари доктори, профессор

Халхўжаев Ахмад Миясарович
физика-математика фанлари доктори

Етакчи ташкилот: **Урганч давлат университети**

Диссертация ҳимояси Самарқанд давлат университети ҳузуридаги DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2021 йил «23» июля соат 10[00] даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866) 231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38, 239-12-47, e-mail: patent@samdu.uz).

Диссертация билан Самарқанд давлат университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (30 рақами билан рўйхатга олинган). Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866) 231-06-32.

Диссертация автореферати 2021 йил «5» июля куни тарқатилди.
(2021 йил «5» июля даги 2 рақамли реестр баённомаси).

А.С. Солеев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

А.М. Халхўжаев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.д.

И.А.Икромов
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси ўринбосари, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар, аксарият ҳолларда микроолам назариясини тавсифловчи квант механикаси масалаларини ўрганишга келтирилади. Заррачаларнинг стационар ҳолатини тавсифловчи Шредингер тенгламалари квант назариясининг асосий тенгламасидир. Итаришувчи ва тортишувчи жуфтликларни тавсифлашда фойдаланиладиган Бозе–Хаббард модели, яъни панжарадаги Шредингер оператори экспериментал кузатишларнинг назарий асоси ва қўллашнинг назарий базаси ҳисобланади. Шунинг учун қаттиқ жисмлар физикаси ҳамда квант майдонлар назариясида учрайдиган панжарадаги заррачалар системаси гамильтонианларига мос Шредингер операторларига оид тадқиқотларни ривожлантириш муҳим вазифаларидан бири бўлиб қолмоқда.

Жаҳон илм-фанида кубик панжарадаги икки, уч ва тўрт квант заррачали система гамильтонианларига мос Шредингер операторларининг спектри система квазиимпульси ўзгаришига нисбатан ўта сезувчан бўлганлиги учун ушбу операторлар оилалари спектрига оид муаммоларни ҳал этиш, жумладан дискрет Шредингер операторлари учун боғланган ҳолатлар мавжудлигини кўрсатиш ва унинг сонини аниқлаш муҳим аҳамият касб этмоқда. Бу борада: панжарадаги ихтиёрий икки, уч ва тўрт квант заррачали системаларга мос дискрет Шредингер операторлари муҳим спектрларининг тузилиши ва жойлашув ўрнини аниқлаш, муҳим спектрнинг бўшлиқ оралиғида чексиз сондаги хос қийматлари (Ефимов эффекти) мавжудлиги, ХВЖ (Хунцикер– ван Винтер–Жислин) теоремасининг аналогини исботлаш, хос қийматларининг мавжудлиги ва уларнинг сонини аниқлашга оид тадқиқотларни ривожлантириш амалий-назарий жиҳатдан муҳим илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий татбиқларга эга бўлган долзарб йўналишларга эътибор кучайтирилди хусусан, мамлакатимиз олимлари томонидан кубик панжарадаги заррачалар системаси гамильтонианларига мос Шредингер операторларининг спектрал назариясини ривожлантиришга алоҳида эътибор берилмоқда. “Алгебра ва унинг татбиқлари, дифференциал тенгламалар ва унинг татбиқлари, чизиқсиз тизимлар, динамик тизимлар ва уларнинг татбиқларини математик моделлаштириш, стохастик таҳлил, тиббий-биологик информатика, ҳисоблаш математикаси[1] фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалари ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди. Бу қарор ижросини таъминлашда математик анализнинг ўз-ўзига қўшма операторлар спектрал назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

[1] Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон “Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида” ги қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида» Фармони, 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И. Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида» ва 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи[2]. Шредингер операторлари ҳамда Фридрихс моделларига оид тадқиқотлар ва илмий изланишлар етакчи хорижий давлатларнинг олий таълим муассасалари ва илмий-тадқиқот марказлари, жумладан, Universität Innsbruck (Австрия), University of Missouri, Princeton University, Harvard University (АҚШ), Université Paris Nord (Франция), Kyoto University (Япония), Weierstrass Institute for Applied and Stochastics ва Universität Mainz (Германия), University Roma and SISSA (Italy), University of Basel, Universität Zürich, Universität Bern (Switzerland), Universidade de São Paulo (Бразилия), University of Toronto (Канада), Universiti Kuala Lumpur, Universiti Teknologi Malaysia (Малайзия), Россия Фанлар академияси ахборотларни узатиш муаммолари институти, Лобачевский номидаги Нижегород давлат университети, Россия Фанлар академияси Математика институти Санкт-Петербург бўлими , Россия Фанлар академияси назарий физика институти, Москва давлат университети (Россия)да кенг қамровли олиб борилмоқда.

Шредингер операторларига оид дунёда олиб борилган тадқиқотлар натижасида қатор долзарб масалалар ечилган, жумладан, қуйидаги илмий натижалар олинган: итаришувчи жуфтликларни тавсифлашда фойдаланиладиган Бозе–Хаббард гамильтониани, яъни панжарадаги Шредингер оператори экспериментал кузатишларнинг назарий асоси қилиб олинган ва тартибланган муҳитларда мураккаб турғун объектлар итаришувчи таъсирлар натижасида ҳам мавжуд бўлиши мумкинлиги исботланган (Universitat Innsbruck (Австрия)); икки заррачали Шредингер операторлари хос қийматларининг боғланиш доимийсига боғлиқлиги ўрганилган (Princeton University (АҚШ), University of Basel (Швейцария), Самарқанд давлат университети); ихтиёрий потенциалли икки заррачали дискрет Шредингер

[2]Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи: https://www.springer. com/gp/mathematics; https://onlinelibrary.wiley.com/; www.mathnet.ru; www.scholar. google.com; www.elsevier.com /locate/camw ва бошқа манбалар асосида ишлаб чиқилган.

оператори хос қийматлари мавжудлик шартлари топилган (Universität Bonn (Германия), University of Missouri (АҚШ), Самарқанд давлат университети); уч заррачали Шредингер операторлари учун Ефимов эффекти исботланган (Россия Фанлар академияси физика-техника институти, Россия Фанлар академияси Математика институти Санкт-Петербург бўлими, Université Paris Nord (Франция), Kyoto University (Япония), Россия Фанлар академияси назарий физика институти, Universiti Teknologi Malaysia (Малайзия), Самарқанд давлат университети); уч заррачали системага мос умумлашган Фридрихс моделининг хос қийматлари мавжудлиги, улар сонининг чекли ва чексиз кўп бўлиш шартлари топилган (Weierstrass Institute for Applied and Stochastics (Германия), Лобачевский номидаги Нижегород давлат университети (Россия), Самарқанд давлат университети); N– заррачали Шредингер операторлари муҳим спектрининг жойлашув ўрни тавсифланган (Лобачевский номидаги Нижегород давлат университети (Россия), Самарқанд давлат университети).

Дунё миқёсида бугунги кунда панжарадаги икки, уч ва тўрт заррачали системаларга мос Шредингер операторларининг спектрал хоссаларини тадқиқ этиш бўйича бир қатор, жумладан: панжарадаги икки заррачали дискрет Шредингер операторининг мусбатлик шартларини топиш, уч заррачали дискрет Шредингер оператори дискрет спектрининг чеклилик ва чексизлиги учун шартларни олиш, жуфт-жуфти билан қисқа таъсирлашувчи потенциалга эга бўлган ихтиёрий тўрт заррачали дискрет Шредингер операторининг муҳим спектри тузилиши ва жойлашувини тавсифлаш ҳамда ХВЖ (Хунцикер–ван Винтер–Г.М.Жислин) теоремасини исботлаш каби устувор йўналишларда илмий тадқиқот ишлари олиб борилмоқда.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Шредингер операторларини ўрганиш масаласи қаттиқ жисмлар физикаси, квант майдонлар назарияси, норелятивистик квант механикасининг асосий масалаларини ўрганиш билан узвий боғлиқдир. Бу соҳада олинган натижалар кўплаб илмий адабиётларда, хусусан, М.Рид ва Б.Саймоннинг тўрт томли китобларида батафсил келтирилган. Панжарадаги заррачалар системасига мос Шредингер операторлари XX асрнинг 90-йилларида дастлаб Д.С.Маттис, А.И.Могильнер томонидан қаралди ва унга оид тадқиқотлар жадал ривожланди. Панжарадаги Шредингер операторларини математик маънода тадқиқ этишда узлуксиз Шредингер операторларидаги каби муаммолар учрайди, яъни дастлаб бир, икки заррачали ва ҳоказо кўп заррачали операторларни ўрганиш талаб этилади. Шредингер операторлари ҳамда умумлашган Фридрихс моделлари учун муҳим спектр тавсифи ва жойлашув ўрни, дискрет спектри мавжудлиги ва унинг чеклилиги ёки чексизлигини аниқлаш масалалари М.Клауз, Б.Саймон, Г.М.Граф, Д.Шенкер, Р.А.Минлос, Г.М.Жислин, Д.Р.Яфаев, Р.А.Фариа да Веига, Е.Л.Лакштанов, С.Н.Лақаев, К.Макаров, А.В.Соболев каби олимлар томонидан ўрганилган.

Е.Л.Лакштанов, Р.А.Минлос ишларида юқори температураларда гиббс майдонларининг кенг синфи трансфер-матрицалари учун икки заррачали боғланган ҳолатлари ўрганилган ҳамда кластерлик параметрининг кичик қийматларида икки заррачали кластер операторлари боғланган ҳолатларининг мавжудлиги исботланган. Faria da Veiga, L.Ioriatti, M.O'Carroll томонидан икки заррачали Шредингер операторининг спектрал хоссалари система тўла квазиимпульсига боғлиқ равишда ўрганилган.

С.Албеверио, С.Лақаев, К.Макаров ва З.Муминовлар томонидан $d-$ ўлчамли $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$, панжарада ихтиёрий икки заррачали система гамильтонианига мос икки заррачали Шредингер оператори учун хос қийматларнинг мавжудлик шартлари топилган.

Уч заррачали узлуксиз Шредингер операторлари учун потенциалга қўйилган маълум шартларда муҳим спектрдан чапда чексиз сондаги хос қийматлар пайдо бўлиш ҳодисаси дастлаб В.Н.Ефимов томонидан аниқланган. Унинг қатъий математик исботи биринчи бўлиб Д.Р.Яфаев томонидан берилган. Кейинчалик эса Ю.Овчинников, И.М.Сигал, Ҳ.Тамура томонидан исботланган.

Уч заррачали дискрет Шредингер операторлари учун эса, дастлаб панжарадаги жуфт-жуфти билан контакт таъсирлашувчи учта бир хил заррачали системага мос Шредингер операторлари учун система квазиимпульсининг нол қийматида Ефимов эффектининг мавжудлиги С.Н.Лақаев томонидан исботланган. С.Н.Лақаев, Ж.Абдуллаев ва З.Мўминовлар томонидан жуфт-жуфти билан контакт таъсирлашувчи уч заррачали системага мос айирмали Шредингер операторлари учун муҳим спектрдан чапдаги хос қийматлари сони учун асимптотик формула олинган.

Таъкидлаб ўтиш жоизки, мазкур ишларда қаралаётган уч заррачали системадаги барча учта икки заррачали қисм системалар ёки улардан иккитаси нолда виртуал сатҳга эга бўлганда хос қийматлар сонининг чексиз кўп бўлиши ҳамда оператор муҳим спектрининг чап томонида пайдо бўлиши исботланган. Муҳим спектрда бўшлиқ оралиқнинг пайдо бўлиши фақатгина дискрет Шредингер операторлари учун ўринли бўлади. Хусусий ҳолда, уч заррачали системада иккита икки заррачали қисм системалар нолда виртуал сатҳга эга бўлганда ва учинчи потенциал қиймати катта бўлганда муҳим спектрда бўшлиқ оралиқ пайдо бўлиб, бу ҳолатда хос қийматлар сонининг чекли ёки чексиз кўп бўлиши очиқ масала ҳисобланарди.

Хунцикер, ван Винтер ва Г.М.Жислин томонидан N– заррачали узлуксиз Шредингер операторининг муҳим спектри ярим интервалдан иборат бўлиши ва унинг аниқ қуйи чегарасига маълум синф қисм гамильтонианлар спектрида эришиши исботланган. Ушбу натижа спектрал назарияда Хунцикер–ван Винтер–Жислин (ХВЖ) теоремаси деб номланган. Таъкидлаш жоизки, тўрт заррачали дискрет Шредингер оператори учун ХВЖ теоремаси исботланмаган эди.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти ЎзР ФА Самарқанд бўлимининг ФА-Ф1-Ф045 "Панжарадаги кўп заррачали система гамильтонианлари. Спектр ва резонанслар" (2007-2011 йй.); ЎзР ФА Самарқанд бўлимининг ФМ-1-016 "Панжарадаги икки ва уч заррачали системаларда қуйи энергетик эффектлар" (2008-2009 йй.); Малайзия технология университетининг PAS Ref. No. PY/2014/04068 “Eigenvalue problem for the two particle Schrodinger opertaor on lattice” (01/07/2015–30/06/2016) мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади уч ўлчамли панжарадаги жуфт-жуфти билан қисқа масофада ўзаро таъсирлашувчи икки, уч ва тўрт заррачали системаларга мос дискрет Шредингер операторларининг муҳим ва дискрет спектрларини тадқиқ қилишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

панжарадаги икки заррачали система квазиимпульсининг барча қийматларида икки заррачали Шредингер операторининг мусбатлик шартларини топиш;

икки ва уч заррачали дискрет Шредингер операторларининг муҳим спектридан ташқаридаги ихтиёрий интервалда ётувчи дискрет спектри сони учун ифода олиш;

уч заррачали дискрет Шредингер оператори дискрет спектрининг чеклилик шартларини топиш;

панжарадаги жуфт-жуфти билан контакт таъсирлашувчи потенциалларга эга бўлган уч заррачали Шредингер операторининг муҳим спектри бўшлиқ оралиғида чексиз сондаги хос қийматлари (Ефимов эффекти) мавжудлигини исботлаш;

жуфт-жуфти билан қисқа таъсирлашувчи потенциалларга эга бўлган ихтиёрий тўрт заррачали дискрет Шредингер операторининг муҳим спектри тузилиши ва жойлашувини тавсифлаш ҳамда ХВЖ (Хунцикер–ван Винтер–Жислин) теоремасини исботлаш.

Тадқиқотнинг объекти. Панжарадаги жуфт-жуфти билан қисқа таъсирлашувчи потенциалли икки, уч ва тўрт заррачали системаларга мос Шредингер операторларидан иборат.

Тадқиқотнинг предмети. Панжарадаги жуфт-жуфти билан қисқа таъсирлашувчи потенциалли ихтиёрий икки, уч ва тўрт заррачали системаларга мос Шредингер операторларининг спектрал таҳлилидан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертация ишида чизиқли операторларнинг спектрал назарияси; панжарадаги уч заррачали гамильтонианларнинг резольвенталари учун Фаддеев-Ньютон типидаги компакт интеграл тенгламалар; Бирман-Швингер принципи; дискрет Шредингер операторига мос Фредгольм детерминантини аналитик давом эттириш усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

квазиимпульснинг нолга тенг бўлмаган барча қийматлари учун икки заррачали дискрет Шредингер операторининг мусбатлик шартлари топилган, шунингдек квазиимпульснинг нолга тенг бўлмаган барча қийматларида икки заррачали дискрет Шредингер операторининг хос қиймати мавжудлиги ва мусбатлиги исботланган;

панжарадаги икки ва уч заррачали системага мос Шредингер операторларининг муҳим спектридан ташқаридаги ихтиёрий интервалда ётувчи дискрет спектри сони учун формула олинган;

уч заррачали дискрет Шредингер оператори дискрет спектрининг чеклилик шартлари топилган;

уч заррачали дискрет Шредингер оператори муҳим спектрининг бўшлиқ оралиғи мавжудлиги шарти аниқланган ҳамда шу бўшлиқ оралиқда чексиз сондаги хос қийматлари (Ефимов эффекти) мавжудлиги исботланган;

жуфт-жуфти билан қисқа таъсирлашувчи потенциалга эга бўлган ихтиёрий тўрт заррачали дискрет Шредингер оператори муҳим спектрининг тузилиши ва жойлашуви тавсифланган ҳамда ХВЖ (Хунцикер–ван Винтер–Жислин) теоремаси исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижаси панжарадаги уч заррачали Шредингер оператори муҳим спектри бўшлиқларида хос қийматлар сонининг чексизлигини исботлаш усулларидан *N*– заррачали дискрет Шредингер операторининг муҳим спектрида бўшлиқ оралиқлар мавжудлигини исботлашда қўлланилган;

панжарадаги тўрт заррачали Шредингер оператори учун Хунцикер–ван Винтер–Жислин теоремасидан *N*– заррачали дискрет Шредингер операторининг муҳим спектрини тавсифлашда фойдаланилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги математик анализ, математик физика, функционал анализ ва комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси усулларидан фойдаланилганлиги ҳамда қатъий математик мулоҳазаларни қўллаш орқали, математик исботлашлар билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти шундан иборатки, олинган натижалар ўз-ўзига қўшма операторлар спектрал назарияси, квант майдонлар назарияси, хусусан, панжарадаги икки, уч ва кўп заррачали система гамильтонианларининг спектрал назариясининг кейинги ривожида қўлланилиши мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти олинган илмий натижаларнинг қаттиқ жисмлар физикаси ва квант механикасида экспериментал тадқиқотлар ўтказиш ва қўллашга назарий асос сифатида хизмат қилиши билан белгиланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Панжарадаги икки, уч ва тўрт заррачали дискрет Шредингер операторининг муҳим ва дискрет спектрлари бўйича олинган натижалар асосида:

панжарадаги уч заррачали дискрет Шредингер операторининг муҳим ва дискрет спектри учун олинган натижалардан етакчи хорижий журналларда (Theoretical and Mathematical Physics, 2007, Vol. 152, №3, 1313–1321; Theoretical and Mathematical Physics, 2009, Vol. 161, № 2, 1460–1470; Methods Funct. Anal. Topology, 2009, Vol. 15, № 1, 67-73; Theoretical and Mathematical Physics, 2010, Vol. 163, № 1, 429–437; Applied Mathematics & Information Sciences– An International Journal, 2010, Vol. 4, №3, 395–412; Siberian Mathematical Journal, 2011, Vol. 52, 316–328; Proceedings of IAM, 2016, Vol. 5, № 2, 156–174; Reviews in Mathematical Physics, 2020, Vol. 32, № 6, 2050015) баъзи уч заррачали дискрет Шредингер операторлари ва умумлашган Фридрихс модел операторларининг спектрал хоссаларини ўрганишда фойдаланилган. Илмий натижанинг қўлланилиши қаралаётган операторлар хос қийматлари сонининг чеклилиги ва чексизлигини исботлаш имконини берган;

панжарадаги уч заррачали Шредингер оператори муҳим спектри бўшлиқларида хос қийматлар сонининг чексизлигидан етакчи хорижий журналларда (arXiv preprint arXiv:1408.4280, 2014; Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2018, Vol. 51, № 26, 265202; European science, 2020, Vol. 2, № 51, 27–30) N– заррачали дискрет Шредингер оператори ва умумлашган Фридрихс модел операторларининг муҳим ва дискрет спектрларини ўрганишда фойдаланилган. Илмий натижанинг қўлланилиши қаралаётган операторларнинг муҳим спектрида бўшлиқ оралиқлар мавжудлигини исботлаш имконини берган;

панжарадаги тўрт заррачали Шредингер оператори учун Хунцикер–ван Винтер–Жислин теоремасидан етакчи хорижий журналларда (Theoretical and Mathematical Physics, 2009, Vol. 161, № 2, 1460–1470; Applied Mathematics & Information Sciences– An International Journal, 2010, Vol. 4, № 3, 395–412; International Conference on Mathematical Sciences and Statistics, 2013, 187–194; Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2018,Vol. 51, № 26, 265202) N– заррачали дискрет Шредингер оператори ва умумлашган Фридрихс модел операторларининг муҳим спектрларини тавсифлашда фойдаланилган. Илмий натижанинг қўлланилиши қаралаётган операторларнинг муҳим спектрларининг тузилиши ва жойлашув ўрнини топиш имконини берган;

икки заррачали системага мос Шредингер операторининг хос қийматлари мавжудлик шартларидан “Boundary integral equation method for ahlfors mapping of bounded multiply connected regions and finding zeros of the ahlfors map” мавзусидаги R.J130000.7809.4F637 рақамли хорижий лойиҳада умумлашган Нейман ядроли интеграл тенгламанинг ечими мавжудлигини исботлашда фойдаланилган. (Малайзия технология университетининг 2021 йил 21 апрелдаги малумотномаси). Олинган натижалар кўп боғламли соҳада Рубин масаласини ечиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 14 та илмий ва илмий-амалий анжуманларда, жумладан 11 та халқаро ва 3 та республика илмий ва илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 29 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестатция комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 15 та мақола, жумладан, 12 таси хорижий ва 3 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, тўртта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат. Диссертациянинг ҳажми 151 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар берилган.

Диссертациянинг **“Икки заррачали дискрет Шредингер операторининг спектрал хоссалари”** деб номланувчи биринчи бобида квазиимпульснинг нолга тенг бўлмаган барча қийматлари учун икки заррачали дискрет Шредингер операторининг мусбатлик шартлари топилган, шунингдек, квазиимпульснинг нолга тенг бўлмаган барча қийматларида икки заррачали дискрет Шредингер операторининг хос қиймати мавжудлиги ва мусбатлиги исботланган.

$\mathbb{Z}^3 -$ уч ўлчамли бутун сонли панжара ва $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^n) -$ $(\mathbb{Z}^3)^n$, $n = 2,3$ да аниқланган квадрати билан жамланувчи функцияларнинг гильберт фазоси бўлсин.

$\mathbb{Z}^3$ панжарадаги ихтиёрий иккита квант заррачали системанинг $\hat{h}_0$ эркин гамильтониани $\hat{\varepsilon}_1$ ва $\hat{\varepsilon}_2$ дисперсион муносабатлар билан $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^2)$ гильберт фазосида чегараланган ўз-ўзига қўшма оператор сифатида қуйидаги формула бўйича аниқланади:

$$(\hat{h}_0\hat{\psi})(n_1,n_2) = \sum_{s\in\mathbb{Z}^3}[\hat{\varepsilon}_1(s)\hat{\psi}(n_1+s,n_2) + \hat{\varepsilon}_2(s)\hat{\psi}(n_1,n_2+s)],$$

бунда $\hat{\varepsilon}_\alpha$, $\alpha = 1,2,-$ ушбу $\hat{\varepsilon}_\alpha(s) = \overline{\hat{\varepsilon}_\alpha(-s)}$, $\alpha = 1,2$ $s\in\mathbb{Z}^3$ шартни қаноатлантирувчи, заррачанинг бир тугундан қўшни тугунларга кўчишини тавсифловчи $\ell_1(\mathbb{Z}^3)$ фазонинг элементлари.

Хусусан, агар

$$\hat{\varepsilon}_\alpha(s) = \begin{cases} \dfrac{3}{m_\alpha} & \text{агар} \quad s = 0, \\ -\dfrac{1}{2m_\alpha} & \text{агар} \quad |s| = 1, \\ 0 & \text{агар} \quad |s| > 1, \end{cases}$$

бўлса $\hat{h}_0$ оператор қуйидаги кўринишда аниқланади

$$\hat{h}_0 = \hat{I}\otimes\Delta + \hat{I}\otimes\Delta,$$

бунда $\hat{I}$ – $\ell_2(\mathbb{Z}^3)$ фазодаги бирлик оператор, $\otimes$ –операторларнинг тензор кўпайтмасини билдиради, $\Delta -$ дискрет Лапласиан

$$(\Delta\hat{\psi})(x)=\sum_{|s|=1}[\hat{\psi}(x)-\hat{\psi}(x+s)],\quad \hat{\psi}\in\ell_2(\mathbb{Z}^3).$$

Жуфт-жуфти билан қисқа таъсирлашувчи иккита квант заррачали системага мос $\hat{h}$ гамильтониан $\hat{h}_0$ эркин гамильтонианнинг $\hat{v}$ чегараланган қўзғатувчи потенциали сифатида қуйидагича аниқланади:

$$\hat{h}=\hat{h}_0-\hat{v},$$

бунда $\hat{v}-$ $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^2)$ да кўпайтириш оператори

$$(\hat{v}\hat{\psi})(x_1,x_2)=\hat{v}(x_1-x_2)\hat{\psi}(x_1,x_2),\quad \hat{\psi}\in\ell_2((\mathbb{Z}^3)^2),$$

$\hat{v}-$ чегараланган ҳақиқий қийматли функция.

Диссертацияда $\hat{v}(s)$ потенциал $\mathbb{Z}^3$ да аниқланган номанфий, жуфт функция ва ушбу

$$\lim_{|s|\to\infty}|s|^{\rho}\,\hat{v}(s)=0$$

шартни қаноатлантиради деб фараз қилинади, бу ерда $\rho>3,\quad s\in\mathbb{Z}^3$, $|s|=|s^{(1)}|+|s^{(2)}|+|s^{(3)}|$.

Аниқланишига кўра $\hat{h}$ гамильтониан $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^2)$ гильберт фазосида чегараланган ўз-ўзига қўшма оператор бўлади.

$\mathbb{T}^3$ – уч ўлчамли тор, яъни қарама-қарши ёқлари айний бўлган $(-\pi,\pi]^3$ куб бўлсин. Ҳамма жойда $\mathbb{T}^3=(-\pi,\pi]^3$ тўплам элементларининг қўшиш ва ҳақиқий сонга кўпайтириш амаллари $\mathbb{R}^3$ дагидек, $(2\pi\mathbb{Z}^1)^3$ модул бўйича киритилган амаллар каби тушунилади. Масалан, агар $a=(\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{4},\frac{11\pi}{12})$, $b=(\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6})\in\mathbb{T}^3$ бўлса, у ҳолда $a+b=(-\frac{2\pi}{3},-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{4})\in\mathbb{T}^3$ бўлади.

Гамильтонианнинг координатали тасвирдан импульс тасвирига ўтиш ушбу $\mathcal{F}_m,\ m=1,2,\ldots\quad \mathcal{F}_m:L_2((\mathbb{T}^3)^m)\to\ell_2((\mathbb{Z}^3)^m)$ Фурье алмаштириши ёрдамида амалга оширилади

$$(\Im_m f)(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3m}{2}}}\int\limits_{(\mathbb{T}^3)^m}e^{ixt}f(t)dt,\quad xt=\sum_{j=1}^{m}(x_j,t_j),\tag{1}$$

$$(x,t)=\sum_{j=1}^{3}x^{(j)}t^{(j)},\quad x=(x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)})\in\mathbb{Z}^3,\quad t=(t^{(1)},t^{(2)},t^{(3)})\in\mathbb{T}^3.$$

Ушбу $h=\mathcal{F}_2^{-1}\hat{h}\mathcal{F}_2$ операторга $\hat{h}$ гамильтонианнинг импульсли тасвири дейилади. Бу оператор $L_2((\mathbb{T}^3)^2)$ гильберт фазосида

$$h=h_0-v$$

формула бўйича аниқланади. Бу ерда h_0- $\mathcal{E}(k_1,k_2)$ функцияга кўпайтириш оператори:

$$(h_0 f)(k_1,k_2)=\mathcal{E}(k_1,k_2)f(k_1,k_2),\quad \mathcal{E}(k_1,k_2)=\varepsilon_1(k)+\varepsilon_2(k),$$

$v-$ ўрама типидаги интеграл оператор

$$(vf)(k_1,k_2)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{(\mathbb{T}^3)^2} v(k_1-k_1')\delta(k_1+k_2-k_1'-k_2')f(k_1',k_2')dk_1'dk_2',$$

бунда ε_i, $i=1,2$ ва v мос ҳолда $\hat{\varepsilon}_i$ ва $\hat{v}$ функцияларнинг Фурье алмаштириши:

$$\varepsilon_i(k)=(\mathcal{F}_1^{-1}\hat{\varepsilon}_i)(k)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{s\in\mathbb{Z}^3}\hat{\varepsilon}_i(s)e^{i(k,s)},\ i=1,2,$$

$$v(k)=(\mathcal{F}_1^{-1}\hat{v}(k)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{s\in\mathbb{Z}^3}\hat{v}(s)e^{i(k,s)}.$$

Операторларнинг тўғри интеграл йиғиндига ёйилишидан фойдаланиб, h операторнинг спектрал хоссаларини ўрганишни $L_2(\mathbb{T}^3)$ гильберт фазосида қуйидаги формула бўйича аниқланган ўз-ўзига қўшма чегараланган $h(k)$, $k\in\mathbb{T}^3$ операторлар оиласи (икки заррачали дискрет Шредингер оператори)нинг спекрал хоссаларини ўрганишга келтирамиз

$$h(k)=h_0(k)-v. \tag{2}$$

Бу ерда $h_0(k)$

$$\mathcal{E}_k(p)=\varepsilon_1(p)+\varepsilon_2(k-p)$$

функцияга кўпайтириш оператори ва

$$(vf)(p)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int\limits_{\mathbb{T}^3}v(p-s)f(s)ds.$$

Энди (2) формула билан аниқланган икки заррачали дискрет Шредингер оператори $h(k)$, $k\in\mathbb{T}^3$ нинг спектрал хоссаларини келтирамиз.

Фараз 1. *Фараз қилайлик, $\varepsilon_i(p)$, $i=1,2-$ дисперсион муносабатлар координата маркази $\mathbf{0}=(0,0,0)$да ягона айнимаган минимум нуқтага эга бўлган, яъни*

$$\lim_{|p|\to 0}\inf\frac{\varepsilon_i(p)-\varepsilon_i(\mathbf{0})}{|p|^2}>0,\quad \varepsilon_i(\mathbf{0})=0,$$

$\mathbb{T}^3$ да аниқланган узлуксиз (даврий) ҳақиқий қийматли функция бўлсин. Бундан ташқари $v(p)-$ $\mathbb{T}^3$ да аниқланган

$$v(p)=\overline{v(-p)},\quad p\in\mathbb{T}^3$$

шартни қаноатлантирувчи узлуксиз функция бўлсин.

Таъкидлаб ўтамизки, муҳим спектр ҳақидаги Вейл теоремасига кўра $h(k)$ операторнинг $\sigma_{ess}(h(k))$ муҳим спектри v компакт қўзғатишда ўзгармайди ва қўзғалмас $h_0(k)$ операторнинг спектри билан устма-уст тушади. Бу ҳолда $\sigma_{ess}(h(k))$ – $\mathcal{E}_k(\cdot)$ функциянинг қийматлар тўпламидан иборат, яъни

$$\sigma_{ess}(h(k))=\sigma(h_0(k))=[\varepsilon_{min}(k),\varepsilon_{max}(k)],$$

бунда $\varepsilon_{min}(k)=\min\limits_{p}\mathcal{E}_k(p),\quad \varepsilon_{max}(k)=\max\limits_{p}\mathcal{E}_k(p)$. Равшанки, фараз 1 дан $k\in\mathbb{T}^3$ учун $\varepsilon_{min}(k)>\varepsilon_{min}(0)=0$ эканлиги келиб чиқади.

$C(\mathbb{T}^3)-$ $\mathbb{T}^3$ да аниқланган узлуксиз (даврий) функцияларнинг Банах фазоси ва $G(\lambda),\ \lambda\le\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(\mathbf{0})$, $\mathbf{0}=(0,0,0)\in\mathbb{T}^3$

$$G(p,q;\lambda)=(2\pi)^{-\frac{3}{2}}v(p-q)(\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(p)-\lambda)^{-1},\quad p,q\in\mathbb{T}^3$$

ядроли интеграл оператор (Бирман–Швингер оператори) бўлсин.

$G(\lambda),\ \lambda\le\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(\mathbf{0})$ операторнинг -1 хос қиймати учун қуйидаги мумкин бўлган ҳолатлар мавжуд.

I-ҳолат. -1 *сони* $G(\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(\mathbf{0}))$ *операторнинг хос қиймати эмас, яъни*

$$dimKer(h(\mathbf{0})-\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(\mathbf{0})I)=dimKer(G(\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(\mathbf{0}))+I)=0.$$

II-ҳолат. -1 *сони* $G(\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(\mathbf{0}))$ *операторнинг оддий хос қиймати ва унга мос хос функция* ψ *қуйидаги шартни қаноатлантиради*

$$\frac{\psi(\mathbf{0})}{\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(p)-\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(\mathbf{0})}\notin L_2(\mathbb{T}^3),$$

яъни

$$dimKer(h(\mathbf{0})-\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(\mathbf{0})I)=0\qquad ва\qquad dimKer(G(\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(\mathbf{0}))+I)=1.$$

III-ҳолат. -1 *сони* $G(\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(\mathbf{0}))$ *операторнинг каррали хос қиймати ва унга мос хос функциялардан бири* ψ *қуйидаги шартни қаноатлантиради*

$$\frac{\psi(\mathbf{0})}{\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(p)-\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(\mathbf{0})}\notin L_2(\mathbb{T}^3),$$

яъни $dimKer(G(\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(\mathbf{0}))+I)\ge 2$ *ва*

$$dimKer(h(\mathbf{0})-\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(\mathbf{0})I)\le dimKer(G(\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(\mathbf{0}))+I)+1.$$

IV-ҳолат. -1 *сони* $G(\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(\mathbf{0}))$ *операторнинг каррали хос қиймати ва*

$$dimKer(h(\mathbf{0})-\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(\mathbf{0})I)+2\le dimKer(G(\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(\mathbf{0}))+I).$$

Таъриф. *Агар I-ҳолат бажарилса, у ҳолда нол* $h(\mathbf{0})$ *операторнинг регуляр нуқтаси дейилади.*

Теорема 1. $\varepsilon_1(\cdot)$ *ва* $\varepsilon_2(\cdot)$ *функциялар чизиқли боғлиқ бўлсин. Агар* $h(\mathbf{0})\ge 0$ *бўлса, у ҳолда барча* $k\in\mathbb{T}^3$ *лар учун* $h(k)\ge 0$ *бўлади. Бундан ташқари, агар нол –* $h(\mathbf{0})$ *операторнинг регуляр нуқтаси бўлса, у ҳолда барча* $f\neq 0$ *ва* $k\in\mathbb{T}^3$ *лар учун* $(h(k)f,f)>0$ *бўлади.*

Таъриф. *Агар II–IV ҳолатлардан бири бажарилса, у ҳолда* $h(\mathbf{0})$ *оператор нолда (муҳим спектрнинг чап четида) виртуал сатҳга эга дейилади.*

Таъкидлаб ўтамизки, агар $\varepsilon(p)=\overline{\varepsilon(p)}$ ва ҳар бир натурал n сони учун барча $p_1,\cdots,p_n\in\mathbb{T}^3$ ҳамда $\sum\limits_{i=1}^{n}z_i=0$ шартни қаноатлантирувчи $z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbb{C}^n$ лар учун

$$\sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon(p_i - p_j) z_i \bar{z}_j \le 0$$

тенгсизлик бажарилса, $\varepsilon(\cdot)$ функция шартли манфий аниқланган дейилади.

Теорема 2. *Фараз 1 бажарилсин ва $\varepsilon_1(\cdot), \varepsilon_2(\cdot)$ иккинчи тартибли дифференциалланувчи, шартли манфий аниқланган функциялар бўлсин. Фараз қилайлик $h(\mathbf{0})$ виртуал сатҳга эга бўлсин (муҳим спектрнинг чап четида). Бундан ташқари $\varepsilon_1(\cdot)$, $\varepsilon_2(\cdot)$ чизиқли боғлиқ ва $h(\mathbf{0}) \ge 0$ бўлсин. У ҳолда ҳар бир $k \in \mathbb{T}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ учун $h(k)$ операторнинг муҳим спектридан чапда ётувчи дискрет спектри бўш бўлмаган тўплам ва у $[0, \varepsilon_{min}(k))$ ярим интервалда жойлашган бўлади.*

$A -$ H гильберт фазосида аниқланган ўз-ўзига қўшма чегараланган оператор ва $H_A(\lambda)$, $\lambda > \sup \sigma_{ess}(A)$ элементлари $(Af, f) > \lambda(f, f)$, $f \ne 0$ шартни қаноатлантирувчи H фазонинг қисм фазоси бўлсин.

$$n(\lambda, A) = \sup_{H_A(\lambda)} \dim H_A(\lambda) \tag{3}$$

бўлсин.

$n(\lambda, A)$ сони A операторнинг λ. дан ўнгда ётувчи хос қийматлари сонига (карралилиги билан ҳисобга олган ҳолда) мос келади.

$N_{(a,b)}(A)$ орқали A операторнинг $(a,b) \subset \mathbb{R} \setminus \sigma_{ess}(A)$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ оралиқда ётувчи хос қийматлари сонини (карралилиги билан ҳисобга олган ҳолда) белгилаймиз.

Таъкидлаш жоизки, (1) га кўра $\hat{v}(\cdot)$ функциянинг номанфийлигидан $\hat{v}$ мусбат оператор бўлади.

$v^{1/2} -$ v операторнинг мусбат квадрат илдизи ва

$$T(z) = v^{1/2} r_0(z) v^{1/2}, \quad z \notin \sigma_{ess}(h(k)) \tag{4}$$

бўлсин, бу ерда $r_0(z) = (h_0(k) - zI)^{-1}$, $I -$ бирлик оператор.

Компакт операторларнинг хоссаларидан фойдаланиб ва анализнинг баъзи усулларини қўллаб қуйидаги теорема олинган.

Теорема 3. *$z_0 \in \mathbb{R} \setminus \sigma_{ess}(h(k))$ сони $h(k)$ операторнинг хос қиймати бўлиши учун $n(1, T(\cdot))$ функция $z = z_0$ нуқтада узилишга эга бўлиши зарур ва етарли. Бундан ташқари z_0 хос қийматнинг n карралилиги*

$$n = \lim_{\xi \to +0} n(1, T(z_0 + \xi)) - n(1, T(z_0)).$$

формула билан аниқланади.

$n(1, T(\cdot))$ функциянинг $(a,b) \subset \mathbb{R} \setminus \sigma_{ess}(h(k))$ интервалда монотонлигидан теорема 3 дан натижа келиб чиқади.

Натижа 1. *Ҳар бир $[a,b] \subset \mathbb{R} \setminus \sigma_{ess}(h(k))$ сегмент учун*

$$N_{(a,b)}(H) = n(1, T(b)) - n(1, T(a))$$

тенглик ўринли.

Натижа 2. $(a,b)\subset\mathbb{R}\setminus\sigma_{ess}(h(k))$ *ва* $T(z)$ *оператор-функция* $z\to b-0$ *да бирор* $T(b)$ *операторга текис яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда* $h(k)$ *оператор* (a,b) *интервалда чекли сондаги хос қийматларга эга бўлади.*

$$\varepsilon_k(p)=\frac{1}{m_1}\varepsilon(p)+\frac{1}{m_2}\varepsilon(k-p),\quad \varepsilon(p)=\sum_{j=1}^{3}(1-\cos p_j) \text{ бўлсин.}$$

Фараз 2. *Фараз қилайлик,* $m_1=m_2$ *ва* $k\in\Pi$ *бўлсин, бунда* Π *тўплам* $k=(k_1,k_2,k_3)$, $k\in\mathbb{T}^3$ *нинг камида бирор* $\alpha\in\{1,2,3\}$ *учун* $k_\alpha=-\pi$ *ёки* $k_\alpha=\pi$ *эканлигини билдиради.*

Теорема 4. *Фараз* 2 *бажарилмасин ва* $v(\cdot)$ – $\mathbb{T}^3$ *да дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда ихтиёрий* $k\in\mathbb{T}^3$ *учун* $h(k)$ *операторнинг хос қийматлари сони чекли бўлади.*

Диссертациянинг **“Уч заррачали дискрет Шредингер операторининг муҳим спектри”** номли иккинчи бобида уч заррачали дискрет Шредингер оператори (ДШО)нинг хос функциялари учун Фаддеев-Ньютон тенгламасига ўхшаш тенглама олинган. Канал операторлари деб аталадиган операторларнинг муҳим спектри тавсифланган. Фредгольм усулидан фойдаланиб, уч заррачали ДШО нинг муҳим спектри канал операторлари спектрларидан иборат эканлиги исботланган. Шунингдек, бир нуқтада (контакт) таъсирлашувчи потенциалларга эга бўлган уч заррачали ДШО қаралади. уч заррачали ДШО нинг муҳим спектрининг бўшлиқ оралиқлари мавжудлик шарти топилган.

Уч ўлчамли $\mathbb{Z}^3$ панжарада учта ихтиёрий квант заррачали система $\hat{H}_0$ эркин гамильтониани $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^3)$ гильберт фазосида чегараланган ўз-ўзига қўшма оператор сифатида қуйидаги формула бўйича аниқланади

$$\hat{H}_0=\frac{1}{2m_1}\Delta_{x_1}+\frac{1}{2m_2}\Delta_{x_2}+\frac{1}{2m_3}\Delta_{x_3},$$

бу ерда $\Delta_{x_1}=\Delta\otimes\hat{I}\otimes\hat{I}$, $\Delta_{x_2}=\hat{I}\otimes\Delta\otimes\hat{I}$ ва $\Delta_{x_3}=\hat{I}\otimes\hat{I}\otimes\Delta$, $m_\alpha>0-$ $\alpha=\overline{1,3}$ заррачаларнинг массаси, $\hat{I}$ – $\ell_2(\mathbb{Z}^3)$ фазодаги бирлик оператор.

Учта квант заррачали системага мос $\hat{H}$ гамильтониан $\hat{H}_0$ эркин гамильтонианнинг жуфт-жуфти билан қисқа таъсирлашувчи $\hat{V}_{ij}$, $1\le i<j\le 3$ чегараланган қўзғатувчи потенциали сифатида қуйидагича аниқланади:

$$\hat{H}=\hat{H}_0-\hat{V}_{12}-\hat{V}_{13}-\hat{V}_{23},$$

бу ерда $\hat{V}_{ij}$ – $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^3)$ фазодаги кўпайтириш оператори:

$$(\hat{V}_{ij}\hat{\psi})(x_1,x_2,x_3)=\hat{v}_{ij}(x_i-x_j)\hat{\psi}(x_1,x_2,x_3),\quad \hat{\psi}\in\ell_2((Z^3)^3),\ 1\le i<j\le 3,$$

$\hat{v}_{ij}$ – чегараланган ҳақиқий қийматли функция.

Диссертацияда $\hat{v}_{ij}(s)$, $1\le i<j\le 3$ потенциал $\mathbb{Z}^3$ да аниқланган номанфий, жуфт функцилар ва ушбу

$$\lim_{|s|\to\infty} |s|^{\rho}\, \hat{v}_{ij}(s) = 0 \qquad (5)$$

шартни қаноатлантиради деб фараз қилинади, бу ерда $\rho > 3,\ s \in \mathbb{Z}^3$, $|s| = |s^{(1)}| + |s^{(2)}| + |s^{(3)}|$.

Аниқланишига кўра $\hat{H}$ гамильтониан $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^3$ гильберт фазосида чегараланган ўз-ўзига қўшма оператор бўлади.

Изоҳ 1. *Агар системада заррачалар жуфт-жуфти билан контакт тортишувчи потенциаллар ёрдамида ўзаро таъсирлашувчи бўлса, у ҳолда координатали тасвирга мос потенциал ушбу*

$$\hat{v}_{\alpha\beta}(x_1, x_2) = \mu_\gamma \delta_{x_1 x_2}$$

кўринишда аниқланади, бу ерда $\mu_\gamma > 0$, $\{\alpha,\beta,\gamma\} = \{1,2,3\}-$ α *ва* β *заррачаларнинг ўзаро таъсир энергиялари,* $\delta_{x_1 x_2}$ *– Кронекер символи.*

Уч заррачали энергия операторинг импульс тасвири

Ушбу $H = \mathcal{F}_3^{-1} \hat{H} \mathcal{F}_3$ оператор $\hat{H}$ гамильтонианнинг импульсли тасвири дейилади. Операторларнинг тўғри интеграл йиғиндига ёйилишидан фойдаланиб, координаталар системасига нисбатан уч заррачали квазиимпульсни киритиб, H операторнинг спектрал хоссаларини ўрганишни $L_2((\mathbb{T}^3)^2)$ гильберт фазосида қуйидаги формула бўйича аниқланган ўз-ўзига қўшма чегараланган $H(K),\ K \in \mathbb{T}^3$ операторлар оиласи (уч заррачали дискрет Шредингер оператори)нинг спекрал хоссаларини ўрганишга келтирамиз

$$H(K) = H_0(K) - V_1 - V_2 - V_3. \qquad (6)$$

Бу ерда $H_0(K)$ функцияга кўпайтириш оператори:

$$\mathcal{E}_K(p,q) = \frac{1}{m_1}\varepsilon(p) + \frac{1}{m_2}\varepsilon(q) + \frac{1}{m_3}\varepsilon(K-p-q)$$

ва

$$(V_1 f)(p,q) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{T}^3} v_1(q-s) f(p,s)\,ds,$$

$$(V_2 f)(p,q) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{T}^3} v_2(p-s) f(s,q)\,ds,$$

$$(V_3 f)(p,q) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{T}^3} v_3(p-s) f(s,p+q-s)\,ds, \quad v_\alpha = \mathcal{F}_3^{-1}\hat{v}_\alpha.$$

Изоҳ 2. *Агар системадаги барча потенциаллар контакт таъсирлашувчи, яъни* $\hat{v}_{\alpha\beta}(x_1,x_2) = \mu_\gamma \delta_{x_1 x_2}$, $\{\alpha,\beta,\gamma\} = \{1,2,3\}$ *бўлса, унга мос уч заррачали дискрет Шредингер оператори* $L_2((\mathbb{T}^3)^2)$ *фазода ушбу*

$$H(K) = H_0(K) - \mu_1 \hat{V}_1 - \mu_2 \hat{V}_2 - \mu_3 \hat{V}_3, \qquad (7)$$

формула бўйича аниқланади, бу ерда

$$(\widetilde{V}_1 f)(p,q)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{T}^3} f(p,s)ds,\quad (\widetilde{V}_2 f)(p,q)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{T}^3} f(s,q)ds,$$

$$(\widetilde{V}_3 f)(p,q)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{T}^3} f(s,p+q-s)ds,\quad f\in L_2((\mathbb{T}^3)^2).$$

Ушбу $H_\alpha(K)=H_0(K)-V_\alpha$ оператор канал оператори дейилади ва унинг спектри

$$\sigma(H_\alpha(K))=\bigcup_{p\in\mathbb{T}^3}[\sigma(h_\alpha(K-p))\cup\{\frac{1}{m_\alpha}\varepsilon(p)\}]$$
$$=[m_K,M_K]\cup\bigcup_{p\in\mathbb{T}^3}\{\sigma_{disc}(h_\alpha(K-p))\dotplus\varepsilon_\alpha(p)\},\tag{8}$$

кўринишда тавсифланади, бунда $m_K=\min\limits_{p,q}\mathcal{E}_K(p,q),\quad M_K=\max\limits_{p,q}\mathcal{E}_K(p,q)$,

$$\sigma(h_\alpha(K-p))\dotplus\varepsilon_\alpha(p)=\{\lambda+\varepsilon_\alpha(p):\quad \lambda\in\sigma(h_\alpha(K-p))\},$$

$h_\alpha(p)-$ $L_2(\mathbb{T}^3)$ гильберт фазосида

$$h_\alpha(k)=h_0^{(\alpha)}(k)-v_\alpha,\tag{9}$$

формула бўйича аниқланган икки заррачали ДШО, бу ерда $h_0^{(\alpha)}(k),\ k\in\mathbb{T}^3-$ функцияга кўпайтириш оператори

$$\mathcal{E}_k^{(\alpha)}(p)=\frac{1}{m_\beta}\varepsilon(p)+\frac{1}{m_\gamma}\varepsilon(p+k),\quad \{\alpha,\beta,\gamma\}=\{1,2,3\},$$

$v_\alpha-$ $v_\alpha(p-s)$ ядроли интеграл оператор, бунда $v_\alpha(\cdot)=\mathcal{F}_3^{-1}\hat{v}_\alpha-$ $\mathbb{T}^3$ да аниқланган узлуксиз функция.

Лемма 1. *Ихтиёрий* $K\in\mathbb{T}^3$ *учун* (6) *формула бўйича аниқланган* $H(K)$ *операторнинг* $\sigma_{ess}(H(K))$ *муҳим спектри* $H_\alpha(K)$ *канал операторларнинг спектрлари бирлашмасидан иборат бўлади, яъни*

$$\sigma_{ess}(H(K))=\sigma(H_1(K))\cup\sigma(H_2(K))\cup\sigma(H_3(K)).$$

$m-$ мусбат сон бўлсин. Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\mu_3^*=(2\pi)^3\left[\min_k\int_{\mathbb{T}^3}\frac{dq}{\frac{1}{m_1}\varepsilon(q)+\frac{1}{m_2}\varepsilon(k-q)+\frac{1}{m_3}\varepsilon(k)+m}\right]^{-1},\tag{10}$$

$$\mu_\alpha^0=8\pi^3\frac{m_\beta+m_\gamma}{m_\beta m_\gamma}\left(\int_{\mathbb{T}^3}\frac{ds}{\varepsilon(s)}\right)^{-1}.\tag{11}$$

Теорема 5. *Фараз қилайлик,* $\mu_\alpha\le\mu_\alpha^0,\quad \alpha=1,2$ *ва* $\mu_3>\mu_3^*$, $H_i(\mathbf{0})=H_0(\mathbf{0})-\mu_i\widetilde{V}_i,\ i=1,2,3$ *бўлсин. У ҳолда* $\sigma(H_i(\mathbf{0}))=[m_0;M_0],\ i=1,2$ *ва* $\sigma(H_3(\mathbf{0}))=[a_3,b_3]\cup[0,M_\mathbf{0}]$. *Бундан ташқари лемма 1 га биноан (7) формула бўйича аниқланган* $H(\mathbf{0})$ *операторнинг* $\sigma_{ess}(H(\mathbf{0}))$ *муҳим спектри бўшлиқ* *оралиқни ўз ичига олади, аниқроғи* $\sigma_{ess}(H(\mathbf{0}))=[a_3,b_3]\cup[0,M_{\mathbf{0}}]$, $a_3<b_3<-m$ *муносабат ўринли.*

Диссертациянинг **“Уч заррачали дискрет Шредингер операторининг дискрет спектри ҳақида”** деб аталувчи учинчи бобида уч заррачали дискрет Шредингер оператори (ДШО) нинг дискрет спектри ўрганилган. Уч заррачали Шредингер операторининг дискрет спектри чеклилиги учун етарли шартлар топилган. Уч заррачали ДШО нинг муҳим спектридан ташқарида жойлашган ихтиёрий оралиғида ётадиган хос қийматлар сони учун формулалар олинган (қар. теорема 6) ва теорема 6 натижалари исботланган. Теорема 6 натижасининг қўлланмаси сифатида муҳим спектрда бўшлиқ оралиқлар ва чекли дискрет спектрга эга бўлган уч заррачали ДШО га мисол келтирилган.

Бундан ташқари, контакт таъсирлашувчи потенциалга эга бўлган уч заррачали ДШО муҳим спектрнинг бўшлиқ оралиғида чексиз сондаги хос қийматлари мавжудлиги кўрсатилган. Бу бўшлиқ оралиқда мавжуд бўлган уч заррачали ДШО нинг хос қийматлари сони учун қуйидан баҳо олинган.

(7) формула бўйича аниқланган $H(K)$ операторнинг муҳим спектридан ташқарида жойлашган хос қийматларининг хоссаларини келтирамиз.

Ушбу

$$H_\alpha(K)-zI=(H_0(K)-zI)(I-R_0(z)V_\alpha),$$

тенгликка кўра, бунда $R_0(z)=:(H_0(K)-zI)^{-1}$, $W_\alpha(z)=(I-V_\alpha^{\frac{1}{2}}R_0(z)V_\alpha^{\frac{1}{2}})^{-1}$ оператор фақат ва фақат $z\notin\sigma(H_\alpha(K))$ бўлганда мавжуд бўлади. Бундан ташқари барча $z<inf\sigma_{ess}(H_\alpha(K))$ учун $W_\alpha(z)$ мусбат оператор бўлади.

$z<\inf\sigma(H_1(K))\cup\sigma(H_2(K))$, $z\notin\sigma(H_3(K))$ учун $L_2^{(2)}((\mathbb{T}^3)^2)$ гильберт фазосида қуйидаги формула бўйича $\mathbf{T}(z)$ операторни аниқлаймиз

$$\mathbf{T}(z)=\begin{pmatrix} 0 & W_1^{\frac{1}{2}}(z)K_{12}(z)W_2^{\frac{1}{2}}(z) \\ W_2^{\frac{1}{2}}(z)K_{21}(z)W_1^{\frac{1}{2}}(z) & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} T_{11}(z) & T_{12}(z) \\ T_{21}(z) & T_{22}(z) \end{pmatrix}.$$

бу ерда $K_{ij}(z)=V_i^{\frac{1}{2}}R_0(z)V_j^{\frac{1}{2}}$, $T_{ij}(z)=W_i^{\frac{1}{2}}(z)K_{i3}(z)W_3(z)K_{3j}(z)W_j^{\frac{1}{2}}(z)$.

Таъкидлаш жоизки, ҳар бир фиксирланган $z\notin\sigma(H_3(K))$ учун $W_3(z)$ оператор аниқланган, хусусан, у $\sigma(H_3(K))$ спектрнинг исталган (a,b) бўшлиқ оралиқларида ётган ҳар бир фиксирланган z учун аниқланади. Шунинг учун агар бундай бўшлиқ оралиқ мавжуд бўлса, $H(K)$ операторнинг муҳим спектридаги (a,b) бўшлиқ оралиғида $\mathbf{T}(\cdot)$ оператор функция сифатида аниқланади.

Теорема 6. $z_0<\inf\sigma(H_1(K))\cup\sigma(H_2(K)), z_0\notin\sigma(H_3(K))$ *сони (7) формула билан аниқланган* $H(K)$ *операторнинг хос қиймати бўлиши учун* $n(1,\mathbf{T}(z))$ *функция* $z=z_0$ *нуқтада узилишга эга бўлиши зарур ва етарли. Бундан ташқари* z_0 *хос қийматнинг* k *карралилиги ушбу*

$$k = \lim_{\xi\to+0}[n(1,\mathbf{T}(z_0+\xi))-n(1,\mathbf{T}(z_0))]+\lim_{\xi\to+0}[n(1,\mathbf{T}(z_0-\xi))-n(1,\mathbf{T}(z_0))]$$

формула бўйича аниқланади.

$\mathbf{T}(z_0)$ операторнинг компактлиги ва Вейл тенгсизлигидан кичик $|\xi|$ лар учун ушбу $n(1,\mathbf{T}(z_0))\le n(1,\mathbf{T}(z_0+\xi))$ тенгсизлик келиб чиқади. Шунинг учун теорема 6 дан қуйидаги натижа келиб чиқади.

Натижа 3. *Ҳар бир $[a,b]\subset\mathbb{R}\setminus\sigma_{ess}(H(K))$ сегмент учун*

$$N_{(a,b)}(H(K)) = \bigvee_a^b (n(1,\mathbf{T}(\cdot)))$$

тенглик ўринли, бу ерда $\bigvee_a^b(f)-$ f функциянинг (a,b) интервалда тўлиқ ўзгариши. Бундан ташқари $n(1,\mathbf{T}(\cdot))$ функциянинг $(-\infty,\inf\sigma_{ess}(H(K)))$ интервалда монотонлиги ва $\lim\limits_{z\to-\infty}\|\mathbf{T}(z)\|=0$ тенгликдан

$$N_{(-\infty,z)}(H(K)) = n(1,\mathbf{T}(z)),\quad z<\inf\sigma_{ess}(H(K))$$

тенгликка эга бўламиз.

Ихтиёрий $(a,b)\subset\mathbb{R}\setminus\sigma_{ess}(H(K))$ интервалда ётувчи дискрет спектрнинг чеклилиги учун ушбу шартларни бевосита ҳосил қиламиз.

Натижа 4. *$(a,b)\subset\mathbb{R}\setminus\sigma_{ess}(H(K))$ ва $\mathbf{T}(z)$ оператор-функция $z\to a+0$ ва $z\to b-0$ да мос ҳолда $\mathbf{T}(a)$ ва $\mathbf{T}(b)$ операторларга текис яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда $H(K)$ оператор (a,b) интервалда чекли сондаги хос қийматларга эга бўлиши мумкин. Хусусан, $\mathbf{T}(b)$, $b=\inf\sigma_{ess}(H(K))$ компакт бўлганда $H(K)$ операторнинг муҳим спектридан чапда ётувчи хос қийматлари сони чекли бўлади.*

Мисол. Натижа 4 ни асослаш мақсадида $H(K)$ уч заррачали ДШО нинг иккита заррачасининг массалари тенг, яъни $m_1=m_2=m$ ва $K=\mathbf{0}\in\mathbb{T}^3$, тортишувчи потенциаллари

$$v_1(p)=v_2(p)=\frac{\mu}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\sum_{n=0}^{N}\sum_{i=1}^{3}\frac{cos(np_j)}{n!},\quad p=(p_1,p_2,p_3)\in\mathbb{T}^3,$$

$$v_3(p)=\mu_3(2\pi)^{\frac{3}{2}}cosp_1,\quad p=(p_1,p_2,p_3)\in\mathbb{T}^3$$

кўринишга эга бўлган мисолни қараймиз, бу ерда $\mu,\ \mu_\alpha>0$ ва $N\le\infty$. Бундан ташқари $v_\alpha(\cdot)$, $\alpha=1,2,3$ функцияниг Фурье алмаштириши бўлган $\hat{v}_{\beta\gamma}(s)$, $\{\alpha,\beta,\gamma\}=\{1,2,3\}$ – $\mathbb{Z}^3$ да аниқланган номанфий, жуфт функция бўлсин.

Бу ҳолда $H:=H(\mathbf{0})$ уч заррачали ДШО $L_2((\mathbb{T}^3)^2)$ фазода қуйидаги формула бўйича аниқланади

$$H=H_0-V_1-V_2-V_3,$$

$$(V_1f)(p,q)=\frac{\mu}{(2\pi)^3}\sum_{n=0}^{N}\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{T}^3}\frac{cos(n(p_i-s_i))}{n!}f(s,q)ds,$$

$$(V_2 f)(p,q) = \frac{\mu}{(2\pi)^3} \sum_{n=0}^{N} \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{cos(n(q_i - s_i))}{n!} f(p,s)ds,$$

$$(V_3 f)(p,q) = \mu_3 \int_{\mathbb{T}^3} cos(p_1 - s_1) f(s, p+q-s)ds,$$

бу ерда H_0 ушбу

$$\mathcal{E}(p,q) = \frac{1}{m}\varepsilon(p) + \frac{1}{m}\varepsilon(q) + \frac{1}{m_3}\varepsilon(p+q)$$

функцияга кўпайтириш оператори, бунда $\varepsilon(p) = \sum_{i=1}^{3}(1-\cos p^{(i)})$.

$\mu^0 = \max_{z\leq 0} \|\widetilde{V}_\alpha^{\frac{1}{2}} R_0(z) \widetilde{V}_\alpha^{\frac{1}{2}}\| = \|\widetilde{V}_\alpha^{\frac{1}{2}} R_0(0) \widetilde{V}_\alpha^{\frac{1}{2}}\|$ ва $\lambda > \frac{6}{m_3}$ бўлсин. Ушбу белгилашни киритамиз

$$\mu^* = \frac{\frac{6}{m_3} + \lambda}{4\pi^3}.$$

Теорема 7. *Барча* $\mu \leq \mu^0$ *ва* $\mu_3 > \mu^*$ *учун* H *операторнинг муҳим спектри* $\sigma_{ess}(H)$ *бўшлиқ оралиқни ўз ичига олади, аниқроғи* $\sigma_{ess}(H) = [\tau', \tau''] \cup [0, M_{\mathbf{0}}]$, $\tau' < \tau'' < 0$. *Бундан ташқари* H *операторнинг дискрет спектри* $\sigma_{disc}(H)$ *чекли тўплам бўлади.*

Контакт потенциалли уч заррачали дискрет Шредингер оператори муҳим спектрининг бўшлиқ оралиғидаги дискрет спектрнинг чексизлиги ҳақида

Қуйидаги натижалар (7) формула билан аниқланган контакт таъсирлашувчи потенциалга эга бўлган ушбу

$$H(K) = H_0(K) - \mu_1\widetilde{V}_1 - \mu_2\widetilde{V}_2 - \mu_3\widetilde{V}_3$$

уч заррачали ДШО учун олинган.

Таъриф. *Агар ушбу*

$$\varphi(p) = \frac{\mu_\alpha}{(2\pi)^3} \frac{m_\beta m_\gamma}{m_\beta + m_\gamma} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\varphi(s)ds}{\varepsilon(s)}$$

тенглама $\psi_\alpha(\mathbf{0}) \neq 0$ *шартни қаноатлантирувчи ягона нотривиал* $\psi_\alpha \in C(\mathbb{T}^3)$ *ечимга эга бўлса, у ҳолда* $h_\alpha(\mathbf{0})$, $\mathbf{0} = (0,0,0) \in \mathbb{T}^3$ *оператор нолда резонанс (виртуал сатҳ)га эга дейилади.*

Содда ҳисоблашлар шуни кўрсатадики, $h_\alpha(\mathbf{0})$ оператор нолда резонансга эга бўлиши учун $\mu_\alpha = \mu_\alpha^0$ тенглик бажарилиши зарур ва етарли, бу ерда μ_α^0 – сони (11) формула бўйича аниқланган.

Осонгина текшириш мумкинки, нол нуқта $h_3(\mathbf{0})$ операторнинг регуляр нуқтаси бўлиши учун $\mu_3 < \mu_3^0$ ёки $\mu_3 > \mu_3^0$ бўлиши зарур ва етарли.

Эслатиб ўтамизки, теорема 5 га кўра $H(\mathbf{0})$ операторнинг муҳим спектри $\mu_1=\mu_1^0$, $\mu_2=\mu_2^0$ ва $\mu_3>\mu_3^*$ да бўшлиқ оралиқларни ўз ичига олади, бу ерда μ_3^0 – сони (11) формула бўйича аниқланган.

Теорема 8. *$\mu_1=\mu_1^0$, $\mu_2=\mu_2^0$ ва $\mu_3>\mu_3^*$ ($\mu_3<\mu_3^0$) бўлсин. У ҳолда (7) формула билан аниқланган $H(\mathbf{0})$ оператор муҳим спектрнинг $(b_3,0)$ бўшлиқ оралиғида ($(-\infty,0)$ интервалда) чексиз сондаги хос қийматларга эга бўлади.*

Теорема 9. *$\mu_1=\mu_1^0$, $\mu_2=\mu_2^0$ ва $\mu_3>\mu_3^*$ бўлсин. У ҳолда (7) формула билан аниқланган $H(\mathbf{0})$ оператор муҳим спектрнинг $(b_3,0)$ бўшлиқ оралиғида ($(-\infty,0)$ интервалда) чексиз сондаги хос қийматларга эга бўлади ҳамда*

$$\lim_{z\to-0}\frac{N_{(b/2,z)}(H(\mathbf{0}))}{|\log|z||}\geq\mathcal{U}_0$$

муносабат ўринли бўлади, бу ерда $\mathcal{U}_0>0$ коэффициент v_α, $\alpha=1,2,3$ ўзаро таъсир потенциалларига боғлиқ эмас ва учта заррачанинг массалари m_1/m_2, m_2/m_3 нисбатининг мусбат функциялари бўлади.

Диссертациянинг **“Тўрт заррачали дискрет Шредингер операторининг муҳим спектри”** номли тўртинчи бобида тўрт заррачали системанинг барча мумкин бўлган қисм системаларига мос қисм гамильтонианларнинг спектрлари тавсифланган. Тўрт заррачали ДШО нинг хос функциялари учун Фаддеев-Якубовский тенгламасига ўхшаш тенглама олинган. Тўрт заррачали ДШО нинг муҳим спектри қисм гамильтонианларнинг спектрларидан иборат эканлиги исботланган. Системадаги заррачалар контакт жуфт-жуфти билан тортишувчи потенциаллар ёрдамида ўзаро таъсирлашадиган ҳолат қаралган. Тўрт заррачали ДШО учун ХВЖ (Хунцикер, ван Винтер ва Г.М.Жислин) теоремасини аниқ тавсифловчи ҳолатлари аниқланган.

Уч ўлчамли $\mathbb{Z}^3$ панжарада тўртта ихтиёрий квант заррачали система $\hat{H}_0$ эркин гамильтонианини қараймиз. У $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^4)$ гильберт фазосида чегараланган ўз-ўзига қўшма оператор сифатида қуйидаги формула бўйича аниқланади:

$$\hat{H}_0=\frac{1}{2m_1}\Delta_{x_1}+\frac{1}{2m_2}\Delta_{x_2}+\frac{1}{2m_3}\Delta_{x_3}+\frac{1}{2m_4}\Delta_{x_4}$$

бу ерда $\Delta_{x_1}=\Delta\otimes I\otimes I\otimes I,\quad \Delta_{x_2}=I\otimes\Delta\otimes I\otimes I,\quad \Delta_{x_3}=I\otimes I\otimes\Delta\otimes I$ ва $\Delta_{x_4}=I\otimes I\otimes I\otimes\Delta$, $m_\alpha>0$ – α заррачанинг массаси, Δ – дискрет Лапласиан.

Тўрт квант заррачали системага мос $\hat{H}$ гамильтониан жуфт-жуфти билан қисқа таъсирлашувчи $\hat{v}_{ij}$, $1\leq i<j\leq 4$ потенциал билан $\hat{H}_0$ эркин гамильтонианнинг чегараланган қўзғатувчиси сифатида қуйидагича аниқланади:

$$\hat{H}=\hat{H}_0-\hat{V}_{12}-\hat{V}_{13}-\hat{V}_{23},$$

бу ерда $\hat{V}_{ij}$ – $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^4)$ фазодаги кўпайтириш оператори:

$$(\hat{V}_{ij}\hat{\psi})(x_1,x_2,x_3,x_4)=\hat{v}_{ij}(x_i-x_j)\hat{\psi}(x_1,x_2,x_3,x_4),\quad 1\le i<j\le 4,$$

$\hat{v}_{ij}$ – чегараланган ҳақиқий қийматли функция.

Қуйидаги барча жойда $\hat{v}_{ij}(s),\, 1\le i<j\le 4$ га нисбатан (5) шарт бажарилсин деб фараз қиламиз.

$K=k_1+k_2+k_3+k_4$ – тўрт заррачали системанинг тўла квазиимпульси $\mathbb{F}_K^4=\{(k_1,k_2,k_3,k_4)\in(\mathbb{T}^3)^4 : k_1+k_2+k_3+k_4=K\}$ – ўлчами 9 га тенг бўлган кўпхиллик бўлсин.

Импульс тасвирда тўртта ихтиёрий квант заррачали системани тавсифловчи $H=\mathcal{F}_4^{-1}\hat{H}\mathcal{F}_4$ оператор $L_2((\mathbb{T}^3)^4)$ фазода аниқланади ва H оператор қуйидаги тўғри интеграл йиғинди кўринишида тасвирланади

$$H=\int_{\mathbb{T}^3}\oplus\,\tilde{H}(K)dK,$$

бунда $\tilde{H}(K)$ – $L_2(\mathbb{F}_K^4)$ фазода аниқланган чегараланган ўз-ўзига қўшма оператор бўлиб, $L_2((\mathbb{T}^3)^3)$ фазода қуйидаги формула билан аниқланган $H(K)$ операторга унитар эквивалент

$$H(K)=H_0(K)-V, \tag{12}$$

$$V=\sum_{i<j}V_{ij},\quad 1\le i<j\le 4.$$

Бу ерда $H_0(K)$ – ушбу

$$\varepsilon_K(k_1,k_2,k_3)=\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{2m_i}\varepsilon(k_i),\quad k_4=K-k_1-k_2-k_3,$$

функцияга кўпайтириш оператори, V_{ij} – хусусий интеграл оператор

$$(V_{ij}f)(k_1,k_2,k_3)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{(\mathbb{T}^3)^3}v_{ij}(k_i-k_i')\delta(k_l-k_l')\delta(k_i+k_j-k_i'-k_j')\times$$
$$f(k_1',k_2',k_3')dk_1'dk_2'dk_3',\quad i\ne j\ne l,\ j\ne 4,$$

$$(V_{i4}f)(k_1,k_2,k_3)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{(\mathbb{T}^3)^3}v_{i4}(k_i-k_i')\delta(k_l-k_l')\delta(k_i+k_4-k_i'-k_4')\times$$
$$f(k_1',k_2',k_4')dk_1'dk_2'dk_3',\quad l\ne i\quad (k_4=k_1+k_2+k_3).$$

Таъриф. $\{1,2,\ldots,N\}$ *тўпламнинг* k *та кесишмайдиган* $C_1,C_2,\ldots,C_k$ *қисм тўпламларга* D *бўлинишли кластер ёйилмаси деб аталади.*

Фараз қилайлик, $D: C_1\cup C_2\cup\ldots\cup C_k=\{1,2,\ldots,N\}$ – кластер ёйилма ва V_D оператор V_{ij} потенциаллар йиғиндиси бўлсин, бунда i ва j турли кластерларда ётади.

Таъриф. $L_2((\mathbb{T}^3)^3)$ *фазода аниқланган* $H_D(K)=H(K)+V_D,\quad K\in\mathbb{T}^3$ *операторга* D *кластер ёйилмага мос бўлган канал оператори дейилади, бунда* $H(K)$ *оператор (12) формула билан аниқланган.*

$N=4$ бўлганда мумкин бўлган кластер ёйилмалари қуйидагича:

$$D_0=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\},\ D_1=\{\{1,2\},\{3\},\{4\}\},\ D_2=\{\{1,3\},\{3\},\{4\}\},$$
$$D_3=\{\{1,4\},\{2\},\{3\}\},\ D_4=\{\{2,3\},\{1\},\{4\}\},\ D_5=\{\{2,4\},\{1\},\{3\}\},$$
$$D_6=\{\{3,4\},\{1\},\{2\}\},\ D_7=\{\{1\},\{2,3,4\}\},\ D_8=\{\{2\},\{1,3,4\}\},$$
$$D_9=\{\{3\},\{1,2,4\}\},\ D_{10}=\{\{4\},\{1,2,3\}\},\ D_{11}=\{\{1,2\},\{3,4\}\},$$
$$D_{12}=\{\{1,3\},\{2,4\}\},\ D_{13}=\{\{1,4\},\{2,3\}\}.$$

Теорема 10. $H(K)$ *операторнинг муҳим спектри ушбу*

$$\sigma_{ess}(H(K))=\bigcup_{i=0}^{13}\sigma(H_{D_i}(K))$$

тўпламдан иборат.

Бу теорема тасдиғидан фойдаланиб, қаралаётган оператор учун Хунцикер–ван Винтер–Жислин теоремасини оламиз.

Теорема 11. *(ХВЖ – теоремаси).*

$$\inf\sigma_{ess}(H(K))=\inf_{\{D:\#D=2\}}\sigma(H_D(K)),\qquad \{D:\#D=2\}=\{D_7,\ldots,D_{13}\}.$$

Қуйидаги теорема ихтиёрий тўрт заррачали системага мос $H(K)$ Шредингер оператори муҳим спектрининг аниқ қуйи чегараси турли кластер ёйилмаларга мос бўлган канал операторларнинг спектрида ётиши мумкинлигини кўрсатади.

$H_D(\mu;K)=H(\mu;K)+V_D$ бўлсин, бунда $H(\mu;K)$ – контакт потенциалли $H(K)$ операторни ифодалайди.

Теорема 12. *а) шундай* $\mu_0>0$ *топилиб, ихтиёрий* $\mu_{ij}<\mu_0$ *лар учун ушбу1*

$$\sigma_{ess}(H(\mu;\mathbf{0}))=\sigma(H_0(\mathbf{0}))=[0,M_{\mathbf{0}}],\quad M_0=6\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{m_i}$$

тенглик ўринли;

б) шундай $\Lambda,\ \lambda>0$ *сонлар топилиб, ихтиёрий* $\mu_{ij}>\Lambda,\ \{i,j\}\subset\{2,3,4\}$, $i<j$ ва $\mu_{1j}<\lambda,\ j\in\{2,3,4\}$ *лар учун ушбу2*

$$\inf\sigma_{ess}(H(\mu;\mathbf{0}))=\inf\sigma(H_{D_7}(\mu;\mathbf{0}))<\inf_{D\neq D_7}\sigma(H_D(\mu;\mathbf{0}))$$

муносабат ўринли;

в) шундай $\Lambda',\ \lambda'>0$ *сонлар топилиб, ихтиёрий* $\mu_{12}>\Lambda',\mu_{34}>\Lambda'$ *ва* $\mu_{ij}<\lambda',\ i\in\{1,2\},\ j\in\{3,4\}$ *лар учун ушбу*

$$\inf\sigma_{ess}(H(\mu;\mathbf{0}))=\inf\sigma(H_{D_{11}}(\mu;\mathbf{0}))<\inf_{D\neq D_{11}}\sigma(H_D(\mu;\mathbf{0}))$$

муносабат ўринли.

ХУЛОСА

Диссертация иши панжарадаги жуфт-жуфти билан қисқа таъсирлашувчи потенциалларга эга бўлган икки, уч ва тўрт заррачали системаларга мос Шредингер операторларининг дискрет ва муҳим спектрларини тадқиқ қилишга бағишланган.

Илмий изланишнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Икки заррачали дискрет Шредингер оператори учун квазиимпульснинг барча нолга тенг бўлмаган қийматларида мусбатлик шартлари топилган, шунингдек, квазиимпульснинг нолга тенг бўлмаган қийматлари учун Шредингер оператори хос қийматининг мавжудлиги ва мусбатлиги исботланган.
2. Икки ва уч заррачали дискрет Шредингер операторларининг муҳим спектридан ташқарида ҳар қандай интервалда ётувчи дискрет спектри сони учун ифода олинган.
3. Уч заррачали дискрет Шредингер оператори дискрет спектрининг чеклилиги учун шартлар аниқланган.
4. Уч заррачали дискрет Шредингер оператори муҳим спектрининг бўшлиқ оралиғи ва бу оралиқда чексиз сондаги хос қийматлари (Ефимов эффекти) мавжудлиги шартлари топилган.
5. Уч заррачали дискрет Шредингер операторининг спектрал параметри бўйича бўшлиқ оралиқдаги хос қийматлар сони учун қуйидан баҳо олинган.
6. Жуфт-жуфти билан қисқа таъсирлашувчи потенциалга эга бўлган ихтиёрий тўрт заррачали дискрет Шредингер оператори муҳим спектрининг тузилиши ва жойлашуви тавсифланган ҳамда ХВЖ (Хунцикер–ван Винтер–Жислин) теоремаси исботланган.
7. Тўрт заррачали системада заррачалар ихтиёрий бўлган ҳолда турли потенциаллар жуфтлиги мавжудлигининг икки ҳолати кўрсатилган. Тўрт заррачали ДШО муҳим спектрининг аниқ қуйи чегарасига биринчи ҳолатда $\{\{1\},\{2,3,4\}\}$ кластер ёййилмасига мос, иккинчи ҳолат эса $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$ кластер ёйилмасига мос қисм гамильтонианларнинг спектрида эришади.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.02.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
САМАРКАНДСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ**

САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МУМИНОВ МУХИДДИН ЭШКОБИЛОВИЧ

СУЩЕСТВЕННЫЕ И ДИСКРЕТНЫЕ СПЕКТРЫ ОПЕРАТОРОВ ШРЁДИНГЕРА НА РЕШЕТКЕ

01.01.01 – математический анализ

**АВТОРЕФЕРАТ
ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА (DSc) ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК**

Самарканд – 2021 год

Тема докторской (DSc) диссертации зарегистрирована в Высшей аттестционной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2021.2.DSc/FM176

Диссертация выполнена в Самаркандском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский) размещен на веб-странице Научного совета (www.samdu.uz) и информационно-образовательном портале «ZIYONET» (www.ziyonet.uz).

Научный консультант:	**Лакаев Саидахмат Норжигитович** доктор физико-математических наук, академик
Официальные оппоненты:	**Розиков Уткир Абдуллоевич** доктор физико-математических наук, профессор
	Рахимов Абдумалик Абдумаджидович доктор физико-математических наук, профессор
	Халхужаев Ахмад Мияссарович доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	**Ургенчский государственный университет**

Защита диссертации состоится «23» июля 2021 года в 10^{00} часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 при Самаркандском государственном университете. (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (99866)231-06-32, факс: (99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Самаркандского государственном университета (зарегистрирована за № 30). (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (99866)231-06-32, факс: (99866) 235-19-38).

Автореферат диссертации разослан «5» июля 2021 года.
(протокол рассылки № 2 от «5» июля 2021 года).

А.С.Солеев
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

А.М.Халхужаев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н.

И.А.Икромов
Заместитель председателя научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многочисленные научно-прикладные исследования, проводимые в мировом уровне, приводятся к исследованиям задач квантовой механики, которые являются одной из теорий явлений микромира. Уравнение Шредингера, описывающее стационарные состояния частиц, является основным уравнением квантовой теории. Модель Бозе–Хаббарда, используемый для описания отталкивающих и притягивающих пар, т.е. оператор Шредингера на решетке, является теоретическим обоснованием экспериментального наблюдения и теоретической базой для применения. Поэтому развитие исследования операторов Шредингера, соответствующих гамильтонианам систем частиц на решетке, которые встречаются в моделях физики твердого тела, а также квантовой теории поля, является одним из приоретных направлений.

В мире науки актуальным является решение проблем, относящиеся исследований спектров операторов Шредингера, соответствующих гамильтонианам систем двух, трех и четырех квантовых частиц на кубической решетке, которые являются довольно чувствительными к изменению квазиимпульса систем, в частности, существование связанных состояний и определить их числа. В связи с этим развитие следующих исследований являются актуальными вопросами с практической и теоретической точки зрения: описать местоположение и структуру существенного спектра операторов Шредингера, соответствующих системам двух, трех и четырех произвольных частиц, существование бесконечного числа собственных значений (эффекта Ефимова) на лакуне существенного спектра, доказать аналог теоремы ХВЖ (Хунцикера– ван Винтера–Жислина), доказать существование и определить число собственных значений.

Ученными нашей страны больше внимания уделяется актуальным направлениям фундаментальных наук с научными и практическими приложениями, в частности, они уделяют особое внимание исследованию операторов Шредингера, соответствующих гамильтонианам систем частиц на кубической решетке. Основными задачами и направлениями деятельности математической науки являются проведение исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям “Алгебры и ее приложений, дифференциальных уравнений и их приложений, математического моделирования нелинейных систем, динамических систем и их приложений, стохастического анализа, медико-биологической информатики, вычислительной математики”[3]. В обеспечении исполнения данного постановления важное значение имеет развивать спектральную теорию самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.

[3]Указ Президента Республики Узбекистан ПП-4387 от 9 июля 2019 года “О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан”.

Тема и объект исследования настоящей диссертации находится в русле проблем, которые входят в тематику задач, отмеченных в Указах Президента Республики Узбекистан УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», № УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» и ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Связь исследования к приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации[4]. Научные исследования по изучению спектра операторов Шредингера, а также модели Фридрихса, ведутся в высших учебных заведениях и крупных научных центрах мира, в частности: в Universitat Innsbruck (Австрия), University of Missouri, Princeton University, Harvard University (США), Université Paris Nord (Франция), Kyoto University (Япония), Weierstrass Institute for Applied and Stochastics и Universität Mainz (Германия), University Roma and SISSA (Italy), University of Basel, Universität Zürich, Universität Bern (Switzerland), Universidade de São Paulo (Бразилия), University of Toronto (Канада), Universiti Kuala Lumpur, Universiti Teknologi Malaysia (Малайзия), Институте проблем передачи информации РАН, Нижегородском государственном университете имени Лобачевский, Санкт-Петербургском отделении Математического института РАН, институт теоретической физики РАН, Московском государственном университете (Россия).

В результате научных исследований, проведенных для операторов Шредингера, а также моделей Фридрихса в мире решены целый ряд актуальных задач, в том числе, получены следующие научные результаты: гамильтониан Бозе-Хаббарда, т.е. дискретный оператор Шредингера, используемый для описания отталкивающих пар, берется в качестве теоретического обоснования экспериментального наблюдения и доказывается, что в упорядоченных средах устойчивые сложные объекты могут существовать даже в случае отталкивающих взаимодействий (Universitat Innsbruck (Австрия)); изучена зависимость собственных значений от константы связи для двухчастичных операторов Шредингера (Princeton University (США), University of Basel (Швейцария), Самаркандский

[4] Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации: https://www.springer.com/gp/mathematics; https://onlinelibrary.wiley.com/; www.mathnet.ru; www.scholar. google.com; www.elsevier.com /locate/camw также были исследованы и другие источники.

государственный университет); найдены условия существования собственных значений двухчастичного дискретного оператора Шредингера с произвольным потенциалом (Universität Bonn (Германия), University of Missouri (США), Самаркандский государственный университет); доказан эффект Ефимова для трехчастичных операторов Шредингера (Физико-технический институт РАН, Санкт-Петербургское отделение Математического института РАН (Россия), (Université Paris Nord (Франция)), Kyoto University (Япония), институт теоретической физики РАН (Россия), Самаркандский государственный университет); получены условия существования собственных значений, а также конечности или бесконечности их числа для обобщенной модели Фридрихса, соответствующей трехчастичной системе; (Weierstrass Institute for Applied and Stochastics (Германия), Нижегородский государственный университет имени Лобачевского (Россия), Самаркандский государственный университет); описано местоположение существенного спектра N– частичного оператора Шредингера (Нижегородский государственный университет имени Лобачевского (Россия), Самаркандский государственный университет).

На мировом уровне осуществляется ряд научно-исследовательских работ в приоритетных направлениях по исследованию спектральных свойств операторов Шредингера систем двух, трех и четырех частиц на решетке, такие как нахождение условия положительности двухчастичного оператора Шредингера на решетке, установить условия конечности или бесконечности дискретного спектра трехчастичного оператора Шредингера на решетке; описать местоположение и структуру существенного спектра четырехчастичного оператора Шредингера с парными короткодействующими потенциалами, а также доказать теорему ХВЖ (Хунцикера–ван Винтера–Г.М.Жислина).

Степень изученности проблемы. Задачи изучения операторов Шредингера тесно связаны с изучением основных задач физики твердого тела, квантой теории поля, норелятивистической квантовой механики. Наиболее полный обзор результатов по этой области содержится во многих научных литературах, в частности, монографии современной математической физики – четырехтомнике М.Рида и Б.Саймона. Операторы Шредингера, соответствующие системам частиц на решетке, впервые рассматривались в 90-х годах XX века Д.С.Маттисом, А.И.Могильнером и после чего исследования бурно развились. В случае оператора Шредингера на решетке в математическом смысле возникают те же проблемы и тот же порядок их изучения, что и в случае непрерывного оператора Шредингера. А именно, следует сначала изучить одночастичные операторы, а затем двух и т.д. многочастичные операторы Шредингера. Задачи как описание существенного спектра, установление существования, а также конечность или бесконечность дискретного спектра операторов Шредингера, а также обобщенной модели Фридрихса изучены в работах М.Клауза, Б.Саймона, Г.М.Графа, Д.Шенкера, Р.А.Минлоса, Г.М.Жислина, Д.Р.Яфаева, Р.А.Фариа да Веига, Е.Л.Лакштанова, С.Н.Лакаева, К.Макарова, А.В.Соболева и др.

В работах Е.Л.Лакштанова, Р.А.Минлоса исследованы двухчастичные связанные состояния трансфер-матриц довольно широкого класса гиббсовских полей при высокой температуре, изучена природа появления связанных состояний двухчастичных кластерных операторов при малых значениях параметра кластерности. Авторами Faria da Veiga, L.Ioriatti, M.O’Carroll изучены спектральные свойства в зависимости от квазиимпульса системы двух частиц.

С.Албеверио, С.Лакаевым, К.Макаровым и З.Муминовым найдены условия существования собственных значений двухчастичных операторов Шредингера, ассоциированных гамильтонианом системы двух произвольных частиц на d - мерной решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$.

Появление бесконечного числа собственных значений левее существенного спектра трехчастичного непрерывного оператора Шредингера при некоторых условиях на потенциал впервые был обнаружен Ефимовым. Строгое математическое доказательство существования эффекта Ефимова было проведено впервые в работе Д.Р.Яфаева, а затем в работах Ю.Овчинникова, И.М.Сигала, Х.Тамуры.

Впервые С.Н.Лакаевым доказано существование эффекта Ефимова для трехчастичного дискретного оператора Шредингера, соответствующего системе трех одинаковых частиц, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения при нулевом значении квазиимпульса системы. В работах С.Н.Лакаева, Ж.И.Абдуллаева и З.Э.Муминова получены асимптотики для числа собственных значений, лежащих левее существенного спектра разностных операторов Шредингера, соответствующих системам трех частиц, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения.

Отметим, что выше указанных работах доказаны, что если в системе трёх частиц, взаимодействующих с помощью парных короткодействующих потенциалов, по меньшей мере, две из них имеют резонанс с нулевой энергией, то у этой трехчастичной системы существуют бесконечное число трехчастичных связанных состояний левее существенного спектра. Появление лакуны существенного спектра характерны для дискретного оператора Шредингера. В частности, если две двухчастичные подсистемы имеют виртуальный уровень в нуле, и третий потенциал достаточно большой, тогда появляется лакуна существенного спектра и в этом случае вопрос конечности или бесконечности числа собственных значений было открытой.

Хунцикерым, ван Винтером и Г.М.Жислиным доказан, что существенный спектр N– частичного непрерывного оператора Шредингера состоит из полуинтервала и наименьший элемент достигает на спектре подгамильтонанов определенного класса. Этот результат в спектральной теории называется теоремой Хунцикера–ван Винтера–Жислина (ХВЖ). Отметим, что доказательство теоремы ХВЖ для четырехчастичного оператора Шредингера было открытой.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в которой выполняется диссертация.

Исследования проводились в соответствии с научной плановой темой кафедрой “**Математической физики и функционального анализа**” СамГУ.

Целью исследования является изучение спектральных свойств некоторых систем двух, трех и четырех произвольных квантовых частиц, движущихся на трехмерной решетке, в случаях, когда частицы взаимодействуют с помощью парных контактных, а также короткодействующих потенциалов притяжения.

Задачи исследования:

найти условия положительности двухчастичного дискретного оператора Шредингера при всех значениях квазиимпульса системы двух частиц;

получить формулу для числа дискретного спектра, лежащих в любом интервале вне существенного спектра двух и трехчастичных дискретных операторов Шредингера;

найти условия конечности дискретного спектра трехчастичного дискретного оператора Шредингера;

доказать существование бесконечного числа собственных значений (эффект Ефимова) на лакуне существенного спектра трехчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе трех частиц с парными контактными потенциалами;

описать местоположение и структуру существенного спектра дискретного оператора Шредингера четырех произвольных частиц с парными короткодействующими потенциалами и доказать теорему ХВЖ (Хунцикера–ван Винтера–Жислина).

Объект исследования. Операторы Шредингера, соответствующие системам двух, трех и четырех частиц с парными короткодействующими потенциалами на решетке.

Предмет исследования. Спектральный анализ двух, трех и четырех произвольных частицных операторов Шредингера, с парными короткодействующими потенциалами на решетке.

Методы исследования. В диссертации использованы методы спектральной теории линейных операторов; компактных интегральных уравнений типа Фаддеева-Ньютона для резольвент гамильтонианов трех частиц на решетке; аналитического продолжения детерминанта Фредгольма, ассоциированного дискретного оператора Шредингера; принципа Бирмана-Швингера.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

найдены условия положительности двухчастичного дискретного оператора Шредингера при всех ненулевых значениях квазиимпульса, при этом доказано существование и положительность собственного значения при всех ненулевых значениях квазиимпульса;

получена формула для числа собственных значений, лежащих в любом интервале вне существенного спектра операторов Шредингера, соответствующих системам двух и трех частиц на решетке;

установлено условие конечности дискретного спектра трехчастичного дискретного оператора Шредингера;

найдено условие существования лакуны существенного спектра и доказано существование бесконечного числа собственных значений трехчастичного дискретного оператора Шредингера (эффект Ефимова) на этой лакуне существенного спектра;

описаны местоположение и структура существенного спектра дискретного оператора Шредингера четырех произвольных частиц с парными короткодействующими потенциалами и доказана теорема ХВЖ (Хунцикера–ван Винтера–Жислина).

Практическими результатами исследования являются следующие:

из методов доказательства бесконечности числа собственных значений на лакуне существенного спектра для трехчастичного оператора Шредингера, были использованы при доказательстве существования лакуны существенного спектра *N*– частичного оператора Шрёдингера;

из теоремы Хунцикера–ван Винтера–Жислина для четырехчастичного оператора Шредингера на решетке, были использованы для описания существенного спектра *N*– частичного дискретного оператора Шрёдингера.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием методов математического анализа, математической физики, функционального анализа и теории функций комплексного переменного, а также строгостью математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования заключается в том, что полученные результаты могут быть использованы в спектральной теории самосопряженных операторов, квантовой теории поля, в частности, для дальнейшего развития спектральных теории гамильтонианов систем двух, трех и многих частиц на решетке.

Практическая значимость результатов исследований определяется тем, что полученные научные результаты служат теоретической основой для проведения и применения экспериментальных исследований в области физики твердого тела и квантовой механики.

Внедрение результатов исследования. На основе научных результатов по существенному и дискретному спектров операторов Шредингера на решетке:

из результатов для существенного и дискретного спектров трехчастичного оператора Шредингера на решетке, были использованы в ведущих зарубежных журналах (Theoretical and Mathematical Physics, 2007, Vol. 152, №3, 1313–1321; Theoretical and Mathematical Physics, 2009, Vol. 161, № 2, 1460–1470; Methods Funct. Anal. Topology, 2009, Vol. 15, № 1, 67-73; Theoretical and Mathematical Physics, 2010, Vol. 163, № 1, 429–437; Applied Mathematics & Information Sciences– An International Journal, 2010, Vol. 4, №3, 395–412; Siberian Mathematical Journal, 2011, Vol. 52, 316–328; Proceedings of IAM, 2016, Vol. 5, № 2, pp.156–174; Reviews in Mathematical Physics, 2020, Vol. 32, № 6, 2050015) для изучения спектральных свойств некоторых дискретных операторов Шрёдингера и обобщенной модели Фридрихса. Использование научного результата позволило доказать конечность или бесконечность числа собственных значений рассматриваемых операторов;

из методов доказательства бесконечности числа собственных значений на лакуне существенного спектра для трехчастичного оператора Шредингера, были использованы в ведущих зарубежных журналах (arXiv preprint arXiv:1408.4280, 2014; Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2018,Vol. 51, № 26, 265202; European science, 2020, Vol. 2, № 51, 27–30) при изучении существенного и дискретного спектров *N*–частичного дискретного оператора Шрёдингера и обобщенной модели Фридрихса. Использование научного результата позволило доказать существование лакуны существенного спектра рассматриваемых операторов;

из теоремы Хунцикера–ван Винтера–Жислина для четырехчастичного оператора Шредингера на решетке, были использованы в ведущих зарубежных журналах (Theoretical and Mathematical Physics, 2009, Vol. 161, № 2, 1460–1470; Applied Mathematics & Information Sciences– An International Journal, 2010, Vol. 4, № 3, 395–412; International Conference on Mathematical Sciences and Statistics, 2013, 187–194; Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2018,Vol. 51, № 26, 265202) при описании существенного спектра *N*–частичного дискретного оператора Шрёдингера и обобщенной модели Фридрихса. Использование научного результата позволило установить местоположение и структуру существенных спектров рассматриваемых операторов;

из условия существования собственных значений оператора Шредингера, соответствующего системе двух частиц были использованы для для доказательсьва существования решения интегрального уравнения обобщенным ядром Неймана в зарубежном гранте R.J130000.7809.4F637 на тему “Boundary integral equation method for ahlfors mapping of bounded multiply connected regions and finding zeros of the ahlfors map” (Университет технологии Малайзия, справка от 21 апреля 2021 года). Применение этих научных результатов дала возможность решить задачу Рубина для многосвязной области.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 14 научных и научно-практических конференциях, в том числе, на 11 международных и 3 республиканских научных и научно-практических конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 29 научных работ, из них 15 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе 12 опубликованы в зарубежных журналах и 3 – в республиканских научных изданиях.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 151 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **«Спектральные свойства двухчастичного дискретного оператора Шредингера»**, найдено условия положительности этого оператора при всех ненулевых значениях квазиимпульса, при этом доказано существование и положительность собственного значения оператора Шредингера при всех ненулевых значениях квазиимпульса.

Пусть $\mathbb{Z}^3$ – трехмерная целочисленная решетка, и $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^n)$ – гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций, определенных на $(\mathbb{Z}^3)^n$, $n=2,3$.

Свободный гамильтониан $\hat{h}_0$ системы двух произвольных квантовых частиц, с дисперсионными соотношениями $\hat{\varepsilon}_1$ и $\hat{\varepsilon}_2$ на решетке $\mathbb{Z}^3$ определяется как ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^2)$ по формуле:

$$(\hat{h}_0\hat{\psi})(n_1,n_2)=\sum_{s\in\mathbb{Z}^3}[\hat{\varepsilon}_1(s)\hat{\psi}(n_1+s,n_2)+\hat{\varepsilon}_2(s)\hat{\psi}(n_1,n_2+s)],$$

где $\hat{\varepsilon}_\alpha$, $\alpha=1,2,$– элементы пространства $\ell_1(\mathbb{Z}^3)$, описывающие перенос частицы с узла на соседний узел, с $\hat{\varepsilon}_\alpha(s)=\overline{\hat{\varepsilon}_\alpha(-s)}$, $\alpha=1,2 \quad s\in\mathbb{Z}^3$.

В частности, если

$$\hat{\varepsilon}_\alpha(s)=\begin{cases}\dfrac{3}{m_\alpha} & \text{при} \quad s=0,\\ -\dfrac{1}{2m_\alpha} & \text{при} \quad |s|=1,\\ 0 & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

то оператор $\hat{h}_0$ представляется в виде

$$\hat{h}_0=\hat{I}\otimes\Delta+\hat{I}\otimes\Delta,$$

где $\hat{I}$ – тождественный оператор на $\ell_2(\mathbb{Z}^3)$, $\otimes$ означает тензорное произведение операторов, Δ – решетчатый Лапласиан

$$(\Delta\hat{\psi})(x)=\sum_{|s|=1}[\hat{\psi}(x)-\hat{\psi}(x+s)],\quad \hat{\psi}\in\ell_2(\mathbb{Z}^3).$$

Двухчастичный гамильтониан $\hat{h}$ системы двух квантовых частиц с парными короткодействующими потенциалами $\hat{v}$ определяется как ограниченное возмущение свободного гамильтониана $\hat{h}_0$:

$$\hat{h}=\hat{h}_0-\hat{v},$$

где $\hat{v}-$ оператор умножения в $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^2)$:

$$(\hat{v}\hat{\psi})(x_1,x_2)=\hat{v}(x_1-x_2)\hat{\psi}(x_1,x_2),\quad \hat{\psi}\in\ell_2((\mathbb{Z}^3)^2),$$

$\hat{v}-$ ограниченная вещественнозначная функция.

В диссертации предположим, что потенциал $\hat{v}(s)$ является неотрицательной, четной функцией на $\mathbb{Z}^3$ и удовлетворяет условию

$$\lim_{|s|\to\infty}|s|^{\rho}\ \hat{v}(s)=0.$$

Здесь $\rho>3,\ \ s\in\mathbb{Z}^3,\ |s|=|s^{(1)}|+|s^{(2)}|+|s^{(3)}|$.

Гамильтониан $\hat{h}$ является ограниченным самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^2)$.

Пусть $\mathbb{T}^3$ – трехмерной тор, т.е. куб $(-\pi,\pi]^3$ – с соответствующим отождествлением противоположных граней. Всюду операции сложения и умножения на действительное число элементов множества $\mathbb{T}^3=(-\pi,\pi]^3$ понимаются как операции на $\mathbb{R}^3$ по модулю $(2\pi\mathbb{Z}^1)^3$. Например, если

$a=(\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{4},\frac{11\pi}{12}),\quad b=(\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6})\in\mathbb{T}^3$, то $a+b=(-\frac{2\pi}{3},-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{4})\in\mathbb{T}^3.$

Переход из координатного представления гамильтониана в импульсное представление осуществляется при помощи следующего преобразования Фурье $\mathcal{F}_m,\ m=1,2,\ldots$: $\mathcal{F}_m:L_2((\mathbb{T}^3)^m)\to\ell_2((\mathbb{Z}^3)^m)$,

$$(\mathfrak{I}_m f)(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3m}{2}}}\int_{(\mathbb{T}^3)^m}e^{\mathrm{i}xt}f(t)dt,\quad xt=\sum_{j=1}^{m}(x_j,t_j)\tag{1}$$

с $(x,t)=\sum_{j=1}^{3}x^{(j)}t^{(j)},\quad x=(x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)})\in\mathbb{Z}^3,\quad t=(t^{(1)},t^{(2)},t^{(3)})\in\mathbb{T}^3.$

Оператор $h=\mathcal{F}_2^{-1}\hat{h}\mathcal{F}_2$ называется импульсным представлением гамильтониана $\hat{h}$. Этот оператор действует в гильбертовом пространстве $L_2((\mathbb{T}^3)^2)$ по формуле

$$h=h_0-v.$$

Здесь h_0- оператор умножения на функцию $\mathcal{E}(k_1,k_2)$:

$$(h_0f)(k_1,k_2)=\mathcal{E}(k_1,k_2)f(k_1,k_2),\quad \mathcal{E}(k_1,k_2)=\varepsilon_1(k)+\varepsilon_2(k),$$

$v-$ интегральный оператор типа свертки

$$(vf)(k_1,k_2)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{(\mathbb{T}^3)^2} v(k_1-k_1')\delta(k_1+k_2-k_1'-k_2')\,f(k_1',k_2')dk_1'dk_2',$$

где ε_i, $i=1,2$ и v – преобразования Фурье функций, соответственно, $\hat{\varepsilon}_i$ и $\hat{v}$:

$$\varepsilon_i(k)=(\mathcal{F}_1^{-1}\hat{\varepsilon}_i)(k)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{s\in\mathbb{Z}^3}\hat{\varepsilon}_i(s)e^{i(k,s)},\ i=1,2,$$

$$v(k)=(\mathcal{F}_1^{-1}\hat{v}(k)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{s\in\mathbb{Z}^3}\hat{v}(s)e^{i(k,s)}.$$

Используя разложение в прямой операторный интеграл, изучение спектральных свойств оператора h сводим к исследованию спектральных свойств семейств самосопряженных ограниченных операторов $h(k)$, $k\in\mathbb{T}^3$ (двухчастичный дискретный оператор Шредингера), действующих в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^3)$ по формуле

$$h(k)=h_0(k)-v. \tag{2}$$

Здесь $h_0(k)$ является оператором умножения на функцию

$$\mathcal{E}_k(p)=\varepsilon_1(p)+\varepsilon_2(k-p)$$

и

$$(vf)(p)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int\limits_{\mathbb{T}^3} v(p-s)f(s)ds.$$

Теперь приведем спектральные свойства двухчастичного дискретного оператора Шредингера $h(k)$, $k\in\mathbb{T}^3$, определяемого формуле (2).

Предположение 1. *Предположим, что дисперсионное соотношение $\varepsilon_i(p)$, $i=1,2-$ непрерывная (периодичная) вещественнозначная функция на $\mathbb{T}^3$, имеющая единственную невырожденную точку минимума в центре координат $\mathbf{0}=(0,0,0)$ с*

$$\lim_{|p|\to 0}\inf\frac{\varepsilon_i(p)-\varepsilon_i(\mathbf{0})}{|p|^2}>0,\quad \varepsilon_i(\mathbf{0})=0.$$

Кроме того, функция $v(p)-$ непрерывная функция на $\mathbb{T}^3$ такая, что

$$v(p)=\overline{v(-p)},\quad p\in\mathbb{T}^3.$$

Отметим, что из теоремы Вейля о существенном спектре следует, что существенный спектр $\sigma_{ess}(h(k))$ оператора $h(k)$ не меняется при компактном возмущении v и совпадает со спектром невозмущенного оператора $h_0(k)$. При этом $\sigma_{ess}(h(k))$ состоит из области значения функции $\mathcal{E}_k(\cdot)$, т. е.

$$\sigma_{ess}(h(k))=\sigma(h_0(k))=[\varepsilon_{min}(k),\varepsilon_{max}(k)],$$

где $\varepsilon_{min}(k)=\min\limits_p\mathcal{E}_k(p)$, $\varepsilon_{max}(k)=\max\limits_p\mathcal{E}_k(p)$. Ясно, что из предположения 1 следует, что $\varepsilon_{min}(k)>\varepsilon_{min}(0)=0$ при $k\in\mathbb{T}^3$.

Пусть $C(\mathbb{T}^3)$ – Банахово пространство непрерывных (периодических) функций на $\mathbb{T}^3$, и $G(\lambda)$, $\lambda \le \mathcal{E}_{\mathbf{0}}(\mathbf{0})$, $\mathbf{0} = (0,0,0) \in \mathbb{T}^3$ – интегральный оператор с ядром (Бирмана-Швингера)

$$G(p,q;\lambda) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} v(p-q)(\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(p)-\lambda)^{-1}, \quad p,q \in \mathbb{T}^3.$$

Имеются следующие возможные случаи для собственного значения -1 оператора $G(\lambda)$, $\lambda \le \mathcal{E}_{\mathbf{0}}(\mathbf{0})$.

I-Случай. -1 не является собственным значением оператора $G(\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(\mathbf{0}))$, т.е.

$$dimKer(h(\mathbf{0})-\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(\mathbf{0})I) = dimKer(G(\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(\mathbf{0}))+I) = 0.$$

II-Случай. -1 является простым собственным значением оператора $G(\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(\mathbf{0}))$ и соответствующая собственная функция ψ удовлетворяет условию

$$\frac{\psi(\mathbf{0})}{\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(p)-\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(\mathbf{0})} \notin L_2(\mathbb{T}^3),$$

т.е.

$$dimKer(h(\mathbf{0})-\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(\mathbf{0})I) = 0 \qquad \text{и} \qquad dimKer(G(\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(\mathbf{0}))+I) = 1.$$

III-Случай. -1 является кратным собственным значением оператора $G(\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(\mathbf{0}))$ и один из соответствующих собственных функций ψ удовлетворяет условию

$$\frac{\psi(\mathbf{0})}{\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(p)-\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(\mathbf{0})} \notin L_2(\mathbb{T}^3),$$

т.е. $dimKer(G(\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(\mathbf{0}))+I) \ge 2$ *и*

$$dimKer(h(\mathbf{0})-\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(\mathbf{0})I) \le dimKer(G(\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(\mathbf{0}))+I)+1.$$

IV-Случай. -1 является кратным собственным значением оператора $G(\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(\mathbf{0}))$ и

$$dimKer(h(\mathbf{0})-\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(\mathbf{0})I)+2 \le dimKer(G(\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(\mathbf{0}))+I).$$

Определение. *Если выполняется случай I, то нуль называется регулярной точкой оператора $h(\mathbf{0})$.*

Теорема 1. *Пусть функции $\varepsilon_1(\cdot)$ и $\varepsilon_2(\cdot)$ являются линейно зависимыми. Тогда, если $h(\mathbf{0}) \ge 0$, то $h(k) \ge 0$ для всех $k \in \mathbb{T}^3$. Дополнительно, если нуль – регулярная точка оператора $h(\mathbf{0})$, тогда $(h(k)f,f) > 0$ для всех $f \ne 0$ и $k \in \mathbb{T}^3$.*

Определение. *Если выполняется один из случаев II-IV, то говорят, что оператор $h(\mathbf{0})$ имеет виртуальный уровень в нуле (на левом крае существенного спектра).*

Отметим, что функция $\varepsilon(\cdot)$ называется условно отрицательно определенной, если $\varepsilon(p) = \overline{\varepsilon(p)}$ и для каждого натурального числа n выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon(p_i - p_j) z_i \bar{z}_j \le 0$$

для всех $p_1, \cdots, p_n \in \mathbb{T}^3$ и $z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^{n} z_i = 0$.

Теорема 2. *Пусть выполняется предположение 1 и* $\varepsilon_1(\cdot), \varepsilon_2(\cdot)$ *условно отрицательно определенные функции, дифференцируемые до второго порядка. Предположим* $h(\mathbf{0})$ *имеет виртуальный уровень (на левом крае существенного спектра). Кроме того функции* $\varepsilon_1(\cdot)$, $\varepsilon_2(\cdot)$ *являются линейно зависимыми и* $h(\mathbf{0}) \ge 0$. *Тогда для каждого* $k \in \mathbb{T}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ *дискретный спектр оператора* $h(k)$, *лежащий левее существенного спектра – непустое множество и оно содержится в полуинтервале* $[0, \varepsilon_{min}(k))$.

Пусть $A-$ самосопряженный ограниченный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H и $H_A(\lambda)$, $\lambda > \sup \sigma_{ess}(A)$, подпространство пространства H, элементы которого удовлетворяют условию $(Af, f) > \lambda(f, f)$, $f \ne 0$.

Положим

$$n(\lambda, A) = \sup_{H_A(\lambda)} \dim H_A(\lambda). \tag{3}$$

Число $n(\lambda, A)$ совпадает с числом собственных значений (с учетом кратности) оператора A, лежащих правее от λ..

Обозначим через $N_{(a,b)}(A)$ – число собственных значений оператора A (с учетом кратности), лежащих на $(a,b) \subset \mathbb{R} \setminus \sigma_{ess}(A)$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

Отметим, что из неотрицательности функции $\hat{v}(\cdot)$ оператор $\hat{v}$ является положительным оператором. Следовательно, оператор v является положительным оператором.

Пусть $v^{1/2}$ – положительный квадратный корень оператора v и

$$T(z) = v^{1/2} r_0(z) v^{1/2}, \quad z \notin \sigma_{ess}(h(k)), \tag{4}$$

где $r_0(z) = (h_0(k) - zI)^{-1}$, $I-$ единичный оператор.

Пользуясь свойством компактных операторов и применяя некоторые методы анализа, получим

Теорема 3. *Число* $z_0 \in \mathbb{R} \setminus \sigma_{ess}(h(k))$ *является собственным значением оператора* $h(k)$ *тогда и только тогда, когда функция* $n(1, T(\cdot))$ *имеет разрыв в точке* $z = z_0$. *Причем кратность* n *собственного значения* z_0 *определяется по формуле*

$$n = \lim_{\xi \to +0} n(1, T(z_0 + \xi)) - n(1, T(z_0)).$$

В силу монотонности функции $n(1, T(\cdot))$ на интервале $(a,b) \subset \mathbb{R} \setminus \sigma_{ess}(h(k))$ из теоремы 3 вытекает следующее

Следствие 1. *Для каждого сегмента* $[a,b]\subset\mathbb{R}\setminus\sigma_{ess}(h(k))$ *верно равенство* $N_{(a,b)}(H)=n(1,T(b))-n(1,T(a))$.

Непосредственно получаем

Следствие 2. *Пусть* $(a,b)\subset\mathbb{R}\setminus\sigma_{ess}(h(k))$ *и оператор-функция* $T(z)$ *при* $z\to b-0$ *сходится равномерно к некоторому оператору* $T(b)$. *Тогда оператор* $h(k)$ *на интервале* (a,b) *может иметь лишь конечное число собственных значений.*

Пусть

$$\varepsilon_k(p)=\frac{1}{m_1}\varepsilon(p)+\frac{1}{m_2}\varepsilon(k-p),\quad \varepsilon(p)=\sum_{j=1}^{3}(1-\cos p_j).$$

Предположение 2. *Предположим, что* $m_1=m_2$ *и* $k\in\Pi$, *где* Π *означает набор* $k=(k_1,k_2,k_3)$, $k\in\mathbb{T}^3$ *таких, что* $k_\alpha=-\pi$ *или* $k_\alpha=\pi$ *хотя бы для одного* $\alpha\in\{1,2,3\}$.

Теорема 4. *Пусть не выполняется предположение 2 и* $v(\cdot)$ *является дифференцуемой на* $\mathbb{T}^3$. *Тогда для любого* $k\in\mathbb{T}^3$ *число собственных значений оператора* $h(k)$ *конечен.*

Во второй главе диссертации, названной **«Существенный спектр трехчастичного дискретного оператора Шредингера»,** получено уравнение для собственных функций дискретного оператора Шредингера (ДОШ), аналогичное уравнению Фаддеева-Ньютона. Описывается существенный спектр так называемых канальных операторов. Пользуясь методами Фредгольма доказывается, что существенный спектр трехчастичного ДОШ состоит из спектров операторов каналов. Рассматривается трехчастичный ДОШ с контактными потенциалами. Найдено условие существование лакуны существенного спектра трехчастичного ДОШ.

Свободный гамильтониан $\hat{H}_0$ системы трех произвольных квантовых частиц на решетке $\mathbb{Z}^3$ определяется как ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^3)$ по формуле

$$\hat{H}_0=\frac{1}{2m_1}\Delta_{x_1}+\frac{1}{2m_2}\Delta_{x_2}+\frac{1}{2m_3}\Delta_{x_3},$$

где $\Delta_{x_1}=\Delta\otimes\hat{I}\otimes\hat{I}$, $\Delta_{x_2}=\hat{I}\otimes\Delta\otimes\hat{I}$ и $\Delta_{x_3}=\hat{I}\otimes\hat{I}\otimes\Delta$, $m_\alpha>0$ – масса частицы $\alpha=\overline{1,3}$, $\hat{I}$ – тождественный оператор на $\ell_2(\mathbb{Z}^3)$.

Трехчастичный гамильтониан $\hat{H}$ системы трех квантовых частиц с парными короткодействующими потенциалами $\hat{V}_{ij}$, $1\le i<j\le 3$ определяется как ограниченное возмущение свободного гамильтониана $\hat{H}_0$:

$$\hat{H}=\hat{H}_0-\hat{V}_{12}-\hat{V}_{13}-\hat{V}_{23},$$

где $\hat{V}_{ij}$ – оператор умножения в $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^3)$:

$$(\hat{V}_{ij}\hat{\psi})(x_1,x_2,x_3)=\hat{v}_{ij}(x_i-x_j)\hat{\psi}(x_1,x_2,x_3),\quad \hat{\psi}\in\ell_2((Z^3)^3),\ 1\le i<j\le 3,$$

$\hat{v}_{ij}$ – ограниченная вещественнозначная функция.

В диссертации предполагается, что потенциал $\hat{v}_{ij}(s),\ 1\le i<j\le 3$, является неотрицательной, четной функцией на $\mathbb{Z}^3$ и удовлетворяет условию

$$\lim_{|s|\to\infty}|s|^{\rho}\,\hat{v}_{ij}(s)=0. \qquad (5)$$

Здесь $\rho>3,\ s\in\mathbb{Z}^3,\ |s|=|s^{(1)}|+|s^{(2)}|+|s^{(3)}|$.

Гамильтониан $\hat{H}$ является ограниченным самосопряженным оператор в гильбертовом пространстве $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^3)$.

Замечание 1. *Заметим, что если в системе, частицы взаимодействуют с помощью парных контактных потенциалов притяжения, то соответствующий потенциал в координатном представлении определяется в виде*

$$\hat{v}_{\alpha\beta}(x_1,x_2)=\mu_\gamma\delta_{x_1x_2},$$

где $\mu_\gamma>0,\ \{\alpha,\beta,\gamma\}=\{1,2,3\}$– *энергия взаимодействия частиц* α *и* β, $\delta_{x_1x_2}$ – *символ Кронекера.*

Импульсное представление оператора энергии трех частиц

Оператор $H=\mathcal{F}_3^{-1}\hat{H}\mathcal{F}_3$ называется импульсным представлением гамильтониана $\hat{H}$. Используя разложение в прямой операторный интеграл, вводя трехчастичный квазиимпульс относительно системы координат, изучение спектральных свойств операторов H сводим к исследованию спектральных свойств семейств самосопряженных ограниченных операторов $H(K),\quad K\in\mathbb{T}^3$ (трехчастичный дискретный оператор Шредингера), действующих, в гильбертовом пространстве $L_2((\mathbb{T}^3)^2)$ по формуле

$$H(K)=H_0(K)-V_1-V_2-V_3. \qquad (6)$$

Здесь $H_0(K)$ является оператором умножения на функцию

$$\mathcal{E}_K(p,q)=\frac{1}{m_1}\varepsilon(p)+\frac{1}{m_2}\varepsilon(q)+\frac{1}{m_3}\varepsilon(K-p-q)$$

и

$$(V_1f)(p,q)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{T}^3}v_1(q-s)f(p,s)ds,$$

$$(V_2f)(p,q)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{T}^3}v_2(p-s)f(s,q)ds,$$

$$(V_3f)(p,q)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{T}^3}v_3(p-s)f(s,p+q-s)ds,\quad v_\alpha=\mathcal{F}_3^{-1}\hat{v}_\alpha.$$

Замечание 2. *В случае, когда в системе все потенциалы контактные* $\hat{v}_{\alpha\beta}(x_1,x_2)=\mu_\gamma\delta_{x_1x_2}$, $\{\alpha,\beta,\gamma\}=\{1,2,3\}$, *соответствующий трехчастичный дискретный оператор Шредингера определяется в* $L_2((\mathbb{T}^3)^2)$ *по формуле*

$$H(K)=H_0(K)-\mu_1\hat{V}_1-\mu_2\hat{V}_2-\mu_3\hat{V}_3, \tag{7}$$

где

$$(\tilde{V}_1 f)(p,q)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{T}^3} f(p,s)ds,\quad (\tilde{V}_2 f)(p,q)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{T}^3} f(s,q)ds,$$

$$(\tilde{V}_3 f)(p,q)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{T}^3} f(s,p+q-s)ds,\quad f\in L_2((\mathbb{T}^3)^2).$$

Оператор $H_\alpha(K)=H_0(K)-V_\alpha$ называется канальным оператором и его спектр описывается в виде

$$\sigma(H_\alpha(K))=\bigcup_{p\in\mathbb{T}^3}[\sigma(h_\alpha(K-p))\cup\{\frac{1}{m_\alpha}\varepsilon(p)\}]$$

$$=[m_K,M_K]\cup\bigcup_{p\in\mathbb{T}^3}\{\sigma_{disc}(h_\alpha(K-p))\dotplus\varepsilon_\alpha(p)\}, \tag{8}$$

где $$m_K=\min_{p,q}\mathcal{E}_K(p,q),\quad M_K=\max_{p,q}\mathcal{E}_K(p,q),$$

$\sigma(h_\alpha(K-p))\dotplus\varepsilon_\alpha(p)=\{\lambda+\varepsilon_\alpha(p):\ \lambda\in\sigma(h_\alpha(K-p))\}$, $h_\alpha(p)-$ двухчастичный ДОШ, действующий в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^3)$ по формуле

$$h_\alpha(k)=h_0^{(\alpha)}(k)-v_\alpha, \tag{9}$$

здесь $h_0^{(\alpha)}(k)$, $k\in\mathbb{T}^3-$ оператор умножения на функцию

$$\mathcal{E}_k^{(\alpha)}(p)=\frac{1}{m_\beta}\varepsilon(p)+\frac{1}{m_\gamma}\varepsilon(p+k),\quad \{\alpha,\beta,\gamma\}=\{1,2,3\},$$

v_α – интегральный оператор с ядром $v_\alpha(p-s)$, где $v_\alpha=\mathcal{F}_3^{-1}\hat{v}_\alpha$ – непрерывная функция на $\mathbb{T}^3$.

Лемма 1. *Для любого* $K\in\mathbb{T}^3$ *существенный спектр* $\sigma_{ess}(H(K))$ *оператора* $H(K)$, *определенного по формуле* (6) *состоит из объединения спектров операторов каналов* $H_\alpha(K)$, *т. е.*

$$\sigma_{ess}(H(K))=\sigma(H_1(K))\cup\sigma(H_2(K))\cup\sigma(H_3(K)).$$

Пусть $m-$ положительное число. Положим

$$\mu_3^*=(2\pi)^3\left[\min_k\int_{\mathbb{T}^3}\frac{dq}{\frac{1}{m_1}\varepsilon(q)+\frac{1}{m_2}\varepsilon(k-q)+\frac{1}{m_3}\varepsilon(k)+m}\right]^{-1}, \tag{10}$$

$$\mu_\alpha^0 = 8\pi^3 \frac{m_\beta + m_\gamma}{m_\beta m_\gamma} \left(\int_{\mathbb{T}^3} \frac{ds}{\varepsilon(s)} \right)^{-1}. \tag{11}$$

Теорема 5. *Пусть* $\mu_\alpha \le \mu_\alpha^0$, $\alpha = 1,2$ *и* $\mu_3 > \mu_3^*$, $H_i(\mathbf{0}) = H_0(\mathbf{0}) - \mu_i \widetilde{V}_i$, $i = 1,2,3$. *Тогда* $\sigma(H_i(\mathbf{0})) = [m_0; M_0]$, $i = 1,2$ *и* $\sigma(H_3(\mathbf{0})) = [a_3, b_3] \cup [0, M_{\mathbf{0}}]$. *При этом, согласно лемме 1, существенный спектр* $\sigma_{ess}(H(\mathbf{0}))$ *оператора* $H(\mathbf{0})$, *определенного по формуле (7), содержит лакуны, точнее* $\sigma_{ess}(H(\mathbf{0})) = [a_3, b_3] \cup [0, M_{\mathbf{0}}]$, $a_3 < b_3 < -m$.

В третьей главе диссертации, названной **«О дискретном спектре трехчастичного дискретнго оператора Шредингера»**, изучено дискретный спектр трехчастичного дискретнго оператора Шредингера (ДОШ). Найдены достаточные условия конечности дискретного спектра трехчастичного оператора Шредингера. Получена формула для числа собственных значений, лежащих на произвольном интервале, содержащимся вне существенного спектра трехчастичного ДОШ (см. теорему 6) и доказывается следствие теоремы 6. Приводится пример приложения следствия для одного трехчастичного ДОШ, имеющего лакуны существенного спектра и конечный дискретный спектр.

Далее показано существование бесконечного числа собственных значений трехчастичного ДОШ с контактными потенциалами на лакуне его существенного спектра. Получена оценка снизу для числа собственных значений трехчастичного ДОШ, существующих на этой лакуне.

Приведем свойство собственных значений оператора $H(K)$, определенного по формуле (7), лежащих вне существенного спектра.

Согласно равенству

$$H_\alpha(K) - zI = (H_0(K) - zI)(I - R_0(z)V_\alpha),$$

где $R_0(z) =: (H_0(K) - zI)^{-1}$, оператор $W_\alpha(z) = (I - V_\alpha^{\frac{1}{2}} R_0(z) V_\alpha^{\frac{1}{2}})^{-1}$ существует тогда и только тогда, когда $z \notin \sigma(H_\alpha(K))$, кроме того $W_\alpha(z)$ является положительным оператором при всех $z < inf \sigma_{ess}(H_\alpha(K))$.

Определим оператор $\mathbf{T}(z)$ при $z < \inf \sigma(H_1(K)) \cup \sigma(H_2(K))$, $z \notin \sigma(H_3(K))$, в гильбертовом пространстве $L_2^{(2)}((\mathbb{T}^3)^2)$ по формуле

$$\mathbf{T}(z) = \begin{pmatrix} 0 & W_1^{\frac{1}{2}}(z) K_{12}(z) W_2^{\frac{1}{2}}(z) \\ W_2^{\frac{1}{2}}(z) K_{21}(z) W_1^{\frac{1}{2}}(z) & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_{11}(z) & T_{12}(z) \\ T_{21}(z) & T_{22}(z) \end{pmatrix},$$

где $K_{ij}(z) = V_i^{\frac{1}{2}} R_0(z) V_j^{\frac{1}{2}}$, $T_{ij}(z) = W_i^{\frac{1}{2}}(z) K_{i3}(z) W_3(z) K_{3j}(z) W_j^{\frac{1}{2}}(z)$.

Заметим, что при каждом фиксированном $z \notin \sigma(H_3(K))$ оператор $W_3(z)$ определен, в частности, он определен при каждом фиксированном z, лежащем на любой лакуне (a,b) спектра $\sigma(H_3(K))$. Поэтому, как операторная функция

$\mathbf{T}(\cdot)$ определена на лакуне (a,b) существенного спектра оператора $H(K)$, если такая лакуна существует.

Теорема 6. *Число* $z_0 < \inf \sigma(H_1(K)) \cup \sigma(H_2(K)), z_0 \notin \sigma(H_3(K))$ *является собственным значением оператора* $H(K)$, *определенного по формуле (7) тогда и только тогда, когда функция* $n(1,\mathbf{T}(z))$ *имеет разрыв в точке* $z = z_0$. *Причем кратность* k *собственного значения* z_0 *определяется по формуле*

$$k = \lim_{\xi \to +0} [n(1,\mathbf{T}(z_0+\xi)) - n(1,\mathbf{T}(z_0))] + \lim_{\xi \to +0} [n(1,\mathbf{T}(z_0-\xi)) - n(1,\mathbf{T}(z_0))].$$

Из компактности оператора $\mathbf{T}(z_0)$ и неравенства Вейля следует неравенство $n(1,\mathbf{T}(z_0)) \le n(1,\mathbf{T}(z_0+\xi))$ для малых $|\xi|$. Поэтому из теоремы 6 вытекает следующее

Следствие 3. *Для каждого сегмента* $[a,b] \subset \mathbb{R} \setminus \sigma_{ess}(H(K))$ *верно равенство*

$$N_{(a,b)}(H(K)) = \bigvee_a^b (n(1,\mathbf{T}(\cdot))),$$

где $\bigvee_a^b (f) -$ *полное изменение функции* f *на интервале* (a,b). *При этом из монотонности функции* $n(1,\mathbf{T}(\cdot))$ *в* $(-\infty, \inf \sigma_{ess}(H(K)))$ *и* $\lim\limits_{z \to -\infty} \|\mathbf{T}(z)\| = 0$ *имеем*

$$N_{(-\infty,z)}(H(K)) = n(1,\mathbf{T}(z)), \quad z < \inf \sigma_{ess}(H(K)).$$

Непосредственно получаем условия конечности дискретного спектра лежащего на произвольном интервале $(a,b) \subset \mathbb{R} \setminus \sigma_{ess}(H(K))$.

Следствие 4. *Пусть* $(a,b) \subset \mathbb{R} \setminus \sigma_{ess}(H(K))$ *и оператор-функция* $\mathbf{T}(z)$ *при* $z \to a+0$ *и* $z \to b-0$ *сходится равномерно к некоторым операторам* $\mathbf{T}(a)$ *и* $\mathbf{T}(b)$, *соответственно. Тогда оператор* $H(K)$ *на интервале* (a,b) *может иметь лишь конечное число собственных значений. В частности, при компактности* $\mathbf{T}(b)$, $b = \inf \sigma_{ess}(H(K))$ *число собственных значений оператора* $H(K)$, *лежащих левее существенного спектра, разве лишь конечно.*

Пример. С целью приложить следствие 4 рассмотрим пример трехчастичного ДОШ $H(K)$ в случае, когда массы двух частиц равны $m_1 = m_2 = m$ и $K = \mathbf{0} \in \mathbb{T}^3$, а потенциалы притяжения имеют вид

$$v_1(p) = v_2(p) = \frac{\mu}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_{n=0}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{cos(np_j)}{n!}, \quad p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{T}^3,$$

$$v_3(p) = \mu_3 (2\pi)^{\frac{3}{2}} cosp_1, \quad p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{T}^3,$$

где $\mu, \mu_\alpha > 0$ и $N \le \infty$. При этом преобразование Фурье $\hat{v}_{\beta\gamma}(s)$, $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{1,2,3\}$ функции $v_\alpha(\cdot)$, $\alpha = 1,2,3$ является неотрицательной, четной функцией на $\mathbb{Z}^3$.

В этом случае трехчастичный ДОШ $H := H(\mathbf{0})$ действует в $L_2((\mathbb{T}^3)^2)$ по формуле

$$H = H_0 - V_1 - V_2 - V_3,$$

$$(V_1 f)(p,q) = \frac{\mu}{(2\pi)^3} \sum_{n=0}^{N} \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{cos(n(p_i - s_i))}{n!} f(s,q)ds,$$

$$(V_2 f)(p,q) = \frac{\mu}{(2\pi)^3} \sum_{n=0}^{N} \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{cos(n(q_i - s_i))}{n!} f(p,s)ds,$$

$$(V_3 f)(p,q) = \mu_3 \int_{\mathbb{T}^3} cos(p_1 - s_1) f(s, p+q-s)ds,$$

где H_0 является оператором умножения на функцию

$$\mathcal{E}(p,q) = \frac{1}{m}\varepsilon(p) + \frac{1}{m}\varepsilon(q) + \frac{1}{m_3}\varepsilon(p+q), \quad \varepsilon(p) = \sum_{i=1}^{3}(1-\cos p^{(i)}).$$

Пусть

$$\mu^0 = \max_{z\le 0} \| \widetilde{V}_\alpha^{\frac{1}{2}} R_0(z) \widetilde{V}_\alpha^{\frac{1}{2}} \| = \| \widetilde{V}_\alpha^{\frac{1}{2}} R_0(0) \widetilde{V}_\alpha^{\frac{1}{2}} \|$$

и $\lambda > \dfrac{6}{m_3}$. Положим

$$\mu^* = \frac{\frac{6}{m_3} + \lambda}{4\pi^3}.$$

Теорема 7. *Для всех* $\mu \le \mu^0$ *и* $\mu_3 > \mu^*$ *существенный спектр* $\sigma_{ess}(H)$ *оператора* H *содержит лакуны, точнее* $\sigma_{ess}(H) = [\tau', \tau''] \cup [0, M_{\mathbf{0}}]$, $\tau' < \tau'' < 0$. *Кроме того дискретный спектр* $\sigma_{disc}(H)$ *оператора* H *является конечным множеством.*

О бесконечности дискретного спектра на лакуне существенного спектра трехчастичного ДОШ с контактными потенциалами

Дальнейшие результаты получены для трехчастичного ДОШ с контактными потенциалами, определенного по формуле (7)

$$H(K) = H_0(K) - \mu_1\widetilde{V}_1 - \mu_2\widetilde{V}_2 - \mu_3\widetilde{V}_3.$$

Определение. *Говорят, что оператор* $h_\alpha(\mathbf{0})$, $\mathbf{0} = (0,0,0) \in \mathbb{T}^3$ *имеет резонанс (виртуальный уровень) в нуле, если уравнение*

$$\varphi(p) = \frac{\mu_\alpha}{(2\pi)^3} \frac{m_\beta m_\gamma}{m_\beta + m_\gamma} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\varphi(s)ds}{\varepsilon(s)}$$

имеет единственное нетривиальное решение $\psi_\alpha \in C(\mathbb{T}^3)$, *удовлетворяющее условию* $\psi_\alpha(\mathbf{0}) \ne 0$.

Простое вычисление показывает, что оператор $h_\alpha(\mathbf{0})$ имеет резонанс в нуле тогда и только тогда, когда $\mu_\alpha = \mu_\alpha^0$, где μ_α^0 – число, определенное по формуле (11).

Легко проверить, что точка нуль является регулярной точкой оператора $h_3(\mathbf{0})$ тогда и только тогда, когда $\mu_3 < \mu_3^0$ или $\mu_3 > \mu_3^0$.

Напомним, что по теореме 5 существенный спектр оператора $H(\mathbf{0})$ содержит лакуны при $\mu_1 = \mu_1^0$, $\mu_2 = \mu_2^0$ и $\mu_3 > \mu_3^*$, где μ_3^0 – число, определенное по формуле (11).

Теорема 8. *Пусть $\mu_1 = \mu_1^0$, $\mu_2 = \mu_2^0$ и $\mu_3 > \mu_3^*$ ($\mu_3 < \mu_3^0$). Тогда оператор $H(\mathbf{0})$, определенный по формуле (7) на лакуне существенного спектра $(b_3,0)$ (на интервале $(-\infty,0)$) имеет бесконечное число собственных значений.*

Теорема 9. *Пусть $\mu_1 = \mu_1^0$, $\mu_2 = \mu_2^0$ и $\mu_3 > \mu_3^*$. Тогда оператор $H(\mathbf{0})$, определенный по формуле (5) на лакуне существенного спектра $(b_3,0)$ имеет бесконечное число собственных значений и имеет место соотношение*

$$\lim_{z\to -0} \frac{N_{(b/2,z)}(H(\mathbf{0}))}{|\log|z||} \ge \mathcal{U}_0$$

где коэффициент $\mathcal{U}_0 > 0$ не зависит от потенциалов взаимодействия v_α, $\alpha = 1,2,3$ и является положительной функцией отношения масс $m_1/m_2, m_2/m_3$ трех частиц.

В четвертой главе диссертации, названной «**Существенный спектр четырехчастичного дискретного оператора Шредингера**», описаны спектры всевозможных подгамильтонианов подсистем четырехчастичной системы. Получено уравнение для собственных функций четырехчастичного ДОШ, аналогичное уравнению Фаддеева-Якубовского. Доказано, что существенный спектр четырехчастичного ДОШ состоит из спектров подгамильтонианов. Рассмотрен случай, когда в системе частицы взаимодействуют с помощью парных контактных потенциалов притяжения. Определены случаи более точных формулировок теоремы ХВЖ (Хунцикера, ван Винтера и Г.М.Жислина) для четырехчастичного ДОШ.

Рассмотрим свободный гамильтониан $\hat{H}_0$ системы четырех произвольных квантовых частиц на решетке $\mathbb{Z}^3$, который определяется как ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^4)$:

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2m_1}\Delta_{x_1} + \frac{1}{2m_2}\Delta_{x_2} + \frac{1}{2m_3}\Delta_{x_3} + \frac{1}{2m_4}\Delta_{x_4}$$

с $\Delta_{x_1} = \Delta \otimes I \otimes I \otimes I$, $\Delta_{x_2} = I \otimes \Delta \otimes I \otimes I$, $\Delta_{x_3} = I \otimes I \otimes \Delta \otimes I$ и $\Delta_{x_4} = I \otimes I \otimes I \otimes \Delta$, где $m_\alpha > 0$ масса частицы α, Δ – решетчатый Лапласиан.

Четырехчастичный гамильтониан $\hat{H}$ системы четырех квантовых частиц с парными короткодействующими потенциалами $\hat{v}_{ij}$, $1 \le i < j \le 4$ определяется как ограниченное возмущение свободного гамильтониана $\hat{H}_0$

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \sum_{i<j} \hat{V}_{ij}, \quad 1 \le i < j \le 4,$$

где $\hat{V}_{ij}$ – оператор умножения в $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^4)$

$$(\hat{V}_{ij}\hat{\psi})(x_1, x_2, x_3, x_4) = \hat{v}_{ij}(x_i - x_j)\hat{\psi}(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad 1 \le i < j \le 4,$$

$\hat{v}_{ij}$ – ограниченная вещественнозначная функция.

Всюду в дальнейшим относительно $\hat{v}_{ij}(s)$, $1 \le i < j \le 4$ предположим выполнение условия (5).

Пусть $K = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$ – полный квазиимпульс системы четырех частиц и $\mathbb{F}_K^4 = \{(k_1, k_2, k_3, k_4) \in (\mathbb{T}^3)^4 : k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = K\}$ – многообразие размерности 9.

В импульсном представлении оператор $H = \mathcal{F}_4^{-1}\hat{H}\mathcal{F}_4$, описывающий систему четырех произвольных квантовых частиц, действует в $L_2((\mathbb{T}^3)^4)$ и оператор H представляется в виде следующего прямого интеграла

$$H = \int_{\mathbb{T}^3} \oplus \widetilde{H}(K) dK,$$

где ограниченный самосопряженный оператор $\widetilde{H}(K)$, действующий в $L_2(\mathbb{F}_K^4)$, унитарно-эквивалентен оператору $H(K)$, действующему в $L_2((\mathbb{T}^3)^3)$ по формуле

$$H(K) = H_0(K) - V, \tag{12}$$
$$V = \sum_{i<j} V_{ij}, \quad 1 \le i < j \le 4.$$

Здесь $H_0(K)$ – оператор умножения на функцию

$$\varepsilon_K(k_1, k_2, k_3) = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{2m_i}\varepsilon(k_i), \quad k_4 = K - k_1 - k_2 - k_3,$$

V_{ij} – частично-интегральный оператор

$$(V_{ij}f)(k_1, k_2, k_3) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{(\mathbb{T}^3)^3} v_{ij}(k_i - k_i')\delta(k_l - k_l')\delta(k_i + k_j - k_i' - k_j')$$
$$f(k_1', k_2', k_3')dk_1'dk_2'dk_3', \quad i \ne j \ne l, \ j \ne 4,$$
$$(V_{i4}f)(k_1, k_2, k_3) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{(\mathbb{T}^3)^3} v_{i4}(k_i - k_i')\delta(k_l - k_l')\delta(k_i + k_4 - k_i' - k_4')$$
$$f(k_1', k_2', k_4')dk_1'dk_2'dk_3', \quad l \ne i \quad (k_4 = k_1 + k_2 + k_3).$$

Определение. *Разбиение D множества $\{1, 2, \ldots, N\}$ на k непересекающихся подмножеств $C_1, C_2, \ldots, C_k$, называется кластерным разложением.*

Пусть $D: C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k = \{1,2,\ldots,N\}$ – кластерное разложение и оператор V_D – сумма всех потенциалов V_{ij}, где i и j принадлежат разным кластерам.

Определение. *Оператор* $H_D(K) = H(K) + V_D, \quad K \in \mathbb{T}^3$, *действующий в* $L_2((\mathbb{T}^3)^3)$ *назовем канальным оператором, соответствующего кластерного разложения* D, *где* $H(K)$ – *оператор определенный по формуле* (12).

Возможно следующее кластерное разложение при $N = 4$:

$$D_0 = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\},\ D_1 = \{\{1,2\},\{3\},\{4\}\},\ D_2 = \{\{1,3\},\{3\},\{4\}\},$$
$$D_3 = \{\{1,4\},\{2\},\{3\}\},\ D_4 = \{\{2,3\},\{1\},\{4\}\},\ D_5 = \{\{2,4\},\{1\},\{3\}\},$$
$$D_6 = \{\{3,4\},\{1\},\{2\}\},\ D_7 = \{\{1\},\{2,3,4\}\},\ D_8 = \{\{2\},\{1,3,4\}\},$$
$$D_9 = \{\{3\},\{1,2,4\}\},\ D_{10} = \{\{4\},\{1,2,3\}\},\ D_{11} = \{\{1,2\},\{3,4\}\},$$
$$D_{12} = \{\{1,3\},\{2,4\}\},\ D_{13} = \{\{1,4\},\{2,3\}\}.$$

Теорема 10. *Существенный спектр оператора* $H(K)$ *есть множество*

$$\sigma_{ess}(H(K)) = \bigcup_{i=0}^{13} \sigma(H_{D_i}(K)).$$

Используя это утверждение теоремы получим теорему Хунцикера–ван Винтера–Жислина для рассматриваемого оператора.

Теорема 11. *(ХВЖ - теорема).*

$$\inf \sigma_{ess}(H(K)) = \inf_{\{D:\#D=2\}} \sigma(H_D(K)), \qquad \{D:\#D=2\} = \{D_7,\ldots,D_{13}\}.$$

Следущая теорема показывает, что наименьший элемент существенного спектра оператора Шрёдингера $H(K)$ четырех произвольных частиц, лежит в спектре операторов каналов, соответствующих различным кластерным разложениям.

Обозначим через $H(\mu;K)$ оператор $H(K)$ с контактными потенциалами и $H_D(\mu;K) = H(\mu;K) + V_D$.

Теорема 12. *а) Существует число* $\mu_0 > 0$ *такое, что для всех* $\mu_{ij} < \mu_0$ *имеет место*

$$\sigma_{ess}(H(\mu;\mathbf{0})) = \sigma(H_0(\mathbf{0})) = [0, M_{\mathbf{0}}], \quad M_0 = 6\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{m_i};$$

б) *Существуют числа* $\Lambda, \lambda > 0$ *такие, что для всех* $\mu_{ij} > \Lambda$, $\{i,j\} \subset \{2,3,4\}$, $i < j$ и $\mu_{1j} < \lambda$, $j \in \{2,3,4\}$ *имеет место*

$$\inf \sigma_{ess}(H(\mu;\mathbf{0})) = \inf \sigma(H_{D_7}(\mu;\mathbf{0})) < \inf_{D \neq D_7} \sigma(H_D(\mu;\mathbf{0}));$$

в) *Существуют числа* $\Lambda', \lambda' > 0$ *такие, что для всех* $\mu_{12} > \Lambda', \mu_{34} > \Lambda'$ *и* $\mu_{ij} < \lambda', i \in \{1,2\},\ j \in \{3,4\}$ *имеет место*

$$\inf \sigma_{ess}(H(\mu;\mathbf{0})) = \inf \sigma(H_{D_{11}}(\mu;\mathbf{0})) < \inf_{D \neq D_{11}} \sigma(H_D(\mu;\mathbf{0})).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена исследованию существенного и дискретного спектров двух, трех и четырехчастичных операторов Шредингера, соответствующих системам частиц с парными короткодействующими потенциалами на решетке.

Основные результаты исследования состоят в следующем.

1. Найдено условие положительности двухчастичного дискретного оператора Шредингера при всех ненулевых значениях квазиимпульса, при этом доказано существование и положительность собственного значения оператора Шредингера при всех ненулевых значениях квазиимпульса.
2. Получена формула для числа собственных значений, лежащих в любом интервале вне существенного спектра двух и трехчастичных дискретных операторов Шредингера.
3. Установлено условие конечности дискретного спектра трехчастичного оператора Шредингера на решетке.
4. Найдено условие существования лакуны и доказано существование бесконечного числа собственных значений трехчастичного оператора Шредингера (эффект Ефимова) на этой лакуне существенного спектра.
5. Получена оценка снизу для дискретного спектра на лакуне по спектральному параметру трехчастичного оператора Шредингера.
6. Описаны местоположение и структура существенного спектра дискретного оператора Шредингера четырех произвольных частиц с парными короткодействующими потенциалами и доказана теорема ХВЖ (Хунцикера–ван Винтера–Жислина).
7. Показаны два случая существования различных парных потенциалов в произвольной четырехчастичной системе. В первом случае наименьший элемент существенного спектра четырехчастичного ДОШ достигается в спектре подгамильтониана, соответствующего кластерному разложению $\{\{1\},\{2,3,4\}\}$, а во втором случае разложению $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 AT SAMARKAND STATE UNIVERSITY

SAMARKAND STATE UNIVERSITY

MUKHIDDIN MUMINOV ESHKOBILOVICH

ESSENTIAL AND DISCRETE SPECTRA OF THE SCHRÖDINGER OPERATOR ON A LATTICE

01.01.01 – Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION DOCTORAL DISSERTATION (DSc) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Samarkand – 2021

The theme of doctoral dissertation (DSc) was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2021.2.DSc/FM176

Dissertation has been prepared at Samarkand State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website of scientific council (www.samdu.uz) and on the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific consultant: **Lakaev Saidakhmad Norjigitovich**
doctor of physical and mathematical sciences, academician

Official opponents: **Rozikov Utkir Abdulloevich**
doctor of physical and mathematical sciences, professor

Rakhimov Abdumalik Abdumajidovich
doctor of physical and mathematical sciences, professor

Khalkhujaev Akhmad Miyassarovich
doctor of physical and mathematical sciences

Leading organization: **Urgench State University**

Defense will take place «23» July 2021 at 10^{00} at the meeting of Scientific Council number DSc. 03/30.12.2019.FM.02.01 at Samarkand State University. (Address: 140104, Uzbekistan, Samarkand city, University Boulevared, 15. Ph.: (99866)231-06-32, fax: (99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz.)

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre at Samarkand State University (is registered № 30) (Address: 140104, Uzbekistan, Samarkand city, University Boulevared, 15. Ph.: (99866)231-06-32, fax: (99866) 235-19-38.)

Abstract of dissertation sent out on « 5 » July 2021 year
(Mailing report № 2 on « 5 » July 2021 year)

A.S.Soleev
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.Ph.M.S., professor

A.M.Khalkhuzhaev
Scientific secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, D.Ph.M.S.

I.A. Ikromov
Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.Ph.M.S. professor

INTRODUCTION (abstract of DSc thesis)

The aim of the research work is to study the spectral properties of some systems of two, three, and four arbitrary quantum particles moving on a three-dimensional lattice, where the particles interact with the pair contact, as well as short-range attraction potentials.

The object of the research work. Schrödinger operators corresponding to systems of two, three, and four particles with paired short-range potentials on the lattice.

Scientific novelty of the research work is as follows:

the conditions for the positivity of the two-particle discrete Schrödinger operator are found for all nonzero values of the quasimomentum, and the existence and positivity of an eigenvalue is proved for all nonzero values of the quasimomentum;

the formula for the number of eigenvalues lying in any interval outside the essential spectrum of the Schrödinger operators corresponding to systems of two and three particles on a lattice are obtained;

the condition for the finiteness of the discrete spectrum of the three-particle discrete Schrödinger operator was established;

the condition for the existence of a gap of the essential spectrum was found and the existence of an infinite number of eigenvalues of the three-particle discrete Schrödinger operator (the Efimov effect) on this gap of the essential spectrum was proved;

the location and structure of the essential spectrum of the four particle discrete Schrödinger operator of with paired short-range potentials are described, and the HVZh (Hunziker – van Winter – Zhislin) theorem is proved.

Implementation of the research results. Based on scientific results on the essential and discrete spectra of Schrödinger operators on a lattice:

the results for the essential and discrete spectra of the three-particle Schrödinger operator on the lattice were used in foreign prestigious journals (Theoretical and Mathematical Physics, 2007, Vol. 152, No. 3, 1313–1321; Theoretical and Mathematical Physics, 2009, Vol. 161, No. 2, 1460–1470; Methods Funct. Anal. Topology, 2009, Vol. 15, No. 1, 67-73; Theoretical and Mathematical Physics, 2010, Vol. 163, No. 1, 429–437; Applied Mathematics & Information Sciences– An International Journal, 2010, Vol. 4, No. 3, 395–412; Siberian Mathematical Journal, 2011, Vol. 52, 316–328; Proceedings of IAM, 2016, Vol. 5, No. 2, pp. 156–174; Reviews in Mathematical Physics, 2020, Vol. 32, No. 6, 2050015) to study the spectral properties of some discrete Schrödinger operators and the generalized Friedrichs model. The scientific results have been used to prove the finiteness or infiniteness of the number of eigenvalues of the considered operators;

methods of proving the infiniteness of the number of eigenvalues on the essential spectrum gap for the three-particle Schrödinger operator, were used in foreign prestigious journals (arXiv preprint arXiv: 1408.4280, 2014; Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2018, Vol. 51, No. 26, 265202; European science, 2020, Vol. 2, No. 51, 27–30) in the study of the essential and discrete spectra of the N-partial discrete Schrödinger operator and the generalized Friedrichs model. The obtained scientific results have been used to prove the existence of a gap in the essential spectrum of the considered operators;

the Hunziker – van Winter – Jislin theorem for the four-particle Schrödinger operator on a lattice, were used in leading foreign journals (Theoretical and Mathematical Physics, 2009, Vol. 161, No. 2, 1460–1470; Applied Mathematics & Information Sciences– An International Journal, 2010, Vol. 4, No. 3, 395–412; International Conference on Mathematical Sciences and Statistics, 2013, 187–194; Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2018, Vol. 51, No. 26, 265202) when describing the essential the spectrum of the N – partial discrete Schrödinger operator and the generalized Friedrichs model. The obtained scientific results have been used to establish the location and structure of the essential spectra of the considered operators;

the condition of the existence of the eigenvalues of the Schrödinger operator corresponding to a system of two particles were used to prove the existence of a solution to the integral equation by the generalized Neumann kernel in the foreign grant R.J130000.7809.4F637 on the topic “Boundary integral equation method for ahlfors mapping of bounded multiply connected regions and finding zeros of the ahlfors map ”(University of Technology Malaysia, reference dated April 21, 2021). The application of these scientific results made it possible to solve the Rubin problem for a multiply connected region.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of introduction, four chapters, a conclusion and references. The volume of the dissertation is 151 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; I part)

1. Абдуллаев Ж.И., Муминов М.Э. О существенном спектре четырехчастичного оператора Шредингера с парным контактным взаимодействием // Докл. АН РУз. – Ташкент, 2002, – № 3. – С.12-15. (01.00.00; №7).
2. Лакаев С.Н., Муминов М.Э. Существенный и дискретный спектр трехчастичного дискретного оператора Шредингера // Теоретическая и математическая физика. – Москва, 2003. – Т.135. – № 3. – С. 478-503. (№ 11. Springer. IF=0.854).
3. Абдуллаев Ж.И., Муминов М.Э. Спектр подгамильтонианов в системе *N*–частиц на решетке // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2006. – № 1. – С. 3-10. (01.00.00; №6).
4. Муминов М.Э. Теорема Хуницикера-ван-Винтера-Жислина для четырехчастичного оператора Шредингера // Теоретическая и математическая физика. – Москва, 2006. – Т.148. – № 3. – С. 428-443. (№ 11. Springer. IF=0.854).
5. Муминов М.Э. О выражении числа собственных значений модели Фридрихса // Математические заметки. – Москва, 2007. – Т. 82. – № 1. – С. 75-83. (№ 3. Scopus. IF=1.1).
6. Муминов М.Э. О положительности двухчастичного гамильтониана на решетке // Теоретическая и математическая физика. – Москва, 2007. – Т.153. – № 3. – С. 381-387. (№ 11. Springer. IF=0.854).
7. Муминов М.Э. О числе собственных значений обобщенной модели Фридрихса // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2009. – № 3. – С. 117-125. (01.00.00; №6).
8. Муминов М.Э. О бесконечности числа собственных значений на лакуне существенного спектра трехчастичного оператора Шрёдингера на решетке // Теоретическая и математическая физика. – Москва, 2009. – Т.159. – № 2. – С. 299-317. (№ 11. Springer. IF=0.854).
9. Муминов М.Э., Шодиев У.Р. О спектральных свойствах одного гамильтониана системы четырех частиц на решетке // Известия высших учебных заведений. Математика. – Казань, 2010. – №12. – С 32-43. (№ 3. Scopus. IF=0.8).
10. Муминов М.Э. Формула для числа собственных значений трехчастичного оператора Шрёдингера на решетке // Теоретическая и математическая физика. – Москва, 2010. – Т.164. – № 1. – С. 46-61. (№ 11. Springer. IF=0.854).
11. Муминов М.Э., Хуррамов А.М. Спектральные свойства двухчастичного гамильтониана на решетке // Теоретическая и математическая физика. – Москва, 2013. – Т. 177. – №3. – С. 482–496. (№ 11. Springer. IF=0.854).
12. Муминов М.Э., Хуррамов А.М. О компактном возмущении двухчастичного оператора Шрёдингера на решетке // Известия высших

учебных заведений. Математика. – Казань, 2015. – № 6. – С 24–30. (№ 3. Scopus. IF=0.8).
13. Muminov M.I., Ali H.M. Murid. Spectral analysis of the two-particle Schrödinger operator on a lattice // AIP Conference Proceedings 1682, 040017. – Melville, NY, USA, 2015. – pp. 1-14. (3. Scopus. IF=0.7).
14. Muminov M.I., Ghoshal S.K. Spectral attributes of self-adjoint Fredholm operators in Hilbert space: A rudimentary insight // Complex Analysis and Operator Theory. – Springer Nature, Switzerland, 2018. – Vol. 14, – pp. 1313-1323. (11. Springer. IF=0.739).
15. Muminov M.I., Ghoshal S.K. Spectral features of two-particle Schrödinger operator on d – dimensional lattice // Complex Analysis and Operator Theory. – Springer Nature, Switzerland, 2020. – Vol. 14, – № 11. – pp. 413-419. (11. Springer. IF=0.739).

II бўлим (Часть II; Part II)

16. Muminov M. I. On the essential spectrum of four-body Schrodinger’s operator for the system of two bosons with two fermions // Abstract of IWOTA, University of Bordeaux-1, France, June 13 – 16, 2000. – pp. 104-106.
17. Lakaev S.N., Muminov M.I. The Efimov effect for three-particle Schrodinger operators on lattice in a gap of the continuum // Quantum Theory, partial differential equations of mathematical physics and their applications. International Silk Road Conference. Tashkent, Uzbekistan, 2003. – pp. 79-81.
18. Muminov M.I. On positivity of the two-particle Schrodinger operator on lattice // Quantum Theory, partial differential equations of mathematical physics and their applications. International Silk Road Conference. Tashkent, Uzbekistan, 2003. – pp. 83-86.
19. Муминов М.Э. Дискретный спектр трехчастичного оператора Шредингера на решетке // Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа: Труды Межд. науч. конф.– Ташкент, 16-19 ноября, 2004. Т.1, – С. 248-251.
20. Муминов М.Э. О дискретном спектре трехчастичного оператора Шредингера на решетке // Современные проблемы математической физики и информационных технологий: Труды Межд. конф. – Ташкент, 18-24 апреля 2005. – С. 116-118.
21. Муминов М.Э. О спектре четырехчастичного оператора Шредингера на решетке // Операторные алгебры и квантовая Теория вероятностей: Тез. докл. Межд. науч. конф. – Ташкент, 7-10 сентября, 2005. – С.124-126.
22. Муминов М.Э. О выражении числа собственных значений модели Фридрихса // Замонавий ахборот-коммуникация технологиялари. ТАТУ Самарканд Филиали профессор-ўқитувчиларининг илмий конференцияси материаллари тўплами. – Самарканд, 24-26 апрель, 2006. – С.12.
23. Muminov M. I. The Efimov effect and discrete cpectrum asymptotics in a gap of the continuum for the three-particle Schrodinger operators on lattice // Second

school and workshop on “Mathematical methods in quantum mechanics”, – Bressanone, Italy, February 26 – march 3, 2007, – pp.9-10.
24. Муминов М.Э., Азизов И. Об одном представлении определителя Фредгольма // Труды Комплексного научно-исследовательского института региональных проблем Самаркандского отделения АН РУз. Выпуск 3, – Самарканд, 2007. – С. 93-98.
25. Муминов М.Э., Шодиев У.Р. Некоторые спектральные свойства четырехчастичного оператора шредингера с трёхчастичным контактным взаимодействием на решетке // Новые направления в теории динамических систем и некоторых задач. Материалы международной конференции – Самарканд, 19-20 октября 2007. – С. 202-204.
26. Муминов М.Э., Шодиев У.Р. О конечности связанных состояний гамильтониана системы четырёх частиц с трехчастичными контактными взаимодействиями на решетке // Современные проблемы математики, механики и информационных технологий. Материалы республиканской научной конференции посвященной 90 летнему юбилею НУУз, – Ташкент, 8 мая 2008 г. – С. 178-179.
27. Muminov M.I. Expression for the number of eigenvalues of three particle schrodinger operator on lattice // Abstracts of the third congress of the world mathematical socity of turkic counties, – Almaty, Kazakhistan, vol. 1, June 30-July 4, 2009. – pp. 112-113.
28. Muminov M.I. Spectral Analysis Of The Two-Particle Schrödinger Operator on a Lattice // The 22nd National Symposium On Mathematical Sciences (SKSM 22). – Shah Alam, Malaysia, 24-26 November 2014, – p. 78.
29. Muminov M.I., Che Lokman and M. Bin Ayem. Finiteness of the discrete spectrum of the two particle Schrödinger operator on Diamond lattice // Malaysian research conference and innovation exhibition 2015, –Johor Bahru, 2-3 December 2015, – p. 88.