В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

УСМОНОВ ЖАВОХИР БАХОДИР ЎҒЛИ

ДИСКРЕТ ВАҚТЛИ БЎЛАКЛИ СИЛЛИҚ ДИНАМИК СИСТЕМАЛАР

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ
бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2021

УДК: 517.98

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of thesis abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

УСМОНОВ ЖАВОХИР БАХОДИР ЎҒЛИ

ДИСКРЕТ ВАҚТЛИ БЎЛАКЛИ СИЛЛИҚ ДИНАМИК СИСТЕМАЛАР

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ
бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2021

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2019.4.PhD/FM430 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация В.И.Романовский номидаги Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, инглиз, рус (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://kengash.mathinst.uz) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида (http://www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Розиков Уткир Абдуллоевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Рахимов Абдуғофур Абдумажидович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Эшмаматова Дилфуза Бахрамовна физика-математика фанлари номзоди, доцент
Етакчи ташкилот:	**Самарқанд давлат университети**

Диссертация ҳимояси В.И.Романовский номидаги Математика институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2021 йил « ___ »__________соат ____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4б-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Диссертация билан В.И.Романовский номидаги Математика институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (_____-рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4б-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40.

Диссертация автореферати 2021 йил « ___ » __________ куни тарқатилди.

(2021 йил « ___ » ______________даги -рақамли реестр баённомаси).

А.Азамов
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш раис ўринбосари,
ф.-м.ф.д., академик

Ж.К.Адашев
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш илмий котиби,
ф.-м.ф.н., катта илмий ходим

У.У.Жамилов
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш ҳузуридаги
Илмий семинар раиси,
ф.-м.ф.д., катта илмий ходим

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда дискрет ҳамда узлуксиз вақтли динамик системаларни тадқиқ қилиш каби масалаларга келтирилади. Шунингдек, математик моделнинг динамикаси дискрет ва узлуксиз вақтли ҳолатлар учун ҳар доим ҳам бир хил характерга эга эмаслиги логистик функция мисолида яққол кўрсатилган. Шунинг учун узлуксиз вақтли системалар билан параллел равишда дискрет вақтли системалар ҳам тадқиқ этилади. Дискрет вақтли бўлакли силлиқ динамик системалар кўплаб муҳим физик жараёнларда, хусусан, калитли электр схемалари, таркибий қисмлари бир-бирига таъсир қилувчи механик қурилмалар, ишқаланиш, сирпаниш ёки сиқилиш масалаларида ҳамда молиявий соҳадаги башоратлаш масалаларида муҳим аҳамиятга эга. Шу боис, бўлакли силлиқ функцияларнинг динамикасини тадқиқ этиш динамик системалар назариясидаги муҳим ва долзарб вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда динамик системалар назарияси кўплаб амалий масалаларни характерини тушуниш, таҳлил қилиш ҳамда оптимал ечимини топишда асосий восита сифатида қўлланилмоқда. Ҳозирда силлиқ функциялар орқали аниқланган системаларни тадқиқ қилишда яхши ривожланган методлар ва геометрик ёндашувлар мавжуд. Аммо ушбу назариядаги натижалар билан мос хаётий системаларни изоҳлашда зиддиятлар ҳам бор. Бу каби зиддиятларни ҳал қилишда системани силлиқ бўлмаган функциялар орқали ҳосил қилинган математик моделлар ёрдамида ифодалаш мумкинлиги кўрсатилди. Бу борада: қўзғалмас ва даврий нуқталарни тўла тавсифлаш, траекторияларнинг барча лимит нуқталар тўпламини аниқлаш, системанинг хаотиклигини исботлаш ва уларнинг математик биологиядаги популяция жараёнларига татбиқи мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда сўнгги йилларда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий татбиқига эга бўлган геология, биология, математика ва физика фанларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, механика, электроника, бошқарув назарияси ва биологик системаларда кенг татбиқига эга бўлган бўлакли силлиқ функцияларнинг динамик системалари назариясини ривожлантиришга алоҳида аҳамият берилди. Узилишга эга бўлган акслантиришлар динамикаси бўйича салмоқли натижаларга эришилди. «Функционал анализ, математик физика ва статистик физика» фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалари ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Қарор ижросини таъминлашда илмий натижалардан илм-фаннинг турдош соҳаларида фойдаланиш

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамаси 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори.

мақсадида бўлакли силлиқ динамик системалар назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича харакатлар стратегияси тўғрисида»ги ПФ-4947-сон Фармони, 2019 йил 9 июлдаги «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4387-сон Қарори ва 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4708-сонли Қарори ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив–ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялар ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Сўнгги йилларда физика ёки биологиядаги математик моделларни ўрганиш дискрет вақтли динамик системаларни тадқиқ қилишга бўлган қизиқишни кескин орттирди. Бу соҳадаги дастлабки илмий натижалар М. Бернардо, С. Банерджи, Дж.А. Йорк, В. Аврутин, С. Хоган, К.Х. Хоммес, Е.Э. Нуссе ва А. Симоновиц ва бошқа олимлар томонидан эришилган бўлиб, социал иқтисодиётнинг узлуксиз бўлакли силлиқ моделининг динамик системаси бошқарув параметрларга боғлиқ эканлигини исботладилар. Модел содда бўлишига қарамай, ушбу модел динамикаси уч хил турдаги характерга эга эканлиги исботланган, яъни системада турғун орбиталар, квази-даврий аттракторлар ва хаотик аттракторлар мавжудлиги кўрсатилган. С. Банерджи, М.С. Картик, Г. Юан ва Дж.А. Йорклар томонидан бир ўлчовли бўлакли силлиқ функциялар учун бифуркациялар назарияси ривожлантирилган. Бундай хоссали динамик системани тадқиқ этиш электрон схемаларни ушбу функциялар билан ифодалаш мумкинлигини кўрсатган. Система функцияси содда бўлишига қарамай, параметрларнинг ўзгариши натижасида турғун орбиталар, турғун бўлмаган орбиталар, икки даврий аттракторлар ва хаотик орбиталар ҳосил бўлишлиги баён этилган.

П. Жаин ва С. Банерджилар узилиш нуқтаси атрофида бўлакли чизиқли аппроксимациянинг параметрларига боғлиқ бир ўлчовли узилишга эга функцияларнинг бифуркацияларини таснифлашган. Улар параметр қийматларининг ҳар бир ўзгариш оралиғи учун, хаос ва турли хил даврий орбиталар мавжудлиги ҳамда турғунлиги шартларини келтириб чиқаришган. Айтиш жоизки, улар томонидан ўрганилган функция С. Банерджи, М.С. Картик, Г. Юан ва Дж.А. Йорклар ишидаги функциянинг умумлашмаси бўлиб, яна қўшимча битта параметр қўшиш орқали функция узилишга эга бўлган функция кўринишига келтирилган.

Вольтерра типидаги квадратик стохастик операторлар Р.Н. Ганиходжаев ишларида Ляпунов функцияси ва турнирлар назарияларини қўллаш орқали ривожлантирилган. Кейинчалик квадратик стохастик операторлар учун l-Вольтерра типидаги квадратик стохастик операторлар синфи У.А. Розиков, А. Зада, У.У. Жамиловлар томонидан; чексиз ўлчовли квадратик стохастик операторлар Ф. Мухамедов, Х.Акин, О. Хакимовлар томонидан; квант квадратик стохастик операторлар Н.Н. Ганиходжаев, Ф. Мухамедовлар томонидан ўрганилган. Лекин, кўплаб илмий изланишларга қарамай, квадратик стохастик операторлар орқали ҳосил қилинган динамик системалар учун лимит нуқталар тўпламини тўла тавсифини бериш ҳалигача очиқ масала бўлиб қолмоқда. Бундан ташқари, узилишга эга бўлган квадратик стохастик операторларни ўрганишда ҳам кўплаб масалалар очиқлигича қолмоқда.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти В.И.Романовский номидаги Математика институтининг ОТ-F4-82 + ОТ-F4-87 «Операторли ва ноассоциатив алгебралар локал дифференциаллашлари ва автоморфизмлари, чизиқли бўлмаган динамик системаларда фазали ўтиш ва тартибсизлик» + «Евклид ва псевдо-Евклид фазоларидаги эгри чизиқлар ва уларнинг механикада қўлланилиши» (2017-2020 йиллар) ва ЁФА-Фтех-2018-78 «Аменабел бўлмаган графларда динамик ва термодинамик системалар» (2018-2019 йиллар) мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади бир параметрли бутун қисм функциялар оиласи ҳамда бир ва икки ўлчовли симплексларда аниқланган узилишга эга квадратик стохастик операторларнинг дискрет вақтли динамик системаларида ихтиёрий бошланғич нуқта учун траекториянинг лимит нуқталари тўпламини тўла тавсифлашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

бир параметрли бутун қисм функция орқали ҳосил қилинган дискрет вақтли динамик системанинг лимит нуқталарини топиш;

бутун қисм функциялардан ҳосил бўлган операторнинг дискрет вақтли динамик системасини тавсифлаш;

бир ўлчовли симплексда аниқланган узилишга эга қвадратик стохастик операторнинг динамикаси хаотиклигини кўрсатиш;

даврий нуқталар мавжуд бўлиши учун параметрларга шартлар топиш.

Тадқиқотнинг объекти. Бутун қисм функция ҳамда бир ва икки ўлчовли симплексларда аниқланган узилишга эга квадратик стохастик операторлар.

Тадқиқотнинг предмети. Ҳақиқий ўзгарувчили функциялар назарияси, дискрет вақтли динамик системалар назарияси, стохастик жараёнлар назарияси, бифуркациялар назарияси.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертацияда функционал анализ, стохастик жараёнлар ва дискрет вақтли динамик системалар назарияси усуллари қўлланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

параметр қийматига боғлиқ ҳолда бутун қисм функцияда ихтиёрий бошланғич нуқта учун траектория қўзғалмас нуқтага ёки икки даврий траекторияга ёки чексизликка интилиши исботланган;

бутун қисм функциялардан ҳосил бўлган икки ўлчовли оператор дискрет вақтли динамикаси учун ихтиёрий бошланғич нуқта траекториясининг характери тавсифланган;

бир ўлчовли симплексда аниқланган узилишга эга квадратик стохастик операторнинг дискрет вақтли динамикаси параметрларнинг нолдан фарқли қийматларида хаотиклиги исботланган;

икки ўлчовли симплексда аниқланган узилишга эга квадратик стохастик оператор динамикаси учун параметрнинг берилган қийматларида лимит нуқталар тўплами битта нуқта ёки чексиз тўплам бўлиши исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижаси математик биологиядаги популяция жараёнларининг математик моделлари бўлакли силлиқ функциялар орқали ифодалашни таклиф этилганлиги ва ушбу функциялар ёрдамида ҳосил бўлган динамик системада траектория лимит нуқталари тўпламини аниқлаш усулларини баён қилинганлигидан иборат.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги функционал анализ, стохастик жараёнлар ва дискрет вақтли динамик системалар назарияси усулларидан фойдаланилгани ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти бўлакли силлиқ функциялар динамикасида траектория лимит нуқталар тўпламининг тавсифидан ночизиқли дискрет динамик системалар назариясида фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқотнинг амалий аҳамияти бўлакли силлиқ акслантиришлар ёрдамида ҳосил бўлган динамик системада траектория лимит нуқталари тўпламини аниқлаш орқали математик биологиядаги популяция жараёнларига татбиқ этиш билан белгиланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Дискрет вақтли бўлакли силлиқ динамик системалар бўйича олинган натижалар асосида:

бир ўлчовли сиплексда аниқланган узилишга эга квадратик стохастик операторнинг дискрет вақтли динамикаси параметрларнинг нолдан фарқли қийматларида хаотиклигидан ОТ-Ф-4-03 рақамли «Узлуксиз ҳамда дискрет вақтли аниқ динамик системалар, қисмий интеграл операторлар спектрлари» мавзусидаги фундаментал илмий лойиҳада стохастик операторлар траекторияларининг лимит нуқталари тўпламини тавсифлашда фойдаланилган (Қарши давлат университетининг 2021 йил 12 июндаги № 04/1900-сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши Вольтерра ҳамда новольтерра типидаги квадратик ва кубик стохастик операторларнинг лимит нуқталарини тавсифлаш имконини берган;

икки ўлчовли симплексда аниқланган узилишга эга квадратик стохастик оператор динамикаси учун параметрнинг берилган қийматларида лимит нуқталар тўплами битта нуқта ёки чексиз тўплам бўлишлигидан ЁФА-Атех-2018-182 рақамли «Брюсселятор турли циклик кимёвий реакцияларни математик моделини динамик системалар назарияси методлари билан тадқиқ этиш» мавзусидаги амалий лойиҳада кимёвий реакция моделларининг динамикасини тавсифлашда фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг 2021 йил 23 июндаги № 2/1255-1835-сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши кимёвий реакциялар моделларига мос динамик системаларнинг қўзғалмас нуқталари ва даврини аниқлаш ҳамда траекторияларни сифатий таҳлил қилиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 3 та халқаро ва 3 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 11 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 5 та мақола, жумладан, 2 таси хорижий ва 3 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 94 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурияти асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«Бутун қисм функциядан ҳосил бўлган динамик системалар»** деб номланган биринчи бобида, диссертация мавзусини тўла ёритиш учун зарур бўлган асосий таърифлар ва муҳим тушунчалар келтирилган. Шунингдек, $\lfloor \lambda x \rfloor$ бутун қисм функциядан ҳосил бўлган динамик системалар ҳақидаги натижалар баён қилинган.

Ихтиёрий f ва g функциялар учун, f ва g нинг композициясини $f \circ g(x) = f(g(x))$ каби, f функциянинг ўз-ўзига n марта композицияси эса $f^n(x) = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n-times}(x)$ каби белгиланади. Берилган x_0 ($x_0 \in X$) учун,

$$x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1) = f^2(x_0),\ x_3 = f(x_2) = f(f^2(x_0)) = f^3(x_0),\ \ldots \qquad (1)$$

$\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), ..., f^n(x_0), ...\}$ нуқталар кетма-кетлиги x_0 нуқтанинг траекторияси ёки орбитаси дейилади. Дискрет вақтли динамик системалар назариясининг асосий масалаларидан бири ихтиёрий x бошланғич нуқта учун $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ кетма-кетликнинг барча лимит нуқталарини тавсифлашдан иборат.

Агар x нуқта $f(x) = x$ тенгламани қаноатлантирса, у ҳолда x нуқта f функциянинг қўзғалмас нуқтаси дейилади. Агар x нуқта $f^n(x) = x$ тенгламани қаноатлантирса, у ҳолда x нуқта f функциянинг n даврли даврий нуқтаси дейилади. $f^n(x) = x$ тенглама учун энг кичик мусбат n сонига x нуқтанинг туб даври дейилади. Туб даври n бўлган нуқта n-даврий нуқта дейилади. Барча n-даврий нуқталар тўплами $\mathrm{Per}_n(f)$ орқали ҳамда барча қўзғалмас нуқталар тўплами $\mathrm{Fix}(f)$ орқали белгиланади. Берилган x нуқтанинг $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ орбитасининг лимит нуқталари тўплами $\omega(x, f)$ ёки $\omega(x)$ каби белгиланади.

1-таъриф. *$p \in \mathbb{R}$ нуқта $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функция учун n-даврий нуқта ва p нуқтада $f^n(x)$ функция дифференциалланувчи бўлсин.*

- *Агар $\left|(f^n)'(p)\right| < 1$ бўлса, у ҳолда p тортувчи;*
- *Агар $\left|(f^n)'(p)\right| > 1$ бўлса, у ҳолда p итарувчи даврий нуқта дейилади.*

2-таъриф. *$f : A \to A$ ва $g : B \to B$ функциялар бўлсин. Агар f ва g функциялар учун шундай $h : A \to B$ гомеоморфизм топилиб, $h \circ f = g \circ h$ тенглик бажарилса, у ҳолда f ва g функциялар топологик қўшма дейилади.*

Дискрет вақтли динамик системалар назариясидан маълумки, топологик қўшма функциялар эквивалент функциялардир.

$x \in \mathbb{R}$ соннинг бутун қисми қуйидагича аниқланади:

$$\lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} : m \le x\}.$$

Биринчи бобнинг иккинчи параграфида ушбу

$$f(x) \equiv f_\lambda(x) = \lfloor \lambda x \rfloor, \qquad (2)$$

кўринишдаги $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функциядан ҳосил бўлган динамик система қаралган, бу ерда $\lambda \in \mathbb{R}$ параметр.

Фараз қилайлик, $\lambda \le 0$ бўлсин. $\lambda = 0$ тривиал ҳол ва $\omega(0) = \{0\}$. $\lambda < 0$ бўлсин.

1-теорема. *Агар $\lambda < 0$ бўлса, у ҳолда f функция орқали ҳосил қилинган динамик система учун қуйидагилар ўринли:*

1. Агар $-1 < \lambda < 0$ бўлса, у ҳолда $\forall x \in \mathbb{R}$ қуйидаги лимит ўринли

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = 0,$$

яъни, $\omega(x)=\{0\}$.

2. Агар $\lambda=-1$ *бўлса, у ҳолда ҳар бир нолдан фарқли бутун сон учун икки даврий орбита мавжуд, яъни ихтиёрий* $x\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ *учун* $f^2(x)=x$. *Шунингдек, ҳар бир* $x\in\mathbb{R}$ *учун* $f^3(x)=f(x)$ *ўринли, яъни,*

$$\omega(x)=\begin{cases}\{x, f(x)\}, & \text{агар } x\in\mathbb{Z} \text{ бўлса}\\ \{f(x), f^2(x)\}, & \text{агар } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} \text{ бўлса.}\end{cases}$$

3. Агар $\lambda<-1$ *бўлса, у ҳолда* $\forall x\in\left(\frac{1}{\lambda},0\right]$ *учун* $f(x)=0$ *бўлади ва*

$$\omega(x)=\begin{cases}\{0\}, & \text{агар } x\in\left(\frac{1}{\lambda},0\right] \text{ бўлса,}\\ \{-\infty,+\infty\}, & \text{агар } x\in\mathbb{R}\setminus\left(\frac{1}{\lambda},0\right] \text{ бўлса.}\end{cases}$$

Энди $0<\lambda<1$ ҳолни қарайлик. Ҳар бир $\lambda\in(0,1)$ учун шундай $m\in\mathbb{N}$ натурал сон мавжудки, $\frac{m-1}{m}<\lambda\le\frac{m}{m+1}$ бўлади.

2-теорема. *Айтайлик* $m\in\mathbb{N}$ *учун* $\frac{m-1}{m}<\lambda\le\frac{m}{m+1}$ *бўлсин. У ҳолда*

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x)=\begin{cases}0, & \text{агар } x\in[0,+\infty),\\ k, & \text{агар } x\in\left[\frac{k}{\lambda},\frac{k+1}{\lambda}\right),\\ -m, & \text{агар } x\in\left(-\infty,-\frac{m}{\lambda}\right),\end{cases}$$

бу ерда $k\in\{-1,-2,\ldots,-m\}$.

Қуйидаги $\lambda>1$ ҳол учун қуйидаги теорема ўринли.

3-теорема. *Айтайлик* $m\in\mathbb{N}$ *натурал сон учун* $\frac{m+1}{m}\le\lambda<\frac{m}{m-1}$ *бўлсин. У ҳолда*

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x)=\begin{cases}k, & \text{агар } x\in\left[\frac{k}{\lambda},\frac{k+1}{\lambda}\right),\\ -\infty, & \text{агар } x\in(-\infty,0),\\ +\infty, & \text{агар } x\in\left[\frac{m}{\lambda},+\infty\right),\end{cases}$$

бу ерда $k \in \{0,1,\ldots,m-1\}$.

Биринчи бобнинг учинчи параграфида қуйидагича икки ўлчовли оператор ёрдамидаги динамик система ҳақидаги натижалар баён қилинган:

$$A(z)=\begin{cases} x' = \lfloor \lambda y \rfloor \\ y' = \lfloor \lambda x \rfloor \end{cases}, \quad z=(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

бу ерда $\lambda \in \mathbb{R}$ параметр.

(3) операторнинг динамик системаси учун параметрнинг барча қийматларида натижалар олинган. Хусусан, $\lambda > 1$ ҳол учун қуйидаги теорема ўринли.

4-теорема. *Бирор* $m \in \mathbb{N}$ *учун* $\frac{m+1}{m} \le \lambda < \frac{m}{m-1}$ *бўлсин. У ҳолда қуйидагилар ўринли:*

1) Агар
$z \in \left\{ \left(x_0, y_0\right) | \ \frac{k}{\lambda} \le x_0 < \frac{k+1}{\lambda}, y_0 < 0 \right\} \bigcup \left\{ \left(x_0, y_0\right) | \ \frac{k}{\lambda} \le y_0 < \frac{k+1}{\lambda}, x_0 < 0 \right\}$ *бўлса, у ҳолда*

$$\omega(z) = \left\{(k,-\infty),(-\infty,k)\right\},$$

бу ерда $k \in \left\{0,1,2,...,m-1\right\}$.

2) Агар $z \in \left\{ \left(x_0, y_0\right) | \ x_0 < 0, y_0 \ge \frac{m}{\lambda} \right\} \bigcup \left\{ (x_0, y_0) \ | \ y_0 < 0, x_0 \ge \frac{m}{\lambda} \right\}$ *бўлса, у ҳолда*

$$\omega(z) = \left\{(+\infty,-\infty),(-\infty,+\infty)\right\}.$$

3) Агар $z \in \left\{ (x_0, y_0) \ | \ \frac{k}{\lambda} \le x_0 < \frac{k+1}{\lambda}, \ \frac{p}{\lambda} \le x_0 < \frac{p+1}{\lambda} \right\}$ *бўлса, у ҳолда*

$$\omega(z) = \left\{(k,p),(p,k)\right\},$$

бу ерда $k,p \in \left\{0,1,2,...,m-1\right\}$.

4) Агар
$z \in \left\{ \left(x_0, y_0\right) | \frac{k}{\lambda} \le x_0 < \frac{k+1}{\lambda}, y_0 \ge \frac{m}{\lambda} \right\} \bigcup \left\{ \left(x_0, y_0\right) | \ \frac{k}{\lambda} \le y_0 < \frac{k+1}{\lambda}, x_0 \ge \frac{m}{\lambda} \right\}$ *бўлса, у ҳолда*

$$\omega(z) = \left\{(k,+\infty),(+\infty,k)\right\},$$

бу ерда $k \in \left\{0,1,2,...,m-1\right\}$.

5) Агар $z \in \left\{ \left(x_0, y_0\right) | \, x_0 < 0, y_0 < 0 \right\}$ *бўлса, у ҳолда* $\omega(z) = \left\{(-\infty,-\infty)\right\}$.

6) Агар $z \in \left\{ \left(x_0, y_0\right) | \, x_0 \ge \frac{m}{\lambda}, y_0 \ge \frac{m}{\lambda} \right\}$ *бўлса, у ҳолда* $\omega(z) = \left\{(+\infty,+\infty)\right\}$.

Диссертациянинг **«Битта узилиш нуқтали хаотик динамик система»** деб номланган иккинчи бобида, иккита турдан ташкил топган популяциянинг математик модели берилган.

$\left(m-1\right)$-ўлчовли симплекс

$$S^{m-1}=\left\{\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_m)\in\mathbb{R}^m : i\in\{1,2,\ldots,m\}\ \text{учун}\ x_i\geq 0\ \text{ва}\ \sum_{i=1}^{m}x_i=1\right\}$$

каби аниқланади. $e_1=(1,0,\ldots,0)$, $e_2=(0,1,0,\ldots,0)$, …, $e_m=(0,0,\ldots,0,1)$ нуқталар симплекснинг учлари дейилади.

$$intS^{m-1}=\left\{\mathrm{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_m)\in S^{m-1}\,|\,x_i>0,\ i\in\{1,2,\ldots,m\}\right\}$$

тўплам симплекснинг ичи ва $\partial S^{m-1}=S^{m-1}\setminus intS^{m-1}$ тўплам эса симплекснинг чегараси дейилади.

Қуйидаги

$$\left(V(\mathbf{x})\right)_k=\sum_{i,j=1}^{m}P_{ij,k}x_ix_j,\ k\in\left\{1,2,\ldots,m\right\}$$

кўринишдаги $V:S^{m-1}\to S^{m-1}$ акслантириш квадратик стохастик оператор (КСО) дейилади, бу ерда, $P_{ij,k}$ коэффициентлар қуйидаги шартларни қаноатлантиради

$$P_{ij,k}\geq 0,\ P_{ij,k}=P_{ji,k},\ \sum_{k=1}^{m}P_{ij,k}=1,\ i,j\in\{1,2,\ldots,m\} \tag{3}$$

ва наслдан наслга ўтиш коэффициентлари дейилади.

Агар V КСО учун $k\notin\{i,j\}$ бўлганда $P_{ij,k}=0$ бўлса, у ҳолда V оператор Вольтерра типидаги КСО дейилади.

Қуйидаги $V_a:S^1\to S^1$ операторни қарайлик

$$V_a:\begin{cases}x'=x(1+ay)\\ y'=y(1-ax),\end{cases}$$

бу ерда $a\in[-1,1]$.

Ихтиёрий бошланғич нуқта $\mathrm{z}=(x,y)\in S^1$ учун $\mathrm{z}^{(n)}=(x^{(n)},y^{(n)})=V^n(\mathrm{z})$ траектория қуйидаги кўринишда бўлади

$$\begin{cases}x^{(n+1)}=x^{(n)}(1+ay^{(n)})\\ y^{(n+1)}=y^{(n)}(1-ax^{(n)}).\end{cases}$$

Кўриниб турибдики, $x^{(n)}$ ва $y^{(n)}$ кетма-кетликлар $a\neq 0$да монотон бўлади ($a=0$ да динамик система тривиал бўлади, шу боис ушбу ҳолни қарамаймиз). $x^{(n)}$ ва $y^{(n)}$ кетма-кетликлар юқоридан чегараланган бўлгани учун лимитга эга ва лимит нуқталар V_a операторнинг қўзғалмас нуқталари бўлади, яъни

$$\lim_{n\to\infty} z^{(n)} = \begin{cases} (0,1), & \text{агар } a<0 \\ (1,0), & \text{агар } a>0. \end{cases}$$

Юқоридаги лимит биологик маъноси шундан иборатки, келажакда ҳар доим турларинг бири асиптотик йўқолиб кетади.

Келажакда ҳар икки турни сақлаб қолиш учун, $V_{a,b}: \mathrm{z}=(x,y)\in S^1 \to \mathrm{z}'=(x',y')\in S^1$ эволюцион операторни қуйидагича аниқлаймиз:

$$V_{a,b}(z) = \begin{cases} V_a(z), & if \quad x \le \frac{1}{2} \\ V_b(\bar{z}), & if \quad x > \frac{1}{2} \end{cases} \tag{4}$$

бу ерда $a,b\in[-1,1]$ параметрлар ва $\bar{z}=\left(y,x\right)\in S^1$.

Қайд этиш лозимки, (3) муносабатда берилган $P_{ij,k}$ коэффициентлар $\mathbf{x}\in S^{m-1}$ га боғлиқ эмас эди, лекин (4) операторда

$$P_{11,1}=1-P_{11,2}=P_{22,2}=1-P_{22,1}=1$$

ва қолган коеффициентлар $\mathrm{z}=(x,y)\in S^1$ га боғлиқ:

$$P_{12,1}(\mathrm{z})=1-P_{12,2}(\mathrm{z})=\begin{cases} \frac{1+a}{2}, & \text{агар } x\le\frac{1}{2} \\ \frac{1-b}{2}, & \text{агар } x>\frac{1}{2}. \end{cases} \tag{5}$$

Иккинчи бобнинг иккинчи параграфида $x+y=1$ эканлигидан (4) операторни битта нуқтада узилишга эга бўлган бир ўлчовли $f_{a,b}:[0,1]\to[0,1]$ функцияга келтириб, ушбу функциядан ҳосил бўлган динамик система ўрганилган:

$$f_{a,b}(x)=\begin{cases} x(1+a-ax), & 0\le x\le\frac{1}{2} \\ x(1-b+bx), & \frac{1}{2}<x\le 1, \end{cases} \tag{6}$$

бу ерда a,b параметрлар симметрик бўлгани учун $a,b\in[0,1]$ деб фараз қиламиз.

Топологик қўшмалик тушунчаси ёрдамида (6) функция учун динамик системани $a,b\in[0,1]$ параметрлар учун $a\in[0,1]$, $a\le b$ тўпламдаги қийматларида ўрганиш етарли.

$a\le b$ да мумкин бўлган қуйидаги ҳолларни қараймиз:

1) $a=b=0$; 2) $a=0, b>0$; 3) $ab>0$.

1-изоҳ. *Агар* $a=b=0$ *бўлса, у ҳолда функция* $f_{0,0}(x)=x$, $0\le x\le 1$ *айний функция бўлади. Бу ҳолат қизиқ эмас.*

$a=0$, $b>0$ ҳолда динамик система тўла ўрганилган. $ab>0$ ҳол учун $f(A)=A$ ни қаноатлантирувчи $A=\left(\frac{1}{2}-\frac{b}{4},\frac{1}{2}+\frac{a}{4}\right]$ инвариант тўплам мавжуд. Шунингдек, ушбу ҳол учун динамик системани A инвариант тўпламда ўрганиш етарлидир. Чунки, агар бошланғич нуқтани инвариант тўпламнинг ташқарисидан олсак, чеклита қадамдан сўнг траекториянинг барча нуқталари A да жойлашади.

2-изоҳ. *Равшанки, қўзғалмас нуқталар тўплами* $ab>0$ *учун* $\mathrm{Fix}(f)=\{0,1\}$ *дан иборат. Шунингдек,* $|f'(0)|=1+a>1$, $|f'(1)|=1+b>1$. *Яъни, ҳар икки қўзғалмас нуқталар итарувчи. Шу боис, ҳар икки тур келажакда сақланиб қолади.*

Даврий нуқталар типи учун қуйидаги теорема ўринли.

5-теорема. *Агар* f *даврий нуқталарга эга бўлса, у ҳолда бу даврий нуқталар итарувчи бўлади.*

$x_{n+1}=f(x_n)$ дискрет вақтли динамик система ва x_0 нуқтадан бошланувчи орбита учун *Ляпунов экспонентаси* қуйидагича таърифланади:

$$\lambda(x_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln|f'(x_i)|. \tag{7}$$

Ляпунов экспонентаси турли хил орбиталарни фарқлашда муҳим аҳамиятга эга.

1-тасдиқ. $x_0\in[0,1]\setminus\{\frac{1}{2}\}$ *бўлсин. У ҳолда (6) функция учун Ляпунов экспонентаси номанфий бўлади.*

1-тасдиққа кўра $\lambda\geq 0$ бўлади, у ҳолда

- $\lambda=0$ муносабат траектория бетараф қўзғалмас нуқтага интилишини кўрсатади.
- $\lambda>0$ дан динамик система хаотиклиги келиб чиқади, яъни, яқин нуқталар траекториялари, қанчалик яқин бўлишидан қатъий назар, ҳар қандай ихтиёрий масофага узоқлашиши мумкин. Охир-оқибат траектория тўпламдаги барча нуқталарга боради. Бу нуқталар турғун бўлмаган нуқталар дейилади.

Шунингдек, параметрларнинг баъзи муносабатлари учун (6) функциянинг бифуркация диаграммалари чизилган. Бифуркация диаграммаси траекториянинг асимптотик интилувчи нуқталари (қўзғалмас нуқталар, даврий орбиталар ёки хаотик аттракторлар)ни ифодаловчи системадаги параметрнинг функциясидир. Одатда турғун нуқталар узлуксиз чизиқ билан ва гарчи, турғун бўлмаган нуқталар тушиб қолишига қарамай, улар нуқтали чизиқлар билан тасвирланади. Параграф сўнгида баъзи биологик шарҳлар берилган.

Диссертациянинг **«Бир ва икки ўлчовли симплексларда аниқланган узилишга эга квадратик стохастик операторларнинг динамик системаси»** деб номланган учинчи бобида, бир ўлчовли симплексда аниқланган новольтерра типидаги узилишга эга квадратик стохастик оператор ва икки ўлчовли симплексда аниқланган Вольтерра типидаги узилишга эга квадратик стохастик оператор динамик системалари ўрганилган.

$W_a : S^1 \to S^1$ ва $W_b : S^1 \to S^1$ операторларни қуйидагича аниқлаймиз:

$$W_a = \begin{cases} x' = ax^2 + 2xy + y^2 \\ y' = (1-a)x^2 \end{cases}, \quad W_b = \begin{cases} x' = x(1+by) \\ y' = y(1-bx) \end{cases},$$

бу ерда $a \in [0,1]$, $b \in [-1,1]$.

$W_{a,b} : z = (x,y) \in S^1 \to z' = (x',y') \in S^1$ операторни қарайлик:

$$W_{a,b}(z) = \begin{cases} W_a(z), & \text{агар } x \le 1/2 \\ W_b(z), & \text{агар } x > 1/2. \end{cases}$$

$x + y = 1$ ёрдамида, $W_{a,b}$ операторни $g_{a,b}(x) : [0,1] \to [0,1]$ функцияга келтирамиз

$$g(x) = g_{a,b}(x) = \begin{cases} (a-1)x^2 + 1, & x \le 1/2 \\ x(1+b-bx), & x > 1/2 \end{cases}, \tag{8}$$

бу ерда $a \in [0,1]$, $b \in [-1,1]$.

$a \in [0,1]$, $b \in [-1,1]$ параметрларнинг барча қийматлари учун (8) функциядан ҳосил бўлган динамик система тўла ўрганилган.
$0 \le a \le 1$ ва $-1 \le b < 0$ ҳол учун, қуйидаги теорема ўринли.

6-теорема. *(8) функциядан ҳосил бўлган динамик система учун қуйидагилар ўринли:*

a) g функция ягона $x = 1$ қўзғалмас нуқтага эга.

b) Агар $a = 1$ бўлса, у ҳолда $x^{(0)}$ бошланғич нуқта учун $x^{(n)}$ траектория қуйидаги лимитга интилади:

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = 1.$$

c) Агар $0 \le a < 1$ бўлса, у холда g икки даврий нуқталарга эга эмас.

d) Агар $0 \le a \le \dfrac{2b - b^2 + 2\sqrt{b^4 + 2\sqrt{b^2+1}b^2 - b^2}}{b^2}$ бўлса, у ҳолда g уч даврий нуқталарга эга.

Учинчи бобнинг иккинчи ва учинчи параграфларида икки ўлчовли симплексда аниқланган узилишга эга Вольтерра операторининг динамик системаси ўрганилган.

КСО ни қуйидагича таърифлаймиз:

$$V(\mathbf{x}) \equiv V_{a,b,c}(\mathbf{x}) = \begin{cases} V_1(\mathbf{x}), & \min\{x,y,z\} = x \text{ ва } x \neq y \text{ ёки } \mathbf{x} = (\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}) \\ V_2(\mathbf{x}), & \min\{x,y,z\} = y \text{ ва } y \neq z \\ V_3(\mathbf{x}), & \min\{x,y,z\} = z \text{ ва } x \neq z \end{cases} \tag{9}$$

бу ерда $\mathbf{x} = (x,y,z) \in S^2$, $a,b,c \in [0,1]$ ва

$$V_1 = \begin{cases} x' = x(1+ay+bz) \\ y' = y(1-ax+cz) \\ z' = z(1-bx-cy) \end{cases}, \quad V_2 = \begin{cases} x' = x(1-by-cz) \\ y' = y(1+az+bx) \\ z' = z(1-ay+cx) \end{cases}, \quad V_3 = \begin{cases} x' = x(1-az+cy) \\ y' = y(1-bz-cx) \\ z' = z(1+ax+by). \end{cases}$$

Агар $a=b=0$ ва $c>0$ бўлса, у ҳолда қуйидаги иккита лемма траекториянинг (V оператордан ҳосил қилинган) $\omega(\mathbf{x}^{(0)})$ лимит нуқталари тўпламини тавсифлайди.

1-лемма. *V оператор (9) орқали берилган КСО бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $\mathbf{x}^{(0)} \in S^2$ учун $\omega(\mathbf{x}^{(0)}) \subset \partial S^2$ ўринли бўлади.*

2-лемма. *(9) оператор даврий орбиталарга эга эмас.*

Лемма 1 ва Лемма 2 лардан қуйидаги теоремани хулоса қиламиз.

7-теорема. *Агар $a=b=0$ ва $c>0$ бўлса, у ҳолда $\omega(\mathrm{x}^{(0)})$ тўплам ё битта нуқтадан, ёки чексиз тўпламдан иборат бўлади.*

Агар $b=c=0$, $a>0$ бўлса, у ҳолда қуйидаги теорема ўринли.

8-теорема. *V оператор (9) орқали берилган КСО бўлсин. У ҳолда*

$$\mathrm{Per}_2(V) = \{\varnothing\}$$

ва

$$\mathrm{Per}_3(V) = \{\mathrm{x}_1^*, \mathrm{x}_2^*, \mathrm{x}_3^*\}$$

бу ерда

$$\mathrm{x}_1^* = (\frac{2}{-a+3+\sqrt{a^2-2a+9}}, \frac{2}{a+3+\sqrt{a^2-2a+9}}, \frac{2}{a+3+\sqrt{a^2-2a+9}})$$

$$\mathrm{x}_2^* = (\frac{2}{a+3+\sqrt{a^2-2a+9}}, \frac{2}{a+3+\sqrt{a^2-2a+9}}, \frac{2}{-a+3+\sqrt{a^2-2a+9}})$$

$$\mathrm{x}_3^* = (\frac{2}{a+3+\sqrt{a^2-2a+9}}, \frac{2}{-a+3+\sqrt{a^2-2a+9}}, \frac{2}{a+3+\sqrt{a^2-2a+9}}).$$

ХУЛОСА

Диссертация иши бутун қисм функция ҳамда бир ва икки ўлчовли симплексларда аниқланган узилишга эга квадратик стохастик операторларнинг дискрет вақтли динамик системаларини тадқиқ қилишга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Бутун қисм функциядан ҳосил бўлган динамик система учун қўзғалмас нуқталар тўплами топилган ва барча траекторияларнинг лимит нуқталари тўплами тўла тавсифланган.
2. Битта узилиш нуқтага эга функциядан ҳосил бўлган динамик система хаотиклиги Ляпунов экспонентаси ёрдамида исботланган.
3. Лимит нуқталар тўпламини тавсифловчи бифуркация диаграммалари тасвирланган.
4. Бир ўлчовли симплексда аниқланган узилишга эга КСО динамик системасининг лимит нуқталари тўплами топилган.
5. Икки ўлчовли симплексда аниқланган узилишга эга Вольтерра типидаги КСО учун $a = b = 0$, $c > 0$ бўлганда лимит нуқталар тўплами симплекс чегарасида ётиши исботланган. Шунингдек, $a > 0$, $b = c = 0$ (мос равишда, $a = c = 0$, $b > 0$) ҳоллар учун ҳар доим итарувчи уч даврий нуқталар мавжудлиги исботланган.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V.I. ROMANOVSKIY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

USMONOV JAVOXIR BAXODIR UGLI

PIECEWISE-SMOOTH DYNAMICAL SYSTEMS WITH DISCRETE-TIME

01.01.01-Mathematical analysis

ABSTRACT OF THESIS OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PHD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT-2021

The theme of thesis of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2019.4.PhD/FM430.

Thesis has been prepared at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy.

The abstract of the thesis is posted in three languages (Uzbek, English, Russian (summary)) on the website http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific supervisor:	**Rozikov Utkir Abdulloevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Rakhimov Abdugofur Abdumajidovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Eshmamatova Dilfuza Bakhramovna Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent
Leading organization:	**Samarkand State University**

Defense will take place "____"_________ 2021 at______at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy. (Address: University str. 4b, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

Thesis is possible to review in Information-resource center at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy (is registered №_____). (Address: University str. 4b, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871)-207-91-40).

Abstract of the thesis sent out on «____» ____________ 2021 year
(Mailing report № ___ on «____» ____________ 2021 year)

A.Azamov
Deputy Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Academician

J.K.Adashev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees,
C.F.-M.S., Senior researcher

U.U.Jamilov
Chairman of Scientific seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Senior researcher

INTRODUCTION

Actuality and demand of the theme of the thesis. In the world, a lot of scientific and practical researches are reduced to the studies of discrete-time and continuous dynamical systems. It is also clear from the example of the logistic map that the dynamics of a mathematical model is not always the same for discrete and continuous time cases. Therefore, the discrete-time dynamical systems are also examined in parallel with the continuous case. Discrete-time dynamical systems generated by piecewise-smooth functions play important role in helping to understand the behavior of many important physical phenomena such as electrical circuits that have switches, mechanical devices in which components impact with each other, problems with friction, sliding, or squealing, and financial forecasting. Hence, the study of the dynamical systems associated with piecewise-smooth functions remains one of essential and actual tasks in the theory of dynamical systems.

Nowadays in the world, theory of dynamical systems has been proven to be a powerful tool for analyzing and understanding the behavior of a wide range of problems. There is now a well-developed qualitative or geometric approach to dynamical systems that usually relies on the evolution of a system as determined by the smooth function. But there are also contradictions in the interpretation of real-life systems consistent with the results of this theory. In solving such contradictions, it has been shown that the system can be expressed using mathematical models generated by non-smooth functions. In this regard, the main problems are: a complete classification of fixed and periodic points, the determination of the set of all limit points of the trajectories, proof of the chaoticity of the system and their application to population processes in mathematical biology.

In recent years, our country has paid more attention to geology, biology, mathematics and physics, which have a scientific and practical application of fundamental sciences. In particular, special attention was paid to the development of the theory of dynamical systems of piecewise-smooth functions, which are widely used in mechanics, electronics, control theory and biological systems. Significant results were obtained on the dynamical systems generated by discontinuous function. Investigations on the international level in such important areas as the functional analysis and dynamical systems theory has been considered the main task of fundamental research[1]. Currently, the development of investigations on the theory of piecewise-smooth dynamical systems plays an important role in the implementation of this decree.

The subject and object of research of this dissertation are in line with tasks identified in the Decrees and Resolutions of the President of the Republic of Uzbekistan of February 7, 2017, PF-4947 , «On the strategy of action for the

[1] Decree of Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan at the 2017 year 18 May « On measures on the organization of activities of the first created scientific research institutions of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan» № 292 dated May 17, 2017.

further development of the Republic of Uzbekistan», PQ-4387 dated July 9, 2019 «On state support for the further development of mathematics education and science, as well as measures to radically improve the activities of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan», PQ-4708 of May 7, 2020 «On measures to improve the quality of education and research in the field of mathematics» as well as in other regulations related to basic sciences.

Connection of research to priority directions of development of science and technologies of the Republic. This study was performed in accordance with the priority areas of science and technology of the Republic of Uzbekistan IV, «Mathematics, Mechanics and Computer Science».

The degree of scrutiny of the problem. Efforts to understand mathematical models in physical or biological systems have aroused interest in studying the methods of discrete-time dynamical systems. Preliminary scientific results in this field achieved by M. Bernardo, S. Banerjee, J. A. Yorke, V. Avrutin, S. Hogan, K. H. Hommes, H.E. Nusse, and A. Simonovits and others, they proved that the dynamical system of the continuous piecewise-smooth model of the social economy depends on control parameters. Although the model is quite simple, they have found three different types of behavior in the dynamics of the system due to the following different types of attractors: stable cycles, quasi-periodic attractors, and chaotic attractors. In the work of S. Banerjee, M.S. Karthik, G. Yuan, and J.A. Yorke, published in 2000, the bifurcation theory of one-dimensional piecewise-smooth maps is developed and the border collision bifurcations defined. The motivation to study the dynamics is that some switching circuits can be represented by these maps. Although the function of the system is simple, while changing in parameters there are stable orbits, unstable orbits, two periodic attractors, and chaotic orbits.

P. Jain, S. Banerjee present a classification of border-collision bifurcations in one-dimensional discontinuous maps depending on the parameters of the piecewise linear approximation in the neighborhood of the point of discontinuity. For each range of parameter values, they derived the condition of existence and stability of various periodic orbits and of chaos. It should be noted that the function studied by them is a generalization of the function in the work of S. Banerjee, M.S. Karthik, G. Yuan, and J.A. Yorke, and by adding one more parameter, the function is reduced to the form of a function with one discontinuity point.

In the works of R.N. Ganikhodjaev the theory of Volterra quadratic stochastic operators was developed using theories of the Lyapunov function and tournaments. Later for quadratic stochastic operators, the class of l-Volterra quadratic stochastic operators was studied by U.A. Rozikov, A. Zada, U.U. Jamilov; infinite-dimensional quadratic stochastic operators was studied by F. Mukhamedov, X. Akin, O. Khakimov; quantum quadratic stochastic operators were introduced by N.N. Ganikhodjaev, F. Mukhamedov. However, despite of numerous works, it remains an open problem to give a full description of the set of limit points for dynamical systems generated by quadratic stochastic operators. In addition, there are many open problems in the study of discontinuous quadratic stochastic operators.

The connection of the theme of the thesis with the research plans of the higher education institute, where the research on the thesis is carried out. The dissertation research is done in accordance with the planned theme of scientific research OT-F4-82 + OT-F4-87 «Local derivations and automorphisms of operator and nonassociative algebras, phase transitions and chaos in nonlinear dynamical systems» + «The theory of global invariants of curves and surfaces in Euclidean and pseudo-Euclidean spaces and its applications in mechanics» (2017-2020) and scientific research «YoOT-Ftex- 2018-78, Dynamical and thermodynamical systems on non-amenable graphs» (2018–2019) at the Institute of Mathematics after named V.I. Romanovskiy.

The aim of the research work is to describe a set of limit points of the trajectory for an arbitrary initial point in discrete-time dynamical systems of the floor function and discontinuous quadratic stochastic operators on one- and two-dimensional simplexes.

Research problems:

to find fixed points for the floor functions;

to describe all sets of limit points of the dynamics generated by the floor functions;

to show that the dynamics of a quadratic stochastic operator on the one-dimensional simplex is chaotic;

to find conditions on parameters for existence of periodic points.

The research object. The floor function, discontinuous quadratic stochastic operators on one- and two-dimensional simplexes.

The research subject. Theory of functions of real variables, theory of discrete-time dynamical systems, theory of stochastic processes, theory of bifurcations.

Research methods. In the research the methods of functional analysis, stochastic processes and theory of discrete dynamical systems are used.

Scientific novelty of the research work consists of the following:

depending on the parameter value it is proved that the trajectory for an arbitrary initial point in the floor function converges to either a fixed point or two periodic trajectory or infinity;

the nature of trajectories of a two-dimensional operator generated by the floor function is described;

the discrete-time dynamics of a discontinuous quadratic stochastic operator on the one-dimensional simplex is proved to be chaotic for non-zero values of the parameters;

for dynamics of a discontinuous quadratic stochastic operator on a two-dimensional simplex, it has been proved that at given values of the parameters the set of limit points is either a single point or an infinite set.

Practical results of the research are that mathematical models of population processes in mathematical biology are proposed to be expressed by piecewise-smooth functions and methods for determining the set of trajectory limit points in a dynamical system generated by these functions are described.

The reliability of the results of the study. The results have been obtained by using the methods of functional analysis, theory of discrete time dynamical systems and stochastic processes. The obtained results are mathematically strongly proved.

Scientific and practical significance of the research results. The scientific significance of the research results is explained by the fact that the description of the set of trajectory limit points in the dynamical systems of piecewise-smooth functions can be used in the theory of nonlinear discrete-time dynamical systems.

The practical significance of the research is determined by applications to population processes in mathematical biology by determining the set of limit points of trajectory in a dynamical system generated by piecewise-smooth maps.

Implementation of the research results. Results related to piecewise-smooth dynamical systems with discrete-time were used in the following research projects:

the results on the chaoticity of the discrete-time dynamics of a discontinuous quadratic stochastic operator on the one-dimensional simplex for non-zero values of parameters have been used for describing the sets of limit points of trajectories of stochastic operators in the research project No. OT-Ф-4-03 (Reference No. 04/1900 of Karshi State University dated June 12, 2021). The application of the scientific result allowed to classify the limit points of quadratic and cubic stochastic operators of Volterra and non-Volterra;

the results that the set of limit points at given values of the parameters for the dynamics of a discontinuous quadratic stochastic operator on the two-dimensional simplex is a single point or an infinite set have been used for describing the dynamics of chemical reaction models in the research project No. ЁФА-Атех-2018-182 (Reference No. 2/1255-1835 of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan dated June 23, 2021). The use of scientific results has ensured determining fixed points and period of dynamical systems in accordance with the models of chemical reactions, as well as qualitative analysis of trajectories.

Approbation of the research results. The main results of the research have been discussed at 3 international and 3 national scientific conferences.

Publications of the research results. On the topic of the dissertation 11 research papers have been published in the scientific journals, 5 of them are included in the list of journals proposed by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for defending the PhD thesis, in addition 2 of them were published in international journals and 3 papers published in national mathematical journals.

The structure and volume of the thesis. The dissertation consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The general volume of the thesis is 94 pages.

THE MAIN CONTENT OF THE THESIS

The the introduction of the thesis includes the motivation of the research, the relevance of the research to the priorities of science and technology, the review of foreign research on the topic, the degree of scrutiny of the problem, the aim, research problems, object and subject of research, scientific novelty and practical results, theoretical and practical significance of the results obtained, the statement of research results, published works and information on the structure of the thesis.

In the first chapter of the thesis, titled **«On dynamical systems generated by the floor function»** we give main definitions and important notions necessary to cover the dissertation and research the subject. Also we have studied the dynamical systems generated by the floor function $\lfloor \lambda x \rfloor$.

Let X be non empty subset of real numbers. If f is a map from X to itself we will express that as $f: X \to X$, $x \to f(x)$. Sometimes we will also express the map as a difference equation $x_{n+1} = f(x_n)$. If the function f depends on a parameter λ we write $f_\lambda(x)$ and say that f is a one-parameter family of maps.

For arbitrary maps f and g, the composition of f and g will be denoted as $f \circ g(x) = f(g(x))$. The n-fold composition of f with itself will be denoted as $f^n(x) = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n-times}(x)$. For a given x_0 ($x_0 \in X$),

$$x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1) = f^2(x_0),\ x_3 = f(x_2) = f(f^2(x_0)) = f^3(x_0),\ \ldots \quad (1)$$

a sequence $\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), ..., f^n(x_0), ...\}$ are called the trajectory of the point x_0.

One of the main problems of the dynamical systems is to describe all limit points of the sequence $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ for any initial points x.

The point x is a fixed point for f if $f(x) = x$. The point x is a periodic point of period n if $f^n(x) = x$. The least positive n for which $f^n(x) = x$ is called the prime period of x. We denote the set of period points of period n by $\mathrm{Per}_n(f)$, and the set of fixed points by $\mathrm{Fix}(f)$. The set of all iterates of a periodic point form a periodic orbit. For a given function $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ the ω-limit set of $x \in \mathbb{R}$, denoted by $\omega(x, f)$ or $\omega(x)$, is the set of cluster points of the forward orbit $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ of the iterated function f.

Definition 1. *Let p be a periodic point of prime period n and we assume that*

$f^n(x)$ *is differentiable at* p.

If $\left|(f^n)'(p)\right|<1$, *then* p *is attracting;*

If $\left|(f^n)'(p)\right|>1$, *then* p *is repelling.*

Definition 2. *Let* $f:A\to A$ *and* $g:B\to B$ *be two maps.* f *and* g *are said to be topologically conjugate if there exists a homeomorphism* $h:A\to B$ *such that,* $h\circ f=g\circ h$. *The homeomorphism* h *is called a topological conjugacy.*

From the theory of discrete-time dynamical systems topologically conjugate functions are considered equivalent functions.

The floor function of $x\in\mathbb{R}$ is defined by

$$\lfloor x\rfloor=\max\{m\in\mathbb{Z}: m\le x\}.$$

We consider the dynamical system associated with the function $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ defined by

$$f(x)\equiv f_\lambda(x)=\lfloor \lambda x\rfloor, \tag{2}$$

where $\lambda\in\mathbb{R}$ is a parameter.

Let $\lambda\le 0$. The case $\lambda=0$ is trivial $\omega(0)=\{0\}$. Consider the case $\lambda<0$.

Theorem 1. *If* $\lambda<0$ *then the dynamical system generated by* f *has the following properties:*

1. If $-1<\lambda<0$ *then* $\forall x\in\mathbb{R}$ *we have*

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x)=0,$$

i.e., $\omega(x)=\{0\}$.

2. If $\lambda=-1$ *then each non-zero integer has period two, i.e.* $f^2(x)=x$ *for any* $x\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. *Moreover* $f^3(x)=f(x)$, *for each* $x\in\mathbb{R}$, *i.e.,*

$$\omega(x)=\begin{cases}\{x,f(x)\}, & \text{if } x\in\mathbb{Z}\\ \{f(x),f^2(x)\}, & \text{if } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}.\end{cases}$$

3. If $\lambda<-1$ *then* $\forall x\in(1/\lambda,0]$ *we have* $f(x)=0$, *and*

$$\omega(x)=\begin{cases}\{0\}, & \text{if } x\in(1/\lambda,0]\\ \{-\infty,+\infty\}, & \text{if } x\in\mathbb{R}\setminus(1/\lambda,0].\end{cases}$$

Let $0<\lambda<1$. Note that for each $\lambda\in(0,1)$ there exists $m\in\mathbb{N}$ such that $\frac{m-1}{m}<\lambda\le\frac{m}{m+1}$.

Theorem 2. *Let* $\frac{m-1}{m}<\lambda\le\frac{m}{m+1}$ *for some* $m\in\mathbb{N}$. *Then*

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x)=\begin{cases}0, & for\ all\ \ x\in[0,+\infty),\\ k, & for\ all\ \ x\in\left[\frac{k}{\lambda},\frac{k+1}{\lambda}\right),\\ -m, & for\ all\ \ x\in\left(-\infty,-\frac{m}{\lambda}\right)\end{cases}$$

where $k\in\{-1,-2,\ldots,-m\}$.

For the case $\lambda>1$ we have the following theorem.

Theorem 3. *If* $\frac{m+1}{m}\le\lambda<\frac{m}{m-1}$ *for some* $m\in\mathbb{N}$*, then*

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x)=\begin{cases}k, & for\ all\ \ x\in\left[\frac{k}{\lambda},\frac{k+1}{\lambda}\right),\\ -\infty, & for\ all\ \ x\in(-\infty,0),\\ +\infty, & for\ all\ \ x\in\left[\frac{m}{\lambda},+\infty\right),\end{cases}$$

where $k\in\{0,1,\ldots,m-1\}$.

In the second paragraph of the first chapter we have investigated two-dimensional dynamical system generated by (2). The operator is defined by:

$$A(z)=\begin{cases}x'=\lfloor\lambda y\rfloor\\ y'=\lfloor\lambda x\rfloor\end{cases},\qquad z=(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

where $\lambda\in\mathbb{R}$ is a parameter.

The dynamical system of this operator is also studied for all parameter values. For $\lambda>1$ the following theorem holds.

Theorem 4. *Let* $\frac{m+1}{m}\le\lambda<\frac{m}{m-1}$ *for some* $m\in\mathbb{N}$. *Then the following hold:*

- *If* $z\in\left\{(x_0,y_0)\,|\,\frac{k}{\lambda}\le x_0<\frac{k+1}{\lambda},y_0<0\right\}\bigcup\left\{(x_0,y_0)\,|\,\frac{k}{\lambda}\le y_0<\frac{k+1}{\lambda},x_0<0\right\}$

then

$$\omega(z)=\{(k,-\infty),(-\infty,k)\},$$

where $k\in\{0,1,2,...,m-1\}$.

- *If* $z\in\left\{(x_0,y_0)\mid x_0<0,y_0\ge\frac{m}{\lambda}\right\}\bigcup\left\{(x_0,y_0)\mid y_0<0,x_0\ge\frac{m}{\lambda}\right\}$, *then*

$$\omega(z)=\{(+\infty,-\infty),(-\infty,+\infty)\}.$$

- *If* $z\in\left\{(x_0,y_0)\mid\frac{k}{\lambda}\le x_0<\frac{k+1}{\lambda},\frac{p}{\lambda}\le x_0<\frac{p+1}{\lambda}\right\}$, *then*

$$\omega(z)=\{(k,p),(p,k)\},$$

where $k, p \in \{0,1,2,...,m-1\}$.

• *If* $z \in \left\{(x_0, y_0) \mid \frac{k}{\lambda} \le x_0 < \frac{k+1}{\lambda}, y_0 \ge \frac{m}{\lambda}\right\} \bigcup \left\{(x_0, y_0) \mid \frac{k}{\lambda} \le y_0 < \frac{k+1}{\lambda}, x_0 \ge \frac{m}{\lambda}\right\}$,

then

$$\omega(z) = \{(k, +\infty), (+\infty, k)\},$$

where $k \in \{0,1,2,...,m-1\}$.

• *If* $z \in \{(x_0, y_0) \mid x_0 < 0, y_0 < 0\}$, *then*

$$\omega(z) = \{(-\infty, -\infty)\}.$$

• *If* $z \in \left\{(x_0, y_0) \mid x_0 \ge \frac{m}{\lambda}, y_0 \ge \frac{m}{\lambda}\right\}$, *then*

$$\omega(z) = \{(+\infty, +\infty)\}.$$

In the second chapter of the thesis, titled **«On a chaotic dynamical system associated with one discontinuity point»** we give the mathematical model of population which consists of two species.

The $(m-1)$-dimensional simplex is defined by

$S^{m-1} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_i \ge 0 \ \ for \ \ i \in \{1,2,\ldots,m\} \ \ and \ \ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\}$.

Vertexes of the simplex are $e_1 = (1,0,\ldots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\ldots,0)$, …, $e_m = (0,0,\ldots,0,1)$. We denote the interior of the simplex by

$$intS^{m-1} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in S^{m-1} : x_i > 0 \ \ for \ all \ \ i \in \{1,2,\ldots,m\}\}$$

and the boundary of the simplex by $\partial S^{m-1} = S^{m-1} \setminus intS^{m-1}$.

QSO is a mapping $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$ defined by

$$(V(\mathbf{x}))_k = \sum_{i,j=1}^{m} P_{ij,k} x_i x_j, \ \ k \in \{1,2,\ldots,m\}.$$

Here, $P_{ij,k}$ are hereditary coefficients and satisfy

$$P_{ij,k} \ge 0, \ \ P_{ij,k} = P_{ji,k}, \ \ \sum_{k=1}^{m} P_{ij,k} = 1, \ \ i,j \in \{1,2,\ldots,m\}. \tag{3}$$

Recall that a QSO V is called Volterra if one has $P_{ij,k} = 0$ when $k \not\in \{i,j\}$.

For a parameter $a \in [-1,1]$ define the operator $V_a : S^1 \to S^1$ as

$$V_a : \begin{cases} x' = x(1+ay) \\ y' = y(1-ax) \end{cases}$$

For an initial point $\mathrm{z} = (x, y) \in S^1$ the trajectory $\mathrm{z}^{(n)} = (x^{(n)}, y^{(n)}) = V^n(\mathrm{z})$ is given by

$$\begin{cases} x^{(n+1)} = x^{(n)}(1+ay^{(n)}) \\ y^{(n+1)} = y^{(n)}(1-ax^{(n)}). \end{cases}$$

From this system it is clear that the sequences $x^{(n)}$ and $y^{(n)}$ are monotone for any $a \neq 0$ (the case $a=0$ gives a trivial dynamical system, therefore we will not consider it). Since both sequences are bounded they have a limit, the limit points are fixed points of V_a. Therefore we get the following

$$\lim_{n\to\infty} z^{(n)} = \begin{cases} (0,1), & if \quad a<0 \\ (1,0), & if \quad a>0. \end{cases}$$

The last limit means that if $a>0$ (resp. $a<0$) then the specie 2 (resp. 1) will extinct and the specie 1 (resp. 2) will dominate (grow).

To ensure that both species will have equal domination we define an evolution operator, $V_{a,b} : \mathrm{z}=(x,y) \in S^1 \to \mathrm{z}' = (x',y') \in S^1$ by

$$V_{a,b}(z) = \begin{cases} V_a(z), & if \quad x \le 0.5 \\ V_b(\bar{z}), & if \quad x > 0.5 \end{cases} \tag{4}$$

where $a,b \in [-1,1]$ are parameters and $\bar{z} = (y,x)$.

We note that the probabilities $P_{ij,k}$ mentioned in (3) are independent on $\mathrm{x} \in S^{m-1}$, but for operator (4) we have

$$P_{11,1} = 1 - P_{11,2} = P_{22,2} = 1 - P_{22,1} = 1$$

and the remaining coefficients depend on the points $\mathrm{z}=(x,y)$ of the simplex S^1:

$$P_{12,1}(\mathrm{z}) = 1 - P_{12,2}(\mathrm{z}) = \begin{cases} \dfrac{1+a}{2}, & if \quad x \le 0.5 \\ \dfrac{1-b}{2}, & if \quad x > 0.5. \end{cases} \tag{5}$$

Then we have studied the dynamical system of the operator (4) by reducing to one-dimensional function $f_{a,b} : [0,1] \to [0,1]$ with one discontinuity point:

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} x(1+a-ax), & 0 \le x \le 0.5 \\ x(1-b+bx), & 0.5 < x \le 1, \end{cases} \tag{6}$$

where by the symmetry of parameters we can assume that $a,b \in [0,1]$.

By using the notion topological conjugacy we proved that it is sufficient to study the dynamical system generated by (6) for the parameters $a,b \in [0,1]$ with the condition $a \in [0,1]$, $a \le b$.

Consider the following cases: 1) $a=b=0$; 2) $a=0, b>0$; 3) $a>0, b>0$.

Remark 1. *If $a=b=0$ then the function has the form $f_{0,0}(x)=x$, $0 \le x \le 1$. This case is not interesting.*

In the case $a=0$, $b>0$ we have completely investigated the dynamical systems. For the case $a>0$, $b>0$ we found an invariant set $A = \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{4}, \frac{1}{2} + \frac{a}{4} \right]$ which $f(A) = A$ holds. Moreover, we have given the result what about it is sufficient to study the dynamical systems in the invariant set. Because if we take an initial point outer of the invariant set, after several steps all points in the trajectory lies on the A.

Remark 2. *Obviously, the set of fixed points is* $\mathrm{Fix}(f)=\{0,1\}$ *for* $ab>0$. *Besides we have* $|f'(0)|=1+a>1, |f'(1)|=1+b>1$. *Thus both fixed points are repeller. Therefore both species will always survive.*

For the type of periodic points we have the theorem.

Theorem 5. *If* f *has a periodic point then the point is a repelling.*

For discrete time dynamical system $x_{n+1}=f(x_n)$, for an orbit starting with x_0 the *Lyapunov exponent* can be defined as follows:

$$\lambda(x_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln|f'(x_i)|. \tag{7}$$

The Lyapunov exponent "λ", is useful for distinguishing among the various types of orbits.

Proposition 1. *Let* $x_0\in[0,1]\setminus\{0.5\}$. *Then the Lyapunov exponent is non negative for (6).*

By Proposition 1 we have $\lambda\geq 0$, in the case

- $\lambda=0$ it indicates that the trajectory converges to an indifferent fixed point.
- $\lambda>0$ it follows that the dynamical system is chaotic, i.e., nearby points, no matter how close, will diverge to any arbitrary separation. All neighborhoods in the phase space will eventually be visited. These points are said to be unstable.

Moreover, we have sketched bifurcation diagrams of the function (6) for some parameter values. A *bifurcation diagram*[1] shows the values visited or approached asymptotically (fixed points, periodic orbits, or chaotic attractors) of a system as a function of a bifurcation parameter in the system. It is usual to represent stable values with a solid line and unstable values with a dotted line, although often the unstable points are omitted. Then we give some biological interpretations.

In the third chapter of the thesis, titled **«On the dynamical systems of discontinuous quadratic stochastic operators on one- and two-dimensional simplexes»** we study the dynamical systems of a discontinuous non-Volterra quadratic stochastic operator on one-dimensional simplex and a discontinuous Volterra quadratic stochastic operator on two-dimensional simplex.

Let us consider the operators $W_a: S^1\to S^1$ and $W_b: S^1\to S^1$

$$W_a=\begin{cases}x'=ax^2+2xy+y^2\\ y'=(1-a)x^2\end{cases},\quad V_b=\begin{cases}x'=x(1+by)\\ y'=y(1-bx)\end{cases},$$

where $a\in[0,1]$, $b\in[-1,1]$.

Define an evolution operator, $W_{a,b}: z=(x,y)\in S^1\to z'=(x',y')\in S^1$ by

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Bifurcation _ diagram

$$W_{a,b}(z)=\begin{cases} W_a(z), & if\ x\le 1/2 \\ V_b(z), & if\ x>1/2 \end{cases}$$

Using $x+y=1$, $W_{a,b}$ operator can be reduced to $g_{a,b}(x):[0,1]\to[0,1]$ defined by

$$g(x)=g_{a,b}(x)=\begin{cases} (a-1)x^2+1, & x\le 1/2 \\ x(1+b-bx), & x>1/2 \end{cases}, \tag{8}$$

where $a\in[0,1]$, $b\in[-1,1]$.

For the cases $a\in[0,1]$, $b\in[-1,1]$ we have completely studied the dynamical system generated by (8). In the case $0\le a\le 1$, $-1\le b<0$, we have the following.

Theorem 6. *For the dynamical system generated by function (8) the followings hold:*

a) g has unique fixed point $x=1$.

b) if $a=1$, then for any initial point $x^{(0)}$ the trajectory $x^{(n)}$ has the following limit

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)}=1.$$

c) if $0\le a<1$, then g does not have a periodic point of period two.

d) if $0\le a\le \dfrac{2b-b^2+2\sqrt{b^4+2\sqrt{b^2+1}b^2-b^2}}{b^2}$, then g has periodic points of period three.

In the second section of the third chapter the dynamical systems of a discontinuous three-dimensional Volterra operator is investigated.

Define a QSO as the following:

$$V(\mathrm{x})=\begin{cases} V_1(\mathrm{x}), & \min\{x,y,z\}=x\ and\ x\ne y\ or\ \mathrm{x}=(1/3,1/3,1/3) \\ V_2(\mathrm{x}), & \min\{x,y,z\}=y\ and\ y\ne z \\ V_3(\mathrm{x}), & \min\{x,y,z\}=z\ and\ x\ne z \end{cases} \tag{9}$$

where $\mathrm{x}=(x,y,z)\in S^2$, $a,b,c\in[0,1]$ and

$$V_1=\begin{cases} x'=x(1+ay+bz) \\ y'=y(1-ax+cz) \\ z'=z(1-bx-cy) \end{cases},\ V_2=\begin{cases} x'=x(1-by-cz) \\ y'=y(1+az+bx) \\ z'=z(1-ay+cx) \end{cases},\ V_3=\begin{cases} x'=x(1-az+cy) \\ y'=y(1-bz-cx) \\ z'=z(1+ax+by). \end{cases}$$

If $a=b=0$ and $c>0$ then the following two lemmas give information about $\omega(\mathrm{x}^{(0)})$ of the trajectory (under the operator V).

Lemma 1. *Let V be QSO given by (9). Then for any $\mathrm{x}^{(0)}\in S^2$ it holds $\omega(\mathrm{x}^{(0)})\subset\partial S^2$.*

Lemma 2. *The operator (9) does not have periodic cycle.*

We can conclude the following theorem from Lemma 1 and Lemma 2.

Theorem 7. *If $a=b=0$ and $c>0$ then the set $\omega(\mathrm{x}^{(0)})$ either consists a single* *point, or is an infinite set.*

If $b=c=0$, $a>0$, then we have the following theorem.

Theorem 8. *Let V be QSO given by (9). Then*

$$\mathrm{P}er_2(V)=\{\varnothing\}$$

and

$$\mathrm{P}er_3(V)=\{\mathrm{x}_1^*,\mathrm{x}_2^*,\mathrm{x}_3^*\}$$

where

$$\mathrm{x}_1^*=\left(\frac{2}{-a+3+\sqrt{a^2-2a+9}},\frac{2}{a+3+\sqrt{a^2-2a+9}},\frac{2}{a+3+\sqrt{a^2-2a+9}}\right)$$

$$\mathrm{x}_2^*=\left(\frac{2}{a+3+\sqrt{a^2-2a+9}},\frac{2}{a+3+\sqrt{a^2-2a+9}},\frac{2}{-a+3+\sqrt{a^2-2a+9}}\right)$$

$$\mathrm{x}_3^*=\left(\frac{2}{a+3+\sqrt{a^2-2a+9}},\frac{2}{-a+3+\sqrt{a^2-2a+9}},\frac{2}{a+3+\sqrt{a^2-2a+9}}\right).$$

CONCLUSION

The thesis is devoted to investigation of the dynamical systems generated by the floor function and discontinuous QSOs.

Basic results of the research are as follows:

1. For the dynamical systems associated with the floor function, the set of fixed points was found and the set of limit points of all trajectories was described.
2. It is proved that the dynamical system generated by the function with one discontinuity point is chaotic by using the Lyapunov exponent.
3. It is sketched the bifurcation diagrams which described limit sets.
4. The set of limit points of the dynamical system discontinuous QSO on the one-dimensional simplex is found.
5. For the discontinuous Volterra QSO on two-dimensional simplex it is proved that the set of limit points is a subset of the boundary of the simplex for $a=b=0$ and $c\neq 0$. Also for the values of the parameters $a\neq 0$, $b=c=0$ (resp. $a=c=0$, $b\neq 0$) it is proved that there are always three repelling periodic points.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УСМОНОВ ЖАВОХИР БАХОДИР УГЛИ

КУСОЧНО-ГЛАДКИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

01.01.01 –Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (PhD) по
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ТАШКЕНТ-2021

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2019.4.PhD/FM430.

Диссертация выполнена в Институте Математики имени В.И.Романовкого.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, английский, русский, (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу http://www.ziyonet.uz.

Научный руководитель:	**Розиков Уткир Абдуллоевич** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Рахимов Абдугофур Абдумажидович** доктор физико-математических наук, профессор
	Эшмаматова Дилфуза Бахрамовна кандидат физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	**Самаркандский государственный университет**

Защита диссертации состоится «____»___________ 2021 года в ______ на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4б.Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № _____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4б.Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан «____» ____________ 2021 года.
(протокол рассылки № ____ от «____» _____________ 2021 года).

А.Азамов
Заместитель председателя Научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., академик

Ж.К.Адашев
Ученый секретарь Научного
совета по присуждению ученых
степеней, к.ф.-м.н., старший
научный сотрудник

У.У.Жамилов
Председатель Научного семинара
при Научном совете по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., старший
научный сотрудник

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD))

Целью исследования является описание множества предельных точек траектории для произвольной начальной точки в динамических системах с дискретным временем функции целой части и разрывных квадратичных стохастических операторов на одномерных и двумерных симплексах.

Объект исследования: Функция целая часть, разрывные квадратичные стохастические операторы на одномерных и двумерных симплексах.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

в зависимости от значения параметра доказано, что траектория для произвольной начальной точки в функции целая часть сходится либо к фиксированной точке, либо к двум периодическим траекториям, либо к бесконечности;

описан характер траекторий двумерного оператора, порожденного функцией целой части;

доказана хаотичность дискретной динамики разрывного квадратичного стохастического оператора на одномерном симплексе при ненулевых значениях параметров;

для динамики разрывного квадратичного стохастического оператора на двумерном симплексе доказано, что при заданных значениях параметров множество предельных точек является либо единственной точкой, либо бесконечным множеством.

Внедрение результатов исследования. Результаты, связанные с кусочно-гладкими динамическими системами с дискретным временем, были использованы в следующих исследовательских проектах:

результаты о хаотичности дискретной динамики разрывного квадратичного стохастического оператора на одномерном симплексе при ненулевых значениях параметров были использованы для описания множеств предельных точек траекторий стохастических операторов в исследовательском проекте № ОТ-Ф-4-03 (Справка Каршинского государственного университета № 04/1900 от 12 июня 2021 г.). Применение научного результата позволило классифицировать предельные точки квадратичных и кубических стохастических операторов Вольтерра и не Вольтерра;

результаты отом, что множество предельных точек при заданных значениях параметров для динамики разрывного квадратичного стохастического оператора на двумерном симплексе представляет собой либо единственную точку, либо бесконечное множество, были использованы для описания динамики моделей химических реакций в исследовательском проекте № ЁФА-Атех-2018-182 (Справка Академии наук Республики Узбекистан № 2/1255-1825 от 23 июня 2021 г.). Использование научных результатов обеспечило определение фиксированных точек и периода динамических систем в соответствии с моделями химических реакций, а также качественный анализ траекторий.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 94 страниц.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (part I;I часть)

1. Rozikov U.A., Sattarov I.A., Usmonov J.B. The dynamical system generated by the floor function $[\lambda x]$ // Journal of Applied Nonlinear Dynamics – 2016. – Volume 5, Issue 2, – pp.185-191. (3. Scopus, IF=0.218).
2. Rozikov U.A., Usmonov J.B. Dynamics of a population with two equal dominated species // Qualitative Theory of Dynamical Systems – 2020. – Volume 19, Issue 2, 19 p. (3. Scopus, IF=0.469).
3. Usmonov J.B. On a two dimensional dynamical system generated by the floor function // Uzbek Mathematical Journal – 2019. №.2, pp. 127-134. (01.00.00; №6).
4. Usmonov J.B., Kodirova M.A. A quadratic stochastic operator with variable coefficients // Bulletin of the Institute of Mathematics – 2020. №.3, pp. 98-107. (01.00.00; № 17).
5. Usmonov J.B. On dynamics of a discontinuous Volterra operator // Uzbek Mathematical Journal – 2021, Volume 65, Issue 2, 10 p., doi:10.29229/uzmj.2021-2-15. (01.00.00; №6).

II бўлим (part II; II часть)

6. Usmonov J.B. The dynamical system generated by the bounded floor function $[f(x)]$ // Conference "Actual problems of differential equations and their applications", 15-17 December, 2017, Tashkent, Uzbekistan, pp. 121-122.
7. Usmonov J.B. On a two dimensional dynamical system generated by the floor function // Conference "New results of mathematics and their applications", 14-15 May, 2018, Samarkand, Uzbekistan, pp. 14-15.
8. Rozikov U.A., Usmonov J.B. Dynamical system of a piecewise-continuous function // Conference "Actual problems and implementation of the analysis", 4-5 October, 2019, Karshi, Uzbekistan, pp. 72-76.
9. Rozikov U.A., Usmonov J.B. On a piecewise-continuous dynamical system // International conference "Modern problems of geometry and topology and its applications" 21-23 November, 2019, Tashkent, Uzbekistan, pp. 75-76.
10. Usmonov J.B. The limit set of trajectories for a discontinuous Volterra operator // International conference" Modern problems of differential equations and related branches of mathematics", 12-13 March, 2020, Fergana, Uzbekistan, pp. 395-396.
11. Usmonov J.B. On the dynamics of discontinuous QSO Volterra // "41th International Conference on Quantum Probability and Related Topics", 28 March 1 April, 2021, UAE, pp. 96-97.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида 2021 йил   июлда таҳрирдан ўтказилди.

Бичими: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» гарнитураси.
Рақамли босма усулда босилди.
Шартли босма табоғи: 2,75. Адади 50. Буюртма № 8/21.

Гувохнома № 10-3719
“Тошкент кимё технология институти” босмахонасида чоп этилган.
Босмахона манзили: 100011, Тошкент ш., Навоий кўчаси, 32-уй.