МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

НАМАНГАНСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

КАФЕДРА «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

МЕТОДИЧЕСКИЕ ПОСОБИЕ

НАМАНГАН – 2019

Шоюсупов Ш. «Случайные события и случайные величины». Методические пособие. НамИТИ, Наманган, 2019, 75 стр.

Настоящая методическая пособия содержит материалы по разделу «Случайные события и случайные величины» курса высшей математики и предназначены для самостоятельной работы студентов над практической частью курса и выполнения расчетного задания.

Составитель: Ш. Шоюсупов, к.ф-м.н., доцент НамИТИ

Рецензент: Р.Хакимов, DSc, доцент НамГУ

Методическая пособия обсуждена на заседании кафедры «Высшая математика» и рекомендована к научно-методическому совету НамИТИ. 24-февраля 2019 года. Протокол № 7.

Методическая пособия одобрена и разрешена к печати на заседании научно-методического совета НамИТИ. 28-февраля 2019 года. Протокол № 9.

I. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Стохастическим называется эксперимент, результаты которого заранее (до его проведения) не известны.

Случайным событием называется явление, которое может произойти или не произойти в результате стохастического эксперимента.

Случайные события обозначают большими буквами А, В, С и т.д.

Предположим, что среди всех возможных событий, которые в данном опыте могут произойти или не произойти, можно выделить совокупность так называемых ***элементарных событий***, которые обладают следующими свойствами:

1) взаимно исключают друг друга, и в результате опыта обязательно происходит одно из этих элементарных событий;
2) каково бы ни было случайное событие А, по наступившему элементарному событию можно сказать о том, произошло или не произошло событие А.

Элементарные события обозначают греческой буквой ω, совокупность элементарных событий называют пространством элементарных событий и обозначают буквой Ω.

Алгебра событий

Пусть Ω - пространство элементарных событий рассматриваемого опыта. Событие А состоит в том, что произошло одно из элементарных событий.

Событие называется ***достоверным***, если оно наступает в результате появления любого элементарного события. Тогда ему благоприятствует любое событие $\omega \in \Omega$, достоверное событие будем обозначать Ω.

Невозможным событием будем называть событие, не наступающее ни при каком элементарном событии. Невозможное событие будем обозначать символом $\varnothing$.

Суммой (или объединением) двух событий А и В назовем событие А+В (или $A \cup B$), происходящее тогда и только тогда, когда происходит или А или В. Сумме событий соответствует объединение множеств А и В.

Свойства суммы событий:

1) $A+\varnothing=A$;
2) $A+\Omega=\Omega$;
3) $A+A=A$;
4) $A+B=B+A$.

Произведением (или пересечением) двух событий А и В назовем событие АВ (или $A \cap B$), которое происходит тогда и только тогда, когда происходит и А, и В. Произведению событий соответствует пересечение множеств А и В.

Свойства произведения событий:

1) $A\varnothing=\varnothing$;
2) $A\Omega=A$;
3) $AA=A$;
4) $AB=BA$.

Два события назовем ***несовместными***, если их одновременное появление в опыте не возможно. Если А и В несовместны, то $AB=\varnothing$. Элементарные события попарно несовместны $\omega_i \omega_j=\varnothing$, при $i \neq j$.

Событие $\overline{A}$ назовем ***противоположным*** к А, если оно происходит тогда и только тогда, когда А не происходит. Очевидно, что выполняются следующие равенства

$$\overline{A}+A=\Omega\ ,\ A\overline{A}=\varnothing\ ,\ \overline{\overline{A}}=A.$$

Разностью событий А и В назовем событие А\В, происходящее тогда и только тогда, когда происходит А, но не происходит В. Отметим очевидные соотношения: $\overline{A}=\Omega \setminus A$,

$A \setminus B=A\overline{B}$.

Введенные операции сложения и умножения обладают свойствами:

1) $A(B+C)=AB+AC$;

2) A(BC)=(AB)C.

Рассмотрим пространство элементарных событий Ω, соответствующее некоторому эксперименту и пусть F - некоторая система случайных событий.

Систему F *событий назовем* ***алгеброй событий***, если выполняются следующие условия:

1) $\Omega \in F$;

2) если $A \in F$, то $\overline{A} \in F$;

3) если $A \in F$, $B \in F$, то $A + B \in F$, $AB \in F$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Рассмотрим стохастический эксперимент и случайное событие А, наблюдаемое в этом эксперименте. Эксперимент повторили n раз и пусть событие А наблюдалось m(А) раз.

Относительной частотой события А в проведенной серии экспериментов назовем отношение:

$$\nu(A) = \frac{m(A)}{n}.$$

Относительная частота определяется после проведения серии экспериментов и может меняться от серии к серии. Однако опыт показывает, что во многих случаях при увеличении числа опытов относительная частота приближается к некоторому числу.

Статистическое определение вероятности

Если при увеличении числа опытов относительная частота события $\nu(A)$ стремится к некоторому фиксированному числу, то говорят, что событие А стохастически устойчиво, а это число обозначают $p(A)$ и называют ***вероятностью*** события А.

Классическое определение вероятности

Рассмотрим стохастический эксперимент, пространство элементарных событий которого состоит из конечного числа n элементов (исходов), все эти элементарные события равновозможны, т.е.

$$p(\omega_i) = p_i = p.$$

Пусть событию А благоприятствует m элементарных событий (благоприятных исходов). Вероятность случайного события А равна отношению числа исходов, благоприятствующих А, к общему числу исходов

$$p(A) = \frac{m}{n}.$$

Свойства вероятности:

1) $0 \le p(A) \le 1$;

2) $p(\Omega) = 1$;

3) если события А и В несовместны ($AB = \varnothing$), то $p(A+B) = p(A) + p(B)$.

При подсчете числа исходов часто используются формулы и правила ***комбинаторики***.

Перестановки – это комбинации, составленные из n различных элементов, которые отличаются только порядком следования элементов. Число перестановок в совокупности из n элементов вычисляется по формуле

$$P_n = n!.$$

Пример 1.1.

Сколькими способами можно рассадить 5 студентов в одном ряду.

Решение.

Поскольку в “пересадке” участвуют все 5 студентов, то $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$, т.е. существует всего 120 способов.

Сочетания – это комбинации, составленные из n элементов по m элементов, которые различаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний из n элементов по m элементов находится по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}.$$

Пример 1.2.

Сколько билетов можно составить из 25 вопросов, если билет содержит 3 вопроса.

Решение.

В билет произвольным образом отбирается 3 вопроса из списка в 25 вопросов, при этом порядок следования вопросов также произвольный, поэтому

$$C_{25}^3 = \frac{25!}{23!\cdot 2!} = \frac{24\cdot 25}{2} = 300,$$

т.о. можно составить 300 билетов.

Размешения – это комбинации, составленные из n элементов по m элементов, которые отличаются составом элементов или порядком следования элементов. Число размещений из n элементов по m элементов находится по формуле

$$A_n^m = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Пример 1.3.

Сколько сигналов можно подать, вывешивая по 3 флага на мачте, если всего имеют 4 флага (белый, красный, синий, зеленый).

Решение.

Из 4-х различных по цвету флагов выбирают 3 флага, при этом, меняя последовательность следования флагов различных по цвету (например, красный-белый-зеленый и белый-красный-зеленый) передают различные сигналы, т.е. важен и состав и порядок расположения элементов, тогда

$A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$, следовательно, используя только 3 флага из 4, можно передать 24 сигнала.

Правило суммы. Если объект А может быть выбран из совокупности объектов n способами, а объект В - m способами, то выбрать либо объект А, либо объект В можно $n + m$ способами.

Пример 1.4.

В вазе 5 груш и 4 яблока (объект А- груша, объект В- яблоко). Сколько существует способов выбрать один из фруктов.

Решение.

Существует 5 способов выбрать грушу и 4 способа выбрать яблоко, поэтому выбрать либо грушу, либо яблоко можно 9 способами.

Правило произведения. Если объект А может быть выбран из совокупности объектов n способами, а объект В - m способами, то выбрать совокупность объектов (АВ) можно $n \cdot m$ способами.

Пример 1.5.

В вазе 5 груш и 4 яблока. Выбрать одновременно грушу и яблоко (совокупность объектов (АВ)) можно $5 \cdot 4 = 20$ способами.

Пример 1.6.

В ящике 50 деталей, из них 4 детали бракованных. Из ящика берут 10 деталей произвольным образом. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: а) нет бракованных; б) две бракованных детали.

Решение.

Задача по классическому определению вероятностей $p(A) = \dfrac{m}{n}$.

а) Из 50 деталей случайным образом отбираются 10 деталей, очевидно, что

$n = C_{50}^{10}$.

Так как в 10 отобранных деталей не попадает ни одной бракованной, то

$m = C_{46}^{10}$.

$$p(A) = \frac{C_{46}^{10}}{C_{50}^{10}} = 0{,}397.$$

б) Общее число исходов не меняется $n = C_{50}^{10}$. Число исходов, при которых среди 10 отобранных деталей 2 бракованных, равно $m = \dfrac{C_4^2 \cdot C_{46}^8}{C_{50}^{10}} = 0{,}152$.

Пример 1.7.

Среди K поставленных единиц данного товара L не удовлетворяют предъявляемым условиям. Найти вероятность того, что среди k ($k \le$K) отобранных для выборочного контроля качества, ровно l ($l \le$L) не будут удовлетворять этим требованиям.

Решение.

Опыт заключается в случайном отборе k образцов из K единиц данного товара. Общее число исходов равновозможных испытаний равно $n = C_K^k$. Событие A состоит в том, что из k отобранных ровно l будут удовлетворять указанным требованиям. Число вариантов отбора качественных образцов равно $m_1 = C_{K-L}^{k-l}$, число вариантов отбора некачественных образцов равно $m_2 = C_L^l$, число исходов, благоприятствующих событию A, согласно правилу произведения равно $m(A) = m_1 m_2 = C_{K-L}^{k-l} C_L^l$. Искомая вероятность определяется по формуле $p(A) = \dfrac{m(A)}{n} = \dfrac{C_{K-L}^{k-l} C_L^l}{C_K^k}$.

Геометрическая вероятность

Пусть на отрезок $[0;l]$ случайным образом бросают точку. Пространство элементарных событий в этом эксперименте – все точки отрезка $[0;l]$.

Поскольку множество элементарных равновозможных событий Ω несчетно, то вероятность попадания в указанную точку отрезка $p(\omega)=0$. Рассмотрим событие А, соответствующее попаданию брошенной точки на отрезок $[a;b]$, $[a;b]\subset[0;l]$. Очевидно, что вероятность события А пропорциональна длине отрезка $[a;b]$

$$p(A)=k(b-a).$$

Коэффициент k найдем из условия нормировки

$$p(\Omega)=k(l-0)=kl=1, \text{ следовательно } p(A)=\frac{b-a}{l}.$$

В общем случае геометрическая вероятность находится по формуле

$$p(A)=\frac{мера\ q}{мера\ Q},$$

где в знаменателе мера всей фигуры, в числителе мера части фигуры, на которую бросается точка.

Пример 1.8.

Даны две концентрические окружности, радиусы которых R и r ($r<R$), соответственно. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет также и в кольцо, образованное окружностями. Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры и не зависит от ее расположения.

Решение.

Площадь большого круга равна

$$мера\, Q=S(R)=\pi R^2,$$

площадь кольца

$$мера\ q=\pi R^2-\pi r^2=\pi(R^2-r^2).$$

По формуле геометрической вероятности находим

$$p(A)=\frac{мера\ q}{мера\ Q}=\frac{\pi(R^2-r^2)}{\pi R^2}=\frac{R^2-r^2}{R^2}.$$

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Вероятность противоположного события

Рассмотрим некоторое случайное событие А и пусть его вероятность $p(A)$ известна, тогда

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A).$$

Вероятность суммы событий

Вероятность суммы двух любых случайных событий равна

$$p(A+B) = p(A) + p(B) - p(AB).$$

Если два случайных события несовместны ($p(AB)=0$), то

$$p(A+B) = p(A) + p(B).$$

Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ попарно несовместны, то

$$p(A_1 + A_2 + ... + A_n) = p(A_1) + p(A_2) + ... + p(A_n).$$

Условная вероятность

Условной вероятностью называется вероятность события B, вычисленная в предположении, что событие A уже наступило $P(B/A)$.

Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A).$$

Два события называются ***независимыми***, если $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$, т.е. $P(A) = P(A/B)$ и $P(B) = P(B/A)$.

Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, ..., A_n$, независимых в совокупности, равна

$$p(A) = 1 - p(\overline{A}_1) \cdot p(\overline{A}_2) \cdot ... \cdot p(\overline{A}_n).$$

Пример 1.9.

Рабочий обслуживает 3 станка. Вероятность бесперебойной работы в течение смены для первого станка равна 0,85; для второго – 0,9; для третьего – 0,8. Какова вероятность того, что в течение смены хотя бы один станок потребует наладки?

Решение.

Пусть событие A состоит в том, что хотя бы один станок потребует наладки; событие $\overline{A}$ - все станки работают бесперебойно; событие $\overline{A_i}$ - i-ый станок работает бесперебойно ($i = 1,\ 2,\ 3$). Очевидно, что

$$\overline{A} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}\ ,\ \ p(A) = 1 - p(\overline{A}),$$

$$p(A) = 1 - p(\overline{A_1}) \cdot p(\overline{A_2}) \cdot p(\overline{A_3}) = 1 - 0{,}85 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}388.$$

Формула полной вероятности. Формула Байеса

Случайным событием называется такое событие, которое может произойти или не произойти в результате некоторого опыта.

Случайные события называют *несовместными* в данном испытании, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Случайные события образуют *полную группу*, если при каждом испытании может появиться любое из них и не может появиться какое-либо иное событие несовместное с ними.

Вероятностью P события A называется отношение числа m благоприятствующих случаев к числу всех возможных случаев

$$P(A) = p = \frac{m}{n} \qquad (1)$$

Сумма вероятностей случайных событий $B_1, B_2, \ldots B_n$,

$$P(B_1)+P(B_2)+...+P(B_n)=1.$$

образующих полную группу, равна единице

Событие A называется *зависимым* от события B, если вероятность появления события A зависит от того, произошло или не произошло событие B.

Вероятность того, что произошло событие A при условии,что произошло событие B, будем обозначать P(A/B) и называть *условной вероятностью события* A при условии B.

Рассмотрим полную группу несовместных событий B_1, B_2, …, B_n, вероятности появления которых $P(B_1)$, $P(B_2)$, …, $P(B_n)$. Поскольку заранее неизвестно, какое из этих событий наступит, их называют *гипотезами*. Событие A может наступить в каком-либо опыте вместе с одной из гипотез событий B_1, B_2, …, B_n. Вероятность события A вычисляется по *формуле полной вероятности*

$$P(A)=P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)+...+P(B_n)P(A/B_n). \qquad (2)$$

После опыта (апостериорно) стало известно, что событие A появилось, следует выяснить, вместе с какой из гипотез B_1,…, B_n оно произошло. По постановке задача напоминает диагностику причины по известному следствию.

P(Bi), i=1,…n - априорные (доопытные) вероятности гипотез

P(Bi / A), i=1,…n - апостериорные вероятности гипотез (сформировавшиеся после опыта)

Найдем апостериорные вероятности гипотез P(Bi / A), i=1,…n.

По формуле умножения вероятностей найдем вероятность совмещения событий B и A

$$P(B_i A)=P(B_i)\,P(A / B_i)=P(A)\,P(B_i/A).$$

Из последнего равенства выразим апостериорную вероятность гипотезы B

$$P(B_i/A)=\frac{P(B_i)P(A/B_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)P(A/B_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A/B_i)} \qquad (3)$$

Получили *формулы Байеса*. Формулы Байеса позволяют переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, т.е. провести коррекцию вероятностей априорных гипотез, используя экспериментальные данные.

I. Задача.

Имеются три одинаковые на вид урны. В первой урне – 2 белых и 1 черный шар, во второй – 3 белых и 1 черный, в третьей – 2 белых и 2 черных. Некто наудачу вынимает шар из урны. Найти вероятность того, что шар белый.

Решение. Событие А – извлечение белого шара.

Выдвинем гипотезы:

B_1 – шар выбран из первой урны;

B_2 – шар выбран из второй урны;

B_3 – шар выбран из третьй урны.

Гипотезы равновероятны, т.е. во всех случаях m=1, n=3.

$P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=1/3$.

Вероятность извлечения белого шара из первой урны –условную вероятность - найдем по формуле классического определения вероятности (формула (1)), если m=2, n=3, $P(A/B_1)=2/3$;

из второй урны - m=3, n=4, $P(A/B_2)=3/4$;

из третьей урны - m=2, n=4, $P(A/B_3)=2/4$;

По формуле полной вероятности (2) находим вероятность появления события А

$P(A)=1/3*2/3+1/3*3/4+1/3*1/2$.

Пусть теперь событие А произошло - из урны извлечен белый шар.

Найдем вероятность того, что этот шар извлечен из первой урны $P(B_1/A)$ по формуле (3).

$P(B_1/A)=(1/3*2/3)/P(A)$.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ НЕЗАВИСИМЫХ, ОДНОРОДНЫХ ИСПЫТАНИЙ. СХЕМА БЕРНУЛЛИ

Рассмотрим стохастический эксперимент, состоящий в проведении n независимых, однородных испытаний, в результате каждого из которых может событие А может произойти с вероятностью p и не произойти с вероятностью $q=1-p$. Вероятность того, что событие А произойдет ровно m раз в результате n испытаний, определяется по ***формуле Бернулли***

$$p_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m} \ .$$

Вероятность события, заключающегося в том, что при n испытаниях событие А появится не менее m_1 и не более m_2, вычисляется по формуле

$$p_n(m_1 \le m \le m_2)=\sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m p^m q^{n-m} \ .$$

Пример 1.10.

На проспекте установлены 5 светофоров, которые работают независимо друг от друга. Зеленый сигнал горит в течение 2мин., желтый – 0,3 мин., красный – 1,7 мин. Найти вероятность трех остановок автомобиля на этом проспекте.

Решение.

Автомобиль двигается только при зеленом свете светофора ($t=2$ *мин.*), при желтом и красном сигналах автомобиль стоит ($t=0{,}3\,мин.+1{,}7\,мин.=2\,мин.$). Так как время движения и время стоянки равны, то вероятности проезда автомобиля на светофоре и остановки на светофоре тоже равны $p=q=0{,}5$. Вероятность того, что автомобиль при проезде 5 светофоров остановится 3 раза, находится по формуле Бернулли

$$p_5(3)=C_5^3\cdot(0{,}5)^3\cdot(0{,}5)^2=\frac{5}{32} \ .$$

ФОРМУЛА ПУАССОНА

Пусть в схеме испытаний Бернулли число испытаний n неограниченно увеличивается, а вероятность наступления события в каждом испытании $p = p(A)$ близка нулю, но при этом величина $a = np$ остается постоянной. В этом случае вероятность появления события А при n испытаниях m раз определяется Пуассоновским приближением формулы Бернулли

$$p_n(m) \approx \frac{a^m}{m!} e^{-a} .$$

Эта формула дает хорошее приближение при $a = np < 10$, параметр a означает среднее число появлений события на некотором интервале.

Вероятность события, заключающегося в том, что при n испытаниях событие А произойдет не более k раз вычисляется по формуле

$$p_n(m \le k) \approx e^{-a} \sum_{m=0}^{k} \frac{a^m}{m!} .$$

Отметим, что последние две формулы табулированы (см. приложение табл.1, 2).

Пример 1.11.

Среднее число вызовов, поступающих на станцию скорой помощи, в течение 10 минут, равно 2. Найти вероятность того, что за 30 минут поступит ровно 7 вызовов.

Решение.

Среднее число вызовов за 30 минут равно $a = 2 \cdot 3 = 6$, по формуле Пуассона

$p(7) \approx \frac{(6)^7}{7!} e^{-6} \approx 0{,}138$ (см. приложение табл. 1).

Пример 1.12.

Заказчик получил со склада 1000 штук отделочной плитки. Вероятность того, что при перевозке плитка окажется разбитой, равна 0,002. Найти вероятность событий: а) заказчик получит ровно три разбитых плитки; б) менее двух разбитых плиток; в) хотя бы одну разбитую плитку.

Решение.

Возможное число разбитых плиток $a = 1000 \cdot 0{,}002 = 2 < 10$.

а) $m = 3$, $P_{1000}(3) \approx \dfrac{2^3}{3!} e^{-2} \approx 0{,}181$ (см. приложение табл.1).

б) $m < 2$, т.е. $m = 0$ и $m = 1$, $P(m < 2) = P(0) + P(1) \approx 0{,}135 + 0{,}271 = 0{,}406$ (см. приложение табл.1).

в) $m \geq 1$, $P(m \geq 1) = 1 - P(0) \approx 1 - 0{,}135 = 0{,}865$ (см. приложение табл.1).

ЛОКАЛЬНАЯ И ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛЫ МУАВРА – ЛАПЛАСА

При достаточно большом n и не слишком малых p и q (p и, соответственно, q не близки к 0 и 1) для вычисления вероятности используют локальную формулу Муавра – Лапласа:

$$p_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \text{ где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Эта формула также табулирована (приложение табл. 3), $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Вероятность того, что при указанных условиях событие А появится не менее m_1 и не более m_2 раз, находится по интегральной формуле Муавра – Лапласа:

$$p_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, $\Phi(x)$- функция Лапласа.

Функция Лапласа представляет собой не выражающийся через элементарные функции интеграл. Значения функции Лапласа приведены в приложении табл. 4.

Свойства функции Лапласа:

1) функция монотонно возрастает, т.е. $\Phi(x_1) < \Phi(x_2)$ при $x_1 < x_2$;

2) $\Phi(0) = 0$, $\Phi(\pm\infty) = \pm 0{,}5$;

3) функция Лапласа является нечетной $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

4) значения функции приближаются к асимптотическому значению при $x \geq 5$ $\Phi(x) \approx 0{,}5$.

Пример 1.13.

Завод получил заказ на 1053 изделий. Руководство предприятия планирует заранее изготовить 1500 изделий, т.к. вероятность выпуска доброкачественного изделия равна 0,7. Найти вероятность выполнения заказа.

Решение.

Из условия задачи вытекает, что $n = 1500$, $m = 1053$, $p = 0{,}7$, $q = 1 - p = 0{,}3$(p и q не слишком малы). Воспользуемся локальной формулой Муавра – Лапласа

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1053 - 1500 \cdot 0{,}7}{\sqrt{1500 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}} \approx 0{,}169;$$

$$P_{1500}(1053) = \frac{1}{\sqrt{1500 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}} \varphi(0{,}169) \approx 0{,}022$$ (см. приложение табл.3).

Пример 1.14.

Вероятность появления события в каждом испытании равна 0,25. Найти вероятность того, что в 250 испытаниях событие появится не менее 70 раз.

Решение.

Из условия задачи следует, что $n = 250$, $0 \le m \le 70$, $p = 0{,}25$, $q = 0{,}75$ (p и q не слишком малы). Для решения задачи воспользуемся интегральной формулой Муавра – Лапласа

$$x_1 = \frac{0 - 250 \cdot 0{,}25}{\sqrt{250 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}} = -9{,}128, \; x_2 = \frac{70 - 250 \cdot 0{,}25}{\sqrt{250 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}} = 1{,}095,$$

$$P_{250}(0 \le m \le 70) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(1{,}095) - \Phi(-9{,}128) =$$

$$= \Phi(1{,}095) + \Phi(9{,}128) = 0{,}364 + 0{,}5 = 0{,}864.$$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. При игре в кости бросаются два игральных кубика и подсчитывается сумма выпавших очков. Найти вероятность событий: A - сумма равна 5; B - сумма равна 7.

Ответ: P(A) = 0,1111 , P(B) = 0,1667

2. Из имеющихся 15 телевизоров 10 готовы к продаже , а 5 требуют дополнительной регулировки. Найти вероятности событий : A - из случайно отобранных трёх телевизоров все хорошие , B - два хорошие и один нет , C - один хороший и два нет , D - хороших нет .

Ответ: P(A) = 0,2637 , P(B) = 0,4945 , P(C) = 0,2198 , P(D) = 0,022 .

3. Из изготовленных N изделий M стандартные (M ≤ N). Найти вероятность того , что из **n** случайно отобранных изделий ровно **m** стандартные (**m ≤ n**).

Ответ: $P(A) = \dfrac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^M}$.

4. В студенческой группе из 30 студентов 20 успевают на хорошо и отлично , 5 - удовлетворительно и остальные плохо. Найти вероятность того , что из пяти случайно отобранных студентов : A - все успевают на хорошо и отлично ; B - 3 хорошо и отлично , 1 удовлетворительно и 1 плохо ; C - 3 удовлетворительно и 2 плохо.

Ответ: P(A) =0,1088 , P(B) = 0,2 , P(C) = 0,0007.

5. В книжной лотерее разыгрываются 30 билетов, из них 10 - выигрышные. Определить вероятность того, что из двух купленных билетов окажутся: A - оба выигрышные, B - один выигрышный, другой нет; C - оба проигрышные.

Ответ: P(A) = 0,1034 , P(B) = 0,4598 , P(C) = 0,4368 .

6. Абонент забыл три цифры нужного ему телефонного номера и набирает их наудачу. Найти вероятность того, что номер будет набран правильно, если: A - абонент помнит , что все эти цифры различные , B - ничего не помнит об этих цифрах.

Ответ: P(A) = 0,0014 , P(B) = 0,001.

7. Две бригады получили 10 инструментов, из которых 2 новых и 8 старых. Найти вероятность того, при делении их случайным образом каждой бригаде достанется 1 новый и 4 старых.

Ответ: P(A) =0,5556.

8. В лотерее разыгрывается 30 билетов, из них 5 “счастливые”. Найти вероятность того, что из 4 купленных случайным образом билетов 2 будут счастливыми.

Ответ: P(A) = 0,1095.

9. В спортлото (5 из 36) надо отметить 5 чисел из 36. Найти вероятность того, что случайным образом удастся угадать: 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 пять чисел из пять заранее выбранных (но не известных играющему) чисел.

Ответ: $P(0) = 0{,}4507$, $P(1) = 0{,}4173$, $P(2) = 0{,}1192$, $P(3) = 0{,}01233$,

$P(4) = 0{,}0004111$, $P(5) = 0{,}000002653$.

10. Рассматриваются всевозможные пятизначные числа. Найти вероятность того, что: A - случайно выбранное число записано различными цифрами; B - не содержит цифры 5.

Ответ: $P(A) = 0{,}3024$, $P(B) = 0{,}5832$.

11. Студенческая группа состоит из 15 юношей и 4 девушек. По жребию (случайным образом) выбирают 4 дежурных. Найти вероятность того, что будут выбраны 2 девушки и 2 юноши.

Ответ: $P(A) = 0{,}1625$

12. В партии из 20 часов 3 дефектные. Найти вероятность того, что из 4 случайно купленных часов все хорошие.

Ответ: $P(A) = 0{,}4912$.

13. Имеются два цифровых замка. На первом размещено 6 дисков, на каждом из которых находится 5 символов; на втором - 5 дисков с 6 символами на каждом. Какой из них лучше?

Ответ: $P(A) = 0{,}000064 < P(B) = 0{,}000129$ (первый лучше).

14. Буквы, составляющие слово **РЕМОНТ** выписаны каждая на отдельной карточке и тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что: A - при последовательном отборе четырёх карточек сразу получится слово **МОРЕ**; B - из отобранных карточек можно составить это слово.

Ответ: $P(A) = 0{,}002778$, $P(B) = 0{,}06667$.

15. На четырёх карточках выписаны две буквы **М** и две буквы **А**. Найти вероятность того, что при случайном отборе карточек сразу получится слово **МАМА**.

Ответ: $P(A) = 0,1667$.

16. Буквы, составляющие слово **ОДЕССА** выписаны на отдельных карточках и тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что при последовательном отборе трёх карточек появятся буквы составляющие слова: А - **САД** , В - **АСС** , С - **ОСА** ; D - четырех карточек - слово **СОДА.**

Ответ: $P(A) = 0,0167$, $P(B) = 0,0167$, $P(C) = 0,0167$, $P(D) = 0,0056$.

17. Решить предыдущую задачу считая, что по извлечённой карточке записывается буква, а сама карточка возвращается и все карточки снова тщательно перемешиваются.

Ответ: $P(A) = 0,0093$, $P(B) = 0,0185$, $P(C) = 0,0093$, $P(D) = 0,0015$.

18. Сетка с прямоугольными ячейками сварена из прутков диаметром 1см, с горизонтальным шагом 10 и вертикальным - 15см. Найти вероятность того, что шарик радиуса 1см, брошенный не прицельно, перпендикулярно сетке, пройдёт через неё без столкновений.

Ответ: $P(A) = 0,56$.

19. Перпендикулярно фарватеру установлен один ряд мин, расстояние между которыми равно 100 метров. Найти вероятность того, что: А - судно с наибольшей шириной 30м пройдёт линию заграждения без столкновения с миной; В - судно будет двигаться под углом 30^o к фарватеру?

Ответ: $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,6564$.

20. На отрезок АВ длины L брошена точка М так, что её любое положение на отрезке равновозможно. Найти вероятность того, что меньший из отрезков (АМ или МВ) имеет длину, большую чем L\3 .

Ответ: $P(A) = 0,3333$.

21. Плоскость разделена параллельными прямыми на полосы шириной 10см каждая. На плоскость случайным образом брошен круг радиуса 2см. Найти вероятность того, что круг не пересечёт прямые.

Ответ: P(A) = 0,6.

22. На отрезок AB длины L брошены точки M и N так, что любое их положение на этом отрезке равновозможно. Найти вероятность того, что длина отрезка MN меньше длины наименьшего из отрезков AM или AN.

Ответ: P(A) = 0,5.

23. Задача о встрече. Два студента M и Д договорились встретиться в определённом месте между 18 и 19 часами. Если первым приходит M, то он ждёт не более 20 минут и затем уходит, если первой приходит Д, то ждёт не более 10 минут. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый из них выбирает момент своего прихода наудачу.

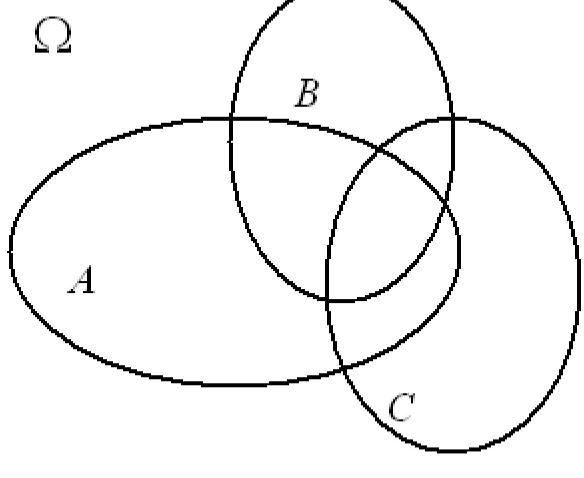
Ответ: P(A) = 0,4306.

24. Пол выложен прямоугольными плитками размерами 15 на 20см. Найти вероятность того, что брошенная на пол случайным образом монета (круг радиуса 2см) не пересечёт границ одной плитки.

Ответ: P(A) = 0,5867.

25. В круг случайным образом брошена точка так, что любое её положение в круге равновозможно. Найти вероятность того, что она окажется внутри: A - вписанного в круг квадрата; B - вписанного в круг равностороннего треугольника.

Ответ: P(A) = 0,6366, P(B) = 0,4135.



26. Опыт заключается в случайном бросании точки на квадрат (достоверное событие **Ω**), а попадание точки в области **A, B** и **C** - есть события **A, B** и **C**. Указать (заштриховать соответствующую область) события: $A+B$; AB; ABC; $(A+B)C$; $\overline{A}+\overline{B}$; $(A+B)\overline{C}$; $(\overline{A}+\overline{B})C$.

27. На 30 километровом участке линии электропередачи после бури оказались повалены две опоры. Считая, что поваленной могла оказаться любая из опор, найти вероятность того, что между поваленными опорами будет не более двух километров, если опоры расставлены через каждые 100 метров.

Ответ: P(A) = 0,1318.

28. Первая задача шевалье д'Мере (решена Б.Паскалем). Найти вероятность выигрыша при игре в кости по следующим правилам: игрок выигрывает, если при бросании четырёх костей хотя бы на одной выпадет 6 очков, и проигрывает в противном случае.

Ответ: P(A) =0,5177 > 0,5.

29. Вторая задача шевалье д'Мере. Найти вероятность выигрыша при игре в кости по следующим правилам: игрок выигрывает, если при одновременном бросании двух костей 24 раза хотя бы один раз одновременно выпадут две шестёрки, и проигрывает в противном случае.

Ответ: P(A) = 0,491 < 0,5 .

30. Сколько раз надо бросить две игральные кости, чтобы хотя бы один раз выпали одновременно две шестёрки с вероятностью не меньшей чем 0,5.

Ответ: **n** ≥ 25 (P(A) = 0,5055 > 0,5).

31. Три стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в цель у первого стрелка равна 0,9 , у второго - 0,8 и у третьего - 0,6.

Найти вероятность того, что в мишень попадут: три стрелка - событие А; два - В; один - С; ни один не попадёт Д; хотя бы один попадёт - Е.

Ответ: Р(А) =0,432, Р(В) =0,444, Р(С) =0,116, Р(Д) =0,008, Р(Е) =0,992.

32. В группе N студентов. Найти вероятность того, что хотя бы у двух совпадают дни рождения. Проделать вычисления для N равного: А - 100 , В - 60 и С - 30.

Ответ: Р = 1 - 365 364 ... (365 - N +1) / 365.

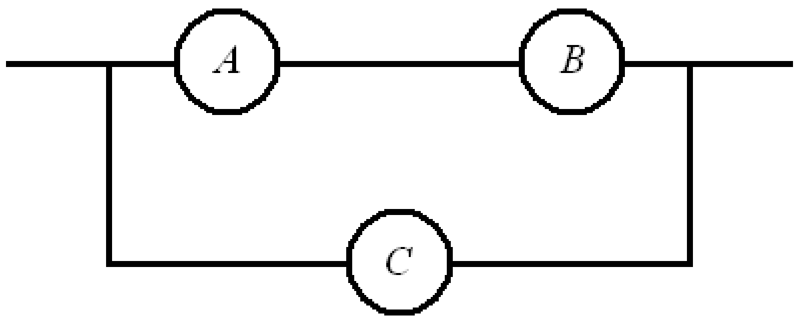
Р(А) =0,9999997, Р(В) =0,9941, Р(С) = 0,7063.

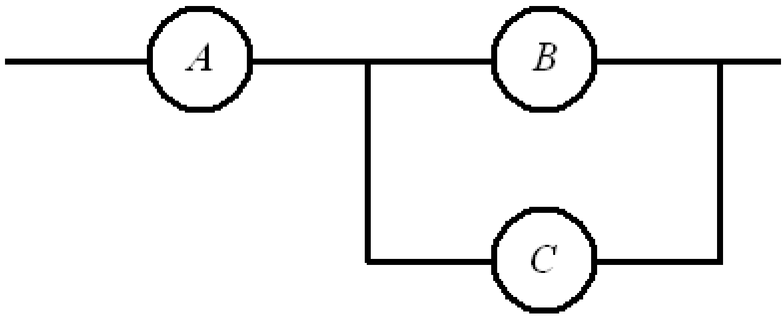
33. Для разрушения моста достаточно одного попадания из орудия. Найти вероятность разрушения моста, если из орудия можно сделать не более четырёх выстрелов, и вероятность попадания в цель при первом выстреле равна 0,3 , при втором - 0,4 , третьем - 0,5 и четвёртом - 0,7.

Ответ: Р(А) =0,937.

34. Найти надёжность схем **D** и **E** , если надежность её элементов известна : Р(А) = 0,8, Р(В) =0,7 и Р(С) =0,4.

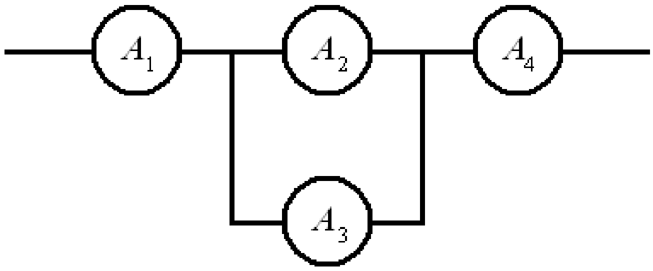
D:

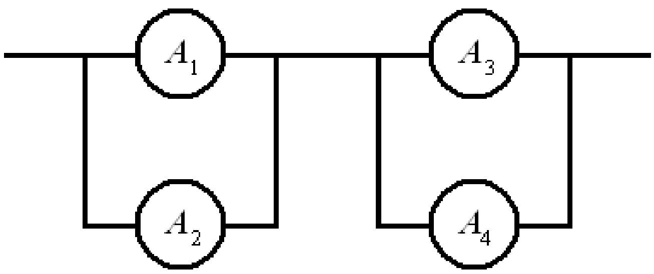


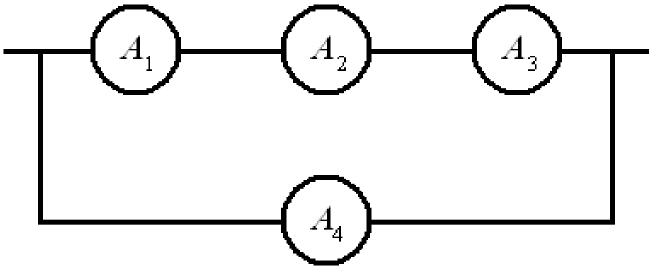
E: 

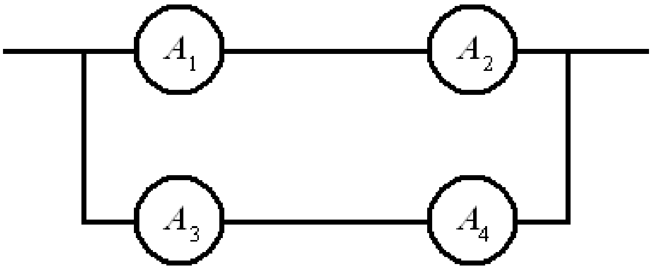
Ответ: P(D) = 0,736 , P(E) = 0,656.

35. Найти надёжность схем B, C, D и E , если надёжность её элементов известна : $P(A_1)$ =0,6 , $P(A_2)$ = 0,7 , $P(A_3)$ = 0,8 и $P(A_4)$= 0,9.

B: 

C: 

D: 

E: 

Ответ: P(B) =0,5076, P(C) =0,8624, P(D) = 0,9336, P(E) =0,8376.

36. Из 30 вопросов, подготовленных к экзамену, студент успел выучить только 20. Найти вероятность того, что при случайном отборе трёх вопросов он получит : три хороших вопроса - событие A, два хороших и один плохой - B, один хороший и два плохих - C, все плохие - D.

Ответ: P(A) = 0,2808, P(B) = 0,468, P(C) = 0,2217, P(D) =0,0296.

37. Для работы технологической линии надо смонтировать установки A, B, C и D . Вероятность того, что установка A будет смонтирована к намеченному сроку равна - 0,9 , B — 0,8 , C — 0,7 и D - 0,6. Найти вероятность того, что линия не будет запущена в срок.

Ответ: P =0,6976.

38. Два города соединяют 5 линий связи, две из которых имеют надёжность 0,8 , а три - 0,7. Найти вероятность того, что сообщение будет передано из одного города в другой.

Ответ: $P(A) = 0{,}9989$.

39. Надёжность элементов равна 0,8. Сколько таких элементов надо поставить (продублировать), чтобы надежность всей схемы была не менее 0,999?

Ответ: $n \geq 5$.

40. В первом ящике находятся 1 белый, 2 красных и 3 синих шара, во втором - 2 белых, 6 - красных и 4 синих. Из каждого ящика случайным образом вынимают по одному шару. Найти вероятность того, что: A - оба шара красные; B - оба шара одинакового цвета.

Ответ: $P(A) =0{,}1667$, $P(B) = 0{,}3611$.

41. Дано : $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}7$ и $P(A + B) = 0{,}9$. Найти $P(A\ B)$, $P(B|A)$, $P(A\ B)$.

Ответ: $P(A\ B) = 0{,}3$, $P(B|A) = 0{,}6$, $P(A\ B) = 0{,}2$.

42. Имеются 10 карточек с цифрами : 0 , 1 ,..., 9 . Найти вероятность того, что при случайном отборе трёх карточек : A - последовательно появятся цифры 1 , 2 и 5 (получится число 125) ; B - из появившихся цифр в итоге можно образовать число 125.

Ответ: $P(A) = 0{,}001389$, $P(B) = 0{,}008334$.

43. Вода на станции очистки проходит последовательно через фильтры A, B и C. Вероятность того, что после первого фильтра вода будет полностью очищена от примесей равна 0,7 , после второго - 0,6 и после третьего - 0,8. Найти вероятность того, что станция отпускает чистую воду.

Ответ: $P(A) =0{,}976$.

44. Прибор состоит из трёх узлов. Вероятность выхода из строя для первого узла равна 0,05 , второго - 0,04 и третьего - 0,02. Найти вероятность того, что прибор выйдет из строя, если для этого достаточно выхода из строя хотя бы одного узла.

Ответ: $P(A) = 0{,}1062$.

45. Система электропривода станка защищена шестью одинаковыми плавкими предохранителями. Известно, что один из них перегорел. Найти вероятность того, что его удастся заменить на заведомо исправный : A - с первой попытки, B - со второй, будет сделано не более двух попыток.

Ответ: $P(A) = 0{,}1667$, $P(B) = 0{,}1667$, $P(C) = 0{,}3333$.

46. Предприятие выпускает массовым тиражом некоторые детали, причём вероятность появления брака в его продукции равна 0,05 , и поставляет их другому предприятию. Выходной контроль на первом предприятии обнаруживает и не пропускает далее брак с вероятностью 0,9 , а входной контроль на втором обнаруживает брак с вероятностью 0,95. Найти вероятность того, что: A - при выходном контроле будет обнаружена бракованная деталь; B - при входном контроле будет обнаружена бракованная деталь; C - деталь будет забракована; D - бракованная деталь будет пропущена.

Ответ: $P(A) = 0{,}045$, $P(B) = 0{,}00475$, $P(C) = 0{,}04975$, $P(D) = 0{,}00025$.

47. Вероятность поражения цели при запуске одной зенитной ракеты равна 0,9 . Сколько одновременно надо запустить таких ракет, чтобы цель была поражена с вероятностью не меньшей чем 0,999?

Ответ: $n \geq 3$.

48. Система энергоснабжения предприятия трижды дублирована, причём надёжность первой линии равна 0,9 , второй - 0,8 и третьей - 0,7. Найти:

A - надёжность всей системы; B - вероятность выхода из строя двух линий; C - одной линии.

Ответ: $P(A) = 0{,}994$, $P(B) = 0{,}092$, $P(C) = 0{,}398$.

49. Одновременно бросаются две монеты. Пусть событие A есть появление герба на первой, B - появление герба на второй, C - появление на обеих монетах одновременно или герба или решки. Определить независимы ли события A , B и C попарно и в совокупности. (Указание : найти вероятности P(A), P(B), P(C), P(A B), P(A C), P(B C), P(A B C) и проверить условие независимости).

Ответ: $P(A) = P(B) = P(C) = 0{,}5$, $P(A\,B) = P(A\,C) = P(B\,C) = 0{,}25$,

$P(A\,B\,C) = 0{,}25$ - попарно независимы; зависимы в совокупности.

50. (Гусарская дуэль). В барабане револьвера семь каналов, из них в пяти есть патроны, а два пустые. Барабан приводится во вращение и против ствола случайным образом оказывается один из каналов; после чего нажимается курок. Описанная процедура повторяется ещё раз. Найти вероятность того, что: A - в первый раз выстрел произойдёт, во второй не произойдёт; B - оба раза выстрелов не будет; C в первый раз выстрел не произойдёт, во второй произойдёт; D - будет два выстрела.

Ответ: $P(A) = 0{,}3061$, $P(B) = 0{,}08163$, $P(C) = 0{,}2041$, $P(D) = 0{,}4082$.

51. В группе 10 хороших, 15 обычных и 5 плохих студентов. Из 50 подготовленных к зачёту задач хороший студент умеет решать 40, обычный - 30 и плохой - только 10. Найти вероятность того, что случайно выбранный студент сможет решить предложенную ему случайным образом задачу.

Ответ: $P(A) = 0{,}6$.

52. В дополнение к условию задачи 51 стало известно, что опрошенный студент задачу решил. Найти вероятность того, что это был: H_1 - хороший студент, H_2 - обычный и H_3 - плохой.

Ответ: $P(H_1|A) = 0{,}4444$, $P(H_2|A) =0{,}5$, $P(H_3|A) = 0{,}0556$.

53. Из 50 подготовленных к зачёту вопросов студент успел выучить только 30. Каким ему лучше идти сдавать - первым или вторым (если он идёт вторым, то на столе экзаменатора остается уже 49 вопросов).

Ответ: $P(A_1) = P(A_2) = 0{,}6$ - безразлично каким.

54. Решить предыдущую задачу в более общей постановке: студент выучил не все вопросы, каким по порядку ему лучше сдавать: i-м или (i + 1) - м.

Ответ: безразлично.

55. Имеются три одинаковые урны: в первой 5 белых и 5 чёрных шаров, во второй - 3 белых и 7 чёрных и в третьей - 2 белых и 8 чёрных. Из урны, выбранной наудачу, извлечён шар. Найти: A - вероятность того, что он белый; H_1 - вероятность того, что шар был взят из первой урны, если он оказался белым.

Ответ: $P(A) = 0{,}3333$, $P(H_1|A) = 0{,}5$.

56. Изделия одного вида поставляют три фабрики: первая даёт 30% от всего количества, вторая - 25% и третья - всё остальное. Вероятность появления брака в продукции первой фабрики равна 0,01, второй - 0,02 и третьей - 0,03. Случайно отобранное и проверенное изделие оказалось бракованным. Найти вероятность того, что оно сделано на: первой, второй, третьей фабрике.

Ответ: $P(H_1|A) = 0{,}1395$, $P(H_2|A) = 0{,}2326$, $P(H_3|A) =0{,}6279$.

57. Два охотника сделали по одному выстрелу по кабану и убили его. Как по справедливости им надо разделить тушу, если оказалось, что попал только один и известно, что вероятность попадания в цель у первого стрелка равна 0,8 , а у второго - 0,6.

Ответ: в отношении $P(H_1|A) = 0{,}7273$ к $P(H_2|A) = 0{,}2727$.

58. Решить предыдущую задачу, если охотников было трое, в кабана попал только один и вероятности попадания в цель каждого из охотников соответственно равны 0,8 , 0,7 и 0,6.

Ответ: в отношении 0,5106 : 0,2979 : 0,1915 .

59. Два населенных пункта А и В соединены дорогами, схема которых приведена. Найти вероятность того, что путешественник попадёт из В в А, если на развилке дорог он выбирает направление движения случайно.

Ответ: $P(A) = 0{,}6111$.

60. Три бригады ведут укладку бетонных блоков. Первая бригада выполнила 50% всего объёма работ, вторая - 30% и третья - всё остальное. Вероятность появления брака для первой бригады равна 0,05 , второй - 0,06 и третьей - 0,1. Найти вероятность того, что: А - случайно выбранный блок установлен с допущением брака; H_3 - случайно выбранный и проверенный блок оказался установленным с допущением брака по вине третьей бригады.

Ответ: $P(A) = 0{,}063$, $P(H_3|A) = 0{,}3175$.

61. Из имеющихся на складе 600 электроламп 200 изготовлены на первой фабрике, 250 - на второй и остальные на третьей. Вероятность того, что лампа стандартная для первой фабрики равна 0,95 , для второй - 0,93 и третьей - 0,9. Случайно выбранная лампа оказалась нестандартной. Найти вероятность того, что она изготовлена на первой фабрике.

Ответ: $P(H_1|A) = 0{,}2353$.

62. Из имеющихся на складе 1000 мешков цемента 400 содержат качественный цемент с вероятностью 0,9 , 350 - с вероятностью 0,8 и остальные - с вероятностью 0,6. Найти вероятность того, что случайно выбранный мешок содержит качественный цемент.

Ответ: $P(A) = 0{,}79$.

63. Из потребляемой кирпичным заводом глины 50% поступает с первого карьера, 30% - со второго и остальная с третьего. Вероятность получения качественной продукции из сырья, поставленного первым карьером равна 0,8, второго - 0,9 и третьего - 0,7. Найти процент качественной продукции, выпускаемой заводом.

Ответ: 81% $(P(A) = 0{,}81)$.

64. В пирамиде из десяти винтовок только шесть пристреляны. Вероятность попадания в цель из пристрелянной винтовки у данного стрелка равна 0,8, а из непристрелянной - 0,5. Определить вероятность попадания в цель при одном выстреле, если стрелок выбирает винтовку случайным образом.

Ответ: $P(A) = 0{,}68$.

65. Из 30 студентов к экзамену отлично подготовились 5 (выучили все из 30 предложенных вопросов), 10 - хорошо (выучили 25), 10 - удовлетворительно (выучили 20) и 5 - плохо (знают только 10). Найти вероятность того, что случайно вызванный и опрошенный студент был : отлично подготовленным; плохо подготовленным студентом, если известно, что он правильно ответил на три произвольно заданных ему вопроса.

Ответ: $P(H_1|A) = 0{,}3671$, $P(H_4|A) = 0{,}01085$.

66. В мастерской имеются четыре станка, каждый из которых может выйти из строя в течении смены с вероятностью 0,02. Найти вероятность того, что за одну смену из строя выйдут не более двух станков.

Ответ: $P(0 \le m \le 2) = 0{,}999968$.

67. Два равных по силе игрока играют в шахматы (ничьи не учитываются). Что вероятнее: первый выиграет три партии из шести, или четыре из восьми?

Ответ: $P_6(3) = 0{,}3125 \ge P_8(4) = 0{,}2734$.

68. В мастерской установлены пять станков, каждый из которых требует наладки в течении рабочего дня с вероятностью 0,4. Найти вероятность того, что : ни один станок не потребует наладки ; ровно два.

Ответ: $P_5(0)$ =0,07776 , $P_5(2)$ =0,3456.

69. Образец бетона выдерживает испытание на прочность с вероятностью 0,7. Испытывается 8 образцов. Найти вероятность того, что не менее 6 образцов выдержат испытания.

Ответ: $P_8(6 \le m \le 8) = 0{,}5518$.

70. Вероятность того, что выпускаемые заводом телевизоры имеют дефекты, равна 0,02. Найти вероятность того, что из 10 проверенных телевизоров дефекты имеют не более чем два.

Ответ: $P_{10}(0 \le m \le 2) = 0{,}9991$.

71. В круг вписан квадрат. В круг случайным образом брошено шесть точек (любое положение каждой точки в круге равновозможно). Найти вероятность того, что : хотя бы одна точка попадёт в квадрат ; ровно одна.

Ответ: $p = 0{,}6367$, $P_6(1 \le m \le 6) = 0{,}9977$, $P_6(1) = 0{,}0242$.

72. Студенту на зачёте предложено 10 вопросов, на каждый из которых надо дать ответ в виде “да” или “нет”. Найти вероятность того, что, отвечая наудачу (не зная), он сдаст зачёт, если для этого необходимо правильно ответить хотя бы на 7 вопросов.

Ответ: $P_{10}(7 \le m \le 10) = 0{,}1719$.

73. В семье пять детей. Считая вероятность рождения мальчика и девочки равными 0,5, найти вероятность того, что в семье будет три девочки и два мальчика.

Ответ: $P_5(3) = 0{,}3125$.

74. Вероятность того, что электролампа проработает не менее 1000 часов, равна 0,6. Найти вероятность того, что хотя бы одна из пяти ламп проработает этот срок.

Ответ: $P_5(1 \le m \le 5) = 1 - P_5(0) = 0{,}9898$.

75. Вероятность того, что муфтовое соединение водопроводных труб при опрессовке не даст течи равна 0,9. Участок водопровода содержит восемь таких соединений. Найти вероятность того, что течь дадут : ровно два соединения ; не более двух.

Ответ: $P_8(2) = 0{,}1488$, $P_8(0 \le m \le 2) = 0{,}9619$.

76. В здании института установлено 600 светильников, каждый из которых может быть включён с вероятностью 0,6. Найти вероятность того, что: включено ровно 380 светильников; не более 380. Насколько светильников должна быть рассчитана подстанция, чтобы с вероятностью $P_{01} = 0{,}9$ она могла бы обеспечить освещение института? Сколько ламп для светильников надо закупить, чтобы с вероятностью $P_{02} = 0{,}95$ их хватило бы для замены во всех светильниках (600), если вероятность того, что каждая лампа хорошая, равна 0,75?

Ответ: $P_{600}(380) = 0{,}0083$, $P_{600}(0 \le m \le 380) = 0{,}9522$,

$P_{600}(0 \le m \le k) \ge P_{01} \Rightarrow k \ge 376$,

$P_n(600 \le m \le n) \ge P_{02} \Rightarrow n \ge 828$.

77. Вероятность повреждения железобетонных панелей при транспортировке равна 0,01. Найти вероятность того, что при перевозке 300 панелей будет повреждено : ровно две ; не более трёх панелей.

Ответ: $P_{300}(2) = 0{,}224$, $P_{300}(0 \le m \le 3) = 0{,}6472$.

78. Телефонный кабель состоит из 400 проводов. С какой вероятностью этим кабелем можно подсоединить 395 абонентов, если для каждого необходим один провод и вероятность того, что провод исправен, равна 0,3875.

Ответ: $P_{400}(0 \le m \le 5) = 0{,}616$.

79. Доля высококачественных изделий в продукции фабрики равна 75%. Сколько таких изделий надо заказать, чтобы с вероятностью 0,9 среди них было бы не менее 700 высококачественных?

Ответ: $n \ge 956$.

80. Вероятность появления бракованных деталей при их массовом производстве равна 0,002. Определить вероятность того, что в партии из 1500 деталей будет : ровно 3 бракованные детали ; не более 3.

Ответ: $P_{1500}(3) = 0{,}224$, $P_{1500}(0 \le m \le 3) = 0{,}6472$.

81. В механическом цехе работают 120 токарей. Вероятность того, что токарю потребуется инструмент определенного вида, равна 0,2. Сколько таких инструментов надо иметь в цехе, чтобы с вероятностью 0,95 удовлетворить потребность в них.

Ответ: $k \ge 32$.

82. Вероятность того, что изготовленные на станке детали сразу пройдут ОТК, равна 0,8. Найти вероятность того, что из 6 деталей: ровно 4 пройдут ОТК ; не менее 4.

Ответ: $P_6(4) = 0{,}2458$, $P_6(4 \le m \le 6) = 0{,}9011$.

83. Согласно многолетним метеорологическим наблюдениям, в данной местности в среднем в сентябре бывает 12 дождливых (из 30) дней. Найти вероятность того, что в течение недели дождливыми окажутся: ровно три дня; не более трёх.

Ответ: $P_7(3) = 0{,}2903$, $P_7(0 \le m \le 3) = 0{,}7102$.

84. Вероятность появления брака при обжиге керамических блоков в данной печи равна 0,05. Найти вероятность того, что среди пяти проверенных блоков : нет ни одного бракованного ; ровно два бракованные.

Ответ: $P_5(0) = 0{,}7738$, $P_5(2) = 0{,}02143$.

85. Вероятность появления брака при выпуске стеновых панелей на ЖБК равна 0,01. Найти вероятность того, что в партии из 200 панелей будет: ровно 4 бракованные; не более 4.

Ответ: $P_{200}(4)= 0{,}09022$, $P_{200}(0 \le m \le 4) =0{,}9473$.

86. Вероятность попадания в цель при одном выстреле у данного стрелка равна 0,8. Найти вероятность выполнения им норматива, если для этого требуется попасть в цель не менее 70 раз при 100 выстрелах.

Ответ: $P_{100}(70 \le m \le 100) = 0{,}9938$.

87. Вероятность заболевания гриппом во время эпидемии равна 0,3. Найти вероятность того, что из 2100 сотрудников предприятия заболеют: ровно 640 ; не более 650 ; от 600 до 650 сотрудников.

Ответ: $P_{2100}(640) = 0{,}01696$, $P_{2100}(0 \le m \le 650) = 0{,}8295$,

$P_{2100}(600 \le m \le 650) = 0{,}7539$.

88. 80% выпускаемых заводом высоконапорных железобетонных труб отпускаются потребителю первым сортом. Определить вероятность того, что в партии из 100 изделий будет : ровно 75 первосортных ; не менее 75 .

Ответ: $P_{100}(75) = 0{,}04565$, $P_{100}(75 \le m \le 100) = 0{,}8844$.

89. Известно, что одним выстрелом стрелку почти невозможно попасть в самолёт. В то же время из практики войн известны случаи, когда при одновременной стрельбе целого подразделения самолеты сбивались. Принимая вероятность сбить самолёт при одном выстреле равной 0,001, найти

вероятность поражения самолёта хотя бы один раз при стрельбе подразделением из 600 солдат.

Ответ: $P_{600}(1 \le m \le 600) = 1 - P_{600}(0) = 0{,}4512$.

90. В опытах Резерфорда и Гейгера образец радиоактивного вещества испускал в среднем за 7,5 секунд 3,87 заряженных частиц. Найти вероятность того, что за одну секунду этот образец испустит хотя бы одну частицу.

Ответ: $P(m \ge 1) = 1 - P(0) = 0{,}4031$.

91. Средняя плотность частиц пыли в помещении, где производятся узлы электроники, равна 100 на 1$м^3$ воздуха. Найти вероятность того, что во взятой пробе объёмом в 2 литра: не будут обнаружены частицы пыли; будет обнаружена хотя бы одна.

Ответ: $P(0) = 0{,}8187$, $P(m \ge 1) = 0{,}1813$.

92. Минное заграждение представляет собой полосу шириной один километр, причём в среднем на 1 $км^2$ приходится 100 мин. Найти вероятность того, что судно шириной 10 метров пройдёт беспрепятственно это заграждение, если его курс: А - перпендикулярен полосе ; В - образует с ней угол 45^0.

Ответ: $P(A) = 0{,}3679$, $P(B) = 0{,}2431$.

93. За одни сутки (24 часа) в среднем случается шесть аварий в системе водоснабжения. На сколько аварий в течении одной смены (8 часов) надо рассчитывать, чтобы с вероятностью не меньше 0,95 ремонтная служба могла с ними справиться?

Ответ: $k \ge 5$.

94. Сколько доз определённого лекарства необходимо иметь в машине скорой помощи, чтобы его с вероятностью 0,98 хватило на всю смену (8 часов), если известно, что в среднем за сутки используется шесть доз такого лекарства?

Ответ: $k \geq 5$.

95. Число заявок на ремонт, поступающих на диспетчерский пункт, представляет собой простейший (Пуассоновский) поток событий со средним числом две заявки в один час. Найти вероятность того, что за два часа поступит менее 4 заявок.

Ответ: $P(m \leq 3) = 0{,}4335$.

II. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Случайные события удобно связывать с действительными числами и вместо действий над событиями проводить действия над числами.

Случайной называют величину, которая при повторении опыта может принимать неодинаковые числовые значения, причем заранее неизвестно какие.

Случайная величина называется ***дискретной***, если ее множество значений конечно или счетно.

Случайная величина называется ***непрерывной***, если ее значения целиком заполняют некоторый интервал.

Случайные величины будем обозначать большими буквами (X), а их возможные значения соответственно малыми буквами (x). Если проведен опыт, в котором случайная величина X принимает значение x, то x называют ***реализацией*** X. Пусть в результате опыта случайная величина X принимает одно из значений $x_1, x_2, ..., x_n$. Вероятности этих событий обозначим $p_1 = P(X = x_1)$, ..., $p_n = P(X = x_n)$. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Законом распределения называют соотношение вида $p_i = P(X = x_i)$. Если закон распределения задан таблицей, то таблицу называют ***рядом распределения*** (см. пример 15), если закон распределения задан графиком, то его называют ***многоугольником распределения***. Закон распределения существует только для дискретных случайных величин, т.к. возможные значения непрерывных случайных величин не могут быть заранее перечислены и непрерывно заполняют некоторый промежуток.

Интегральной функцией распределения (или интегральным законом распределения) называют функцию

$$F(x) = P(X < x).$$

Интегральная функция распределения $F(x)$ является универсальной характеристикой случайной величины, она существует и для дискретной случайной величины и для непрерывной случайной величины.

Свойства функции распределения $F(x)$:

1) $F(x)$ неубывающая функция $F(x_1) \le F(x_2)$ при $x_1 < x_2$;

2) $F(-\infty) = 0$;

3) $F(+\infty) = 1$;

из этих свойств следует, что $0 \le F(x) \le 1$.

Функцию распределения дискретной случайной величины можно построить, если известен ряд распределения

$F(x) = P(X < x) = \sum\limits_{x_i < x} P(X = x_i)$, суммирование распространяется на все те значения x_i, которые меньше x.

Для непрерывной случайной величины вводится ***функция плотности вероятности*** (плотность распределения, дифференциальный закон распределения)

$$\Delta P = P(x \le X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x),$$

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = F'(x).$$

Выразим вероятность попадания величины X на отрезок от α до β:

$$P(\alpha \le X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha).$$

Пусть $\alpha \to -\infty$,

$P(-\infty < X < \beta) = F(\beta) - F(-\infty) = F(\beta)$ ($F(-\infty) = 0$), тогда

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Эта формула выражает функцию распределения $F(x)$ через функцию плотности вероятности $f(x)$. Графики функций $F(x)$ и $f(x)$ приведены в примере 16.

Свойства функции плотности вероятности $f(x)$:

1) $f(x) \geq 0$;

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$.

Для случайных величин были введены полные исчерпывающие характеристики, для дискретной случайной величины - функция распределения $F(x)$ и ряд распределения (многоугольник распределения), для непрерывной случайной величины – функция распределения $F(x)$ и функция плотности распределения $f(x)$.

В практических задачах часто нет необходимости характеризовать случайную величину полностью и достаточно ограничиться указанием отдельных числовых параметров, которые характеризуют существенные особенности распределения. Такие характеристики называют ***числовыми характеристиками***.

Числовые характеристики дискретной случайной величины X :

1) ***математическое ожидание***

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \text{ ;}$$

2) ***дисперсия***

$$D(X) = M((X - M(X))^2) = \sum (x_i - M(X))^2 p_i \text{ ;}$$

3) ***среднеквадратическое отклонение***

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} .$$

Числовые характеристики непрерывной случайной величины:

1) ***математическое ожидание***

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx;$$

2) ***дисперсия***

$$D(X) = M((X - M(X))^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx.$$

3) ***среднеквадратическое отклонение***

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Случайная величина называется ***нормально распределенной***, если ее плотность вероятности и функция распределения имеют вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad F(x) = 0{,}5 + \Phi(\frac{x-a}{\sigma}),$$

где $\Phi(x)$ - функция Лапласа, a и σ - параметры нормального распределения: $a = M(X)$ (математическое ожидание), $\sigma = \sigma(X)$ (среднеквадратическое отклонение).

Пример 2.1.

Прибор состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном испытании равна 0,2. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

Решение.

Пусть случайная величина X - число отказавших деталей в одном опыте:

$X: \ x_1 = 0, \ x_2 = 1, \ x_3 = 2, \ x_4 = 3.$

Вероятность отказа указанного (x_i) числа элементов вычисляется по формуле Бернулли, так как вероятности отказа каждого элемента равны между собой

$p_1 = P_3(x_1 = 0) = C_3^0 \cdot (0{,}2)^0 \cdot (0{,}8)^3 = (0{,}8)^3 = 0{,}512$,

$p_2 = P_3(x_2 = 1) = C_3^1 \cdot 0{,}2 \cdot (0{,}8)^2 = 3 \cdot 0{,}2 \cdot (0{,}8)^2 = 0{,}384$,

$p_3 = P_3(x_3 = 2) = C_3^2 \cdot (0{,}2)^2 \cdot 0{,}8 = 3 \cdot (0{,}2)^2 \cdot 0{,}8 = 0{,}096$,

$p_4 = P_3(x_4 = 3) = C_3^3 \cdot (0{,}2)^3 \cdot (0{,}8)^0 = (0{,}2)^3 = 0{,}008$.

Проверим выполнение условия $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$:

$$\sum_{i=1}^{4} p_i = 0{,}512 + 0{,}384 + 0{,}096 + 0{,}008 = 1.$$

Составим ряд распределения случайной величины X .

X	0	1	2	3
$p(X)$	0,512	0,384	0,096	0,008

Пример 2.2.

Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{16}, & 0 < x \le 4 \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

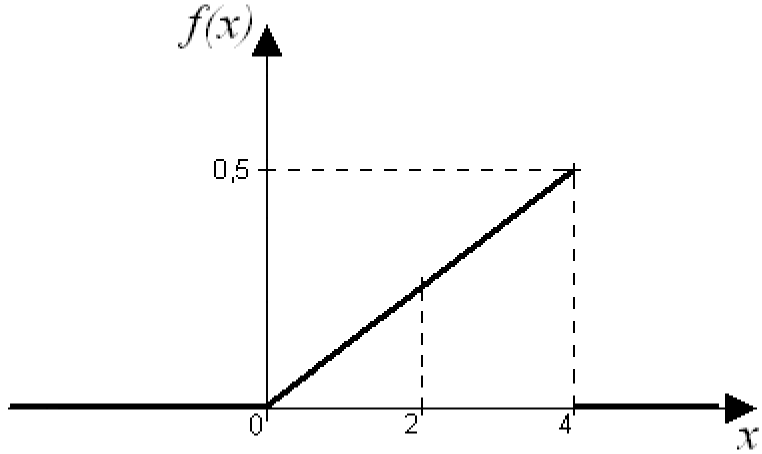
Найти функцию плотности распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, вычислить вероятность события $P(x \ge 3)$, построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

Решение.

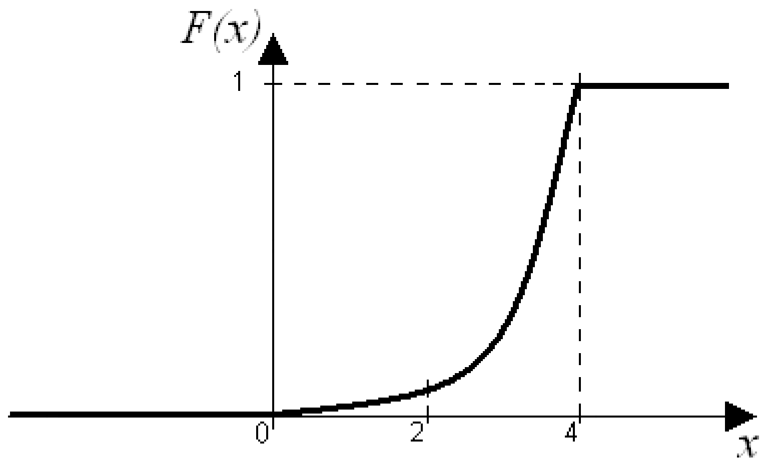
Функция плотность распределения $f(x)$ и функция распределения $F(x)$ связаны равенством $f(x) = F'(x)$. Следовательно,

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x}{8}, & 0<x\le 4\\ 0, & x>4.\end{cases}$$

Построим график плотности распределения $f(x)$:



Построим график функции распределения $F(x)$:



Найдем математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx=\int_0^4 x\cdot\frac{x}{8}dx=\frac{8}{3},$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^2 f(x)dx=\int_0^4 (x-\frac{8}{3})^2\cdot\frac{x}{8}dx=\frac{8}{9}.$$

События $x\geq 3$ и $x<3$ противоположны, следовательно $P(x<3)+P(x\geq 3)=1$, тогда $P(x\geq 3)=1-P(x<3)=1-F(3)=1-\frac{3^2}{16}=\frac{7}{16}$.

Рассмотрим решение задач типового варианта.

Пример 2.3.

На полке стоят 10 книг, 7 из них по математике. Найти вероятность того, что среди 6-ти взятых наудачу книг 4 по математике.

Решение.

Пусть событие A – среди 6-ти взятых книг 4 по математике. Воспользуемся классическим определением вероятности. Искомая вероятность $P(A)$ равна отношению $m-$ числа исходов, благоприятствующих событию A, к $n-$ числу всех элементарных исходов:

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Общее число всех всевозможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь 6 книг из 10 имеющихся, т.е. числу сочетаний из 10 элементов по 6 ($n=C_{10}^6$).

Определим $m-$ число исходов, благоприятствующих событию A. Четыре книги можно взять из 7 книг по математике C_7^4 способами; при этом остальные $(6-4=2)$ книги должны быть не по математике. Взять же 2 книги нематематические из $(10-7=3)$ нематематических книг можно C_3^2 способами.

Следовательно, число благоприятствующих исходов $m = C_7^4 \cdot C_3^2$. Таким образом, учитывая, что $C_a^b = \dfrac{a!}{b!(a-b)!}$, получаем:

$$P(A) = \frac{C_7^4 \cdot C_3^2}{C_{10}^6} = \frac{\frac{7!}{4!\cdot 3!} \cdot \frac{3!}{2!\cdot 1!}}{\frac{10!}{6!\cdot 4!}} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $P(A) = \frac{1}{2}$**.**

Пример 2.4.

Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна $0{,}7$, а для второго – $0{,}8$. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

Решение.

Пусть событие A – попадание в цель первым стрелком, событие B – вторым, промах первого стрелка – событие $\overline{A}$, промах второго – событие $\overline{B}$. Тогда $P(A) = 0{,}7$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}8$, $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 0{,}2$.

Вероятность того, что первый стрелок попадет в мишень, а второй – нет, равна $P(A) \cdot P(\overline{B}) = 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}14$. Вероятность того, что второй стрелок попадет в цель, а первый – нет, равна $P(\overline{A}) \cdot P(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}24$. Тогда вероятность попадания в цель только одним стрелком равна $P = P(A) \cdot P(\overline{B}) + P(\overline{A}) \cdot P(B) = 0{,}14 + 0{,}24 = 0{,}38$.

Тот же результат можно получить другим способом – находим вероятности того, что оба стрелка попали в цель и оба промахнулись. Эти вероятности соответственно равны: $P(A) \cdot P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56$; $P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06$. Тогда вероятность того, что в цель попадет только один стрелок равна: $P = 1 - P(A) \cdot P(B) - P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 1 - 0{,}56 - 0{,}06 = 0{,}38$.

Ответ: $P = 0{,}38$.

Пример 2.5.

Изделия, производимые предприятием, попадают для проверки к двум контролерам. Вероятность того, что изделия попадут первому контролеру равна - $0{,}6$, а второму - $0{,}4$. Вероятность того, что бракованное изделие будет признано годным первым контролером равна $0{,}06$, а вторым - $0{,}02$. Бракованное изделие было признано при приемке годным. Найти вероятность того, что бракованное изделие проверял первый контролер.

Решение.

Пусть событие A – бракованное изделие признано годным. Это событие может произойти при реализации одной из двух 2-х гипотез: H_1 – изделие проверил первый контролер, H_2 – изделие проверил второй контролер. Легко заметить, что эти гипотезы образуют полную группу событий и их вероятности по условию равны $P(H_1) = 0{,}6$, $P(H_2) = 0{,}4$.

В свою очередь, вероятность события A при условии реализации гипотезы H_1 равна $P(A/H_1) = 0{,}06$, а при условии реализации гипотезы H_2 равна $P(A/H_2) = 0{,}02$.

Определим вероятность реализации гипотезы H_1 при условии, что событие A произошло, используя для этого формулу Байеса:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2)} =$$

$$= \frac{0{,}6\cdot 0{,}06}{0{,}6\cdot 0{,}06 + 0{,}4\cdot 0{,}02} \approx 0{,}82$$

Ответ: $P(H_1/A) \approx 0{,}82$.

Пример 2.6.

По цели производится 5 выстрелов. Вероятность попадания для каждого выстрела $0{,}4$. Найти вероятность того, что в цель попали не менее 3-х раз.

Решение.

Пусть событие A – попадание в цель, $\overline{A}$ – промах. По условию $P(A)=p=0{,}4$, следовательно $P(\overline{A})=q=1-p=1-0{,}4=0{,}6$. Можно считать, что производится 5 независимых испытаний (5 выстрелов). Поэтому будем использовать формулу Бернулли:

$$P_n(m)=C_n^m p^m \cdot q^{(n-m)},$$

$n=5$, $p=0{,}4$, $q=0{,}6$. Учитывая, что

$$P_5(m\geq 3)=P_5(3)+P_5(4)+P_5(5),$$

имеем

$$P_5(m\geq 3)=C_5^3\cdot 0{,}4^3\cdot 0{,}6^2+C_5^4\cdot 0{,}4^4\cdot 0{,}6^1+C_5^5\cdot 0{,}4^5\cdot 0{,}6^0=$$
$$=0{,}2304+0{,}0768+0{,}01024=0{,}31744$$

Ответ: $P_5(m\geq 3)=0{,}31744$.

Пример 2.7.

Предприятие выпускает 20% изделий 2-го сорта. Найти вероятность того, что среди случайно отобранных 400 изделий окажется от 70-ти до 100 изделий 2-го сорта.

Решение.

Пусть событие A – проверяемое изделие 2-го сорта. Тогда $P(A)=p=0{,}2$. Получаем схему Бернулли, где $n=400$, $P(A)=p=0{,}2$.

Требуется найти $P_{400}(70\leq m\leq 100)$. Поскольку n велико, применим интегральную формулу Муавра-Лапласа:

$$P_n(k_1\leq m\leq k_2)\approx \Phi(x'')-\Phi(x'),\text{ где } x''=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}},\ x'=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}.$$

Вычислим:

$$x'=\frac{70-400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}=-1{,}25,\quad x''=\frac{100-400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}=2{,}5.$$

Таким образом, имеем:

$$P_{400}(70\leq m\leq 100)\approx \Phi(2{,}5)-\Phi(-1{,}25)=\Phi(2{,}5)+\Phi(1{,}25).$$

По таблице 4 значений функции $\Phi(x)$ находим, что:

$$\Phi(2{,}5) = 0{,}4938,$$
$$\Phi(1{,}25) = 0{,}3944.$$

Следовательно,

$$P_{400}(70 \le m \le 100) \approx 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882.$$

Ответ: $P_{400}(70 \le m \le 100) \approx 0{,}8882$.

Пример 2.8.

На факультете учатся 300 студентов. Найти вероятность того, что 31 декабря является днем рождения: а) 2-х студентов; б) не менее 2-х студентов.

Решение.

Пусть событие A – случайно выбранный студент родился 31 декабря. Получаем схему Бернулли, где $n = 300$, $P(A) = p = \frac{1}{365}$. Поскольку n велико, а p – мало и $np < 10$, то воспользуемся формулой Пуассона, где $a = np = 300 \cdot \frac{1}{365} \approx 0{,}8 < 10$.

а) $P_{300}(2) = 0{,}14379$ (по таблице 1);

б) $P_{300}(m \ge 2) = 1 - P_{300}(m < 2) = 1 - P_{300}(m \le 1) = 1 - 0{,}80879 = 0{,}19121$ (по таблице 2).

Ответ: *а*) $p \approx 0{,}14379$; *б*) $p \approx 0{,}19121$.

Пример 2.9.

В коробке 6 белых и 4 черных шара. Из нее пять раз подряд извлекают шар, причем каждый раз вынутый шар возвращают обратно и шары перемешивают. Приняв за случайную величину X - число извлеченных белых шаров, составить закон распределения этой величины, определить ее математическое ожидание и дисперсию.

Решение.

Т.к. шары в каждом опыте возвращаются обратно и перемешиваются, то испытания можно считать независимыми (результат предыдущего опыта не влияет на вероятность появления или не появления события в другом опыте). Таким образом, вероятность появления белого шара в каждом опыте постоянна и равна $p=\frac{6}{10}=0{,}6$, соответственно, вероятность появления черного шара $q=1-p=0{,}4$. Значит, в результате пяти последовательных испытаний белый шар может не появиться вовсе, появиться один раз, два, три, четыре или пять раз. Для составления закона распределения надо найти вероятности каждого из этих событий. Для этого будем использовать формулу Бернулли $P_n(m)=C_n^m p^m q^{(n-m)}$.

1) Белый шар не появился вовсе: $P_5(0)=C_5^0 p^0 q^5 =0{,}0102$.

2) Белый шар появился один раз: $P_5(1)=C_5^1 p^1 q^4 =\frac{5!}{1!4!}\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4^4 =0{,}0768$.

3) Белый шар появиться два раза: $P_5(2)=\frac{5!}{2!3!}\cdot 0{,}6^2\cdot 0{,}4^3 =0{,}2304$.

4) Белый шар появиться три раза: $P_B(3)=\frac{5!}{3!2!}\cdot 0{,}6^3\cdot 0{,}4^2 =0{,}3456$.

5) Белый шар появиться четыре раза: $P_5(4)=\frac{5!}{4!1!}\cdot 0{,}64^4\cdot 0{,}4^1 =0{,}2592$.

6) Белый шар появился пять раз: $P_5(5)=0{,}6^5 =0{,}0778$.

Получаем закон распределения случайной величины X.

X	0	1	2	3	4	5
X^2	0	1	4	9	16	25
$p(X)$	0,0102	0,0768	0,2304	0,3456	0,2592	0,0778

Найдем математическое ожидание $M(X)$:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{6}x_i p_i=0{,}0768+2\cdot 0{,}2304+3\cdot 0{,}3456+4\cdot 0{,}2592+5\cdot 0{,}0778=3{,}0002 .$$

Вычислим дисперсию $D(X)$

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2,$$

$$M(X^2)=\sum_{i=1}^{6}x_i^2 p_i=$$

$$=0{,}0768+4\cdot 0{,}2304+9\cdot 0{,}3456+16\cdot 0{,}2592+25\cdot 0{,}0778=10{,}201,$$

$$D(X)=10{,}201-9{,}0012=1{,}1998.$$

Ответ: $M(X)=3{,}0002$**;** $D(X)=1{,}1998$**.**

Пример 2.10.

Непрерывная случайная величина задана функцией распределения $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases} A\cos 2x, & при \quad -\dfrac{\pi}{4}\le x\le \dfrac{\pi}{4}, \\ 0, & при \quad |x|>\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Определить коэффициент A, найти функцию распределения, построить графики функции распределения и плотности распределения, определить вероятность того, что случайная величина X попадет в интервал $\left(\dfrac{\pi}{6};2\right)$. Найти математическое ожидание и дисперсию.

Решение.

Найдем коэффициент A, используя свойство функции плотности распределения $f(x)$: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{-\pi/4}0dx+\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}A\cos 2xdx+\int\limits_{\pi/4}^{\infty}0dx=A\frac{\sin 2x}{2}\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4}=A\frac{1+1}{2}=1 .$$

Итак, $A=1$. Найдем функцию распределения:

1) на интервале $x<-\dfrac{\pi}{4}$: $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{x}0dx=0$;

2) на интервале $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int_{-\pi/4}^{x} \cos 2x dx = \frac{\sin 2x}{2} \Big|_{-\pi/4}^{x} = \frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{2};$$

3) на интервале $x > \frac{\pi}{4}$:

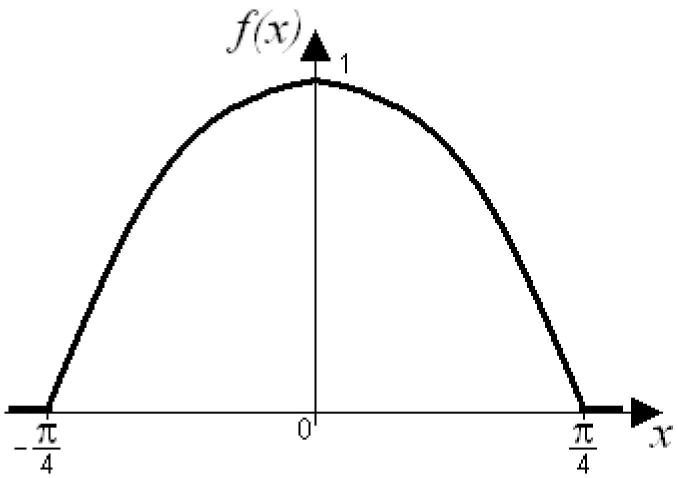
$$F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2x dx + \int_{\pi/4}^{x} 0dx + = \frac{\sin 2x}{2} \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 1.$$

Таким образом,

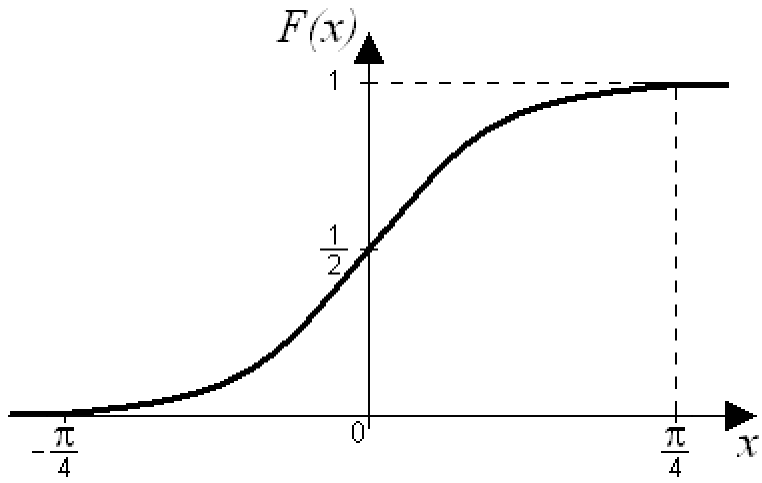
$$f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & при \quad -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}; \\ 0, & при \quad |x| > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < -\frac{\pi}{4} \\ \frac{\sin 2x + 1}{2}, & при \quad -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}; \\ 1, & при \quad x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Построим график плотности распределения $f(x)$:



Построим график функции распределения $F(x)$:



Найдем вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left(\dfrac{\pi}{6};2\right)$

$$P\left(\frac{\pi}{6} < X < 2\right) = \int_{\pi/6}^{2} f(x)dx = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos 2x dx + \int_{\pi/4}^{2} 0 dx = \frac{\sin 2x}{2}\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Вероятность можно найти и другим способом:

$$P\left(\frac{\pi}{6} < X < 2\right) = F(2) - F(\pi/6) = 1 - \frac{\sin(\pi/3)+1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Вычислим математическое ожидание $M(X)$.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} x\cos 2x dx + \int_{\pi/4}^{\infty} 0dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} x\cos 2x dx =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x, & dv = \cos 2x dx; \\ du = dx, & v = \dfrac{\sin 2x}{2}; \end{matrix}\right\} = \frac{x\sin 2x}{2}\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4} - \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin 2x dx = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8} + \frac{\cos 2x}{4}\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 0.$$

Найдем дисперсию $D(X)$.

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2,$$

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{-\pi/4}0dx+\int_{-\pi/4}^{\pi/4}x^2\cos 2xdx+\int_{\pi/4}^{\infty}0dx=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}x^2\cos 2xdx=$$

$$=\left\{\begin{matrix}u=x^2, & dv=\cos 2xdx;\\ du=2xdx, & v=\dfrac{\sin 2x}{2};\end{matrix}\right\}=\frac{x^2\sin 2x}{2}\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4}-\int_{-\pi/4}^{\pi/4}x\sin 2xdx=$$

$$=\left\{\begin{matrix}u=x, & \sin 2xdx=dv;\\ du=dx, & v=-\dfrac{\cos 2x}{2};\end{matrix}\right\}=\frac{\pi^2}{16}+\frac{x\cos 2x}{2}\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4}-\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\cos 2x}{2}dx=$$

$$=\frac{\pi^2}{16}-\frac{\sin 2x}{4}\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4}=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2},$$

$$D(X)=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}-0=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}.$$

Ответ: $A=1$**;** $F(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<-\dfrac{\pi}{4}\\ \dfrac{\sin 2x+1}{2}, & при \quad -\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{\pi}{4}\\ 1, & при \quad x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$**,** $P\left(\dfrac{\pi}{6}<X<2\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$**,**

$M(X)=0$**,** $D(X)=\dfrac{\pi^2}{16}-\dfrac{1}{2}$**.**

Пример 2.11.

Нормально распределенная величина X задана своими параметрами: математическое ожидание $a=2$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma=1$. Найти вероятность того, что а) значения случайной величины попадут в интервал $(1;3)$, б) случайная величина X отклонится по модулю от математического ожидания не более чем на $\varepsilon=2$.

Решение.

а) Так как случайная величина X распределена по нормальному закону, то вероятность, что значения этой случайной величины попадут в интервал $(\alpha;\beta)$, находится по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где a - математическое ожидание, σ - среднеквадратическое отклонение, а значения функции $\Phi(x)$ находим по таблице 4.

$$P(1 < X < 3) = \Phi\left(\frac{3-2}{1}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{1}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) =$$
$$\Phi(1) + \Phi(1) = 2\Phi(1) = 2 \cdot 0{,}3413 = 0{,}6826.$$

б) Вероятность, что нормально распределенная величина X отклонится по модулю от математического ожидания a не более чем на ε находится по формуле:

$$P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

$$P(|X - 2| < 2) = 2\Phi\left(\frac{2}{1}\right) = 2 \cdot 0.4772 = 0{,}9544.$$

Ответ: **а)** $P(1 < X < 3) = 0{,}6826$, **б)** $P(|X - 2| < 2) = 0{,}9544$**.**

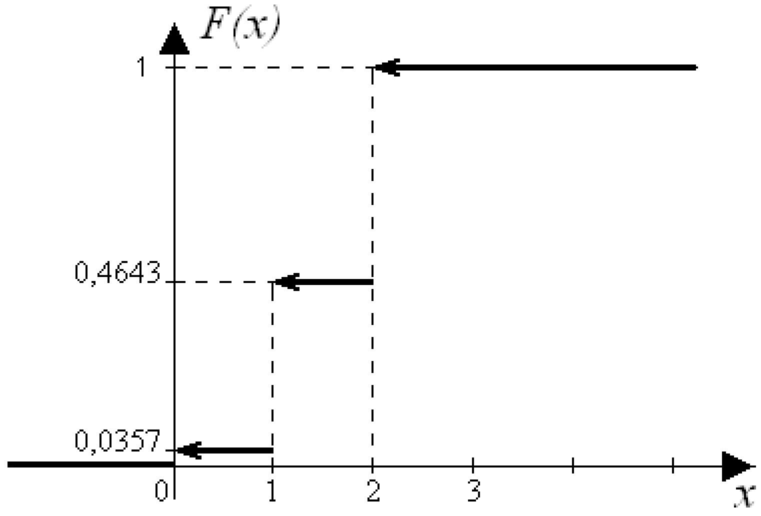
ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти вероятность того, что нейтрон пройдёт без столкновений с молекулами вещества (слоя радиационной защиты) расстояние L , рассматривая нейтроны и молекулы как шары радиусов r и R соответственно, а число молекул в единице объёма равным N. Как изменится эта величина для $L_1 = 2$ L.

Ответ: $P(L) = \exp\{-\pi L (r + R)^2 N\}$, $P(L_1) = [P(L)]^2$.

2. В партии из 8 изделий 2 бракованных. Случайным образом отобраны два изделия. Случайная величина ξ - число хороших изделий, среди отобранных. Составить закон распределения, найти функцию распределения и построить её график, определить числовые характеристики.

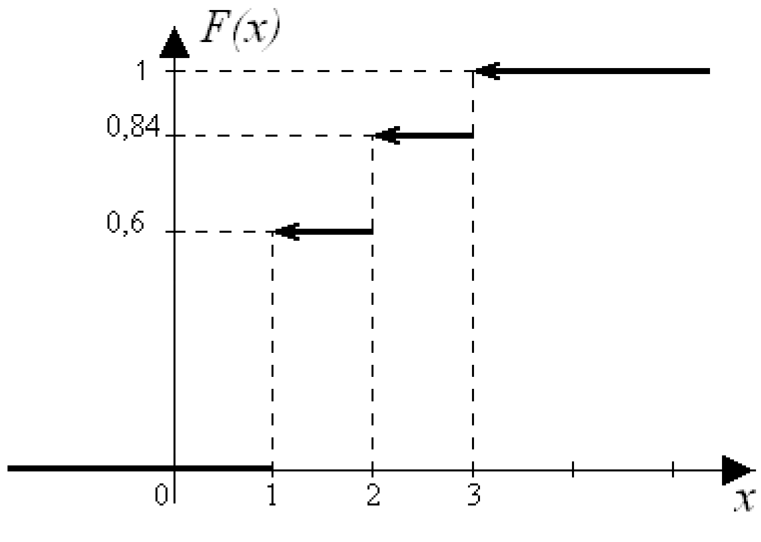
Ответ: $M(\xi) = 1{,}5$, $D(\xi) = 0{,}3214$



ξ	0	1	2
p	1/28	12/28	15/28

3. Вероятность попадания в цель у данного стрелка равна 0,6 , стрельба ведётся до первого попадания, но не более трёх раз. Случайная величина ξ - число сделанных выстрелов. Составить закон распределения, найти функцию распределения и построить её график, определить числовые характеристики.

Ответ: M(ξ) = 1,56, D(ξ) = 0,5664

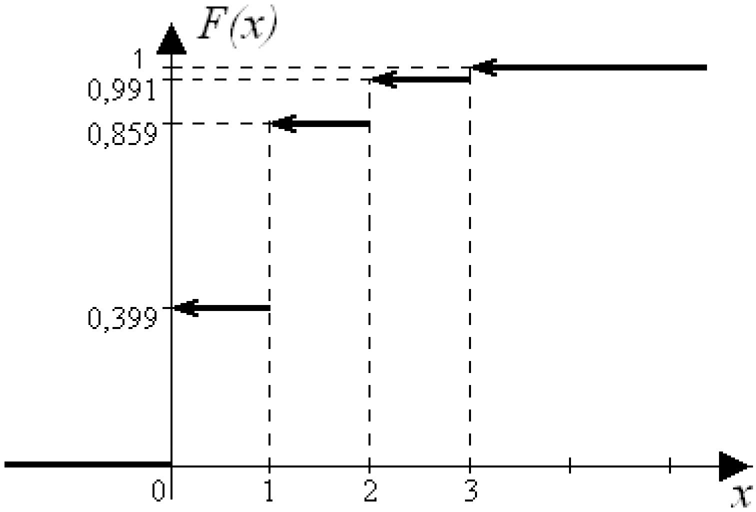


ξ	1	2	3
p	0,6	0,24	0,16

4. В урне 5 белых и 15 чёрных шаров. Случайным образом вынули три шара. Случайная величина ξ - число вынутых белых шаров. Составить закон

распределения, найти функцию распределения и построить её график, определить числовые характеристики.

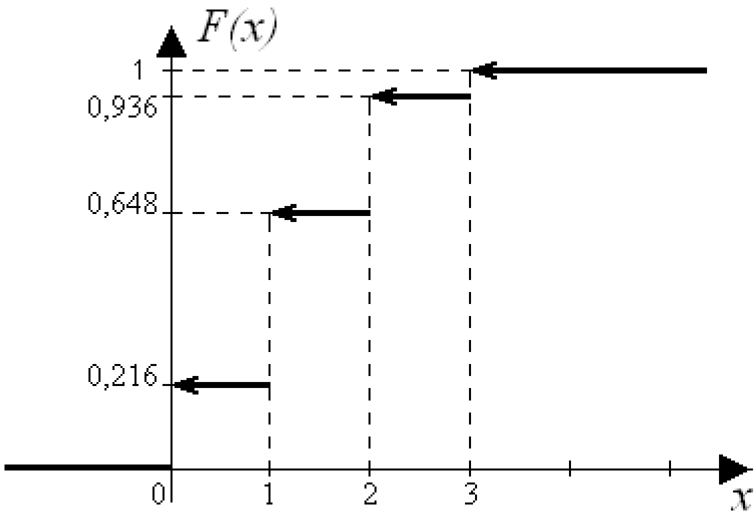
Ответ $M(\xi) = 0,75$, $D(\xi) = 0,5035$



ξ	0	1	2	3
P	0,399	0,460	0,132	0,009

5. Случайная величина ξ - число попаданий в корзину мячом. Составить закон распределения, найти функцию распределения и построить её график, определить числовые характеристики, если баскетболист делает три броска и вероятность попадания в корзину при одном броске у него равна 0,4.

Ответ: $M(\xi) = 1,2$, $D(\xi) = 0,72$



ξ	0	1	2	3
p	0,216	0,432	0,288	0,064

6. В книжной лотерее продано 100 билетов стоимостью один рубль каждый. Разыгрывается четыре книги стоимостью 40 , 16 , 8 и 4 рубля (на один билет не более одной книги). Найти математическое ожидание чистого выигрыша для человека, купившего : А - один билет, В - два билета (стоимость книг минус стоимость билетов).

Ответ: $M(\xi) = -0{,}32$ руб., $M(\xi) = -0{,}64$ руб.

7. Стрелок делает три выстрела по мишени с вероятностью попадания в цель при одном выстреле равной 0,6. Составить закон распределения случайной величины ξ - числа попаданий, найти функцию распределения и числовые характеристики.

Ответ: $M(\xi) = 1{,}8$, $D(\xi) = 0{,}72$.

8. При установке бракованного узла в прибор он при включении полностью выходит из строя. Определить, будет ли экономически целесообразно проводить сплошной контроль указанных узлов при массовом производстве, если стоимость контроля каждого узла после изготовления равна 1 руб., а стоимость всего прибора - 200 руб. и вероятность изготовления бракованного узла равна: а - 0,01; б - 0,001 (вычислить и сравнить математические ожидания убытка в этих случаях с затратами на сплошной контроль узлов).

Ответ: а) - целесообразно $M(\xi) = 2$ руб.,

б) - нецелесообразно $M(\xi) = 0{,}2$ руб.

9 Согласно статистическим данным вероятность того, что двадцатипятилетний человек проживёт ещё один год, равна 0,992. Страховая компания предлагает такому клиенту застраховать свою жизнь на год на любую сумму при страховом взносе 1% от этой суммы. Будет ли это выгодно для страховой компании?

Ответ: да, так как математическое ожидание случайной величины ξ - дохода компании в этом случае M(ξ) = 0,002 A > 0 , где A - сумма страхового полиса.

10. Задана плотность вероятности непрерывной случайной величины ξ. Найти коэффициент A, функцию распределения и числовые характеристики.

Ответ: A = 0,5, M(ξ) = 1,5833, D(ξ) = 0,07639 ,

$$f(x)=\begin{cases} x-A, & x\in[1,2] \\ 0, & x\notin[1,2] \end{cases},\quad F(x)=\begin{cases} 0, & x\in(-\infty,1) \\ 0{,}5\cdot(x^2-x), & x\in[1,2] \\ 1, & x\in(2,\infty) \end{cases}.$$

11. Задана плотность вероятности непрерывной случайной величины ξ. Найти коэффициент A, числовые характеристики и вероятность того, что случайная величина примет значения в интервале $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

Ответ: A = 0,5 , M(ξ) = 1,5708, D(ξ) = 1,4674, P(0 ≤ ξ ≤ $\frac{\pi}{4}$) =0,1464,

$$f(x)=\begin{cases} A\sin x, & x\in[0,\pi] \\ 0, & x\notin[0,\pi] \end{cases},\quad F(x)=\begin{cases} 0, & x\in(-\infty,0) \\ 0{,}5\cdot(1-\cos x), & x\in[0,\pi] \\ 1, & x\in(\pi,\infty) \end{cases}.$$

12. Задана плотность вероятности непрерывной случайной величины ξ (распределение Лапласа) $f(x)=A\cdot e^{-|x|}$. Найти коэффициент A, функцию распределения, числовые характеристики и вероятность того, что ξ примет значения в интервале [0 , 1].

Ответ: A = 0,5 , M(ξ) = 0, D(ξ) = 1, P(0 ≤ ξ ≤ 1) = 0,3161.

$$F(x)=\begin{cases} 0{,}5\cdot e^{x}, & x\in(-\infty,0) \\ 1-0{,}5\cdot e^{-x}, & x\in[0,\infty) \end{cases}.$$

13. Задана плотность вероятности непрерывной случайной величины ξ (отражённое нормальное распределение). Найти коэффициент A, функцию распределения и числовые характеристики.

Ответ: A = M(ξ) = $\sqrt{2\pi}$ = 0,7979, D(ξ) = 1 - 2π = 0,3634,

$$f(x)=\begin{cases} A\cdot e^{-0.5x^2}, & x\in[0,\infty) \\ 0, & x\notin[0,\infty) \end{cases}, \quad F(x)=\begin{cases} 0, & x\in(-\infty,0) \\ 2\cdot\Phi(x), & x\notin(0,\infty) \end{cases}.$$

14. Задана функция распределения непрерывной случайной величины ξ. Найти коэффициенты A и B, плотность вероятности и числовые характеристики.

Ответ: A = 0,5 , B = 1, M(ξ) = 0, D(ξ) = $\frac{\pi^2}{4}-1$ = 1,4674,

$$f(x)=\begin{cases} 0{,}5\cdot\cos x, & x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & x\notin[0,\pi] \end{cases}, \quad F(x)=\begin{cases} 0, & x\in\left(-\infty,-\frac{\pi}{2}\right) \\ A\cdot(B+\sin x), & x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ 1, & x\in\left(\frac{\pi}{2},\infty\right) \end{cases}.$$

15. Задана функция распределения непрерывной случайной величины ξ. Определить коэффициенты A, B, C, D. Найти плотность вероятности, числовые характеристики и вероятность того, что случайная величина примет значение в интервале [0,5 , 3]. Построить графики функции распределения и плотности вероятности.

Ответ: A = 0, B = 0,5, C = $\frac{1}{\pi}$, D =1,

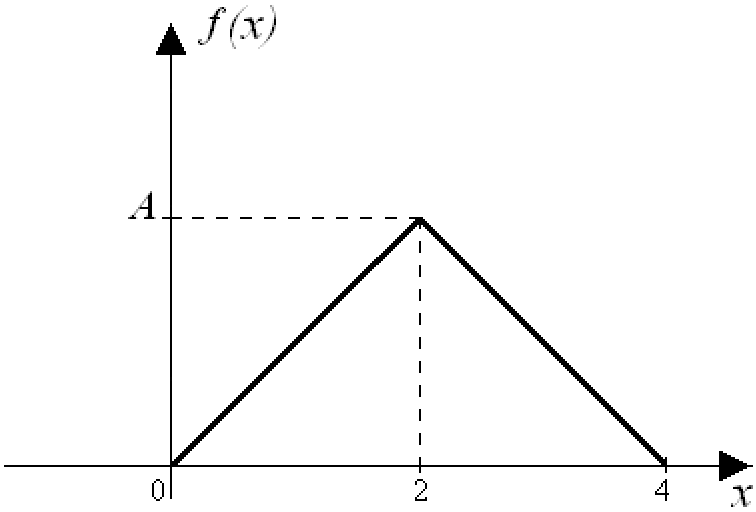
M(ξ) = 0, D(ξ) = 0,5

P(0,5 ≤ ξ ≤ 3) = 0,3333.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & x\in(-1,1) \\ 0, & x\notin(-1,1) \end{cases}, \quad F(x)=\begin{cases} A, & x\in(-\infty,-1] \\ B+C\cdot\arcsin x, & x\in(-1,1) \\ E, & x\in[1,\infty) \end{cases}.$$

16. Задан график плотности вероятности непрерывной случайной величины ξ. Найти коэффициент A, аналитические выражения для и, числовые характеристики и вероятность попадания случайной величины ξ в интервал [1, 3]. Построить график функции распределения.

Ответ: A = 0,5, M(ξ) = 2, D(ξ) = 0,6667, P(1 ≤ ξ ≤ 3) = 0,75.



$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 0{,}25\cdot x, & 0\le x\le 2\\ 1-0{,}25\cdot x, & 2<x\le 4\\ 0, & x>4\end{cases},\quad F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 0{,}125\cdot x^2, & 0\le x\le 2\\ 1-0{,}125\cdot x^2-1, & 2<x\le 4\\ 1, & x>0\end{cases}.$$

17. Известна функция распределения непрерывной случайной величины ξ : F(x) = A + B arctg x (распределение Коши). Найти коэффициенты A и B, плотность вероятности, математическое ожидание и вероятность попадания случайной величины в интервал [0 , 1]. Построить графики f(x) и F(x) .

Ответ: A = 0, B = $\dfrac{1}{\pi}$, M(ξ) = 0,

P(0 ≤ ξ ≤ 1) = 0,25

18. Точка брошена в круг радиуса R так, что любое её положение в круге равновозможно. Найти функцию распределения, плотность вероятности и

числовые характеристики случайной величины ξ - расстояния от точки до центра круга.

Ответ: $M(\xi) = \frac{2}{3}R$, $D(\xi) = \frac{1}{18}R^2$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0, R] \\ \frac{2x}{R^2}, & x \in [0, R] \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{R^2}, & 0 \le x \le R \\ 1, & x > R \end{cases}.$$

19. Рассматривая прочность качественной стальной проволоки, идущей на изготовление тросов, как нормально распределённую случайную величину ξ с $M(\xi) = 300$ кГ/мм^2 и $\sigma(\xi) = 20$ кГ/мм^2, найти вероятность того, что: а) $280 \le \xi \le 340$, б) $\xi \ge 270$.

Ответ: $P(280 \le \xi \le 340) = 0,8185$, $P(270 \le \xi < \infty) = 0,9332$.

20. Вес мешка цемента - случайная величина, распределённая по нормальному закону с математическим ожиданием 50кг и среднеквадратическим отклонением 0,5кг. Найти вероятность того, что вес одного мешка будет не меньше 49 кг ; вес каждого из двух мешков будет не меньше 49кг.

Ответ: $P(\xi \ge 49) = 0,9772$, $(P(\xi \ge 49))^2 = 0,9540$.

21. Удельный вес тяжёлого бетона можно рассматривать как случайную величину, распределённую по нормальному закону с математическим ожиданием 2200 кГ/м^3 и среднеквадратическим отклонением 200 кГ/м^3. Найти вероятность того, что удельный вес бетона не превзойдёт 2500 кГ/м^3.

Ответ: $P(\xi \le 2500) = 0,9332$.

22. Некоторая игра заключается в бросании трёх игральных костей и подсчёте числа выпавших очков - случайной величины ξ. Выигрыш пропорционален квадрату числа выпавших шестёрок с коэффициентом

пропорциональности К. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины η - величины выигрыша ($\eta = К\,\xi^2$).

Ответ: $M(\eta) = 0{,}6667$ К, $D(\eta) = 1{,}3889$ К^2.

23. Сторона квадратного участка измерена приближенно (в метрах). Рассматривая длину стороны как случайную величину, равномерно распределённую в интервале [100 , 110], найти числовые характеристики S - площади участка.

Ответ: $M(S) = 11033$ м^2, $D(S) = 367556$ м^4.

24. Характерный размер частиц гравия (в сантиметрах) после сортировки по фракциям можно рассматривать как случайную величину ξ , равномерно распределённую в интервале [5 , 7]. Найти числовые характеристики случайной величины η - веса частиц гравия, считая, что он пропорционален кубу характерного размера с коэффициентом пропорциональности К = 2 г/см^3 ($\eta = К\,\xi^3$).

Ответ: $M(\eta) = 444$ г., $D(\eta) = 15840$ г^2.

25. Дискретная случайная величина ξ распределена по закону, приведенному в таблице.

ξ	30°	90°	150°
P	0,2	0,5	0,3

Составить закон распределения случайной величины η и найти её числовые характеристики, если $\eta = \sin\xi$.

Ответ: $M(\eta) = 0{,}75$, $D(\eta) = 0{,}0625$.

η	0,5	1
P	0,5	0,5

26. Найти числовые характеристики случайной величины η, если $\eta = 6 - 2\xi$, $M(\xi) = 2$ и $D(\xi) = 10$.

Ответ: $M(\eta) = 2$, $D(\eta) = 40$.

27. Билет в спортлото стоит один рубль. Игра заключается в том, что надо угадать пять (заранее неизвестных) чисел из 36. Выигрыш пропорционален четвёртой степени числа угаданных чисел ($\eta = К\,\xi^4$, где ξ - число угаданных чисел, η - сумма выигрыша). Каким должен быть коэффициент К, чтобы эта игра была выгодна её учредителям (воспользоваться решением задачи 9).

Ответ: $M(\eta) = 3{,}4301\ К < 1 \;\Rightarrow\; К < 0{,}2915$ (математическое ожидание выигрыша на один билет должно быть меньше его стоимости).

28. Считая в условии предыдущей задачи $К = 0{,}2$, найти вероятность того, что после проведения тиража и выплаты выигрышей устроители будут иметь прибыль, если было продано 10000 билетов (ζ - сумма выигрышей должна быть меньше стоимости всех билетов). Какую прибыль X можно ожидать с вероятностью 0,95 ?

Ответ: $P(\zeta < 10000) = \Phi(13{,}83) + \Phi(30{,}31) \approx 1$, $X > 2767{,}6$ р.

29. Случайная величина ξ равномерна распределена в интервале [-1 , 2]. Найти плотность вероятности и числовые характеристики случайной величины $\eta = 1 + \xi^2$.

Ответ: $M(\eta) = 2$, $D(\eta) = 1{,}2$

30. Считая радиус (в см) круглой деревянной стойки случайной величиной ξ, равномерно распределённой в интервале [10 , 12], найти плотность вероятности и числовые характеристики случайной величины η - площади поперечного сечения.

Ответ: $M(\eta) = 381{,}2$ см^2, $D(\eta) = 1593{,}2$ см^4

31. Найти плотность вероятности и числовые характеристики случайной величины η мгновенной амплитуды колебательного процесса со случайной равномерно распределенной фазой ξ , $\eta = \cos \xi$ (рассмотреть интервал монотонности функции $y = \cos x$, например $[0, \pi]$).

Ответ: $M(\eta) = 0$, $D(\eta) = 0{,}5$,

32. Рассматривая стоимость (в тысячах рублей) проведения различных этапов возведения здания (инженерно-геологическое обследование, выемка котлована, сооружение фундамента и т. д.) как случайные независимые величины ξ_i , числовые характеристики которых даны в таблице, найти с вероятностью 0,95 оценку стоимости возведения всего сооружения.

ξ_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$M(\xi_i)$	30	50	200	70	90	50	40	20
$D(\xi_i)$	4	6	15	6	12	4	5	3

Ответ: $\eta = \sum_{i=1}^{8} \xi_i \le 587{,}04$ тысяч рублей.

33. Свайное основание фундамента здания состоит из 400 железобетонных свай, забитых в грунт. Рассматривая несущую способность каждой сваи как случайные независимые величины ξ_i с $M(\xi_i) = 12$ тонн и $\sigma(\xi_i) = 5$ тонн, определить надёжность 0,95 несущую способность всего основания η.

Ответ: $\eta \ge 4635{,}5$ т.

34. Пространственно-структурное перекрытие здания склада состоит из 200 типовых элементов, вес каждого из которых можно рассматривать как случайные независимые величины ξ_i с $M(\xi_i) = 500$ кг. и $\sigma(\xi_i) = 20$ кг. Оценить с надёжностью 0,9 вес η всего перекрытия.

Ответ: $\eta \le 100{,}362$ т.

35. Для опорных колонн здания цеха используются литые чугунные трубы внутренним и внешним радиусами r и R (в см). Рассматривая r и R как нормально распределённые случайные величины с известными параметрами $N(10\ ,\ 0{,}1)$ и $N(12\ ,\ 0{,}15)$, найти плотность вероятности случайной величины δ - толщины стенки трубы и числовые характеристики случайной величины S - площади поперечного сечения (в последнем случае воспользоваться линеаризацией зависимости S от r и R в окрестности их математических ожиданий).

Ответ: $N_{\delta}(2\ ,\ 0{,}18)$, $M(S) = 138{,}23$ см^2, $\sigma(S) = 12{,}94$ см^2 .

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица 1. Значения функции $p(m) = \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a}$

a\m	0	1	2	3	4	5	6	7
0,1	0,90484	09048	00452	00015	00000	00000	00000	00000
0,2	81873	16375	01638	00109	00006	00000	00000	00000
0,3	74082	22225	03334	00333	00025	00002	00000	00000
0,4	67032	26813	05363	00715	00072	00006	00000	00000
0,5	60658	30327	07582	01264	00158	00016	00001	00000
0,6	54881	32929	09879	01976	00296	00036	00004	00000
0,7	49659	34761	12166	02839	00497	00070	00008	00001
0,8	44933	35946	14379	03834	00767	00123	00016	00002
0,9	40657	36591	16466	04940	01112	00200	00030	00004
1,0	36788	36788	18394	06131	01533	00307	00051	00007
2,0	13534	27067	27067	18045	09022	03609	01203	00344
3,0	04979	14936	22404	22404	16803	10082	05041	02160
4,0	01832	07326	14653	19537	19537	15629	10420	05954
5,0	00674	03369	08422	14037	17547	17547	14622	10445
6,0	00248	01487	04462	08924	13385	16062	16062	13768
7,0	00091	00638	02234	05213	09123	12772	14900	14900

Таблица 2. Значения функции $p(m \le k) = e^{-a} \cdot \sum_{m=0}^{k} \frac{a^m}{m!}$

a\k	0	1	2	3	4	5	6	7
0,1	0,90484	99532	99985	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,2	81873	98248	99885	99994	1,000	1,000	1,000	1,000
0,3	74082	96306	99640	99973	99998	1,000	1,000	1,000
0,4	67032	93845	99207	99922	99994	1,000	1,000	1,000
0,5	60653	90980	98561	99825	99983	99999	1,000	1,000
0,6	54881	87810	97689	99664	99961	99996	1,000	1,000
0,7	49659	84420	96586	99425	99921	99991	99999	1,000
0,8	44933	80879	95358	99092	99859	99982	99998	1,000
0,9	40657	77248	93714	98654	99766	99966	99996	1,000
1,0	36788	73576	91970	98101	99634	99941	99992	99999
2,0	13534	40601	67668	85712	94735	98344	99547	99890
3,0	04979	19915	42319	64723	81526	91608	96649	98810
4,0	01832	09158	23810	43347	62792	81548	88876	94778
5,0	00674	04043	12465	26503	44049	61596	76218	86663
6,0	00248	01735	06197	15120	28506	44568	60630	74398
7,0	00091	00730	02964	08177	17299	30071	44971	59871

Таблица 3. Значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3983	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	4385	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1236	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180

2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006

Таблица 4. Значения функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0040	0080	0120	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2708	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3883	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4832	4846	4850	4854	4857
2,2	4861	4864	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4897	4890
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936

2,5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2,6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2,8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2,9	4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986

x		x		x		x	
3,0	0,49865	3,5	0,49977	4,0	0,499968	4,5	0,4999966
3,1	49903	3,6	49984	4,1	499979	4,6	4999979
3,2	49931	3,7	49989	4,2	499987	4,7	4999987
3,3	49952	3,8	49993	4,3	499991	4,8	4999992
3,4	49966	3,9	49995	4,4	499995	4,9	4999995

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. ч.3. Харьков: 1972. 412 с.
2. Каган М.Л., Кузина Т.С., Петелина В.Д. Теория вероятностей и математическая статистика в вопросах и задачах: Учебное пособие. Моск. гос. строит. ун-т. М., 2002. 58 с.
3. Каган М.Л. Краткий курс теории вероятностей и математической статистики. Моск. гос. строит. ун.- т. М., 1998. 85 с.
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учебное пособие для студентов вузов. М.: Высшая школа, 1999. 400 с.

СОДЕРЖАНИЕ