O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O’RTA

TA’LIM VAZIRLIGI

SAMARQAND IQTISODIYOT VA SERVIS INSTITUTI

OLIY MATEMATIKA VA AXBOROT TEXNOLOGIYALARI KAFEDRASI

S.XUDOYBERDIYEV
B.ASHUROV
O.TOG’AYEV

IQTISODCHILAR UCHUN MATEMATIKA

fanidan 2-kurslar uchun uslubiy qo’llanma

SAMARQAND 2019

S.Xudoyberdiyev, B.Ashurov, O.Tog’ayev Iqtisodchilar uchun matematika fanidan uslubiy qoʻllanma (amaliy mashgʻulotlar uchun). Samarqand, SamISI, 2019 y. 168-bet.

Taqrizchilar:

E.Ya.Jabborov	-	SamDU “Algebra va geometriya” kafedrasi katta o’qituvchisi, f-m.f.n.
F.Jamanqulova	-	SamISI “Oliy matematika va axborot texnologiyalari” kafedrasi katta o’tqituvchisi tex.f.n.

Mazkur uslubiy qoʻllanma Oʻzbekiston Respublikasi Oliy va oʻrta maxsus ta’lim vazirligi tomonidan tasdiqlangan «Iqtisodchilar uchun matematika» fani amaldagi dasturiga asosan tayyorlangan boʻlib, uning asosiy boʻlimlarini qamrab olgan. Xususan, hodisalar va ularning ehtimollari, erkli sinovlar ketma-ketligi, tasodifiy miqdorlar, matematik statistika elementlari, tanlanma metod va korrelyatsiya nazariyasi elementlari. Chiziqli va chiziqsiz programmalashtirish masalalari boʻyicha amaliy mashgʻulotlar oʻtkazish uchun uslubiy koʻrsatmalar keltirilgan. Uslubiy qoʻllanmada zarur nazariy ma’lumotlar va formulalar, tipik masalalarning yechilishlari, mustaqil yechish uchun masalalarning javoblari va koʻrsatmalar berilgan.

Uslubiy qoʻllanma institutimiz iqtisodiyot, menejment va marketing ta’lim yoʻnalishidagi bakalavriatlar oʻquv rejasidagi «Iqtisodchilar uchun matematika» fani, ishchi-oʻquv dasturida rejalashtirilgan amaliy mashgʻulotlarni oʻtkazish uchun moʻljallangan.

Uslubiy qoʻllanma «Oliy matematika va axborot texnologiyalari» kafedrasi majlisida muhokama etilgan va nashr etishga tavsiya qilingan (___-son bayonnoma, ________, 2019 yil).

Uslubiy qoʻllanma institut oʻquv-uslubiy kengashida tasdiqlangan va chop etishga tavsiya etilgan ___-son bayonnoma, ____, 2019 yil).

S.Xudoyberdiyev, B.Ashurov, O.Tog’ayev SamISI, Samarqand 2019 yil

KIRISH

Hozirgi zamon iqtisodiyotida matematika usullari juda keng qo‘llanilmoqda. Shu sababli, yetuk iqtisodchilarni tayyorlashda matematik usullardan foydalanishni o‘qitish bo‘lajak iqtisodchilarni o‘z faoliyatida uchraydigan iqtisodiy masalalarni to‘g‘ri asosli qarorlar qabul qilishda muhim ahamiyatga egadir.

Amaliy va nazariy iqtisodiyot masalalari turli-tuman bo‘lib, bunda statistik ma’lumotlarni tahlil qilish usullari, iqtisodiy jarayonning rivojlanish holatini baholash va prognoz qilish masalalari dolzarb hisoblanadi.

Iqtisodiy jarayonlarning noaniqliq va tavakkalchilik bilan bog‘liqligi hamda stoxastik harakterdagi bu jarayonlarni tadqiq etishda ehtimollar nazariyasi va matematik statistika usullarini qo‘llashni taqoza etadi.

Hozirgi zamonda iqtisodga, ishlab chiqarishga qo‘yilayotgan yuksak talablarni bajarishda kadrlarning umumiy malakasi oldingi o‘ringa qo‘yilmoqda. Bu yuksak talablar hamma mutaxassislarga ham tegishlidir.

Bunday yuksak vazifalarni har tomonlama kamol topgan, yuksak ma’lakali mutaxassislar amalga oshiradi. Yuksak malakali mutaxassislar tayyorlashda «Iqtisodchilar uchun matematika» fanining katta ahamiyatga ega ekanligi hech kimda shubha tug‘dirmasa kerak.

Hamma sohalarda matematik qonuniyatlarga asoslangan zamonaviy komp’yuterlarning muvaffaqiyat bilan tatbiq etilishi hamda uning kundan-kunga rivojlanib borayotganligi, yosh mutaxassislarning tegishli sohalar, masalalarining matematik modellarini tuza bilishi va unda hisoblash texnikasini joriy etish vazifalarini qo‘ymoqda. Bu masalalarni modellashtirish matematik amallar va usullar yordamida amalga oshiriladi.

Shuni ta’kidlash lozimki, «Iqtisodchilar uchun matematika» fani iqtisodiy ta’limda asosiy tayanch fan hisoblanib, uning usullari ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, informatika, chiziqli va nochiziqli dasturlash, makro va mikro iqtisod, ekonometriya, iqtisodiy tahlil, moliyaning miqdoriy metodlari, logistika va boshqa fanlarning asosiy bilimlarini egallashda asosiy qurol sifatida ishlatiladi.

«Iqtisodchilar uchun matematika» fanini o‘rganish jarayonida kompyuterlardan, internet tarmog‘idan, nazorat savollari bankidan, fanni o‘rganishda tayanch iboralarga asoslanishdan, fan bo‘yicha izohli lug‘atdan foydalanish kabi imkoniyatlar yaratiladi.

I-BOB EHTIMOLLAR NAZARIYASI

1-MAVZU: HODISALAR VA ULARNING TURLARI

Ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri “tajriba” va tajriba natijasida ro’y berishi mumkin bo’lgan “hodisa” tushunchasidir. Tajriba hodisani ro’yobga keltiruvchi shartlar majmui (shartlar kompleksi) S ning bajarilishini ta’minlashdan iboratdir. Tajribadan tajribaga o’tganda ro’y berayotgan hodisalar o’zgarib turadigan hollar hayotda keng miqyosda uchrab turadi, bu yerda, albatta, tajribani vujudga keltiruvchi shartlar majmui (kompleksi) S o’zgarmas hollar tushuniladi.

Tajriba o’tkazda, ma’lum S kompleks shartlar o’zgarmas bo’lishi talab qilinadi. Tajribaning natijasiga hodisa deb qaraymiz.

Ishonchli (muqarrar) hodisa deb, ma’lum S kompleks shartlar bajarilganda ro’y berishi oldindan aniq bo’lgan hodisaga aytiladi.

1-misol. Normal atmosfera bosimida harorati 0^0 dan 100^0 gacha bo’lgan suvni suyuq, 100^0 dan yuqori haroratda gaz holatida bo’lishi va 0^0 dan past haroratda qattiq bo’lishi ishonchli hodisalar.

2-misol. Yashikda hammasi oliy sifatli mahsulotlar bo’lsin. Yashikdan tasodifiy olingan mahsulotning oliy sifatli bo’lishi ishonchsiz hodisa.

Ishonchsiz (mumkin bo’lmagan) hodisa deb, ma’lum S kompleks shartlar bajarilganda, ro’y bermasligi oldindan aniq bo’lgan hodisaga aytiladi.

*3-misol***.** Normal atmosfera bosimida 20^0 haroratda suvni qattiq bo’lishi ishonchsiz hodisa.

*4-misol***.** Yashikda hammasi oliy sifatli mahsulotlar bo’lsin. Yashikdan tasodifiy olingan mahsulotning yaroqsiz bo’lishi ishonchsiz hodisa.

Tasodifiy hodisa deb, ma’lum S kompleks shartlar bajarilganda ro’y berishi yoki ro’y bermasligi oldindan aniq bo’lmagan hodisaga aytiladi.

Tasodifiy hodisalar, odatda, lotin alfavitining bosh harflari $A, B, C, \ldots$ lar bilan belgilanadi.

5-misol. Simmetrik, bir jinsli tangani tashlaganimizda gerb tomoni yoki raqam tomoni tushishi tasodifiy hodisa.

*6-misol***.** Tomonlari birdan oltigacha nomerlangan o’yin kubini tashlaganimizda juft raqam yoki toq raqam yozilgan tomoni tushishi tasodifiy hodisa.

7-misol. Har bir ishlab chiqarilgan mahsulotning sifatli yoki sifatsiz bo’lishi tasodifiy hodisa.

1-ta’rif. Har bir sinashda hodisani ro’y berishi boshqalarining ro’y berishini inkor etsa, bunday hodisalarga *birga ro’y bermas* hodisalar deyiladi.

2-ta’rif. Ikkita A va B hodisalardan birining ro’y berishi boshqasining ro’y berishini inkor etmasa, bunday hodisalarga *birga ro’yberuvchi* hodisalar deyiladi.

3-ta'rif. Sinashlarda qatnashayotgan hodisalar bir nechta bo'lib, har bir sinashda ulardan faqat bittasi ro'y bersa, bunday hodisalarga *birdan-bir imkoniyatli* hodisalar deyiladi.

4-ta'rif. $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalariga *to'la hodisalar gruppasi* deyiladi, agarda bulardan hyech bo'lmasa bittasining ro'y berishi ishonchli bo'lsa.

8-misol. Mergan nishonga qarata o'q uzdi. Quyidagi ikkita hodisadan biri albatta ro'y beradi: o'qning nishonga tegishi, o'qning nishonga tegmasligi.

5-ta'rif. Agar hodisalardan birining ro'y berish darajasi boshqasining ro'y berish darajasidan ortmasa, bunday hodisalarga *teng imkoniyatli* hodisalar deyiladi.

9-misol. Tangani tashlaganda "gerb" va "raqam" tomonlari tushishi teng imkoniyatli hodisalardir. O'yin kubini tashlaganda har bir tomonini tushishi teng imkoniyatli hodisalardir.

6-ta'rif. Birga ro'y bermas, teng imkoniyatli hamda to'la hodisalar gruppasini tashkil etuvchi hodisaga *elementar hodisa* deyiladi.

Tajriba natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan barcha elementar hodisalar to'plami elementar hodisalar fazosi deyiladi. Elementar hodisalar fazosini Ω-orqali, har bir elementar hodisani ω belgilaymiz.

Agar tajriba natijasida $A, A \subseteq \Omega$ ga kirgan ω elementar hodisalardan birortasi ro'y bersa, A *hodisa ro'y berdi* deyiladi. Agar shu elementar hodisalardan birortasi ro'y bermasa, A hodisa ro'y bermaydi, unda A hodisaga *teskari hodisa* (uni $\bar{A}$ orqali belgilaymiz) *ro'y bergan* deymiz. A va $\bar{A}$ *o'zaro qarama-qarshi hodisalar* deyiladi.

Birorta ham elementar hodisani o'z ichiga olmagan hodisa *mumkin bo'lmagan (ishonchsiz)hodisa* deyiladi $\varnothing$.

Endi tasodifiy hodisalar orasida ayrim munosabatlarni ko'rib chiqaylik.

1. Agar A hodisani tashkil etgan elementar hodisalar B hodisaga ham tegishli bo'lsa, A *hodisa* B *hodisani ergashtiradi* deyiladi va $A \subseteq B$ kabi belgilanadi.
2. A va B hodisalar bir xil elementar hodisalardan tashkil topgan bo'lsa, A va B *hodisalar teng deyiladi* va $A = B$ kabi belgilanadi.
3. A va B *hodisalarlarning yig'indisi* deb, A yoki B ning, yoki ikkalasining ham ro'y berishidan iborat C hodisani aytamiz va $A \cup B$ (yoki $A + B$) kabi belgilaymiz.
4. A va B hodisalarning bir vaqtda ro'y berishini ta'minlovchi barcha $\omega, \omega \in \Omega$ lardan tashkil topgan C hodisa A va B *hodisalarning ko'paytmasi* deyiladi va $A \cap B$ (yoki AB) kabi belgilanadi.
5. A va B *hodisalarning ayirmasi* deb, A ro'y berib, B ro'y bermasligidan iborat C hodisaga aytiladi. A va B hodisalarning ayirmasi $A \setminus B$ kabi belgilanadi.
6. Agar $A \cap B = \varnothing$ bo'lsa, A va B hodisalar *birga ro'y bermas* deyiladi.

Ehtimollar nazariyasidagi terminalogiyalari va to'plamlar nazariyasidagi terminalogiyalar orasida quyidagicha o'xshashliklar bor.

Belgilashlar	To'plamlar nazariyasidagi terminalogiyalar	Yehtimollar nazariya-sidagi terminalogiyalar
Ω	Fazo (asosiy to'plam)	Yelementar hodisalar fazosi, ishonchli hodisa
$\omega,\ \omega\in\Omega$	ω fazoning yelementi	ω yelementar hodisa
$A,\ A\subseteq\Omega$	A to'plam	A hodisa
$A\bigcup B$, $A+B$	A va B to'plamlarning birlashmasi, yig'indisi	A va B hodisalar yig'indisi
$A\bigcap B,\ AB$	A va B to'plamlarning kesishmasi	A va B hodisalarning ko'paytmasi
$A\setminus B$	A va B to'plamlarning ayirmasi	A va B hodisalarning ayirmasi
$\varnothing$	bo'sh to'plam	ishonchsiz hodisa
$\overline{A}$	A to'olamning to'ldiruvchisi	A hodisaga teskari hodisa
$AB=\varnothing$	A va B to'plamlar kesishmaydi	A va B hodisalar birga ro'y bermas
$A\subseteq B$	A to'plam B ning qismi	A hodisa B hodisaga yergashadi
$A=B$	A va B to'plamlar teng	A va B hodisalar teng kuchli

Umumiy holda, Ω fazo cheksiz bo'lsa, biz Ω ning barcha qism to'plamlarini qaramaymiz, balki faqatgina uning algebra va σ-algebra deb ataluvchi qism to'plamlar sinfini qaraymiz.

7-ta'rif. Ω ning qism to'plamlaridan tuzilgan $\Im$ to'plamlar sistemasi algebra deyiladi, agar quyidagi munosabatlar bajarilsa:

(1) $\varnothing\in\Im,\ \ \Omega\in\Im;$

(2) $A\in\Im$ ekanligidan $\overline{A}\in\Im$ kelib chiqsa;

(3) $A,\ B\in\Im$ ekanligidan, $A\bigcup B\in\Im,\quad A\bigcap B\in\Im$ lar kelib chiqsa.

10-misol. 1) Osongina tekshirib ko'rish mumukinki, $\Im=\{\varnothing,\ \Omega\}$ algebraning barcha shartlarini qanoatlantiradi va bu algebraga trivial algebra deyiladi.

2) $\Im=\{A,\ \overline{A},\ \Omega,\ \varnothing\}$ - A hodisadan hosil bo'lgan algebra.

8-ta'rif. Ω ning qism to'plamlaridan tuzilgan $\Im$ sistema, σ-algebra deyiladi, agar quyidagi munosabatlar bajarilsa:

(1) $\Im$ algebra;(2) $A_n\in\Im,\quad n=1,2,3...$ ekanligidan $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\Im,\ \ \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\Im$ lar kelib chiqsa.

11-misol. Ω ning elementlari cheklita bo'lmasa, u holda barcha qism to'plamlaridan tuzilgan $\Im=\{A: A\subseteq\Omega,\ \varnothing\}$ to'plamlar sistemasi σ-algebra tashkil qiladi.

Eslatma.Har qanday σ-algebra, algebra bo'ladi. Har qanday algebra σ-algebra bo'lmasligi mumkin.

9-ta'rif. $\Im$ σ-algebrada aniqlangan, to'plam funksiyasi P ehtimol deyiladi, agar u quyidagi shartlarni qanoatlantirsa: ixtiyoriy $A \in \Im$ uchun
1) $P(A) \geq 0$ bo'lsa;
2) $P(\Omega) = 1$ bo'lsa;
3) o'zaro birga ro'y bermas $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ hodisalar uchun $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ tenglik bajarilsa.

12-misol. Elementar hodisalar fazosi $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...\}$ sanoqlita elementlardan tashkil topgan bo'lsin. $\Im$ orqali Ω ning barcha qism to'plamlaridan tashkil topgan σ-algebrani belgilaymiz.
$\{\eta_n,\ n = 1, 2, ...\}$- musbat hadli yaqinlashuvchi qatorning yelementlari bo'lib, bu qatorning yig'indisi Q ga teng bo'lsin, ya'ni $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n = Q$. p_n -orqali quyidagi ketma -ketlikni belgilaymiz $\{p_n = \frac{\eta_n}{Q},\ n = 1, 2, ...\}$. Bu ketma-ketlikning barcha yelementlari $0 < p_n < 1,$ tengsizlikni qanoatlantiradi va $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$ bo'ladi. Har yelementar hodisa ω_n ning ro'y berish yehtimoli $p(\omega_n) = p_n$ ga teng deb olib, $A \in \Im$ hodisaning yehtimolini $P(A) = \sum_{\{n: \omega_n \in A\}} p(\omega_n)$ ko'rinishda aniqlaymiz. Aniqlangan $P = \{P(A),\ A \in \Im\}$ funksiya 9-ta'rifning barcha shartlarini qanoatlantiradi.

10-ta'rif. $(\Omega, \Im, P)$-uchlikga *ehtimolli fazo* deb ataymiz.

13-misol. 1) Bir jinsli tanga ikki marta ketma-ket gerb tomoni tushgunga qadar tashlansa, unga mos ehtimolli fazoni tuzing.
2) Tashlashlar soni besh martadan oshmasa, ikki marta ketma-ket gerb tomoni hodisasi ehtimolini toping.

Yechish. 1) Elementar hodisalar fazosi Ω sifatida, yelementlari, cheklita G-gerb va R-raqam simvollaridan tashkil topgan, uzunligi ikkita simvoldan kam bo'lmagan va ohirlari GG, lardan iborat bo'lgan zanjirlar to'plami, hamda biror marta ham ketma-ket GG uchramaydigan cheksiz uzunlikdagi zanjirlar to'plamini belgilaymiz. $\Im$ orqali Ω ning barcha qism to'plamlaridan tashkil topgan σ-algebrani belgilaymiz. P ehtimolni quyidagicha aniqlaymiz: har bir chekli n usun- likdagi elementar hodisaga $1/2^n$ ni mos qo'yamiz, agar elementar hodisa cheksiz uzunlikda bo'lsa u hodisaga 0 ni mos qo'yamiz.
2) Yuqorida aniqlangan yehtimolga asosan tashlashlar soni besh martadan oshmasa, ikki marta ketma-ket gerb tomoni hodisasi ehtimolini $19/32$ ga teng bo'ladi.

2-MAVZU: EHTIMOLNING KLASSIK VA STATISTIK TA'RIFLARI

1-ta'rif. A *hodisaning ehtimoli* deb, unga sharoit yaratuvchi hodisalar sonini hamma mumkin bo'lgan elementar hodisalar soniga nisbatiga aytiladi va quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$P(A) = \frac{k}{n}.$$

bu yerda $k - A$ hodisaning ro'y berishiga sharoit yaratuvchi hodisalar soni, $n -$ hamma mumkin bo'lgan elementar hodisalar soni.

2-ta'rif. A hodisaning *nisbiy sanog'i* deb, uning ro'y berishlar sonini, hamma sinashlar soniga nisbatiga aytiladi

$$W(A) = \frac{\mu}{n}.$$

bu yerda μ - A hodisaning ro'y berishlar soni, n - hamma sinashlar soni.

*1-misol***.** Yashikda 4 ta oq, 10 ta qora va 6 ta ko'k shar bor. Yashikdan tasodifan bitta shar olinadi. Shu sharning oq rangda bo'lish ehtimolini toping.
Yechish. Bu yerda elementar hodisalar yashikdan ixtiyoriy shar olinishidan iborat. Barcha bunday natijalar soni yashikdagi sharlar soniga teng, ya'ni $n = 30$. Oq shar chiqishi hodisasini A bilan belgilasak, unga sharoit yaratuvchi hodisalar soni yashikdagi oq sharlar soniga tengligi ravshan, ya'ni $m = 4$. Demak, ta'rifga asosan

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

*2-misol***.**O'yin kubi tashlanganda juft raqam yozilgan tomoni tushish ehtimoli topilsin.

*Yechish.*O'yin kubida 6 ta tomoni bo'lib, har bir tomoniga 1, 2, 3, 4, 5, 6 raqamlardan biri yozilgan. Demak, hamma ro'y berishi mumkin bo'lgan elementar hodisalar soni $n = 6$. Juft raqam yozilgan tomoni tushishiga sharoit yaratuvchi hodisalar esa 2, 4, 6 ya'ni ularning soni $k = 3$. Agar o'yin kubi tashlanganda juft tomoni tushish hodisasini A bilan belgilasak, u holda uning ehtimoli ta'rifga asosan quyidagicha bo'ladi:

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

*3-misol***.** Ikkita o'yin kubi tashlangan. Kublarning tushgan tomonlaridagi ochkolar yig'indisi juft son, shu bilan birga kublardan hyech bo'lmaganda bitta tomonida olti ochko chiqish ehtimolini toping.

Yechish. «Birinchi» o'yin kubida tushgan tomonida bir ochko, ikki ochko,…, olti ochko tushish imumkin. «Ikkinchi» kubni tashlaganda ham shunday oltita elementar hodisa bo'lishi mumkin. «Birinchi» kubni tashlashdagi hodisalarning har biri «ikkinchi» kubni tashlash natijasidagi har bir hodisa bilan birga ro'y berishi mumkin. Shunday qilib, hamma mumkin bo'lgan elementar hodisalar soni 36 ga teng.

Bizni qiziqtirayotgan hodisaga (hyech bo'lmaganda bitta tomonida olti ochko chiqadi, tushgan ochkolar yig'indisi juft son) sharoit yaratuvchi hodisalar quyidagicha beshta bo'ladi:

1) $6,\ 2;\ \ 6+2=8,$ 4) $2,\ 6;\ 2+6=8,$

2) $6,\ 4;\ \ 6+4=10,$ 5) $4,\ 6;\ \ 4+6=10.$

3) $6,\ 6;\ \ 6+6=12,$

Demak, $n=36,\ k=5$ bo'lsa, izlanayotgan hodisaning ehtimmoli:

$$P=\frac{k}{n}=\frac{5}{36}.$$

4-misol. Yashikka 21 ta yaroqli va 10 ta yaroqsiz detal solingan. Uni tashish vaqtida bitta detal yo'qolgani ma'lum bo'ldi. Yashikdan (tashishdan keyin) tavakkaliga olingan detal yaroqli detal bo'lib chiqdi: a) yaroqli detal; b) yaroqsiz detal yo'qolgan bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. a) Ravshanki, olingan yaroqli detal yo'qolgan bo'lishi mumkin emas, qolgan o'ttizta detalning $(21+10-1=30)$ istalgan biri yo'qolgan bo'lishi mumkin, shu bilan birga ularning orasida 20 ta detal yaroqlidir $(21-1=20)$.

Yaroqli detal yo'qolgan hodisasini A bilan belgilsak, uni ehtimoli:

$$P(A)=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}.$$

b) Har biri ham yo'qolishi mumkin bo'lgan o'ttizta detal orasida 10 ta yaroqsiz detal bor edi. Yaroqsiz detal yo'qolgan bo'lishi hodisasi $\overline{A}$ bo'lsa, uni ehtimoli:

$$P(\overline{A})=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}\ .$$

3-ta'rif. Turli to'plam elementlaridan tuzilgan kombinasiyalarga birlashmalar deyiladi.

Hodisaning ehtimolini hisoblash uchun zarur bo'lgan birlashmalarni qaraymiz.

1. **O'rin almashtirishlar**. n ta har xil elementlardan tuzilgan o'rin almashtirishlar deb, bir-biridan faqat elementlarining o'rinlari bilan farq qiladigan birlashmalarga aytiladi. Ularning soni quyidagicha aniqlanadi:

$$P_n=n! \qquad \text{bu yerda} \qquad n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot n.$$

5-misol. Uchta a, b, c elementlardan tuzilgan o'rin almashtirishlar soni topilsin.

Yechish. Ta'rifga asosan a, b, c elementlardan faqat o'rinlari bilan farq qiladigan birlashmalar tuzamiz, ya'ni

$$abc \quad bac \quad cab,$$

$$acb \quad bca \quad cba.$$

Demak, uchta elementdan tuzilgan o'rin almashtirishlar soni 6 ta ekan. Buni formula orqali hisoblasak ham bo'ladi:

$$P_3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6.$$

2.**O'rinlashtirishlar**. n ta har xil elementlardan k $(k \le n)$ tadan tuzilgan o'rinlashtirishlar deb, bir-biridan elementlari bilan hamda elementlarining o'rinlari bilan farq qiladigan birlashmalarga aytiladi. Ularning soni quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

6-misol. Uchta a, b, c elementlardan ikkitadan tuzilgan o'rinlashtirishlar soni topilsin.

Yechish. Ta'rifga asosan bir-biridan elementlari hamda elementlarining o'rinlari bilan farq qiladigan birlashmalar tuzamiz, ya'ni

$$ab \quad ac \quad bc,$$

$$ba \quad ca \quad cb.$$

Demak, ularning soni 6 ta ekan. Agar buni formulada hisoblasak:

$$A_3^2 = 3\cdot 2 = 6.$$

3. Gruppalashlar. n ta har xil elementlardan k tadan tuzilgan gruppalashlar deb, bir-biridan faqat elementlari bilan farq qiladigan birlashmalarga aytiladi. Ularning soni quyidagicha topiladi:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{A_n^k}{P_k}.$$

7-misol. To'rtta a, b, c, d elementlardan ikkitadan tuzilgan gruppalashlar soni topilsin.

Yechish. Ta'rifga asosan 4 ta elementdan 2 tadan bir-biridan hyech bo'lmasa bitta elementi bilan farq qiladigan birlashmalar tuzamiz:

$$ab, ac, bc, bd, ad, cd.$$

Buni formula bilan hisoblasak:

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2} = 6.$$

1.Yashikda 50 ta bir xil mahsulotlar bor, ulardan 5 tasi yaroqsiz. Tavakkaliga bitta mahsulot olinadi. Olingan mahsulot yaroqli bo'lish ehtimolini toping.

Javobi. $P = 0{,}1.$

2. Ikkita o'yin kubi tashlanganda hyech bo'lmasa bir marta 6 raqam tushish ehtimolini toping.

Javobi. $P = 0{,}5.$

3. Simmetrik kubning ikkita tomoni ko'k rangga, uchta tomoni yashil rangga va bir tomoni qizil rangga bo'yalgan. Kub bir marta tashlanganda yashil tomoni tushish ehtimolini toping.

Javobi. $P = 1/2.$

4. $m\ (m \geq 2)$ ta oq va $n\ (n \geq 2)$ ta qora shar solingan idishdan tavakkaliga 5 ta shar olinadi. Ular orasida ikkita oq shar bo'lish ehtimolini toping.

Javobi. $P = \dfrac{m(m-1)+n(n-1)}{(m+n)(m+n-1)}.$

5.Qur'a tashlashda ishtirokchilar yashikdagi 1 dan 100 gacha nomerlangan jetonlardan tasodifan oladilar. Tavakkaliga olingan birinchi jetonning nomerida 5 raqami uchramaslik ehtimolini toping.

Javobi. $P = 0{,}81.$

6. Xaltachada 5 ta bir xil kub bor. Har bir kubning barcha tomonlariga quyidagi harflardan biri yozilgan: o, p, r, s, t. Bittalab olingan va «bir qator qilib» terilgan kublarda «sport» so'zini yozilish ehtimolini toping.

Javobi. $P = \dfrac{1}{120}.$

7.Oltita bir xil taxtachaga har biriga quyidagi harflardan biri yozilgan: a, t, m, r, s, o. Taxtachalar yaxshilab arashlashtirilgan. Bittalab olingan va «bir qator qilib» terilgan to'rtta taxtachada «tros» so'zini o'qish mumkinligi ehtimolini toping.

Javobi. $P = \dfrac{1}{A_6^4} = \dfrac{1}{360}.$

8.Hamma tomoni bo'yalgan kub mingta bir xil o'lchamli kubchalarga bo'lingan va yaxshilab aralashtirilgan. Tavakkaliga olingan kubchaning a) bitta; b) ikkita; v) uchta yoqi bo'yalgan g) bo'yalmagan bo'lish ehtimolini toping.

Javobi. a) 0,384; b) 0,096; v) 0,008; g) 0b512.

9. Yaxshilab aralashtirilgan 28 ta domino toshidan tavakkaliga bitta tosh olingan. Ixtiyoriy ravishda olingan ikkinchi toshni birinchi tosh yoniga o'yin qoidasi bo'yicha qo'yish mumkinligini ehtimolini birinchi soqqa
a) dubl bo'lganda; b) dubl bo'lmaganda toping.

Javobi. a) $\dfrac{2}{9}$; b) $\dfrac{4}{9}$.

10. 8 ta turli kitob bitta tokchaga tavakkaliga terib qo'yiladi. Tayin ikkita kitob yonma-yon bo'lib qolish ehtimolini toping.

Javobi. $P = \dfrac{1}{4}.$

11. Kutubxonada 10 ta turli kitob bor, bunda beshta kitobning har biri 4 ming so'mdan, uchta kitob ming so'mdan, ikkita kitob 3 ming so'mdan turadi. Tavakkaliga olingan ikkita kitobning bahosi 5 ming so'mdan bo'lish ehtimolini toping.

Javobi. $P = \dfrac{C_5^1 \cdot C_3^1}{C_{10}^2} = \dfrac{1}{3}.$

12. Raqamlari har xil ikki xonali son o'ylangan. O'ylangan son:
a) tasodifan aytilgan ikki xonali son bo'lish; b) tasodifan aytilgan, raqamlari har xil ikki xonali son bo'lish ehtimolini toping.

Javobi. a) $a)\ P=1/90\ \ b)\ \ P=1/81.$

13. Ikkita o'yin kubi tashlangan. Kublarning yoqlarida tushgan ochkolar yig'indisi yettiga teng bo'lish ehtimolini toping.

Javobi. $P=1/6.$

14. Ikkita o'yin kubi tashlangan. Quyidagi hodisalarning ehtimollarini toping:
a) chiqqan ochkolar yig'indisi sakkizga, ayirmasi esa to'rtga teng;
b) chiqqan ochkolar ayirmasi to'rtga tengligi ma'lum bo'lib, ularning yig'indisi sakkizga teng.

Javobi. a) 1/ 18; b) 1/2.

15. Ikkita o'yin kubi tashlangan. Kublarning yoqlarida chiqqan ochkolar yig'indisi beshga, ko'paytmasi esa to'rtga teng bo'lish ehtimolini toping.

Javobi. 1/18.

16. Tanga ikki marta tashlangan. Hyech bo'lmaganda bir marta " gerbli " tomon tushish ehtimolini toping.

Javobi. 3/ 4.

17. Tangani uch marta tashlaganda hammasida "gerb" tushish ehtimoli topilsin.

Javobi. 1/8.

18. Qutida nomerlangan oltita bir xil kubik bor. Hamma kubiklar tavak-kaliga bittalab olinadi. Olingan kubiklarning nomerlari ortib borish tartibida chiqish ehtimolini toping.

Javobi. 1/ 720.

8-misol. Uchta o'yin kubini tashlashda ikkita kubning (qaysilari bo'lishining ahamiyati yo'q) yoqlarida turli (oltiga teng bo'lmagan) ochkolar chiqsa, qolgan bitta kubda olti ochko chiqish ehtimolini toping.

Yechish. Hamma elementar hodisalar soni 6^3 ga teng. Bitta yoqda olti ochko va qolgan ikkita kubning yoqlarida turli (oltiga teng bo'lmagan) ochkolar chiqishiga sharoit yaratuvchi hodisalar soni 5^2 ga teng. Izlanayotgan ehtimol bizni qiziqtirayotgan hodisalar soni 5^2 ni hamma mumkin bo'lgan elementar hodisalarning jami soni 6^3ga nisbatiga teng:

$$P(A)=\frac{5^2}{6^3}=\frac{25}{216}.$$

19. Dastada 101, 102, … , 120 bilan nomerlangan ixtiyoriy taxlangan 20 ta perfokarta bor. Perfokartachi tavakkaliga ikkita karta oladi. 101 va 120 nomerli kartalar chiqish ehtimolini toping.

Javobi. $P=\frac{1}{C_{20}^2}=\frac{1}{190}.$

20. Yashikda 15 ta mahsulot bo'lib, ulardan 10 tasi sifatli. Yig'uvchi tavakkaliga 3 ta mahsulot oladi. Olingan mahsulotlarning sifatli bo'lishi ehtimolini toping.

Javobi. $P=C_{10}^3/C_{15}^3=24/91.$

21. Konvertdagi 100 ta fotokartochka orasida bitta izlanayotgan fotokar-tochka bor. Konvertdan tavakkaliga 10 ta kartochka olinadi. Bularning orasida kerakli kartochka ham bo'lish ehtimolini toping.

Javobi. $P = C_{99}^{9} / C_{100}^{10} = 0{,}1.$

22. Yashikda 100 ta detal bo'lib, ulardan 10 tasi yaroqsiz. Tavakkaliga 4 ta detal olingan. Olingan detallar orasida: a) yaroqsiz bo'lmasligi; b) yaroqli detallar bo'lmasligi ehtimolini toping.

Javobi. $a) P = C_{90}^{4} / C_{100}^{4} \approx 0{,}65; \quad б) P = C_{10}^{4} / C_{100}^{4} \approx 0{,}00005.$

23**.** Qurilma 5 ta elementdan iborat bo'lib, ularning 2 tasi eskirgan. Qurilma ishga tushirilganda tasodifiy ravishda 2 ta element ulanadi. Ishga tushirishda eskirmagan elementlar ulangan bo'lish ehtimolini toping.

Javobi. $P = \dfrac{C_3^2}{C_5^3} = 0{,}3.$

24. Abonent, telefon nomerini terayotib nomerning oxirgi uch raqamini eslay olmadi va bu raqamlar turli ekanligini bilgani holda ularni tavakkaliga terdi. Kerakli raqamlar terilgan bo'lish ehtimolini toping.

Javobi. $P = \dfrac{1}{A_{10}^{3}} = \dfrac{1}{720}.$

9-misol. N ta detaldan iborat partiyada n ta yaroqli detal bor. Tavakkaliga m ta detal olingan. Olingan detallar orasida rosa k ta yaroqli detal bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. Hamma elementar hodisalar soni N ta detaldan m tadan detalni ajratib olish usullari soniga, ya'ni N ta elementdan m tadan tuzilgan gruppalashlar soni C_N^m ga teng.

Bizni qiziqtirayotgan hodisaga (m ta detal orasida rosa k ta yaroqli detal bor) sharoit yaratuvchi hodisalar sonini hisoblaymiz: n ta yaroqli detal orasidan k ta yaroqli detalni $C_n^к$ ta usul bilan olish mumkin; bunda qolgan $m-k$ ta detal yaroqsiz bo'lishi lozim: $m-k$ ta yaroqsiz detalni esa $N-n$ ta yaroqsiz detal orasidan C_{N-n}^{m-k} usul bilan olish mumkin. Demak, sharoit yaratuvchi hodisalar soni $C_n^k C_{N-n}^{m-k}$ ga teng.

Izlanayotgan ehtimol, hodisaga sharoit yaratuvchi hodisalar sonining barcha elementar hodisalar soniga nisbatiga teng:

$$P = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}.$$

25. Sexda 6 erkak va 4 ayol ishchi ishlaydi. Tabel nomerlari bo'yicha tavakkaliga 7 kishi ajratilgan. Ajratilganlar orasida 3 ayol bo'lish ehtimolini toping.

Javobi. $P = \dfrac{C_4^3 \cdot C_6^4}{C_{10}^7} = 0{,}5.$

26.Yashikda 15 ta mahsulot bo'lib, ularning 10 tasi a'lo sifatli. Tavakkaliga olingan beshta mahsulot orasida 3 tasi a'lo sifatli bo'lish ehtimolini toping.

Javobi. $P = C_{10}^3 \cdot C_5^2 / C_{15}^5 \approx 0{,}4.$

27. Gruppada 12 student bo'lib, ulardan 8 tasi a'lochi. Ro'yxat bo'yicha tavakkaliga 9 student ajratilgan. Ajratilganlar orasida 5 a'lochi student bo'lish ehtimolini toping.

Javobi. $P = C_8^5 \cdot C_4^4 / C_{12}^9 = 14/55.$

28.Qutida 5 ta bir xil buyum bo'lib, ularning 3 tasi bo'yalgan. Tavakkaliga 2 ta buyum olingan. Olingan ikkita buyum orasida : a) bitta bo'yalgan buyum; b) ikkita bo'yalgan buyum; v) hyech bo'lmaganda bitta bo'yalgan buyum bo'lish ehtimolini toping.

Javobi. a) $P = C_3^1 \cdot C_2^1 / C_5^2 = 0{,}6;$ b) $P = C_3^2 / C_5^2 = 0{,}3;$ v) $P = 0{,}9.$

29. "Maxfiy" qulfning umumiy o'qida 4 ta disk bo'lib, ularning har biri 5 ta sektorga bo'lingan va sektorlarga turli raqamlar yozilgan. Disklarni ulardagi raqamlar aniq to'rt xonali son tashkil qiladigan qilib o'rnatilgan holdagina qulf ochiladi. Disklarni ixtiyoriy o'rnatishda qulfning ochilish ehtimolini toping.

Javobi. $P = 1/5^4.$

30. 100 ta detalli partiyadan texnik kontrol bo'limi 5 ta nostandart detal topdi. Nostandart detallar chiqishining nisbiy chastotasi nimaga teng.

Javobi. $W = 0{,}05.$

31.Nishonga 20 ta o'q uzilgan, shundan 18 ta o'q nishonga tekkani qayd qilingan. Nishonga tegishlar nisbiy chastotasini toping.

Javobi. $P = 0{,}9.$

32.Asboblar partiyasini sinov vaqtida yaroqli detallarning nisbiy chastotasi 0,9 ga teng bo'lib chikdi. Agar hammasi bo'lib 200 ta asbob sinalgan bo'lsa, yaroqli asboblar sonini toping.

Javobi. 180 ta asbob.

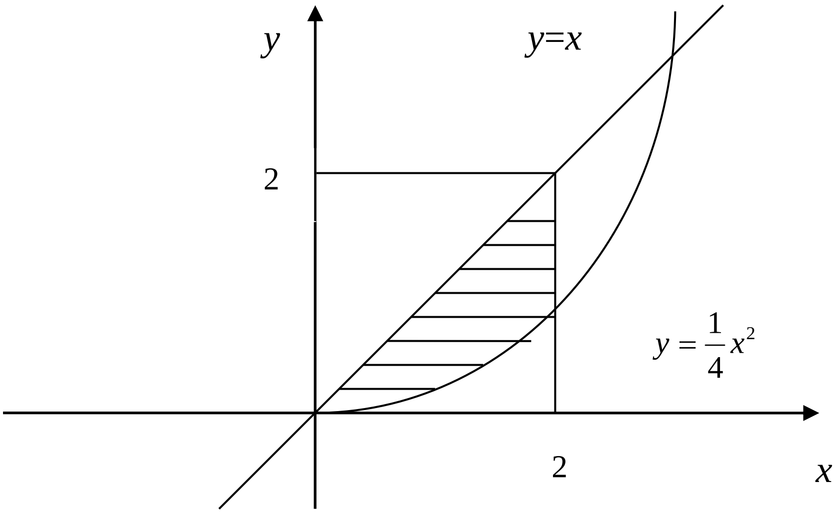
Geometrik ehtimollar.D_1 soha D sohaning qismi (bo'lagi) bo'lsin. Agar sohaning o'lchamini (uzunligi, yuzi, hajmi) mes orqali belgilasak, tavakkaliga D sohaga tashlangan nuqtaning D_1sohaga tushish ehtimoliP (A) = $\frac{mesD_1}{mesD}$ tenglik bilan aniqlanadi.

41-misol. [0; 2] kesmadan tavakkaliga ikkita x va y sonlari tanlangan. Bu sonlar $y \le x$ va $y \ge \frac{1}{4}x^2$ tengsizliklarni qanoatlantirishi ehtimolini toping.

Yechish: Masalaning shartidan (x ; y) nuqtaning koordinatalari

$$\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

tengsizliklar sistemasini qanoatlantiradi. Bizni qiziqtirayotgan A hodisa tanlanadigan (x ; y) nuqta shtrixlangan figuraga tegishli bo'lgan holda va faqat shu holda ro'y beradi.



(1-rasm).

Bu figura koordinatalari $x^2 \le 4y \le 4x$ tengsizlikni qanoatlantiradigan nuqtalarning to‘plami sifatida hosil qilingan.

Demak, izlanayotgan ehtimol shtrixlangan figura yuzining kvadrat yuziga nisbatiga teng, ya’ni

$$P(A) = \frac{\int_0^2 \left(x - \frac{x^2}{4}\right)dx}{4} = \frac{1}{3}$$

42. Sharga kub ichki chizilgan. Nuqta tavakkaliga sharga tashlanadi. Nuqtaning kubga tushish ehtimolini toping.

43. R radiusli doiraga nuqta tashlanadi. Bu nuqta doiraga ichki chizilgan kvadrat ichiga tushish ehtimolini toping.

44. R radiusli doiraga nuqta tavakkaliga tashlangan. Tashlangan nuqtaning doiraga ichki chizilgan muntazam uchburchak ichiga tushishi ehtimolini toping.

45. Tavakkaliga har biri 2 dan katta bo‘lmagan ikkita x va y musbat son olinganda, bu sonlarning ko‘paytmasi xy birdan katta bo‘lmasligi, $\frac{y}{x}$ bo‘linma esa ikkidan katta bo‘lmasligi ehtimolini toping.

46. Kvadratga ichki doira chizilgan. Kvadratga tavakkaliga tash-langan nuqtaning doira ichiga tushishi ehtimolini toping.

47. Ikkita x va y haqiqiy son $x \le 1$, $0 \le y \le 1$ tengsizliklarni qanoatlantiradigan qilib, tavakkaliga tanlanadi. $x^2 < y$ shartning bajari-lish ehtimolini toping.

48. Parabola kvadratning pastki asosiga urinadi va uning yuqori uchlari orqali o‘tadi. Kvadratga tavakkaliga tashlangan nuqtaning kvadratning yuqori tomoni va parabola bilan chegaralangan sohaga tushish ehtimolini toping.

49. R radiusli doiraga muntazam oltiburchak ichki chizilgan. Doira ichiga tavakkaliga tashlangan nuqtaning oltiburchak ichiga tushish ehtimolini toping.

50-misol. Uzunligi 12 sm bo‘lgan AB kesmaga tavakkaliga C nuq-ta qo‘yiladi. AC kesmaga qurilgan kvadrat yuzi 36 sm^2 va 81 sm^2 lar orasida bo‘lish ehtimolini toping.

Ehtimollarni qo‘shish va ko‘paytirish teoremalari

1-teorema. Ikkita birgalikda bo‘lmagan hodisadan istalgan birining ro‘y berish ehtimoli bu hodisalar ehtimollarining yig‘indisiga teng:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

NATIJA. Har ikkitasi birgalikda bo‘lmagan bir nechta hodisalardan istalgan birining ro‘y berishi ehtimoli bu hodisalar ehtimollarining yig‘indisiga teng:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n) = P(A_1) + P(A_2)+\ldots+P(A_n)$$

2-teorema. Ikkita erkli hodisalarning birgalikda ro‘y berish ehti-moli, bu hodisalar ehtimollarining ko‘paytmasiga teng:

$$P(AB)=P(A)\,P(B)$$

NATIJA. Bir nechta erkli hodisalarning birgalikda ro‘y berish ehtimoli, bu hodisalar ehtimollarini ko‘paytmasiga teng:

$$P(A_1A_2\ldots.A_n)=P(A_1)P(A_2)\ldots.P(A_n)$$

3-teorema. Ikkita bog‘liq hodisalarning birgalikda ro‘y berish ehtimoli ulardan birining ehtimolini ikkinchisining shartli ehtimoliga ko‘paytmasiga teng.

$$P(AB)=P(A)\,P(B/A) = P(B)\,P(A/B)$$

NATIJA: Bir nechta bog‘liq hodisalarning birgalikda ro‘y berish ehtimoli ulardan birining ehtimolini qolganlarining shartli ehtimollariga ko‘paytirilganligiga teng, shu bilan birga, har bir keyingi hodisaning ehtimoli oldingi hamma hodisalar ro‘y berdi degan farazda hisoblanadi:

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)\ldots.\ P(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1})$$

4-teorema. Ikkita birgalikda bo‘lgan hodisadan kamida bittasining ro‘y berish ehtimoli bu hodisalarning ehtimollari yig‘indisidan ularning birgalikda ro‘y berish ehtimolining ayirmasiga teng:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) – P(AB)$$

Agar A va B hodisalar bog‘liq bo‘lsa , $P(A+B) = P(A) + P(B) – P(B)P(A/B)$ bog‘liq bo‘lmasa $P(A+B)= P(A) + P(B) – P(A)\cdot P(B)$ for-mulalaridan foydalanamiz.

5-teorema. Birgalikda bog‘liq bo‘lmagan $A_1,A_2,\ldots A_n$ hodisalaridan kamida bittasining ro‘y berishidan iborat A hodisaning ehtimoli 1dan $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, … $\overline{A_n}$ qarama-qarshi hodisalar ehtimollari ko‘paytmasining ayir-masiga teng:

$$P(A) = 1 – P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\ldots P(\overline{A_n})$$

51-misol. Sexda bir necha stanok ishlaydi. Smena davomida bitta stanok sozlashni talab etish ehtimoli 0,2 ga teng, ikkita stanokni sozlashni talab etish ehtimoli 0,13 ga teng. Smena davomida ikkitadan ortiq stanokni sozlashni talab etish ehtimoli esa 0,07 ga teng. Smena davomida stanoklarni sozlashni talab etilishini ehtimolini toping.

Yechish: Quyidagi hodisalardan qaraymiz.

A – Smena davomida bitta stanokni sozlash talab etiladi.

B – Smena davomida ikkita stanokni sozlash talab etiladi.

C – Smena davomida ikkitadan ortiq stanokni sozlash talab etiladi.

A, B va C hodisalar o‘zaro birgalikda emas. Bizni quyidagi hodisa qiziqtiradi: *(A+B+C)* – smena davomida sozlash uchun zarur bo‘ladigan stanoklar:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) = 0{,}2+0{,}13+0{,}07=0{,}4$$

52-misol. Yashikda 10 ta qizil va 6 ta ko‘k shar bor. Tavakkaliga 2 ta shar olinadi. Olingan ikkala sharning bir xil rangli bo‘lish ehtimolini toping.

Yechish: A hodisa olingan ikkala shar qizil bo‘lishi, B hodisa esa olingan ikkala sharning ko‘k bo‘lish hodisasi bo‘lsin. Ko‘rinib turibdiki, A va B hodisalar birgalikda bo‘lmagan hodisalar. Demak,

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

A hodisaning ro‘y berishiga C^2_{10} ta natija imkoniyat yaratadi. B hodisaning ro‘y berishiga esa C^2_6 ta natija imkoniyat yaratadi. Umumiy ro‘y berishi mumkin bo‘lgan natijalar soni esa C^2_{16} ga teng.

U holda:

$$P(A+B)=\frac{C_{10}^2+C_6^2}{C_{16}^2}=\frac{\frac{10\cdot 9}{2}+\frac{6\cdot 5}{2}}{\frac{16\cdot 15}{2}}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}.$$

53-misol. Ikki ovchi bo‘riga qarata bittadan o‘q uzishdi. Birinchi ovchining bo‘riga tekkizish ehtimoli 0,7 ga, ikkinchisiniki 0,8 ga teng. Hech bo‘lmaganda bitta o‘qning bo‘riga tegish ehtimolini toping.

Yechish. A hodisa birinchi ovchining bo‘riga o‘qni tekkizishi, B hodisa esa ikkinchi ovchining bo‘riga o‘qni tekkizishi bo‘lsin. Ko‘rinib turibdiki, A va B hodisalar birgalikda bo‘lgan, ammo bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan hodisalar. U holda

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)= P(A)+P(B)- P(A)\cdot P(B)=0{,}7+0{,}8-0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}94$$

54-misol. Tanga va kubik bir vaqtda tashlangan. “Gerb tushishi “ va “3” ochko tushishi hodisalarining birgalikda ro‘y berish ehtimolini toping.

Yechish: A hodisa tanganing “gerb” tushishi, B hodisa esa kubik tashlanganda “3” ochko tushishi bo‘lsin. A va B hodisalar bog‘liq bo‘lmagan hodisalar. U holda:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$$

55-misol. Sexda 7 ta erkak va 3 ta ayol ishchi ishlaydi. Tabel nomerlari bo‘yicha tavakkaliga 3 kishi ajratildi. Barcha ajratib olingan kishilar erkaklar bo‘lish ehtimolini toping.

Yechish: Hodisalarni quyidagicha belgilaylik: A hodisa birinchi ajratilgan erkak kishi, B ikkinchi ajratilgan C uchinchi ajratilgan erkak kishi.

Birinchi ajratilgan kishining erkak bo‘lishi ehtimoli:

$$P(A)=\frac{7}{10}$$

Birinchi ajratilgan kishining erkak kishi bo‘lganligi shartida ikkinchi kishining erkak bo‘lishi ehtimoli, ya’ni B hodisaning shartli ehtimoli:

$$P(B/A)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

Oldin ikki erkak kishi ajratib olinganligi shartida uchinchi ajratilgan kishi erkak bo‘lishi ehtimoli, ya’ni C hodisaning shartli ehtimoli:

$$P(C/AB)=\frac{5}{8}$$

Ajratib olingan kishilarning hammasi erkak ishchilar bo‘lishi ehtimoli:

$$P(ABC)=P(A)\cdot P(B/A)\cdot P(C/AB)=\frac{7}{10}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{8}=\frac{7}{24}$$

56-misol. Ko‘prik yakson bo‘lishi uchun bitta aviatsion bombaning kelib tushishi kifoya. Agar ko‘prikka tushish ehtimollari mos ravishda 0,3; 0,4; 0,6; 0,7 bo‘lgan 4 ta bomba tashlansa, ko‘prikni yakson bo‘lish ehtimolini toping.

Yeshish: Demak, kamida bitta bombaning ko‘prikka tushishi, uni yakson bo‘lishi uchun yetarli (A hodisa). U holda, izlanayotgan ehtimol

$$P(A) = 1 - 0{,}7\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4\cdot 0{,}3\approx 0{,}95$$

57. Yashikda 6 ta yashil va 5 ta qizil tugmalar bor. Tavakkaliga 2 ta tugma olinadi. Olingan ikkala tugmaning ham bir xil rangli bo‘lish ehtimolini toping.

58. Tanga va o‘yin soqqasi bir vaqtda tashlanadi. “Raqam tushish” va “4” ochko tushishi hodisalarining birgalikda ro‘y berish ehtimolini toping.

59. Qutida 3 ta oq va 8 ta qizil shar bor. Qutidan tavakkaliga bitta shar, keyin yana bitta shar olindi. Olingan sharlardan birinchisi oq, ikkinchisi qizil bo‘lish ehtimolini toping.

60. Birinchi yashikda 6 ta oq va 14 ta qizil shar bor. Ikkinchi yashikda esa 4 ta oq va 6 ta qizil shar bor. Agar har bir yashikdan bittadan shar olinsa, hech bo‘lmaganda bitta sharning oq bo‘lish ehtimolini toping.

61. Uchta to‘pdan otishda nishonga tekkizish ehtimoli mos ravishda $P_1=0{,}9$; $P_2=0{,}7$; $P_3=0{,}8$. Nishon yakson qilinishi uchun bitta o‘qning nishonga tegishi kifoya qilsa, uchala to‘pdan biryo‘la otishda nishonning yakson qilinishi ehtimolini toping.

62. Merganni bitta o‘q uzishda nishonga tekkizish ehtimoli P=0,8. Mergan uchta o‘q uzdi. Uchala o‘qning ham nishonga tegish ehtimolini toping.

63. Yashikda 7 ta oq, 4 ta qora va 4 ta ko‘k shar bor. Har bir tajriba qutidan 1 ta shar olishdan iborat. Olingan shar qaytib qo‘yilmaydi. Birinchi sinashda oq shar (A), ikkinchisida qora (B), uchinchisida ko‘k shar chiqish ehtimolini toping.

64. Qutida 5 ta oq va 5 ta qora shar bor. Tavakkaliga 3 ta shar olinadi. Olingan uchala sharning ham bir xil rangli bo‘lish ehtimolini toping.

65. Uchta merganning nishonga tekkizish ehtimoli mos ravishda 0,6; 0,8 va 0,9 ga teng. Uchta mergan baravariga o‘q uzganda nishonga hech bo‘lmaganda bitta o‘qning tegishi ehtimolini toping.

66. Birinchi qutida 3 ta oq va 7 ta qora shar bor. Ikkinchi qutida esa 6 ta oq va 4 ta qora shar bor. Agar har bir qutidan bittadan shar olinsa, hech bo‘lmaganda bitta sharning oq bo‘lish ehtimolini toping.

67-misol. Texnik nazorat bo‘limi buyumlarning yaroqliligini tekshiradi. Buyumning yaroqli bo‘lish ehtimoli 0,9 ga teng. Tekshirilgan ikkita buyumdan faqat bittasi yaroqli bo‘lish ehtimolini toping.

68-misol. Talabaga kerakli formulani uchta spravochnikda bo‘lish ehtimoli mos ravishda 0,6; 0,7; 0,8 ga teng. Formula: a) faqat bitta spravochnikda; b) faqat ikkita spravochnikda; c) formula uchala spravochnikda bo‘lish ehtimolini toping.

69. Talaba programmadagi 25 ta savoldan 20 tasini biladi. Talabaning imtihon oluvchi taklif etgan uchta savolni bilish ehtimolini toping.

70. Yashikda 1dan 10gacha nomerlangan 10 ta bir xil kubik bor. Tavakkaliga bittadan 3 ta kubik olinadi. Birin-ketin 1,2,3 nomerli kubiklar chiqish ehtimolini quyidagi hollarda toping:

a) kubiklar olingach, yashikka qaytarib solinmaydi;
b) olingan kubik yashikka qaytarib solinadi.

71. Biror joy uchun iyul oyida bulutli kunlarning o‘rtacha soni oltiga teng. Birinchi va ikkinchi iyulda havo ochiq bo‘lish ehtimolini toping.

72. Guruhda 10 ta talaba bo‘lib, ularning 7 nafari a’lochilar. 4 ta talaba dekanatga chaqirtirildi. Ularning barchasi a’lochi bo‘lish ehtimolini toping.

73. Buyumlar partiyasidan tovarshunos oliy nav buyumlarni ajratmoqda. Tavakkaliga olingan buyumning oliy nav bo‘lish ehtimoli 0,8 ga teng. Tekshirilgan uchta buyumdan faqat ikkitasi oliy nav bo‘lish ehtimolini toping.

74. Birinchi yashikda 4 ta oq va 8 ta qora shar bor. Ikkinchi yashikda 10 ta oq va 6 ta qora shar bor. Har qaysi yashikdan bittadan shar olinadi. Ikkala sharning ham oq chiqish ehtimolini toping.

75. Sexda 7 ta erkak va 8 ta ayol ishchi ishlaydi. Tabel tartib sonlari bo‘yicha tavakkaliga 3 kishi tanlangan. Tanlanganlarning hammasi ayol kishi bo‘lish ehtimolini toping.

76. Birinchi yashikda 5 ta oq va 10 ta qizil shar bor. Ikkinchi yashikda esa 10 ta oq va 5 ta qizil shar bor. Agar har bir yashikdan bittadan shar olinsa, hech bo‘lmaganda bitta sharning oq bo‘lish ehtimolini toping.

77. Bitta smenada stanokning ishlamay qolishi ehtimoli 0,05 ga teng. Uchta smenada stanokning ishlab turish ehtimolini toping.

78. Tanga birinchi marta “gerb” tomoni bilan tushguncha tashlanadi. Tashlashlar sonining juft son bo‘lish ehtimolini toping.

79. A,B,C hodisalarning juft-juft bog‘liq emasligidan, ularning birgalikda bog‘liq emasligi kelib chiqmasligini ko‘rsatadigan masala tuzing.

80. Otilgan torpedoning kemani cho‘ktirib yuborish ehtimoli 0,5 ga teng. Agar kemani cho‘ktirib yuborish uchun bitta torpedoning mo‘ljalga tegishi yetarli bo‘lsa, 4 ta torpedoning kemani cho‘ktirib yuborish ehtimolini toping.

81. Elektr zanjiriga erkli ishlaydigan 3 ta element ketma–ket ulangan. Birinchi, ikkinchi va uchinchi elementlarning buzilish ehtimollari mos ravishda quyidagiga teng. $P_1=0,1$; $P_2=0,15$; $P_3=0,2$
Zanjirda tok boʻlmasligi ehtimolini toping.

82. Ikki sportchidan har birining mashqni muvaffaqiyatli bajarish ehtimoli 0,5 ga teng. Sportchilar mashqni navbat bilan bajaradilar, bunda har bir sportchi oʻz kuchini ikki marta sinab koʻradi. Mashqni birinchi boʻlib bajargan sportchi mukofot oladi. Sportchilarning mukofotni olishlari ehti-molini toping.

83. Merganning uchta oʻq uzishda kamida bitta oʻqni nishonga tekkizish ehtimoli 0,875 ga teng. Uning bitta oʻq uzishda nishonga tekkizish ehtimolini toping.

84. Toʻrtta oʻq uzishda kamida bitta oʻqni nishonga tegish ehtimoli 0,9984 ga teng. Bitta oʻq uzishda nishonga tegish ehtimolini toping.

85. Ikki mergandan har birining oʻqni nishonga tekkizish ehtimoli 0,3 ga teng. Merganlar navbat bilan oʻq uzadilar, lekin har biri ikkitadan oʻq uzadi. Birinchi boʻlib oʻq tekkizgan mergan mukofot oladi. Merganlarning mukofot olishlari ehtimollarini toping.

86. Qurilma oʻzaro erkli ishlaydigan ikkita elementni oʻz ichiga oladi. Elementlarning buzilish ehtimollari mos ravishda 0,05 ga va 0,08 ga teng. Qurilmaning buzilishi uchun kamida bitta elementning buzilishi yetarli boʻlsa, qurilmaning ishlamay qolish ehtimolini toping.

87. Uchta toʻpdan otishda nishonga tekkizish ehtimolligi mos ravishda $P_1=0,3$; $P_2=05$; $P_3=0,8$. Nishon yakson qilinishi uchun bitta oʻqning tegishi kifoya boʻlsa, uchala toʻpdan biryoʻla otishda nishonning yakson qilinish ehtimolini toping.

88. Kutubxona stellajida tasodifiy tartibda 15 ta darslik terib qoʻyilgan boʻlib, ulardan 5 tasi muqovalidir. Kutubxonachi ayol tavakkaliga 3 ta darslik oladi. Olingan darsliklarning hech boʻlmaganda bittasi muqovali boʻlish ehtimolini toping.

89. Ikkita birgalikda boʻlmagan A_1 va A_2 hodisalarning har birining roʻy berishi ehtimoli mos ravishda 0,3 va 0,8 ga teng. Bu hodisalardan faqat bittasining roʻy berish ehtimolini toping.

90. Biror yashikda 14 ta qizil va 6 ta koʻk tugma bor. Tavakkaliga 2 ta tugma olinadi. Olingan ikkala tugmaning bir xil rangli boʻlish ehtimoli nimaga teng?

3-MAVZU: TO'LA EHTIMOL FORMULASI. BEYES FORMULALARI

Biror A hodisa hodisalarning to‘la guruhini tashkil etadigan $B_1, B_2, \dots B_n$ hodisalarning (ular gipotezalar deb ataladi) biri bilan ro‘y berishi mumkin bo‘lsin. Bu gipotezalarning ehtimollari ma’lum, ya’ni $P(B_1), P(B_2), \dots P(B_n)$ berilgan. Bu gipotezalarning har biri amalga oshganida A hodisaning ro‘y berish shartli ehtimollari ham ma’lum, ya’ni $P(A/B_1), P(A/B_2), \dots P(A/B_n)$ ehtimollar berilgan. U holda A hodisaning ehtimoli “to‘la ehtimol” formulasi deb ataluvchi quyidagi formula bilan aniqlanadi.

$$P(A)=P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)+\dots+P(B_n)P(A/B_n)=\sum_{k=1}^{n}P(B_k)P(A/B_k)$$

Birgalikda bo‘lmagan, hodisalarning to‘la guruhini tashkil etadigan B_1, $B_2, \dots B_n$ hodisalar berilgan va ularning $P(B_1),P(B_2),\dots P(B_n)$ ehtimollari ma’lum bo‘lsin. Tajriba o‘tkaziladi va uning natijasida A hodisa ro‘y beradi deylik, bu hodisaning har bir gipoteza bo‘yicha shartli ehtimoli, ya’ni $P(A/B_1)$, $P(A/B_2),\dots$ $P(A/B_n)$ ma’lum. A hodisa ro‘y berishi munosabati bilan gipotezalarning ehtimollarini qayta baholash uchun, boshqacha aytganda, $P(B_1/A)$, $P(B_2/A)$, $\dots P(B_n/A)$ shartli ehtimolini topish uchun

$$P(B_i/A)=\frac{P(B_i)\cdot P(A/B_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)\cdot P(A/B_k)}\ (i=1,2,\dots n)$$

Bayes formulalaridan foydalaniladi.

91-misol. Birinchi qutida 2 ta oq , 6 ta qora, ikkinchi qutida esa 4 ta oq, 2 ta qora shar bor.

Birinchi qutidan tavakkaliga 2 ta shar olib, ikkinchi qutiga solindi, shundan keyin ikkinchi qutidan tavakkaliga bitta shar olindi.

a) Olingan sharning oq bo‘lish ehtimolini toping.

b) Ikkinchi qutidan olingan shar oq bo‘lib chiqdi. Birinchi qutidan olib ikkinchi qutiga solingan 2 ta shar oq shar bo‘lishi ehtimolini toping.

Yechish:

a) quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

A – ikkinchi qutidan olingan shar oq.

B_1 – birinchi qutidan ikkinchi qutiga 2 ta oq shar solingan.

B_2 – birinchi qutidan ikkinchi qutiga 2 ta turli rangdagi shar solingan.

B_3 – birinchi qutidan ikkinchi qutiga 2 ta qora shar solingan.

B_1, B_2 , B_3 – hodisalar hodisalarning to‘la guruhini tashkil etadi.

U holda, to‘la ehtimol formulasiga ko‘ra:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P(A/B_1)+P(B_2)\cdot P(A/B_2)+P(B_3)\cdot P(A/B_3)$$

Bunda:

$$P(B_1)=\frac{C_2^2}{C_8^2}=\frac{1}{28};\ P(B_2)=\frac{C_2^1C_6^1}{C_8^2}=\frac{12}{28}$$

$$P(B_3)=\frac{C_6^2}{C_8^2}=\frac{15}{28};\ P(A/B_1)=\frac{3}{4}$$

$$P(A/B_2)=\frac{5}{8};\ P(A/B_3)=\frac{1}{2}$$

U holda:

$$P(A)=\frac{1}{28}\cdot\frac{3}{4}+\frac{12}{28}\cdot\frac{5}{8}+\frac{15}{28}\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{16}$$

b) $P(B_1/A)$ ehtimolni Bayes formulasidan foydalanib topamiz.

$$P(B_1/A)=\frac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{28}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{9}{16}}=\frac{1}{21}$$

92-misol. Ikkita avtomat bir xil detallar ishlab chiqaradi, bu detallar keyin umumiy konveyerga o‘tadi. Birinchi avtomatning unumdorligi ikkinchi avtomatning unumdorligidan ikki marta ko‘p. Birinchi avtomat o‘rta hisobda detallarning 60%ini, ikkinchi avtomat esa o‘rta-cha hisobda detallarning 84% ini a’lo sifat bilan ishlab chiqaradi. Kon-veyerda tavakkaliga olingan detal a’lo sifatli bo‘lib chiqdi. Bu detalni birinchi avtomat ishlab chiqargan bo‘lish ehtimolini toping.

Yechish: A – detal a’lo sifatli bo‘lish hodisasi bo‘lsin. Bu yerda ikkita taxmin (gipoteza) qilish mumkin:

B_1 – detalni birinchi avtomat ishlab chiqargan, shu bilan birga:

$$P(B_1)=\frac{2}{3}$$

(Chunki birinchi avtomat ikkinchi avtomatga qaraganda ikki marta ko‘p detal ishlab chiqaradi);

B_2 – detalni ikkinchi avtomat ishlab chiqargan, shu bilan birga:

$$P(B_2)=\frac{1}{3}$$

Agar detalni birinchi avtomat ishlab chiqargan bo‘lsa, detal a’lo sifatli bo‘lishining shartli ehtimoli

$$P(A/B_1)=0{,}6$$

Xuddi shunga o‘xshash:

$$P(A/B_2)=0{,}84$$

Tavakkaliga olingan detalning a’lo sifatli bo‘lish ehtimoli to‘la ehtimol formulasiga ko‘ra.

$$P(A)=P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)\cdot P(A/B_2)=\frac{2}{3}\cdot 0.6+\frac{1}{3}\cdot 0.84=0.68$$

Olingan a’lo sifatli detalni birinchi avtomat ishlab chiqargan bo‘lish ehtimoli Bayes formulasiga ko‘ra

$$P(B_1/A)=\frac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{3}\cdot 0.6}{0.68}=\frac{10}{17}$$

93. Yashikda 1-zavodda tayyorlangan 12 ta detal, 2-zavodda tayyorlangan 20 ta detal va 3-zavodda tayyorlangan 18 ta detal bor. 1-zavodda tayyorlangan detalning a’lo sifatli bo‘lishi ehtimoli 0,9ga teng, 2-zavodda va 3-zavodda mos ravishda 0,6 va 0,9 ga teng. Tavakkaliga olingan detalning a’lo sifatli bo‘lishi ehtimolini toping.

94. Birinchi idishda 10 ta shar bo‘lib, ularning 8 tasi oq, ikkinchi idishda 20 ta shar bo‘lib, ularning 4 tasi oq. Har bir idishdan tavakkaliga bittadan shar olinib, keyin bu ikki shardan yana bitta shar tavakkaliga olindi. Oq shar olinganlik ehtimolini toping.

95. Uchta idishning har birida 6 tadan qora shar va 4 tadan oq shar bor. Birinchi idishdan tavakkaliga bitta shar olinib, uchinchi idishga so-lindi. Uchinchi idishdan tavakkaliga olingan sharning oq bo‘lish ehtimolini toping.

96. Elektron raqamli mashinaning ishlash vaqtida arifmetik quril-mada, operativ xotira qurilmasida, qolgan qurilmalarda buzilish yuz berish ehtimollari 3:2:5 kabi nisbatda. Arifmetik qurilmada, operativ xotira qurilmasida va boshqa qurilmalardagi buzilishning topilish ehtimoli mos ravishda 0,8; 0,9; 0,9 ga teng. Mashinada yuz bergan buzilishning topilishi ehtimolini toping.

97. Qutida 10 ta miltiq bo‘lib, ularning 4 tasi optik nishon bi-lan ta’minlangan. Merganning optik nishonli miltiqdan o‘q uzganda nishonga tekkizish ehtimoli 0,95 ga teng. Optik nishon o‘rnatilmagan miltiq uchun bu ehtimol 0,8 ga teng. Mergan tavakkaliga olingan miltiqdan nishonga o‘q tekkizdi. Qaysi birining ehtimoli katta? Mergan optik nishonli miltiqdan o‘q uzganiningmi yoki optik nishon o‘rnatil-magan miltiqdan o‘q uzganiningmi?

98. Benzokolonka joylashgan shossedan o‘tadigan yuk mashinalari sonining o‘sha shossedan o‘tadigan yengil mashinalar soniga nisbati 3:2 kabi. Yuk mashinaning benzin olish ehtimoli 0,1 ga teng, yengil mashina uchun bu ehtimol 0,2 teng. Benzokolonka yoniga benzin olish uchun mashina kelib to‘xtadi. Uning yuk mashina bo‘lish ehtimolini toping.

99. Ixtisoslashtirilgan kasalxonaga bemorlarning o‘rta hisobda 30% K kasallik bilan, 50% i L kasallik bilan 20% i M kasallik bilan qabul qilindi. K kasallikni to‘liq davolash ehtimoli 0,7 ga teng, L va M kasalliklar uchun bu ehtimol mos ravishda 0,8 ga va 0,9 ga teng. Kasal-likka qabul qilingan bemor butunlay sog‘ayib ketdi. Bu bemor K kasallik bilan og‘rigan bo‘lish ehtimolini toping.

100. Sharlar solingan 2 ta bir xil yashik bor. Birinchi yashikda 2 ta oq va 1 ta qora shar, ikkinchi yashikda esa 1 ta oq va 4 ta qora shar bor. Tavakkaliga bitta yashik tanlanadi va undan bitta shar olinadi. Olingan sharning oq bo‘lish ehtimolini toping.

101. Qutidagi 20 ta sharni (12 ta oq va 8 ta qora) aralashtirish jarayonida bitta shar yo‘qotib qo‘yildi. Qolgan 19 ta shardan tavakkaliga bitta shar olindi. Olingan sharning oq bo‘lish ehtimolini toping.

102. Sharlar solingan 2 ta bir xil yashik bor. Birinchi yashikda 3 ta oq va 2 ta qora, ikkinchi yashikda esa 4 ta oq va 4 ta qora shar bor. Birinchi yashikdan ikkinchi yashikka 2 ta shar tashlandi. Shundan keyin ikkinchi yashikdan bitta shar olindi. Olingan sharning oq bo‘lish ehtimolini toping.

103. Ikki mergan bir-biriga bog‘liqmas ravishda, nishonga qarata bittadan o‘q uzishdi. Birinchi merganning nishonga o‘q tekkizish ehti-moli 0,8 ga teng, ikkinchi merganniki esa 0,4 ga teng. O‘qlar otilgandan keyin bitta o‘qning nishonga tekkani ma’lum bo‘ldi. O‘qni birinchi mergan nishonga tekkizgan bo‘lishi ehtimolini toping.

104. Uchta zavod soat ishlab chiqaradi va magazinga jo‘natadi. Birinchi zavod butun mahsulotning 40% ini, ikkinchi zavod 45% ini, uchinchi zavod esa 15% ini tayyorlaydi. Birinchi zavod chiqargan soat-larning 80% i, ikkinchi zavod chiqargan soatlarning 70% i, uchinchi zavod chiqargan soatlarning 90% i ilgarilab ketadi. Sotib olingan soat-ning ilgarilab ketishi ehtimolini toping.

105. Samolyotga qarata uchta o‘q otildi. Birinchi o‘qning nishonga tegish ehtimoli 0,5 ga, ikkinchisiniki 0,6 ga, uchinchisiniki esa 0,8 ga teng. Bitta o‘q tekkanda samolyotning urib tushirilish ehtimoli 0,3 ga, ikkita o‘q tekkanda 0,6 ga teng. Uchta o‘q tekkanda, samolyot urib tushiriladi. Samolyotning urib tushirilish ehtimolini toping.

106. Sexda tayyorlanadigan detallar 2 ta nazoratchi tomonidan tek-shiriladi. Detallarning nazorat uchun birinchi nazoratchiga tushish ehtimoli 0,6 ga teng, ikkinchi nazoratchiga tushishi 0,4 ga teng. Yaroqli detalning birinchi nazoratchi tomonidan yaroqsiz deb topilish ehtimoli 0,06 ga, ikkinchi nazoratchi uchun esa 0,02 ga teng. Yaroqsiz deb topilgan detallar tekshirilganda ular ichidan yaroqli detal chiqib qoldi. Bu detalni birinchi nazoratchi tekshirganligi ehtimolini toping.

107. Yig‘uv sexiga 1-sexdan 600 ta, 2-sexdan 500 ta, 3-sexdan 500 ta detal kelib tushadi. 1- sexning yaroqsiz detallari 5% ni, 2-sexniki 8% ni, 3-sexniki 3% ni tashkil etadi. Tavakkaliga olingan detalning yaroqsiz bo‘lishi ehtimolini toping.

108. Yig‘ish uchun detallar ikkita stanokda tayyorlanib, ularning birinchisi ikkinchisiga nisbatan 3 marta ko‘p detal ishlab chiqaradi. Bun-da birinchi stanok ishlab chiqaradigan detallarning yaroqsiz bo‘lish ehtimoli 0,025, ikkinchi stanok uchun 0,015 ga teng. Tavakkaliga yig‘ish uchun olingan bitta detal yaroqli bo‘lib chiqdi. Bu detalning ikkinchi stanokda tayyorlangan bo‘lish ehtimolini toping.

109. Elektr lampochkalari partiyasining 10% i 1-zavodda, 40% i 2-zavodda, 50% i 3-zavodda tayyorlangan. Yaroqsiz lampochka ishlab chiqarish ehtimoli 1-zavod uchun 0,02 , 2-zavod uchun 0,008, 3-zavod uchun 0,006. Tavakkaliga olingan lampochkaning yaroqsiz bo‘lish ehtimolini toping.

110. Plastmassa buyumlari uchta avtomatda tayyorlanadi. 1-avto-mat mahsulotning 30% i, 2-avtomat mahsulotning 40% i, 3-avtomat esa 30% ini ishlab chiqaradi. Bunda I avtomatning 0,13 , II 0,25 , III 0,025 qismi yaroqsiz buyumlardir. Tanlangan yaroqli buyum III avtomatda tayyorlanganligining ehtimolini toping.

Erkli sinovlar ketma-ketligi. Bernulli formulasi.

Agar bir nechta sinov o‘tkazilayotgan bo‘lib, har bir sinashda A hodisaning ro‘y berish ehtimoli boshqa sinov natijalariga bog‘liq bo‘lmasa, u holda, bunday sinovlar A hodisaga nisbatan erkli sinovlar deyiladi.

Faraz qilaylik, n ta erkli takroriy sinovning har birida A hodisaning ro‘y berish ehtimoli p, ro‘y bermaslik ehtimoli q=1–p bo‘lsin. Shu n ta sinovdan A hodisaning (qaysi tartibda bo‘lishidan qat’iy nazar) rosa k marta ro‘y berish ehtimoli $P_n(k)$ ushbu Bernulli formulasi bilan hisoblanadi.

$$P_n(k) = C_n^k P^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} P^k q^{n-k}$$

A hodisaning o‘tkazilayotgan n ta erkli takroriy sinov davomida kamida k marta ro‘y berish ehtimoli

$$P_n(k)+P_n(k+1)+\ldots+P_n(n)$$

ko‘pi bilan k marta ro‘y berishi ehtimoli esa
$P_n(0)+ P_n(1)+\ldots+ P_n(k)$
formulalar bilan hisoblanadi.

Agar n ta erkli sinovda hodisaning k_0 marta ro‘y berish ehtimoli sinovning boshqa mumkin bo‘lgan natijalari ehtimollaridan kichik bo‘lmasa, u holda k_0 soni eng ehtimolli son deb ataladi va u quyidagi qo‘sh tengsizlik bilan aniqlanadi:

$$np - q \le k_0 \le np + p.$$

Eng ehtimolli son k_0 ushbu shartlarni qanoatlantiradi:

a) agar np–q kasr son bo‘lsa, u holda bitta eng ehtimolli k_0 son mavjud bo‘ladi;
b) agar np–q butun son bo‘lsa, u holda ikkita k_0 va k_0 +1 eng ehtimolli sonlar mavjud bo‘ladi;
c) agar np butun son bo‘lsa, u holda eng ehtimolli son k_0 =np bo‘ladi.

111-misol. Har bir otilgan o‘qning nishonga tegish ehtimoli p=$\frac{2}{3}$ Otilgan 10 ta o‘qdan uchtasining nishonga tegish ehtimolini toping.

Yechish: n=10; k=3; p=$\frac{2}{3}$; q=$\frac{1}{3}$. U holda Bernulli formulasiga asosan:

$$P_{10}(3) = C_{10}^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^7$$

112-misol. Tanga 6 marta tashlandi. Gerbli tomon tushishlarning eng ehtimolli sonini toping.

Yechish: Berilgan masalaning shartlariga ko‘ra n=6, p=q=1/2. U holda gerbli tomon tushishining eng ehtimolli soni k_0 ni

$$k_0 = np = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

yuqoridagi formuladan foydalanib topamiz.
Demak, eng ehtimolli son k_0=3 bo‘ladi.

113. Savdo do‘koniga kirgan 8 ta xaridordan har birining xarid qilish ehtimoli 0,7 ga teng. Xaridorlardan beshtasining xarid qilish ehtimolini toping.

114. Biror mergan uchun bitta o‘q uzishda nishonga tegish ehtimoli 0,8 ga teng va o‘q uzish tartibiga (nomeriga) bog‘liq emas. 5 marta o‘q uzilganda nishonga rosa 2 marta tegish ehtimolini toping.

115. Tanga 10 marta tashlanganda gerbli tomon:

a) 4 tadan 6 martagacha tushish ehtimolini toping.

b) Hech bo‘lmaganda bir marta tushish ehtimolini toping.

116. Birorta qurilmaning 15 ta elementidan har biri sinab ko‘riladi. Elementlarning sinovga bardosh berish ehtimolli sonini toping.

117. Qaysi hodisaning ehtimoli katta?

a) Teng kuchli raqib bilan o‘ynab, to‘rtta partiyadan uchtasini yutib olishmi yoki sakkizta partiyadan beshtasini yutib olishmi?

b) To‘rtta partiyaning kamida uchtasini yutib olishmi yoki sakkizta partiyaning kamida beshtasini yutib olishmi?

118. Tanga tashlanadi. Tanga 11 marta tashlanganda gerbli tomon 3 marta tushish ehtimolini toping.

119. Qaysi birining ehtimoli kattaroq: tanga 4 marta tashlanganda "gerb"ning 2 marta tushishimi yoki 8 marta tashlanganda "gerb"ning 4 marta tushishimi?

120. Ishlab chiqarilgan buyumlarning 5% i yaroqsiz, tavakkaliga tanlangan 5 ta buyumdan ikkitasini yaroqsiz bo‘lish ehtimoli nimaga teng?

121. Tanga 5 marta tashlanadi. Tanganing 1 marta "gerb" tomoni bilan tushish ehtimolini toping.

122. Merganning nishonga urish ehtimoli 0,3 ga teng. Merganning 6 ta o‘qdan to‘rttasini nishonga urish ehtimolini toping.

123. Merganning nishonga urish ehtimoli 0,25 ga teng. Mergan nishonga qarata 8 ta o‘q uzadi. Quyidagi ehtimollarni toping:

a) Kamida 7 ta o‘q nishonga tegadi.

b) Kamida 1 ta o‘q nishonga tegadi.

124. Firma mahsulotlarining 5% i yaroqsiz. 5 ta mahsulot tanlanganda:

a) 1 ta ham yaroqsiz mahsulot yo‘q bo‘lishi;

b) 2 ta yaroqsiz mahsulot bo‘lish ehtimoli nimaga teng.

125. Tanga 20 marta tashlanadi. "Gerb" tomon bilan tushishlar sonining eng ehtimolli sonini toping.

126. O‘yin soqqasi 16 marta tashlanadi. 3 ga karrali ochkolarning eng ehtimolli sonini toping.

127. O‘qning nishonga tegish ehtimoli p=0,35. Nishonga qarata 10 ta o‘q uziladi. Nishonga tegishlarning eng ehtimolli sonini toping.

128. Oilada 10 ta farzand bor. O‘g‘il bola va qiz bola tug‘lish ehtimoli $P=\frac{1}{2}$ bo‘lsa, ularning 5 tasi o‘gil bola va 5 tasi qiz bola bo‘lish ehtimolini toping.

129. Tanga 7 marta tashlanadi. Tanganing 2 marta "raqam" tomoni bilan tushish ehtimolini toping.

130. O‘qning nishonga tegish ehtimoli p=0,7. Nishonga otilgan 5 ta o‘qdan 2 tasining nishonga tegish ehtimolini toping.

Muavr-Laplasning lokal va integral teoremalari. Puasson formulasi

Bernulli formulasini n ning katta qiymatlarida qo‘llash qiyin, chunki formula katta sonlar ustida amallar bajarishni talab qiladi. Bizni qiziqtirayotgan ehtimolni Bernulli formulasini qo‘llamasdan ham hisob-lanishi mumkin ekan.

Teorema. Agar har bir sinashda A hodisaning ro‘y berish ehtimoli P o‘zgarmas bo‘lib, nol va birdan farqli bo‘lsa, u holda n ta sinashda A hodisaning rosa k marta ro‘y berish ehtimoli (n qancha katta bo‘lsa, shuncha aniq)

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

ga teng. Bu yerda:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

φ(x) funksiya juft bo‘lib, funksiyaning x argumentining musbat qiymatlariga mos qiymatlaridan tuzilgan jadvallar ehtimollar nazariyasiga oid ko‘pgina adabiyotlarda keltirilgan.

Agar n ta sinashda hodisaning kamida k_1 marta va ko‘pi bilan k_2 marta ro‘y berish ehtimoli $P_n(k_1;k_2)$ ni topish talab qilinsa, sinashlar soni katta bo‘lganda, Muavr-Laplasning integral teoremasi qo‘llaniladi.

Teorema. Har birida hodisaning ro‘y berish ehtimoli P(0<P<1) ga teng bo‘lgan n ta sinovda hodisaning kamida k_1 marta va ko‘pi bilan k_2 marta ro‘y berish ehtimoli

$$P_n(k_1;k_2) \approx \phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \phi\left(\frac{k_1-np}{npq}\right)$$

ga teng. Bu yerda:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

ko‘rinishda bo‘lib, u Laplas funksiyasi deb ataladi. Bu funksiya toq funksiya bo‘lib, uning qiymatlari jadvallashtirilgan va x≥5 da ϕ(x)=0,5 deb olinadi.

Eslatma: Laplasning taqribiy formulalaridan npq≥9 bo‘lgan hollarda foydalangan ma’qul. Agar sinovlar soni katta bo‘lib, har bir sinovda hodisaning ro‘y berish ehtimoli p juda kichik bo‘lsa, u holda:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

formuladan foydalaniladi, bu yerda k hodisaning n ta erkli sinovda ro‘y berish soni, λ=np (hodisaning n ta erkli sinovda ro‘y berishlari o‘rtacha soni)

131. Bitta o‘q uzilganda nishonga tegish ehtimoli 0,8 ga teng. 100 ta o‘q uzilganda rosa 75 ta o‘qning nishonga tegish ehtimolini toping.
Yechish: n=100; k=75; p=0,8; q=0,2
U holda,

$$\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{75-100*0.8}{\sqrt{100*0.8*0.2}}=-1.25$$

jadvaldan

$$\varphi(-1,25)=0,1826$$

Demak,

$$P_{100}(75)=\frac{0.1826}{4}=0.04565$$

132-misol. Agar biror hodisaning ro‘y berish ehtimoli 0,4 ga teng bo‘lsa, bu hodisaning 100 ta sinovdan

a) rosa 50 marta ro‘y berish ehtimolini;

b) kami bilan 30 marta, ko‘pi bilan 45 marta ro‘y berish ehtimolini toping.

Yechish: a) shartga ko‘ra n=100; p=0,4; q=0,6. Sinovlar soni n katta bo‘lganligi uchun, masalani lokal teoremaga ko‘ra yechamiz:

$$\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{50-100*0.4}{\sqrt{100*0.4*0.6}}=\frac{10}{\sqrt{24}}\approx 2.04$$

$\varphi(\underline{x})$ -funksiyaning qiymatlar jadvalidan

$$\varphi(2.04)=0,0498$$

ekanligini topamiz.

Topilganlarni formulaga qo‘yib, izlanayotgan ehtimolni topamiz:

$$\mathrm{P}_{100}(50)\approx\frac{1}{\sqrt{100\cdot 0.4\cdot 0.6}}\varphi(2.04)=\frac{0.0498}{\sqrt{24}}=0.0102$$

b) Laplasning integral teoremasini qo‘llaymiz. n=100; k_1=30; k_2=45; p=0,4 va q=0,6 ekanligiga asosan:

$$\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{30-100\cdot 0.4}{\sqrt{100\cdot 0.4\cdot 0.6}}=\frac{-10}{\sqrt{24}}\approx -2.04$$

$$\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{45-100\cdot 0.4}{\sqrt{100\cdot 0.4\cdot 0.6}}=\frac{5}{\sqrt{24}}\approx 1.02$$

$\phi(x)$ ning qiymatlar jadvalidan

$$\phi(-2,04)=-\phi(2,04)=-0,4793$$

$$\phi(1,02)=0,3461$$

Topilganlarni formulaga qo‘yib, talab qilingan ehtimollikni topamiz.

$$\mathrm{P}_{100}(30;45)\approx\phi(1,02)-\phi(-2,04)=\phi(1,02)+\phi(2,04)=0,3461+0,4793=0,8254$$

133-misol. A hodisaning 900 ta bog‘liqmas sinovning har birida ro‘y berish ehtimoli p=0,8 ga teng. A hodisa :

a) 750 marta ;

b) 710 dan 740 martagacha ro‘y berish ehtimolini toping.

Yechish: a) n=900; k=750; p=0,8; q=0,2
U holda:

$$\frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{750-900\cdot 0.8}{\sqrt{900\cdot 0.8\cdot 0.2}} = 2.5$$

jadvaldan

$$\varphi(2.5)\approx 0.0175$$

Demak, $P_{900}(750) \approx \frac{1}{12} 0,0175 \approx 0,00146$

b) $\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}} = \frac{710-720}{12} \approx -0.83$, $\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}} = \frac{740-720}{12} \approx 1.67$

jadvaldan

ϕ(-0,83)=- ϕ(0,83) $\approx$-0,2967;

ϕ(1,67) $\approx$0,4525

Demak,

$$P_{900}(710;740) \approx 0,4525+0,2967=0,7492$$

134-misol. Telefon stansiyasi 400 abonentga xizmat ko‘rsatadi. Agar har bir abonent uchun uning bir soat ichida stansiyaga qo‘ng‘iroq qilish ehtimoli 0,01 ga teng bo‘lsa, quyidagi hodisalarning ehtimolini toping:

a) bir soat davomida 5 abonent stansiyaga qo‘ng‘iroq qiladi;

b) bir soat davomida 4 tadan ko‘p bo‘lmagan abonent qo‘ng‘iroq qiladi;

c) bir soat davomida kamida 3 abonent stansiyaga qo‘ng‘iroq qiladi.

Yechish: p=0,01 juda kichik, n= 400 esa katta bo‘lgani uchun $\lambda = 400\cdot 0.01 = 4$ da Puassonning taqribiy formulasidan foydalanamiz:

$$a)\ P_{400}(5) \approx \frac{4^5}{5} e^{-4} \approx 0.156293.$$

$$b) P_{400}(0\le k\le 4) = P_{400}(0)+P_{400}(1)+P_{400}(2)+P_{400}(3)+P_{400}(4) =$$
$$0.018316+0.073263+0.146525+0.195367+0.195367 = 0.628838$$

c) $P_{400}(3\le k\le 400) = 1-P_{400}(0\le k\le 2) = 1-0.018316-0.0732263-0.146525 = 0.761896$

135. Korxonada ishlab chiqarilgan buyumning 20% i yaroqsizdir. 400 ta buyum ichidan yaroqsizlari sonining 50 bilan 100 orasida bo‘lish ehtimolini toping.

136. Maktabning birinchi sinfiga 260 ta bola qabul qilindi. Agar o‘g‘il yoki qiz tug‘ilish ehtimollari bir-biriga teng bo‘lsa, qabul qilinganlarning rosa 100 tasi qiz bola bo‘lish ehtimolini toping.

137. Avtomat qurolidan otilgan har bir o‘qning nishonga tegish ehtimoli 0,7 ga teng. Otilgan 60 ta o‘qdan nishonga tekkanlari soni kamida 30 ta va ko‘pi bilan 50 ta bo‘lish ehtimolini toping.

138. Kassirning vedomostda ko‘rsatilgan pulni birinchi sanashda adashish ehtimoli 0,04 ga teng. Uning 25 ta vedomostdagi pullarni sanaganda ko‘pi bilan ikkita vedomostda adashish ehtimolini toping.

139. O‘yin soqqasi 800 marta tashlanganda uchga karrali ochko 267 marta tushish ehtimolini toping.

140. Zavodomborga5000tasifatlibuyumlaryubordi. Har bir buyumningyo‘ldashikastlanishehtimoli0,0002 ga teng. 5000ta buyum ichidan yo‘lda:

a) rosa 3 tasi shikastlanishi ehtimolini;

b) 3 tadan ko‘p bo‘lmagani shikastlanish ehtimolini;

v) 3 tadan ko‘pining shikastlanish ehtimolini toping.

141. O‘yin soqqasi 10 marta tashlanganda uchga karrali ochkolar kamida 2 marta, ko‘pi bilan besh marta tushish ehtimolini toping.

142. Bitta o‘q uzilganda nishonga tegish ehtimoli 0,8 ga teng. 100 marta o‘q uzilganda nishonga rosa 75 marta tegish ehtimolini toping.

143. **t** vaqt ichida bitta kondensatorning ishdan chiqish ehtimoli 0,2 teng. **t** vaqt ichida 100 ta bir-biriga bog‘liqsiz ishlovchi kondensator-dan:

a) kamida 20 tasining ishdan chiqishi;

b)14 tadan 28 tagachasining ishdan chiqishi ehtimolini toping.

144. Do‘kon 1000 shisha ma’danli suv oldi. Tashib keltirishda 1 ta shishaning sinib qolish ehtimoli 0,003 ga teng. Do‘konga keltirilgan shisha idishlarning:

a)rosa 2 tasi;b)2 tadan kami;c)2 tadan ko‘pi;g) hech bo‘lmaganda bittasi singan bo‘lishi ehtimolini toping.

145. Avtomat telefon stansiyasi 1000 ta telefon abonentiga xizmat ko‘rsatadi. 5 minut davomida ATSga abonentdan chaqiriq kelish ehtimoli 0,005 ga teng.

a) 5minut davomidaATSgahechbo‘lmagandabittachaqiriq kelish ehtimoli qanday?

b) 5minutdavomidaATSga4tadanko‘pchaqiriqkelish ehtimoli qanday?

146. Yangi tug‘ilgan 70 ta chaqaloqni kamida 40 va ko‘pi bilan 65 nafari o‘g‘il bola bo‘lish ehtimolini toping.

147. O‘yin soqqasi 50 marta tashlanganda «oltilik» kamida 10, ko‘pi bilan 25 marta tushishi ehtimolini toping.

148. Partiyada 30% yaroqsiz detallar bor. 50 ta detalning ichida 10 tadan ko‘pi yaroqsiz bo‘lib chiqishi ehtimolini toping.

149. P(A)=0,7 bo‘lsin. A hodisa 50 ta sinovdan 10 dan 25 martagacha ro‘y berish ehtimolini toping.

150. O‘yin soqqasi 60 marta tashlanganda «uchlik» 15 dan kam marta tushish ehtimolini toping.

151. Yangi tug‘ilgan 50 ta chaqaloq orasida o‘g‘il bolalar kami bilan 25 va ko‘pi bilan 35 tani tashkil etish ehtimolini toping.

152. Darslik 100000 nusxada chop etilgan. Darslikning noto‘g‘ri muqovalangan bo‘lishi ehtimoli 0,0001ga teng. Hamma kitoblar orasidagi yaroqsizlari soni 100 tadan 1000 tagacha bo‘lishi ehtimolini toping.

153. Aloqa kanallari orqali 1000 ta belgi yuboriladi. Bitta belgini buzilishi ehtimoli 0,005ga teng, rosa 50 ta belgini buzilish ehtimolini toping.

154. Tanga 80 marta tashlan ganda rosa 50 marta «gerb» tushish ehtimolini toping.

155. O‘yin soqqasini 90marta tashlashda3 gakarralisonning kamida 100, ko‘pi bilan 170 marta chiqish ehtimolini toping.

156. P(A)=0,7 bo‘lsin. A hodisaning 2100 ta sinovda 1000 marta ro‘y berish ehtimolini toping.

157. O‘yin soqqasi 70 marta tashlanganda toq ochkolar 50 dan 65 martagacha tushish ehtimolini toping.

158. P(A)=0,8 ekanligi ma’lum, A hodisaning 100 ta sinovda kamida 75 marta tushish ehtimolini toping.

159. Tanga 45 marta tashlanganda «gerb» 15 marta tushish ehtimolini toping.

160. Yangi tug‘ilgan 200 ta chaqaloqning kamida 90 tasi o‘g‘il bolalar bo‘lish ehtimolini toping

161. O‘yin soqqasi 960 marta tashlanganda 3 ga karrali sonning 600 marta chiqish ehtimolini toping.

162. Bitta o‘q uzishda nishonga tegish ehtimoli 0,8 ga teng, 100 ta o‘q uzganda rosa 75 marta nishonga tegish ehtimolini toping.

163. O‘yin soqqasi 100 marta tashlanganda toq ochkolar rosa 70 marta tushish ehtimolini toping.

164. Agar P(A)=0,8 bo‘lsa, A hodisaning 100 ta sinovda rosa 80 marta ro‘y berish ehtimolini toping.

165. Korxonada ishlab chiqarilgan buyumlarning 20 % i yaroqsiz. 400 ta buyum ichida yaroqsizlari sonining 40 bilan 90 orasida bo‘lish ehtimolini toping.

166. Detalning yaroqli bo‘lish ehtimoli 0,97 ga teng. Olingan 200 ta detal orasidan rosa 100 tasining yaroqli bo‘lish ehtimolini toping.

167. Avtomat qurolidan otilgan har bir o‘qning nishonga tegish ehtimoli 0,7 ga teng. Otilgan 60 ta o‘qdan nishonga tekkanlari soni kamida 20 ta va ko‘pi bilan 40 ta bo‘lish ehtimolini toping.

168. P(A)=0,9. A hodisaning 100 ta sinovda rosa 60 marta ro‘y berish ehtimolini toping.

169. Texnologik jarayonga ko‘ra kalava ipining 1 soat davomida uzilishi ehtimoli 0,2 teng. Yigiruvchi ayol 100 ta kalavaga xizmat qiladi. Uning bir soat davomida ko‘pi bilan 30 ta ipni ulash ehtimolini toping.

170. P(A)= 0,8 bo‘lsin. A hodisaning 200 ta sinovda rosa 125 marta ro‘y berish ehtimolini toping.

4-MAVZU: TASODIFIY MIQDORLAR. DISKRET TASODIFIY MIQDORLARNING TAQSIMOT QONUNI

Tasodifiy miqdor tushunchasi ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biridir. Masalan, o‘yin soqqasini tashlaganda tushishi mumkin bo‘lgan ochkolar soni, ishga kech qoluvchi xizmatchilar soni va hokazolar tasodifiy miqdorga misol bo‘la oladi.

1-ta’rif. Tasodifiy miqdor deb avvaldan noma’lum bo‘lgan va oldindan inobatga olib bo‘lmaydigan tasodifiy sabablarga bog‘liq bo‘lgan hamda sinash natijasida bitta mumkin bo‘lgan qiymatni qabul qiluvchi miqdorga aytiladi.

Odatda, tasodifiy miqdorlar lotin alifbosining katta harflari *X, Y, Z* ... va h.k. uning mumkin bo‘lgan qiymatlari kichik x,y,z... va h.k. harflar bilan belgilanadi.

Tasodifiy miqdorlar diskret yoki uzluksiz bo‘lishi mumkin.

2-ta’rif. Diskret tasodifiy miqdor deb ayrim, ajralgan qiymatlarni ma’lum ehtimollar bilan qabul qiluvchi miqdorga aytiladi.

Diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari soni chekli yoki cheksiz bo‘lishi mumkin.

3-ta’rif. Uzluksiz tasodifiy miqdor deb chekli yoki cheksiz oraliqdagi barcha qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo‘lgan miqdorlarga aytiladi.

Uzluksiz tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari soni cheksizdir.

4-ta’rif. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni deb mumin bo‘lgan qiymatlar bilan ularning ehtimollari orasidagi moslikka aytiladi.

Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagi usullar bilan berilishi mumkin:

a) Birinchi satri mumkin bo‘lgan X_k qiymatlardan, ikkinchi satri P_k ehtimollardan iborat jadval yordamida, yani:

$$X : x_1 \quad x_2 \ldots x_n$$
$$P : p_1 \quad p_2 \ldots p_n$$

bu yerda $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \sum_{k=1}^{n} p_k = 1$

b) Grafik usulda - buning uchun to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasida (x_k p_k) nuqtalar yasaladi, so‘ngra ularni to‘g‘ri chiziq kesmalari bilan tutashtirib, taqsimot ko‘pburchagi deb ataluvchi figura hosil qilinadi.

c) Analitik usulda (formula ko‘rinishida).

Diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlariga mos ehtimollar

$$P_n(k) = C_n^k P^k q^{n-k}$$

Bernulli formulasi bilan aniqlanadigan bo‘lsa, tasodifiy miqdor binomial taqsimot qonuniga bo‘ysunadin deyiladi.

Agar diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlariga mos ehtimollar:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \lambda = np$$

formula bilan aniqlanadigan bo‘lsa, bunday tasodifiy miqdor «Puasson taqsimot qonuniga bo‘ysunadi» deyiladi.

Agar diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlariga mos ehtimollar:

$P_k = q^{k-1}p,$ k=1,2, ...

formula bilan aniqlanadigan bo‘lsa, bunday diskret tasodifiy miqdor “Geometrik taqsimot qonuniga bo‘ysunadi” deyiladi.

171- misol. Talabaning imtihon biletidagi savollarning har biriga javob berish ehtimoli 0,7 ga teng. Imtihon biletidagi 4 ta savolga bergan javoblari sonining taqsimot qonunini tuzing.

Yechish: X tasodifiy miqdor orqali talabaning javoblari sonini belgilasak, uning qabul qiladigan qiymatlari $x_1=0$; $x_2=1$; $x_3=2$; $x_4=3$; $x_5=4$. Ko‘rinib turibdiki, n=4; p=0,7; q=0,3. X ning yuqoridagi qiymatlarni qabul qilish ehtimollari Bernulli formulasi orqali topiladi.

$$P_1 = P_4(0) = C_4^0(0.7)^0(0.3)^4 = 0{,}0081$$

$$P_2 = P_4(1) = C_4^1(0.7)^1(0.3)^3 = 0{,}0756$$

$$P_3 = P_4(2) = C_4^2(0.7)^2(0.3)^2 = 0{,}2646$$

$$P_4 = P_4(3) = C_4^3(0.7)^3(0.3)^1 = 0{,}4116$$

$$P_5 = P_4(4) = C_4^4(0.7)^4(0.3)^0 = 0{,}2401$$

U holda X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha bo‘ladi:

X	0	1	2	3	4
P	0,0081	0,0756	0,2646	0,4116	0,2401

Tekshirish: 0,0081 +0,0756 + 0,2646 +0,4116+0,2401 = 1

172-misol. Qurilma bir-biridan erkli ishlaydigan uchta elementdan iborat. Har bir elementning bitta tajribada ishdan chiqish ehtimoli 0,1ga teng. Bitta tajribada ishdan chiqqan elementlar sonining taqsimot qonunini tuzing.

Yechish: X diskret tasodifiy miqdor orqali bitta tajribada ishdan chiqqan elementlar sonini belgilasak, u ushbu qiymatlarga ega:

$X_1=0$; $X_2=1$; $X_3=2$; $X_4=3$.

Bundan tashqari, n=3; p=0,1; q=0,9 ekanligini hisobga olsak,

$$P_1 = P_3(0) = C_3^0(0.1)^0(0.9)^3 = 0.729$$

$$P_2 = P_3(1) = C_3^1(0.1)^1(0.9)^2 = 0.243$$

$$P_3 = P_3(2) = C_3^2(0.1)^2(0.9)^1 = 0.027$$

$$P_4 = P_3(3) = C_3^3 (0,1)^3 (0,9)^0 = 0,001$$

U holda, taqsimot qonuni quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

X	0	1	2	3
P	0,729	0,243	0,027	0,001

173-misol. Nishongaqarata 4 tao‘quziladi, bundaharqaysio‘quzishdanishongategishehtimolip=0,8 gateng. Quyidagilarni toping:

a) Nishonga tegishlar soniga teng bo‘lgan X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini;

b) $1 \leq X \leq 3$ va $X>3$ hodisalarning ehtimolini;

v) Taqsimot ko‘pburchagini chizing.

Yechish: a) X tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari: 0, 1, 2, 3, 4. Ehtimollarni Bernulli formulasi bo‘yicha hisoblaymiz:

$$P_1 = P(X=0) = C_4^0\, 0,8^0 \bullet 0,2^4 = 0,0016$$

$$P_2 = P(X=1) = C_4^1\, 0,8^1 \bullet 0,2^3 = 0,0256$$

$$P_3 = P(X=2) = C_4^2\, 0,8^2 \bullet 0,2^2 = 0,1536$$

$$P_4 = P(X=3) = C_4^3\, 0,8^3 \bullet 0,2^1 = 0,4096$$

$$P_5 = P(X=4) = C_4^4\, 0,8^4 \bullet 0,2^0 = 0,4096$$

U holda, X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni:

X	0	1	2	3	4
P	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

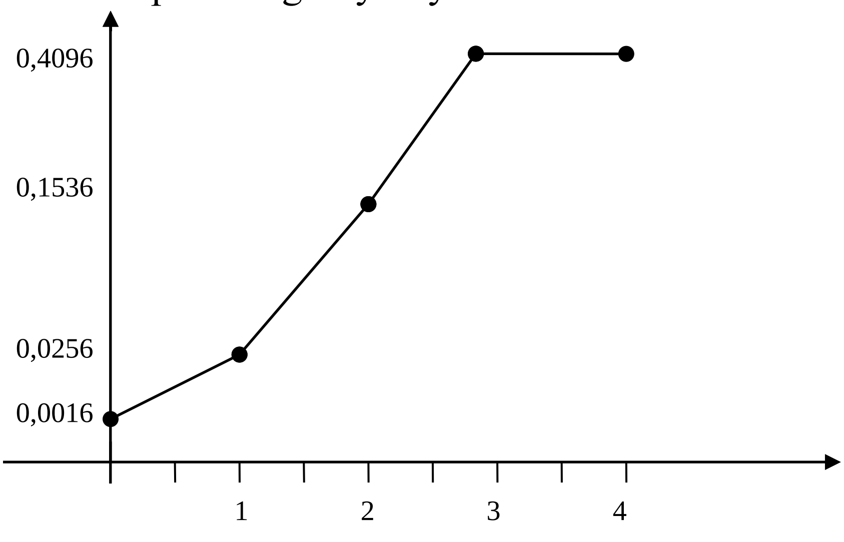
Tekshirish:

$$0,0016+0,0256+0,1536+0,4096+0,4096=1$$

b) $P(1 \leq X \leq 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=0,0256+0,1536+0,4096=0,5888$

$$P(X>3)=P(X=4)=0,4096;$$

c) Taqsimot ko‘pburchagini yasaymiz:



174. X tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan.

X	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

Taqsimot ko‘pburchagini yasang.

175. Yashikda 5 ta oq va 25 ta qora shar bor. Yashikdan 1 ta shar olindi. X tasodifiy miqdor - olingan oq sharlar soni bo‘lsa, uning taqsimot qonunini tuzing.

176. 10 ta detal solingan yashikda 8 ta yaroqli detal bor. Tavakkaliga 2 ta detal olingan. Olingan detallar orasidagi yaroqli detallar sonining taqsimot qonunini tuzing.

177. X diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

a) X: 2 4 5 6
P: 0,3 0,1 0,2 0,6

b) X: 10 15 20
P: 0,1 0,7 0,2

Taqsimot ko‘pburchagini yasang.

178. X diskret tasodifiy miqdor tangani ikki marta tashlashda «gerbli» tomon tushish sonining binomial taqsimot qonunini yozing.

179. Ikkita o‘yin soqqasi birgalikda ikki marta tashlandi:

a) Ikkala o‘yin soqqasida juft ochkolar tushishi sonidan iborat X diskret tasodifiy miqdorning binomial taqsimot qonunini toping;

b) Taqsimot ko‘pburchagini yasang.

180. Ikki mergan bitta nishonga baravariga bittadan o‘q uzadi. Bitta o‘q uzishda birinchi mergan uchun nishonga tegish ehtimoli 0,5 ga, ikkinchi mergan uchun 0,4 ga teng. Diskret tasodifiy miqdor nishonga tegishlar soni.

a) X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping;

b) Taqsimot ko‘pburchagini yasang.

181. Ma’lum bir partiyada yaroqsiz detallar 10% ni tashkil etadi. Tavakkaliga 4 ta detal tanlab olinadi. Bu 4 ta detal orasida yaroqsiz detallar sonidan iborat bo‘lgan X diskret tasodifiy miqdorning binomial taqsimot qonunini toping.

182. Miltiqdan otilgan har bir o‘qning samolyotga tegish ehtimoli 0,001 ga teng. 3000 ta o‘q uziladi. Otilgan o‘qlarning samolyotga tekkanlari sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping:

183. Ikkita mergan galma-galdan nishonga qarata o‘q uzishadi. Bitta o‘q uzishda xato ketish ehtimoli birinchi mergan uchun 0,2 ga, ikkinchisi uchun 0,4 ga teng. Agar 4 tadan ortiq o‘q uzilmagan bo‘lsa, nishonga tekkuncha otilgan o‘qlar sonidan iborat bo‘lgan X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

184. Ikkita bombardimonchi samolyot nishonga tekkuncha galma-galdan bomba tashlaydi. Birinchi samolyotning nishonni aniq mo‘ljalga olish ehtimoli 0,7 ga, ikkinchisiniki esa 0,8 ga teng. Agar samolyot-larning har birida 2 tadan bomba bo‘lsa, tashlangan bombalar sonidan iborat X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

185. Qiz va o‘g‘il bolalarning tug‘ilish ehtimollari teng deb faraz qilinadi. To‘rt bolali oiladagi o‘g‘il bolalar sonidan iborat bo‘lgan X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

186. Uchta mergan bitta nishonga qarata o‘q uzishadi. Nishonga tekkizish ehtimoli birinchi mergan uchun 0,8 ga, ikkinchisi uchun 0,6 ga, uchinchisi uchun 0,5 ga teng. Nishonga tekkan o‘qlar sonidan iborat bo‘lgan X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

187. Ichida 5 ta oq va 7 qora shar bo‘lgan idishdan 4 ta shar olinadi.Olinganoqsharlar sonidan iborat bo‘lganXtasodifiy miqdor-ning taqsimot qonunini toping.

188. Ikkita tanga 3 martadan tashlanadi. «Gerbli» tomon tushishlar sonidan iboratbo‘lganX tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

189. Agar bitta o‘q uzishda nishonga tegish ehtimoli 3/4 ga teng bo‘lsa, 3 ta o‘q uzishda nishonga tegishlar sonidan iborat bo‘lgan X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

190. Ichida 4 ta oq va 6 ta qora shar bo‘lgan idishdan 5 ta shar olinadi. Chiqqan oq sharlar sonidan iborat bo‘lgan X tasodifiy miq-dorning taqsimot qonunini toping.

Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilishi, dispersiyasi, o‘rtacha kvadratik chetlanishi va ularning xossalari

Diskret tasodifiy miqdorning o‘rtacha qiymati xarakteristikasi bo‘lib matematik kutilish xizmat qiladi.

1-ta’rif. Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilishi deb uning mumkin bo‘lgan barcha qiymatlarini bu qiymatlarning mos ehtimollariga ko‘paytmalari yig‘indisiga aytiladi, ya’ni:

$$\mathrm{M}(\mathrm{X}) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ...+ x_n p_n = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k$$

Agar tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari sanoqli to‘plam bo‘lsa, u holda:

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

bunda tenglikning o‘ng tomonida turgan qator absolut yaqinlashuvchi deb faraz qilinadi va

$$P_1 + P_2 + ...+ P_K + ... = \sum_{k=1}^{\infty} P_K = 1$$

Matematik kutilish quyidagi xossalarga ega:

1-xossa. O‘zgarmas miqdorning matematik kutilishi uning o‘ziga teng, ya’ni:

$M(C)=C$

2-xossa. O‘zgarmas sonni matematik kutilish belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya’ni:

$$M(CX) = CM(X)$$

3-xossa. Tasodifiy miqdorlar yig‘indisining matematik kutilishi qo‘shiluvchilarning matematik kutilishlari yig‘indisiga teng:

$$M(X_1+X_2+....+X_n)=M(X_1)+M(X_2)+....+M(X_n)$$

4-xossa. O‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar ko‘paytmasining matematik kutilishi ko‘paytuvchilar matematik kutilishlarining ko‘paytmasiga teng:

$$M(X_1 \cdot X_2 .....X_n)= M(X_1) \cdot M(X_2) ......M(X_n)$$

2-ta’rif. X tasodifiy miqdorning dispersiyasi deb chetlanish kvadratining matematik kutilishiga aytiladi, ya’ni:

$$D(X)=M[X-M(X)]^2$$

Dispersiyani

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$$

formuladan foydalanib hisoblagan ma’qul.

Dispersiya quyidagi xossalarga ega:

1-xossa. O‘zgarmas sonning dispersiyasi nolga teng:

$$D(C) = O$$

2-xossa. O‘zgarmas ko‘paytuvchini avval kvadratga oshirib, dispersiya belgisidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$D(CX)=C^2D(X)$$

3-xossa. Bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar yig‘indisi (ayirmasi) ning dispersiyasi qo‘shiluvchilar dispersiyalarining yig‘indisiga teng:

$$D(X\pm Y) = D(X) + D(Y)$$

3-ta’rif. Tasodifiy miqdorning o‘rtacha kvadratik chetlanishi deb dispersiyadan olingan kvadrat ildizga aytiladi:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$$

191-misol. Quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan X diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilishini toping:

X:	-0,4	6	10
P:	0,2	0,3	0,5

Yechish:

$$M(X) =-0,4\cdot 0,2 + 6\cdot 0,3+10,0,5 =6$$

192-misol. Yashikda 5 ta oq va 25 ta qora shar bor. Yashikdan tavakkaliga 1 ta shar olingan. X tasodifiy miqdor olingan oq sharlar soni bo‘lsa, uning taqsimot qonunini tuzing va matematik kutilishini hisoblang.

Yechish: Bitta shar olinsa, bu shar qora yoki oq bo‘lishi mumkin. Demak, X tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari 0 yoki 1. U holda, uning taqsimot qonuni quyidagicha:

X	0	1
P	5/6	1/6

U holda ta’rifga ko‘ra:

$$M(X)=0\cdot\frac{5}{6}+1\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

193-misol. X diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

X	0	1	2	3	4
P	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

M(X), D(X) va σ(X) larni toping.

Yechish:

$$M(X)=0\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}4+2\cdot 0{,}3+3\cdot 0{,}08+4\cdot 0{,}02=1{,}32$$

X^2 tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha bo‘ladi:

X^2	0	1	4	9	16
P	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

$$M(X^2)= 0\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}4+2\cdot 0{,}3+9\cdot 0{,}08+16\cdot 0{,}02=1{,}64$$

U holda:

$$D(X)=M(X^2)-\left[M(X)\right]^2=2{,}64-(1{,}32)^2=2{,}64-1{,}7424=1{,}8976$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{1.8976}=1.3775$$

194-misol. X va Y tasodifiy miqdorlar erkli. Agar D(X)=5, D(Y) =6 ekanligi ma’lum bo‘lsa, Z=3X+2Y tasodifiy miqdorning disper-siyasini toping.

Yechish:*D(Z)=D (3X+2Y)=D(3X)+D(2Y)=9D(X)+4D(Y)=9·5+4·6=69*

195. Ushbu:

X: -5 2 3 4

P: 0,4 0,3 0,1 0,2

taqsimot qonuni bilan berilgan X diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasini va o‘rtacha kvadratik chetlanishini toping.

196. X tasodifiy miqdor – o‘yin soqqasi bir marta tashlanganda tushadigan ochkolar soni. *M(X), D(X)* va σ *(X)* larni toping.

197. Qutida 7 ta shar bo‘lib, ularning to‘rttasi oq qolganlari qora. Qutidan tavakkaliga 3 ta shar olinadi. *X* – olingan oq sharlar soni. *M(X)*ni toping.

198. Ikkita o‘yin soqqasi baravariga 2 marta tashlanadi. *X* – ikkala o‘yin soqqasidagi tushgan juft ochkolar soni. *M(X), D(X)* va σ *(X)* larni toping.

199. 10 ta detaldan iborat partiyada 3 ta yaroqsiz detal bor. Tavakkaliga 2 ta detal olingan. X – diskret tasodifiy miqdor olingan 2 ta detal orasidagi yaroqsiz detallar soni bo‘lsa, uning matematik kutilishini toping.

200. Tanga 5 marta tashlanadi. Raqam tomonining tushishlari soni-ning taqsimot qonunini va dispersiyasini hisoblang.

201. Ovchi nishonga qarata to birinchi marta tekkuncha otadi, lekin otgan o‘qlarning soni 4 tadan ortmaydi. Ovchining nishonga tekkizish ehtimoli 0,8 ga teng. Otilgan o‘qlar sonining taqsimot qonunini tuzing va uning dispersiyasini hisoblang.

202. O‘yin soqqasi 4 marta tashlanadi. Soqqa 4 marta tashlanganda 6 ochkoning tushish sonidan iborat bo‘lgan X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini, M(X), D(X) va σ (X) larni toping.

203. Agar bitta o‘q uzishda nishonga tegish ehtimoli $\frac{3}{4}$ ga teng bo‘lsa, 3 ta o‘q uzishda nishonga tegishlar sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini, M(X), D(X) va σ (X) larni toping.

204. X va Y tasodifiy miqdorlar erkli. Agar D(X)=4, D(Y)=5 ekanligi ma’lum bo‘lsa, Z=2X+3Y tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

205. X tasodifiy miqdorning matematik kutilishi va dispersiyasi mos ravishda 2 va 10 ga teng. Z=2X+5 tasodifiy miqdorning matematik kutilishi va dispersiyasini toping.

206. Quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan tasodifiy miqdorning o‘rtacha kvadratik chetlanishini toping.

X	3	5	7	9
P	0,4	0,3	0,2	0,1

207. *X* tasodifiy miqdor:

$$P\,\{X=k\}=C_n^k P^k q^{n-k}, \quad k=0,1,2,\ldots n$$

binomial taqsimot qonuniga ega bo‘lsa, M(X) va D(X) ni toping.

208. Mergan o‘q nishonga tekkuncha otadi, (Geometrik taqsimot) o‘qning nishonga tegish ehtimoli P ga teng. Otilgan o‘qlar sonining matematik kutilishi va dispersiyasini toping.

209. Ichida 4 ta oq va 6 ta qora shar bo‘lgan idishdan 5 ta shar olinadi. X tasodifiy miqdor – chiqqan oq sharlar soni. M(X), D(X) va σ (X) larni toping.

210. To‘pdan uzilgan bitta o‘q bilan nishonni mo‘ljalga olish ehtimoli 0,4 ga teng. Uchta o‘q uzilganda nishonga tekkizishlar sonidan iborat bo‘lgan X tasodifiy miqdorning matematik kutilishini toping.

211. Ovchi parrandaga qarata o‘q tekkuncha otadi, lekin to‘rttadan ko‘p bo‘lmagan o‘q uzishga ulguradi, xolos. Agar bitta o‘q uzishda nishonga tekkizish ehtimoli 0,7 ga teng bo‘lsa, uzilgan o‘qlar sonidan iborat bo‘lgan X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini va M(X), D(X) va σ (X) larni toping.

212. A hodisaning bitta sinovda ro‘y berish sonining matematik kutilishi A hodisaning ro‘y berish ehtimoli P ga tengligini isbot qiling.

213. Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilishi uning mumkin bo‘lgan eng kichik va eng katta qiymatlari orasida yotishini isbot qiling.

214. Ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan X diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasini va o‘rtacha kvadratik chetlanishini toping.

X	4.3	5.1	10,6
P	0,2	0,3	0,5

215. A hodisaning har bir sinovda ro‘y berish ehtimoli 0,2 ga teng. X diskret tasodifiy miqdor – A hodisaning 5 ta erkli sinovda ro‘y berish sonining dispersiyasini toping.

216. Diskret tasodifiy miqdor *X* Puasson taqsimot qonuniga bo‘ysunadi, ya’ni:

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

M(X) va D(X) ni toping.

217. X diskret tasodifiy miqdor faqat ikkita mumkin bo‘lgan $x_1$va x_2 qiymatga ega bo‘lib, $x_2 > x_1$. X ning x_1 qiymatni qabul qilish ehtimoli 0,6 ga teng. M(X)=1,4, D(X)=0,24. X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

218.X diskret tasodifiy miqdor ikkita $x_1 < x_2$ qiymatga ega. X ning x_1 qiymatni qabul qilish ehtimoli 0,2 teng. M(X)=2,6, σ=0,8 bo‘lsa, X ning taqsimot qonunini toping.

219. Birorqurilmadagi elementning har bir tajribada ishdan chiqish ehtimoli 0,9 ga teng. X diskret tasodifiy miqdor – elementning o‘nta erkli tajribada ishdan chiqish sonining dispersiyasini toping.

220. X diskret tasodifiy miqdor – ikkita erkli sinovda A hodisaning ro‘y berish sonining dispersiyasini toping. A hodisaning bu sinovlarda ro‘y berish ehtimoli bir xil va M(X)=1,2 ekanligi ma’lum.

5-MAVZU: UZLUKSIZ TASODIFIY MIQDORLAR. EHTIMOLLAR TAQSIMOTINING ZICHLIK FUNKSIYASI

Tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni har doim ham jadval ko‘rinishida berilavermaydi. Masalan, uzluksiz tasodifiy miqdor uchun uning barcha mumkin bo‘lgan qiymatlarini sanab chiqish mumkin emas.

1-ta’rif. Har bir $x\in$ R uchun X tasodifiy miqdorning x dan kichik qandaydir qiymat qabul qilish ehtimolini beradigan

$$F(x) = P(X<x)$$

funksiya X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi yoki integral taqsimot funksiyasi deyiladi.

Agar X diskret tasodifiy miqdor bo‘lib $x_1 x_2$ ... qiymatlarini p_1, p_2 ... ehtimollar bilan qabul qilsa, uning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo‘ladi:

$$P(X<x)=\sum_{x_i<x} P_i$$

Taqsimot funksiyasi quyidagi xossalarga ega.

1. $0\le F(x)\le 1$;
2. P(a <X<b)= F (b) – F (a);
3. Agar $x_1<x_2$ bo‘lsa, F $(x_1)\le$F (x_2);
4. $F(-\infty)=0, F(+\infty)=1.$

2-ta’rif. X uzluksiz tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasining differensial funksiyasi yoki zichlik funksiyasi deb:

$$f(x) = F'(x)$$

funksiyaga aytiladi.

Agar X uzluksiz tasodifiy miqdor f(x) zichlik funksiyaga ega bo‘lsa, uning taqsimot funksiyasi quyidagiga teng:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Zichlik funksiya quyidagi xossalarga ega:

1. $f(x)\ge 0$;
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1;$
3. $P(a<x<b)=\int_a^b f(x)dx.$

Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan barcha qiymatlari tegishli bo‘lgan (a,b) oraliqda

$$f(x)=\begin{cases} 0, agar, x\le a, bo'lsa \\ \dfrac{1}{b-a}, agar, a<x\le bo'lsa \\ 0, agar, x>b, bo'lsa \end{cases}$$

zichlik funksiyaga ega bo‘lsa, bunday tasodifiy miqdor (a,b) oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi.

Agar X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, X tasodifiy miqdor normal taqsimot qonuniga bo‘ysunadi deyiladi.

Normal taqsimlangan X uzluksiz tasodifiy miqdorning (α,β) oraliqqa tushish ehtimoli:

$$P(\alpha < X < \beta)=\Phi(\frac{\beta-a}{\sigma})-\Phi(\frac{\alpha-a}{\sigma})$$

formula bo‘yicha hisoblanadi, bu yerda

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

Laplas funksiyasi.

Agar zichlik funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases}0, agar, x<0, bo'lsa\\ \lambda e^{-\lambda x}, agar, x\geq 0, bo'lsa\end{cases}$$

ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, X uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimoti ko‘rsatkichli taqsimot deyiladi.

221-misol. X – diskret tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan.

X	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

Uning taqsimot funksiyasini toping.

Yechish: Ko‘rinib turibdiki, $x\in$ $(-\infty;$ -2] uchun X <x hodisa mumkin bo‘lmagan hodisa bo‘ladi, ya’ni:

F(x)=0

Endi $x\in$(-2;1] bo‘lsin. U holda:

F(x)=P(X<x)=P(X=-1)=0,1

Agar $x\in$ (-1;0] bo‘lsa,

F(x)=P(X<x)=P(X=-1)+P(X=0)=0,1+0,2=0,3

Huddi shuningdek, $x\in$ (0; 1] bo‘lsa,

F (x)= 0,1 +0,2 + 0,2 = 0,5.

Agar $x\in$ (1; 2] bo‘lsa,

F (x)= 0,1 + 0,2 + 0,2+0, 4= 0,9

Agar x> 2 bo‘lsa, F (x)= P(X<x) =1, chunki ixtiyoriy x> 2 uchun X<x hodisa muqarrar hodisa bo‘ladi.

Shunday qilib, F(x) taqsimot funksiyaning analitik ifodasini quyidagi ko‘rinishda yozamiz.

$$F(x)=\begin{cases}0, agar, x\le -2, bo'lsa,\\ 0.1, agar -2<x\le -1, bo'lsa,\\ 0.3, agar -1<x\le 0, bo'lsa,\\ 0.5, agar, 0<x\le 1, bo'lsa,\\ 0.9, agar, 1<x\le 2, bo'lsa,\\ 1, agar, x>2, bo'lsa,\end{cases}$$

222-misol. X tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot funksiya bilan berilgan.

$$F(x)=\begin{cases}0, agar, x\le -1, bo'lsa\\ \frac{3}{4}x+\frac{3}{4}, agar -1<x\le \frac{1}{3}, bo'lsa\\ 1, agar, x>\frac{1}{3}, bo'lsa\end{cases}$$

Sinov natijasida X tasodifiy miqdorning (0; $\frac{1}{3}$) intervalda yotgan qiymatni qabul qilish ehtimolini toping.

Yechish: Taqsimot funksiyaning 2-xossasiga asosan:

$$P\ (\ a < X < b)=F\ (\ b\ ) - F\ (\ a\ ).$$

Bu formulaga a = 0, b=$\frac{1}{3}$ ni qo‘yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$P(0<X<\frac{1}{3})=F\left(\frac{1}{3}\right)-F(0)=\left[\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}\right]_{x=\frac{1}{3}}-\left[\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}\right]_{x=0}=\frac{1}{4}$$

223-misol. X uzluksiz tasodifiy miqdorning

$$F(x)=\begin{cases}0, agar, x\le 0 bo'lsa\\ \sin 2x, agar 0<x\le \frac{\pi}{4} bo'lsa\\ 1, agar, x>\frac{\pi}{4} bo'lsa\end{cases}$$

taqsimot funksiyasi berilgan, f(x) zichlik funksiyani toping.

Yechish: Zichlik funksiya taqsimot funksiyadan olingan birinchi tartibli hosilaga teng:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, agar, x\le 0, bo'lsa\\ 2\cos 2x, agar, 0<x\le \frac{\pi}{2} bo'lsa\\ 0, agar, x>\frac{\pi}{4} bo'lsa,\end{cases}$$

224-misol. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x)=\begin{cases}0, agar, x\le 0, bo'lsa\\ \cos x, agar, 0<x\le\dfrac{\pi}{2} bo'lsa\\ 0, agar, x>\dfrac{\pi}{2} bo'lsa\end{cases}$$

F(x) taqsimot funksiyani toping.

Yechish: $$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(z)dz$$

formuladan foydalanamiz. Agar $x\le 0$ bo‘lsa, F(x)=0
Demak,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0dz=0$$

Agar $0<x\le\frac{\pi}{2}$ bo‘lsa,

$$\text{F}(x)=\int_{-\infty}^{0} 0dz+\int_{0}^{x}\cos zdz=\sin x$$

Agar $x>\frac{\pi}{2}$ bo‘lsa

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0dz+\int_{0}^{\pi/2}\cos zdz+\int_{\pi/2}^{x} 0dx=\sin z\Big|_{0}^{\pi/2}=1$$

Demak, izlanayotgan taqsimot funksiya quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$F(x)=\begin{cases}0, agar, x\le 0, bo'lsa\\ \sin x, agar, 0<x\le\dfrac{\pi}{2} bo'lsa\\ 1, agar, x>\dfrac{\pi}{2} bo'lsa,\end{cases}$$

225-misol. X uzluksiz tasodifiy miqdor quyidagizichlik funksiyaga ega.

$$f(x)=\begin{cases}0, agar, x\le 0, bo'lsa\\ \dfrac{2}{3}\sin 3x, agar, 0<x\le\dfrac{\pi}{3} bo'lsa\\ 0, agar, x>\dfrac{\pi}{3} bo'lsa,\end{cases}$$

X tasodifiy miqdorning $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right)$ intervalga tegishli qiymatni qabul qilish ehtimolini toping.

Yechish: P (a < X <b) = $\int_{a}^{b} f(x)dx$ formuladan foydalanamiz.

$$P\left(\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/4} \sin 3x dx = \frac{\sqrt{2}}{9}$$

226. X uzluksiz tasodifiy miqdorning

$$F(x) = \begin{cases} 0, agar, x \le 0, bo'lsa, \\ \sin x, agar, 0 < x \le \frac{\pi}{2} bo'lsa, \\ 1, agar, x > \frac{\pi}{2} bo'lsa, \end{cases}$$

taqsimot funksiyasi berilgan. f(x) zichlik funksiyani toping.

227. X uzluksiz tasodifiy miqdorning

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le 0, bo'lsa \\ \sin x, 0 < x \le \frac{\pi}{2} bo'lsa \\ 0, agar, x > \frac{\pi}{2} bo'lsa \end{cases}$$

zichlik funksiyasi berilgan F (x) taqsimot funksiyasini toping.

228. X uzluksiz tasodifiy miqdorning

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le \frac{\pi}{6}, bo'sa \\ 3\sin 3x, \frac{\pi}{6} < x \le \frac{\pi}{3} bo'lsa \\ 0, x > \frac{\pi}{3} bo'lsa, \end{cases}$$

zichlik funksiyasi berilgan. F (x) taqsimot funksiyani toping.

229. X uzluksiz tasodifiy miqdorning

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le 1, bo'lsa \\ x - \frac{1}{2}, 1 < x \le 2 bo'lsa \\ 0, x > 2 bo'lsa, \end{cases}$$

zichlik funksiyasi berilgan. F (x) taqsimot funksiyani toping.

230. X uzluksiz tasodifiy miqdorning differensial funksiyasi butun Ox o‘qida:

$$f(x) = \frac{4c}{e^x + e^{-x}}$$

tenglik bilan berilgan. ***c*** o‘zgarmas parametrini toping.

231. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi butun Ox o‘qida:

$$f(x)=\frac{2c}{1+x^2}$$

tenglik bilan berilgan. ***c*** o‘zgarmas parametrini toping.

232. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi (0; 1) intervalda f(x) = C *arctgx* tenglik bilan berilgan; bu intervaldan tashqarida f(x) =0, C o‘zgarmas parametrini toping.

233. X tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot funksiya bilan berilgan.

$$F(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0,\ bo'lsa\\ x^2,0\le x\le 1 bo'lsa\\ 1,\ agar,\ x>1,\ bo'lsa,\end{cases}$$

To‘rtta erkli sinov natijasida X tasodifiy miqdorning rosa 3 marta (0,25; 0,75) intervalda yotadigan qiymatni qabul qilish ehtimolini toping.

234. X uzluksiz tasodifiy miqdor quyidagicha qonun bo‘yicha taqsimlangan:

$$f(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0,\ bo'lsa\\ 2e^{-2x},\ x\ge 0,\ bo'lsa\end{cases}$$

Sinov natijasida X tasodifiy miqdorning (0,3; 1) oraliqqa tushish ehtimolini toping.

235. X tasodifiy miqdor ehtimollar taqsimotining a=0, σ=2 parametrli normal qonuniga bo‘ysunsin. X tasodifiy miqdorning (-2; 3) oraliqqa tushish ehtimolini aniqlang.

236. X tasodifiy miqdorning

$$f(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0, bo'lsa\\ A\sin x, 0<x\le\pi, bo'lsa,\\ 0,\ x>\pi, bo'lsa,\end{cases}$$

zichlik funksiyasi berilgan.

a) A ni aniqlang;
b) Taqsimot funksiyasi F(*x*) ni toping;
c) f(*x*) va F(*x*) funksiyalarning grafigini chizing.

237. X uzluksiz tasodifiy miqdor parametrlari a=20,σ=5 bo‘lgan normal taqsimot qonuniga bo‘ysunsin. Sinov natijasida X tasodifiy miqdorning (15;25) oraliqda joylashgan qiymat qabul qilish ehtimolini toping.

238. X tasodifiy miqdor [0;2] kesmada tekis taqsimot qonuniga ega.

a) 0<X<0,5 hodisaning ehtimolini toping;
b) f(*x*) va F(*x*) funksiyalarning grafiklarini chizing.

239. X tasodifiy miqdor parametrlari a=30, σ=10 bo‘lgan normal taqsimot qonuniga bo‘ysunadi. X tasodifiy miqdor (10;50) oraliqda qiymat qabul qilish ehtimolini toping.

240. X tasodifiy miqdor normal taqsimlangan. Bu miqdorning o‘rtacha kvadratik chetlanishi 0,4ga teng. Tasodifiy miqdorning absolut qiymati bo‘yicha a dan chetlanishi 0,3 dan kichik bo‘lishi ehtimolini toping.

Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning matematik kutilishi, dispersiyasi va o‘rtacha kvadratik chetlanishi

Uzluksiz tasodifiy miqdor mumkin bo‘lgan qiymatlarini butun son o‘qida qabul qilsin, $f(x)$ funksiya uning zichlik funksiyasi bo‘lsin.

Agar

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)dx$$

integral mavjud bo‘lsa,

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

integral X uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilishi deyiladi, ya’ni,

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Agar X uzluksiz tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan barcha qiymatlari (a; b) oraliqqa tegishli bo‘lsa, u holda

$$M(X) = \int_{a}^{b} xf(x)dx$$

Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari Ox o‘qida yotsa, uning dispersiyasi quyidagi tenglik orqali aniqlanadi

$$D(X)= \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx$$

yoki

$$D(X)= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx]^2$$

Agar X uzluksiz tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari (a; b) oraliqqa tegishli bo‘lsa, u holda:

$$D(X)= \int_{a}^{b} x^2 f(x)dx - [\int_{a}^{b} xf(x)dx]^2$$

Eslatma:Matematik kutilish va dispersiyaning diskret tasodifiy miqdorlar uchun keltirilgan xossalari uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun ham o‘rinli.

Tasodifiy miqdorning o‘rtacha kvadratik chetlanishi deb dispersiyadan olingan kvadrat ildizga aytiladi:

$$\sigma(x) = \sqrt{D(X)}.$$

241-misol. Ko‘rsatkichli (eksponensial) taqsimot qonuni bilan taqsimlangan:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < 0 bo'lsa, \\ 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0, \lambda > 0 \end{cases}$$

X uzluksiz tasodifiy miqdorning:
a) zichlik funksiyasini; b) matematik kutilishini; v) dispersiyasini toping.
Yechish:

a) Ta'rifga asosan $f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, x < 0 bo'lsa, \\ \lambda e^{\lambda x}, x \geq 0, \lambda > 0 \end{cases}$

b) Matematik kutilish ta'rifiga asosan:

$$M(X) = \lambda \int_0^\infty x e^{\lambda x} dx = \begin{Bmatrix} x = u, du = dx \\ \upsilon = \int e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \end{Bmatrix} = \lambda \left[-\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big/_0^\infty + \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx \right] =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda \cdot 0} = \frac{1}{\lambda}$$

v) Dispersiyaning ta'rifiga asosan:

$$D(X) = \lambda \int_0^\infty x^2 e^{\lambda x} dx - \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 = \begin{Bmatrix} x^2 = u, du = 2x dx \\ \upsilon = \int e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \end{Bmatrix} =$$

$$\lambda \left[-\frac{x^2}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big/_0^\infty + \int_0^\infty \frac{2}{\lambda} x e^{-\lambda x} \right] - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

242-misol. Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilishi, dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.
Yechish: Uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilishi ta'rifiga ko'ra:

$$M(X) = \int_{-\infty}^\infty x f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty x e^{-\frac{(x-a)^2}{2a^2}} dx$$

yangi $Z = \dfrac{x-a}{\sigma}$ o'zgaruvchi kiritamiz.

U holda $x = \sigma Z + a, dx = \sigma dZ.$

yangi integrallash chegaralari oldingisiga tengligini hisobga olib, quyi-dagini hosil qilamiz.

$$M(X) = \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty (\sigma z + a) e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \sigma z e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Qo'shiluvchilardan birinchisini nolga teng (integral belgisi ostida toq funksiya, integrallash chegaralari koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik). Qo'shiluvchilardan ikkinchisi Puasson integralining qiymati

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}$$

ekanligini hisobga olsak, uning qiymati a ga teng.

Demak,M(X)= a

Uzluksiz tasodifiy miqdor dispersiyasi ta'rifiga ko'ra va M(X)=a ekanligini e'tiborga olib, quyidagiga ega bo'lamiz.

$$D(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty (x-\alpha)^2 e^{-\frac{(\chi-\alpha)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Yuqoridagiga o‘xshash, Z=$\frac{x-a}{\sigma}$ yangi o‘zgaruvchi kiritamiz. Bundan

$$x-a=\sigma Z,\ dx=\sigma dz$$

U holda

$$D(X)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

ni hosil qilamiz: Bo‘laklab integrallash natijasida D(X)=σ^2 ni topamiz.
Demak, $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sigma$

Shunday qilib, normal taqsimlangan tasodifiy miqdorda qatnasha-yotgan **a** va σ parametrlarining ehtimoliy ma’nosi quyidagicha:

$$M(X)=a,\quad D(X)=\sigma^2$$

243-misol. Ushbu taqsimot funksiya bilan berilgan X tasodifiy miqdorning matematik kutilishi va dispersiyasini toping.

$$F(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0, bo'lsa\\ x^2, agar, 0<x\le 1, bo'lsa\\ 1, agar, x>1, bo'lsa,\end{cases}$$

Yechish: zichlik funksiyasini topamiz.

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0, bo'lsa,\\ 2x, 0<x\le 1\\ 0,\ x>1\end{cases}$$

Matematik kutilishini topamiz.

$$M(X)=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2x^3}{3}\Big/_0^1=\frac{2}{3}$$

Dispersiyasini topamiz.

$$D(X)=2\int_0^1 x^3dx-\left(\tfrac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{5}$$

244. X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan.

$$f(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0, bo'lsa\\ \frac{3x^2}{8}, 0<x\le 2, bo'lsa,\\ 0,\ x>2, bo'lsa\end{cases}$$

Matematik kutilish va dispersiyani hisoblang.

245. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan.

$$f(x)=\begin{cases}0,\ x\le \frac{\pi}{6} bo'lsa,\\ 3\sin 3x, \frac{\pi}{6}<x\le\frac{\pi}{3} bo'lsa\\ 0,\ x>\frac{\pi}{3} bo'lsa,\end{cases}$$

X tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalariM(X), D(X) va σ (X) larni toping.

246. Zichlik funksiyasi $f(x)=10e^{-10x}(x\geq 0)$ bilan berilgan ko‘rsatkichli taqsimotning matematik kutilishi, dispersiyasi, o‘rtacha kvadratik chetlanishini toping.

247. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan

$$f(x)=\begin{cases}0, agar, x\leq \frac{\pi}{2} bo'lsa,\\ 0.5\cos x, agar, -\frac{\pi}{2}<x\leq \frac{\pi}{2} bo'lsa,\\ 0, agar, x>\frac{\pi}{2} bo'lsa,\end{cases}$$

M(X), D(X) va σ (X) larni toping.

248. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan.

$$f(x)=\begin{cases}0, agar, x\leq 2, bo'lsa,\\ 0.5, agar, 2<x\leq 4, bo'lsa,\\ 0, agar, x>4, bo'lsa,\end{cases}$$

M(X), D(X) va σ (X) larni toping.

249. X Uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan.

$$f(x)=\begin{cases}0, agar, x<0, bo'lsa,\\ 5e^{-5x}, agar, x\geq 0, bo'lsa\end{cases}$$

M(X), D(X) va σ (X) larni toping.

250. Agar M(X)=3, D(X)=16 ekanligi ma’lum bo‘lsa, normal taqsimlangan X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini toping.

251-misol. X Uzluksiz tasodifiy miqdor zichlik funksiyasi bilan berilgan.

$$f(x)=\begin{cases}0, agar, x\leq 0, bo'lsa,\\ 2x, agar, 0<x\leq 1, bo'lsa\\ 0, agar, x>1, bo'lsa,\end{cases}$$

M(X), D(X) va σ (X) larni toping.

252. (2; 8) oraliqda tekis taqsimlangan X tasodifiy miqdorning M(X), D(X) va σ (X)larini toping.

253. X Uzluksiz tasodifiy miqdor zichlik funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases}0, agar, x<0, bo'lsa,\\ 0{,}04e^{-0.04x}, agar, x\geq 0, bo'lsa\end{cases}$$

bilan berilgan M(X), D(X) va σ (X) larni toping.

254. Normal taqsimlangan X tasodifiy miqdor zichlik funksiyasi

$$f(x)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-l)^2}{50}}$$

bilan berilgan M(X), D(X) larni toping.

255. X Uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi quyidagicha

$$f(x)=\frac{2}{\pi\left(1+x^2\right)}\ (-\infty<x<\infty)$$

X ning matematik kutilishini toping.

256. X tasodifiy miqdor quyidagicha taqsimot funksiyasi bilan berilgan

$$F(x)=\begin{cases}0, agar\ x\le 0, bo'lsa,\\ x^2, agar\ 0<x\le 1, bo'lsa,\\ 1, agar\ x>1, bo'lsa,\end{cases}$$

X tasodifiy miqdorning M(X), D(X) va σ (X) sonli xarakteristikalarini toping.

257. X tasodifiy miqdor zichlik funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases}e^x, agar\ x\le 0, bo'lsa,\\ 0, agar\ x>0, bo'lsa,\end{cases}$$

bilan berilgan M(X) va D(X) sonli xarakteristikalarini toping.

258. X tasodifiy miqdor

$$f(x)=Ax^2\ \mathrm{e}^{-\lambda x}\ \left(\lambda>0, 0\le x<\infty\right)$$

zichlik funksiyasi bilan berilgan. Taqsimot funksiyasi F(x) ni toping.

259. X tasodifiy miqdor

$$F(x)=A+Barctgx(-\infty<x<\infty)$$

taqsimot funksiyaga ega.

a) A va B o‘zgarmas sonlarni toping;
b) *f(x)* zichlik funksiyasini toping;
c) M(X) ni toping.

260. X tasodifiy miqdor

$$f(x)=\begin{cases}A\cos x, agar\ -\frac{\pi}{2}<x\le\frac{\pi}{2}\\ 0, agar\ |x|>\frac{\pi}{2} bo'lsa,\end{cases}$$

a) A koeffitsiyentni toping; b) F (x) taqsimot funksiyasini toping;
v) M(X) va D(X)ni toping.

261. X tasodifiy miqdor

$$f(x)=\begin{cases}0, x<-\frac{\pi}{2},\\ \frac{\pi}{2}\cos^2 x, -\frac{\pi}{2}<x\le\frac{\pi}{2},\\ 0, x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

zichlik funksiyasi bilan berilgan. M(X) va D(X)ni toping.

262. X tasodifiy miqdor tekis taqsimot qonuniga bo‘ysunadi. M(X)=4, D(X)=3. X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini toping.

263. X tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuniga bo‘ysunadi.

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ \dfrac{x^2}{4},0<x\le 2\\ 1, x>2\end{cases}$$

M(X)ni toping.

264. X tasodifiy miqdor quyidagi zichlik funksiya bilan berilgan

$$f(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ 3x^2,0<x\le 1\\ 0, x>1\end{cases}$$

M(X)ni toping.

265. X tasodifiy miqdor quyidagi zichlik funksiya bilan berilgan.

$$f(x)=\begin{cases}Ae^{-x}, x\ge 0\\ 0, x<0\end{cases}$$

a) A koeffitsiyentini toping. b)M(X)ni toping.

266-misol. X tasodifiy miqdor Laplas taqsimot qonuniga bo‘ysunadi, ya’ni

$$f(x)=\frac{1}{\alpha}e^{\frac{|x-\alpha|}{\alpha}}\quad \alpha>0$$

zichlik funksiyaga ega. α - ixtiyoriy haqiqiy son. M(X) va D(X)ni toping.

267-misol. X tasodifiy miqdor

$$f(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ Axe^{-x^2h^2}, x>0\end{cases}$$

zichlik funksiyaga ega.

a) A koeffitsiyentini toping; b)M(X) va D(X) ni toping.

268-misol. X tasodifiy miqdor quyidagi zichlik funksiyaga ega.

$$f(x)\begin{cases}0, x\le 0\\ \dfrac{3}{4}x^2+6x-\dfrac{45}{4},0<x\le 5\\ 0, x>5\end{cases}$$

M(X)ni toping.

269-misol. X tasodifiy miqdor quyidagi zichlik funksiyaga ega.

$$f(x)\begin{cases}0, x\le 2\\ \dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{9}{2}x-6,2<x\le 4\\ 0, x>4\end{cases}$$

M(X)ni toping.

270-misol. X tasodifiy miqdor (-a, a) intervalda

$$f(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{c^2-x^2}}$$

zichlik funksiyasi bilan berilgan, bu intervaldan tashqarida f(x)=0, X tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

6-MAVZU: KATTA SONLAR QONUNI

Tajriba natijasida X tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatini oldindan aytish mumkin emas, ya'ni u tasodifan qiymat qabul qiladi. Lekin soni katta bo'lgan tasodifiy miqdorlar yig'indisi o'zining tasodifiylik xususiyatini yo'qotar ekan. Amaliyot uchun juda ko'p taso-difiy sabablarning birgalikdagi ta'siri tasodifga deyarli bog'liq bo'lmay-digan natijaga olib keladigan shartlarni bilish juda muhimdir, chunki bu tasodifiy hodisalarning qanday rivojlanishini oldindan ko'ra bilishga imkon beradi.

Faraz qilaylik, $X_1, X_2,...X_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin va bu tasodifiy miqdorlarning matematik kutilishlari mavjud bo'lib, ular mos ravishda $a_1, a_2,...a_n$ bo'lsin.

Ta'rif. Agar har qanday kichik $\varepsilon > 0$ soni uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

munosabat bajarilsa, $X_1, X_2,...X_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun katta sonlar qonuni o'rinli deyiladi.

Bu ta'rifning ma'nosi quyidagicha: *n* ning yetarlicha katta qiymatlarida

$$X=\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n)$$

tasodifiy miqdorni tasodifiy bo'lmagan

$$a=\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + ... + a_n)$$

son bilan almashtirgan bo'lamiz.

Katta sonlar qonuni qachon o'rinli bo'ladi? degan savolga quyidagi teorema javob beradi.

Chebishev teoremasi $X_1, X_2,...X_n$ tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq bo'lmay, ularning har biri C soni bilan chegaralangan dispersiyaga ega bo'lsa, u holda berilgan ketma-ketlik uchun katta sonlar qonuni o'rinli bo'ladi.

Bernulli teoremasi.*n* ta erkli tajribada A hodisaning ro'y berishlari soni μ bo'lsin, har bir tajribada A hodisa o'zgarmas P ehtimol bilan ro'y bersin. U holda, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - P\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Bu teoremaning ma'nosi quyidagicha: n yetarlicha katta bo'lganda $\frac{\mu}{n}$ ni istalgan aniqlik bilan P ga teng deb olish mumkin. Ya'ni $\frac{\mu}{n}$ ning qiymatlari P ehtimol atrofida joylashgan bo'ladi. Bundan tashqari, bu teorema sinashlar soni yetarlicha katta bo'lganda nisbiy chastota nima uchun turg'unlik xossasiga ega bo'lishini tushuntiradi va ehtimolning statistik ta'rifini asoslaydi.

Yuqoridagi teoremalarni isbotlashda Chebishev tengsizligi muhim ahamiyatga ega:

Chebishev tengsizligi. Birinchi forma: agar X tasodifiy miqdor musbat bo‘lib, M(X) matematik kutilishiga ega bo‘lsa,

$$P\{X>\alpha\} < \frac{M(X)}{\alpha}$$

Ikkinchi forma: agar D(X) $< +\infty$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun

$$P\left(\left|X - M(X)\right| > \varepsilon\right) < \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

271-misol. $X_1, X_2, ... X_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo‘lib, X_n tasodifiy miqdor *n, o, n* qiymatlarini mos ravishda $\frac{1}{n^2}, 1-\frac{2}{n^2}, \frac{1}{n^2} (n>1)$ ehtimollar bilan qabul qiladi. Shu tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun katta sonlar qonuni o‘rinli bo‘ladimi?

Yechish: Chebishev teoremasidan foydalanamiz.

$$M(X_n) = -n\cdot\frac{1}{n^2} + 0\cdot(1-\frac{2}{n^2}) + n\cdot\frac{1}{n^2} = 0$$

$$D(X_n) = M(X_n^2) - [M(X_n)]^2 = n^2\cdot\frac{1}{n^2} + 0^2\cdot(1-\frac{2}{n^2}) + n^2\cdot\frac{1}{n^2} = 2$$

Ko‘rinib turibdiki, hamma tasodifiy miqdorlarning dispersiyasi bir xil. U holda, ular yagona son bilan chegaralangan bo‘ladi. Chebishev teoremasining shartlari bajarilganligi sababli, bu ketma-ketlikka katta sonlar qonunini tatbiq qilsa bo‘ladi.

272-misol. A hodisaning har bir sinovda ro‘y berish ehtimoli $\frac{1}{2}$ ga teng. Agar 100 ta erkli sinov o‘tkaziladigan bo‘lsa, A hodisaning ro‘y berishlari soni 40 dan 60 gacha bo‘lgan oraliqda yotish ehtimolini Chebishev tengsizligidan foydalanib baholang.

Yechish: X-tasodifiy miqdor qaralayotgan A hodisaning 100 ta erkli sinovda ro‘y berishi sonining matematik kutilishini va dispersiyasini topamiz:

$$M(X) = n\cdot p = 100\cdot\frac{1}{2} = 50$$

$$D(X) = npq = 100\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 25$$

Hodisa ro‘y berishining berilgan soni bilan M(X)=50 matematik kutilish orasidagi maksimal ayirmani topamiz.

$$\varepsilon = 60 - 50 = 10$$

Ushbu shakldagi Chebishev tengsizligidan foydalanamiz:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

Bunga M(X)=50, D(X)=25, $\varepsilon = 10$ ni qo‘yib quyidagini hosil qilamiz.

$$P(|x-50| < 10) \ge 1 - \frac{25}{10^2} = 0.75$$

273. Agar D(X)=0,001 bo‘lsa, |X-M(X)|<0,1 ning ehtimolini Chebishev tengsizligi bo‘yicha baholang.

274. Quyidagilar berilgan: P(|X-M(X)|<ε)$\geq$0,9,D(X)=0,004. Chebishev tengsizligidan foydalanib εni toping.

275. Biror punktda shamolning o‘rtacha tezligi 16 km/s. Bitta kuzatishda shamolning tezligi 80 km/s dan oshmasligini baholang.

276. Toshkent shahrining bitta rayonida elektroenergiyaning o‘rtacha sarfi may oyida 360000 kvt/s. May oyida elektroenergiya sarfining 1000000 kvt/s dan oshmasligini baholang.

277. Aholi punktida 1 kunda suvning o‘rtacha sarfi 50000 litr. Bir kunda suv sarfining 150000 litrdan oshmasligini baholang.

278. X tasodifiy miqdor uchun M(X)=1 va $\sigma(X)=0.2$ ga teng. Chebishev tengsizligidan foydalanib, 0,5<X<1.5 tengsizlikni baholang.

279. X tasodifiy miqdorning o‘z matematik kutilish chetlanishi uchlangan o‘rtacha kvadratik chetlanishdan kichik bo‘lish ehtimolini Chebishev tengsizligidan foydalanib baholang (“uch sigma” qoidasi).

280. Agar D(X)=0,004 bo‘lsa, Chebishev tengsizligidan foydalanib |X-M(X)| <0,2 ning ehtimolini baholang.

281. X diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan.

X:	0,3	0,6
P:	0,2	0,8

||X-M(X)| <0,2 ni baholang.

282. Erkli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $X_1, X_2,...X_n,$ ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan.

$$\begin{array}{llll} X_n: & -n\alpha & 0 & n\alpha \\ \text{P}: & \frac{1}{2n^2} & 1-\frac{1}{n^2} & \frac{1}{2n^2} \end{array}$$

Bu ketma-ketlikka Chebishev teoremasini qo‘llash mumkinmi?

283. Erkli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $X_1, X_2,...X_n,$ ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

$$\begin{array}{lll} X_n: & a & -a \\ \text{P}: & \frac{n}{2n+1} & \frac{n+1}{2n+1} \end{array}$$

Bu ketma-ketlikka Chebishev teoremasini qo‘llash mumkinmi?

284. Erkli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $X_1, X_2,...X_n,$ ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan.

$$\begin{array}{llll} X_n: & -n\alpha & 0 & n\alpha \\ \text{P}: & \frac{1}{2^n} & 1-\frac{1}{2^{n-1}} & \frac{1}{2^n} \end{array}$$

Bu ketma-ketlikka Chebishev teoremasini qo‘llash mumkinmi?

285. Erkli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $X_1, X_2,...X_n$, ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan.

$$X_n: -\sqrt{3} \quad 0 \quad \sqrt{3}$$
$$P_n: \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}$$

Bu ketma-ketlikka Chebishev teoremasini qo‘llash mumkinmi?

286. X diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

X:	3	5
P:	0,6	0,4

||X-M(X)| <0,3 ni baholang.

287. Agar D(X)=0,002 bo‘lsa, |X-M(X)|<0,2 ning ehtimolini Chebishev tengsizligidan foydalanib baholang.

288. Quyidagilar berilgan: $P($|X-M(X)|<ε)≥0,9,D(X)=0,006. Chebishev tengsizligidan foydalanib ε ni toping.

289. Biror punktda shamolning o‘rtacha tezligi 20 km/s. Bitta kuzatishda shamolning tezligi 100 km/s dan oshmasligini baholang.

290. Ma’lum bir joyda bir yilda o‘rtacha 75 kun quyoshli bo‘ladi. Bu joyda bir yilda quyoshli kunlarning 200 kundan ko‘p bo‘lmaslik ehtimolini baholang.

II-Bob. MATEMATIK STATISTIKA

7-MAVZU: MATEMATIK STATISTIKA ELEMENTLARI.

Tanlamaning statistik taqsimoti. Empirik taqsimot funksiyasi. Poligon va gistogramma

Tasodifiy hodisalar ustida o‘tkaziladigan kuzatish natijalariga asoslanib, ommaviy tasodifiy hodisalar bo‘ysunadigan qonuniyatlarni aniqlash mumkin. Matematik statistikaning asosiy vazifasi kuzatish natijala-rini (statistik ma’lumotlarni) to‘plash, ularni guruhlarga ajratish va qo‘-yilgan masalaga muvofiq ravishda bu natijalarni tahlil qilish usullarini ko‘rsatishdan iborat.

Biror X tasodifiy miqdor F(x) taqsimot funksiyasiga ega deylik. X tasodifiy miqdor ustida o‘tkazilgan n ta tajriba (kuzatish) natijasida olingan $x_1, x_2,...x_n$ qiymatlar to‘plamiga n hajmli tanlanma deyiladi, $x_1, x_2,...x_n$ qiymatlarni bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan va X tasodifiy miqdor bilan bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar deb qarash mumkin. Ba’zan $x_1, x_2,...x_n$ tanlanma F(x) nazariy taqsimot funksiyaga ega bo‘lgan X bosh to‘plamdan olingan deb ham ataladi.

Bosh to‘plamdan tanlanma olingan bo‘lsin. Birorta x_1 qiymat n_1 marta, x_2 qiymat n_2 marta va hokazo kuzatilgan hamda

$$\sum n_1 = n$$

bo‘lsin. Kuzatilgan x_i qiymatlar variantalar, kuzatishlar soni n_i chastotalar deyiladi. Kuzatishlar sonining tanlanma hajmiga nisbatini

$$W_i = \frac{n_i}{n}$$

nisbiy chastotalar deyiladi.

Tanlanmaning statistik taqsimoti deb variantalar va ularga mos chastotalar yoki nisbiy chastotalar ro‘yxatiga aytiladi.

Shunday qilib, taqsimot deyilganda ehtimollar nazariyasida tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari va ularning ehtimollari orasidagi moslik, matematik statistikada esa kuzatilgan variantalar va ularning chastotalari yoki nisbiy chastotalari orasidagi moslik tushuniladi.

Aytaylik, X son belgi chastotalarining statistik taqsimoti ma’lum bo‘lsin. Quyidagi belgilashlar kiritamiz: n_x -belgining x dan kichik qiymati kuzatilgan kuzatishlar soni; n – kuzatishlarning umumiy soni.

Taqsimotning empirik funksiyasi (tanlanmaning taqsimot funksiyasi) deb har bir x qiymati uchun (X<x) hodisaning ehtimolini aniqlaydigan $F_n^*(x)$ funksiyaga aytiladi. Shunday qilib, ta’rifga ko‘ra:

$$F_n^*(x) = \frac{n_x}{n}$$

Bu yerda: n_x – x dan kichik variantalar soni, n – tanlanma hajmi.

Tanlanmaning statistik taqsimotini ko‘rgazmali tasvirlash hamda kuzatilayotgan X belgining taqsimot qonuni haqida xulosalar qilish uchun poligon va gistogrammadan foydalaniladi.

Chastotalar poligoni deb kesmalari $(x_1,n_1),(x_2,n_2)$, … (x_k,n_k) nuqtalarni tutashtiradigan siniq chiziqqa aytiladi. Bu yerda x_i– tanlanma variantalari, n_i – mos chastotalar.

Nisbiy chastotalar poligoni deb kesmalari $(x_1,w_1),(x_2,w_2)$, … (x_k,w_k) nuqtalarni tutashtiradigan chiziqqa aytiladi, bu yerda x_i – tanlanma variantalari, W_i –ularga mos nisbiy chastotalar.

Chastotalar gistogrammasi deb asoslari *h* uzunlikdagi oraliqlar, balandliklari esa $\frac{n_i}{h}$ (chastota zichligi) nisbatlarga teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat pog‘onali figuraga aytiladi.

Nisbiy chastotalar gistogrammasi deb asoslari *h* uzunlikdagi oraliqlar balandliklari esa $\frac{w_i}{h}$ (nisbiy chastota zichligi) nisbatlarga teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat pog‘onali figuraga aytiladi.

291-misol. Hajmi 30 bo‘lgan tanlanmaning chastotalari taqsimoti berilgan.

x_i	2	8	16
n_i	10	15	5

Nisbiy chastotalar taqsimotini tuzing.

Yechish: Nisbiy chastotalarni topamiz. Buning uchun chastotalarni tanlama hajmiga bo‘lamiz.

$$W_1 = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}, \qquad W_2 = \frac{15}{30} = \frac{1}{2},\ W_3 = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

u holda, nisbiy chastotalar taqsimoti

x_i	2	8	16
w_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

292-misol. Quyidagi taqsimot qatori bilan berilgan tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasini tuzing va grafigini chizing.

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

Yechish: $n = n_1 + n_2 + n_3 = 10 + 15 + 25 = 50$

$$W_t = \frac{10}{50} = \frac{1}{5} = 0.2;\ W_2 = \frac{15}{20} = \frac{3}{10} = 0.3;\ W_3 = \frac{25}{50} = \frac{1}{2} = 0.5$$

U holda, nisbiy chastotalar empirik taqsimoti

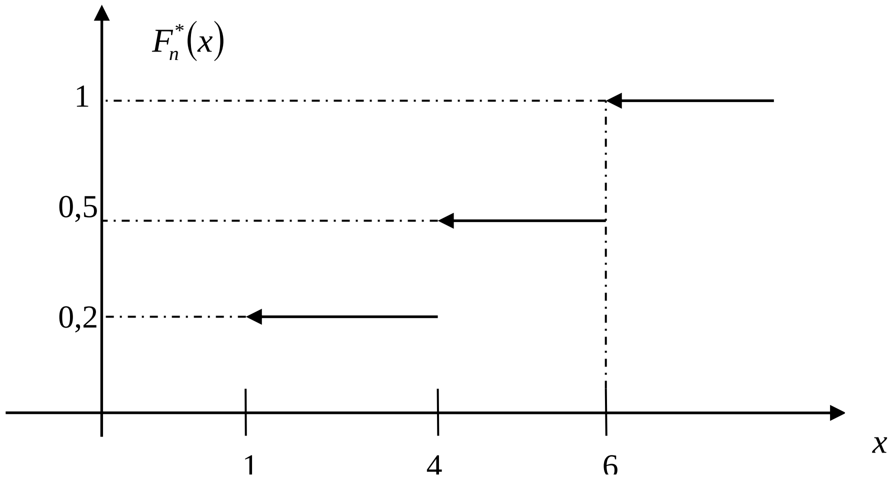
x_i	1	4	6

w_i	0.2	0.3	0.5

Empirik taqsimot funksiya quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.

$$F_n^*(x)=\begin{cases}0_i,\ agar,\ x\le 1,\ bo'lsa\\ 0.2,\ agar,1<x\le 4,\ bo'lsa\\ 0.5,\ agar,4<x\le 6,\ bo'lsa\\ 1,\ agar,\ x>6,\ bo'lsa\end{cases}$$

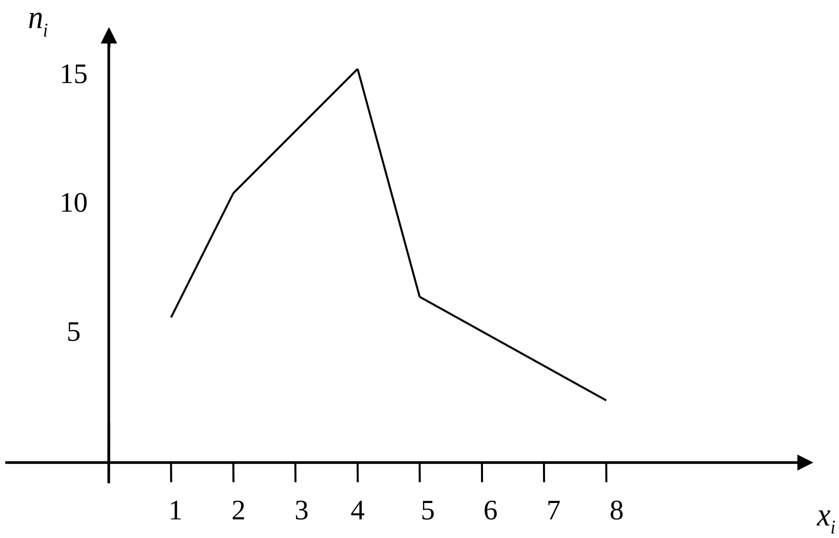
Topilgan qiymatlar asosida grafikni yasaymiz.



293-misol. Berilgan tanlanma taqsimoti bo‘yicha chastotalar va nisbiy chastotalar poligonlarini chizing.

x_i	1	2	4	5	8
n_i	5	10	15	7	3

Yechish: n=5+10+15+7+3=40 tanlanma hajmi. Chastotalar poligoni quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.

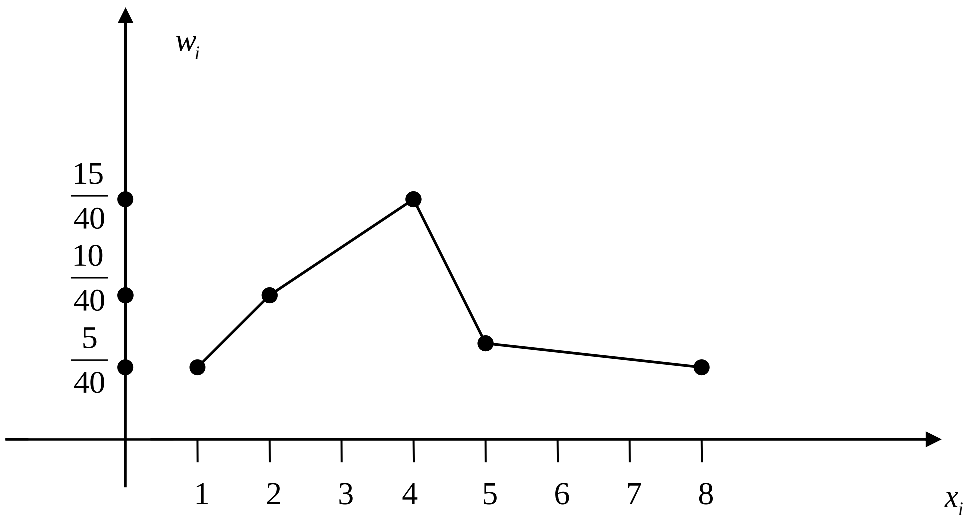


Nisbiy chastotalarni topamiz.

$$W_t = \frac{5}{40}; \qquad W_2 = \frac{10}{40}; \qquad W_3 = \frac{15}{40}; \qquad W_4 = \frac{7}{40}; \qquad W_5 = \frac{3}{40};$$

x_i	1	2	4	5	8
w_i	$\frac{5}{40}$	$\frac{10}{40}$	$\frac{15}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{3}{40}$

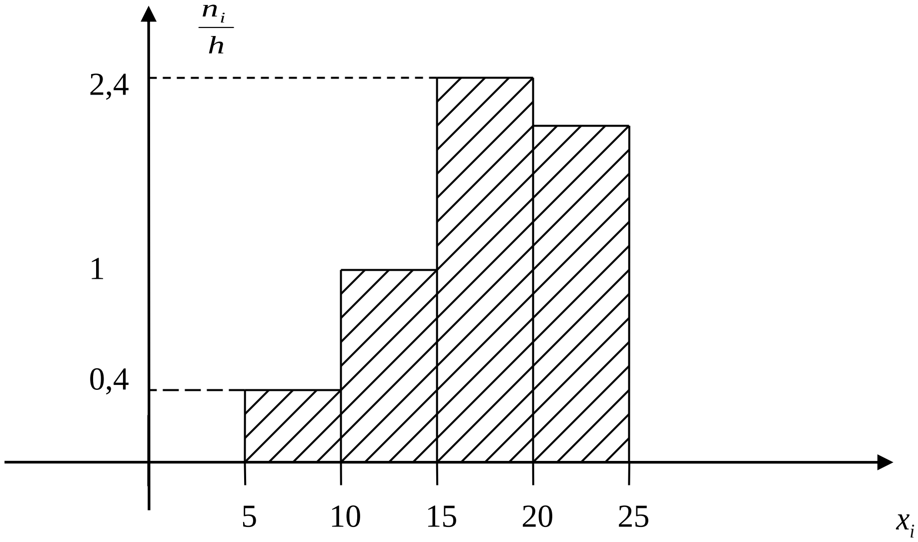
U holda, nisbiy chastotalarni poligoni quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.



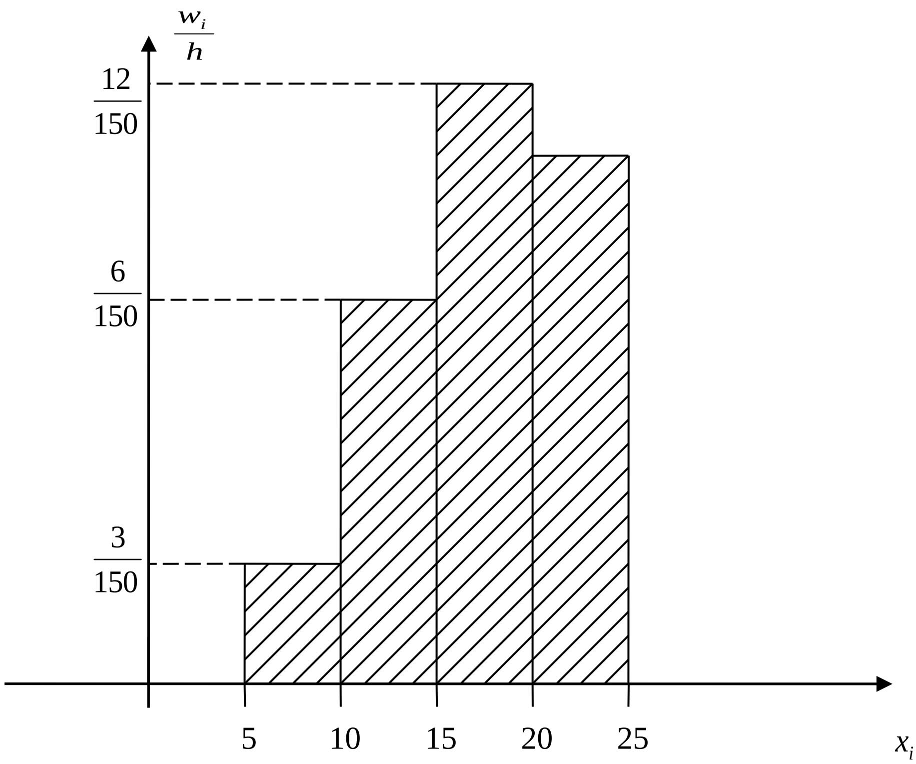
294-misol. Berilgan tanlanma taqsimoti bo‘yicha chastotalar va nisbiy chastotalar gistogrammalarini chizing.

Interval nomeri	Qism interval	Intervaldagi variantalar chastotalari yig‘indisi	Chastotalar zichligi	Nisbiy chastotalar	Nisbiy chastotalar zichligi
I	$x_i - x_{i+1}$	n_i	n_i/h	w_i	w_i/h
1	5–10	2	0.4	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{150}$
2	10–15	6	1.2	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{150}$
3	15–20	12	2.4	$\frac{2}{5}$	$\frac{12}{150}$
4	20–25	10	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{150}$

Chastotalar gistogrammasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.



Nisbiy chastotalar gistogrammasi esa quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.



295. Quyidagi tanlanma berilgan.

2, 1, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 3, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 2, 2, 3.

a) Variatsion qatorni tuzing.
b) Chastotalar jadvalini tuzing.
v) Nisbiy chastotalar poligonini chizing.

296. Korxona ishchilaridan tavakkaliga 20 tasi tanlanib, ularning tarif razryadlari haqida quyidagi ma’lumotlar olingan.

1, 2, 4, 6, 3, 4, 4, 2, 6, 3, 5, 3, 3, 1, 5, 4, 2, 5, 4, 3.

Shu ma’lumotlarga asoslangan holda:

a) Tanlanmaning statistik taqsimotini tuzing va chastotalar poligonini yasang.

b) Empirik taqsimot funksiyasini tuzing.

297. Tanlanma

x_i	4	7	8	12
n_i	5	2	3	10

chastotalar taqsimoti ko‘rinishda berilgan. Nisbiy chastotalar taqsimo-tini toping.

298. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo‘yicha uning empirik funksiyasini toping.

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

299. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo‘yicha chastota-lar poligonini yasang.

x_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20

300. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo‘yicha nisbiy chastotalar poligonini yasang.

x_i	2	4	5	7	10
w_2	0.15	0.2	0.1	0.1	0.45

301. Quyidagi ma’lumotlar asosida empirik funksiyasini toping.

x_i	4	7	8
n_i	5	2	3

302. Chastotalar poligonini yasang.

x_i	15	20	25	30	10
n_i	10	15	30	20	25

303. Nisbiy chastotalar poligonini yasang.

x_i	20	40	65	80
w_2	0.1	0.2	0.3	0.4

304. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo‘yicha chastotalar gistogrammasini yasang.

Interval ro‘yxati	Qism interval	Intervaldagi variantalar chastotalarining yig‘indisi	Chastota zichligi
I	$x_i - x_{i+1}$	n_i	n_i / h
1	2–7	5	
2	7–12	10	
3	12–17	25	
4	17–22	6	
5	22–27	4	

305. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo‘yicha chastotalar gistogrammasini yasang.

Interval ro‘yxati	Qism interval	Qism intervaldagi variantalar chastotalarining yig‘indisi
I	$x_i - x_{i+1}$	n_i
1	0–2	20
2	2–4	30
3	4–6	50
$n = \sum n_i = 100$		

306. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo‘yicha chastotalar gistogrammasini yasang.

Interval ro‘yxati	Qism interval	Qism intervaldagi variantalar chastotalarining yig‘indisi
I	$x_i - x_{i+1}$	n_i
1	2–5	6
2	5–8	10
3	8–11	4
4	11–14	5
$n = \sum n_i = 25$		

307. Tanlanmaningquyidagi berilgan taqsimoti bo‘yicha chastota-lar poligonini yasang.

x_i	1	4	5	8	9
w_i	0.15	0.25	0.3	0.2	0.1

308. Quyidagi ma’lumotlar asosida empirik funksiyani toping.

x_i	2	5	7
n_i	3	2	5

309. Nisbiy chastotalar poligonini yasang.

x_i	5	10	12	20
w_i	0.1	0.2	0.3	0.4

310. Tanlanma

x_i	3	7	8	10
n_i	5	2	3	10

chastotalar taqsimotini ko‘rinishida berilgan. Empirik taqsimot funksiya-ni toping va grafigini chizing.

Taqsimot parametrlarining statistik baholari. Tanlanmaning asosiy sonli xarakteristikalari

X belgili bosh to‘plamning taqsimot funksiyasi $F(x,\theta)$ bo‘lib, θ noma’lum parametr bo‘lsin, $x_1, x_2,...x_n$ esa bosh to‘plamdan olingan tanlanma bo‘lsin. Tanlanmaning ixtiyoriy funksiyasi $L(x_1, x_2,...x_n)$ statistika deyiladi.

Statistikaning kuzatilgan qiymati $L = L(x_1, x_2,...x_n)$ θ parametrning taqribiy qiymati sifatida olinadi. Bu holda $L(x_1, x_2,...x_n)$ statistika θ parametrning bahosi deyiladi.

$$\bar{x}_{\text{T}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Tanlanmaning o‘rta qiymati,

$$D_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_T)^2$$

tanlanmaning dispersiyasi deyiladi.

Agar

$$ML(x_1, x_2,...x_n) = \theta$$

shart bajarilsa, L baho θ parametr uchun siljimagan baho deyiladi.

Agar L baho va har qanday $\varepsilon > 0$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} P(|L - \theta| \le \varepsilon) = 1$$

munosabat bajarilsa, L baho θ parametr uchun asosli baho deyiladi.

Agar L baho uchun

$$\lim_{n\to\infty} D(L) = 0$$

L baho θ parametr uchun asosli baho bo‘ladi.

Agar θ parametrning $L_1 va L_2$ siljimagan baholari berilgan bo‘lib, $D(L_1) < D(L_2)$

bo‘lsa, L_1 baho L_2 bahoga nisbatan samarali baho deyiladi.

Berilgan n hajmli tanlanmada eng kichik dispersiyali baho samarali baho bo‘ladi.

$\overline{x_T}$ –tanlanma o‘rtacha bosh to‘plam o‘rta qiymati uchun siljimagan, asosli va samarali baho bo‘ladi.

D_T -tanlanma dispersiya bosh to‘plam dispersiyasi uchun asosli baho bo‘ladi.

$S=\frac{n}{n-1}D_T$ – bosh to‘plam dispersiyasi uchun siljimagan, asosli baho bo‘ladi.

Tanlanma o‘rtacha va tanlanma dispersiyalarni hisoblashni soddalashtirish uchun ba’zan quyidagi formulalardan foydalaniladi:

$$u_i=\frac{x_i-c}{h}, \qquad i=\overline{1,n}$$

$$\overline{u}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_i\ , \qquad \overline{x_T}=\overline{u}\cdot h+c\,,$$

$$D_T^u=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(u_i-\overline{u})^2\ , \qquad D_T^x=h^2\cdot D_T^u$$

bu yerda c va h sonlari hisoblashni yengillashtiradigan qilib tanlanadi.

311-misol. Sterjenning uzunligi 5 marta o‘lchanganda quyidagi natijalar olingan: 92, 94, 103, 105, 106.

a) Sterjen uzunligining tanlanma o‘rta qiymatini toping.

b) Yo‘l qo‘yilgan xatolarning tanlanma dispersiyasini toping.

Yechish: a)Tanlanma o‘rtacha $\overline{x_T}$ni topish uchun shartli variantalardan foydalanamiz, chunki dastlabki variantalar katta sonlardir. $u_i=x_i-92$

$$\overline{x_T}=92+\frac{0+2+11+13+14}{5}=92+8=100$$

b) Tanlanma dispersiyani topamiz.

$$D_T=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_T)^2}{n}=\frac{(92-100)^2+(94-100)^2+(103-100)^2+(105-100)^2+(106-100)^2}{5}=34$$

312-misol. Bosh to‘plamdan n=60 hajmli tanlanma olingan.

x_i	1	3	6	26
n_i	8	40	10	2

Bosh o‘rtacha qiymatning siljimagan bahosini toping.

Yechish: Bosh o‘rtacha qiymatning siljimagan bahosi tanlanma o‘rtacha bo‘ladi.

$$\overline{x_T}=\frac{\sum n_i x_i}{n}=\frac{1\cdot 8+3\cdot 40+6\cdot 10+26\cdot 2}{60}=\frac{240}{60}=4$$

313-misol. Ushbu n=10 hajmli tanlanma taqsimoti bo‘yicha tanlanma o‘rtachani va tanlanma dispersiyani toping.

x_i	0.01	0.04	0.08

n_i	5	3	2

Yechish: $u_i = 100x_i$, $(h = 1/100)$ shartli variantalarga o‘tamiz va natijada quyidagi taqsimotni hosil qilamiz.

u_i	1	4	8
n_i	5	3	2

$$\bar{u} = \frac{\sum n_i u_i}{n} = \frac{1}{10}(1\cdot 5 + 4\cdot 3 + 8\cdot 2) = 3.3$$

$$\bar{x}_T = \frac{\bar{u}}{100} = 0{,}033$$

$$D_T^u = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} - \left[\frac{\sum n_i u_i}{n}\right]^2 = \frac{5\cdot 1^2 + 3\cdot 4^2 + 2\cdot 8^2}{10} - \left[\frac{5\cdot 1 + 3\cdot 4 + 2\cdot 8}{10}\right]^2 = 7.21$$

$$D_T^x = h^2 D_T^u = \frac{1}{100^2}\cdot 7.21 \approx 0.0007$$

314. Ushbu n=10 hajmli tanlanma taqsimoti bo‘yicha tanlanma dispersiyasini toping.

x_i	186	192	194
n_i	2	5	3

315. n=10 hajmli tanlanmaning ushbu taqsimoti bo‘yicha tanlanma o‘rtachani toping.

x_i	1250	1270	1280
n_i	2	5	3

316. Bosh to‘plamdan n=50 hajmdagi tanlanma ajratilgan

x_i	2	5	7	10
n_i	16	12	8	14

Bosh to‘plam o‘rta qiymatining siljimagan bahosini toping.

317. Guruhdagi 40 ta talabaning yozma ishlari baholarining chastotalari jadvali berilgan.

x_i	2	3	4	5
n_i	3	8	25	4

Tanlanmaning o‘rtacha va tanlanma dispersiyasini toping.

318. n=10 hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo‘yicha tanlanma dispersiyasini toping.

x_i	2502	2804	2903	3028
n_i	8	30	60	2

319. n=50 hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo‘yicha tanlanma dispersiyasini toping.

x_i	0.1	0.5	0.6	0.8

n_i	5	15	20	10

320. n=50 hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo‘yicha tanlanma dispersiyani toping.

x_i	18.4	18.9	19.3	19.6
n_i	5	10	20	15

321. n=41 hajmli tanlanma bo‘yicha bosh dispersiyaning D_T=3 siljigan bahosi topilgan. Bosh to‘plam dispersiyasining siljimagan bahosini toping.

322. n=10 hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo‘yicha tuzatilgan tanlanma dispersiyani toping.

x_i	102	104	108
n_i	2	3	5

323. Ushbu n=100 hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo‘yicha tanlanma dispersiyasini toping.

x_i	340	360	375	380
n_i	20	50	18	12

324. Ushbu n=10 hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo‘yicha tanlanma dispersiyasini toping.

x_i	23.5	26.1	28.2	30.4
n_i	2	3	4	1

325. Ushbu n=100 hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo‘yicha tanlanma dispersiyasini toping.

x_i	156	160	164	168	172	176	180
n_i	10	14	26	28	12	8	2

Matematik kutilish va dispersiya uchun ishonchli oraliqlar

Faraz qilaylik, $x_1, \quad x_2, \ldots\ldots x_n$ tanlanma berilgan bo‘lib, uning taqsimot funksiyasi $F(x,\theta)$bo‘lsin. $L(x_1, \quad x_2, \ldots\ldots x_n)$statistika θ parametr uchun statistik baho bo‘lsin.

Agar ixtiyoriy $\alpha>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son topish mumkin bo‘lsa va uning uchun

$$P(|L-\theta|)<\delta)=1-\alpha$$

bo‘lsa, u holda (L–δ; L+δ) oraliq θ parametrning 1–α ishonchlilik darajali ishonchli oralig‘i deyiladi.

X belgisi normal taqsimlangan bosh to‘plamning matematik kutilishi a uchun quyidagi ishonchli oraliqdan foydalaniladi:

a) $\overline{x_T} - t_a \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_T} + t_a \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

bu yerda σ – o‘rtacha kvadratik chetlanish, t_α – Laplas funksiyasi $\phi(t)$ ning $\phi(t_\alpha) = \frac{\alpha}{2}$ bo‘ladigan qiymati.

b) σ – noma’lum bo‘lib, tanlanma hajmi n>30 bo‘lganda:

$$\overline{x_T} - t_{n-1;\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_T} + t_{n-1;\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Bu yerda S^2 – tuzatilgan tanlanma dispersiya, $t_{n-1;\alpha}$ – Styudent taqsimoti jadvalidan berilgan n va α lar bo‘yicha topiladi.

Eslatma: $\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ baho aniqligi deyiladi.

X belgisi normal taqsimlangan taqsimot funksiyasining dispersiyasi σ^2 uchun quyidagi ishonchli oraliqlardan foydalaniladi:

$S^2(1-q)^2 < \sigma^2 < S^2(1+q)^2$, q<1 bo‘lganda, yoki

$S(1-q) < \sigma < S(1+q)$

$0 < \sigma^2 < S^2(1+q)^2$, q>1 bo‘lganda, yoki $0 < \sigma < S(1+q)$

326-misol. Bosh to‘plamning normal taqsimlangan X belgisining noma’lum matematik kutilishi a ni $v=0,95$ ishonchlilik bilan baholash uchun ishonchli oraliqni toping. Bunda $\sigma = 5$, tanlanma o‘rtacha $\overline{x_T} = 14$ va tanlanma hajmi n=25 berilgan.

Yechish: $\phi(t) = \frac{1}{2}v$ munosabatdan $\phi(t) = \frac{0,95}{2}$ =0,475 jadvaldan t=1,96 ni topamiz. Topilganlarni

$$\overline{x_T} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_T} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{formulaga qo‘yib,}$$

$$\left(14 - 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}}; 14 + 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}}\right)$$

yoki

(12,04; 15,96)

ishonchli oraliqni topamiz.

327-misol. Bosh to‘plamning X belgisi normal taqsimlangan. n = 16 hajmli tanlanma bo‘yicha tanlanma o‘rtacha $\overline{x_T} = 20,2$ va tanlanma o‘rtacha kvadratik chetlanish S=0,8 topilgan. Noma’lum matematik kutilishni ishonchli oraliq yordamida v=0,95 ishonchlilik bilan baholang.

Yechish: $t_{n-1;v}$ ni jadvaldan topamiz. v=0,95; $n=16$; $t_{n-1;v}$ =2,13

Bu qiymatlarni $\overline{x_T} - t_{n-1;v}\frac{S}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_T} + t_{n-1;v}\frac{S}{\sqrt{n}}$ formulaga qo‘ysak,

$$(20{,}2-2{,}13\cdot\frac{0{,}8}{\sqrt{16}};20{,}2+2{,}13\cdot\frac{0{,}8}{\sqrt{16}})\,yoki\ (19{,}774;20{,}626)$$

hosil bo‘ladi. Demak, noma’lum a parametr 0,95 ishonchlilik bilan (19,774; 20,626) ishonchli oraliqda yotadi.

328-misol. Bosh to‘plamning X belgisi normal taqsimlangan. n = 16 hajmli tanlanma bo‘yicha tanlanma o‘rtacha kvadratik chetlanish S=1 topilgan. Bosh to‘plam o‘rtacha kvadratik chetlanishi σ ni 0,95 ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonchli oraliqni toping.

Yechish: Berilganlar *v=0,95* va n=16 bo‘yicha jadvaldan q=0,44<1 ekanligini topamiz. Topilganlarni *S(1– q)<* σ *<S(1+q)* formulaga qo‘yamiz va $1\cdot(1-0.44)<\sigma<1\cdot(1+0.44)$ yoki 0,56< σ <1,44 ishonchli oraliqni hosil qilamiz.

329. Tasodifiy miqdor **τ**=2 parametr bilan normal qonun bo‘yicha taqsimlangan. n=25 hajmli tanlanma olingan. Bu taqsimotning noma’lum *a* parametri uchun *v=0,95* ishonchlilik bilan ishonchli oraliqni toping. $\overline{x_t}=20$

330. Fizik kattalikni to‘qqizta bir xil, bog‘liq bo‘lmagan o‘lchash natijasida olingan natijalarning o‘rta arifmetigi x_1=42,319 va tanlanma o‘rtacha kvadratik chetlanish S=5 topilgan. O‘lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymatini *v=0,95* ishonchlilik bilan aniqlash talab qilinadi.

331. Agar 10 ta bog‘liq bo‘lmagan o‘lchashlar natijasida obyektgacha bo‘lgan masofa (m) uchun 25025, 24970, 24780, 25315, 24097, 24646, 24717, 25354, 24912, 25374 natijalar olingan bo‘lsa, obyektgacha bo‘lgan masofaning matematik kutilishi uchun *v=0,9* ishonchlilik bilan ishonchli oraliqni toping. Bunda o‘lchash xatoligi σ=100 o‘rtacha kvadratik chetlanish bilan normal taqsimlangan deb faraz qilinadi.

332. 10 ta erkli o‘lchashlar natijasida sterjen uzunligi (mm) uchun quyidagi ma’lumotlar olingan: 23, 24, 23, 25, 25, 26, 26, 25, 24, 25. O‘lchash xatoligi normal taqsimlangan deb faraz qilib, sterjen uzunligining matematik kutilishi uchun *v=0,95* ishonchlilik bilan ishonchli oraliqni toping.

333. Bosh to‘plamning miqdoriy belgisi normal taqsimlangan. n hajmli tanlanma bo‘yicha tuzatilgan o‘rtacha kvadratik chetlanish S topilgan.

a) o‘rtacha kvadratik chetlanish σ ni;

b) dispersiyasini 0,99 ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonchli oraliqni toping, bunda n=10, S=5,1

334. Biror fizik kattalikni bog‘liq bo‘lmagan bir xil aniqlikdagi 9 ta o‘lchash ma’lumotlari bo‘yicha o‘lchashlarning o‘rta arifmetik qiymati $x_T=30{,}1$ va o‘rtacha kvadratik chetlanishi S=6 topilgan. O‘lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymatini ishonchli oraliq yordamida *v=0,95* ishonchlilik bilan baholang.

335. Bosh to‘plamning normal taqsimlangan X son belgisining noma’lum matematik kutilishi *a* ni 0,95 ishonchlilik bilan baholash uchun ishonchli oraliqni toping, bunda o‘rtacha kvadratik chetlanish σ=4 tanlanma o‘rtacha $\overline{x_t}=10{,}2$ va tanlanma hajmi n=16.

336. Bosh to‘plamning normal taqsimlangan X belgisining matematik kutilishini tanlanma o‘rta qiymat bo‘yicha bahosining 0,925 ishonchlilik bilan aniqligi 0,2 ga teng bo‘ladigan tanlanmaning minimal hajmini toping. O‘rtacha kvadratik chetlanishini σ=1,5 ga teng deb oling.

337. Tanlanmaning shunday minimal hajmini topingki, bosh to‘plam a matematik kutilishining tanlanma o‘rtacha qiymat bo‘yicha 0,975 ishonchlilik bilan bahosining aniqligi δ=0,3 ga teng bo‘lsin. Normal taqsimlangan bosh to‘plamning o‘rtacha kvadratik chetlanishi σ=1,2 ga teng.

338. Bosh to‘plamdan n=10 hajmli tanlanma olingan.

x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

Bosh to‘plamning normal taqsimlangan X belgisining a matematik kutilishini tanlanma o‘rtacha qiymat bo‘yicha 0,95 ishonchlilik bilan ishonchli interval yordamida baholang.

339. Tanlanmaning shunday minimal hajmini topingki, normal taqsimlangan bosh to‘plam matematik kutilishining tanlanma o‘rtacha qiymat bo‘yicha bahosining aniqligi 0,925 ishonchlilik bilan 0,2 ga teng bo‘lsin. Bosh to‘plam o‘rtacha kvadratik chetlanishi σ=1,5 ga teng.

340. Bosh to‘plamdan n=12 hajmli tanlanma olingan:

x_i	-0.5	-0.4	-0.2	0	0.2	0.6	0.8	1	1.2	1.5
n_i	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1

Bosh to‘plamning normal taqsimlangan belgisining a matematik kutilishini 0,95 ishonchlilik bilan ishonchli oraliq yordamida baholang.

8-MAVZU: SHARTLI O‘RTACHA QIYMATLAR. KORRELATSION JADVAL. REGRESSIYA TENGLAMASI. CHIZIQLI KORRELATSIYA

Agar X va Y tasodifiy miqdorlar (belgilar) ustida kuzatishlar otkazilgan bo‘lib, kuzatishlar natijalari mos ravishda $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$,……$(x_k; y_k)$lardan iborat bo‘lsa, u holda X va Y orasidagi bog‘lanishni ushbu jadval ko‘rinishida tasvirlash mumkin.

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_k
y_i	y_1	y_2	$\dots$	y_k

Agar kuzatishlar natijasida hosil bo‘lgan (x_i; y_i) juftlarining soni katta bo‘lsa, hamda ularning ayrimlari takrorlanadigan bo‘lsa, u holda yuqoridagi jadval o‘rniga quyidagi ikki o‘lchovli jadvalni keltirish mumkin.

Y X	y_1	y_2	$\dots$	y_s	M_x
x_1	m_{11}	m_{12}	$\dots$	m_{1S}	M_{x1}
x_2	m_{21}	m_{22}	$\dots$	m_{2S}	M_{x2}
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
x_k	m_{k1}	m_{k2}	$\dots$	m_{ks}	M_{xk}
M_y	M_{y1}	M_{y2}	$\dots$	M_{ys}	n

Bu jadval korrelatsion jadval yoki korrelatsion panjara deb ataladi.

Aytaylik, X va Y belgilar orasidagi bog‘lanish o‘rganilayotgan bo‘lsin, X ning har bir qiymatiga Y ning bir necha qiymati mos kelsin. Masalan, x_1=8 da y_1=2**;** y_2=3; y_3=7 qiymatlar olgan bo‘lsin. Bularning arifmetik o‘rtachasini topsak:

$$\bar{y}_8 = \frac{2+3+7}{3} = 4$$

U holda, $\bar{y}_8$– shartli o‘rtacha qiymat deb ataladi.

$\bar{y}_8$– shartli o‘rtacha qiymat deb *Y* ning *X*=*x* qiymatga mos qiymatlarining arifmetik o‘rtachasiga aytiladi.

Y ning X ga korrelatsion bog‘liqligi deb $\overline{y_x}$ shartli o‘rtachaning *x* ga funksional bog‘liqligiga aytiladi:

$$\overline{y_x} = f(x)$$

Bu tenglama Y ning X ga regressiya tenglamasi deb ataladi. Bu tenglama grafigi esa Y ning X ga regressiya chizig‘i deb ataladi.

X ning regressiya tenglamasi va regressiya chizig‘i ham yuqoridagiga o‘xshash aniqlanadi.

$$\overline{x_y} = \varphi(y)$$

Agar Y ning X ga va Xning Y ga regressiya chizig‘ining ikkalasi ham to‘g‘ri chiziqlar bo‘lsa, u holda korrelatsiya chiziqli korrelatsiya deyiladi.

Y ning X ga regressiya to‘g‘ri chizig‘ining tanlanma tenglamasi:

$$\overline{y_x} - y = r_T \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$$

ko‘rinishida bo‘ladi. Bu yerda $\overline{y_x}$ – shartli o‘rtacha qiymat, $\bar{x}$ va $\bar{y}$ tekshirilayotgan X va Y belgilarining tanlanma o‘rtacha qiymatlari, σ_x va σ_y lar esa mos ravishda X va Y belgilarining o‘rtacha kvadratik chetlanishlari, r_T tanlanma korrelatsiya koeffitsiyenti bo‘lib,

$$r_T = \frac{\sum n_{xy} x_i y_i - n\overline{xy}}{n\sigma_x \sigma_y} \quad \text{yoki} \quad r_T = \frac{\sum x_i y_i - n\overline{xy}}{n\sigma_x \sigma_y}$$

formula bo‘yicha hisoblanadi.

Tanlanma korrelatsiya koeffitsiyenti alohida muhim ahamiyatga ega bo‘lib, u belgilar orasidagi chiziqli korrelatsion bog‘lanishning zichligini baholash uchun xizmat qiladi. Tanlanma korrelatsiya koeffitsiyenti uchun $|r_T \le 1|$ munosabat har doim o‘rinli bo‘lib, r_T kattalik birga qancha yaqin bo‘lsa, bog‘lanish shuncha kuchli, 0 ga qancha yaqin bo‘lsa, bog‘lanishi shuncha kuchsiz bo‘ladi.

X ning Y ga regressiya to‘g‘ri chizig‘ining tanlanma tenglamasi quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\bar{x}_y - \bar{x} = r_T \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(\bar{y} - y)$$

341-misol. Tanlanmaning quyidagi jadvali yordamida tanlanma shartli o‘rta qiymat $\overline{x_y}$ ni toping.

X / Y	4	5	6	7	n_y
1	3	1	-	3	7
2	–	2	4	1	7
3	5	1	5	–	11
n_x	8	4	9	1	n=25

Yechish: $\overline{x_1} = \frac{4\cdot 3 + 5\cdot 1 + 6\cdot 0 + 7\cdot 3}{7} = \frac{38}{7}$

$$\overline{x_2} = \frac{4\cdot 0 + 2\cdot 5 + 6\cdot 4 + 7\cdot 1}{7} = \frac{41}{7}$$

$$\overline{x_3} = \frac{4\cdot 5 + 5\cdot 1 + 6\cdot 5 + 7\cdot 0}{11} = \frac{55}{11}$$

342-misol. Bir xil turdagi mahsulot ishlab chiqaruvchi 5 ta sanoat korxonalari bo‘yicha quyidagi mahsulotlar olingan.

Mehnatni elektr energiya bilan ta’minlanganligi– X (kvt/soat)	7,1	8,3	8,5	9	10,5
Mehnat unumdorligi – Y (dona)	14	16	14	15	17

Bu ma’lumotlardan foydalanib, mehnat unumdorligining (Y) elektrenergiya bilan ta’minlanganlik darajasiga (X ga) bog‘liqligi regressiya to‘g‘ri chiziqlarining tanlanma tenglamasin itoping.

Yechish: Dastlab

$$r_T = \frac{\sum x_i y_i - n\overline{xy}}{n\sigma_x\sigma_y}$$

formuladagi zarur hisoblashlarni bajaramiz:

$$\overline{x} = \frac{7.1+8.3+8.5+9+10.5}{5} = 8.68$$

$$\overline{y} = \frac{14+16+14+15+17}{5} = \frac{76}{5} = 15.2$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - (\overline{x})^2} = \sqrt{\frac{7.1^2+8.3^2+8.5^2+9^2+10.5^2}{5} - 8.68^2} \approx 1.1$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n} - (\overline{y})^2} = \sqrt{\frac{14^2+16^2+14^2+15^2+17^2}{5} - 15.2^2} \approx 1.16$$

$$\sum x_i y_i = 7.1\cdot 14+8.3\cdot 16+8.5\cdot 14+9\cdot 15+10.5\cdot 17 = 664.7$$

Bu topilganlarni formulaga qo‘ysak:

$$r_T = \frac{664.7-5\cdot 8.68\cdot 15.2}{5\cdot 1.1\cdot 1.6} = \frac{5.02}{6.38} \approx 0.79$$

Tanlanma korrelatsiya koeffitsiyentining topilgan bu qiymati X va Y belgilar orasidagi chiziqli bog‘liqlik kuchli ekanligini ko‘rsatadi.

Endi yuqoridagi hisoblanganlarni

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_T\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\overline{x})$$

regressiya tenglamasiga qo‘yib,

$$\overline{y}_x - 15.2 = 0.79\cdot\frac{1.16}{1.1}(x-8.68)$$

Sodda almashtirishlardan so‘ng, regressiya tenglamasini

$$\overline{y}_x - 0.82x + 8.08$$

ko‘rinishda topamiz. Bu tenglama mehnat unumdorligini (Y ni) mehnatni elektr energiya bilan ta’minlanganlik darajasiga (X ga) korrelatsion bog‘liqligini ifodalaydi.

343-misol. Y ning X ga regressiya to‘g‘ri chizig‘ining tanlanma tenglamasini quyidagi korrelatsion jadvalda keltirilgan ma’lumotlar bo‘yicha toping.

Y \ X	3	4	5	6	n_y
2	5	–	1	4	10

3	1	2	–	–	3
4	–	4	5	3	12
n_x	6	6	6	7	n=25

Yechish:

$$\bar{x}=\frac{6\cdot 3+6\cdot 4+6\cdot 5+7\cdot 6}{25}=\frac{18+24+30+42}{25}=4.56$$

$$\bar{y}=\frac{10\cdot 2+3\cdot 3+12\cdot 4}{25}=\frac{20+9+48}{25}=3.08$$

$$x^2=\frac{9\cdot 6+16\cdot 6+25\cdot 6+36\cdot 7}{25}=\frac{54+96+150+252}{25}=22.08$$

$$\overline{y^2}=\frac{4\cdot 10+9\cdot 3+16\cdot 12}{25}=\frac{40+27+192}{25}=10.36$$

Yuqoridagilardan foydalanib σ_x va σ_y ni topamiz.

$$\sigma_x=\sqrt{\overline{x^2}-(\bar{x})^2}=\sqrt{22.08-4.56^2}\approx 1.18$$

$$\sigma_y=\sqrt{\overline{y^2}-(\bar{y})^2}=\sqrt{10.36-(3.08)^2}\approx 0.87$$

$\sum n_{xy}x_iy_i$ ni topish uchun quyidagi hisoblash jadvalini tuzamiz.

X / Y	3	4	5	6	$U=\sum n_{xy}x$	$y\cdot U$
2					44	88
3					11	33
4	–				59	236
$V=\sum n_{xy}y$	13	22	22	20		$\sum_y y\cdot U=357$
$x\cdot V$	39	88	110	120	$\sum_x x\cdot V=357$	Tekshirish

Ikkala yig‘indining bir xilga 357 ga teng ekanligi hisoblashlarning to‘g‘ri bajarilganligini ko‘rsatadi. Jadval quyidagicha to‘ldirilgan.

1. n_{xy} chastotaning x variantga ko‘paytmasini, ya’ni $n_{xy}\cdot x$ ni , bu chastotani o‘z ichiga olgan katakning yuqori o‘ng burchagiga yoziladi. Masalan, birinchi satr kataklarining yuqori o‘ng burchaklarida 5*3=15; 1*5=5; 4*6=24 ko‘paytmalar yozilgan.

2. Bir satr kataklarning yuqori o‘ng burchaklarida joylashgan barcha sonlarni qo‘shiladi va ularning yig‘indisi “U ustun”ning shu satrdagi katagiga yoziladi. Masalan, birinchi satr uchun U=15+5+14=44

3. Nihoyat y variantani U ga ko‘paytiriladi va hosil bo‘lgan ko‘paytma “y U ustunning” tegishli katagiga yoziladi. Masalan, jadvalning birinchi satrida y=2, U=44, demak:

$$y\cdot U=2\cdot 44=88$$

4. “yU ustunning” barcha sonlarini qo‘shib, $\sum_{y} yU$ yig‘indi hosil qilinadi, Y izlanayotgan $\sum n_{xy} x_i \cdot y_i$ yig‘indiga teng bo‘ladi. Masalan, yuqoridagi jadvalda $\sum n_{xy} x_i \cdot y_i$ =357

Tekshirish maqsadida shunga o‘xshash hisoblashlar ustunlar bo‘yicha ham o‘tkaziladi.

Izlanayotgan tanlanmaning korrelatsiya koeffitsiyentini topamiz:

$$r_T \frac{\sum n_{xy} xy - n\overline{xy}}{n\sigma_x \sigma_y} = \frac{357 - 25 \cdot 4.56 \cdot 3.08}{25 \cdot 1.18 \cdot 0.87} = \frac{5.58}{25.665} \approx 0.23$$

yuqorida topilgan qiymatlarni $\overline{y}_x - \overline{y} = r_T \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x})$ regressiya tenglamasiga qo‘yib

$$y_x - 3.08 = 0.23 \cdot \frac{0.87}{1.18} \cdot (x - 4.56)$$

Sodda almashtirishlardan so‘ng regressiya tenglamasini $\overline{y}_x = 0.17x + 2.3$ ko‘rinishda topamiz.

344. Berilgan jadval bo‘yicha X va Y tasodifiy miqdor tanlanma korrelatsiya koeffitsiyenti topilsin.

X	– 1	3	4	0	2	3	1	4
Y	2	0	1	– 1	1	1	2	0

345. Tanlanmaning quyidagi jadvali yordamida Y ning X ga chiziqli tanlanma regressiya tenglamasini tuzing.

X	10	2	7	5
Y	8	2	6	4

346. Tanlanmaning quyidagi jadvali yordamida tanlanmaning shartli o‘rta qiymati $\overline{x}_y$ ni toping.

Y \ X	3	4	5	6	n_y
2	5	–	1	4	10
3	1	2	–	–	3
4	–	4	5	3	12
n_x	6	6	6	7	n=25

347. Berilgan jadvaldan foydalanib tanlanmaning shartli o‘rta qiymati $\overline{y}_x$ ni toping.

Y \ X	3	3.5	4	4.5	5
7	5	3	–	–	–
9	2	3	5	3	1
13	–	1	1	2	2

348. Agar

X	3	5	1	– 2	4	2	1	0	3
Y	– 2	0	1	5	1	2	3	1	1

bo‘lsa, korrelatsiya koeffitsiyenti topilsin.

349. Tanlanmaning quyidagi jadvali yordamida Y ning X ga chiziqli tanlanma regressiya tenglamasini tuzing.

X	10	2	7	5
Y	8	2	6	4

350. Tanlanmaning quyidagi jadvali yordamida tanlanmaning shartli o‘rta qiymati $\bar{x}_y$ ni toping.

Y \ X	6	30	50	n_y
1	15	–	–	15
3	1	14	–	15
4	–	2	18	20
n_x	16	16	18	n=50

351. Tanlanmaning quyidagi jadvali yordamida tanlanmaning shartli o‘rta qiymati $\bar{y}_x$ ni toping.

Y \ X	1	9	19	n_y
0	13	–	–	13
2	2	10	–	12
3	1	1	23	25
n_x	16	11	23	n=50

352. Y ning X ga regressiya to‘g‘ri chizig‘ining tanlanma tenglamasini quyidagi jadvalda keltirilgan ma’lumotlar bo‘yicha toping.

Y \ X	20	25	30	35	40	n_y
16	4	6	–	–	–	10
26	–	8	10	–	–	18
36	–	–	32	3	9	44
46	–	–	4	12	6	22
56	–	–	–	1	5	6
n_x	4	14	46	16	20	n=100

353. Quyidagi korrelatsion jadvalda keltirilgan ma’lumotlar bo‘yicha Y ning X ga va X ning Yga regressiya to‘g‘ri chiziqlarining tanlanma tenglamalarini toping.

X / Y	5	10	15	20	25	30	35	40	n_y
100	2	1	–	–	–	–	–	–	8
120	3	4	3	–	–	–	–	–	10
140	–	–	5	10	8	–	–	–	23
160	–	–	–	1	–	6	1	1	9
180	–	–	–	–	–	–	4	1	5
n_x	5	5	8	11	8	6	5	2	n=50

354. Quyidagi jadvalda keltirilgan ma’lumotlar bo‘yicha Y ning X ga va X ning Yga regressiya to‘g‘ri chiziqlarining tanlanma tenglama-larini toping.

X / Y	18	23	28	33	38	43	48	n_y
125	–	1	–	–	–	–	–	1
150	1	2	5	–	–	–	–	8
175	–	3	2	12	–	–	–	17
200	–	–	1	8	7	–	–	16
225	–	–	–	–	3	3	–	6
250	–	–	–	–	–	1	1	2
n_x	1	6	8	20	10	4	1	n=50

355. Rayondagi 10 ta oziq-ovqat magazini bo‘yicha bir oylik tovar ayirboshlash hajmi (X) va shu davr mobaynidagi muomala xarajatlari (Y) hajmi o‘rganilgan. Y ning X ga regressiyasi tenglamasini toping.

X (mln so‘m)	200	300	320	410	304	500	540	600	650	700
Y (mln so‘m)	20	27	30	36	38	44	50	56	58	60

356. Quyidagi berilgan ma’lumotlar bo‘yicha arpa boshog‘idagi donlar sonining (Y) boshoqning uzunligiga (X) bog‘liqligi chiziqli regressiya tanlanma tenglamasini tuzing.

X	6	6,8	7	8	8,5	9	10	11	12	13	14	15
Y	11	14	16	20	22	24	24	28	28	30	31	33

357. Quyidagi berilgan ma’lumotlar bo‘yicha 1 gektar yerdan olingan hosil miqdorning (Y) sarflangan o‘g‘it miqdoriga (X) bog‘liqligi chiziqli regressiya tanlanma tenglamasini toping.

X(s)	6	7	7,5	8	9	9,5	10
Y(s)	25	27	26	30	32	35	38

358. Quyidagi jadvalda keltirilgan ma’lumotlar bo‘yicha Y ning X ga va X ning Yga regressiya to‘g‘ri chiziqlarining tanlanma tenglamalarini toping.

Y \ X	5	10	15	20	25	30	35	n_y
100	–	–	–	–	–	6	1	7
120	–	–	–	–	–	4	2	6
140	–	–	8	10	5	–	–	23
160	3	4	3	–	–	–	–	10
180	2	1	–	1	–	–	–	4
n_x	5	5	11	11	5	10	3	n=50

359. Quyidagima’lumotlarbo‘yichashakerzavodlarifondlarihajmiga (X) lavlaginingzavodlardagibirsutkaliksarfining (Y) bog‘liqligichiziqliregressiyatanlanmatenglamanitoping.

X(mln so‘m)	120	150	250	270	350	370	400	420
Y(mln so‘m)	4	6	6	7	8	8	8	10

360. Bir oylik ish haqi fondining (Y) ishlab chiqarilgan jami mahsulot hajmiga (X) bog‘liqligini o‘rganish maqsadida 10 ta sanoat korxonasi bo‘yicha quyidagi ma’lumotlar olingan. Y ning X ga regressiya tanlanma tenglamasini toping.

Korxonalar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X(mln so‘m)	500	570	600	650	700	720	800	860	900	920
Y(mln so‘m)	110	120	130	135	138	145	150	154	160	164

Tanlanma korrelatsion nisbat. Egri chiziqli va to‘plamiy korrelatsiya

Tanlanma korrelatsiya koeffitsiyenti belgilar orasidagi chiziqli bog‘liqlik miqdorini xarakterlash bilan muhim ahamiyatga ega. Chiziqli bo‘lmagan yoki umuman, istalgan korrelatsion bog‘lanish zichligini qanday baholash mumkin, degan savol paydo bo‘lishi tabiiy. Istalgan korrelatsion bog‘lanish uchun korrelatsion nisbat deb ataluvchi quyidagi xarakteristika ishlatiladi. Y ning X ga tanlanma korrelatsion nisbati deb

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{yx}}{\sigma_y}$$

nisbat bilan aniqlanuvchi kattalikka aytiladi.

Bu yerda:

$\sigma_{\bar{y}_x} = \frac{\sum n_x(\bar{y}_x - \bar{y})^2}{n}$ – shartli o‘rtachaning o‘rtacha kvadratik chetlanishi;

$\sigma_y = \frac{\sum n_y(y - \bar{y})^2}{n}$ – umumiy o‘rtacha kvadratik chetlanishi;

n – tanlanma hajmi;

n_x– X belgi x qiymati chastotasi;

n_y– Y belgi y qiymati chastotasi;

$\overline{y}$– Y belginig umumiy o‘rtacha qiymati;

$\overline{y}_x$– Y belgining shartli o‘rtacha qiymati.

X belgining Y ga tanlanma korrelatsion nisbati ham shu kabi aniqlanadi:

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{\overline{x}_y}}{\sigma_x} \tag{1}$$

Agar X va Y orasidagi korrelatsion bog‘lanish o‘rganilayotgan bo‘lib,
$\overline{y}_x=f(x)$ yoki $\overline{x}_y=\varphi(y)$ regressiya funksiyalarining grafiklari egri chiziq bilan tasvirlanadigan bo‘lsa, korrelatsiya egri chiziqli deyiladi. Egri chiziqli korrelatsiya zichligini baholash uchun tanlanma korrelatsion nisbatlar xizmat qiladi.

Ba’zi amaliy masalalarda ikkita emas, balki undan ko‘p belgilar orasidagi bog‘lanishni o‘rganish zarurati tug‘iladi. Bunday holdagi korrelatsion bog‘lanish to‘plam (yoki ko‘plik) korrelatsiya deb ataladi. To‘plam korrelatsiyaning eng sodda holi bo‘lgan chiziqli korrelatsiyada X, Y va Z belgilar orasidagi korrelatsion munosabat

$$Z=aX+bY+C$$

tenglama ko‘rinishida ifodalanadi.

Z belgining X va Y belgilar bilan bog‘liqligining zichligi quyidagi to‘la korrelatsiya koeffitsiyenti bilan baholanadi:

$$R = \sqrt{\frac{r_{xz}^2 - 2r_{xy}r_{xz}r_{yz} + r_{yz}^2}{1-r_{xz}^2}} \tag{2}$$

shuningdek, Y ning tayin fiksirlangan qiymatida Z va X orasidagi bog‘lanish zichligi

$$r_{xz}(y) = \frac{r_{xz} - r_{xy}r_{yz}}{\sqrt{(1-r_{xz}^2)\cdot(1-r_{yz}^2)}},$$

X ning tayin fiksirlangan qiymatida Z va Y orasidagi bog‘lanish zichligi

$$r_{xz}(y) = \frac{r_{xz} - r_{xy}r_{yz}}{\sqrt{(1-r_{xz}^2)\cdot(1-r_{yz}^2)}} \tag{3}$$

Xususiy korrelatsiya koeffitsiyentlari bilan baholanadi.

Agar regressiya grafigi egri chiziq bilan ifodalansa, xususan, ikkinchi tartibli parabolik korrelyatiya bo‘lgan holda, Y ning X ga regressiyaning tanlanma tenglamasi

$$\overline{y}_x=Ax^2+Bx+C \tag{4}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Noma’lum A, B va C parametrlari quyidagi tenglamalar sistemasidan topiladi:

$$\begin{cases} \left(\sum n_x x^4\right)A + \left(\sum n_x x^3\right)B + \left(\sum n_x x^2\right)c = \sum n_x \overline{y}_x x^2 \\ \left(\sum n_x x^3\right)A + \left(\sum n_x x^2\right)B + \left(\sum n_x x\right)c = \sum n_x \overline{y}_x x \\ \left(\sum n_x x^2\right)A + \left(\sum n_x x\right)B + nc = \sum n_x \overline{y}_x \end{cases} \qquad (5)$$

X ning Y ga regressiyaning tanlanma tenglamasi

$$x_y = A_1 y^2 + B_1 y + C_1$$

ham shunga o‘xshash topiladi.

361. n=50 hajmli quyidagi korrelatsion jadval bo‘yicha Y belgining X belgiga korrelatsion nisbati η_{yx} ni toping.

Y \ X	10	20	30	n_y
15	4	28	6	38
25	6	–	6	12
n_x	10	28	12	n=50
y_x	21	15	20	

Yechish: $\overline{y}$ – umumiy o‘rtachani topamiz.

$$\overline{y} = \frac{\sum n_i y_i}{n} = \frac{38\cdot 15 + 12\cdot 25}{50} = \frac{870}{50} = 17.4$$

umumiy o‘rtacha kvadratik chetlanishni topamiz:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum n_y (y-\overline{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{38(15-17.4)^2 + 12(25-17.4)^2}{50}} = 4{,}27$$

shartli o‘rtachaning o‘rtacha kvadratik chetlanishini topamiz.

$$\sigma_{\overline{y}_{x0}} = \sqrt{\frac{\sum n_x (y_x - y)^2}{n}} = \sqrt{\frac{10(21-17{,}4)^2 + 28(15-17{,}4)^2 + 12(20-17{,}4)^2}{50}} = 2{,}73$$

Topilganlarni formulaga qo‘ysak,

$$n_{yx} = \frac{\sigma_{y_x}}{\sigma_y} = \frac{2{,}73}{4{,}27} = 0{,}64$$

362-misol. **Quyidagi korrelatsion jadvaldagi ma’lumotlar bo‘yicha**

$$\overline{y}_x = Ax^2 + Bx + C$$

regressiya tanlanma tenglamasini toping.

Y \ X	0	1	2	3	4	n_y
0	18	1	1	–	–	20
3	1	20	–	–	–	21
5	3	5	10	2	–	20
10	–	–	7	12	–	19
17	–	–	–	–	20	20
n_x	22	26	18	14	20	n=100

Yechish: Quyidagi hisoblash jadvalini tuzamiz.

x	n_x	$\overline{y}_x$	$n_x \cdot x$	$n_x \cdot x^2$	$n_x \cdot x^3$	$n_x \cdot x^4$	$n_x \overline{y}_x$	$n_x \overline{y}_x x$	$n_x \overline{y}_x x^2$
0	22	0,8	0	0	0	0	17,6	0	0

1	26	3,27	26	26	26	26	85,02	85,02	85,02
2	18	6,67	36	72	144	288	120,06	240,12	480,24
3	14	9,3	42	126	378	1134	130	390	1170
4	20	17	80	320	1280	5120	340	1360	5440
$\sum$	100		184	544	1828	6568	692,68	2075,14	7175,26

Jadvalning oxirgi satrida turgan sonlarni (5) ga qo‘yib, quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

$$6568A+1828B+544C=7175,26$$
$$1828A+544B+184C=2075,14$$
$$544A+184B+100C=692,68$$

Bu sistemani yechib, A=0,66 B=1,23 va C=1,07 ekanligini topamiz. Topilgan bu koeffitsiyentlarni regressiya tenglamasi

$$\overline{y}_x = Ax^2+Bx+c$$

ga qo‘yib,

$$\overline{y}_x = 0,66x^2+1,23x+1,07$$

ni hosil qilamiz.

363. Quyidagi jadvaldagi ma’lumotlar bo‘yicha $\overline{y}_x = Ax^2+Bx+c$ regressiya tanlanma tenglamasini va η_{yx} tanlanma korrelatsion nisbatni toping.

Y \ X	0	4	6	7	10	n_y
7	19	1	1	–	–	21
13	2	14	–	–	–	16
40	–	3	22	2	–	27
80	–	–	–	15	–	15
200	–	–	–	–	21	21
n_x	21	18	23	17	21	n=100

364. **Korrelatsion jadvalda keltirilgan ma’lumotlar bo‘yicha $x_y = Ay^2+By+c$ regressiya tanlanma tenglamasini va η_{yx} tanlanma korrelatsion nisbatni aniqlang.**

Y \ X	6	30	50	n_y
1	15	–	–	15
3	1	14	–	15
4	–	2	18	20
n_x	16	16	18	n=50

365. Quyidagi ma’lumotlar bo‘yicha $\overline{x}_y = Ay^2+By+c$ regressiya tanlanma tenglamasini va η_{yx} tanlanma korrelatsion nisbatni aniqlang.

Y \ X	1	9	19	n_y
0	13	–	–	13
2	2	10	–	12
3	1	1	23	25
n_x	16	11	23	n=50

9-Mavzu: Matematik statistikada ko'p ishlatiladigan taqsimotlar. Statistik gipotezalarni tekshirish. Gipotezalarni Pirsonning Muvofiqlik kriteriysi bo'yicha tekshirish

1. χ^2 taqsimot

Agar k ta o'zaro bog'liq bo'lmagan normalangan $X_i (i = l, k)$ tasodifiy miqdorlar normal taqsimotga ega bo'lsa, u holda ularning kvadratlari yig'indisi

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} X_i^2$$

ning taqsimoti ozodlik darajalari k bo'lgan χ^2 (Xu – kvadrat) taqsimot deyiladi. χ^2 taqsimotning zichlik funksiyasi quyidagicha:

$$P_k(x) = \begin{cases} 0, agar, x \le 0, bo'lsa, \\ \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)} e^{\frac{x}{2}} \cdot x^{\frac{k}{2}-1}, agar\ \ x > 0, bo'lsa \end{cases}$$

Bu yerda $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$ – gamma funksiya.

x^2 taqsimotning ozodlik darajalari $k \le 30$ bo'lsa, uning qiymatlari jadvaldan topiladi, agar ozodlik darajalari $k > 30$ bo'lsa, uni normal qonun bilan yetarlicha aniqlikda almashtirish mumkin.

2. Styudent taqsimoti.

X – normalangan normal taqsimlangan tasodifiy miqdor, Y – esa ozodlik darajalari k bo'lgan χ^2 taqsimotga ega tasodifiy miqdorlar bo'lsa, u holda

$$T = \frac{X}{\sqrt{\dfrac{Y}{k}}}$$

tasodifiy miqdor t – taqsimot (yoki k ozodlik darajali Styudent taqsimoti) ga ega deyiladi.

Styudent taqsimoti $k \to \infty$ da asimtotik normaldir. Bu taqsimotning zichlik funksiyasi quyidagicha:

$$P_k(x) = \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi k}\Gamma(\dfrac{k}{2})} \cdot (1 + \frac{x^2}{k})^{\frac{k+1}{2}}$$

3. Fisher taqsimoti

Agar X va Y bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar bo'lib, ular k_1 va k_2 ozodlik darajali χ^2 qonun bo'yicha taqsimlangan bo'lsa, u holda

$$F = \frac{X / k_1}{Y / k_2}$$

tasodifiy miqdor F taqsimotga (yoki k_1 va k_2 ozodlik darajali Fisher taqsimotiga) ega deyiladi.

Statistik gipoteza deb noma'lum taqsimotning ko'rinishi haqidagi yoki ma'lum taqsimotning noma'lum parametrlari haqidagi gipotezaga aytiladi. Nolinchi (asosiy) gipoteza deb ilgari surilgan H_0 gipotezaga, konkurent (zid) gipoteza deb esa nolinchi gipotezaga zid bo'lgan H_1 gipotezaga aytiladi.

Statistik kriteriy deb nolinchi (asosiy) gipotezani qabul qilsh yoki qabul qilinmaslik haqidagi qoidaga aytiladi. Bu qoida quyidagidan ibo-rat. Buning uchun qandaydir $Z(x_1,x_2...x_n)$ statistika olinib, uning (aniq yoki taqribiy) taqsimoti asosiy gipoteza o'rinli bo'lganda topiladi. So'ngra statistikaning qiymatlar sohasi ikkiga ajratiladi. Agar stati-stikaning kuzatilgan $Z(x_1,x_2...x_n)$ qiymati bu sohalarning birinchisiga tushsa, H_0 gipoteza qabul qilinish sohasi, ikkinchisiga esa kritik soha deyiladi. $Z(x_1,x_2...x_n)$ statistikaning qabul qilish mumkin bo'lgan barcha qiymatlari biror intervalga tegishli bo'ladi. Shu sababli kritik soha va gipotezaning qabul qilinish sohasi ham intervallar bo'ladi. Ularni nuqtalar ajratib turadi. Bu nuqtalar kritik nuqtalar deyiladi.

Kritik sohalar quyidagicha bo'lishi mumkin.

a) o'ng tomonlama kritik soha:

$$Z > Z_{kp}$$

b) chap tomonlama kritik soha:

$$Z < Z_{kp}$$

v) ikki tomonlama kritik soha:

$$|Z| > Z_{kp}$$

$Z(x_1,x_2...x_n)$ statistikaning kritik sohaga tushish ehtimoli α uning aniqlilik darajasi deyiladi.

Gipotezani statistik tekshirish natijasida ikki xil xatoga yo'l qo'yish mumkin.

Birinchi tur xato shuki, bunda to'g'ri gipoteza rad etiladi.

Ikkinchi tur xato shuki, bunda noto'g'ri gipoteza qabul qilinadi.

Kriteriyning quvvati deb konkurent gipoteza o'rinli bo'lish shartida Z kriteriyning kritik sohaga tushish ehtimoliga aytiladi. Kriteriyning quvvati qancha katta bo'lsa, ikkinchi tur xatoga yo'l qo'yish ehtimoli shuncha kichik bo'ladi.

X=$(x_1,x_2...x_n)$tanlanma berilgan bo'lib, uning asosida bosh to'plamning F(x) taqsimot funksiyasini aniqlash kerak bo'lsin.

Muvofiqlik kriteriysi deb taqsimot funksiyaning umumiy ko'rinishi haqidagi H_0 gipotezani qabul qilish yoki rad etishga imkon beradigan kriteriyga aytiladi.

Muvofiqlik kriteriylaridan biri Pirson kriteriysini qurish uchun X belgi qiymatlarining o'zgarish sohasini $\Delta_1, \Delta_2,...\Delta_k$ intervallarga bo'lamiz.

P_i – tasodifiy miqdor X ning Δ_i intervalga tushishining nazariy ehtimoli bo‘lsin: $P_i=P(X\in\Delta_i)$. Bu ehtimol H_0 gipotezadan kelib chiq-qan holda hisoblanadi, ya’ni X tasodifiy miqdor F(x) taqsimot funksiyaga ega deb faraz qilinadi.

n_i – hajmi n bo‘lgan $(x_1,x_2...x_n)$ tanlanmada X belgining Δ_i intervalga tushgan qiymatlarining soni bo‘lsin. Bunda

$$P_1+P_2+\ldots\ldots+P_k=1$$

$$n_1+n_2+\ldots\ldots+n_k=n$$

Agar tanlanmaning hajmi yetarlicha katta (n>30) bo‘lsa, taqsimotni taqriban normal taqsimot deb olish mumkin.

Ushbu

$$\xi_i=\frac{n_i-np_i}{\sqrt{np_i}}\quad i=\overline{l,k}$$

tasodifiy miqdorlarni qaraymiz.

Teorema. Agar H_0 gipoteza to‘g‘ri bo‘lsa va $np_i>5$ bo‘lsa, u holda

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\xi_i^2$$

tasodifiy miqdor k–1 ozodlik darajali χ^2 taqsimot bo‘yicha taqsimlangan hisoblanadi.

$n\to\infty$ da χ^2 taqsimot statistika assimptotik normaldir.

U holda, Pirsonning muvofiqlik kriteriysini quyidagicha ta’riflash mumkin.

Berilgan α aniqlilik darajasi va χ^2 taqsimot uchun jadvallardan x_a ning

$$P(\chi^2>x_\alpha)=\alpha$$

bo‘ladigan kritik qiymatlari topiladi. Tanlanma ma’lumotlariga ko‘ra χ^2 kriteriyning kuzatilgan qiymati hisoblanadi, agar u qiymat qabul qilish sohasiga tushsa, ya’ni $\chi^2>x_\alpha$ bo‘lsa, H_0 gipoteza qabul qilinadi va bosh to‘plam F(x) taqsimot funksiyaga ega deb hisoblanadi, agar $\chi^2>x_\alpha$ bo‘lsa,u holda H_0 gipoteza rad etiladi.

Agar nazariy chastotalarni hisoblashda a va σ^2 o‘rniga ularning $\overline{x}_T$ va S^2 baholaridan foydalaniladigan bo‘lsa, u holda

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(n_i-np_i)^2}{np_i}$$

statistika taqriban k–3 ozodlik darajali χ^2 taqsimot bo‘yicha taqsimlanadi.

366-misol. X belgili bosh to‘plamdan olingan tanlanmaning statistik taqsimoti berilgan

Δ_i	[0;5)	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)	[30;35)	[35;40)	[40;45)	[0;5)
n_i	2	12	8	4	14	6	10	2	1	11

X belgining taqsimot funksiyasi tekis taqsimotga muvofiq yoki muvofiq emasligini 0,05 aniqlik darajasi bilan Pirsonning muvofiqlik kriteriysi yordamida tekshiring.

Yechish:

$$n=\sum_{i=1}^{10} n_i = 70$$

Quyidagi jadvalni topamiz:

X	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5	42,5	47,5
W	0,029	0,171	0,114	0,057	0,2	0,086	0,143	0,029	0,014	0,157

U holda

$$X=\sum_{i=1}^{10} w_i x_i = 24.43$$

$$X^2 = \sum_{i=1}^{10} w_i x_i^2 = 782.67$$

$$S^2 = \overline{X}^2 - \overline{X}^2 = 185.92$$

$$S = \sqrt{185.92} \approx 13.63$$

X belgi tekis taqsimot qonuniga ega bo‘lgani uchun

$$M(X) = \frac{a+b}{2};\ D(X) = \frac{(b-a)^2}{12};\ \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

a va *b* ni aniqlash uchun quyidagi sistemani tuzamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = 24.43 \\ \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}} = 13.63 \end{cases}$$

Bundan *a*=0,85 *b*=48,01

$$\frac{1}{b-a} = \frac{1}{47.16} = 0.0212$$

Shunday qilib, X belgi zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 0, agar, x < 0{,}85, bo'lsa, \\ 0{,}0212, agar, 0{,}85 \le x \le 48{,}01, bo'lsa, \\ 0, agar x > 48{,}01, bo'lsa \end{cases}$$

Endi tekis taqsimot bo’yicha X belgining [0;5), [5;10),…,[45;50) oraliqlarga tushish ehtimolliklarini topamiz.

$$P_1 = P(0 < X < 5) = P(0{,}85 < X < 5) = \int_{0{,}85}^{5} 0{,}0212\,dx = 0{,}0212\,x \Big/_{0{,}85}^{5} = 0{,}088$$

$$P_2 = P(5 < X < 10) = \int^{10} 0{,}0212 dx = 0{,}106$$

$$P_{10} = P(45 < X < 50) = \int_{45}^{48,01} 0,0212dx = 0,064$$

Topilgan qiymatlarni jadval ko‘rinishda yozsak:

Δ_i	[– 5;0)	[0;5)	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)
P_1	0	0,088	0,106	0,106	0,106	0,106

Δ_i	[25;30)	[30;35)	[35;40)	[40;45)	[45;50)	[50;55)
P_1	0,106	0,106	0,106	0,106	0,064	0

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = n\sum_{i=1}^{k} \frac{(\frac{n_i}{n} - p_i)^2}{p_i} = n \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{(w_i - p_i)^2}{p_i} = n \cdot Y^2$$

Y^2ni hisoblash uchun quyidagi jadvalni tuzamiz:

W_i	P_i	$W_i - P_i$	$(W_i - P_i)^2$	$\frac{(W_i - P_i)^2}{P_i}$
0,029	0,088	– 0,059	0,003	0,034
0,171	0,106	0,065	0,004	0,038
0,114	0,106	0,008	0,006	0,057
0,057	0,106	– 0,049	0,002	0,019
0,2	0,106	0,094	0,009	0,085
0,086	0,106	– 0,020	0,000	0,000
0,143	0,106	0,037	0,001	0,009
0,029	0,106	– 0,077	0,006	0,057
0,014	0,106	– 0,092	0,008	0,075
0,157	0,064	0,093	0,009	0,141
				0,515

Shunday qilib,

$$\chi^2 = 70 \cdot 0,515 = 36,05$$

χ^2 taqsimot jadvalidan

$$\chi_{10-2-1;0,05} = \chi_{7;0,05} = 14,1$$

Demak, $\chi^2 > 14,1$ bo‘lgani uchun bosh to‘plamning taqsimot funksiyasi 0,05 aniqlik daraja bilan tekis taqsimotga mos kelmaydi degan xulosaga ega bo‘lamiz.

367-misol. X belgili bosh to‘plamdan olingan tanlanmaning statistik taqsimoti berilgan;

Δ_i	[0;3)	[3;6)	[6;9)	[9;12)	[12;15)	[15;18)	[18;21)	[21;24)	[24;27)	[27;30)
n_i	1	3	4	6	11	10	7	5	2	1

X belgining taqsimot funksiyasi normal taqsimotga muvofiq yoki muvofiq emasligini 0,05 aniqlilik darajasi bilan Pirsonning muvofiqlik kriteriysi yordamida aniqlang.

Yechish: $n = \sum_{i=1}^{10} n_i = 50$

$w_i = \frac{n_i}{n}, i = \overline{1,10}$ deb olib, quyidagi jadvalni tuzamiz:

X_i	1,5	4,5	7,5	10,5	13,5	16,5	19,5	22,5	25,5	28,5
W_i	0,02	0,06	0,08	0,12	0,22	0,20	0,14	0,10	0,04	0,02

U holda

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{10} X_i W_i = 15$$

$$S^2 = \overline{X^2} - (\overline{X})^2 = 34{,}65$$

$$S = 5{,}9$$

Endi $P_i = P(x \in \Delta_i), i = \overline{1,10}$ ehtimollarni hisoblaymiz.

$$P_1 = P(0 < X < 3) = P\left(\frac{0-15}{5{,}9} < \frac{X - M(X)}{Д(X)} < \frac{3-15}{5{,}9}\right) =$$

$$= \Phi(-2{,}03) - \Phi(-2{,}5) = \Phi(2{,}5) - \Phi(2{,}03) =$$

$$= 0{,}4938 - 0.4784 = 0.0154 \approx 0.02$$

Bu yerda $\Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^x e^{-\frac{Z^2}{2}dz}$

Xuddi shunga o‘xshash tarzda qolganlarini hisoblab, quyidagi jadvalni hosil qilamiz.

Δ_i	[0;3)	[3;6)	[6;9)	[9;12)	[12;15)	[15;18)	[18;21)	[21;24)
P_i	0,02	0,04	0,09	0,15	0,19	0,19	0,15	0,09

Δ_i	[24;27)	[27;30)
P_i	0,04	0,02

Yuqoridagilardan foydalanib x^2 ni hisoblash uchun jadval tuzamiz.

W_j	P_j	$W_j - P_j$	$(W_j - P_j)^2$	$\frac{(W_i - P_i)^2}{P_i}$
0,02	0,02	0	0,0000	0,00
0,06	0,04	0,02	0,0004	0,01
0,08	0,09	– 0,01	0,0001	0,001
0,12	0,15	– 0,03	0,0009	0,006
0,22	0,20	0,02	0,0004	0,006
0,20	0,20	0,00	0,0000	0,02
0,14	0,15	– 0,01	0,0001	0,00
0,10	0,09	0,01	0,0001	0,0007
0,04	0,04	0	0,0000	0,00
0,02	0,02	0	0,0000	0,00
				0,0387

$$\chi^2 = 50 \bullet 0{,}0387 = 1{,}935$$

$x^2 < 14{,}1$ bo‘lgani uchun bosh to‘plamning taqsimot funksiyasi normal taqsimotga mos keladi degan xulosaga ega bo‘lamiz.

368. X belgili bosh to‘plamidan olingan tanlanmaning statistik taqsimoti berilgan.

Δ_i	[4,1;4,2)	4,2;4,3)	[4,3;4,4)	[4,4;4,5)	[4,5;4,6)	[4,6;4,7)	[4,7;4,8)	4,8;4,9)	4,9
n_j	1	2	3	4	5	6	7	8	9

X belgining taqsimot funksiyasi normal taqsimotga muvofiq yoki muvofiq emasligi 0,05 aniqlik daraja bilan Pirsonning muvofiqlik kriteriysi yordamida aniqlang.

369. X belgili bosh to‘plamidan olingan tanlanmaning statistik taqsimoti berilgan.

Δ_i	[0;10)	[10;20)	[20;30)	[30;40	[40;50)	[50;60)
n_j	11	14	15	10	14	16

X belgining taqsimot funksiyasi tekis taqsimotga muvofiq emasligini 0,05 aniqlilik darajasi bilan Pirsonning muvofiqlik kriteriysi yordamida aniqlang.

370. Pirson kriteriysidan foydalanib 0,05 qiymatdorlik darajasida X bosh to‘plamning normal taqsimlanganligi haqidagi gipotezaning n=200 hajmli tanlanmaning ushbu taqsimoti bilan muvofiq kelish-kelmasligini tekshiring.

$\boldsymbol{x_j}$	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3
$\boldsymbol{n_j}$	6	9	26	25	30	26	21	24	20	8	5

371. Pirson kriteriysidan foydalanib 0,01 qiymatdorlik darajasida n_i empirik va n_i' nazariy chastotalar orasidagi farq tasodifiy yoki muhimligini aniqlang. Nazariy chastotalar X bosh to‘plamning normal taqsimlanganligi haqidagi gipotezaga asoslanib hisoblangan.

n_i	8	16	40	72	36	18	10
n_i'	6	18	36	76	39	18	7

372. Ikki tanga bir vaqtda 20 marta tashlanganida “GERB” hodisasining yuz berishlari soni quyidagi jadvalda keltirilgan.

Har ikkala tangada gerb tushishlari soni	0	1	2
Hodisa yuz bergan tashlashlar soni	4	8	8

Pirsonning muvofiqlik kriteriysi yordamida ikkala tangani ham simmetrik deb hisoblash mumkinmi? a=0,05 deb qabul qiling.
(jadvaldan $\chi^2_{0.95}(2)=5{,}99$)

373. Shashqol o‘yin toshi 120 marta tashlanganida 40 marta olti soni tushdi. Pirsonning muvofiqlik kriteriysi yordamida tashlanayotgan shashqolni to‘g‘ri shashqol deb hisoblash mumkinmi? a=0,05 deb qabul qiling. (jadvaldan $\chi^2_{0.95}(1)=3.84$ ekanligi aniqlangan).

374. Pirson kriteriysidan foydalanib 0,05 qiymatdorlik darajasida n_i empirik chastotalar bilan X bosh to‘plamning normal taqsimlanganligi haqidagi gipotezaga asoslanib hisoblangan n_i' nazariy chastotalar orasidagi farqning tasodifiy yoki muhimligini aniqlang.

n_i	5	10	20	8	7
n_i'	6	14	18	7	5

375. Tanga 50 marta tashlanganida 20 marta “gerb” hodisasi yuz berdi. Pirsonning muvofiqlik kriteriysi yordamida tashlangan tangani simmetrik a=0,1 deb qabul qiling. Bu yerda noma’lum parametr yo‘q, chunki $P=\frac{1}{2}$ deb faraz qilinadi. Jadvaldan $\chi_{0.99(1)=2.71}$ ekanligi topilgan.

III-BOB.CHIZIQLI PROGRAMMALASHTIRISH

10-Mavzu: Chiziqli programmalashtirish masalasining umumiy qo'yilishi va turli formalari.Chiziqli programmalashtirish masalasini grafik usulda yechish

Chiziqli programmalash masalalari.

Ishlab chiqarish jarayonidagi moddiy va iqtisodiy bog'lanishlarni hisobga olgan holda maqsadga muvofiq keladigan eng maqbul rejani tanlash masalasining matematik ifodasi ilmiy va o'quv adabiyotlarida **chiziqli programmalash** atamasi bilanifodalanadi. Bunday masalalarning matematik ifodasini keltirib chiqarishda odatda ishlab chiqarish jarayoni bilan bog'liq bo'lgan barcha resurslar, narx-navolar, ishlab chiqarish normativlari hamda masala mohiyatiga ko'ra maqsad funksiyasi tuziladi. Agar muammo harajatlar bilan bog'liq bo'lsa bu harajatlarni ifodalovchi maqsad funksiyasining eng kichik qiymatini, agar maqsad funksiyasi ishlab chiqarishdan keladigan daromadni ifodalasa bu funksiyani eng katta qiymatini topish talab qilinadi.

Aksariyat hollarda ishlab chiqarish resurslari va ishlab chiqarish kuchlari, ularning imkoniyatlarini ifodalovchi shartlar, hamda harajat yoki daromadni ifodalovchi maqsad funksiyalari chiziqli funksiyalar bilan ifodalanganligi uchun bu turdagi masalalar chiziqli programmalash masalalari deb ataladi. Bu yerda programmalash so'zi dasturlash ma'nosida emas rejalashtirish ma'nosida ishlatiladi. Keyinchalik ko'riladi, masala yechimi ham optimal reja shaklida ifodalanadi.

Chiziqli programmalash usullari ishlab chiqarishning barcha sohalarida keng va samarali tatbiq qilinayapti. Chiziqli programmalash masalalarining matematik ifodasi sodda bo'lsada uni yechishda funksiya maksimum, minimumlarini topishga mo'ljallangan an'anaviy usullarni tatbiq qilib bo'lmaydi. Bu yerda asosiy muammo – masala shartlariga bog'liq tarzda mumkin bo'lgan yechimlar sohasini topishdan iborat bo'ladi. Optimal reja ham ana shu mumkin bo'lgan yechimlar sohasidan izlanishi kerak.

Matematik til bilan aytganda chiziqli dasturlash noma'lumlariga chiziqli cheklashlar (chegaraviy shartlar) qo'yilgan chiziqli funksiyaning ekstrimal qiymatini topish usullarini urganuvchi fandir.

Chiziqli programmalash masalalarini umumiy ko'rinishini keltiramiz

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad i=1,2,\ldots,m \quad j=1,2,\ldots,n \qquad (1)$$

$$x_j \ge 0$$

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to min \qquad (2)$$

(1) shartlarni qanoatlantiruvchi barcha $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ lar orasidan (2) maqsad funksiyasining eng kichik qiymatini beruvchi nuqta koordinatalari, ya'ni optimal rejani topish kerak.

Bunda chiziqli programmalash masalalarining barcha shartlari tenglik ko'rinishida berilgan bo'lishi kerak.Ya’ni kanonik ko'rinishdagi chiziqli programmalash masalalari matematik ifodasi

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i = 1,2,\dots\dots,m \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to \min \tag{4}$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda ham $x_j \geq 0$ o'z o'rnida qoladi. Alohida zarurat bo'lmasa bu shartlarni oshkora ifodalab o'tirilmaydi. Umumiy ko'rinishdagi (1) – (2) chiziqli programmalash masalalarini kanonik (3) – (4) ko'rinishiga keltirishimiz mumkin. Buning uchun (1) shartlarning har birining chap tarafiga (u kichik bo'lganligi uchun) yangi x_{n+i} o'zgaruvchini qo'shish yordamida tenglikka aylantirish mumkin. Bunda x_{n+i} o'zgaruvchilar ham noma'lum bo'ladi. Natijada (1) – (2) masala

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \qquad i = 1,2,\dots\dots,m \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n+m} c_j x_j \to \min \tag{6}$$

ko'rinishini oladi, bu yerda noma'lumlar $x_1, x_2, \dots\ x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\dots, x_{n+m}$ $n+m$ ta bo'ladi. Maqsad funksiyasining ko'rinishini o'zgartirmaslik uchun (6) ifoda $C_{n+1} = C_{n+2} = C_{n+m} = 0$ deb hisoblangan. Bundan ko'rinadiki, yangi kiritilgan $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ o'zgaruvchilar qanday bo'lishidan qat'iy nazar maqsad funksiyasining qiymatlariga mutlaqo ta'sir qilmaydi. Natijada hosil bo'lgan (5) – (6) masala (3) – (4) masala bilan aynan bir xil ko'rinishini olar ekan. Shunday qilib umumiy ko'rinishdagi Chiziqli programmalash masalalarini kanonik ko'rinishga keltirish mumkinligi asoslandi. Demak, kanonik ko'rinishdagi chiziqli programmalash masalalari uchun yaratilgan usullarni umumiy ko'rinishdagi chiziqli programmalash masalalariga ham tatbiq qilish mumkin ekan. Shunday qilib chiziqli dasturlash masalalari funksiyaning shartli ekstremumini topish masalalaridan iboratdir.Yuqorida keltirilgan mulohazalarni oydinlashtirish uchun oddiy bir misolni ko'rib chiqamiz.

1-misol. Faraz qilaylik, kichik korxona meva sharbatlarini chiqaradigan bo'lsin. Korxonada 30kg olcha, 45kg olma, 12kg shakar bor. Korxona ikki xil turdagi meva sharbatlarini chiqaradi. 1 – tur meva sharbatining bir bankasiga 0,1kg olcha, 0,5kg olma, 0,1 kg shakar solinsin. 2 – tur meva sharbatining bir bankasiga 0,3kg olcha, 0,2kg olma, 0,1kg shakar solinsin. Agar 1 banka 1 – tur meva sharbati narxi 1000so'm, 2 –tur meva sharbati 1400so'm tursa, korxona har bir tur meva sharbatidan qanchadan ishlab chiqarganda korxonaning meva sharbatlarini sotishdan tushgan daromadi eng katta bo'ladi?

Masalaning matematik ifodasini tuzish uchun masala shartlariga ko'ra kelib chiqadigan munosabatlarni hosil qilishimiz kerak. Avvalo masala shartiga ko'ra topilishi kerak bo'lgan 1 – va 2 – tur meva sharbatlarining noma’lumsonini x_1, x_2 deb belgilaymiz. Bu holda 1 –, 2 – va 3 – tur xomashyo (olcha, olma, shakar) sarflarini hisoblab bu sarflar korxonadagi bor bo'lgan xomashyo zaxiralaridan ortmasligini talab qilamiz. Xususan, olcha sarfi bo'yicha har bir banka 1 – tur meva sharbatiga 0,1kg olcha, 2 – tur meva sharbatiga esa 0,3kg olcha solinadigan bo'lsa mos ravishda x_1 banka 1 – tur, x_2 banka 2 – tur meva sharbatlariga jami
$0{,}1x_1 + 0{,}3x_2$ kg olcha sarflanadi. Bu esa korxonada bor bo'lgan 30kg olchadan ortmasligi kerak. Demak olchalar bo'yicha quyiladigan shart

$$0{,}1x_1 + 0{,}3x_2 \leq 30$$

ko'rinishini oladi. Xuddi shunday mulohazalarga ko'ra olma va shakar sarfi bo'yicha korxona imkoniyatlaridan kelib chiqqan holda

$$0{,}5x_1 + 0{,}2x_2 \leq 45$$
$$0{,}1x_1 + 0{,}1x_2 \leq 12$$

ko'rinishdagi shartlarni hosil qilamiz. Meva sharbatlarini sotishdan tushadigan daromad esa keltirilgan narxlarga ko'ra jami

$$L(x_1, x_2) = 1000x_1 + 1400x_2$$

bo'lar ekan. Bu yerda $L(x_1, x_2)$ maqsad funksiyasi bo'lib, shunday ishlab chiqarish rejasini tanlash kerakki , bu reja avvalo resurslar bo'yicha shartlarga mos kelsin va maqsad funksiyasining eng katta qiymatini keltirib chiqarsin. Shunday qilib keltirilgan iqtisodiy masala quyidagicha ifodalanar ekan

$$\begin{cases} 0{,}1x_1 + 0{,}3x_2 \leq 30 \\ 0{,}5x_1 + 0{,}2x_2 \leq 45 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}1x_2 \leq 12 \end{cases} \qquad (1')$$

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0$$

$$L(x_1, x_2) = 1000x_1 + 1400x_2 \to \max \qquad (2').$$

Keltirilgan (1') cheklashlar (shartlar)ga ko'ra (2') maqsad funksiyasining maksimumini toping. Bu masala **chiziqli programmalash masalasining** tipik namunasi sifatida qaralishi mumkin.Ko'rinib turibdiki, (1') shartlarda ham (2') maqsad funksiyasida ham x_1, x_2 noma'lumlar birinchi darajalari bilan qatnashadi. Bu hol chiziqli programmalash masalalari atamasining kelib chiqishiga sabab bo'lgan. Avval qayd etib o'tganimizdek, (1') – (2') masalani yechishda an'anaviy ekstremumlarni topish usullarini tatbiq qilib bo'lmaydi. Haqiqatdan ham ekstremumlarning mavjud bo'lish zaruriy sharti $\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$ bu yerda bajarilmaydi. Buning asosiy sababi bu masalada an'anaviy optimizatsiya masalalaridan farqli funksiyaning lokal ekstremumlari emas global ekstremumi, ya'ni eng katta yoki eng kichik qiymatlarini topish talab qilinadi. Bu qiymatlar $SupL(x_1, x_2)$ va $InfL(x_1, x_2)$lar agar mavjud bo'lsa faqat mumkin bo'lgan yechimlar sohasi chegaralarida bo'lar ekan. Buni keltirilgan masalaning geometrik tahlilidan ko'rishimiz mumkin. Keyinchalik umumiy holda ham chiziqli programmalash masalalari uchun mumkin bo'lgan yechimlar sohasi qavariq soha bo'lishi va uning uchun optimal yechim shu qavariq soha uchlaridan birortasida bo'lishini misollarda tahlil qilamiz.

Grafik usul

Chiziqli programmalash masalasini grafik usulda yechish uni geometrik tasvirlashga asoslangan. Berilgan chiziqli programmalash masalasini yechish uchun grafik usulini Ikki o'lchovli va uch o'lchovli fazoda qo'llashni ko'rib chiqamiz.

Ikki o'lchovli fazoda berilgan quyidagi chiziqli programmalash masalasini keltiramiz:

2-misol. Faraz qilaylik,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases} \tag{7}$$

$$x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0$$

$$F_{min} = c_1x_1 + c_2x_2 \tag{8}$$

berilgan bo'lib (7) sistema $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$ shartni qanoatlantiruvchi yechimlarga ega hamda ulardan tashkil topgan to'plam chekli bo'lsin. (7) va $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$ tengsizliklarning har biri

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i, \qquad \left(i = \overline{1,m}\right), \qquad x_1 = 0, \qquad x_2 = 0$$

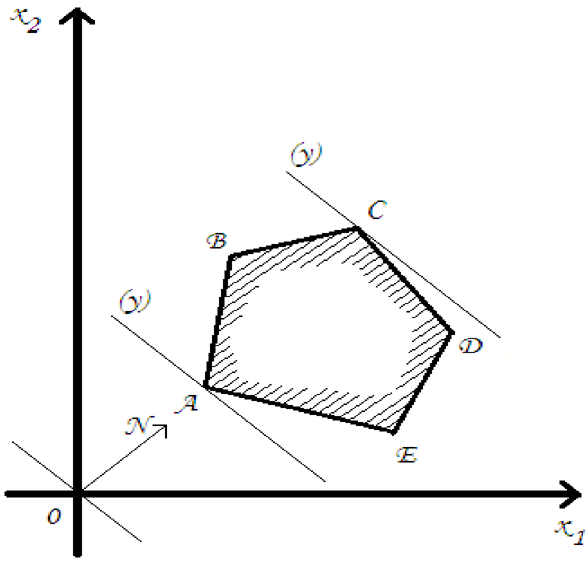
chiziqlar bilan chegaralangan yarim tekisliklarni ifodalaydi. Chiziqli funksiya ham malum bir o'zgarmas

$$c_1x_1 + c_2x_2 = const$$

qiymatda to’g’ri chiziqni ifodalaydi. Yechimlardan tashkil topgan qavariq to’plamni hosil qilish uchun

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \qquad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \ldots\ldots\ldots, a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 = b_m,$$
$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0$$

to’g’ri chiziqlar bilan chegaralangan ko’pburchakni yasaymiz (1-chizma).



1-chizma

Faraz qilaylik bu ko’pburchak $ABCDE$ bo’lsin. Chiziqli funksiyani c_0 songa teng deb olsak

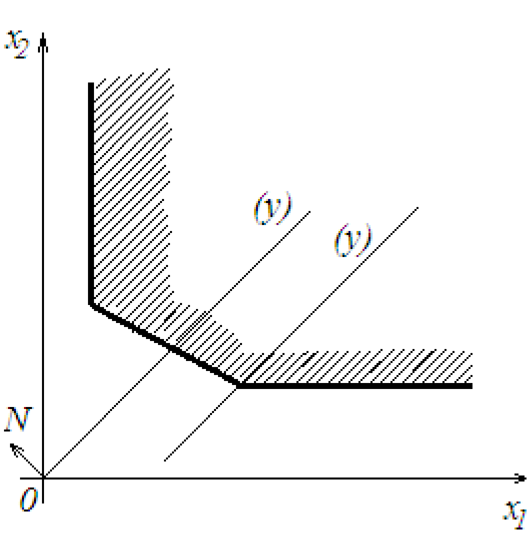
$$c_1x_1 + c_2x_2 = c_0$$

to’g’ri chiziq hosil bo’ladi. Bu to’g’ri chiziqni $N(c_1, c_2)$vektor yo’nalishida yoki unga teskari yo’nalishda o’ziga parallel surib borib,qavariq ko’pburchakning chiziqli funksiyaga eng kichik qiymat beruvchi chetki nuqtasini aniqlaymiz. 1-chizmadan ko’rinib turibdiki, chiziqli funksiya o’zining minimal qiymatiga qavariq ko’pburchakning A nuqtasida erishadi.C nuqtasida esa, u uzining maksimal qiymatiga erishadi. Brinchi holda $A(x_1, x_2)$ nuqtaning koordinatalari masalaning chiziqli funksiyaga minimal qiymat beruvchi optimal yechimi bo’ladi. Uning koordinatalarini AB va AE to’g’ri chiziqlarni ifodalovchi tenglamalar sistemasini yechish orqali aniqlanadi.

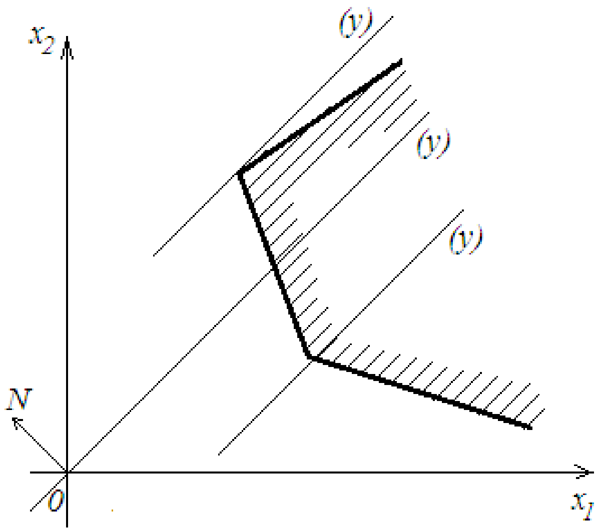
Agar yechimlardan tashkil topgan qavariq ko’pburchak chegaralanmagan bo’lsa ikki hol bo’lishi mumkin.

1-hol. $c_1x_1 + c_2x_2 = const$ to’g’ri chiziq N vektor bo’yicha yoki unga qarama-qarshi yo’nalishda siljib borib har vaqt qavariq ko’pburchakni kesib o’tadi. Ammo na minimal, na maksimal qiymatga erishmaydi. Bu holda chiziqli funktsiya quyidan va yuqoridan chegaralanmagan bo’ladi (2-chizma).

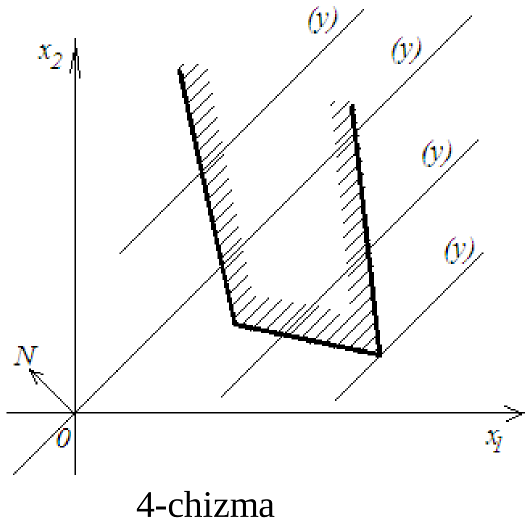
2-hol. $c_1x_1 + c_2x_2 = const$ to’g’ri chiziq N vektor bo’yicha siljib borib, qavariq ko’pburchakning birorta chetki nuqtasida o’zining minimum yoki maksimum qiymatiga erishadi. Bunday holda chiziqli funktsiya yuqoridan chegaralangan, quyidan esa chegaralanmagan (3-chizma) yoki quyidan chegaralangan yuqoridan esa chegaralanmagan bo’lishi mumkin (4-chizma). Ba’zi hollarda ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan bo’lishi mumkin (5-chizma).



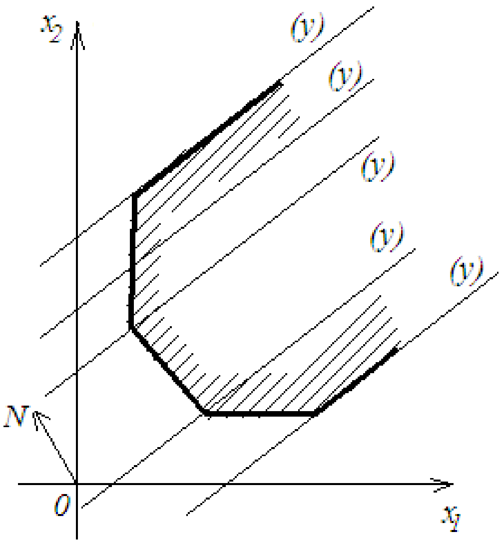
2-chizma



3-chizma



4-chizma



5-chizma

Yuqorida umumiy masala ko’rinishida keltirilgan grafik usul ikki noma'lumli masalalarda juda qulay bo'lishi bilan birga ko'plab umumiy qoida va tavsiyalar ham ishlab chiqishga imkoniyat beradi.

3-misol. Faraz qilaylik, kichik korxona meva sharbatlarini chiqaradigan bo'lsin. Korxonada 30kg olcha, 45kg olma, 12kg shakar bor. Korxona ikki xil turdagi meva sharbatlarini chiqaradi. 1 – tur meva sharbatining bir bankasiga 0,1kg olcha, 0,5kg olma, 0,1 kg shakar solinsin. 2 – tur meva sharbatining bir bankasiga 0,3kg olcha, 0,2kg olma, 0,1kg shakar solinsin. Agar 1 banka 1 – tur meva sharbatinarxi 1000so'm, 2 – tur meva sharbati 1400so'm tursa, korxona har bir tur meva sharbatidan qanchadan ishlab chiqarganda korxonaning meva sharbatlarini sotishdan tushgan daromadi eng katta bo'ladi?

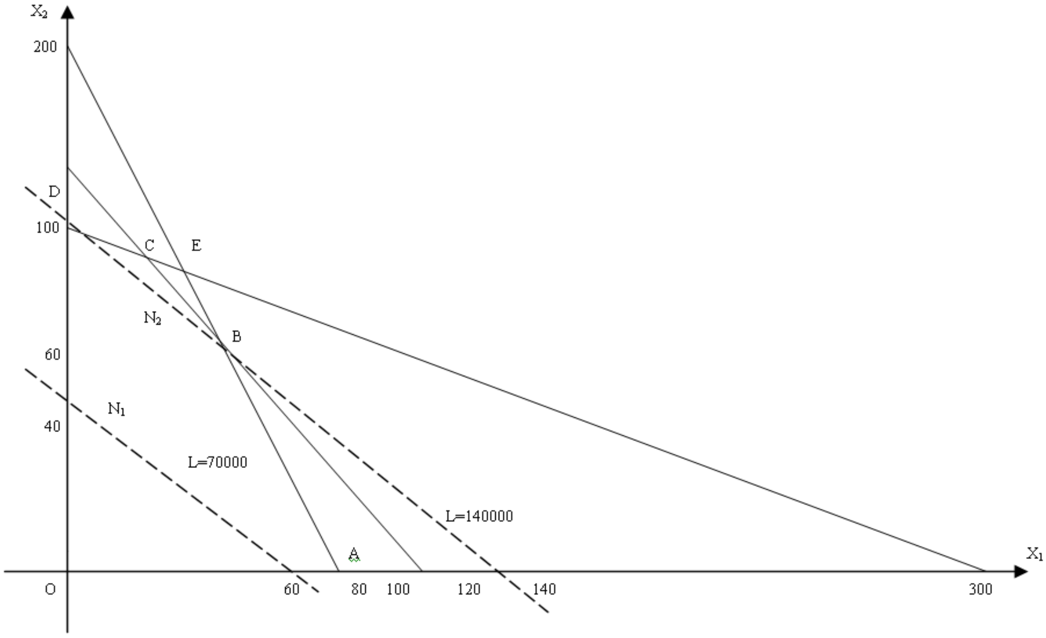
Chiziqli programmalash masalasining yechimini topishda geometrik usul. Geometrik tahlilni (1') – (2') masala misolida olib boramiz. (1') shartlarning har biri OX_1X_2 koordinat tekisligini to'g'ri chiziq bo'ylab ikki bo'lish va ulardan shartga mos keladigan bittasini tanlashni ifodalaydi. Tahlilni soddalashtirish uchun (1') shartlarning hammasini mos ravishda $30; 45; 12$ ga bo'lib yozamiz.

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{300} + \dfrac{x_2}{100} \le 1 \\ \dfrac{x_1}{90} + \dfrac{x_2}{225} \le 1 \\ \dfrac{x_1}{120} + \dfrac{x_2}{120} \le 1 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

$$L(x_1, x_2) = 100x_1 + 1400x_2 \to \max$$

Mumkin bo’lgan yechimlar sohasini topish uchun hosil bo'lgan shartlardagi to'g'ri chiziqlarni chizamiz va ulardan pastki qismini olamiz. Natijada $OABCD$ beshburchak shaklidagi soha hosil bo'ladi (6–chizma).



6-chizma

Bu sohaning istalgan nuqtasining koordinatalari $(1') - (2')$ masalaning shartlariga mos mumkin bo'lgan yechimlaridan birini ifodalaydi. Bu yerda biz maqsad funksiyasining biror qiymatiga mos keladigan rejalar (yechimlar)ga mos nuqtalar to'plamini ko'rib chiqamiz. Masalan $L(x_1, x_2) = 70000$ bo'ladigan nuqtalar to'plami $1000x_1 + 1400x_2 = 70000$ tenglama bilan ifodalanadi. Bu tenglamaning ikki tarafini 70000ga bo'lib yuboramiz va $\dfrac{x_1}{70} + \dfrac{x_2}{50} = 1$ ko'rinishdagi tenglamani hosil qilamiz. Bu OX_1X_2 koordinat tekisligida

$M_1(70;0)$ va $M_2(0;50)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi bo'lib, 6–chizmada uning grafigi punktir chiziq bilan ifodalangan. $L($ EMBED Equation.3 $)$ funksiyaning qiymati orttirilsa, masalan $L($ EMBED Equation.3 $) = 140000$ deb olinsa unga mos grafik avvalgisiga parallel bo'lib yuqoriroqdan, ya'ni $M_3(140;0)$ va $M_4(0;100)$ nuqtalardan o'tgan to'g'ri chiziq hosil bo'ladi. Bu to'g'ri chiziqlarning mumkin bo'lgan yechimlar sohasiga taaluqli har bir nuqtasining koordinatalari $(1')-(2')$ masalaning yechimlarini ifodalaydi. Masalan, N_1 nuqtada $L(N_1) = 70000,$ N_2 nuqtada esa $L(N_2) = 140000$ bo'ladi. Maqsad funksiyasining $L(x_1, x_2) = const$ tartibda olingan grafiklari o'zaro parallel to'g'ri chiziqlardan iborat bo'lar ekan. Maqsad funksiyasining qiymati ortgan sari bu to'g'ri chiziq yuqorilab boraveradi. Borabora mumkin bo'lgan yechimlar sohasidan chiqib ketishi mumkin. Xususan berilgan misolda maqsad funksiyasining grafigi mumkin bo'lgan yechimlar sohasidan oxiri C nuqtadan o'tgan holida chiqib ketadi. Ana shu holat, ya'ni C nuqta koordinatalari $(1')-(2')$ masala yechimini, optimal rejani berar ekan deyishga asos bo'ladi. $(1')$ shartlarga mos tengsizliklarni juft-jufti bilan tenglik sifatida olib sistema qilib yechib C, B nuqtalar koordinatalarini topish mumkin. Masala shartlari va 6–chizmadan kelib chiqqan holda $A(100;0),$ $B(70;50),$ $C(30;90),$ $D(0;100)$ ekanligini ko'ramiz. Chizmada ko'rilganidek mumkin bo'lgan yechimlar sohasi qavariq sohadan iborat bo'lib, bu holat barcha chiziqli programmalash masalalari uchun o'rinli bo'lgan holatdir. Maqsad funksiyasi grafigi ham to'g'ri chiziq bo'lganligi uchun uni oshirish parallel ko'chirishdan iborat bo'ladi va maqsad funksiyasining maksimal qiymati mumkin bo'lgan yechimlar sohasi uchlaridan birida ya'ni maqsad funksiyasining grafigi mumkin bo'lgan yechimlar sohasidan chiqib ketish arafasida o'tgan nuqtasida bo'lar ekan. Bu esa optimal reja, ya'ni chiziqli programmalash masalalari yechimini topish uchun umumiy qoida tavsiya qilishga imkoniyat beradi.

Chiziqli programmalash masalalarini yechishda avvalo mumkin bo'lgan yechimlar sohasini ifodalovchi qabariq soha topiladi va uning uchlarida maqsad funksiyasi qiymati hisoblanadi. Bu qiymatlardan eng kattasiga mos keluvchi nuqta koordinatalari izlanayotgan yechim – optimal rejani beradi. Bu qoidani yuqorida ko'rilgan masalaga tatbiq qilamiz. Maqsad funksiyasi $L(x_1, x_2) = 1000x_1 + 1400x_2$ bo'lib mumkin bo'lgan yechimlar sohasi uchlari $A(100;0), B(70;50), C(30;90), D(0;100)$ dagi qiymatlarini L_A, L_B, L_C, L_D deb belgilasak

$L_A = 100000,$ $L_B = 140000,$ $L_C = 156000,$ $L_D = 140000$.

Bu qiymatlarni taqqoslash natijasida optimal reja C(30;90) nuqtada ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Bu natija 6–chizmadagi chizmaga ham mos keladi, ya'ni maqsad funksiya grafigini parallel ko'chirishda bu grafik mumkin bo'lgan yechimlar sohasidan C nuqta orqali chiqib ketishi ko'rinib turibdi.

Geometrik usulning samarali ekanligini namoyish qilish uchun uch noma'lumli chiziqli programmalash masalalari na'munasini ko'ramiz. Maqsad masala mohiyati va uni yechimini topish jarayonini aks ettirish bo'lgani uchun masalaning birato'la matematik ifodasidan boshlaymiz. Vaqtincha iqtisodiy mulohazalardan holi bo'lgan holda quyidagi matematik masalani ko'ramiz.

4-misol.

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 \le 24 \\ 10x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le 30 \\ 4x_1 + 8x_2 + 4x_3 \le 24 \end{cases} \qquad (3')$$

$$x_i \ge 0 \qquad i = 1, 2, 3$$

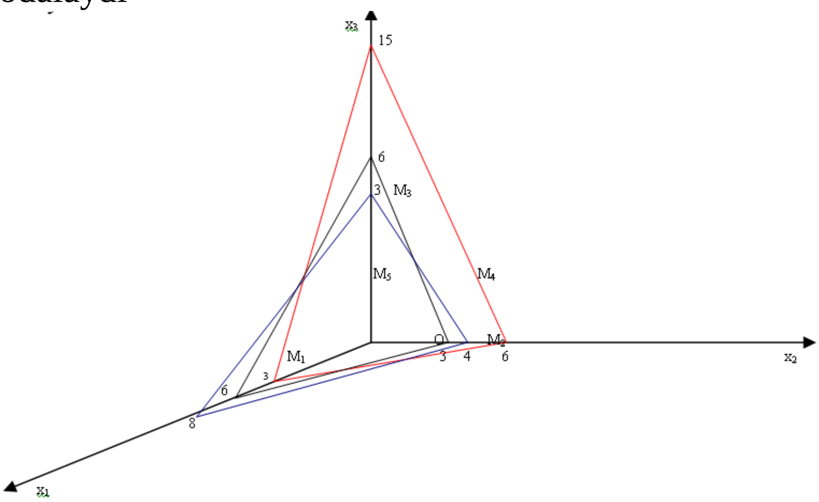
$$L(x_1, x_2, x_3) = 25x_1 + 30x_2 + 20x_3 \to \max \qquad (4')$$

Bu yerda shartlarni qanoatlantiruvchi barcha nuqtalar orasidan shundayini topishni talab qilinadiki, bu nuqta koordinatalari (4') maqsad funksiyasinin geng katta qiymatini ta'minlasin. Dastlab (3') shartlarni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami, ya'ni chiziqli programmalash masalalari uchun mumkin bo'lgan yechimlar sohasini toppish kerak bo'ladi. Bu yerda ikki o'lchovli masaladagiga o'xshash geometric usuldan foydalanamiz. Avvalo (4') shartlarni kanonik ko'rinishiga keltiramiz

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{8} + \dfrac{x_2}{4} + \dfrac{x_3}{3} \le 1 \\ \dfrac{x_1}{3} + \dfrac{x_2}{6} + \dfrac{x_3}{15} \le 1 \\ \dfrac{x_1}{6} + \dfrac{x_2}{3} + \dfrac{x_3}{6} \le 1 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_3 \ge 0$$

bu shartlarning har biri tenglik sifatida olinganda tekislik kanonik tenglamasi bo'lib, shartga ko'ra shu tekislikdan pastki qismini olish kerakligini ifodalaydi. $x_i \ge 0$ shartlar esa fazoviy koordinat sistemasiga nisbatan birinchi oktantni olish kerakligini ifodalaydi



7–chizma

Yuqorida keltirilgan shartlar va mulohazalarga ko'ra $(3')-(4')$masala uchun mumkin bo’lgan yechimlar sohasini 7–chizmada sxematik ifodalangan. Bir-biridan farqlash va mumkin bo’lgan yechimlar sohasini ajratish qulay bo'lishi uchun har bir tekislik uchun boshqa –boshqa rang olingan. Chizmada 1–tekislik havo rang, 2–tekislik qizil, 3–tekislik qora rangda aks ettirilgan. Birinchi oktant tepasidan qaraganda mumkin bo’lgan yechimlar sohasi ostki chegarasi shtrixlangan sohadan iborat bo'ladi. Chizmadan ko'rinadiki M_1 2–tekislikning OX_1 o'qi bilan , M_2 3–tekislikning OX_2 o'qi bilan, M_3 esa 1–tekislikning OX_3 o'qi bilan kesishgan nuqtasi bo'ladi. Shunga ko'ra koordinatalar orqali $M_1(3;0;0), M_2(0;3;0), M_3(0;0;3)$ ekanligini ko'ramiz. M_4 nuqta esa OX_2X_3 koordinata tekisligida 1-, 3- tekisliklar kesishgan nuqtasi ekanligini ko’ramiz. Uning koordinatalarini topish uchun 1-3-tekislik tenglamalarida $x_1 = 0$ deb sistema hosil qilamiz. Undan esa

$$\begin{cases} 6x_2 + 8x_3 = 24 \\ 8x_2 + 4x_3 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x_2 + 8x_3 = 24 \\ 16x_2 + 8x_3 = 48 \end{cases} \Rightarrow 10x_2 = 24$$

$x_2 = 2{,}4;\ x_3 = 1{,}2$ topiladi. Demak $M_4(0;2{,}4;1{,}2)$xuddi shuningdek M_5 nuqta uchun $x_2 = 0$ deb 1-,2-tekisliklar kesishgan nuqtasini, M_6 uchun esa $x_3 = 0$ deb

2-,3-tekisliklar kesishgan nuqtasini topiladi. Bunda $M_5(2{,}6\ ;\ 0\ ;\ 2{,}03)$ va $M_6(2\ ;\ 2\ ;\ 0)$ ekanligi topiladi. mumkin bo’lgan yechimlar sohasi tepasida esa uchchala tekislikning kesishgan nuqtasi sifatida topiladigan M_7 nuqta bo'ladi. (1.3) tengsizliklari tenglik qilib sistema sifatida yechilsa $M_7(2{,}08\ ;\ 1{,}36\ ;\ 1{,}2)$ ekanligi topiladi. Natijada mumkin bo’lgan yechimlar sohasi qavariq soha $OM_1M_2M_3M_4M_5M_6M_7$ ning barcha uchlari topiladi. Maqsad funksiyasi qiymatining o'zgarmas qiymatida $25x_1 + 30x_2 + 20x_3 = C = const$ tekislik tenglamasi bo'lib, unga mos nuqtalar shu tekislikda yotadi. Bu yerda ham maqsad funksiya tekislikni parallel ko'chirish $C = const$ qiymatining ortishi yoki kamayishi bilan bog'liq bo'ladi. Shuning uchun optimal reja uning mumkin bo’lgan yechimlar sohasi uchlaridan eng katta qiymatga erishadiganiga mos keladi. Agar $L(M_i) = L_i$ belgilash kiritsak, bevosita hisoblashlardan $L_1 = 75;\ L_2 = 90;\ L_3 = 60;\ L_4 = 96;\ L_5 = 105{,}6;\ L_6 = 110;\ L_7 = 116{,}8$ ekanligini ko'ramiz.

Demak optimal reja M_7 nuqtada bo'lib , bunda $x_1 = 2{,}08;\ x_2 = 1{,}36;\ x_3 = 1{,}2$ bo'lar ekan, maqsad funksiyasi esa bu nuqtada o'zining eng katta qiymatiga erishar ekan.

Simpleks usuli

Yuqorida ko'rganimizdek, chiziqli programmalash masalisini optimal planini uning barcha planlaridan tashkil topgan qovariq to'plamning chetki nuqtalari orasidan qidirish kerak. Bunday nuqtalar soni boshqacha aytganda masaladigi tayanch planlar soni n dan m tadan tuzulgan C_n^m gruppalash orqali aniqlanadi. Bunda tayanch planlarni tartib bilan tekshirib chiqib, ular ichidan optimal planni aniqlab beruvchi yechish sxemasini berilishi talab qilinadi.

Chiziqli programmalash masalasini yechishning bunday sxemalaridan biri simpleks usulidir. Bu usul boshlang'ich tayanch planda chekli sondagi iteratsiyadan keyin optimal planni hosil qilish yo'lini ko'rsatadi va har bir navbatdagi iteratsiya oldingisiga nisbattan optimal planga yaqinroq planni beradi. Yechish jarayoni optimal yechim topilgancha yoki masalaning chiziqli funksiyasi chekli minimumga ega emasligi aniqlanguncha davom ettiriladi.

Optimal yechimni topish.

Quyidagi (3)-(4) chiziqli programmalash masalasining planlari mavjud va ular hosmas deb faraz qilamiz. tayach plani va unga mos keluvchi o'zaro chiqli mos bo'lmagan

$$P_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots\ldots, P_m = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

vektorlar sestemasi ma'lum bo'lsin. U holda

$$P_1x_1 + P_2x_2 + \cdots + P_mx_m = P_0 \qquad (9)$$

va

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m = y_0 \qquad (10).$$

Bu yerda y_0- chiziqli funksiyaning X tayanch plandagi qiymati, $x_i > 0,\ c_i -$ chiziqli funksiyaning koeftsentlari. $P_1, P_2, \ldots, P_m$ vektorlar o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan vektorlar bo'lganligi sababli ixtiyoriy bazis bo'lmagan Pj vektorning bu vektorlar orqali faqat bitta yoyilmasini toppish mumkin:

$$x_{1j}P_1 + x_{2j}P_2 + \cdots + x_{mj}P_m = P_j, \qquad (j = \overline{1,n}) \qquad (11)$$

Bu vektorga chiziqli funksiyaning

$$c_1x_{1j} + c_2x_{2j} + \cdots + c_mx_{mj} = y_j, \qquad (j = \overline{1,n}) \qquad (12)$$

qiymat mos keladi. P_j vektorga mos keluvchi chiziqli funksiyaning koeffitsentini c_j bilan belgilaymiz.

U holda quyidagi teoremalar o'rinli bo'ladi.

1-teorema. Agar X_0 tayanch planda tayinlangan j uchun $y_j - c_j > 0$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, X_0 plan optimal plan bo'lmaydi va shunday X plan topish mumkin bo'ladiki, uning uchun

$$y(x) < y(x_0)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

2-teorema. Agar tayanch plan uchun $y_j - c_j < 0$ o'rinli bo'lsa, u plan optimal bo'ladi.

Yuqoridagi 1-2 teoremalarga asosan berilgan boshlang'ich plandan boshlab tayanch planlar ketma-ketligini hosil qilib borib, jarayon optimal plan topilgancha davom ettirib boriladi. Masalada berilganlarini jadvalga joylashtiramiz.

Chiziqli sistema $A \times X = B$ ko'rinishida berilgan masala uchun $x_i = b_i$, $x_{ij} = a_{ij}$ deb qabul qilamiz.

1-jadval.

l	Bazvek	C	P_0	c_1	c_2	…	c_l	…	c_m	c_{m+1}	…	c_j	…	c_n
				P_1	P_2	…	P_l	…	P_m	P_{m+1}	…	P_j	…	P_n
1 2 . l $l+1$. m	P_1 P_2 . P_l P_{l+1} . P_m	. c_l c_{l+1} . c_m	x_1 x_2 . x_l x_{l+1} . x_m	1 0 . 0 0 . 0	0 1 . 0 0 . 0	… … . … … . …	0 0 . 1 0 . 0	… …… … . …	0 0 . 0 0 . 1	$x_{1,m+1}$ $x_{2,m+1}$. $x_{l,m+1}$ $x_{l+1\,m+1}$. $x_{m,m+1}$	… … . … … . …	x_{1j} x_{2j} . x_{lj} x_{l+1j} . x_{mj}	… … . … … . …	x_{1n} x_{2n} . x_{ln} x_{l+1n} . x_{mn}
$m+1$			y_0	0	0	0	0	…	0	$y_{m+1} - c_{m+1}$	…	$y_j - c_j$	…	$y_n - c_n$

$y_j - j$ vektor –ustuni C vektor-ustuniga skalyar ko'paytmasidan iborat, ya'ni

$$y_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i.$$

$$y_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij}, \qquad j = \overline{1,n}.$$

y_0 va $y_j - c_j$ larni jadvalning $m+1$ qatoridagi tegishli ustunlarga joylashtiramiz. Bazis vektorlar uchun har doim $y_j = c_j = 0$ bo'ladi. Agar

$y_j - c_j \le 0 \;\; (j = \overline{1,n})$ bo'lsa, $X = (x_1, x_2, \dots x_m) = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ optimal plan bo'ladi. Bu plandagi chiziqli funktsiyaning qiymati y_0 ga teng.

Endi kamida bitta j uchun $y_j - c_j > 0$ bo'lsin deb faraz qilaylik. Bu holda topilgan tayanch planni optimal planga yaqinroq plan bilan alishtirish kerak, buning uchun

$$\max_{y_j - c_j > 0} (y_j - c_j) = y_k - c_k = \Delta_k$$

shartni qanoatlantiruvchi P_k vektorni bazisga kiritib, bazisdan

$$\min_{x_{ik} > 0} \frac{x_i}{x_{ik}} = \frac{x_l}{x_{lk}} = \theta_0$$

shartni qanoatlantiruvchi P_l vektorni chiqarish kerak bo'ladi.

Yangi plan uchun $P_1, \quad P_2, \dots, P_{l-1}, P_k, P_{l+1}, \dots, P_m$ vektorlar bazis vektorlar bo'ladi.

Yangi tayanch planni hosil qilish va uning optimal plan ekanligini tekshirish uchun P_0 va P_j vektorlarning bazis vektorlar orqali yoyilmasini hosil qilish kerak. Dastlabki bazis vektorlardan tuzilgan matritsa birlik matritsadan iborat edi, ya'ni

$$(P_1, \quad P_2, \dots, \quad P_m) = J.$$

Shuning uchun

$$P_0 = x_1P_1 + x_2P_2 + \dots + x_lP_l + \dots + x_mP_m \qquad (13)$$

$$P_k = x_{1k}P_1 + x_{2k}P_2 + \dots + x_{lk}P_l + \dots + x_{mk}P_m, \qquad (14)$$

$$P_j = x_{1j}P_1 + x_{2j}P_2 + \dots + x_{lk}P_l + \dots + x_{r}$$

(15) dan:

$$P_l = \frac{1}{x_{lk}}(P_k - x_{1k}P_1 - x_{2k}P_2 - \dots - x_{mk}P_m). \qquad (16)$$

P_l ning bu qiymatini (13) ga qo'yamiz, natijada quyidagiga ega bo'lamiz;

$$\frac{x_l}{x_{lk}} \; (P_k - x_{1k}P_1 - x_{2k}P_2 - \dots - x_{mk}P_m] + \dots + x_mP_m$$

yoki

$$P_0 = \left(x_1 - \frac{x_l}{x_{lk}}x_{1k}\right)P_1 + \dots + \frac{x_l}{x_{lk}}P_k + \dots + \left(x_m - \frac{x_l}{x_{lk}}x_{mk}\right)P_m.$$

Shunday qilib, $X_1 = \left(x_1, \quad x_2', \dots, \quad x_m'\right)$ yangi tayanch plan quyidagi formulalar orqali hisoblanadi:

$$\begin{cases} x_i = x_i - \dfrac{x_l}{x_{lk}} x_{ik}, & (i \neq l). \\ \acute{x}_k = \dfrac{x_l}{x_{lk}}, & (i = l). \end{cases} \tag{17}$$

Huddi shuningdek, (16) ni (15) ga qo'yib P_j vektorning yangi bazis vektorlar bo'yicha yoyilmasini hosil qilamiz:

$$P_j = \acute{x}_{1j}P_1 + \acute{x}_{2j}P_2 + \cdots + \acute{x}_{kj}P_k + \cdots + \acute{x}_{mj}P_m.$$

bu yerda

$$\begin{cases} \acute{x}_{ij} = x_{ij} - \dfrac{x_{lj}}{x_{lk}} x_{ik}, & (i \neq l). \\ \acute{x}_{kj} = \dfrac{x_{lj}}{x_{lk}} \end{cases} \tag{18}$$

(17) va (18) ni birlashtirib, $j = 0, \quad 1, 2, \dots, n$ lar uchun yangi tayanch planni va P_j vektorlarning yangi bazis vektorlar bo'yicha yoyilmasining formulasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} \acute{x}_{ij} = x_{ij} - \dfrac{x_{lj}}{x_{lk}} x_{ik}, & (i \neq l). \\ \acute{x}_{lj} = \dfrac{x_{lj}}{x_{lk}}. \end{cases} \tag{19}$$

Bu formula esa Jordan-Gaussning to'la ajratish formulasidan iboratdir. Haqiqatdan ham, $j = k$ da

$$\begin{cases} \acute{x}_{ik} = x_{ik} - \dfrac{x_{lk}}{x_{lk}} x_{ik} = 0, & (i \neq l). \\ \acute{x}_{lk} = \dfrac{x_{lk}}{x_{lk}} = 1, & (i = l). \end{cases}$$

ya'ni bazisga kiritilayotgan vektorning x_{lk} ga (bundan keyin bu elementni aniqlovchi element deb ataymiz) mos keluvchi elementi 1 ga teng bo'lib, qolgan elementlari 0 ga teng bo'ladi.

$$\acute{y}_j - c_j = c_1\acute{x}_{1j} + c_2\acute{x}_{2j} + \cdots + c_m\acute{x}_{mj} - c_j, \qquad j = \overline{1,n}$$

bo'lganligi sababli, (20) dan foydalanib quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$\acute{y}_j - c_j = y_j - c_j - \frac{x_{lj}}{x_{lk}}(y_k - c_k). \tag{20}$$

Huddi shuningdek $\acute{x}_i$ ning qiymatini (17) dan

$$\acute{y}_0 = c_1\acute{x}_1 + \cdots + c_k\acute{x}_k + \cdots + c_m\acute{x}_m$$

ifodaga qo'yib,

$$\acute{y}_0 = y_0 - \frac{x_l}{x_{lk}(y_k - c_k)} \tag{21}$$

nitopamiz.

Yuqoridagilarnixulosaqilibaytganda, simpleksjadvalustidatartibbilanqiyidagiishlarnibajarishkerak:

1. Har bir j uchun $\acute{y}_j - c_j = \Delta_j$ lar tekshiriladi. Agar barcha j lar uchun $\Delta_j \le 0$ bo'lsa, topilgan plan optimal plan bo'ladi.
2. Agar birorta j uchun $y_j - c_j > 0$ bo'lsa, bazisga kiritiladigan vektor tanlanadi.Bazisga

$$\max_{\Delta_j > 0} \Delta_j = \Delta_k$$

shartni qanoatlantiruvchi P_k vektor kiritiladi:
3. Bazisdan chiqarilishi kerak bo'lgan vektor aniqlanadi. Bazisdan $\min_{x_{ik}>0}\left(\frac{x_i}{x_{ik}}\right) = \frac{x_l}{x_{lk}}$ ga mos keluvchi P_l vektor chiqariladi. Agar P_k vektorga mos keluvchi barcha $x_{ik} \le 0$ bo'lsa, chiziqli funksiya quyidan chegaralanmagan bo'ladi;
4. Aniqlovchi element $x_{lk} > 0$ tanlangandan so'ng simpleks jadval (21) formula orqali almashtiriladi.

Shunday yo'l bilan har bir interatsiyada yangi tayanch plan topiladi. 1va 2-teoremaga asosan simpleks usul yo optimal planni beradi, yoki masaladagi chiziqli funktsiyaning chekli minimumga ega emasligini aniqlaydi.

5-misol. Quyidagi Chiziqli programmalash masalasi berilgan bo'lsin.

$$\begin{cases} 7x_1 + 8x_2 + 5x_3 \le 56 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 10 \\ x_1 + x_3 \le 6 \end{cases}$$

$$L(x_1; x_2; x_3) = 10x_1 + 12x_2 + 25x_3 \to \max$$

Bu masalani kanonik ko'rinishga keltiramiz

$$\begin{cases} 7x_1 + 8x_2 + 5x_3 + x_4 = 56 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 10 \\ x_1 + x_3 + x_6 = 6 \end{cases}$$

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 10x_1 + 12x_2 + 25x_3 + 0 \times x_4 + 0 \times x_5 + 0 \times x_6 \to \max$$

Berilgan masala shartlaridan $P_1 = (7;2;1)^T$, $P_2 = (8;1;0)^T$, $P_3 = (5;1;1)^T$, $P_4 = (1;0;0)^T$, $P_5 = (0;1;0)^T$, $P_6 = (0;0;1)^T$ ekanligini ko'ramiz. Bu yerda yangi kiritilgan o'zgaruvchilarga mos P_4, P_5, P_6 vektorlar bazis ekanligi ko'rinib turibdi, haqiqatdan ham $P_1 = 7 \times P_4 + 2 \times P_5 + 1 \times P_6$ ekanligini ko'rishimiz mumkin. Qolgan vektorlar, shuningdek cheklash vektori $\overline{B} = (56;10;6)^T$ ni ham ular orqali ifodalash mumkin. Masala shartlariga ko'ra shu bazisga mos tayanch yechimni topish uchun bazisga kirmagan x_1, x_2, x_3 o'zgaruvchilarni nol deb olishimiz kerak. U holda $x_4 = 56,\ x_5 = 10;\ x_6 = 6$ ekanligi kelib chiqadi. Keltririlgan shartlarni ifodalovchi barcha sonlarni quyidagi jadval ko'rinishda ifodalaymiz.

1 – jadval

i	c_j / c_{ki}			10	12	25	0	0	0	
		Baz	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ_i
1	0	P_4	56	7	8	5	1	0	0	11,2
2	0	P_5	10	2	1	1	0	1	0	10
3	0	P_6	6	1	0	$\boxed{1}$	0	0	1	6
	Δ_j			-10	-12	-25	0	0	0	←
						↑				

1 – jadvalda P_0 ustun shartlardagi o'ng taraf qiymatlari (resurslar miqdori) $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ ustunlar shartlardagi $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ larning koeffisiyentlaridan tuzilgan. Shartlarida koeffisiyentlari birlik ustunni ifodalayotgan vektorlar bazis vektorlar deb belgilanadi. c_{ki} deb atalgan ustunga esa bazisga kirgan shu qatordagi P_4, P_5, P_6 vektorlar kiradi. Tepasidagi narx qiymati qo'yiladi.
i - ustunda tenglama nomeri belgilanadi. Shu bilan masala shartlariga kiruvchi barcha sonlar jadvalda o'z o'rnini egallaydi. Shundan keyin jadvalning so'nggi qator va so'nggi ustunini to'lg'azishga o'tiladi. Dastlab

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \times c_{ki} - c_j \quad j = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}$$

formula bo'yicha Δ_j lar hisoblanadi. Agar barcha Δ_j lar manfiy bo'lmasa jadvalga mos tayanch yechim optimal yechim deyiladi va hisob to'xtatiladi. Agar Δ_j lar orasida manfiylari bo'lsa jadvalga mos tayanch yechim optimal emas, uni yaxshilash kerak degan xulosa qilinadi. Buning uchun manfiy Δ_j lar orasidan eng kichigi joylashgan ustunni hal qiluvchi ustun deb belgilanadi. Agar bu ustundagi P_k elementlari lar orasida musbatlari bo'lmasa masala yechimi yo'q degan xulosaga kelamiz. Agar a_{ik} $i = 1,2,\ldots m$ lar orasida musbatlari bo'lsa:

*Ular uchun $\theta_i = a_{io} / a_{ik}$ qiymatlar hisoblanadi.

*Ulardan kichigi θ_i tanlanadi va bu θ_i joylashgan qator hal qiluvchi qator deb belgilanadi, hamda hal qiluvchi ustun va hal qiluvchi qatorlar kesishgan joydagi a_{ik} elementni esa hal qiluvchi element deb belgilanadi.

Bu jarayonni biz tahlil qilayotgan misol (1–jadval) uchun quyidagi tartibda bajariladi. Avvalo $\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \times c_{ki} - c_j$ formulalar bo'yicha Δ_j larni hisoblaymiz.

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^{3} a_{i1} \times c_{ki} - c_1 = 7 \times 0 + 2 \times 0 + 1 \times 0 - 10 = -10$$

$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^{3} a_{i2} \times c_{ki} - c_2 = 8 \times 0 + 2 \times 0 + 0 \times 0 - 12 = -12$$

$$\Delta_3 = \sum_{\varepsilon=1}^{3} a_{i3} \times c_{ki} - c_3 = 5 \times 0 + 1 \times 0 + 1 \times 0 - 25 = -25$$

$$\Delta_4 = \sum_{i=1}^{3} a_{i4} \times c_{ki} - c_4 = 1 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 - 0 = 0$$

$$\Delta_5 = \sum_{i=1}^{3} a_{i5} \times c_{ki} - c_5 = 0 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times 0 - 0 = 0$$

$$\Delta_6 = \sum_{i=1}^{3} a_{i6} \times c_{ki} - c_6 = 0 \times 0 + 0 \times 0 + 1 \times 0 - 0 = 0$$

Bu qiymatlar jadvalga kiritilgan Δ_j larni taqqoslash yordamida eng kichigi $\Delta_3 = -25$ ga mos kelgan 3–ustun **hal qiluvchi ustun** deb belgilanadi. Bu ustun elementlari yordamida $\theta_i = a_{io} / a_{ik}$ qiymatlar hisoblanadi. ular ham jadvalga kiritilgan. lar orasida eng kichigi θ_3 ga mos kelgan 3–qator **hal qiluvchi qator** deb belgilanadi. Jadvalda bu ustun va qator strelka bilan belgilangan. Ular kesishgan joydagi hal qiluvchi a_{33} element ham qalin chegara bilan ajratilgan Agar hal qiluvchi element 1ga teng bo'lmasa hal qiluvchi qator barcha elementlarini hal qiluvchi elementga bo'lib yuborib bunga erishish mumkin. 3–qator elementlarini 5ga ko'paytirib, 1–qator elementlaridan ayiramiz, so'ngra 3–qator elementlarini 1ga ko'paytirib, 2–qator elementlaridan ayiramiz. Hosilbo'lganqiymatlari 2–jadvaltarzidaifodalangan.

2– jadval

2–

i	c_j / c_{ik}			10	12	25	0	0	0	
		Baz	P_0	P_1 ↑	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ_i
1	0	P_4	26	2	$\boxed{8}$	0	1	0	-5	3,25
2	0	P_5	4	1	1	0	0	1	-1	4
3	25	P_3	6	1	0	1	0	0	1	
	Δ_j			15	-12	0	0	0	25	

jadval uchun ham $\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \times c_{ki} - c_j$ formulalar yordamida Δ_j lar hisoblanadi. Bu qiymatlar hisoblanib jadvalga kiritilgan. Δ_j lar orasida manfiysi bo'lganligi uchun bu jadvalga mos tayanch yechim ham optimal yechim emas. Shuning uchun manfiy$n$ ga mos 2 – ustun hal qiluvchi ustun deb belgilandi. Hal qiluvchi ustunning musbat elementlari uchun $\theta_j = \frac{26}{8} = \frac{13}{4} = 3{,}25;\ \Theta_2 = \frac{4}{1} = 4$ lar hisoblanadi. Eslatma: Manfiy va nol bo'lgan elementlar uchun θ_i hisoblanmaydi. Agar a_{ik} lar orasida musbatlari bo'lmasa, Chiziqli programmalash masalalari yechimi yo'q deb hisoblash to'xtatiladi. Bizning misolda θ_i lardan kichigi $\theta_1 = 3{,}25$ ga mos qator hal qiluvchi qator deb belgilandi. Simpleks usul algoritmiga ko'ra 3 – jadvalni to'lg'azamiz.

3-jadval

i	c_j / c_{ik}			10	12	25	0	0	0	
		Baz	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ_i
1	12	P_2	3,25	0,25	1	0	0,125	0	-0,625	
2	0	P_5	0,75	0,75	0	0	-0,125	1	-0,375	
3	25	P_3	6	1	0	1	0	0	1	
		Δ_j		18	0	0	1,5	0	17,5	

3–jadvalda barcha $\Delta_j \geq 0$bo'lganlig iuchun bu jadvalga mos tayanch yechimda basis o'zgaruvchilar $x_2 = 3{,}25; x_3 = 6; x_5 = 0{,}75$ deb olinadi. Bazisga kirmagan o'zgaruvchilar esa nolga teng deb olinadi, ya'ni $x_1 = 0; x_5 = 0; x_6 = 0$. Bu yechim Chiziqli programmalash masalalari uchun optimal planni beradi. Yordamchi noma'lumlardan holi bo'lgan holda berilgan Chiziqli programmalash masalalari uchun optimal plan $x_1 = 0; x_2 = 3{,}25; x_3 = 6$ko'rinishda belgilanadi. Bunda maqsad funksiyasi o'zining maksimal qiymatiga erishar ekan va $L = 10 \times 0 + 12 \times 3{,}25 + 25 \times 6 = 189$ ga teng bo'ladi. Keltirilgan misol planni bosqichma – bosqich yaxshilash, ya'ni simpleks usulning barcha amallari va ularning bajarilish tartibini o'zida aks ettirgan. Shuning bilan birga masalani ishlash tartibiga e'tibor berilsa, geometrik usuldan farqli noma'lumlar soni ortgan, ya'ni masala murakkablashgan holda ham bu usul shundayligicha tatbiq qilinaveradi. Tabiiy bunda simpleks jadval ustun va qatorlar soni ortadi, shunga ko'ra hisoblashlar hajmi ham ortadi. Optimal planga yetib borish uchun bajariladigan qadamlar soni ham ortishi mumkin.

Ikkilangan masala.

Simmetrik bo'lmagan masalalarda berilgan masaladagi chegaralovchi shartlar tenglamalardan, ikkilangan masaladagi chegaralovchi shartlar esa tengsizliklardan iborat bo'ladi. Masalan, simmetrik bo'lmagan ikkilangan masalalarning matrisali ifodasi quyidagicha bo'ladi.

Berilgan masala.

$$AX = b, \qquad (22)$$

$$X \geq 0.$$

$$y_{min} = CX \qquad (23)$$

ya'ni (22) shartni qanoatlantiruvchi shunday $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektor ustunni toppish kerakki, u (23) chiziqli funksiyaga minimal qiymat bersin.

Ikkilangan masala.

$$WA \leq C, \qquad (24).$$

$$Z_{max} = Wb, \qquad (25).$$

ya'ni (22) shartni qanoatlantiruvchi shunday $W = (w_1, \dots, w_m)$ vektor qatorni topish kerakki, u (23) chiziqli funktsiyaga maksimal qiymat bersin.

Ikkala masalada ham $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ vektor-qator, $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ vektor ustun, $A = (a_{ij})$ – chegaralovchi shartlarning koeffitsentlaridan tashkil topgan matritsa. Bu masalalarning optimal yechimlari o'zaro quyidagi teorema asosida bog'langan.

Teorema. Agar berilgan masala yoki unga ikkilangan masaladan birortasi optimal yechimga ega bo'lsa, u holda ikkinchisi ham yechimga ega bo'ladi hamda bu masalalardagi chiziqli funktsiyalarning ekstremal qiymatlari o'zaro teng bo'ladi, ya'ni

$$y_{min} = Z_{\max} \qquad (26)$$

Agar bu masalalardan birining chiziqli funksiyasi chegaralanmagan bo'lsa, u holda ikkinchi masala hech qanday yechimga ega bo'lmaydi.

Isbot. Berilgan masala optimal yechimga ega va uni simpleks usul bilan toppish mumkin deb faraz qilamiz. Umumiylikni buzmasdan optimal yechimdagi bazis vektorlar birinchi m ta $P_1, P_2, \dots, P_m$ vektorlardan iborat deb qabul qilamiz.Shu vektorlarning komponentlaridan tuzilgan matritsani B bilan belgilaymiz. Oxirgi simpleks jadval dastlabki simpleks jadvalning $P_1, P_2, \dots, P_m,$ P_{m+1}, P_n vektorlarni bazis vektorlar bo'yicha yoyilmasini o'z ichiga oladi, ya'ni dastlabki simpleks jadvaldagi har bir vektor P_j uchun oxirgi simpleks jadvalda quyidagi munosabatlarni qanoatlantiruvchi X_j vektor mos keladi:

$$P_j = BX_j \quad \text{yoki} \quad B^{-1}P_j = X_j. \qquad (27)$$

$\bar{X} = (X_1, X_2, \dots, X_m, \quad X_{m+1}, \dots, X_n)$ bilan oxirgi simpleks jadvalning elementlaridan tashkil topgan matritsani belgilaymiz. Simpleks jadvalning dastlabki m ta vektorlari bazis vektorlardan iborat bo'lganligi sababli $\bar{X}$ matritsa quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$X = \begin{pmatrix} 1\ 0 \dots .0 & x_{1m+1} \dots . x_{1n} \\ 0\ 1 \dots .0 & x_{2m+1} \dots . x_{2n} \\ 0\ 0 \dots .1 & x_{mm+1} \dots . x_{mn} \end{pmatrix}$$

Optimal yechim $X^0 = B^{-1}\, b$ vektordan iborat bo'lib, quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi:

$$A = BX, \qquad B^{-1}A = X, \qquad (28)$$

$$b = BX^0, \qquad B^{-1}b = X^0, \qquad (29)$$

$$y_{min} = C^0X^0, \qquad (30)$$

$$\Delta = C^0X - C \le 0, \qquad (31)$$

bu yerda $C^0 = (c_1, c_2, \dots, c_m) -$ bazis vektorlarga tegishli bo'lgan $C -$ vektorning komponentlaridan tuzilgan vektor-qator. Endi

$$\mathcal{W}^0 = C^0B^{-1} \qquad (32)$$

formula orqali aniqlanuvchi $\mathcal{W}$ ni ikkilangan masalaning plani ekanligini ko'rsatamiz. (23), (27), (31), (32) munosabatlarga asosan

$$\mathcal{W}^0A - C = C^0B^{-1}A - C = C^0\bar{X} - C \le 0.$$

Demak,

$$\mathcal{W}^0A - C \le 0$$

yoki

$$W^0A \le C.$$

Shunday qilib (32) shartni qanoatlantiruvchi W^0 vektor ikkilangan masalaning plani bo'ladi.Bu plandagi ikkilangan masalaning chiziqli funksiyasining qiymati $Z(W^0) = W^0b$ ga teng.

(32) va (28) ga asosan

$$Z(W^0) = W^0b = C^0B^{-1}b = C^0X^0 = y(X^0) = y_{min}. \quad (33)$$

Bundan ko'rinadiki, ikkilangan masala chiziqli funksiyasining W^0 plandagi qiymati berilgan masalaning chiziqli funksiyasining optimal qiymatiga ega ekan.

Endi W^0 plan ikkilangan masalaning optimal planiekanligini ko'rsatamiz. (22) shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy n o'lchovli X va (23) shartlarini qanoatlantiruvchi m o'lchovli W vektorlar uchun quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi:

$$WAX = Wb = Z(W), \qquad (34)$$

$$WAX \le CX = y(X). \qquad (35)$$

(34) va (35) dan

$$Z(W) \le y(X). \qquad (36)$$

(36) tengsizlik ixtiyoriy W va X lar uchun bajariladi. Demak, (23) va (25) chiziqli funktsiyalarning optimal qiymatlari uchun ham

$$\max Z(W) \le y(X). \qquad (37)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Ikkinchi tomondan W^0 plan uchun (33) tenglik o'rinlidir. Demak, W^0 da ikkilangan masalaning chiziqli funksiyasi o'zining maksimal qiymatiga erishadi.

Huddi shunday yo'l bilan, agar ikkilangan masala optimal yechimga ega bo'lsa, berilgan masala ham optimal yechimga ega bo'lishini va o'zaro ikkilangan masalalarning optimal planlari uchun

$$\min y(X) = \max Z(W)$$

Tenglik o'rinli bo'lishini isbot qilish mumkin.

Teoremaning ikkinchi qismini isbotlash uchun berilgan masalaning chiziqli funksiyasi quyidan chegaralanmagan deb faraz qilamiz. U holda (36) ga asosan $Z(W) \leq -\infty$ tengsizlik to'g'ri bo'ladi. Bu ifoda ma'noga ega bo'lmaganligi sababli ikkilangan masala yechimga ega bo'lmaydi.

Huddi shuningdek ikkilangan masalaning chiziqli funksiyasi yuqoridan chegaralanmagan deb faraz qilsak, (36) ga asosan

$y(X) \geq +\infty$ tengsizlikni hosil qilamiz. Bu tengsizlik ham ma'noga ega bo'lmaganligi sababli, berilgan masala yechimga ega bo'lmaydi.

Isbot qilingan teoremaga asosan o'zaro ikkilangan masalalardan ixtiyoriy birini yechib, u orqali ikkinchisining yechimini aniqlash mumkin.

3-misol. Berilgan masala

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7, \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \\ -4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,6},$$

$$y_{min} = x_2 - 3x_3 + 2x_5.$$

bu yerda $C = (0, 1, -3, 0, 2, 0), b = (7, 12, 10)-$ ustun matritsa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \\ -1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A' matritsa A matritsaga transponirlangan.

Ikkilangan masala.

$$
\begin{cases}
w_1 \leq 0 \\
3w_1 - 2w_2 - 4w_3 \leq 1 \\
w_2 \leq 0 \\
2w_1, \qquad +8w_3 \leq 2, \\
-w_1 + 4w_2 + 3w_3 \leq -3, \\
w_3 \leq 0, \\
Z_{max} = 7w_1 + 12w_2 + 10w_3
\end{cases}
$$

Berilgan masalani simpleks usul bilan yechamiz.

1-jadval

	Bazis	C_0	P_0	0	1	-3	0	2	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_1	0	7	1	3	-1	0	2	0
2	P_4	0	12	0	-2	4]	1	0	0
3	P_6	0	10	0	-4	3	0	8	1
4			0	0	-1		0	-2	0

2-jadval

	Bazis	C_0	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_1	0	10	1	$\left.\frac{5}{2}\right\|$	0	1/4	2	0
2	P_3	-3	3	0	-1/2	1	1/4	0	0
3	P_6	0	1	0	-5/2	0	-3/4	8	1
4			-9	0	$\left[\frac{1}{2}\right]$	0	-3/4	-2	0

3-jadval

	Bazis	C_0	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_2	1	4	2/5	1	0	1/10	4/5	0
2	P_3	-3	5	1/5	0	1	3/10	2/5	0
3	P_6	0	11	1	0	0	-1/2	10	1
4			-11	-1/5	0	0	-8/10	-12/5	0

3-jadvaldan so'ng berilgan masalaning optimal yechimi $X = (0, \quad 4, \quad 0, \quad 0, \quad 11)$ topiladi. Bu yechimdagi $y_{min} = x_2 - 3x_3 + 2x_5$ chiziqli funksiyaning qiymati

$$y_{min} = -11$$

Ikkilangan masalaning yechimi

$$W^0 = CB^{-1}$$

formula orqali topamiz. Oxirgi simpleks jadvaldan:
$C^0 = (1, -3, \quad 0)$ -vektor qator va

$$B^{-1} = (P_1 P_4 P_6) = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

teskari matrisani aniqlaymiz. Demak,

$$W^0 = (\omega_1 \omega_4 \omega_6) = (1 \quad -3 \quad 0) \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Shunday qilib, ikkilangan masalanig optimal yechimi:

$$W^0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5}, & -\frac{4}{5}, & 0 \end{pmatrix}$$

ya'ni $\omega_1 = -\frac{1}{5}$, $\omega_2 = -\frac{4}{5}$, $\omega_3 = 0$

bo'lib, unga mos chiziqli funksiyaning qiymati $Z_{max} = -11$ bo'ladi.

Mavzuga doir topshriqlar

1. Ishlab chiqarishni planlashtirish masalasi. Faraz qilaylik, korxonada ikki xil maxsulot ishlab chiqarilsin. Bu maxsulotlarni ishlab chiqarish uchun korxonaning ixtiyorida 3 xil ishlab chiqarish faktorlari mavjud bo'lsin. Korxonadagi 1-ishlab chiqarish faktorining umumiy miqdori 24 ming birlikka, ikkinchisiniki 21 ming birlikka va uchinchisiniki esa 9 ming birlikka teng. Har bir maxsulotning bir birligini ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan turli ishlab chiqarish faktorlarning umumiy miqdori va korxonaning bir birlik maxsulotni realizatsiya qilishdan olingan daromadi quyidagi jadvalda berilgan.

Ishlab chiqarilganmaxsulot xili / Ishlab chiqarish faktori	I	II	Ishlabchiqarish faktorlarining umumiy miqdori
1	1	4	24
2	3	1	21
3	1	1	9
Bir birlik maxsulotni realizatsiya qilishdan olinadigan daromad	2	5	

Ishlab chiqarish planini shunday tuzish kerakki, unda sarf qilingan ishlab chiqarish faktorining miqdori berilgan umumiy miqdoridan oshmasin va hamma ishlab chiqarilgan maxsulotlarni realizatsiya qilishdan olingan daromad maksimal bo'lsin.

2. Qishloq xo'jalik mollari uchun optimal ozuqa tayyorlash masalasi. Aniqlanishicha, chorva mollarini to'yimli boqish uchun ularning bir kunlik yemishiga A ozuqa moddasidan 6 birlikdan kam bo'lmagan miqdorda, B ozuqa moddasidan 12 birlikdan kam bo'lmagan miqdorda va C ozuqa moddasidan 4 birlikdan kam bo'lmagan miqdorda qo'shilishi zarur. Chorva mollarini boqish uchun ikki turdagi yemxashak ishlatiladi. Turli xil yem-xashakning 1 kilogrami tarkibidagi turli ozuqa moddalarining miqdori ma'lum va ular quyidagi jadvalda berilgan:

Ozuqa moddalar	1kg yem-xashakning tarkibidagi ozuqa moddalarning miqdori		Qoramollarning ozuqa moddaga bo'lgan minimal ehtiyoji
	I-tur	II-tur	
A	2	1	6
B	2	4	12
C	0	4	4
1-kg yem-xashakning bahosi, pul birligi	5	6	

Bu jadvalda har bir turdagi yem-xashak narxi ham keltirilgan, ya'ni 1 tur yem-xashakning 1 kilogrami 5 pul birligi va II tur yem-xashakning bahosi 6 pul birligini tashkil qiladi. Bir sutkada sarf qilinadigan yem-xashak miqdorini shunday aniqlash kerakki, natijada mollarga bir sutkada berilgan turli xil ozuqa moddalarining miqdori normadagidan kam bo'lmasin va sarf qilingan umumiy xarajatlarning miqdori minimal bo'lsin.

3. Ishlab chiqarishni planlashtirish masalasi. Korxonada 3 xil maxsulot ishlab chiqarada**.** Ishlab chiqarishni tashkil etish uchun korxonaning ixtiyorida uch xil (A, B, C) ishlab chiqarish vositalari mavjud. Bu ishlab chiqrish vositalarining umumiy miqdori tegishli ravishda 9, 4 va 6 birliklarni tashkil qiladi. Har bir maxsulotning bir birligini ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan turli ishlab chiqarish vositalarining normasi va korxonaning bir birlik maxsulotni realizatsiya qilishdan olingan daromadi quyidagi jadvalda berilgan:

Ishlab chiqarish vositalari	Maxsulot xillari		
	I	II	III
A B C	3 2 1	0 1 2	6 2 3
daromad (pul birligida)	7	8	6

Korxonaning ishini shunday planlashtirish kerakki, natijada korxonaning chegaralangan ishlab chiqarish vositalaridan foydalanib, ishlab chiqilgan maxsulotini realizatsiya qilishdan olgan daromadi maksimal bo’lsin.

4. Eritmada 4 protsentdan kam bo’lmagan nikel (Ni) va 80protsentdan kam bo’lmagan temir (Fe) qatnashishi kerak. Bu eritmani hosil qilish uchun temir, nikel va boshqa moddalarni o’z ichiga olgan uch xil xom ashyo hamda toza temir vasof nikel ishlatilishi mumkin.

Har bir xom ashyoning bahosi va uning bir birligi tarkibidagi aralashma komponentlarining miqdori quyidagi jadvalda berilgan:

Aralashma komponentlari	Xom ashyo			Aralashma komponentlari		
	I	II	III	Fe	N1	Boshqa komponentlar
Fe (%)	70	90	85	100	0	0
Ni (%)	5	2	7	_	100	0
Boshqa komponentlar (%)	25	8	8	_	_	100
Baho	6	4	5	25	67	20

Aralashmani shunday tuzish kerakki, u normadagidan kam bo’lmagan miqdorda kerakli komponentlarni o’z ichiga olgan va aralashmaning bahosi minimal (eng kam) bo’lsin.

Amaliy mashg’ulotlar.

Masala. Korxonada ikki turdagi mahsulot ishlab chiqarish uchun uch xil xom-ashyo ishlatiladi. Birinchi turdagi mahsulot ishlab chiqarish uchun birinchi xil xom-ashyodan kg, ikkinchi xilx om-ashyodan kg, uchinchi xil xom-ashyodan kg ishlatiladi. Ikkinchi turdagi mahsulot ishlab chiqarish uchun esa birinchi xil xom-ashyodan kg, ikkinchi xil xom-ashyodan kg, uchinchi xil xom-ashyodan v_3 kg ishlatiladi.

Agar korxona birinchi xil xom-ashyodan kg, ikkinchi xil xom-ashyodan kg, uchinchi xil xom-ashyodan kg ta’min etilganda va birinchi turdagi mahsulotni har bir donasini sotganda α so‘m, ikkinchi turdagi mahsulotni har bir donasini sotganda β so‘m foyda olganda, korxona rejasini shunday rejalashtiringki, korxona olgan daromad maksimum qiymatga ega bo‘lsin. Masalani grafik, simpleks va ikkilangan masalaga qo’yib natijasini toping.

1. $\begin{matrix} a_1 = 4, & b_1 = 6, & P_1 = 100, \\ a_2 = 7, & b_2 = 8, & P_2 = 90, \\ a_3 = 9, & b_3 = 5, & P_3 = 40, \end{matrix}$ $\begin{matrix} \alpha = 5, \\ \beta = 12. \end{matrix}$

2. $\begin{matrix} a_1 = 3, & b_1 = 12, & P_1 = 60, \\ a_2 = 5, & b_2 = 10, & P_2 = 50, \\ a_3 = 6, & b_3 = 3, & P_3 = 624, \end{matrix}$ $\begin{matrix} \alpha = 2, \\ \beta = 6. \end{matrix}$

3. $\begin{matrix} a_1 = 3, & b_1 = 8, & P_1 = 80, \\ a_2 = 6, & b_2 = 7, & P_2 = 40, \\ a_3 = 9, & b_3 = 4, & P_3 = 95, \end{matrix}$ $\begin{matrix} \alpha = 3, \\ \beta = 2. \end{matrix}$

4. $\begin{matrix} a_1 = 3, & b_1 = 14, & P_1 = 45, \\ a_2 = 4, & b_2 = 12, & P_2 = 80, \\ a_3 = 3, & b_3 = 7, & P_3 = 30, \end{matrix}$ $\begin{matrix} \alpha = 15, \\ \beta = 4. \end{matrix}$

5. $\begin{matrix} a_1 = 4, & b_1 = 15, & P_1 = 1084, \\ a_2 = 5, & b_2 = 11, & P_2 = 1095, \\ a_3 = 10, & b_3 = 9, & P_3 = 865, \end{matrix}$ $\begin{matrix} \alpha = 20, \\ \beta = 30. \end{matrix}$

6. $\begin{matrix} a_1 = 5, & b_1 = 9, & P_1 = 35, \\ a_2 = 8, & b_2 = 7, & P_2 = 43, \\ a_3 = 6, & b_3 = 4, & P_3 = 28, \end{matrix}$ $\begin{matrix} \alpha = 25, \\ \beta = 50. \end{matrix}$

7. $\begin{matrix} a_1 = 3, & b_1 = 6, & P_1 = 70, \\ a_2 = 10, & b_2 = 5, & P_2 = 90, \\ a_3 = 12, & b_3 = 3, & P_3 = 48, \end{matrix}$ $\begin{matrix} \alpha = 9, \\ \beta = 3. \end{matrix}$

8. $\begin{matrix} a_1 = 4, & b_1 = 9, & P_1 = 78, \\ a_2 = 7, & b_2 = 5, & P_2 = 81, \\ a_3 = 8, & b_3 = 3, & P_3 = 85, \end{matrix}$ $\begin{matrix} \alpha = 90, \\ \beta = 30. \end{matrix}$

9. $\begin{matrix} a_1 = 5, & b_1 = 3, & P_1 = 67, \\ a_2 = 8, & b_2 = 4, & P_2 = 43, \\ a_3 = 11, & b_3 = 3, & P_3 = 66, \end{matrix}$ $\begin{matrix} \alpha = 20, \\ \beta = 50. \end{matrix}$

10. $\begin{matrix} a_1 = 6, & b_1 = 8 & P_1 = 85, \\ a_2 = 5, & b_2 = 10, & P_2 = 70, \\ a_3 = 4, & b_3 = 5, & P_3 = 55, \end{matrix}$ $\begin{matrix} \alpha = 70, \\ \beta = 90. \end{matrix}$

11. $\begin{matrix} a_1 = 2, & b_1 = 10, & P_1 = 38, \\ a_2 = 3, & b_2 = 6, & P_2 = 47, \\ a_3 = 3, & b_3 = 7, & P_3 = 82, \end{matrix}$ $\begin{matrix} \alpha = 50, \\ \beta = 70. \end{matrix}$

12. $\begin{matrix} a_1 = 3, & b_1 = 4, & P_1 = 48, \\ a_2 = 4, & b_2 = 3, & P_2 = 44, \\ a_3 = 6, & b_3 = 2, & P_3 = 54, \end{matrix}$ $\begin{matrix} \alpha = 40, \\ \beta = 20. \end{matrix}$

13. $\begin{matrix} a_1 = 3, & b_1 = 4, & P_1 = 40, \\ a_2 = 4, & b_2 = 3, & P_2 = 90, \\ a_3 = 5, & b_3 = 3, & P_3 = 45, \end{matrix}$ $\begin{matrix} \alpha = 30, \\ \beta = 60. \end{matrix}$

14. $\begin{matrix} a_1 = 3, & b_1 = 2, & P_1 = 80, \\ a_2 = 6, & b_2 = 3, & P_2 = 48, \\ a_3 = 3, & b_3 = 8, & P_3 = 62, \end{matrix}$ $\begin{matrix} \alpha = 30, \\ \beta = 80. \end{matrix}$

11-MAVZU:TRANSPORT MASALASINING QO'YILISHI VA MATEMATIK MODELI

Transport masalasining qo'yilishi. Chiziqli programmalash masalalaridan bir turi "transport masalasi" nomi bilan ma'lum bo'lgan matematik masalalarga keltiriladigan iqtisodiy masalalardan iborat bo'ladi. Ma'lumki, ishlab chiqaruvchi bilan iste'molchi orasidagi mol almashinuvi ya'ni ishlab chiqarilgan mahsulot yoki tayyrolangan homashyoni korxonalarga yetkazib berish transport vositalari va ularga sarflanadigan moliyaviy harajatlar bilan bog'liq. Bu harajatlarni minimallashtiruvchi variantlarni tanlash transport masalasining asosiy muammosi hisoblanadi.

Transport masalasining matematik modelini ifodalashda umumiyatni cheklamagan holda sxematik tarzda quyidagi muammoni tahlil qilamiz. Faraz qilaylik, ma'lum homashyo turi zaxiralari saqlanuvchi yoki tayyorlanuvchi n ta punkt bo'lsin. Bu punktlardagi homashyo miqdorlari mos ravishda $b_1, b_2, \dots, b_n$ birliklardan iborat bo'lsin. Bu yerda homashyo turiga ko'ra ma'lum bir o'lchov birligi (tonna, metr, va xakozo) tanlangan bo'ladi. Shuningdek, keltirilgan homashyo asosida ishlaydigan m ta korxona bo'lib, bu korxonalarning shu homashyoga bo'lgan extiyojlari mos ravishda $a_1, a_2, \dots, a_m$birliklardan iborat bo'lsin. Shuningdek homashyo punktlari hamda korxonalar orasidagi yo'l sifati va masofasiga ko'ra homashyoni yetkazish uchun ketadigan yo'l harajatlari koeffisientlari ma'lum bo'lsin. Ularni $C=(c_{ij})$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$; matritsa ko'rinishida ifodalaymiz. Bunda matritsaning har bir elementi c_{ij} mos ravishda i- korxonaga $j-$punktdan bir birlik homashyo yetkazish uchun ketadigan transport harajatlarini ifodalaydi. Aksariyat hollarda ishlab chiqarish korxonalari va homashyo yetkazib beruvchi punktlar muqobil, ya'ni moslashtirilgan holda ishlaydi deb hisoblanadi. Homashyo zaxiralari va korxonalarning bu homashyoga bo'lgan ehtiyojlari bir-biriga to'la mos keladi. Matematik tarzda bu shart

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i \qquad (1)$$

ko'rinishdaifodalanadi. Ayrim j chetlashishlarni hisobga olmaganda korxonalar to'liq quvvat bilan ishlaganda homashyolar to'liq sarflanadi. Faqat bu homashyolarni korxonalarga yetkazib berish kerak.

Masalaning matematik modelini ifodalash uchun yuqorida keltirilgan barcha shartlarni matematik munosabatlar bilan ifodalaymiz. Avvalo topilishi kerak bo'lgan optimal reja komponentlari $j-$punktdan $i-$korxonaga yetkazilishi kerak bo'lgan homashyo miqdorini X_{ij} deb belgilaymiz. Shartga ko'ra $i-$korxonaga yetkaziladigan barcha homashyo miqdori korxona ehtiyoji b_i ga teng bo'lishi kerak. Bu shartni

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i, \qquad i = 1,2,\dots,m \qquad (2)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin, ya'ni barcha m ta korxona uchun bu shart bajarilishi kerak. Bunday shartni homashyo punktlari uchun ham ifodalash mumkin, ya'ni j - homashyo punktidan chiqarilgan jami homashyo miqdori a_j ga teng bo'lishi kerak.
Bu shart matematik tarzda

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_j, \quad j = 1,2,\dots,n \qquad (3)$$

ko'rinishini oladi. Bu shartlar bajarilgan holda shunday x_{ij} larni topish kerakki jami yo'l harajatlari minimal bo'lsin. Keltirilgan normativlarga ko'ra i – korxonaga j – punktdan x_{ij} birlik homashyo keltiriladigan bo'lsa, yo'l xarajatlari bir birlik homashyo miqdori uchun C_{ij} ga teng ekanligi ma'lum bo'lgani uchun jami $c_{ij} \cdot x_{ij}$ pul birligiga teng bo'ladi. Bu xarajatlarni barcha korxonalar va homashyo bazalari bo'yicha qo'shib chiqsak jami xarajatlar kelib chiqadi va u quyidagicha ifodalanadi.

$$L(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{mn}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \times x_{ij} \to \min \qquad (4)$$

Tabiiy, barcha chiziqli programmalash masalalarida bo'lganidek, bu yerda ham $x_{ij} \geq 0$ bo'lishi kerakligi qayd etiladi.

Shunday qilib (1), (2), (3) shartlar bajarilgan holda (4) maqsad funksiyasining minimal qiymatini ta'minlovchi plan matritsasi $X = (x_{ij})$ ni topish masalasi transport masalasi deyiladi. Bu yerda $b_1, b_2, \dots, b_n, a_1, a_2, \dots, a_m$ berilgan miqdorlar $C = (c_{ij})$ ham ma'lum matritsa. C(mxn) to'g'ri to'rtburchakli matritsa ham ma'lum matritsa deb hisoblanadi. Aksariyat hollarda x_{ij} noma'lumlar soni $m \times n$ shartlar soni $m + n$ dan katta bo'lib, (1), (2), (3) shartlar bilan berilgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi. Ana shu cheksiz ko'p yechimlar orasidan (4) maqsad funksiyasining minimumini ta'minlovchi variant, ya'ni optimal plan (reja)ni tanlash talab qilinadi.

Keltirilgan transport masalasining matematik modeli (1)–(4) ko'rinishiga qarab ortiqcha tafsilotlarsiz shuni qayd etishimiz mumkinki, kommunikatsion tizimlar : ular avtombil, poyezd yo'li bo'ladimi, gaz yoki suv yetkazuvchi quvurlar bo'ladimi, elektr quvvatini yetkazuvchi yuqori kuchlanishli elektr uzatish tizimlari bo'ladimi barchasida shartli ravishda yetkazuvchi, iste'molchi va “transport” harajatlarini kiritish mumkin. Bu holda ham aynan (1)–(4) ko'rinishdagi optimallashtirish masalasini hosil qilishimiz mumkin.

Transport masalasi ifodalanishiga ko'ra nisbatan soddadek tuyulishi mumkin. Haqiqatdan ham barcha shartlar koeffitsientlari faqat birlardan iborat tenglamalar bo'ladi. Transport masalasining murakkabligi noma'lumlarni ko'pligida bo'lib unga odatdagi oddiy simpleks usulini tatbiq qilish ham imkoniyat darajasidan ancha yuqori bo'lib ketar ekan. Masalan $n = 10\ , m = 10$ bo'lgan holda ham noma'lumlar soni $n \times m = 100$, shartlar soni esa $m + n - 1 = 19$ ta bo'lib, shartlar matritsasining rangi 19 bo'lgan holda (1)–(3) shartlar bo'yicha kelib chiqadigan tayanch yechimlar soni C_{100}^{19}ta bo'ladi. Simpleks usul esa tayanch yechimlaridan optimal yechimni ajratishga imkoniyat beradi. Bu holda simpleks usul bo'yicha necha qadam qo'yilishi kerak, buni tasavvur qilish ham qiyin. Agar transport masalasini biror tuman (miqyosida, masshtabida) qaralganda ham yetarlicha murakkab bo'ladi. Viloyat yoki respublika (miqyosida, masshtabida) qaraladigan bo'lsa masala yanada murakkablashib ketishi aniq.

Biz bu yerda transport masalasi ham odatdagi chiziqli programmalash masalasi ekanligini, hamda unga ham simpleks usulni tatbiq qilish mumkinligini namoyish qilish maqsadida oddiy bir masalani ko'rib chiqamiz va tahlil qilamiz. Faraz qilaylik 2ta g'isht zavodi bo'lib ularning ishlab chiqarish quvvatlari mos ravishda 35 mashina va 45 mashina g'ishtga teng bo'lsin. Shuningdek bu g'ishtlarga talabgor 2 ta qurilish bo'lib, ularga mos ravishda 30 mashina va 50 mashina g'isht kerak bo'lsin. Talab va taklif muvozanati saqlangan. Agar 1 – qurilishga 1 – zavoddan 1 mashina g'isht keltirish narxi (yo'l xarajati) 15ming so'm, 2 – zavoddan keltirish narxi esa 12 ming so'm; shuningdek 2–qurilishga 1-, 2-zavoddan 1 mashina g'isht keltirish narxi mos ravishda 20 ming va 18 ming so'm bo'lsin. Zavodlardan qurilishlarga g'isht yetkazib berishning shunday rejasini tuzingki, transport harajatlari minimal bo'lsin. Transport masalasining shartlarini jadval ko'rinishida ifodalash tahlil uchun qulay bo'lganligi uchun odatda ularni jadval ko'rinishida ifodalagan ma'qul. Xususan yuqorida keltirilgan masala shartlarini quyidagi jadval ko'rinishida ifodalash mumkin.

Zavod / qurilish	1	2	Σ
1	15 x_1	12 x_2	30
2	20 x_3	18 x_4	50
Σ	35	45	80

jadvaldagi raqamlar masala mohiyatini aks ettiradi. So'nggi qatorda zavodlar quvvatlari, so'nggi ustunda esa qurilishlar ehtiyojlari aks etgan. Ichki kataklar tepa burchagida yo'l harajatlari koeffitsienti aks etgan. Bu yerda qulaylik uchun noma'lumlarni x_1, x_2, x_3, x_4 deb belgilangan, aslida $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$ bo'lishi kerak edi. Bu yerda maqsad, masalani simpleks usulga tushirish qulay bo'lishi uchun shu yo'l tanlangan. Shartlarning matematik ifodasiga o'tamiz.

$$x_1 + x_2 = 30 \quad <1>$$
$$x_3 + x_4 = 50 \quad <2>$$
$$x_1 + x_3 = 35 \quad <3>$$
$$x_2 + x_4 = 45 \quad <4>$$
$$L = 15x_1 + 12x_2 + 20x_3 + 18x_4 \to \min$$

$\langle 1\rangle - \langle 4\rangle$ shartlar orasidan chiziqli erklilari tanlanadi. Bevosita tekshirish yo'li bilan $\langle 1\rangle - \langle 3\rangle$ shartlardan $\langle 4\rangle$ shart kelib chiqishini ko'rishimiz mumkin. Sxematik tarzda tengliklar ustida amallar bajarish qoidasiga ko'ra $\langle 1\rangle + \langle 2\rangle - \langle 3\rangle = \langle 4\rangle$ ekanligini ko'ramiz. Demak, bu yerda Chiziqli dasturlash masalasini

$$x_1 + x_2 = 30$$
$$x_3 + x_4 = 50$$
$$x_1 + x_3 = 35$$
$$L = 15x_1 + 12x_2 + 20x_3 + 18x_4 \to \min$$

ko'rinishda ifodalash mumkin. Bu masalaga simpleks usulni tatbiq qilish uchun chiziqli programmalash masalasi shartlaridan bazislarni ajratish (ustunlari orasida birlik vektorlarni hosil qilish) jarayonini namoyish etamiz. Sistemadagi x_1, x_2, x_3, x_4 ga mos koeffitsientlar A_1, A_2, A_3, A_4 vektorlarni hosil qiladi. Ulardan tuzilgan matritsa ozod hadlar ustuni bilan to'ldirilsa

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 50 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 35 \end{pmatrix}_{(-1)}$$

matritsa hosil bo'ladi. Bu matritsaning 2-,4-ustunlari bazis holatida $A_2^T = (1;\ 0;\ 0)$ ekanligini ko'ramiz. Agar 3 – qatorini -1 ga ko'paytirib 2– qatorga qo'shsak 3–ustun ham bazis ko'rinishini oladi.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 30 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 15 \\ 1 & \underbrace{0 \quad 1 \quad 0}_{bazis} & & & 35 \end{pmatrix}$$

Bu matritsa berilgan shartlarning shakl almashtirilib

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 30 \\ -x_1 + x_4 = 15 \\ x_1 + x_3 = 35 \end{cases}$$

ko'rinishga keltirilganligini aks ettiradi. Bu ko'rinishdan simpleks jadvalga o'tamiz va bu jadvalga mos planni optimallikka tekshiramiz.

C_j / C			15	12	20	18	
	baz	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	Θ_i
12	A_2	30	1	1	0	0	
18	A_4	15	-1	0	0	1	
20	A_3	35	1	0	1	0	
	Δ_j		-1	0	0	0	

Bu yerda $\Delta_1 = C_{baz} \times A_1 - C_1 = 12 \times 1 + 18 \times (-1) + 20 \times 1 - 15 = -1$ formula bo'yicha hisoblangan. Qolganlari ham shunga o'xshash hisoblanadi. Masala minimumini topishga mo'ljallangan bo'lsa, Δ_j lar orasida musbatlari yo'q bo'lsa, jadvalga mos plan optimal plan bo'ladi. Bizda ana shunday hol kuzatilyapti. Demak bu masalada optimal plan $x_1 = 0; \quad x_2 = 30; \quad x_3 = 35; \quad x_4 = 15$ bo'lar ekan. Bu holda harajatlar minimal bo'lib, $L = 12 \times 30 + 18 \times 15 + 20 \times 35 = 1330$ ming so'm bo'lar ekan. Masala shartlari va yechimini ifodalovchi jadval

Zav / qur	1	2	Σ
1	15 / 0	1 / 30	30
2	20 / 35	18 / 15	50
Σ	35	45	80

ko'rinishda bo'ladi.

Tahlil to'la qonli ko'rinishni olishini namoyish qilish uchun yuqoridag imasalada faqat bitta narx 1–zavoddan 2–qurilishga 1 mashina g'isht olib boorish narxi 30 ming so'mga o'zgargan bo'lsin deb faraz qilamiz. Bunda faqat maqsad funksiyasi ko'rinishi o'zgaradi, ya'ni

$$L = 15x_1 + 12x_2 + 30x_3 + 18x_4 \to \min$$

ko'rinishni oladi. Simpleks jadvalda ham faqat narxlar C_i ga mos qator va ustunlargina o'zgaradi va quyidagi ko'rinishni oladi.

C_j / C			15	12	30	18	
	Baz	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	Θ_i
12	A_2	30	$\boxed{1}$	1	0	0	30
18	A_4	15	-1	0	0	1	
30	A_3	35	1	0	1	0	35
			9	0	0	0	

Bu jadvalga mos plan $x_1 = 0;\ \ x_2 = 30;\ \ x_3 = 35;\ \ x_4 = 15$ optimal emas, chunki $\Delta_1 = 9 > 0$. Bu planga ko'ra $L = 12 \times 30 + 18 \times 15 + 30 \times 35 = 1680$ ming so'm. Planni yaxshilash uchun jadvaldan $\theta_i = \frac{a_{io}}{a_{i1}}$ larni hisoblaymiz (faqat $a_{i1} > 0$ lar uchun). $min\theta_i$ ga mos 1–qatorni hal qiluvchi qator deb belgilaymiz. Uning yordamida 1– ustunni bazis ustunga aylantiramiz. Buning uchun 1–qatorni 2 – qatorga qo'shamiz, hamda (-1) ga ko'paytirib 3 – qatorga qo'shamiz. Natijada yangi simpleks jadvalni hosil qilamiz

C_j / C			15	12	30	18	
	Bazis	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	Θ
15	A_1	30	1	1	0	0	
18	A_4	45	0	1	0	1	
30	A_3	5	0	-1	1	0	
			0	-17	0	0	

Bu jadvalda $\Delta_j > 0$ lari yo'q bo'lgani uchun bu jadvalga mos tayanch yechim $x_1 = 30;\ \ x_2 = 0;\ \ x_3 = 5;\ \ x_4 = 45$ optimal plan bo'ladi. Bu plan bo'yicha ketadigan transport harajatlari $L = 15 \times 30 + 18 \times 45 + 30 \times 5 = 450 + 810 + 150 = 1410$ ming so'm bo'lib avvalgisidan 270 ming so'mga kam bo'lar ekan.

Bu usul bilan ixtiyoriy transport masalasini ham odatdagi chiziqli programmalash masalasi ko'rinishiga keltirish mumkin ekan. Faqat shartli ravishda n ta ishlab chiqaruvchi va ularga bog'langan m ta iste'molchi bo'lgan transport masalasini tasavvur qilsak, bu unchalik oson ish emas ekanligini to'la tasavvur qilishimiz mumkin.

Minimal xarajat usuli

Transport masalasini ba'zi kichik hajmdagi hollarda minimal xarajat usuli asosida ham yechish mumkin ekan. Bunga misol sifatida jadvalda keltirilgan 3 ta ta'minotchi va 4ta iste'molchi bilan bog'liq transport masalasi namunasi keltirilgan.

1-jadval

b_j / a_i	80	120	70	130
100	10	7	6	8
150	6	8	13	11
150	8	10	12	5

Bu masalaning transport xarajatlaridan tuzilgan matrisa

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 13 & 11 \\ 8 & 10 & 12 & 5 \end{pmatrix} \text{dan iborat.}$$

$$\min_{i,j} c_{ij} = c_{34} = 5,$$

$$x_{34} = \min(150;130) = 130$$

Demak 4-ustun o’chiriladi va a_4 ni qiymati $150 - 130 = 20$ ga o’zgaradi.

Jadvalda bu holni quyidagicha ko’rsatish mumkin:

2-jadval

b_j / a_i	80	120	70	130
100	10	7	6	8
150	6	8	13	11
150	8	10	12	5 130

C matrisasining 4-ustunini o’chirish natijasida hosil bo’lgan

$$C^{'} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 6 \\ 6 & 8 & 13 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix} \text{matrisaning elementlari ichida eng kichigini topamiz,}$$

$$\min_{i,j} c_{ij} = c_{21} = 6,$$ ni aniqlaymiz.

$x_{21} = \min(150;\ \ 80) = 80$

Bu holda 1-ustun o'chiriladi va a_2 ni qiymati $150 - 80 = 70$ ga o'zgaradi.

3-jadval

b_j / a_i	80	120	70	130
100	10	7	6	8
150	6 80	8	13	11
150	8	10	12	5 130

C' matrisaning 1-ustunini o'chirish natijasida quyidagi $C'' = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$ matrisaga ega bolamiz. Bu matrisaning c''_{ij} elementlari orasida eng kichigini topamiz:

$\min c''_{ij} = c''_{12} = c''_{13} = 6$. Demak, $x_{23} = \min(100;70) = 70$ bu holda C matrisaning 3-ustuni o'chiriladi va a_1 ning qiymati $100 - 70 = 30$ ga o'zgaradi.

4-jadval

b_j / a_i	80	120	70	130
100	10	7	6 70	8
150	6 80	8	13	11
150	8	10	12	5 130

Endi C matrisaning 1,3,4-ustunlarini o'chirish natijasida $C''' = (7\ \ 8\ \ 10)$ - vektor ustunga ega bo'lamiz. Bu vektorning har bir komponentasini o'sish tartibida qarab chiqib, ularga mos keluvchi x_{ij} larni aniqlaymiz:

5-jadval

b_j / a_i	80	120	70	130
100	10	7 30	6 70	8
150	6 80	8 70	13	11
150	8	10 20	12	5 130

Berilgan masalaning tayanch plani:

$$X=\begin{pmatrix} 0 & 30 & 70 & 0 \\ 80 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

matrisadan iborat bo'ladi.

Shimoliy –G'arbiy burchak usuli

Bu usulda jadval kataklari birinchi satr, birinchi ustundagi katakdan boshlab to'ldiriladi, so'ngra zaxira va extiyoj xisobga olinib birinchi satrdagi navbatdagi kataklar to'ldirilib boriladi. birinchi satr kataklari to'ldirilib bulgach, ikkinchi satr kataklari zaxira va extiyojni xisobga olib to'ldirib boriladi va xokazo. Shimoliy-G'arb burchak usulini tushinish uchun quyidagi misolni keltiramiz.

Misol. Quyidagi transport masalasining boshlang'ich planini toping.

1-jadval

b_j / a_i	3	6	2	1
4	2	5	9	5
2	8	3	5	8
3	7	3	1	4
3	5	9	7	2

1-qadam.

$x_{11}=\min(4,3)=3$. Shuning uchun b_1 *va* $a_1=4-3=1$ga o'zgaradi. $x_{21}=x_{31}=x_{41}=0$.

2-qadam.

$x_{12}=\min(1,6)=1$. Bunda $a_1=0$ *va* $b_2=6-1=5$ga o'zgaradi hamda $x_{13}=x_{14}=0$ bo'ladi.

3-qadam.

$x_{22}=\min(2,5)=2$. Bunda $a_2=0$ *va* $b_2=5-2=3$ga o'zgaradi hamda $x_{23}=x_{24}=0$ bo'ladi.

4-qadam.

$x_{32}=\min(3,3)=3$. Bunda $a_2=0$ *va* $b_2=0$ bo'ladi hamda $x_{33}=x_{34}=x_{42}=0$ bo'ladi.

5-qadam.

$x_{43}=0,\ a_4=3-2=1$ga o'zgaradi.

6-qadam.

$x_{44}=\min(1,1)=1$. Bunda $a_4=b_4=0$bo'ladi va masalaning yechilish jarayoni tugaydi. Topilgan boshlang'ich plan quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

2-jadval

b_j / a_i	3	6	2	1
4	2 3	5 1	9	5
2	8	3 2	5	8
3	7	3 3	1	4
3	5	9	7 2	2 1

Topilgan boshlang'ich plandagi noldan farqli bo'lgan noma'lumlar soni 6 ta bo'lib, u $n+m-1=7$ dan kichik. Agar masalaning tayanch planidagi noldan farqli bo'lgan x_{ij} noma'lumlar soni $n+m-1$ dan kichik bo'sa, bunday planni xos plan deb ataymiz.

Taqsimot usuli

Transport masalasini taqsimot usuli bilan yechish. Transport masalasini bu usul bilan yechishni sonli misolda qaraymiz. Transport masalasi 1-jadval bilan berilgan bo'lsin.

1-jadval.

Ta'minlovchilar	Zahiralar	Iste'molchilar				
		V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
A_1	$250\ t$	*7*	*9*	*16*	*10*	*16*
A_2	$350\ t$	*13*	*12*	*18*	*12*	*20*
A_3	$300\ t$	*19*	*15*	*10*	*13*	*13*
Talablar	$900\ t$	$150\ t$	$170\ t$	$190\ t$	$210\ t$	$180\ t$

Yechish: Bu masalada zahiralar miqdori talablar yig'indisiga teng, demak, masala yopiq transport masalasidir.

Birinchi rejani shimoliy-g'arb, burchak usulidan foydalanib tuzamiz. V_1 iste'molchiga A_1 ta'minlovchidan $150\ t$ rejalashtirib, A_1 ta'minlovchidagi yuk $150\ t$ ga kamayib $100\ t$ bo'ladi va V_1 iste'molchi qanoatlantiriladi. A_1 ta'minlovchidagi qolgan $100\ t$ yukni V_2 iste'molchiga rejalashtiramiz, uning talabi $170\ t$ bo'lganligi uchun A_2ta'minlovchidan $70t$ berilib, V_2 iste'molchi ham qanoatlantiriladi va A_2 ta'minlovchidagi yuk $70\ t$ ga kamayib, $280\ t$ bo'ladi. A_2 ta'minlovchidagi yukdan $190t$ yukni V_3 iste'molchiga rejalashtirib, qolgan yukni V_4iste'molchiga va hokazo, bu jarayonni davom ettirib, oxiri A_3ta'minlovchida $180\ t$ yuk qolib, uni V_5 iste'molchiga rejalashtirib, hamma talablar qanoatlantiriladi, zahirada yuk qolmaydi. Bularni quyidagi jadvalda yozamiz.

Ta'minlovchilar	Zahiralar	Iste'molchilar				
		V_1	$V2$	$V3$	$V4$	$V5$
$A1$	250 t	7 150	9 100	16	10	16
$A2$	350 t	13	12 70	18 190	12 90	20
$A3$	300 t	19	15	10	13 120	13 180
Talablar	900 t	150 t	170 t	190 t	210 t	180 t

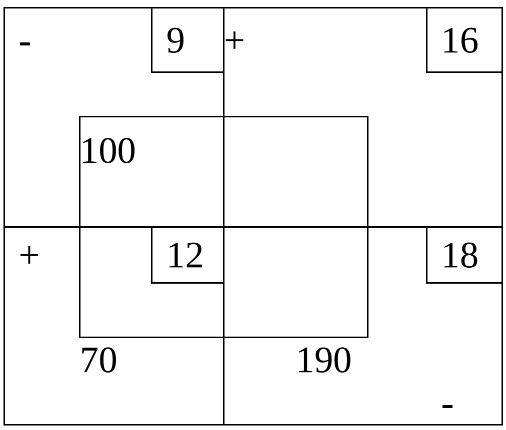
Shunday qilib, boshlang'ich rejani shimoliy-g'arb burchak usulidan foydalanib tuzdik. Bu masalada ta'minlovchilar soni $m=3$, iste'molchilar soni $n=5$, to'ldirilgan katakchalar soni 7 ta. $m+n-1=3+5-1=7$ bo'lganligi uchun, olingan reja maxsusmas bo'ladi.

Boshlang'ich taqsimlash uchun umumiy tashish harajatini hisoblaymiz:

$$S_1 = 150\cdot 7+100\cdot 9+70\cdot 12+190\cdot 18+90\cdot 12+120\cdot 13+180\cdot 13=$$

$=1050+900+840+3420+1080+1560+2340=11190$ so'm (ta'riflar so'mlarda deb olindi).

Endi tuzilgan rejaning optimal yoki optimalmasligini tekshiramiz. Buning uchun har bir bo'sh katakcha uchun yopiq siniq chiziq zanjiri (sikl) hosil qilib, bular bo'yicha baholarning algebraik yig'indisini hisoblaymiz. Masalan, 1-satr va 3-ustun uchun yopiq siniq chiziq zanjiri quyidagicha bo'ladi:

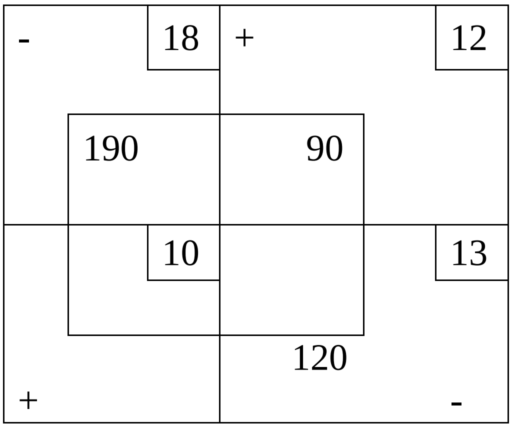


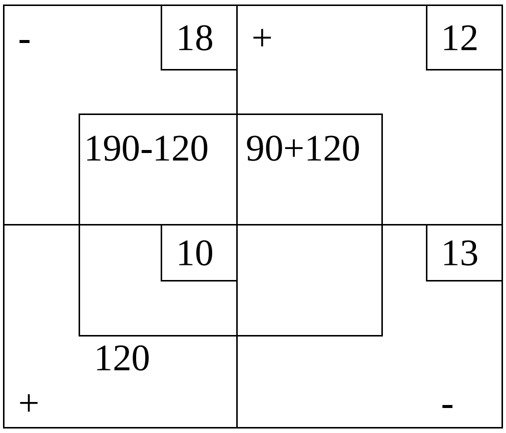
Bunda bo'sh katak ishorasi (+) bo'lib, qolganlari navbat bilan almashinadi (bu yerda navbat soat strelkasi yo'nalishi yoki unga qarama-qarshi yo'nalishda bo'lishi mumkin, uning farqi yo'q).

Bu baholar algebraik yig'indisini Δ_{13} bilan belgilasak, $\Delta_{13}=16-18+12-9=1$; bo'ladi. Xuddi yuqoridagidek qolgan bo'sh kataklar uchun ular quyidagicha bo'ladi:

$$\Delta_{14} = 10 - 12 + 12 - 9 = 22 - 21 = 1;$$
$$\Delta_{15} = 16 - 13 + 13 - 12 + 12 - 9 = 7;$$
$$\Delta_{21} = 13 - 7 + 9 - 12 = 22 - 19 = 3;$$
$$\Delta_{25} = 20 - 12 + 13 - 13 = 8;$$
$$\Delta_{31} = 19 - 7 + 9 - 12 + 12 - 13 = 18 - 20 = -2;$$
$$\Delta_{32} = 15 - 12 + 12 - 13 = 15 - 13 = 2;$$
$$\Delta_{33} = 10 - 18 + 12 - 13 = 22 - 31 = -9.$$

Baholar (ta'riflar) algebraic yig'indilarida manfiy sonlarning bo'lishi, tuzilgan reja optimal emasligini ko'rsatadi va rejani yaxshilash mumkin bo'ladi. Endi yangi reja tuzamiz, buning uchun manfiy sonlardan eng kichigi olinadi, ular bir necha bo'lsa, ixtiyoriysini olib taqsimlashni shu katak uchun tuzilgan yopiq siniq chiziq zanjiri bo'yicha o'zgartiramiz. Qaralayotgan misolda eng kichik manfiy algebraic yig'indi (-9) bo'lganligi uchun 3-satr 3-ustundagi katakcha uchun yopiq siniq chiziq zanjiri (sikl)ni qaraymiz:





Manfiy kataklardagi yuk miqdorining eng kichigini (bu 13 baholi katakchada bo'lib, 120 ga teng) olib,uni manfiy burchaklardan ayirib, musbat burchaklarga qo'shib, yangi reja hosil qilamiz. Bu o'zgarishni jadvalda amalga oshirib (boshqa katakchalardagi sonlar o'zgarmaydi) quyidagi yangi rejani olamiz:

Ta’minlovchilar	Zahiralar	Iste’molchilar				
		$V1$	$V2$	$V3$	$V4$	$V5$
$A1$	250 t	7 150	9 100	16	10	16
$A2$	350 t	13	12 70	18 70	12 210	20
$A3$	300 t	19	15	10 120	13	13 180
Talablar	900 t	150 t	170 t	190 t	210 t	180 t

Bu tuzilgan yangi reja uchun yuk tashish jami bahosini hisoblaymiz:

$$S_2 = 150 \cdot 7 + 100 \cdot 9 + 70 \cdot 12 + 70 \cdot 18 + 210 \cdot 12 + 120 \cdot 10 + 180 \cdot 13 =$$

$$= 1050 + 900 + 840 + 1260 + 2520 + 1200 + 2340 = 10110 \quad so'm$$

Demak, umumiy harajat $S_1 - S_2 = 11190 - 10110 = 1080$ ga kamaydi.

Endi tuzilgan rejaning optimalligini tekshiramiz. Buning uchun yangi tuzilgan rejadagi bo’sh katakchalar uchun baholarning algebraik yig’indisini hisoblaymiz:

$$\Delta_{13} = 16 - 18 + 12 - 9 = 28 - 27 = 1;$$

$$\Delta_{14} = 10 - 12 + 12 - 9 = 10 - 9 = 1;$$

$$\Delta_{15} = 16 - 13 + 10 - 18 + 12 - 9 = 38 - 40 = -2;$$

$$\Delta_{21} = 13 - 7 + 9 - 12 = 22 - 19 = 3;$$

$$\Delta_{25} = 20 - 18 + 10 - 13 = 30 - 31 = -1;$$

$$\Delta_{31} = 19 - 7 + 9 - 12 + 18 - 10 = 46 - 29 = 17;$$

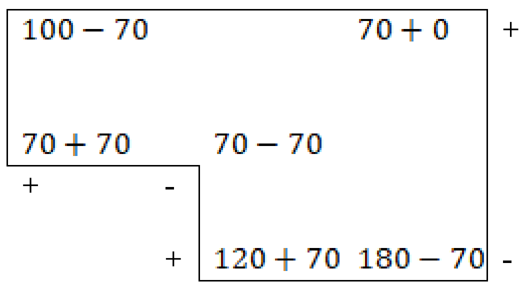
$$\Delta_{32} = 15 - 12 + 18 - 10 = 33 - 22 = 11;$$

$$\Delta_{34} = 13 - 12 + 18 - 10 = 31 - 22 = 9.$$

Δ_{15} va Δ_{25} baholar manfiy, bulardan kichigi $\Delta_{15} = -2$ bo’lganligi uchun shu katakcha uchun yopiq siniq chiziqlar zanjirini qaraymiz:

	− 9 100		+ 16
	+ 12 70	− 18 70	
		+ 10 120	- 13 180

-



Bu zanjirda manfiy burchaklardagi eng kichik yuk 70 bo’lib, uni manfiy burchaklardan ayirib, musbat burchaklarga qo’shib, yaxshilangan planni tuzamiz:

Ta'minlovchilar	Zahiralar	Iste'molchilar				
		$V1$	$V2$	$V3$	$V4$	$V5$
$A1$	250 t	7 150	9 30	16	*10*	16 70
$A2$	350 t	18	12 140	18	12 210	20
$A3$	300 t	19	15	10 190	13	13 110
Talablar	900 t	150 t	170 t	190 t	210 t	180 t

Bu olingan reja bo'yicha umumiy harajat:
$S_3 = 150 \cdot 7 + 30 \cdot 9 + 70 \cdot 16 + 140 \cdot 12 + 210 \cdot 12 + 190 \cdot 10 + 110 \cdot 13 = 9940$ so'm
bo'lib oldingi rejaga nisbatan $S_2 - S_3 = 170$ so'mga yaxshilandi.

Olingan rejadagi bo'sh katakchalar uchun baholarning algebraik yig'indisini hisoblaymiz:

$$\Delta_{13} = 16 - 16 + 13 - 10 = 29 - 26 = 3;$$
$$\Delta_{14} = 10 - 12 + 12 - 9 = 1;$$
$$\Delta_{21} = 13 - 12 + 9 - 7 = 22 - 19 = 3;$$
$$\Delta_{23} = 18 - 10 + 13 - 16 + 9 - 12 = 40 - 38 = 2;$$
$$\Delta_{25} = 20 - 16 + 9 - 12 = 29 - 28 = 1;$$
$$\Delta_{31} = 19 - 13 + 16 - 7 = 35 - 20 = 15;$$
$$\Delta_{32} = 15 - 13 + 16 - 9 = 31 - 22 = 9;$$
$$\Delta_{34} = 13 - 13 + 16 - 9 + 12 - 12 = 7.$$

Shunday qilib, tuzilgan reja uchun baholarning algebraik yig'indilari ichida manfiylari yo'q, shuning uchun bu tuzilgan reja optimal bo'lib, umumiy harajat $S_3 = 9940$ so'm bo'ladi va uni endi yaxshilash mumkin emas.

Potentsial usuli

Potentsiallar usuli transport masalasini yechish uchun qo'llangan birinchi aniq usul bo'lib, u 1949 yilda rus olimlari L.V.Kantorovich va M.K.Gavurin tomonidan yaratilgan. Bu usulning asosiy g'oyasi trasport masalasiga moslashtirilgan simpleks usuldan iborat bo'lib, birinchi marta chiziqli dasturlashtirish masalalarini yechish usullariga bog'liq bo'lmagan holda tasvirlangan. Keyinroq xuddi shunga o'xshash usul Amerika olimi Dantsig tomonidan yaratilgan. Dantsig usuli chiziqli dasturlashtirishning asosiy g'oyalariga asoslangan bo'lib, Amerika adabiyotida bu usul modifitsirlangan taqsimot usuli deb yuritiladi.Potentsiallar usuli yordami bilan boshlangich tayanch rejadan boshlab, optimal yechimga yaqinroq bo'lgan yangi tayanch rejaga o'tib borib, chekli sondagi iteratsiyadan so'ng masalaning optimal yechimi topiladi. Har bir iteratsiyada topilgan tayanch reja optimal reja ekanini tekshirish uchun har bir ishlab chiqaruvchi (A_i) va iste'mol qiluvchi (B_j) punktga uning potentsiali deb ataluvchi miqdor u_i va v_j mos qo'yiladi .

Potentsial sharti

Bu potentsiallar shunday tanlanadiki,bunda o'zaro bog'langan A_i va B_j punktlarga mos keluvchi potentsiallar yig'indisi C_{ij} ga (A_i dan B_j ga birlik maxsulotni tashish uchun sarf qilinadigan transport xarajatiga) teng bo'lishi kerak.

Agar $H^* = (h_{ij}*)$ reja transport masalasining optimal rejasi bo'lsa, u holda unga

$$u_i^* + v_j^* = c_{ij} \; (x_{ij}^* > 0), \tag{5}$$

$$u_i^* + v_j^* \le c_{ij} \; (x_{ij}^* = 0) \tag{6}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $n+m$ ta u_i^* va v_j^* potentsiallar mos keladi.Boshlang'ich reja bo'lishi uchun quyidagi shartlar bajarilishi kerak:

a) Har bir to'ldirilgan (maxsulot taqsimlangan) katakcha uchun

$$u_i + v_i = c_{ij} \tag{7}$$

b) Har bir bo'sh (maxsulot taksimlanmagan) katakcha uchun

$$u_i + v_j = c_{ij}^* \tag{8}$$

Agar kamida bitta bo'sh katakcha uchun (8)shart bajarilmasa, topilgan boshlang'ich reja optimal reja bo'lmaydi va

$$max(u_i + v_j) = \Delta_{ij}\,, \;\; (\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}) \qquad \Delta_{ij} > 0$$

shartni qanoatlantiruvchi (i, j)katakchani to'ldirilgan katakchaga aylantirish kerak bo'ladi.

Potentsial usulining algoritmi

Shunday qilib, potentsial usulining algoritmi quyidagilardan iborat:

1.Yuqoridagi ko'rilgan usullarning biridan foydalanib, boshlang'ich reja topiladi.

2.Topilgan rejani optimal reja ekanligini tekshirish uchun potentsiallar sistemasi tuziladi. Buning uchun (6) formuladan foydalanib, har bir to'ldirilgan katakcha uchun (7) ko'rinishdagi potentsial tenglamalar tuziladi. Ma'lumki, transport masalasining rejadagi 0 dan farqli bo'lgan o'zgaruvchilar soni $n+m-1$ta. Demak, potentsial tenglamalar sistemasi $n+m$ta noma'lumli $n+m-1$tenglamalar sistemasidan iborat bo'ladi.Bu sistemada noma'lumlar soni tenglamalarsonidan ortiq bo'lganligi sababli , potentsiallarning son qiymatini topish uchun ulardan ixtiyoriy bittasiga ixtiyoriy qiymat, soddalik uchun nol qiymat berib, qolganlarini birin-ketin topish mumkin.

Faraz qilaylik ,a_i ma'lum bo'lsin,u xolda (6) dan v_j topiladi:

$v_j = c_{ij} - u_i.$

Agar v_j ma‘lum bo’lsa , u xolda u_i quyidagicha topiladi :

$u_i = c_{ij} - v_j.$

Barcha potentsiallarning son qiymatini aniqlab bo’lgach, hamma bo’sh katakchalar uchun

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}. \qquad (9)$$

hisoblanadi. Agarda barcha i va j lar uchun

$\Delta_{ij} \le 0, (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$

o’rinli bo’lsa , topilgan boshlangich reja optimal reja bo’ladi.

3. Agar i va j larning kamida bir qiymati uchun $\Delta_{ij} \ge 0$ bo’lsa , boshlang’ich tayanch reja almashtiriladi. Buning uchun potentsiallik sharti buzilmagan katak uchun yopiq zanjir, tsikl tuziladi. Tsiklda ushbu katak bo’sh qolgan kataklarda yuk qo’yilmagan bo’lishi kerak. So’ngra soat strelkasi bo’yicha potentsiallik sharti buzilgan katakka (+)navbatdagi katakka (-) va xakazo ishoralari qo’yib boramiz . (-) ishorali katakdan (+) ishorali katakka (-) ishorali kataklardagi eng kam yuk miqdoridagi yukni ko’chirib yangi reja tuzamiz.

4.Tuzilgan yangi reja uchun potentsiallar shartini tekshiramiz. Agar topilgan yangi reja optimal bo’lmasa yana shu qadam takrorlanadi.

Misol. $A_1, A_2,\ A_3$ omborlarda mos ravishda $a_1 = 510,\ a_2 = 90,\ a_3 = 120$ tonnadan yuk bor.Bu yukni V_1, V_2, V_3, V_4 do’konlarga mos ravishda $v_1 = 270,\ v_2 = 140,\ v_3 = 200,\ v_4 = 110$ tonnadan qilib taqsimlanishi kerak. Agar bir tonna yukni $A_i (i = 1,2,3)$ ombordan $V_j (j = 1,2,3,4)$ gaolib borish uchun ketadigan xarajat.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 3 \\ 5 & 6 & 8 & 9 \\ 7 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

ga teng bo’lsa, yukni tashishning optimal rejasini tuzing.

Yechish: A_1 ombordan V_1, V_2, V_3, V_4 dukonlarga olib borilishi kerak bo’lgan yuklarni $h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{14}$ bilan, A_2 ombordan V_1, V_2, V_3, V_4 do’konlarga olib borilishi kerak bo’lgan yuklarni $h_{21}, h_{22}, h_{23}, h_{24}$ bilan A_3 ombordan V_1, V_2, V_3, V_4 do’konlarga olib borilishi kerak bo’lgan yuk miqdori $h_{31}, h_{32}, h_{33}, h_{34}$ bilan belgilab olaylik. U xolda masala shartiga ko’ra ;

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 510 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 90 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 120 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 270 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 140 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 200 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 110 \end{cases} \qquad (10)$$

$$x_{i,j} \geq 0, \quad i = 1,2,3; \; j = 1,2,3,4 \tag{11}$$

Tenglamalar sistemasining ichidan

$$Z = h_{11} + 4h_{12} + 7h_{13} + 3h_{14} + 5h_{21} + 6h_{22} + 8h_{23} + 9h_{24} + 7h_{31} + 2h_{32} + 4h_{33} + 8h_{34}$$

Maqsad funktsiyasiga minimal qiymat bera oladiganini topamiz. (10) va (11) lar uqoridagi masalaning matematik modelidir. Masalani jadvallar yordamida yechamiz.

1-jadval

Jo'natish punkti	Qabul qilish punktlari				Zaxira
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1 270	4 20	7 110	3 110	510
A_2	5	6	8 90	9	90
A_3	7	2 120	4	8	120
Extiyoj	270	140	200	110	720

Tuzilgan boshlangich reja bo'yicha yuk tashish uchun ketadigan xarajat

$Z = 270 * 1 + 4 * 20 + 7 * 110 + 3 * 110 + 8 * 90 + 2 * 120 = 2610$ so'm

Bu tuzilgan rejani optimallikka potentsiallar usuli bilan tekshiramiz. Yuk qo'yilgan kataklar uchun

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 1, \quad \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + \beta_2 = 4, \quad \beta_1 = 1 \\ \alpha_1 + \beta_3 = 7, \quad \beta_2 = 4 \\ \alpha_1 + \beta_4 = 3, \quad \beta_3 = 7 \\ \alpha_2 + \beta_2 = 2, \quad \beta_4 = 3, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = -2 \end{cases}$$

Yuk qo'yilmagan kataklar uchun

$\alpha_2 + \beta_1 = 1 + 1 = 2 < 5$

$\alpha_2 + \beta_2 = 1 + 4 = 5 < 6$

$\alpha_2 + \beta_4 = 1 + 3 = 4 < 9$

$\alpha_3 + \beta_1 = -2 + 1 = -1 < 7$

$\alpha_3 + \beta_3 = -2 + 7 = 5 > 4$

$\alpha_3 + \beta_4 = -2 + 3 = 1 < 8$

Potentsiallik sharti A_3B_3 katakda buzildi shu katak uchun tsikl tuzib yangi jadval tuzamiz.

Junatish punkti	**Qabul qilish punkti**				**Zaxira**
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	4	7	3	

	270	130		110	510
A_2	5	6	8 90	9	 90
A_3	7	2 10	4 110	8	 120
Extiyoj	270	140	200	110	720

$$\alpha_1 = 0$$

$$\begin{array}{lll}
\alpha_1 + \beta_1 = 1 & \beta_1 = 1 & \alpha_1 + \beta_3 = 6 < 7 \\
\alpha_1 + \beta_2 = 4 & \beta = 4 & \alpha_2 + \beta_1 = 3 < 5 \\
\alpha_1 + \beta_4 = 3 & \beta_4 = 3 & \alpha_2 + \beta_2 = 6 = 6 \\
\alpha_2 + \beta_3 = 8 & \alpha_3 = -2 & \alpha_2 + \beta_4 = 6 < 9 \\
\alpha_3 + \beta_2 = 2 & \beta_3 = 6 & \alpha_3 + \beta_1 = -1 < 7 \\
\alpha_3 + \beta_3 = 4 & \alpha_2 = 2 & \alpha_3 + \beta_4 = 1 < 8
\end{array}$$

potentsiallik sharti bajariladi demak tuzilgan reja optimal ekan.

$$Z = 1 \cdot 270 + 4 \cdot 130 + 3 \cdot 110 + 8 \cdot 90 + 2 \cdot 10 + 4 \cdot 110 = 2290$$ so'm

yuk tashishning eng arzon narxi $Z = 2290$ so'm ekan.

Amaliy mashg'ulot uchun topshiriq.

Masala. Viloyatning uchta A_1, A_2 *va* A_3 korxonalarida birjinsli mahsulotlar ishlab chiqarilib, ishlab chiqarilgan mahsulotlarni beshta B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 istemolchilargajo'natishkerak.

$A_1, A_2,$ *va* A_3 korxonalardamosravishda,

a_1, a_2, a_3 tonnabirjinsliishlabchiqarilganmahsulotni B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 istemolchilar ga, mosravishda, b_1, b_2, b_3, b_4 *va* b_5 tonnadanjo'natishkerak.

Ishlab chiqarish korxonalaridan iste'molchilargacha bo'lgan xarajatlar quyidagi T matritsada berilgan:

$$T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \end{pmatrix}$$

Ishlab chiqarish korxonalaridan mahsulotlarni iste'molchilarga tashish harajatlarining minimal variantini toping:

Masalalar: Keltirilgan jadval qiymatlariga mos transport masalasini tuzing. Masala tayanch yechimini minimal harajatlar usuli bo'yicha aniqlang va uni optimallikka tekshiring.

1-misol

	1	2	3	Σ
1	11	15	13	200

2	14	12	10	300
∑	150	250	100	500

2-misol

	1	2	3	∑
1	60	45	60	400
2	55	60	58	500
∑	200	400	300	900

3-misol

	1	2	3	∑
1	30	25	35	500
2	25	35	20	300
∑	250	350	200	800

4-misol

	1	2	3	∑
1	25	20	18	400
2	15	22	24	300
∑	250	150	300	700

5-misol

	1	2	3	∑
1	40	50	30	600
2	30	40	50	400
∑	300	500	200	

IV-Bob. CHIZIQSIZ PROGRAMMALASHTIRISH VA O’YINLAR NAZARIYASI

12-MAVZU: CHIZIQSIZ PROGRAMMALASHTIRISH.SHARTLI EKSTREMUM MASALALARINI LAGRANJ USULI YORDAMIDA YECHISH.

Chiziqsiz programmalash masalasining qo‘yilishi va turlari.Ma’lumki, matematik programmalash masalasi deganda umumiy holda

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n)\{\le, =, \ge\}\, b_i,\ i = \overline{1, m}, \tag{1}$$

munosabatlarni qanoatlantiruvchi va $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyani maksimum (minimum)ga aylantiruvchi $x_1, x_2, ..., x_n$ noma’lumning qiymatlarini topish masalasi nazarda tutiladi. Bu masala shartlarini qisqacha bunday yozish mumkin:

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n)\ \{\le, =, \ge\}\, b_i,\ i = \overline{1, m}; \tag{1}$$

$$Z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max(\min), \tag{2}$$

bu yerda $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ va $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ berilgan funksiyalar, $b_i,\ i = \overline{1, m}$ lar o‘zgarmas sonlar. (1) shartlar masalaning chegaraviy shartlari, $Z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiya esa maqsad funksiyasi deb ataladi. (1) dagi har bir munosabat uchun $\le, =, \ge$ belgilardan faqat bittasi o‘rinli bo‘ladi va shu bilan bir qatorda turli munosabatlarga turli belgilar mos bo‘lishi mumkin.

Ayrim chiziqsiz programmalash masalalarida $x_1, x_2, ..., x_n$ o‘zgaruvchining ba’zilariga yoki hammasiga manfiy bo‘lmaslik sharti qo‘yilgan bo‘ladi. Ba’zi masalalarda esa noma’lumlarning bir qismi (yoki hammasi) butun bo‘lishligi talab qilinadi. (1) – (2) masaladagi hamma $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ va $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyalar chiziqli bo‘lsa hamda barcha o‘zgaruvchilarning nomanfiy bo‘lishligi talab qilinsa, bu masala *chiziqli programmalash masalasi* bo‘ladi. Aksincha, agar bu funksiyalardan kamida bittasi chiziqsiz funksiya bo‘lsa, masala *chiziqsiz programmalash masalasi* deyiladi.

(1) – (2) masalada $m = 0$ bo‘lsa, ya’ni chegaraviy shartlar qatnashmasa, u *shartsiz optimallashtirish masalasi* deyiladi. Bu holda masala quyidagicha yoziladi:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \to \max(\min),$$
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_n, \tag{3}$$

bu yerda $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n o‘lchovli vektor (nuqta), E_n n o‘lchovli Yevklid fazosi, ya’ni vektorlarni qo‘shish, λ songa ko‘paytirish va ikki vektorning skalyar ko‘paytmasi amallari kiritilgan n o‘lchovli $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ vektorlar (nuqtalar) to‘plami.

Faraz qilaylik, (1) sistema faqat tenglamalar sistemasidan iborat bo‘lib, noma’lumlarga nomanfiy bo‘lishlik sharti qo‘yilmasin hamda $m < n$ bo‘lib, $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ va $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyalar uzluksiz va kamida ikkinchi tartibli xususiy hosilaga ega bo‘lsin. Bu holda chiziqsiz programmalash masalasi quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i, (i = \overline{1, m};) \tag{4}$$

$$Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max(\min), \tag{2}$$

Bunday masala chegaraviy shartli tenglamalardan iborat bo‘lgan *shartli maksimum (minimum) masalasi* deyiladi. (10.3), (10.4) va (10.2) ko‘rinishdagi masalalarni differensial hisobga asoslangan klassik usullar bilan yechish mumkin bo‘lgani uchun ularni optimallashtirishning klassik masalalari deyiladi.

Agar (1) sistemasidagi hamma munosabatlar tengsizliklardan iborat bo‘lsa hamda ularning ba’zilariga "≤", ba’zilari esa "≥" belgilar mos kelsa, bu tengsizliklarni osonlik bilan bir xil ko‘rinishga keltirish mumkin. Bundan tashqari.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max$$

Shartni $\quad - f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \min$

ko‘rinishda yozish mumkin. Shuning uchun, umumiylikni buzmasdan, shartlari tengsizlikdan iborat bo‘lgan chiziqsiz programmalash masalasini quyidagicha yozish mumkin:

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i, (i = \overline{1, m};) \tag{5}$$

$$x_j \ge 0 (j = \overline{1, n}); \tag{6}$$

$$Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \min \tag{7}$$

Noma’lumlarning nomanfiylik sharti – (6) qatnashmagan masalalarga bunday shartni osonlik bilan kiritish mumkin.

Ba’zi hollarda masalaning (1) shartdagi ayrim munosabatlar tenglamalaridan, ayrimlari esa tengsizliklardan iborat bo‘lishi mumkin. Bunday masalalarni shartlari aralash belgili bo‘lgan minimum masalasi ko‘rinishiga keltirilib yozish mumkin:

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i, (i = \overline{1, m};) \tag{8}$$

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i, (i = \overline{m_1 + 1, n}); \tag{9}$$

$$Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \min. \tag{10}$$

Bunda (8), (9) munosabatlar chegaraviy shartlardan iborat bo‘lib, noma’lumlarning nomanfiy bo‘lishlik shartini ham (agar bunday shart qo‘yilgan bo‘lsa) o‘z ichiga oladi.

Endi quyidagi ko‘rinishda berilgan masalani ko‘ramiz:

$$g_i(X) = g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i, \; i = \overline{1, m}; \tag{11}$$

$$X = (x_1, x_2, \ldots x_n) \in G \subset E_n, \tag{12}$$

$$Z(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \min(\max). \tag{13}$$

Bu masala chekli o‘lchovli chiziqsiz programmalash masalasining umumiy ko‘rinishdan iborat bo‘lib, bunda $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) -$ maqsad funksiyasi, $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) -$ chegaraviy funksional, $G -$ masalaning aniqlanish sohasi, G to‘plamning nuqtalari masalaning planlari deb, (11) shartlarni qanoatlantiruvchi $X \in G$ nuqtalar esa masalaning mumkin bo‘lgan plani deb ataladi.

Chiziqsiz programmalashda lokal va global optimal plan tushunchasi mavjud bo‘lib, ular quyidagicha ta’riflanadi.

Faraz qilaylik, X^* nuqta (11)-(13) masalaning mumkin bo‘lgan plani va uning kichik ε atrofidagi (ε ixtiyoriy kichik musbat son) nuqtalar to‘plami $\varepsilon(X^*) \in G$ dan iborat bo‘lsin.

Agar

$$f(X^*) \le f(X) \left[f(X^*) \ge f(X) \right] \tag{14}$$

tengsizlik ixtiyoriy $X \in \varepsilon(X^*)$ uchun o‘rinli bo‘lsa, X^* plan (10.14) maqsad funksiyaga lokal minimum (maksimum) qiymat beruvchi *lokal optimal plan* deb ataladi.

Agar

$$f(X^*) \le f(X) \left[f(X^*) \ge f(X) \right]$$

tengsizlik ixtiyoriy $X \in G$ uchun o‘rinli bo‘lsa, X^* plan (14) maqsad funksiyaga golobal (absolyut) minimum (maksimum) qiymat beruvchi *global optimal plan yoki global optimal yechim* deb ataladi.

Yuqoridagi (5) – (7) va (8) - (10) masalalarni yechish uchun chiziqli programmalashdagi simpleks usulga o‘xshagan universal usul kashf qilinmagan.

Bu masalalar $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ va $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ lar ixtiyoriy chiziqsiz funksiyalar bo‘lgan hollarda juda kam o‘rganilgan. hozirgi davrgacha eng yaxshi o‘rganilgan chiziqsiz programmalash masalalari $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ va $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiyalar qavariq (botiq) bo‘lgan masalalardir. Bunday masalalar qavariq programmalash masalalarining asosiy xususiyatlari shundan iboratki, ularning har qanday lokal optimal yechimi global yechimdan iborat bo‘ladi.

Iqtisodiy praktikada uchraydigan ko‘p masalalarda $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiyalar chiziqli bo‘lib, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ maqsad funksiyasi kvadratik formada

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_i x_j$$

bo‘ladi. Bunday masalalar *kavariq programmalash masalalari* deb ataladi yoki cheragaviy shartlar yoki maqsad funksiyasi, yoki ularning har ikkisi n ta funksiyalarning yig‘indisidan iborat, ya’ni

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g_{i1}(x_1) + g_{i2}(x_2) + \ldots + g_{in}(x_n) \tag{15}$$

va

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \ldots + f_n(x_n) \tag{16}$$

bo‘lgan masalalar *separabel programmalash masalalari* deb ataladi. Kavariq va separabel programmalash masalalarini yechish uchun simpleks usulga asoslangan taqribiy usullar yaratilgan.

Chiziqsiz programmalash masalasini, jumladan, kvadratik programmalash masalasini taqribiy yechish usullaridan biri gradiyent usulidir. Gradiyent usulni har qanday chiziqsiz programmalash masalasini yechishga qo‘llash mumkin. Lekin bu usul masalaning lokal optimal yechimlarini topishini nazarga olib, qarvariq (botiq) programmalash masalalarini yechishga qo‘llash maqsadga muvofiqdir.

Chiziqsiz programmalashga doir bo‘lgan ishlab chiqarishni planlashtirish va resurslarni boshqarishda uchraydigan muhim masalalardan biri stoxastik programmalash masalalaridir.

Bu masalalardagi ayrim parametrlar noaniq yoki tasodifiy miqdorlardan iborat bo‘ladi.

Chegaraviy shartlari haqida to‘liq ma’lumot bo‘lmagan optimallashtirish masalalarini *stoxastik masalalar* deb ataladi. Stoxatik masalalarni yechish uchun yaratilgan maxsus usullar stoxatik programmalash tashkil qiladi. Stoxastik programmalarda aktiv va passiv usullar mavjud bo‘lib, ularning birinchisi masalani noaniqlik va tavakkalchilikka asoslangan, ikkinchisi esa masaladagi parametrlar tasodifiy miqdor bo‘lganda optimal yechimni topish usulidir.

Yuqorida qayd etilgan har qanday chiziqli va chiziqsiz programmalash msalalarini hamda barcha parametrlari vaqtga bog‘liq ravishda o‘zgarmaydigan masalalarni *statik masalalar* deb ataymiz. Bunday masalalar planlashtirilayotgan davr davomida ishlab chiqarish ham, iste’mol ham, resurslar ham o‘zgarmas deb qaralgan iqtisodiy masalalarning matematik modellaridan iborat bo‘ladi.

Paramertlari o‘zgaruvchan miqdor bo‘lib, ular vaqtning funksiyasi deb qaralgan masalalar *dinamik programmalash masalasi* deyiladi. Bunday masalalarni yechish usullarini o‘z ichiga olgan matematik programmalashning tarmog‘ini *dinamik programmalash* deb ataymiz. Dinamik programmalashning usullarini faqat dinamik programmalash masalalarini yechishda emas, balki ixtiyoriy chiziqsiz programmalash masalalarini yechishda ham qo‘llash mumkin.

Chiziqsiz programmalash masalalarining geometrik interpretatsiyasi

Chiziqli programmalash masalalarining xususiyatlaridan bizga ma’lumki, birinchidan uning mumkin bo‘lgan planlar to‘plami, ya’ni masalaning chegaraviy shartlarini va noma’lumlarning nomanfiylik shartlarini qanoatlantiruvchi $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nuqtalar to‘plami qavariq bo‘ladi. Ikkinchidan, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ maqsad funksiyani berilgan qiymatga erishtiradigan $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nuqtalar to‘plami n o‘lchovli fazoning gipertekisligini tashkil qiladi. Bundan tashkari, maqsad funksiyaning qiymatlariga mos keluvchi gipertekisliklar o‘zaro parallel bo‘ladi. Uchinchidan, maqsad funksiyaning mumkin bo‘lgan planlar to‘plamidagi lokal minimumi (maksimumi) golabal (absolyut) minimumdan (maksimumdan) iborat bo‘ladi. To‘rtinchidan, agar maqsad funksiya chekli optimal qiymatga ega bo‘lsa, mumkin bo‘lgan planlar to‘plamini ifodalovchi ko‘pburchakning kamida bir uchi optimal yechimni beradi. Mumkin bo‘lgan planlar ko‘pburchagining uchlari (chetki nuqtalari) bazis yechim deb ataladi. Bazis yechimdagi hamma noma’lumlar (bazis o‘zgaruvchilar) qat’iy musbat bo‘lgan holdagi yechim xosmas bazis yechim va agar ulardan kamida bittasi nolga teng bo‘lsa, xos bazis yechim deyiladi.

Ixtiyoriy bazis yechimdan boshlab boshqa bazis yechimga birin-ketin o‘tib borib, chekli sondagi qadamdan so‘ng funksiyaga ekstremum qiymat beruvchi bazis yechim topiladi.

Bazis yechim optimal yechim bo‘lishi uchun maqsad funksiyaning bu yechimdagi qiymati boshqa bazis yechimlardagi qiymatlaridan kam (ko‘p) bo‘lmasligi kerak.

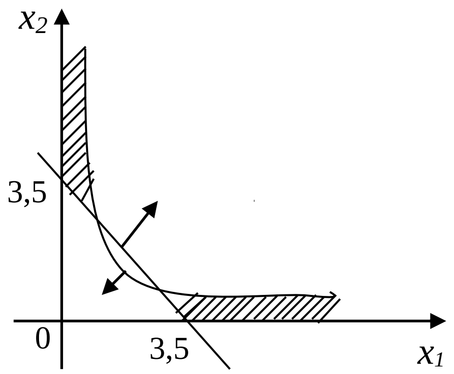
Chiziqsiz programmalash masalalarida esa yuqoridagi chiziqli programmalashga doir xususiyatlarning ayrimlari (yoki hammasi) bajarilmaydi. Masalan, chiziqsiz programmalash masalasining mumkin bo‘lgan planlar to‘plami qavariq to‘plam bo‘lmasligi ham mumkin. Bunichegaraviy shartlari

$$\begin{cases}(x_1-1)x_2 \le 1,\\ x_1+x_2 \ge 3{,}5,\\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\end{cases}$$

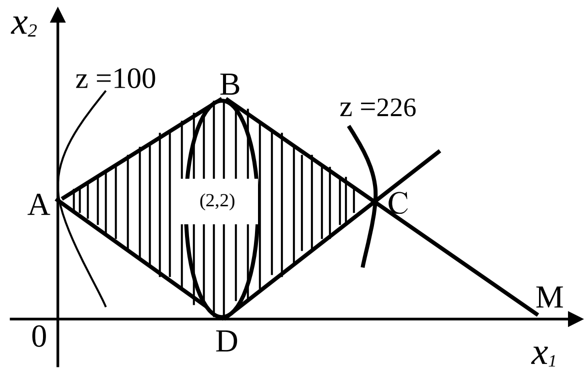
munosabatlardan iborat bo‘lgan masalada ko‘rish mumkin. Masalaning planlar to‘plami ikkita alohida qismlarga ajralgan bo‘lib, ularning birortasi ham qavariq emas (1 shakl).

Agar mumkin bo‘lgan planlar to‘plami qavariq bo‘lmasa, maqsad funksiya chiziqli bo‘lgan holda ham masalaning global optimal yechimlaridan farq qiluvchi lokal yechimlari mavjud bo‘ladi. Masalan, chegaraviy shartlari chiziqli va maqsad funksiyasi chiziqsiz bo‘lgan quyidagi masalani ko‘ramiz:

$$x_1 + x_2 \geq 2,$$
$$x_1 - x_2 \geq -2,$$
$$x_1 + x_2 \leq 6,$$
$$x_1 - 3x_2 \leq 2,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,$$
$$Z = f(x_1, x_2) = 25(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \max.$$



1 –shakl



2- shakl

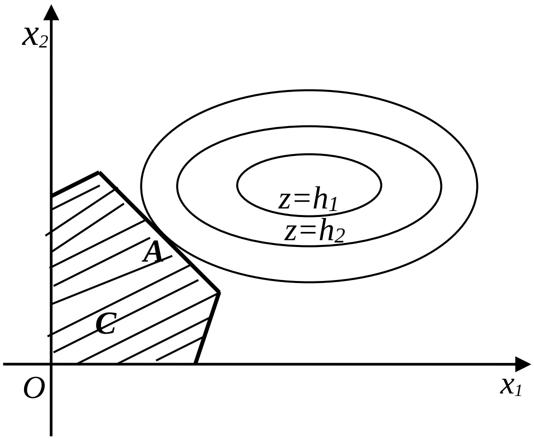
Bu masalaning chegaraviy shartlarini qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plami qavariq $ABCD$ to‘rtburchakdan iborat bo‘ladi. (2-shakl).

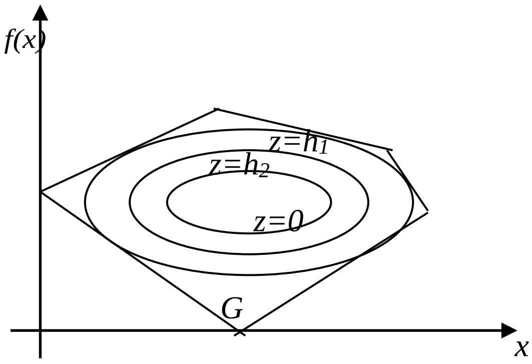
Masaladagi maqsad funksiya markazi (2, 2) nuqtadan iborat bo‘lgan ellipslar oilasidan iborat.

$Z = 4$ da ellips B va D nuqtalardan o‘tadi, A nuqtada $Z = 100$ va C nuqtada $Z = 226$ bo‘ladi. Bundan ko‘rinadiki, A nuqtada maqsad funksiyaning qiymati unga yaqin bo‘lgan B va D nuqtalardagi qiymatidan katta. Demak, A nuqtada maqsad funksiya lokal maksimumga erishadi. S nuqtada $Z = f(x_1, x_2)$ funksiya eng katta $Z = 226$ qiymatga erishadi. Maqsad funksiyaning C nuqtadagi qiymati $ABCD$ to‘rtburchakka tegishli hamma nuqtalardagi qiymatlardan katta bo‘ladi. Demak, $Z = f(x_1, x_2)$ funksiya C nuqtada global maksimumga erishadi.

Bu masalaning optimal yechimi mumkin bo‘lgan planlar to‘plamining C uchidan (chetki nuqtasidan) iborat bo‘ladi. Lekin, umumiy holda, chiziqsiz programmalash masalasining maqsad funksiyasiga optimal qiymat beruvchi nuqta (azis yechim) mumkin bo‘lgan planlar to‘plamining chetki nuqtasi bo‘lishi shart emas. Ayrim hollarda bazis yechim mumkin bo‘lgan planlar to‘plamining ichki nuqtasidan ham, chegaraviy nuqtasidan ham iborat bo‘lishi mumkin. Masalan 3 –shaklda tasvirlangan masalada $Z = f(x_1, x_2)$ maqsad funksiya minimum qiymatga mumkin bo‘lgan planlar to‘plamining chegaraviy nuqtasi A da erishadi.

4-shaklda esa $Z = f(x_1, x_2)$ maqsad funksiya o‘zining minimum qiymatga $(Z = 0)$ mumkin bo‘lgan planlar to‘plamining ichki nuqtasida erishadigan masala tasvirlangan.





3 –shakl 4- shakl

Umumiy holda (8)-(10) ko‘rinishda berilgan chiziqsiz programmalash masalasini ko‘ramiz va bu masalaning geometric interpretatsiyasi bilan tanishamiz. Masaladagi (8), (9) shartlar Yevklid fazosida mumkin bo‘lgan planlar to‘plamini beradi. Bu to‘plamning nuqtalari orasidan maqsad funksiyaga minimum qiymat beruvchi nuqtani (optimal nuqtani) toppish kerak. Buning uchun mumkin bo‘lgan planlar to‘plamining eng past saviyali $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Q$ gipersirti bilan kesilgan nuqtasini toppish kerak. Bu nuqta berilgan (8)-(10) masalaning optimal yechimini geometric interpretatsiyadan foydalanib toppish uchun quyidagi ishlarni bajarish kerak.

1. Masalaning (8), (9) chegaraviy shartlarini qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plamini, ya’ni mumkin bo‘lgan planlar to‘plamini yasash kerak (agar bu to‘plam bo‘sh bo‘lsa, masala yechimga ega bo‘lmaydi).

2. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Q$ gipersirtni yasash kerak.

3. Q ning qiymatini o‘zgartirib borib, eng past saviya gipersirt topiladi yoki funksiyaning quyidan chegaralanmagan ekanligi aniqlanadi.

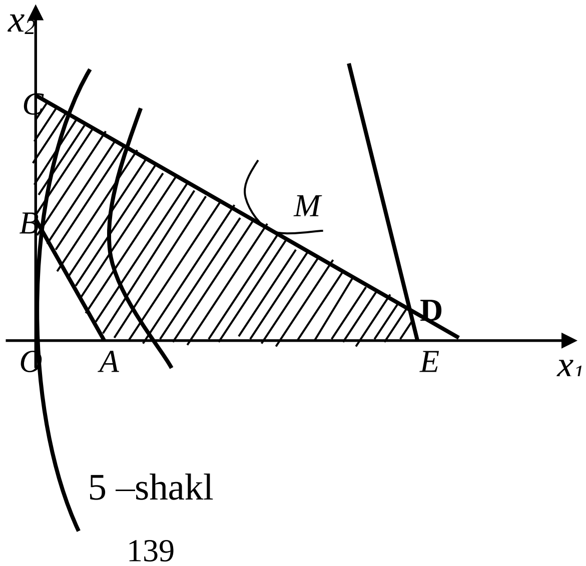
4. Mumkin bo‘lgan planlar to‘plamining eng past saviya gipersirt bilan kesishgan nuqtasi aniqlanadi va f funksiyaning bu nuqtadagi qiymati topiladi.

Quyidagi masalalarni geometrik interpretatsiyadan foydalanib yechamiz.

1- misol.

$$x_1 + 2x_2 \le 8,$$
$$2x_1 + x_2 \le 15,$$
$$x_1 + x_2 \ge 1,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$$

$$Z = f(x_1, x_2) = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \max(\min).$$



5 –shakl

Masalanining chegaraviy shartlarini qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami $ABCD$ ko'pburchakdan iborat bo'ladi (5-shakl). Agar $Z = Q(Q > 0)$ deb qabul qilsak, $(x_1 - 6)^2 + (x_2 - 2)^2 = Q$ tenglama markazi $M(6,2)$ nuqta va radiusi $\sqrt{Q}$ ga teng bo'lgan aylanani ifoda etadi.

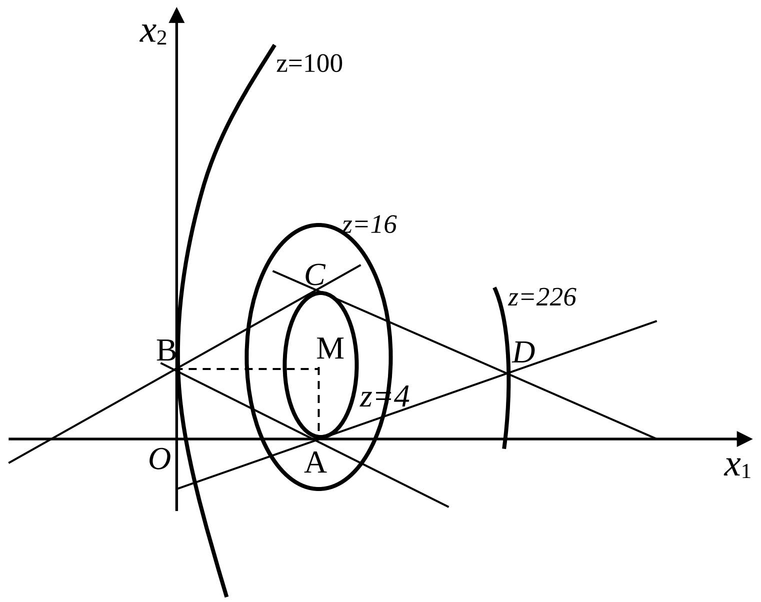
Q ning qiymatini orttirib yoki kamaytirib boramiz. M nuqtadan turli radusi aylanalar (parallel gipersirtlar) o'tkazib borib, Z funksiyaga eng kichik yoki eng katta qiymat beruvchi nuqtani topish mumkin. Shakldan ko'rish mumkinki, Z funksiya D (4, 4;1,8) nuqtada eng kichik qiymatga, $C(0;4)$ nuqtada esa eng katta $Z(C) = 40$ qiymatga erishadi. Ko'rinb turibdiki, berilgan masalaning lokal va golobal optimal qiymatlari o'zaro teng ekan.

2- misol.

$$x_1 + x_2 \geq 2,$$
$$x_1 - x_2 \geq -2,$$
$$x_1 - 3x_2 \leq 2,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,$$

$$Z = 25(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \max.$$

Bu masalaning planlaridan tashkil topgan to'plam $ABCD$ to'rtburchakka tegishli nuqtalar to'plamidan iborat bo'ladi (6-shakl). $Z = Q(Q > 0)$ da $Q = 25(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2$ ifoda markazi $M(2,2)$ nuqtada bo'lgan ellipsning formulasidan iboratdir. Q ning qiymatini o'zgartirib borish natijasida Z ning qiymati o'zgarib boradi.



10.6-shakl

Shakldan ko'rinadiki, Z maqsad funksiya D (5,1) nuqtada o'zining global maksimum qiymatiga $(Z(D) = 226)$, $B(0,2)$ nuqtada esa lokal maksimum qiymatiga $(Z(B) = 100)$, erishadi, chunki

$Z(B) > Z(A), \quad Z(B) > Z(C), \; Z(D) > Z(B).$

Topshiriqlar

Chiziqsiz programmalash masalalarini yeching.

Masala 1. Quyidagi shartlarda

$$\left.\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &\geq 4, \\ x_1^2 + x_2^2 &\leq 25. \end{aligned}\right\} \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

$F(x_1,x_2)=3x_1+4x_2$ funksiyaning maksimum qiymatini toping

Masala 2. Quyidagi shartlarda

$$\left.\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 &\leq 12, \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 24, \\ -3x_1 + 4x_2 &\leq 12. \end{aligned}\right\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$F(x_1,x_2)=x_1x_2$ -funksiyaning maksimum qiymatini toping

Masala 3. Quyidagi shartlarda

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leq 12, \\ x_1 - x_2 &\leq 6, \\ x_2 &\leq 4. \end{aligned}\right\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$F(x_1,x_2)=9(x_1-5)^2+4(x_2-6)^2$ -funksiyaninging

Masala 7.7. Quyidagi shartlarda

$$\left.\begin{aligned} &x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, \\ &x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 34 \geq 0. \end{aligned}\right\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$F(X_1,X_2)$=nuqtadagi$_1X_2$ -funksiyaning maksimum qiymatini toping

Masala 7.8. quyidagi shartlarda

$$\left.\begin{aligned} &x_1 \geq 2, x_2 \geq 2, \\ &x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 4x_2 - 68 \geq 0. \end{aligned}\right\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$F(x_1,x_2)=10X_1X_2$ -funksiyaning qiymatini qiymatini toping.

13-MAVZU: O'YINLAR NAZARIYASI

O'yinlar nazariyasi haqida tushunchalar. O'yinlar nazariyasini birinchi bo'lib yaratgan olim Fon Neymandir. O'yinlar nazariyasi Fon Neyman tomonidan qo'yilgan quyidagi masalani yechish bilan shug'ullanadi:

Agar n ta $P_1, P_2, \ldots, P_n$ o'ynovchilar biror G o'yinni o'ynayotgan bo'lsa, i- o'ynovchi bu o'yinda yutib chiqishi uchun qanday strategiyani tanlashi kerak? Bu yerda biz «o'yin» deyilganda ma'lum kelishib olingan shart va qoidalar to'plamini, «partiya» deganda shu shart va qoidalarning amalga oshirilishini tushunamiz. Har bir partiyadan keyin P_i o'ynovchi o'yinning yutug'i deb atalmish - υ_i yutuqqa ega bo'ladi (pul, ochko va hokazo).

Ba'zi o'yinlarda yutqazilgan pullar yig'indisi yutilgan pullar yig'indisiga teng bo'ladi. Masalan, P_1 o'ynovchi υ_1 so'm yutqazsa P_2 o'ynovchi υ_1 so'm yutishi mumkin. Bu holda o'yindagi yutuqlar yig'indisi 0 ga teng bo'ladi:

$$\upsilon_1 + \upsilon_2 + \ldots + \upsilon_n = 0.$$

Bu yerda biz har bir o'ynovchi faqat yutadi deb faraz qilamiz, chunki biror o'ynovchi υ so'm yutqazsa uning yutug'i $(-\upsilon)$ so'mga teng deb olinishi mumkin. O'yinlar, shart va qoidalarga ko'ra va o'ynovchilar soniga qarab turlicha bo'ladi. Bundan so'ng biz ikki o'ynovchining yutuqlar yig'indisi 0 ga teng bo'lgan o'yini bilan, boshqacha aytganda, ikki o'ynovchining 0 so'mli o'yini bilan tanishamiz.

Bunday o'yinga misol sifatida quyidagi o'yinni ko'ramiz. Birinchi o'ynovchi (P_1) tanganing biror tomonini tanlaydi. Ikkinchi o'ynovchi (P_2) ham P_1 o'ynovchi tanganing qanday tomonini tanlanganligini bilmagan holda tanganing biror tomonini tanlaydi. Agarda ikki o'ynovchi tanganing bir xil tomonini tanlagan bo'lsalar, P_1 o'ynovchi 1 ochko yutadi, aks holda P_2 o'ynovchi 1 ochko yutadi. Bu o'yinni quyidagi jadval ko'rinishida ifodalash mumkin:

$$P_1 \begin{cases} \text{"Герб"} & 1 \quad -1 \\ \text{"Ракам"} & -1 \quad 1 \end{cases}$$

Bu o'yinda P_1 har vaqt yutadi deb fikr yuritiladi. Agar P_1 yutqazsa uning yutug'i (-1) ga teng deb olinadi. Shunday qilib, berilgan o'yinning shartlarini quyidagi

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

matritsa orqali ifodalash mumkin. Matritsaning qatori P_1 ning tanlash imkoniyatiga, ustuni P_2 ning tanlash imkoniyatiga mos keladi. Faraz qilaylik, P_1 tanganing «Gerb» yoki «Raqam» tomonini tasodifiy ravishda tanlagan bo'lsin. Bu holda P_1 o'ynovchininig «Gerb» ni tanlash ehtimoli $\frac{1}{2}$ ga teng bo‘ladi. Xuddi shuningdek, «Raqam» ni tanlash ehtimoli ham $\frac{1}{2}$ ga teng. Agar bu holda P_2 «Gerb» nitanlasa, P_1 o‘ynovchi yutug‘ining matematik kutilishi

$$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}(-1)=0$$

bo‘ladi. Agar P_2 «Raqam» ni tanlasa P_1 o‘ynovchi yutug‘ining matematik kutilishi

$$\frac{1}{2}(-1)+\frac{1}{2}\cdot 1=0$$

bo‘ladi. Shunday qilib P_1 o‘ynovchining o‘rtacha yutug‘i 0 ga teng bo‘ladi.

Endi faraz qilaylik, P_1 «Gerb» ni x ehtimol bilan tanlasin. U holda «Raqam» ni $(1-x)$ ehtimol bilan tanlaydi, bu yerda $0\le x\le 1$. Agar P_2 «Gerb» ni tanlasa P_1 o‘ynovchining o‘rtacha yutug‘ining matematik kutilishi:

$$E_0 = x\cdot 1+(1-x)(-1)=x+x-1=2x-1.$$

Agar P_2 «Raqam» ni tanlasa, P_1 yutug‘ini matematik kutilishi

$$E_p = x(-1)+(1-x)\cdot 1=1-2x.$$

Shunday qilib, P_1 ning o‘rtacha yutug‘i 0 bo‘lishi uchun $x=\frac{1}{2}$ bo‘lishi kerak.

Endi o‘yinlar nazariyasiga oid ba’zi tushunchalar bilan tanishamiz.

1 – t a ’ r i f . Har qanday G o‘yin, o‘yin matritsasi deb ataluvchi

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsa orqali aniqlanishi mumkin. Bu matritsa birinchi o‘ynovchi uchun yutuqlar matritsasi deb ataladi.

a_{ij} element - P_1 o‘ynovchi matritsaning i- qatoriga mos keluvchi yurishini, P_2 o‘ynovchi j - ustunga mos keluvchi yurishni tanlagandagi P_1 o‘ynovchining yutuq summasini bildiradi.

2 – t a ’ r i f . Komponentlari $x_i \ge 0$ va $\sum x_i = 1$ shartlarni qanoatlantiruvchi $X=(x_1, x_2,\ldots,x_m)$ vektor qator P_1 o‘ynovchining aralash strategiyasi deyiladi.

Xuddi shuningdek, komponentlari y_i va $\sum y_i = 1$ shartlarni qanoatlantiruvchi $Y=(y_1, y_2,\ldots,y_n)$ vektor ustun P_2 o‘ynovchining *aralash strategiyasi* deyiladi.

x_i va y_i lar mos ravishda P_1 ni o'zining i - yurishini (qatorini) va P_2 o'zining j - yurishini (ustunini) tanlash chastotalarini bildiradi.

Yuqorida ko'rilgan misol uchun P_1 o'ynovchining aralash strategiyasi $(1,0)$; $(0,1)$: $\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$; $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ lardan biri bo'lishi mumkin.

3 – t a ' r i f. i - komponentasi 1 ga teng bo'lib, qolgan komponentlari 0 ga teng bo'lgan X aralash strategiyani P_1 o'ynovchining i - sof strategiyasi deb ataymiz.

Masalan, (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1).

Xuddi shuningdek, j - komponentasi 1 ga teng bo'lib, qolgan komponentlari 0 ga teng bo'lgan Y aralash strategiyani P_2 o'ynovchining sof strategiyasi deb ataymiz.

Endi yutuq matritsasi

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

bo'lgan matritsali o'yinini ko'raylik.

Agar P_i o'ynovchi i - sof strategiyani tanlansa, u kamida $\min a_{ij}$ yutuqqa ega bo'ladi. P_1o'ynovchi o'zining yutug'ini maksimal qilishga harakat qiladi. Demak, u shunday i - sof strategiyani tanlashi kerakki, uning yutug'i maxbo'lsin, ya'ni P_1 o'ynovchi $\max\left(\min a_{ij}\right)$ beruvchi sof strategiyani tanlaydi.

1 – misol.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

o'yin matritsasi berilgan bo'lsa, P_1 o'ynovchi 1-sof strategiyani tanlasa, u eng kamida 0 yutuqqa ega bo'ladi;

2-sof strategiyada uning yutug'i kamida 1 ga teng bo'ladi; 3-sof strategiya esa kamida -1 yutuqqa ega bo'ladi. demak, u 2-sof strategiyani tanlaydi va bu holda uning yutug'i

$$\max\left(\min a_{ij}\right)a_{22}=1$$

bo'ladi.

Agarda P_2 o'ynovchi 1-sof strategiyani tanlasa, u eng ko'pi 4 ochko yutqazadi, 2-sof strategiyada 5, 3-sof strategiyada 3 va 4-sof strategiyada 4 ochko yutqazadi. P_2o'ynovchi o'zining yutqazishini minimal qilishga harakat qiladi. Demak, 3-sof strategiyani tanlaydi. P_2 uchun yutqazish summasi $\min a_{ij} = a_{23} = 3$.

2 – m i s o l .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

matritsali o‘yinda P_1 o‘ynovchi 1-sof strategiyani tanlasa, eng kamida 3 ochko yutadi, 2-sof strategiyada 1 ochko, 3-sof strategiyada esa 0 ochko yutadi.

P_1 o‘ynovchi o‘zining yutug‘ini maksimal qilishga harakat qiladi. Shuning uchun u sof 1-sof strategiyani tanlaydi. Bu holda uning yutug‘i

$$\max_i \left(\min_j a_{ij} \right) = 3$$

bo‘ladi.

Xuddi shuningdek, P_2 o‘ynovchi 1-sof strategiyani tanlasa, u eng ko‘pi bilan 3 ochko yutqazadi. 2-sof strategiyada 7, 3-sof strategiyada 6 ochko yutqazadi.

P_2 o‘ynovchi o‘zining yutug‘ini minimallashtirishga harakat qiladi. Shuning uchun u

$$\min_j \left(\max_i a_{ij} \right) = \min(3,\ 7,\ 6) = 3$$

shartni qanoatlantiruvchi 1-sof strategiya $Y = (1,\ 0,\ 0)$ ni tanlaydi.

Shunday qilib, berilgan o‘yinda P_1 o‘ynovchining $X = (1,\ 0,\ 0)$ sof strategiyasi va P_2 o‘ynovchining $Y = (1,\ 0,\ 0)$ sof strategisi uchun

$$\min_j \left(\max_i a_{ij} \right) = \max_i \left(\min_j a_{ij} \right) = 3$$

shart o‘rinli bo‘lganligi sababli, ular optimal sof strategiya deyiladi. Bu misolda A matritsaning a_{11} elementi o‘z ustunida maksimal va qatorida minimal element bo‘layapti. Bunday nuqtani (elementni) egar nuqta deb ataymiz.

Agar P_1 va P_2 o‘ynovchilarning tanlagan sof strategiyalari uchun

$$\max_i \left(\min_j a_{ij} \right) = \min_j \left(\max_i a_{ij} \right) = \upsilon \tag{9.1.1}$$

shart o‘rinli bo‘lsa, bunday sof strategiyalar optimal sof strategiya va a_{ij} element egar nuqta bo‘ladi.

4 – t a ’ r i f . P_1 o‘ynovchining yutuqlar funksiyasi yoki boshqacha aytganda uning yutug‘ining matematik kutilishi

$$E(X, Y) = XAY = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i\, a_{ij}\, y_j \tag{9.1.2}$$

formula Bilan aniqlanadi, bu yerda $X = (x_1,\ x_2, \ldots, x_m)$ P_1 o‘ynovchining va $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ P_2 o‘ynovchining ixtiyoriy aralash strategiyalari.

M i s o l . $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ o‘yin matritsasi uchun $X=(x_1, x_2,\ldots,x_m)$, $Y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ mos ravishda P_1 va P_2 o‘ynovchilarning aralash strategiyalari.

$$E(X,Y)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=(x_2-x_3,-x_1+x_3,x_1-x_2)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$=(x_2-x_3)y_1+(x_3-x_1)y_2+(x_1-x_2)y_3.$$

$$X=(0{,}1;\ 0{,}4;\ 0{,}5),\ Y=(0{,}3;\ 0{,}3;\ 0{,}4),\ E(X,Y)=-0{,}03.$$

Matritsali o‘yinning yechimi

5-ta’rif. Matritsali G o‘yinning yechimi deb shunday
$\overline{X}=(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_m),\overline{Y}=(\overline{y}_1,\overline{y}_2,\ldots,\overline{y}_n)$
juft aralash strategiyalarga va haqiqiy υ songa aytiladiki, agar $j=1, 2,\ldots,n$ sof strategiyalar uchun

$$E(\overline{X},j)\geq\upsilon$$

bo‘lib, $i=1, 2,\ldots,m$ sof strategiyalar uchun

$$E(i,\overline{Y})\leq\upsilon$$

bo‘lsa, $\overline{X},\overline{Y}$ vektorlar optimal strategiya, υ esa o‘yinning bahosi deb ataladi.

Misol. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ matritsali o‘yin uchun $X=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right), Y=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ vektorlar optimal strategiyalar bo‘lib, o‘yinning bahosi nolga teng.

O‘yin matritsasi $a_{ij}=-a_{ij}$ xossaga ega bo‘lgan o‘yin simmetrik o‘yin deb ataladi.

Simmetrik o‘yinda o‘yinning bahosi 0 ga teng bo‘lib, P_1 va P_2 o‘ynovchilarning optimal strategiyalari bir xil bo‘ladi. haqiqatan ham, P_1 o‘ynovchi uchun yutuqlar funksiyasi $E(X,Y)=XAY=\sum_{i=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}x_i a_{ij} y_j$ hamda $X=Y$ bo‘lganligi uchun $E(X,Y)=XAY=0$.

Demak, ikala o‘ynovchi ham bir xil aralash strategiyani qo‘llansa, o‘yinning bahosi 0 ga teng bo‘lar ekan. Endi P_1 va P_2 larning optimal strategiyalari mos ravishda $\overline{X}$ va $\overline{Y}$ bo‘lsin, u holda

$$\max_X \min_Y XAY=\min_Y \overline{X}AY=\upsilon$$

Agarda P_2 ixtiyoriy aralash strategiyani qo‘llansa $\overline{X}AY\geq\upsilon$ lekin bizga ma’lumki, $\overline{X}=Y$ bo‘lganda $\overline{X}AY=0$ bo‘ladi.

Demak, $0 = \bar{X}A\bar{X} \geq \upsilon$ ekan.

Xuddi shuningdek, $\min\limits_{Y} \max\limits_{X} XAY = \max\limits_{X} XA\bar{Y} = \upsilon$ P_1 ixtiyoriy aralash strategiyani qo‘llansa $XA\bar{Y} \leq \upsilon$ bo‘ladi. Lekin $X = \bar{Y}$ uchun $\bar{Y}A\bar{Y} = 0,\ \bar{Y}A\bar{Y} \leq \upsilon$. Demak, bir tomondan $\upsilon \leq 0$ bo‘lsa, ikkinchi tomondan, $\upsilon \geq 0$ bo‘ladi. Bulardan $\upsilon = 0$ ekan, hamda ikala o‘ynovchi ham bir xil strategiya bilan o‘ynar ekan.

Simmetrik o‘yinga misol sifatida quyidagi o‘yinni ko‘ramiz. O‘yinning nomi «tosh, qog‘oz va qaychi». Bu o‘yinda 0 summali 2 ta o‘yinchi qatnashadi. Ular bir paytda bir-biriga bog‘liqsiz ravishda tosh, qog‘oz va qaychidan birini tanlaydi. Qog‘oz bilan toshning kombinatsiyasi hosil bo‘lsa, qog‘ozni tanlagan o‘yinchi 1 ochko yutadi (qog‘oz Bilan toshni o‘rash mumkin). Tosh bilan qaychining kombinatsiyasi hosil bo‘lsa, toshni tanlagan o‘yinchi 1 ochko yutadi (tosh Bilan qaychini sindirish mumkin). Qog‘oz bilan qaychining kombinatsiyasi hosil bo‘lsa, qaychini tanlagan o‘yinchi 1 ochko yutadi (qaychi Bilan qog‘ozni qirqish mumkin). Bir xil narsa tanlangan bo‘lsa, hech Kim yutmaydi. Bu o‘yinni yutuqlar matritsasi quyidagicha bo‘ladi.

$$\begin{array}{l} \\ \textit{Тош} \\ \textit{Когоз} \\ \textit{Кайчи} \end{array}\begin{array}{c} \textit{Тош}\ \ \textit{когоз}\ \ \textit{кайчи} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ikkala o‘ynovchining ham optimal strategiyasi – $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Teorye m a . Agar A uyin matritsasining har bir a_{ij} elementiga biror tayin w son qo‘shsak, hosil bo‘lgan yangi o‘yinda optimal strategiyalar o‘zgarmaydi, faqat o‘yinning bahosi w birlik ortadi, ya’ni yangi o‘yinning bahosi $v + w$ ga teng bo‘ladi.

Isbot. Berilgan o‘yin uchun ta’rifga ko‘ra

$$E_1(X,Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j \,. \qquad (9.2.1)$$

yangi o‘yin uchun esa

$$E_2(X,Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i (a_{ij} + w) y_j \,. \qquad (9.2.2)$$

(9.2.2) ni ochib chiqsak :

$$E_2(X,Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j + w \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \,. \qquad (9.2.3)$$

Bizga ma’lumki,

$$\sum_{i} x_i = \sum_{j} y_i = 1 \,.$$

Shuning uchun (9.2.1) dan va (9.2.3) dan

$$E_2(X,Y) = E_1(X,Y) + w \qquad (9.2.4)$$

hosil bo‘ladi. Demak , w o‘zgarmas son optimal strategiyalariga ta’sir etmaydi. Agar har partiyadan oldin P_2 o‘ynovchi P_1 ga w miqdorda to‘lov to‘lasa, u holda

$$E_2(X,Y) = E_1(X,Y) + w = v + w. \qquad (9.2.5)$$

w ni shunday tanlash mumkinki, A matritsaning elementlari musbat bo‘lsin, uning natijasida o‘yinning v bahosi ham musbat bo‘lsin. Endi matritsali uyin uchun asosiy teoremani isbotsiz keltiramiz.

Teorema. Harbirmatritsali o‘yin uchun $\max\ \min\ E(X,Y)$ va $\min\ \max E(X,Y)$ mavjud va o‘zaro $x\ \ y\ x\ y$ teng bo‘lsa matritsali o‘yin yechimga ega.

Matritsali uyin bilan chiziqli programmalash masalasining ekvivalentligi

Faraz qilaylik, quyidagi matritsali o‘yin berilgan bo‘lsin:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ .. \quad .. \quad .. \ .. \\ .a_{m1}\, a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Yuqoridagi 4, 5-ta’riflarga ko‘ra P_1 o‘ynovchi shunday $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ vektor va v sonini izlashi kerakki, ular quydagi sistemani qanoatlantirsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \ge v, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \ge v, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \ge v, \\ x_1 + x_2 + \ldots + \qquad x_m = 1, \\ \qquad x_2 \qquad\qquad \ge 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad x_m \ge 0 \end{cases} \qquad (9.3.1)$$

Xuddi shuningdek, P_2 o‘ynovchi shunday $Y = (y_1, y_2, \ldots y_n)$ vektorni aniqlashi kerakki, u

$$
\begin{cases}
a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \le v, \\
a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \le v, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + ... + a_{mn}y_n \le v, \\
y_1 \qquad\qquad\qquad \ge 0, \\
\quad y_2 \qquad\qquad \ge 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\qquad\qquad\qquad y_n \ge 0
\end{cases}
\tag{9.3.2}
$$

sistemani qanoatlantirsin.

A matritsaning har bir elementini musbat qilish mumkin. Buning uchun uning barcha a_{ij} elementlariga mos ravishda biror o'zgarmas son qo'shiladi. Demak, $v > 0$ deyish mumkin. (9.3.1), (9.3.2) sistemalarning har bir tengsizlik va tengliklarini υ ga bo'lamiz va

$$
x_i^{'} = \frac{x_i}{\upsilon}, \quad y_j^{'} = \frac{y_j}{\upsilon}
$$

deb qabul qilamiz, bunda

$$
\sum_i x_i^{'} = \frac{1}{\upsilon}\sum_i x_i = \frac{1}{\upsilon},
$$

$$
\sum_i y_j^{'} = \frac{1}{\upsilon}\sum_i y_i = \frac{1}{\upsilon}.
$$

Shuning uchun yutug'ini maksimallashtirishi kerak bo'lgan P_1 o'ynovchi $\sum_i x_i^{'}$ ni minimallashtirish lozim. P_2 o'ynovchi esa $\sum_j y_j^{'}$ yig'indini maksimallashtirishi kerak.

Bunday shartlarda (9.3.1), (9.3.2) munosabatlarni ularga ekvivalent chiziqli programmalash masalasi Bilan almashtirish va quyidagi simmetrik ikkalangan masalalarni hosil qilish mumkin.

1 – m a s a l a . Shunday $X' = (x_1', x_2', \ldots, x_m')$ vektorni aniqlash kerakki, u $x_1^{'} + x_2^{'} + \ldots + x_m^{'}$ yig'indiga minimal qiymat berib,

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1^{'} + a_{21}x_2^{'} + \ldots + a_{m1}x_m^{'} \ge 1, \\
a_{12}x_1^{'} + a_{22}x_2^{'} + \ldots + a_{m2}x_m^{'} \ge 1, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{1n}x_1^{'} + a_{2n}x_2^{'} + \ldots + a_{mn}x_m^{'} \ge 1,
\end{cases}
$$

$$
x_i^{'} \ge 0
$$

shartlarni qanoatlantirsin.

II m a s a l a (I masalaga ikkilangan masala). Ushbu

$$\begin{cases} a_{11}y_1' + a_{12}y_2' + \ldots + a_{1n}y_n' \le 1, \\ a_{21}y_1' + a_{22}y_2' + \ldots + a_{2n}y_n' \le 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}y_1' + a_{m2}y_2' + \ldots + a_{mn}y_n' \le 1 \end{cases}$$

shartlari qanoatlantiruvchi va $y_1' + y_2' + \ldots + y_n'$ yig'indiga maksimum qiymat beruvchi $Y' = \left(y_1', y_2', \ldots, y_n'\right)$ vektor aniqlansin.

Har bir o'yin yechimga ega bo'lganligi uchun yuqoridagi ikkilangan chiziqli programmalash masalalarining optimal planlari mavjud va

$$\min \sum_i x_i' = \max \sum_i y_i' = \frac{1}{\upsilon}$$

Ikkilangan masalalarning $X' = \left(x_1', x_2', \ldots, x_n'\right)$ va $Y' = \left(y_1', y_2', \ldots, y_n'\right)$ optimal planlaridan ekvivalent o'yinning optimal aralash strategiyalariga o'tishni X' va Y' vektorlarning har bir komponentlarini mos ravishda $\sum_{i=1} x_i'$ va $\sum_{j=1} y_j'$ larga bo'lish bilan bajariladi.

Agar o'zaro ikkilangan masalalrdan biri simpleks usul bilan yechilgan bo'lsa, ikkinchisining optimal plani oxirgi simpleks jadvalda hosil bo'lar edi. Planning komponentlari yechilgan masalaning qo'shimcha o'zgaruvchilarga mos keluvchi $z_j - c_j$ lardan iborat bo'ladi.

O'yin muammosini chiziqli programmalash masalasiga keltirishning ikkinchi usuli quyidagicha:

P_1 o'ynovchi uchun masala yana (9.3.1) munosabatlar Bilan beriladi. (9.3.1) dagi birinchi n ta tengsizlikni manfiy bo'lmagan qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritish yo'li Bilan teng kuchli tenglamalarga aylantiramiz, ya'ni

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m - x_{m+1} = \upsilon, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m - x_{m+2} = \upsilon, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m - x_{m+n} = \upsilon, \end{cases}$$

$$x_i \ge 0.$$

Birinchi tenglama keyingi $n-1$ ta tenglamaning har biridan ayiramiz hamda birinchi tenglamaning chap qismini chiziqli funksiya deb qabul qilamiz. Natijada quyidagi chiziqli programmalash masalasini hsil qilamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m - x_{m+1} = \upsilon \to \max \\ (a_{12} - a_{11})x_1 + (a_{22} - a_{21})x_2 + \ldots + (a_{m2} - x_{m1})x_m + x_{m+1} - x_{m+2} = 0, \\ (a_{13} - a_{11})x_1 + (a_{23} - a_{21})x_2 + \ldots + (a_{m3} - a_{m1})x_m + x_{m+1} - x_{m+3} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a_{1n} - x_{11})x_1 + (a_{2n} - a_{21})x_2 + \ldots + (a_{mn} - x_{m1})x_m + x_{m+1} - x_{m+n} = 0. \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0.$$

M i s o l . Matritsali o‘yin berilgan:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Unga ekvivalent chiziqli programmalash masalasini tuzish uchun yuqorida keltirilgan usullarning ikkinchisidan foydalanamiz.

Chegaraviy shartlar sistemasini tuzamiz:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq \upsilon, \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq \upsilon, \\ -4x_1 + 2x_2 + 6x_3 \geq \upsilon, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \\ \quad x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Manfiy bo‘lmagan o‘zgaruvchilarni kiritib, tengsizliklarni tenglamalarga aylantiramiz:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = \upsilon, \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_5 = \upsilon, \\ -4x_1 + 2x_2 + 6x_3 - x_6 = \upsilon, \\ \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ \quad x_i \geq 0 \end{cases}$$

Birinchi tenglamani ikkinchi va uchinchi tenglamalardan ayirib, berilgan matritsali o‘yinga ekvivalent bo‘lgan chiziqli programmalash masalasining chegaraviy shartlarini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} -5x_1 + 5x_2 + x_4 - x_5 = 0, \\ -7x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 - x_6 = 0, \\ \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0$$

Masalaning chiziqli funksiyasi esa $3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \to \max$ dan iborat bo‘ladi.

Endi berilgan chiziqli programmalash masalasini matritsali o‘yin ko‘rinishida ifodalash mumkin ekanini ko‘ramiz.
Quyidagi chiziqli programmalash masalasi berilgan bo‘lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m, \end{cases} \tag{9.3.3}$$

$$x_j \geq 0. \ \left(j = \overline{1,n}\right)$$

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = f \to \min. \tag{9.3.4}$$

Bu masalaga ikkilangan chiziqli programmalash masalasi:

$$\begin{cases} a_{11}\omega_1 + \ldots + a_{m1}\omega_m \leq c_1, \\ a_{12}\omega_1 + \ldots + a_{m2}\omega_m \leq c_2, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots \\ a_{1n}\omega_1 + \ldots + a_{mn}\omega_m \leq c_n, \end{cases} \tag{9.3.5}$$

$$\omega_i \geq 0, \ \left(i = \overline{1,m}\right)$$

$$b_1\omega_1 + b_2\omega_2 + \ldots + b_m\omega_m = g \to \max \tag{9.3.6}$$

Bizga ma’lumki, bunday ikkilangan masalalardan biri optimal planga ega bo‘lsa, ikkinchisi ham yechimga ega bo‘lib, $f = g$ bo‘ladi.

Faraz qilaylik (9.3.3) – (9.3.6) shartlar Bilan berilgan (masalalarning optimal planlari mavjud va $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\omega_1, \ldots, \omega_m$ mos ravishda birinchi va ikkinchi masalalarning optimal plani bo‘lsin,

(9.3.3) sistemaning birinchi tengsizligini ω_1 ga ikkinchisini ω_2 ga va hokazo ko‘paytirib qo‘shish natijasida

$$b_1\omega_1 + \ldots + b_m\omega_m \leq \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}\omega_i\right)x_i + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{m} a_{in}\omega_i\right)x_n \tag{9.3.7}$$

tengsizilkni hosil qilamiz. (9.3.5) munosabatlarni qo‘llansak, berilgan va unga ikkilangan masalalarning hamma planlari uchun o‘rinli bo‘lgan

$$b_1\omega_1 + \ldots + b_m\omega_m \leq c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \tag{9.3.8}$$

tengsizlik hosil bo‘ladi. bunda esa $g \leq f$ kelib chiqadi. (9.3.8) tengsizlikka teskari tengsizlik

$$b_1\omega_1 + \ldots + b_m\omega_m \geq c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$$

ko‘rinishdadir, yoki

$$b_1\omega_1 + \ldots + b_m\omega_m - \left(c_1x_1 + \ldots + c_nx_n\right) \geq 0 \tag{9.3.9}$$

Bu tengsizlikdan $g \geq f$ ekani kelib chikadi. Bulardan esa (9.3.3), (9.3.5) tengsizliklarniyechish,berilgan va unga ikkilangan masalalarning optimal planlarini aniklashga olib keladi vabunda $f = g$ buldadi. (9.3.3), (9.3.5) va (9.3.9) sistemalarning har bir tengsizligini noma’lum musbat z o‘zgaruvchiga ko‘paytirib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} a_{11}\overline{x}_1+...+a_{1n}\overline{x}_n-b_1z\ge 0, \\ .... \\ a_{m1}\overline{x_1}+...+a_{mn}\overline{x_n}-b_mz\ge 0, \\ -(a_{11}\overline{w_1}+...+a_{m1}\overline{w_m})+c_1z\ge 0, \\ .... \\ -(a_{1n}\overline{w_1}+...+a_{mn}\overline{w_m})+c_nz\ge 0, \\ (b\overline{w_1}+...+b_m\overline{w_m})+(c_1\overline{x_1}+...+c_n\overline{x_n})\ge 0, \end{cases} \tag{9.3.10}$$

bu yerda $\overline{x_j}=zx_j$; $\overline{w_i}=zw_i$. (9.3.10) sistemani $z>0$ shartdagi yechimidan berilgan va ikkilangan masalalarning optimal planini osongina hosil qilish mumkin. (9.3.10) sistemani quyidagi

$$(\overline{X}\,\overline{W}z)\cdot\begin{pmatrix} 0 & A' & -C' \\ -A & 0 & b' \\ C & -b & 0 \end{pmatrix}\ge 0 \tag{9.3.11}$$

matritsa formada yozish mumkin. Bu yerda A matritsa $m\times n$ o‘lchovli $b, C, \overline{X}, \overline{W}$ vektor qatorlar, 0 esa $m+n+1$ o‘lchovli nol vektor ustun (9.1.11) formadagi matritsani ikki o‘lchovli nol summali simmetrik o‘yin matritsasi, $(\overline{X}\,\overline{W}z)$ vektor qatorni – yutug‘ini maksimum qiladigan P_1 o‘ynovchining aralash strategiyasi deb qarash mumkin. Simmetrik o‘yin narxi nolga teng bo‘lishi uchun 5-ta’rifdan (9.3.11) tengsizliklar sistemasining

$$\sum x_j+\sum w_i+z=1$$

shartdagi yechimi unga mos o‘yinning yechimi bo‘ladi.

O‘yinlar nazariyasining asosiy teoremasiga ko‘ra bu o‘yinning yechimi hamma vaqt mavjuddir. Biroq o‘yinga ekvivalent bo‘lgan chiziqli programmalash masalasi yechimga ega bo‘lmasligi mumkin. Bunday hol simmetrik o‘yinning optimal strategiyasida $z=0$ bo‘lgan holda yuz beradi.

Agar optimal strategiyada $z>0$ bo‘lsa, berilgan va unga ikkilangan chiziqli programmalash masalalarining yechimlari quyidagi formulalar orqali aniqlanadi:

$$x_j=\frac{\overline{x_j}}{z};\ (j=\overline{1,n});\qquad w_i=\frac{\overline{wi}}{z},\ (i=\overline{1,\ m}),$$

bu yerda $(\overline{x_1},\overline{x_2},...,\overline{x_n},\ \overline{w_1},...,\overline{w_m},\overline{z})$ vektor ko‘rilayotgan simmetrik o‘yinning optimal aralash strategiyasi.

ARALASH STRATEGIYADAGI O’YINLAR.

Bir-biriga zid, manfaatlarning to‘qnash kelishida eng optimal (foydali) yo‘l tanlash nazariyasiga o‘yinlar nazariyasi deyiladi. O‘yinning matematik tushunchasi xar xil o‘yinlar to‘plamini qarab chiqishdan paydo bo‘lgan. Lekin uning tadbiq etilish sohasi ancha keng bo‘lib, bir-biriga zid manfaatlar tuqnashadigan xilma-xil holatlar to‘plamini o‘z ichiga oladi. Bu o‘yinlar to‘plamiga quyidagilar misol bo‘la oladi shaxmat: shashka, karta o‘yinlari va boshqalar. O‘yinlar nazariyasiga asos solgan olim Fon Neymandir. Fon

Neyman quyidagi masalani o'rtacha qo'yadi: agar n ta $R_1, R_2, \ldots, R_n$ o'ynovchilar biror G o'yinni o'ynayotgan bo'lsa, I-o'ynovchi bu uyinda yutib chiqishi uchun qanday strategiyani tanlashi kerak?

Masalan ikkita raqib (birinchi R_1 va ikkinchi R_2 o'yinovchi) bo'lib, ulardan har biri ish tutishining yo'lini ikkinchisidan mustaqil ravishda strategiyani tanlab oladi.

Misol uchun oq donalar bilan R_1 shaxmatchining strategiyasini tanlash birinchi yurishni ko'rsatish va R_2 qora donalarning mumkin bulgan birinchi, Ikkinchi, uchinchi va yurishlariga oq donalarning qanday javob berishini ko'satish demakdir; qora donalar bilan o'ynovchining strategiyasini tanlash oq donalarning mumkin bo'lgan har bir yurishiga qora donalarning qanday javob berishini ko'rsatishdemakdir. Shunday qilib, o'yin natijalari faqat tanlab olingan strategiyalargagina (va ehtimol, natijasi o'yinchilarga bog'liq bo'lmagan tasodifiy sinovlarga) bog'liq bo'lgan to'plamga ega bo'ladi. Demak, agar o'yichini V yutug' natijasini olgan bo'lsa, ikkinchi o'yinchi birinchiga f(v) so'm to'laydi yoki teskarisi.

R_1 o'yinchi yutug'ining M(X,Y) matematik kutilmasi koordinatlarining ravishda R_1-chi va R_2-chi o'yinchi tanlab olgan X va Y strategiyalargagina bog'liq bo'ladi.

Yuqoridagilarga asosan ko'rinadiki o'yinlar nazariyasi quyidagi masalalarni o'rganadi:

1. R_1-chi o'yinchi R_2-chi o'yinchining qanday yo'l tutishga bog'liq bo'lmagan holda imkon boricha ko'proq yutuq olishi uchun, ya'ni $\min_y M(X_0,Y)=\max_x\{\min_u M(x,y)\}$ bo'lishi uchun u qanday x_0 strategiya tanlab olish kerak;

2. R_2-chi o'yinchi R_1-chi o'yinchining qanday yo'l tutishidan qat'i nazar imkon kamroq kamroq yutqizishi uchun, ya'ni $\max_x M(X,Y_0)=\min_u\{\max_x M(x,y)\}$ bo'lishi uchun u qanday U_0 strategiya tanlab olish kerak.

Har bir o'yinchining strategiyalar soni chekli bo'lgan holdagina bu masalalar prinsipial jihatdan yechiladi. Bu yerda umuman har bir o'yinchi qandaydir aniq bir strategiyani emas balki, har bir o'yinni takrorlaganda R_1-chi o'yinchi uchun ehtimollari $p_1, p_2, \ldots, p_n$ bo'lgan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ strategiyalardan birini, R_2-chi o'yinchi uchun esa ehtimollari $q_1, q_2, \ldots, q_n$ bo'lgan $y_1, y_2, \ldots, y_m$ strategiyalardan birini tanlash foydali bo'ladi.

$(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ va $(q_1, q_2 \ldots, q_m)$ to'plamlarga o'yinchilarning aralash strategiyalari deyiladi. $\{Pn\}$ va $\{q_m\}$ to'plamlarni va R_1-chi o'yinchi yutug'ining matematik kutulmasini topishga o'yining yechimi deyladi.

Endi o'yinlar nazariyasiga oid ayrim Ta'rif Va teoremalarni isbotsiz keltiramiz.

1- Ta'rif. Har qanday G o'yini O'yin matritsasi deb ataluvchi

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}\ldots\alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\ldots\alpha_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_{m1}\alpha_{m2}\ldots\alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsa orqali aniqlash mumkin. Bu matritsa R_1 o‘yinchi uchun yutuqlar matritsasi deb ataladi.

2- Ta’rif. O‘yinning natijasiga natijasiga yutuq deyiladi.

3-Ta’rif. Agar o‘yinga faqat ikkita ta’raf (shaxs shaxs) qatnashsa, hollarda o‘yinga juft o‘yin deyiladi.

4-Ta’rif. Agar juft o‘yinda yutuqlar nolga teng bo‘lsa, ya’ni birinchi yurishni o‘yinchining yutug‘i, Ikkinchi o‘yinchining boy berishiga teng bo‘lsa, bunday o‘yinga yig‘indisi nolga teng yechimini deyiladi.

5-Ta’rif. Agar A yutuq matritsasi n-ta ustun va m-ta satrga ega bo‘lsa, bunday o‘yinga $n \times m$ o‘lchovli chekli o‘yin deyiladi.

6-Ta’rif. Yutuq matritsasi topilgan $\alpha = \max_i(\min_j \alpha_{ij})$ songa o‘yinning quyi yutug‘i deyiladi (yoki maksmin strategiyasi deyiladi).

7-Ta’rif. Yutuq matritsasidan topilgan $\beta = \min_i(\max_j \alpha_{ij})$ songa o‘yinning yuqori yutug‘i qiymati deyiladi (yoki minmaks strategiyasi deyiladi).

8-Ta’rif. Agar $\max_i(\min_j \alpha_{ij}) = \min_j(\max_i \alpha_{ij}) = V$ bo‘lsa, u vaqtda V-ga o‘yinning yutuq qiymati deyiladi.

9- Ta’rif. α=β o‘yinga egar nuqtali o‘yin deyiladi.

10-Ta’rif. egar nuqtali o‘yinda maksimin va miKvadratikksni topishga optimal strategiya agarda.

11-Ta’rif. Agar α≠β bo‘lsa (egar nuqtaga ega bo‘lmasa), u vaqtda sof strategiyani ko‘rsatuvchi vektorning tarkibiy qismlariga siljigan strategiya deyiladi.

Teorema 8.1. O‘yinning quyi yutug‘i yuqori yutug‘idan katta bo‘la olmaydi.

11-chi ta’rifdan ko‘rinib turibdiki sof strategiyani izoh etuvchi vektorning tarkibiy qismlari har bir o‘yinchining nisbiy takrorlanish darajasini bildiradi va uning yig’indilari nolga (birga) teng.

Agar birinchi o‘yinchining siljigan strategiyasini $X=(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ va ikkinchi o‘yinchining siljigan strategiyasini

$Y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ deb belgilasak, u vaktda $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$ bo‘ladi,

bu yerda $x_i \geq 0, (i=\overline{1,m}) \quad y_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,n})$. Yuqoridagilarga asoslanib birinchi o‘yinchining optimal strategiyasini x^*, ikkinchi birinchilarning optimal strategiyasini y^* belgilasak, u vaktda ikkala o‘yinchining o‘yin quyidagicha teng bo’ladi. Yuqoridagilardan

$$\vartheta = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} x_i^* y_j^* .$$

Optimal strategiya va o‘yin yutug‘ini aniqlash jarayoniga o‘yinning yechimi deyiladi.

Teorema 8.2. har qanday yig‘indisi nolga teng matritsa o‘yini siljigan strategiyasi yechimga ega.

Teorema 8.3. A matritsaning V- o‘yin yutug‘i Y^*va Z^* optimal strategiya bo‘lishi uchun quyidagi tengsizliklarning

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha ij u_i^* \geq \vartheta \quad (j=\overline{1,n}) \quad ва \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha ij z_j^* \leq \vartheta \quad (i=\overline{1,m})$$

bajarilishi zarur va yetarlidir.

Teorema 8.4. Agar uyinchilardan birontasi siljigan optimal strategiyani qo‘llasa, u vaqtda optimal strategiyaga (sof strategiya) qo‘shilgan ikkinchi o‘yinchining qanday chastotalar bilan o‘yinga kirishidan qat’iy nazar yutuq qiymati v-ga teng bo‘ladi.

Masala 8.1. Quyidagi matritsa $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ bilan masalaning o‘yin yechimini toping va geometrik talqinini bering.

Yechish. oldin masalaning egar nuqtaga ega yoki yo‘qligini tekshiramiz

Buning uchun quyidagilarni topamiz

min{2;5}=2, max{2;6}=6,

min{6;4}=4, max{5;4}=5,

Demak o‘yinning quyi yutug‘i α=max{2;4}=4, yuqori yutug‘i ehtimollari β= min{6;5}=5, α=4≠β=5 bo‘lgani uchun $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ matritsa bilan berilgan o‘yin yechimi siljigan optimal strategiyaga ega bo‘lib, uning yutug‘i Vquyidagi oraliqda joylashgan 4≤v≤5.

Agar A o‘yinchining strategiyasi U (u_1, u_2) vektor bilan berilgan bo‘lsa, u vaqtda 8.4 teoremaga asosan B o‘yinchi B_1 yoki B_2 strategiyani qo‘llaganda A o‘yinchining o‘rtacha yutug‘ini qiymati quyidagi tengliklar bilan belgilanadi:

$$\begin{cases} 2u_1^* + 6u_2^* = \vartheta, & (B_1 strategiyani \quad qo'laganda) \\ 5u_1^* + 4u_2^* = \vartheta. & (B_2 strategiyani \quad qo'laganda) \end{cases}$$

Bu o‘yinlarning chastotalarining yig‘indisi esa

$$u_1^*+u_2^*=1.$$

Yuqoridagilarga asosan quyidagi sistema hosil bo‘ladi

$$\begin{cases} 2u_1^* + 6u_2^* = \vartheta, \\ 5u_1^* + 4u_2^* = \vartheta, \\ u_1^* + u_2^* = 1. \end{cases}$$

Busistemani yechsak u_1^*=0,4; u_2^*=0,6; v=4,4 yechim hosil bo‘ladi.

Agar B_1o’yinchining strategiyasi Z=(z_1^*,z_2^*) vektor bilan berilgan bunday, u vaqtda 8.4 teoremaga asoslanib quyidagi sistemani keltirib chiqarish mumkin

$$\left.\begin{aligned} 2z_1^* + 5z_2^* &= 4{,}4, \\ 6z_1^* + 4z_2^* &= 4{,}4, \\ z_1^* + z_2^* &= 1. \end{aligned}\right\}$$

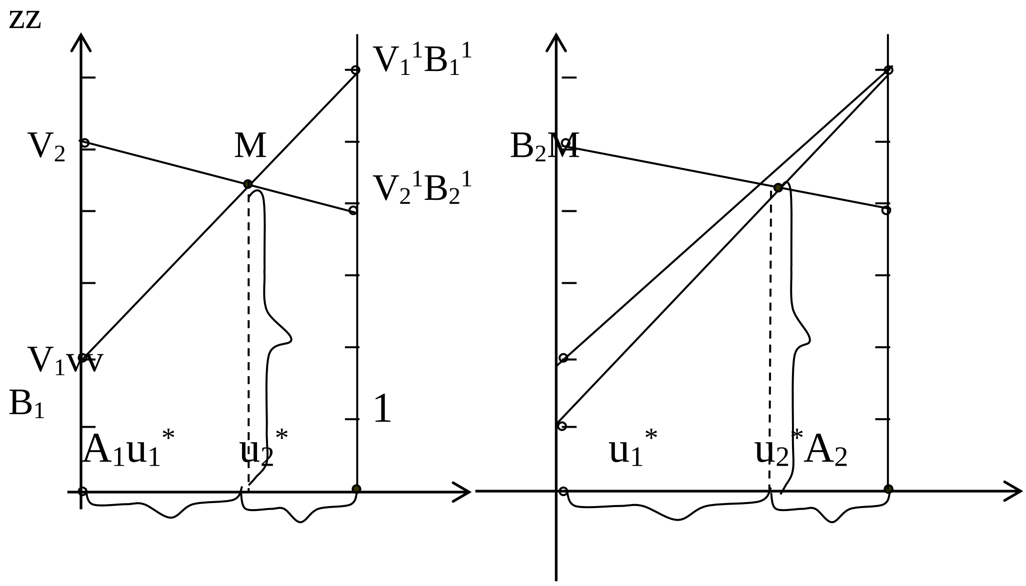
sistemani yechsak quyidagi yechim hosil bo‘ladi;

$$z_1^*=0,2; \quad z_2^*=0,8.$$

Shunday qilib $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ matritsa bilan berilgan o‘yin siljigan optimal strategiyasi $U^*=(0,4; 0,6)$, $Z^*=(0,4; 0,8)$ bo‘lib, yutuq qiymati esa$v=4,4$ teng.

Endi masalaning geometrik talqinini beramiz. Buning uchun u0z teksligida A o‘yinchining siljigan strategiyasini $U=(u_1,u_2)$ bilan belgilasak, U vaqtda xususiys holda $A_1(0;1)$ nuqta A_1strategiyani, $A_2(0;1)$ nuqta esa A_2 strategiyasini belgilaydi va h.k.

Agar A_1 va A_2 nuqtalarga perpendikulyar chiziqlar o‘tkazib, bu chiziqlarga o‘yinchilarning yutuqlarini joylashtirib chiqsak quyidagi 8.1 chizma hosil bo‘ladi.



8.1-chizma.

Agar A o‘yinchi A_2 strategiyani tanlaganda B o‘yinchining strategiyasi B_1 bo‘lsa, u vaqtda A o‘yinchining yutug‘i 6 ga teng, B_2 bo‘lganda esa 4 ga teng. Bu ikkala son A_2 nuqtaga perpendikulyar ustida yotgan B_1^1 va B_2^1 birlashtirsa aniqlaydi. B_1 va B_1^1, B_2 va B_2^1 nuqtalarni birlashtirsa ikkita to‘g‘ri chiziq hosil bo‘ladi. Bu to‘g‘ri chiziqlardan ou o‘qigacha bo‘lgan masofalar har qanday strategiyani tanlagandagi o‘rtacha yutuqni ko‘rsatadi. Masalan, B_1 B_1^1 kesmadan ou o‘qigacha bo‘lgan masofalar A_1 va A_2 strategiyalarning tanlagandagi o‘rtacha yutug‘i v_1(A_1 va A_2 strategiyalarni chastotalari mos ravishda u_1 va u_2-ga teng). B o‘yinchining strategiyasi esa B_1 ga teng bo‘lib masofa $2u_1+6u_2=v_1$ ga teng. xuddi shbirininday B_2 strategiyani qo‘llaganda o‘rtacha yutuq B_2, B_2^1 kesmadan ou o‘qigacha bo‘lgan masofalarga teng bo‘lib, bu masofa $5u_1+4u_2=v_2$ ga teng. Shunday qilib strategiyani $B_1MB_2^1$ chiziqning ordinatalari A o‘yinchining har qanday siljigan strategiyasi minimal yutug’I bo‘ladi. Bu minimal yutug‘lar ichida M nuqtaning ordinatasida maksimum qiymatga ega bo‘ladi. Demak M nuqtaning ordinatalari optimal yechimlar bo‘ladi. Optimal strategiyasi $u^*=(u_1^*; u_2^*)$ o‘yin yutug‘ini qiymati esa v teng. $M=(u_1^*; u_2^*)$ nuqtaning koordinatalarini topish uchun $B_1B_1^1$ va $B_2B_2^1$

to‘g‘ri chiziq kesishish nuqtalarini quyidagi uchta tenglamalar sistemasini yechib topamiz;

$$\begin{cases} 2u_1^* + 6u_2^* = \vartheta, \\ 5u_1^* + 4u_2^* = \vartheta, \\ u_1^* + u_2^* = 1. \end{cases}$$

Bu yerdan $u_1^* = \frac{2}{5} = 0{,}4,\ u_2^* = \frac{3}{5} = 0{,}6,\ \vartheta = \frac{22}{5} = 4{,}4.$

Xuddi yuqoridagi kabi B o‘yinchining optimal strategiyasini topamiz. Buning uchun quyidagi

$$\begin{cases} 2z_1^* + 5z_2^* = \frac{22}{5}, \\ z_1^* + z_2^* = 1 \end{cases}$$

sistemani yechib, $z_1^* = \frac{1}{5} = 0{,}2;\quad z_2^* = \frac{4}{5} = 0{,}8$ siljigan optimal yechimlarni topamiz. Natijada o‘yinning siljigan optimal strategiyalarini yechimlari

U^*=(0,4; 0,6) va Z^*=(0,2; 0,8) bo‘ladi. O‘yin yutug‘ining qiymati esa v=4,4 ga teng.

Masala 8.2. Quyidagi matritsa bilan berilgan o‘yinning yechimini toping.

$$A=\begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 10 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

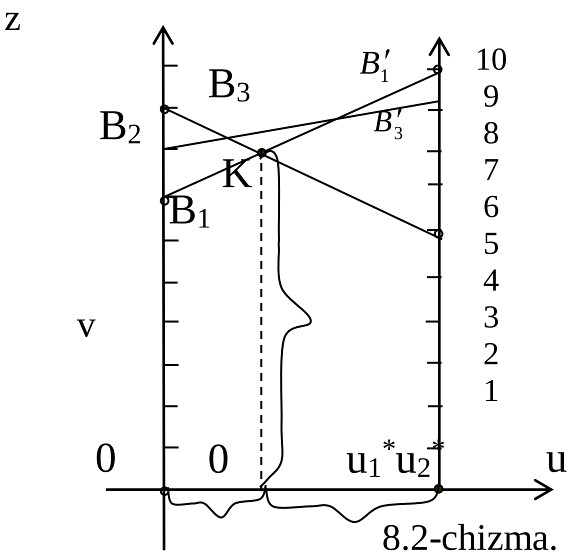
Yechish. Oldinmasalaning egar nuqtaga ega yoki yo‘qligini tekshiramiz.

Buning uchun quyidagilarni topamiz

min {7 9 8 }=7, max {7 10}=10,

min {10 6 9 }=6, max$\begin{Bmatrix} 9 \\ 6 \end{Bmatrix}$=9,

max {8 9}=9.



8.2-chizma.

Demak uyinning quyi yutug‘I α=max {7 6} =7, yuqori yutug‘i esa β= min {10 9 9}=9, α=7≠β=9 bo‘lgani uchun A matritsa bilan berilgan o‘yin yechimi siljigan optimal strategiyaga ega bo‘lib, yutug‘i Vquyidagi oraliqda joylashgan 7<v<9.

Agar A o‘yinchining strategiyasi U (u_1, u_2) vektor bilan berilgan bo‘lsa, u vaqtda 8.4 teoremaga asosan B o‘yinchi B_1 yoki B_2 yoki strategiyani qo‘llaganda A o‘yinchining o‘rtacha yutug‘ini qiymati quyidagi tengliklar bilan belgilanadi.

$$\left.\begin{aligned} &7u_1^* + 10u_2^* = \vartheta, \\ &9u_1^* + 6u_2^* = \vartheta, \\ &8u_1^* + 9u_2^* = \vartheta, \\ &u_1^* + u_2^* = \vartheta. \end{aligned}\right\}$$

Bu sistemani yechsak quyidagi yechim hosil bo‘ladi

u_1^*=2/3; u_2^*=1/3. u^*=(2/3, 1/3), v=8.B o‘yinchining strategiyasi $Z^*=(z_1^*,z_2^*,z^*)$ vektor bilan berilgan bo‘lsa, u vaqtda 8.4 teoremaga asoslanib quyidagi sistemani keltirib chiqarish mumkin.

$$\left.\begin{aligned} &7z_1^* + 9z_2^* + 8z_3^* = 8, \\ &10z_1^* + 6z_2^* + 9z_3^* = 8, \\ &z_1^* + z_2^* + z_3^* = 1. \end{aligned}\right\}$$

Bu sistemani yechsak, quyidagi yechimlar hosil bo‘ladi:

z_1^*=1/2=0,5, z_2^*=1/2=0,5, z_3^*=0 , Z^*=(0,5; 0,5; 0) optimal yechim.

Yuqoridagi o‘yin yechimining geometrik talqinini chizma 8.2 dan ko‘rsatish mumkin: B_1B^1, $B_2V_2^1$ va B_3B^1 to‘g‘ri chiziqlar siljigan optimal strategiya bo‘lib, B_1K B_2^1 siniq chiziq Buyinchining yutug‘ini quyi chegarasini ko‘rsatadi.

Shunday qilib 2×2 ko‘rinishdagi o‘yin yechimlarini topish usulidan foydalanib, 2×n va n×2 ko‘rinishdagi o‘yinlarni yechimlarini topishni umumiy xolda quyidagicha yozish mumkin:

1. ikkinchi (birinchi) o‘yinchining strategiyalariga mos bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar chiziladi;

2. o’iyn yutug‘ining quyi (yuqori) chegaralari aniqlanadi.

3. ikkinchi (birinchi) o‘yinchining ikkita strategiyasi topiladi va ularga mos masofalarga to‘g‘ri siljigan aniqlanadi. Shu to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasini maksimal (minimal) ordinataga ega bo‘lgan qiymati topiladi.

4. o‘yin yutug‘ining qiymati va optimal strategiyasi aniqlanadi.

Topshiriqlar

Quyidagi matritsalar bilan berilgan o‘yinlarni yechimlari topilsin.

1. $A_1=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

2. $A_2=\begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 9 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

3. $A_3=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

4. $A_4=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

5. $A_5=\begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

6. $A_6=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \\ 3 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

7. $A_7=\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 4 \\ 1 & 5 \\ 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

8. $A_8=\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 3 \\ 0 & 6 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

9. $A_9=\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 3 \\ 3 & 6 \\ 1 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

10. $A_{10}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

11. $A_{12}=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 3 \\ 5 & 9 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

12. $A_{13}=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \\ 7 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

13. $\mathbf{A_{14}}=\begin{pmatrix} 7 & 6 & 7 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

14. $A_{11}=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 8 \end{pmatrix}$

ILOVALAR

1-Ilova.

$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ **funksiya qiymatlari jadvali.**

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	0.3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0.1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0.2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0.3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0.4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0.5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0.6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0.7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0.8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0.9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1.0	0.2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1.1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1956
1.2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1.3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1.4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1.5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1.6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1.7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1.8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1.9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2.0	0.0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2.1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2.2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2.3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2.4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2.5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2.6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2.7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2.8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2.9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3.0	0.0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3.1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3.2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3.3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3.4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3.5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3.6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3.7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3.8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3.9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

2-Ilova.

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^x e^{\frac{z^2}{2}} dz$$ **funksiya qiymatlari jadvali.**

x	**Φ(*x*)**	*x*	**Φ(*x*)**	*x*	**Φ(*x*)**	*x*	**Φ(*x*)**
0.01	**0.0000**	**0.45**	**0.1736**	**0.90**	**0.3159**	**1.35**	**0.4115**
0.02	**0.0040**	**0.46**	**0.1772**	**0.91**	**0.3186**	**1.36**	**0.4131**
0.03	**0.0080**	**0.47**	**0.1808**	**0.92**	**0.3212**	**1.37**	**0.4147**
0.04	**0.0120**	**0.48**	**0.1844**	**0.93**	**0.3238**	**1.38**	**0.4162**
0.05	**0.0160**	**0.49**	**0.1879**	**0.94**	**0.3264**	**1.39**	**0.4177**
0.06	**0.0199**	**0.50**	**0.1915**	**0.95**	**0.3289**	**1.40**	**0.4192**
0.07	**0.0239**	**0.51**	**0.1950**	**0.96**	**0.3315**	**1.41**	**0.4207**
0.08	**0.0279**	**0.52**	**0.1985**	**0.97**	**0.3340**	**1.42**	**0.4222**
0.09	**0.0319**	**0.53**	**0.2019**	**0.98**	**0.3365**	**1.43**	**0.4236**
0.10	**0.0359**	**0.54**	**0.2054**	**0.99**	**0.3389**	**1.44**	**0.4251**
0.11	**0.0398**	**0.55**	**0.2088**	**1.00**	**0.3413**	**1.45**	**0.4265**
0.12	**0.0438**	**0.56**	**0.2123**	**1.01**	**0.3438**	**1.46**	**0.4279**
0.13	**0.0478**	**0.57**	**0.2157**	**1.02**	**0.3461**	**1.47**	**0.4292**
0.14	**0.0517**	**0.58**	**0.2190**	**1.03**	**0.3485**	**1.48**	**0.4306**
0.15	**0.0557**	**0.59**	**0.2224**	**1.04**	**0.3508**	**1.49**	**0.4319**
0.16	**0.0596**	**0.60**	**0.2257**	**1.05**	**0.3531**	**1.50**	**0.4332**
0.17	**0.0636**	**0.61**	**0.2291**	**1.06**	**0.3554**	**1.51**	**0.4345**
0.18	**0.0675**	**0.62**	**0.2324**	**1.07**	**0.3577**	**1.52**	**0.4357**
0.19	**0.0714**	**0.63**	**0.2357**	**1.08**	**0.3599**	**1.53**	**0.4370**
0.20	**0.0753**	**0.64**	**0.2389**	**1.09**	**0.3621**	**1.54**	**0.4382**
0.21	**0.0793**	**0.65**	**0.2422**	**1.10**	**0.3643**	**1.55**	**0.4394**
0.22	**0.0832**	**0.66**	**0.2454**	**1.11**	**0.3665**	**1.56**	**0.4406**
0.23	**0.0871**	**0.67**	**0.2486**	**1.12**	**0.3686**	**1.57**	**0.4418**
0.24	**0.0910**	**0.68**	**0.2517**	**1.13**	**03708**	**1.58**	**0.4429**
0.25	**0.0948**	**0.69**	**0.2549**	**1.14**	**0.3729**	**1.59**	**0.4441**
0.26	**0.0987**	**0.70**	**0.2580**	**1.15**	**0.3749**	**1.60**	**0.4452**
0.27	**0.1026**	**0.71**	**0.2611**	**1.16**	**0.3770**	**1.61**	**0.4463**
0.28	**0.1064**	**0.72**	**0.2642**	**1.17**	**0.3790**	**1.62**	**0.4474**
0.29	**0.1103**	**0.73**	**0.2673**	**1.18**	**0.3810**	**1.63**	**0.4484**
0.30	**0.1141**	**0.74**	**0.2703**	**1.19**	**0.3830**	**1.64**	**0.4495**
0.31	**0.1179**	**0.75**	**0.2734**	**1.20**	**0.3849**	**1.65**	**0.4505**
0.32	**0.1217**	**0.76**	**0.2764**	**1.21**	**0.3869**	**1.66**	**0.4515**
0.33	**0.1255**	**0.77**	**0.2794**	**1.22**	**0.3883**	**1.67**	**0.4525**
0.34	**0.1293**	**0.78**	**0.2823**	**1.23**	**0.3907**	**1.68**	**0.4535**
0.35	**0.1331**	**0.79**	**0.2852**	**1.24**	**0.3925**	**1.69**	**0.4545**
0.36	**0.1368**	**0.80**	**0.2881**	**1.25**	**0.3944**	**1.70**	**0.4554**
0.37	**0.1406**	**0.81**	**0.2910**	**1.26**	**0.3962**	**1.71**	**0.4564**
0.38	**0.1443**	**0.82**	**0.2939**	**1.27**	**0.3980**	**1.72**	**0.4573**
0.39	**0.1480**	**0.83**	**0.2967**	**1.28**	**0.3997**	**1.73**	**0.4582**
0.40	**0.1517**	**0.84**	**0.2995**	**1.29**	**0.4015**	**1.74**	**0.4591**
0.41	**0.1554**	**0.85**	**0.3023**	**1.30**	**0.4032**	**1.75**	**0.4599**
0.42	**0.1591**	**0.86**	**0.3051**	**1.31**	**0.4049**	**1.76**	**0.4608**
0.43	**0.1628**	**0.87**	**0.3078**	**1.32**	**0.4066**	**1.77**	**0.4616**
0.44	**0.1664**	**0.88**	**0.3106**	**1.33**	**0.4082**	**1.78**	**0.4625**
	0.1700	**0.89**	**0.3133**	**1.34**	**0.4099**	**1.79**	**0.4633**

davomi

x	Φ(*x*)	*x*	Φ(*x*)	*x*	Φ(*x*)	X	Φ(*x*)
1.80	0.4641	2.00	0.4772	2.40	0.4918	2.80	0.4974
1.81	0.4649	2.02	0.4783	2.42	0.4922	2.82	0.4976
1.82	0.4656	2.04	0.4793	2.44	0.4927	2.84	0.4977
1.83	0.4664	2.06	0.4803	2.46	0.4931	2.86	0.4979
1.84	0.4671	2.08	0.4812	2.48	0.4934	2.88	0.4980
1.85	0.4678	2.10	0.4821	2.50	0.4938	2.90	0.4981
1.86	0.4686	2.12	0.4830	2.52	0.4941	2.92	0.4982
1.87	0.4693	2.14	0.4838	2.54	0.4945	2.94	0.4984
1.88	0.4699	2.16	0.4846	2.56	0.4948	2.96	0.4985
1.89	0.4706	2.18	0.4854	2.58	0.4951	2.98	0.4986
1.90	0.4713	2.20	0.4861	2.60	0.4953	3.00	0.49865
1.91	0.4719	2.22	0.4868	2.62	0.4956	3.20	0.49931
1.92	0.4726	2.24	0.4875	2.64	0.4959	3.40	0.49966
1.93	0.4732	2.26	0.4881	2.66	0.4961	3.60	0.499841
1.94	0.4738	2.28	0.4887	2.68	0.4963	3.80	0.499828
1.95	0.4744	2.30	0.4893	2.70	0.4965	4.00	0.499968
1.96	0.4750	2.32	0.4898	2.72	0.4967	4.50	0.499997
1.97	0.4756	2.34	0.4904	2.74	0.4969	5.00	0.499997
1.98	0.4761	2.36	0.4909	2.76	0.4971		
1.99	0.4767	2.38	0.4913	2.78	0.4973		

3-Ilova.

$t_\gamma = t(\gamma, n)$ **qiymatlar jadvali.**

γ / n	0.95	0.99	0.999	γ / n	0.95	0.99	0.999
5	2.78	4.60	8.61	20	2.093	2.861	3.883
6	2.57	4.03	6.86	25	2.064	2.797	3.745
7	2.45	3.71	5.96	30	2.045	2.756	3.659
8	2.37	3.50	5.41	35	2.032	2.729	3.600
9	2.31	3.36	5.04	40	2.023	2.708	3.558
10	2.26	3.25	4.78	45	2.016	2.692	3.527
11	2.23	3.17	4.59	50	2.009	2.679	3.502
12	2.20	3.11	4.44	60	2.001	2.662	3.464
13	2.18	3.06	4.32	70	1.996	2.649	3.439
14	2.16	3.01	4.22	80	1.001	2.640	3.418
15	2.15	2.98	4.14	90	1.987	2.633	3.403
16	2.13	2.95	4.07	100	1.984	2.927	3.392
17	2.12	2.92	4.02	120	1.980	2.617	3.374
18	2.11	2.90	3.97	∞	1.960	2.576	3.291
19	2.10	2.88	3.92				

4-Ilova.

$q_{\gamma} = q(\gamma, n)$ **qiymatlar jadvali**

n \ γ	0.95	0.99	0.999	n \ γ	0.95	0.99	0.999
5	1.37	2.67	5.64	20	0.37	0.58	0.88
6	1.09	2.01	3.88	25	0.32	0.49	0.73
7	0.92	1.62	2.98	30	0.28	0.43	0.63
8	0.80	1.38	2.42	35	0.26	0.38	0.56
9	0.71	1.20	2.06	40	0.24	0.35	0.50
10	0.65	1.08	1.80	45	0.22	0.32	0.46
11	0.59	0.98	1.60	50	0.21	0.30	0.43
12	0.55	0.90	1.45	60	0.188	0.269	0.38
13	0.52	0.83	1.33	70	0.174	0.245	0.34
14	0.48	0.78	1.23	80	0.161	0.226	0.31
15	0.46	0.73	1.15	90	0.151	0.211	0.29
16	0.44	0.70	1.07	100	0.143	0.198	0.27
17	0.42	0.66	1.01	150	0.115	0.160	0.211
18	0.40	0.63	0.96	200	0.099	0.136	0.185
19	0.39	0.60	0.92	250	0.089	0.120	0.162

5-Ilova.

χ^2 **taqsimotning kritik nuqtalari**

Ozodlik darajalari soni *k*	α qiymatdorlik darajasi					
	0.01	0.025	0.05	0.95	0.975	0.99
1	6.6	5.0	3.8	0.0039	0.00098	0.00016
2	9.2	7.4	6.0	0.103	0.051	0.020
3	11.3	9.4	7.8	0.352	0.216	0.115
4	13.3	11.1	9.5	0.711	0.484	0.297
5	15.1	12.8	11.1	1.15	0.831	0.554
6	16.8	14.4	12.6	1.64	1.24	0.872
7	18.5	16.0	14.1	2.17	1.69	1.24
8	20.1	17.5	15.5	2.73	2.18	1.65
9	21.7	19.0	16.9	3.33	2.70	2.09
10	23.2	20.5	18.3	3.94	3.25	2.56
11	24.7	21.9	19.7	4.57	3.82	3.05
12	26.2	23.3	21.0	5.23	4.40	3.57
13	27.7	24.7	22.4	5.89	5.01	4.11
14	29.1	26.1	23.7	6.57	5.63	4.66
15	30.6	27.5	25.0	7.26	6.26	5.23
16	32.0	28.8	26.3	7.96	6.91	5.81
17	33.4	30.2	27.6	8.67	7.56	6.41
18	34.8	31.5	28.9	9.39	8.23	7.01
19	36.2	32.9	30.1	10.1	8.91	7.63
20	37.6	34.2	31.4	10.9	9.59	8.26
21	38.9	35.5	32.7	11.6	10.3	8.90
22	40.3	36.8	33.9	12.3	11.0	9.54
23	41.6	38.1	35.9	13.1	11.7	10.2
24	43.0	39.4	36.4	13.8	12.4	10.9
25	44.3	40.6	37.7	14.6	13.1	11.5
26	45.6	41.9	38.9	15.4	13.8	12.2
27	47.0	43.2	40.1	16.2	14.6	12.9
28	48.3	44.5	41.3	16.9	15.3	13.6
29	49.6	45.7	42.6	17.7	16.0	14.3
30	50.9	47.0	43.8	18.5	16.8	15.0

Adabiyotlar

1. Бабаджанов Ш. “Теория вероятностей и математическая статистика”. Курс лекций. Ташкент, ТМИ, 2004. 152 стр.

2. XashimovA.R., MamirovI. AdirovT. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. O‘quv qo‘llanma. Iqtisod-moliya. 2013 yil. 168 bet

3. В.А. Колемаев.и др. Теория вероятностей и математическая статистика.- М.: Высш. школа, 1991г.

4. V.Ye.Gmurman. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. Toshkent, O‘qituvchi, 1978y.

5. S.H. Sirojidinov, M. Mamatov. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. Toshkent, «O‘qituvchi». 1982 y.

6. V.Ye.Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan masalalar yechishga doir qo‘llanma. Toshkent, O‘qituvchi, 1980 y.

7. В.Е.Гмурман. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.-М.: Высш. школа, 2006 г.

8. В.А.Ватунин, и др. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах. –М.: Высш школа, 2003г.

9. Л.Н.Фадеева. Математика для экономистов теория вероятностей и математическая статистика. –М.: Высш экономическое образование, 2006г

10. Q.Safayeva va boshqalar. “Matematik programalashtirish” (masalalar to’plami). T.: “IQTISODYOT-MOLIYA”, 2006

11. M.Raisov “Matematik programalashtirish” – T.: “Voris”, 2009

12. Jumayev X.H., Otaniyazov B. va boshkalar. Matematik programmalashtirish. Darslik, Toshkent. 2005 Y.-230 b.

MUNDARIJA

2019 yil. Qog'ozbichimi A5,
Ofset qog'ozi. "Times New Roman" garniturasi
Bosmatabog'i 10,5
Buyurtma №___, Adadi ___ nusxa

Samarqand iqtisodiyotva servis instituti
Bosmaxonasida chop etildi
Manzil: A.Temur ko'chasi, 9-uy