

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI**

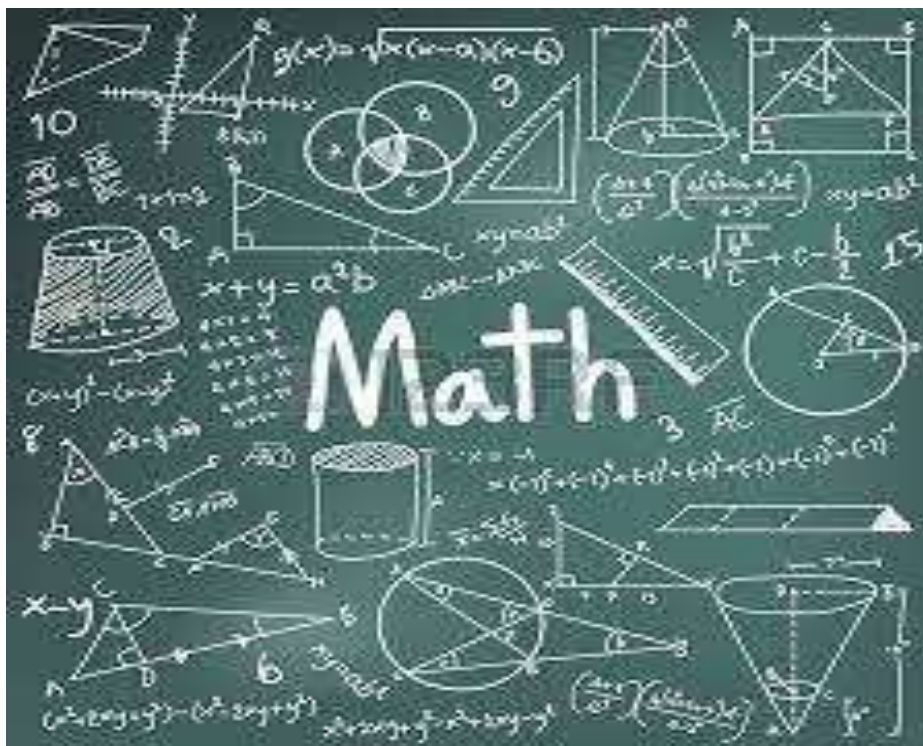
JIZZAX POLITEKNIKA INSTITUTI

“KIMYOVIY TEXNOLOGIYA” fakulteti

“OLIY MATEMATIKA” kafedrası

QATORLAR NAZARIYASI ELEMENTLARI

(Uslubiy ko'rsatma)



JIZZAX – 2020

Tuzuvchi: Jabborov X.X. assistent. “Qatorlar nazariyasi elementlari.” JizPI da ta’lim olayotgan bakalavriyat barcha yo’nalishlari talabalari uchun ma’ruza va amaliy mashg’ulotlar bo’yicha uslubiy ko’rsatma. –Jizzax: JizPI nashri, 2020 yil. 60 bet.

Taqrizchilar:

U.A.Soatov. – Jizzax Politehnika instituti “Oliy matematika” kafedrasida katta o’qituvchisi,

Azzamov T.J. – Jizzax davlat pedagogika instituti “Matematika o’qitish metodikasi” kafedrasida katta o’qituvchisi.

Uslubiy ko’rsatma JizPI “Oliy matematika” kafedrasining ____ yil ____
dagi № __-sonli umumiy yig’ilishida ko’rib chiqildi va fakultet ilmiy-uslubiy
kengashiga ko’rib chiqish uchun tavsiya etildi.

“Oliy matematika” kafedrasida mudiri: _____ f.m.f.n. A.Berdiyev.

Uslubiy ko’rsatma JizPI “Kimyoviy texnologiya” fakultetining ____ yil
dagi №__-sonli umumiy yig’ilishida ko’rib chiqildi va institut o’quv-uslubiy
kengashi muhokamasiga tavsiya etildi.

“Kimyoviy texnologiya” fakulteti dekani: _____ k.f.d. N.S.Tangyarikov

Jizzax Politehnika instituti o’quv-uslubiy kengashining ____ yil ____
dagi qarori bilan (____- bayonnoma) nashrga tavsiya etilgan.

Ilmiy uslubiy kengash raisi:

dots. G’.G’.Egamnazarov

Matn muharriri:

KIRISH

Ushbu uslubiy ko'rsatma Jizzax Politehnika institutining barcha yo'nalishida ta'lim olayotgan bakalaviriat yo'nalishi talabalari uchun mo'ljallangan bo'lib, sonli va funksional qatorlar bo'limiga bag'ishlanadi. Ushbu mavzuni chuqur o'rganish maqsadida zarur bo'lgan nazariy tushunchalar va amaliy topshiriqlar majmui berilgan. Bu uslubiy ko'rsatmani tayyorlashda ba'zi yangi adabiyotlardan foydalanib tuzilgan.

Uslubiy ko'rsatma quyidagi mavzulardan tarkib topgan.

- Sonli qatorlar. Asosiy tushunchalar. Sonli qator yaqinlashishining zaruriy sharti.
- Musbat hadli qatorlar. Musbat hadli qatorlarning yaqinlashishining yetarli shartlari.
- Ishoralari almashinuvchan qatorlar. O'zgaruvchan ishorali qatorlar. Absolyut va shartli yaqinlashish.
- Funksional qatorlar haqida asosiy tushunchalar.
- Darajali qatorlar. Darajali qatorning yaqinlashish sohasi va radiusi.
- Teylor qatori. Ba'zi funksiyalarni Teylor qatorlariga yoyish.

Qatorlan nazariyasini o'rganish istagida bo'lgan barcha talabalarga mana shu uslubiy ko'rsatma yaxshi foyda beradi degan umiddamiz.

1-Mavzu

Sonli qatorlar. Asosiy tushunchalar. Qatorning yig'indisi. Qatorning yaqinlashishi. Qator yaqinlashishining zaruriy sharti.

Reja

1. Sonli qatorlar.
2. Qatorning yig'indisi.
3. Yaqinlashining zaruriy sharti.

Tayanch so'z va iboralar: sonli qatorlar, qatorning yig'indisi, qatorning uzoqlashuvchiligi, qatorning yaqinlashuvchiligi, progressiya, garmonik qator.

Sonli qatorlar.

Bu bo'limning maqsadi qo'shiluvchilar soni cheksiz bo'lganda yig'indining xossalarini o'rganishdan iborat. Bunga misol sifatida kasrni cheksiz o'nli kasrga yoyilishini keltirish mumkin ¹:

$$\frac{1}{3} = 0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + \dots$$

Avvaliga biz haqiqiy sonlar to'plamida cheksiz yig'indilarni qaraymiz. Quyidagi cheksiz yig'indiga sonli qator deyiladi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + \dots \quad (1)$$

bu yerda, $u_1, u_2, u_3, \dots$ qatorning hadlari deyiladi. Cheksiz yig'indini bevosita qo'shish imkoni bo'lmagani uchun, biz buni limit orqali amalga oshiramiz.

Masalan, 0.33333... sonini olaylik. Bu sonni quyidagicha yig'indi sifatida yozish mumkin:

$$0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + \dots$$

yoki

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \dots$$

Quyidagicha qisman yig'indilarni tuzib olamiz:

$$s_1 = \frac{3}{10} = 0.3$$

$$s_2 = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} = 0.33$$

$$s_3 = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} = 0.333$$

$\vdots$

$s_1, s_2, s_3, \dots$ sonli ketma-ketlikni qatorning taqribiy yig'indisi sifatida ko'rish mumkin. Demak, qatorning yig'indisi sifatida bu ketma-ketlikning limitini qabul qilish mumkin.

¹ G. Baumann, *Mathematics for Engineers.II*.pp. 30-32.

$$s_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots + \frac{3}{10^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \dots + \frac{3}{10^n} \right)$$

Geometrik progressiya formulasini ishlatib

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right) = \frac{1}{3}$$

ni hosil qilamiz. Shunday qilib,

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots + \frac{3}{10^n} + \dots^1$$

Endi

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + \dots \quad (2)$$

qatorni ko'raylik. Uning qisman yig'indilarini topamiz:

$$s_1 = u_1$$

$$s_2 = u_1 + u_2$$

$$s_3 = u_1 + u_2 + u_3$$

$$\vdots$$

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik qatorning qisman yig'indilari deyiladi, Agar bu ketma-ketlik limitga ega bo'lsa, u holda bu limit qatorning yig'indisi sifatida qabul qilinadi. Agar $n \rightarrow \infty$ da S_n ketma-ketlik limiti cheksiz yoki $n \rightarrow \infty$ da S_n ning limiti mavjud bo'lmasa, (1) qator **uzoqlashuvchi** deyiladi. Uzoqlashuvchi qator yig'indiga ega bo'lmaydi.²

Ushbu

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \dots$$

qatorni qaraylik.

Bu qatorning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo'lishini aniqlash uchun uning dastlabki n ta hadidan iborat qisman yig'indisini olamiz:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}.$$

Endi

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2},$$

¹ G. Baumann, *Mathematics for Engineers*. II. pp. 36-37

² C. Canito, A. Tabacco *Mathematical Analysis II* pp 4-6.

$$\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4},$$

... ..

$$\frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

ni e'tiborga olib, S_n ni hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} S_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Demak,

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Ravshanki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Demak, berilgan qator yaqinlashuvchi uning yig'indisi $S = 1$ ga teng. Quyidagi

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots \quad (3)$$

qatorni qaraylik. Bu qatorning hadlari geometrik progressiya tashkil etganligi sababli uni **geometrik qator** deyiladi. ([2] 6-7 b. [1] 41 b.)

(3) qatorning dastlabki n ta hadidan iborat S_n qisman yig'indi, geometrik progressiyaning dastlabki n ta hadi yig'indisiga teng, demak:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1 - q} \quad (q \neq 1).$$

Ravshanki, $n \rightarrow \infty$ da S_n ning qanday limitiga ega bo'lishi q ga (geometrik progressiya mahrajiga) bog'liq bo'ladi.

a) Aytaylik, $|q| < 1$, ya'ni $-1 < q < 1$ bo'lsin. Bu holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - aq^n}{1 - q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{1 - q} - \frac{a}{1 - q} \cdot q^n \right) = \frac{a}{1 - q}$$

bo'lib, (3) qator yaqinlashuvchi, yig'indisi $S = \frac{a}{1 - q}$.

b) Aytaylik $q > 1$ bo'lsin. Bu holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$$

bo'lib, (3) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

v) Aytaylik, $q=1$ bo'lsin. Bu holda

$$S_n = na$$

bo'lib, $n \rightarrow \infty$ da $S_n \rightarrow \infty$ Bu holda ham (3) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

g) Aytaylik, $q \leq -1$ bo'lsin. Bu holda $n \rightarrow \infty$ da S_n ning limiti mavjud emas. Masalan, $q = -1$ bo'lganda (3) qator ushbu

$$a - a + a - a + \dots + (-1)^{n-1} a + \dots$$

ko'rinishga ega bo'lib, uning qisman yig'indisi

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{agar } n \text{ juft son bo'lsa,} \\ a, & \text{agar } n \text{ toq son bo'lsa} \end{cases}$$

bo'ladi. Ravshanki, $n \rightarrow \infty$ da S_n ning limiti mavjud bo'lmaydi.

Demak, (3) geometrik qator $|q| < 1$ bo'lgandagina yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi $S = \frac{a}{1-q}$ ga teng. ([2] 6 b.)

3-misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (4)$$

qatorni qaraylik. (4) qator **garmonik qator** deyiladi.¹

Bu qatorning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo'lishini aniqlash uchun uning dastlabki 2^n ta hadidan iborat qisman yig'indisini olamiz:

$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

Uni quyidagicha

$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)$$

yoziq olamiz.

Oxirgi tenglikning o'ng tomonida $n-1$ ta qavs bo'lib, 1-qavsda 2 ta had, 2-qavsda 2^2 had, 3-qavsda 2^3 ta had va h.k., $n-1$ qavsda 2^{n-1} ta had bor.

Ayni paytda

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2},$$

¹G. Baumann, Mathematics for Engineers. II. pp. 41-42

$$\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^n} > \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$$

$$S_{2^n} > 1 + n \cdot \frac{1}{2}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2^n} = \infty$$

Faraz qilaylik, biror

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots \quad (5)$$

2. *Yaqinlashuvchi qatorning xossalari.* Yaqinlashuvchi qatorning xossalari keltiramiz.

1-xossa. Agar (1) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda bu qatorning qoldig'i (5) qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi va aksincha.

◁ (1) qatorning dastlabki m ta hadi yig'indisini A bilan belgilaylik:

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m$$

Agar (1) qatorning dastlabki n ta hadi yig'indisini S_n , (5) qatorning dastlabki n ta hadining yig'indisini S_n^* deyilsa, u holda

$$S_{n+m} = A + S_n^* \quad (6)$$

bo'ladi.

Aytaylik, (1) qator yaqinlashuvchi bo'lsin. U holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \text{ (} S \text{ – chekli son).}$$

bo'lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+m} = S$$

bo'лади. (6) tenglikdan foydalanib

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^* = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{n+m} - A) = S - A$$

bo'lishini topamiz. Demak, (5) qator yaqinlashuvchi.

¹ G. Baumann, *Mathematics for Engineers*. II. pp. 42

Aytaylik, (5) qator yaqinlashuvchi bo'lsin, U holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^* = S^*$$

va (6) tenglikka asosan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+m} = \lim_{n \rightarrow \infty} (A + S_n^*) = A + S^*$$

Demak, (1) qator yaqinlashuvchi. $\triangleright$

Bu xossa qatorning dastlabki bir nechta hadlarini tashlab yuborish yoki qatorning boshiga chekli sondagi hadlarini qo'shish uning yaqinlashuvchiligiga ta'sir qilmasligini ifodalaydi.

2-xossa. Agar (1) qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi S ga teng bo'lsa, u holda

$$ca_1 + ca_2 + ca_3 + \dots + ca_n + \dots \quad (c = \text{const}, c \neq 0) \quad (7)$$

qator ham yaqinlashuvchidir va uning yig'indisi cS ga teng.

$\triangleleft$ Aytaylik, (1) qator yaqinlashuvchi, uning yig'indisi S ga teng bo'lsin. U holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \quad (S - \text{chekli son}).$$

Ayni paytda

$$S'_n = ca_1 + ca_2 + ca_3 + \dots + ca_n = c(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) = cS_n$$

bo'lishidan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot S_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = c \cdot S$$

kelib chiqadi. Demak, (7) qator yaqinlashuvchi, uning yig'indisi cS bo'ladi. $\triangleright$

Faraz qilaylik ikkita

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots \quad (8)$$

qatorlar berilgan bo'lsin.

Ushbu

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \dots + (a_n + b_n) + \dots$$

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \dots + (a_n - b_n) + \dots$$

qator mos ravishda (1) va (8) qatorlar yig'indisi hamda ayirmasi deyiladi va

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n), \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$$

kabi yoziladi.

3-xossa. Agar (1) va (8) qator yaqinlashuvchi bo'lib, ularning yig'indisi mos ravishda, S' bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n), \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$$

qatorlar ham yaqinlashuvchi va ularning yig'indisi mos ravishda $S + S'$, $S - S'$ bo'ladi.

$\triangleleft$ Aytaylik,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n, \quad S'_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$$

bo'lsin. U holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = S'$$

bo'ladi.

Agar $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ qatorning qisman yig'indisi C_n deyilsa,

$$C_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \dots + (a_n + b_n) = S_n + S'_n$$

bo'lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n + S'_n) = S + S'$$

bo'ladi. Demak, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi $S + S'$

bo'ladi. $\triangleright$

4-xossa. Agar (1) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, bu qatorning umumiy hadi a_n nolga intiladi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

$\triangleleft$ Aytaylik, (1) qator yaqinlashuvchi bo'lsin. Bu qatorning qisman yig'indisi

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1},$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

uchun

$$S_n - S_{n-1} = a_n \quad (9)$$

bo'ladi. Modomiki, (1) qator yaqinlashuvchi ekan, u holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S \quad (10)$$

bo'ladi. (9), (10) munosabatlardan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

kelib chiqadi. $\triangleright$ ²

Eslatma. ² Qatorning umumiy hadi a_n nolga intilishidan, ya'ni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

bo'lishidan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi har doim kelib chiqavermaydi.

Masalan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

garmonik qator uchun

² C. Canito, A. Tabacco Mathematical Analysis II pp 2.

² C. Canito, A. Tabacco Mathematical Analysis II pp 8.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Biroq garmonik qator uzoqlashuvchi.

Shuning uchun 4-xossa qator yaqinlashishning zaruriy sharti deyiladi.

Shuni ham aytish mumkinki, agar qatorning umumiy hadi a_n , $n \rightarrow \infty$ da nolga intilmasa, u holda qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Har bir n natural songa aniq bir x_n haqiqiy sonni mos qo'yuvchi qonun berilgan bo'lsa, R_1 haqiqiy sonlar o'qida $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, yoki $\{x_n\}$ nuqtalar (sonlar) ketma-ketligi berilgan deyiladi.

Masalan, har bir n natural songa $x_n = \frac{3(n+1)}{2n}$ son mos qo'yilgan bo'lsa,

$$3; \frac{9}{4}; 2; \frac{15}{8}; \dots; \frac{3(n+1)}{2n}; \dots$$

sonlar ketma-ketligi berilganligini anglatadi.

a sonning har qanday oldindan tayinlangan ε atrofi uchun $\{x_n\}$ sonli ketma-ketlikning shunday bir N tartib raqamini (ε ga bog'liq ravishda) tanlash mumkin bo'lsak, barcha $n > N$ tartib raqamli hadlari uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantirsa, a soni $\{x_n\}$ sonli ketma-ketlikning limiti deyiladi.

n o'lchovli haqiqiy fazoda har bir k natural songa aniq bir n o'lchovli M_k nuqtani mos qo'yuvchi qonuniyat o'rnatilgan bo'lsa, R_n fazoda cheksiz n o'lchovli nuqtalarning ketma-ketligi berilgan deyiladi va $M_1, M_2, \dots, M_k, \dots$, yoki $\{M_k\}$ ko'rinishda yoziladi.

Masalan, har bir k natural songa ikki o'lchovli $M_k \left(2k; \frac{3}{k}\right)$ nuqta mos qo'yilgan bo'lsin. Bu esa, R_2 haqiqiy koordinatalar tekisligida

$$M_1(2; 3), M_2(4; \frac{3}{2}), M_3(6; 1), \dots, M_n(2k; \frac{3}{k}), \dots$$

nuqtalar ketma-ketligi berilganligini anglatadi.

n o'lchovli M_0 nuqtaning har qanday ε atrofida berilgan nuqtalar ketma-ketligining biror-bir mos tartib raqamidan boshlab, barcha hadlari tegishli bo'lsa, ya'ni har qanday oldindan tayinlanadigan $\varepsilon > 0$ uchun K tartib raqamni (ε ga bog'liq ravishda) ko'rsatish mumkin bo'lsaki, barcha $k > K$ tartib raqamli hadlar $M_k \in S_\varepsilon(M_0)$ bo'lsa, M_0 nuqtaga $\{M_k\}$ nuqtalar ketma-ketligining limiti deyiladi va $\lim_{k \rightarrow \infty} \{M_k\} = M_0$ ko'rinishida yoziladi. Ketma-ketlik limiti ta'rifidan foydalanib, quyidagilarni isbotlang:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Isbot: ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olamiz, $|x_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1}$; $|x_n - 1| < \varepsilon$ tengsizlikni

qanoatlantiruvchi n larni topish uchun $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ tengsizlikni yechamiz. $n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$. Shunday

qilib, $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ sonining butun qismi $N = \left\lceil \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right\rceil$ bo'ladi, u holda $|x_n - 1| < \varepsilon$ tengsizlik barcha

$n > N$ larda bajariladi. ε -ixtiyoriy son bo'lgani uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Quyidagi misolni qaraylik:

$$1-1+1-1+1-1+1-...$$

Bu qator uchun qisman yig'indilarni topamiz:

$$s_1 = 1$$

$$s_2 = 1-1 = 0$$

$$s_3 = 1-1+1 = 1$$

$$s_4 = 1-1+1-1 = 0$$

Demak, quyidagicha ketma-ketlik hosil bo'ladi:

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$$

Bu ketma-ketlik limitga ega emas. Demak berilgan qator uzoqlashuvchi bo'ladi.¹

Nazariy savollar:

1. Sonli qatorlar tushunchasi.
2. Qatorning yig'indisi.
3. Yaqinlashining zaruriy sharti.
4. Umumiy had bu nima?
5. Qatorning qisman yig'indisi nima?

Foydalagan adabiyotlar:

1. G. Baumann Mathematics for engineers II. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH. 2010. pp. 30-42.
2. C. Canuto, A. Tabacco. Mathematical Analysis II. Springer-Verlag Italia, Milan 2008, pp 2-10.

2-Mavzu.

Musbat hadli sonli qatorlarni yaqinlashishga tekshirishning solishtirish alomatlari.

Reja:

1. Musbat hadli qator

2. Solishtirish alomati.

Tayanch so'z va iboralar: musbat hadli qatorlar, solishtirish alomatlari.

Musbat hadli qator

Faraz qilaylik,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

¹ G. Baumann, Mathematics for Engineers. II. pp. 38-40.

qator berilgan bo'lsin. Bu qatorning har bir hadi manfiy bo'lmasa:

$$a_n \geq 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

u qator **musbat hadli qator** (qisqacha musbat qator) deyiladi.

Musbat qatorlarning yaqinlashuvchiligi.

Aytaylik,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

musbat qator bo'lib,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

uning qisman yig'indisi bo'lsin. Ravshanki,

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}.$$

$a_{n+1} \geq 0$ bo'lganligi sababli $S_{n+1} \geq S_n$ bo'ladi. Demak, musbat qatorlarning qisman yig'indilari ketma-ketligi

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$$

o'suvchi bo'ladi.

Ma'lumki, o'suvchi ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u chekli limitga ega bo'ladi. Shuningdek, ketma-ketlik chekli limitga ega bo'lsa, u chegaralangan (jumladan yuqoridan chegaralangan) bo'ladi. Natijada musbat qatorlarning yaqinlashishi haqida quyidagi teorema kelimiz:

1-teorema. (1) musbat hadli qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun uning qisman yig'indilaridan iborat $\{S_n\}$ ketma-ketlikning yuqoridan chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli.²

Natija. Musbat qatorning qisman yig'indilaridan iborat ketma-ketlik yuqoridan chegaralanmagan bo'lsa, qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

1-misol. Quyidagi qatorlar uchun yaqinlashishning zaruriy sharti bajarilishi tekshirilsin: a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-3}{n(n+1)}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2-1}}$; c) $\frac{1}{2^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{8^3} + \frac{1}{11^3} + \dots$.

Yechish. a) $n \rightarrow \infty$ da umumiy hadning limitini topamiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} = 0.$$

Yaqinlashishning zaruriy sharti bajarilyapti va qator yaqinlasuvchi bo'lishi mumkin.

b) $n \rightarrow \infty$ da umumiy hadning limitni topamiz:

² G. Bauman. Mathematics for engineers I-II. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH. 2010. pp. 44-57

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = 1.$$

Limit 0 ga teng emas, ya'ni uzoqlashishning yetarli sharti bajarilyapti. Shuning uchun berilgan qator uzoqlashuvchi.

c) Berilgan qatorning umumiy hadini topamiz:

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{8^3} + \frac{1}{11^3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^3}.$$

Demak, $a_n = \frac{1}{(3n-1)^3}$. $n \rightarrow \infty$ da uning limitini topamiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(3n-1)^3} = 0$$

bo'lgani uchun qator yaqinlasuvchi bo'lishi mumkin.

Birinci va uchinchi misoldagi qator uchun yaqinlashishning zaruriy sharti bajarilyapti, shuning uchun ular yaqinlashishi mumkin, ammo ular uzoqlashishi ham mumkin, buni faqat yaqinlashishning yetarli alomatlar bilan tekshirish mumkin.

Musbat qatorlarda solishtirish alomatlar

Endi musbat qatorlarda solishtirish alomatlarini keltiramiz. Ular teoremlar orqali ifodalanadi.

2-teorema. Agar (1) va

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots \quad (2)$$

musbat qatorlarda

$$a_n \leq b_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

tengsizlik bajarilsa, (ya'ni (1) qatorning har bir hadi (2) qatorning mos hadidan oshib ketmasa) u holda

a) (2) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, (1) qator ham yaqinlashuvchidir;

b) (1) qator uzoqlashuvchi bo'lsa, (2) qator ham uzoqlashuvchidir.

◁ (1) va (2) qatorlarning qisman yig'indilari mos ravishda S_n va M_n deylik:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad M_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n.$$

U holda (3) munosabatdan foydalanib

$$S_n \leq M_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4)$$

ni topamiz.

Aytaylik, (2) qator yaqinlashuvchi bo'lsin. U holda 1-teoremaga ko'ra (2) qatorning qisman yig'indisi yuqoridan chegaralangan bo'ladi:

$$M_n \leq L \quad (L = \text{const}), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Bu va (4) tengsizlikdan

$$S_n \leq L, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

kelib chiqadi. Demak, (1) qatorning qisman yig'indisi yuqoridan chegaralangan. U holda 1-teorema qo'ra (1) qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Aytaylik, (1) qator uzoqlashuvchi bo'lsin. U holda S_n yuqoridan chegaralangan emas. (4) tengsizlikka ko'ra M_n ham yuqoridan chegaralanmagan. Yuqoridagi natijaga ko'ra (2) qator uzoqlashuvchi bo'ladi. $\triangleright$

3-teorema. Agar (1) va (2) musbat qatorlarda

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (5)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda:

- a) (2) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, (1) qator ham yaqinlashuvchi;
- b) (1) qator uzoqlashuvchi bo'lsa, (2) qator ham uzoqlashuvchi.

◀ Keltirilgan teoremaning (5) shartidan topamiz:

$$\begin{aligned} \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} &\leq \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{b_3}{b_2} \cdot \frac{b_4}{b_3} \cdot \dots \cdot \frac{b_n}{b_{n-1}}, \\ \frac{a_n}{a_1} &\leq \frac{b_n}{b_1}, \\ a_n &\leq \frac{a_1}{b_1} \cdot b_n \end{aligned} \quad (6)$$

Demak, (1) va (2) qator hadlari orasida (6) munosabat o'rinni.

Aytaylik, (2) qator yaqinlashuvchi bo'lsin. U holda yaqinlashuvchi qatorning 2-xossasiga ko'ra

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{b_1} \cdot b_n$$

qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi. (6) tengsizlik va 2-teoremadan foydalanib, (1) qatorning yaqinlashuvchiligini topamiz. Aytaylik, (1) qator uzoqlashuvchi bo'lsin. (6) tengsizlik va 2-teoremadan foydalanib, (2) qatorning uzoqlashuvchi bo'lishini topamiz.³

Misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$

qator yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◁ Bu qatorning umumiy hadi

$$a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$$

bo'lib, uning uchun

³ G. Bauman. *Mathematics for engineers I-II*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH. 2010. pp. 44-57.

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)} \quad (7)$$

bo'ladi. Biz oldingi paragrafda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \dots$$

qatorning yaqinlashuvchiligini ko'rgan edik. Bu va (7) tengsizlik, 2-teoremadan foydalanib, berilgan qatorning yaqinlashuvchi ekanini topamiz.

Nazorat savollari

1. Musbat hadli qator nima?
2. Solishtirish alomati nima?

Foydalangan adabiyotlar:

1. G. Bauman. Mathematics for engineers I-II. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH. 2010. pp. 44-57
2. G'aniev I. G'. va boshq. Oliy matematika. Toshkent, 2013.
3. Yo.U.Soatov. Oliy matematika, 1-2 qism. 1995y.
4. C. Canuto, A. Tabacco. Mathematical Analysis I-II. Springer-Verlag Italia, Milan, 2008

3-Mavzu

Musbat hadli sonli qatorlar va ular yaqinlashishining yetarli shartlari. Dalamber, Koshi va integral alomatlari.

Reja:

1. Koshi alomati
2. Dalamber alomati
3. Integral alomati.

Tayanch so'z va iboralar: musbat hadli qatorlar, qator yaqinlashishining yetarli shartlari.

Avvalgi ma'lumotlardan hamda geometrik qatorning yaqinlashuvchiligidan foydalanib ba'zi yaqinlashish alomatlarini keltiramiz.

1. Koshi alomati. Aytaylik, (1) musbat qator berilgan bo'lsin. Agar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = k \quad (1)$$

bo'lsa, u holda:

- a) $k < 1$ da (1) qator yaqinlashuvchi bo'ladi;
 - b) $k > 1$ da (1) uzoqlashuvchi bo'ladi.
- ◁ Shartga ko'ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = k$$

U holda ketma-ketlikning limiti ta'rifiga ko'ra ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ kichik son olinganda ham shunday n_0 natural son topiladiki, barcha $n > n_0$ uchun

$$\left| \sqrt[n]{a_n} - k \right| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Bu tengsizlikni quyidagicha

$$k - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < k + \varepsilon \quad (2)$$

yo'zish mumkin.

Aytaylik, $k < 1$ bo'lsin. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ kichik sonni shunday kichik qilib olish mumkinki, natijada

$$k + \varepsilon < 1$$

bo'ladi. Agar

$$k + \varepsilon = q$$

deyilsa, (2) tengsizlikka ko'ra

$$\sqrt[n]{a_n} < q.$$

Bu tengsizlikning har ikki tomoni n -darajaga ko'tarib topamiz:

$$a_n < q^n \quad (q < 1) \quad (3)$$

Oxirgi tengsizlik n ning biror n_0 qiymatidan boshlab o'rinli bo'ladi. Ma'lumki, yaqinlashuvchi qatorning 1-xossasiga ko'ra, qator yaqinlashishida uning dastlabki bir nechta hadlarining ta'siri bo'lmaydi. Binobarin, (3) tengsizlikni n ning barcha qiymatlarida ($n = 1, 2, 3, \dots$) o'rinli bo'lsin deb qarash mumkin. Shunday qilib berilgan

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

qator bilan birga

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + \dots$$

geometrik qatorga ega bo'ldik. Ravshanki, geometrik qator $q < 1$ bo'lganda yaqinlashuvchi bo'ladi. U holda (3) tengsizlikka hamda 2-teoremaga ko'ra berilgan qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Aytaylik, $k > 1$ bo'lsin. U holda q ham birdan katta bo'ladi. Bu holda

$$\sqrt[n]{a_n} > 1,$$

$$a_n > 1$$

bo'lib, $n \rightarrow \infty$ da a_n ning limiti 0 ga teng bo'lmaydi. Binobarin, qator yaqinlashishning zaruriy sharti bajarilmaydi. Bu holda qaralayotgan qator uzoqlashuvchi bo'ladi. $\triangleright^1$

¹ G. Bauman. *Mathematics for engineers I-II*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH. 2010. pp. 53-54

Eslatma. Agar Koshi alomatida $k=1$ bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashishi ham mumkin, uzoqlashishi ham mumkin. Bu holda Koshi alomati qatorning yaqinlashish yoki uzoqlashishini aniqlab bermaydi.

Misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$$

qator yaqinlashishga tekshirilsin.

◁ Bu qatorning umumiy hadi

$$a_n = \frac{2^n}{n^n}$$

bo'lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n}{n^n} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$$

bo'ladi. Demak, $k=0 < 1$. Berilgan qator Koshi alomatiga ko'ra yaqinlashuvchi bo'ladi. ▷

2. Dalamber alomati

Aytaylik, biror (1) musbat hadli qator berilgan bo'lsin.

Agar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$$

bo'lsa, u holda:

a) $d < 1$ da (1) qator yaqinlashuvchi bo'ladi;

b) $d > 1$ da (1) qator uzoqlashuvchi bo'ladi;

◁ Bu tasdiq yuqorida keltirilgan Koshi alomati isboti kabi isbotlanadi. ▷¹

Eslatma. Agar Dalamber alomatida $d=1$ bo'lsa, unda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi ham uzoqlashuvchi ham bo'lishi mumkin. Bu holda Dalamber alomati qatorning yaqinlashuvchiligini yoki uzoqlashuvchiligini aniqlab bera olmaydi.

Misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad (n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n)$$

qator yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◁ Bu qatorning n va $(n+1)$ hadlari

$$a_n = \frac{1}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$$

bo'lib,

¹ G. Bauman. *Mathematics for engineers I-II*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH. 2010. pp. 51-53

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{n!} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Demak, $d = 0 < 1$ bo'lib, Dalamber alomatiga ko'ra berilgan qator yaqinlashuvchi bo'ladi. ▸

3. Koshining integral alomati

Biror musbat qator

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

hamda $[1, +\infty)$ oraliqda aniqlangan $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. Bu funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

- 1) $f(x)$ funksiya $[1, +\infty)$ da uzluksiz,
- 2) $f(x)$ funksiya $[1, +\infty)$ da kamayuvchi,
- 3) $f(x)$ funksiya $[1, +\infty)$ da musbat, ya'ni ixtiyoriy $x \in [1, +\infty)$ da $f(x) > 0$,
- 4) ushbu $f(n) = a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) tenglik o'rinli.

Natijada berilgan qator bilan birga

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) + \dots$$

qator hosil bo'ladi.

Yuqoridagi shartlarning bajarilishidan va ixtiyoriy natural n uchun

$$n < x < n+1$$

bo'lishidan

$$f(n) > f(x) > f(n+1),$$

ya'ni

$$a_n > f(x) > a_{n+1}$$

kelib chiqadi. Keyingi tengsizlikni $[n, n+1]$ oraliq bo'yicha integrallab topamiz:

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} a_n dx &> \int_n^{n+1} f(x) dx > \int_n^{n+1} a_{n+1} dx, \\ a_n &> \int_n^{n+1} f(x) dx > a_{n+1} \end{aligned} \quad (3)$$

Endi berilgan qator bilan birga

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \dots + \int_n^{n+1} f(x) dx + \dots \quad (4)$$

qatorni qaraylik. Ravshanki, oxirgi qatorning qisman yig'indisi

$$F_n = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \dots + \int_n^{n+1} f(x) dx$$

bo'ladi.

Agar $n \rightarrow +\infty$ da F_n chekli limitga ega bo'lsa, u holda (4) qator yaqinlashuvchi bo'ladi. Unda (3) munosabat hamda solishtirma alomatga (2-teoremaga) ko'ra (1) qator ham yaqinlashuvchidir. Agar $n \rightarrow +\infty$ da F_n ning limiti cheksiz bo'lsa, u holda (4) qator uzoqlashuvchi bo'ladi. Bu holda (1) qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

Shunday qilib quyidagi yaqinlashish alomatiga kelamiz.

Agar

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x f(t) dt$$

chekli bo'lsa (1) qator yaqinlashuvchi, cheksiz bo'lsa (1) qator uzoqlashuvchi bo'ladi¹.

Odatda, bu tasdiq Koshining integral alomati deyiladi.

Misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \dots + \frac{1}{n^{\alpha}} + \dots \quad (\alpha > 0) \quad (5)$$

qator yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◁ Aytaylik,

$$f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}} \quad (\alpha > 0)$$

bo'lsin. Bu funksiya uchun Koshining integral alomatida keltirilgan $f(x)$ ga qo'yilgan

barcha shartlar bajariladi: $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ funksiya $[1, +\infty)$ da aniqlangan va uzluksiz, $[1, +\infty)$ da kamayuvchi, $[1, +\infty)$ da musbat va

$$f(n) = \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

Endi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{1}{t^{\alpha}} dt$$

ni topamiz. Ravshanki,

$$\int_1^x \frac{1}{t^{\alpha}} dt = \int_1^x t^{-\alpha} dt = \left. \frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_1^x = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1 \right) \quad (\alpha \neq 1).$$

Agar $\alpha > 1$ bo'lsa,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{1}{t^{\alpha}} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1 \right) = \frac{1}{\alpha-1}$$

¹ G. Bauman. *Mathematics for engineers I-II*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH. 2010. pp. 45-47

bo'ladi. Bu holda Koshining integral alomatiga ko'ra $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

$0 < \alpha < 1$ da

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{1}{t^{\alpha}} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1 \right) = \infty.$$

Bu holda qaralayotgan qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Aytaylik, $\alpha = 1$ bo'lsin. Bu holda

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{1}{t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln t) \Big|_1^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = \infty$$

bo'ladi. Bunda berilgan qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Demak,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

qator $\alpha > 1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $\alpha \leq 1$ bo'lganda uzoqlashuvchi bo'ladi. Odatda, (5) qator **umumlashgan garmonik qator** deyiladi ($\alpha = 1$ da garmonik qator hosil bo'ladi). ▷

1-misol. Quyidagi qatorlarni yaqinlashishga tekshiring:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)^2};$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{11}} + \dots;$

c) $\frac{3}{1+1^2} + \frac{3}{1+2^2} + \frac{3}{1+3^2} + \dots;$

d) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\ln(n-1)}.$

Yechish. a) Berilgan qatorning $a_n = \frac{1}{(2n+3)^2}$ umumiy hadni $f(x) = \frac{1}{(2x+3)^2}$

funksiyaga almashtiramiz (bu funksiya $[1; +\infty)$ oraliqda uzluksiz va kamayuvchi, shuning

uchun Koshining integral alomatini qo'llash mumkin) va $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(2x-3)^2}$ xosmas integralni

yaqinlashishga tekshiramiz:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(2x+3)^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{(2x+3)^2} = -\frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2x+3} \Big|_1^b = -\frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2b+3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{10}.$$

Integral yaqinlashadi, demak, Koshi integral alomati bo'yicha qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

b) Oldin umumiy hadni topamiz: $a_n = \frac{1}{\sqrt{3n-1}}$. Shu sababli $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{3x-1}}$ xosmas

integralni yaqinlashishga tekshiramiz:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{3x-1}} = \frac{2}{3} \lim_{b \rightarrow \infty} \sqrt{3x-1} \Big|_1^b = \frac{2}{3} \lim_{b \rightarrow \infty} (\sqrt{3b-1} - \sqrt{2}) = \infty.$$

Integral uzoqlashuvchi bo'lgani uchun tekshirilayotgan qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

c) Oldin umumiy hadni topamiz: $a_n = \frac{1}{1+n^2}$. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ funksiya uchun

Koshining integral alomatiga ko'ra $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ xosmas integralni yaqinlashishga tekshiramiz:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg x \Big|_1^b = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Xosmas integral va shu bilan birga berilgan qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

d) Berilgan qatorning $a_n = \frac{1}{(n-1)\ln(n-1)}$ umumiy hadini

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)\ln(x-1)}$$

funksiyaga almashtiramiz va

$$\int_3^{\infty} \frac{dx}{(x-1)\ln(x-1)}$$

integralni qarab chiqamiz. Bu integralda quyi chegarasi 3 deb olingan, chunki qaralayotgan

$f(x) = \frac{1}{(x-1)\ln(x-1)}$ funksiya $[3; +\infty)$ oraliqda aniqlangan bo'lib, shu oraliqda

uzluksiz, kamayuvchi funksiya.

$$\int_3^{\infty} \frac{dx}{(x-1)\ln(x-1)} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(\ln(x-1)) \Big|_3^b = \infty$$

bo'lgani uchun berilgan qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

2-misol. Quyidagi qatorlarni yaqinlashishga tekshiring:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n-4}}; \quad \text{b) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln x}; \quad \text{c) } \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \dots;$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+4}; \quad \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n}; \quad \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-3}{n(n+1)}.$$

Yechish. Berilgan qatorlarni solishtirish alomatlari yordamida tekshiramiz.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n-4}} \text{ qatorni } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \text{ qator bilan taqqoslaymiz. } \frac{1}{\sqrt[3]{n-4}} > \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \text{ va}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ uzoqlashuvchi qator bo'lgani uchun berilgan qator ham solishtirish alomatiga ko'ra

uzoqlashuvchi bo'ladi (oxirgi qator umumlashgan garmonik qator bo'lib, unda $p = \frac{1}{3} < 1$).

b) $\ln n < n$ tengsizlikdan $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ kelib chiqadi. Tekshirilayotgan qatorning umumiy hadi uzoqlashuvchi qarmonik qator umumiy hadidan katta bo'lgani uchun berilgan qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

c) Berilgan qatorning umumiy hadini topamiz:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5} \right)^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{5} \right)^n,$$

bundan $a_n = \frac{1}{n} \left(\frac{2}{5} \right)^n$ ni topamiz. $b_n = 1 \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^n$ hadli qatorni qarasak, u mahraji $q = \frac{2}{5} < 1$

bo'lgan geometrik qator bo'lib, yaqinlashuvchi. Tekshirilayotgan qatorning umumiy hadi bu qatorning mos hadidan kichik bo'lgani uchun berilgan qatorning ham yaqinlashishi kelib chiqadi.

d) Quyidagi yordamchi qatorni qaraymiz:

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{n+4} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3(n+4)}.$$

Oxirgi ifodaning chap tomonida, qavs ichida 4 ta hadi tashlab yuborilgan garmonik qator yozilgan, ya'ni 4 ta birinchi $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right)$ hadisiz garmonik qator turibdi.

Qatorning dastlabki bir nechta hadini tashlab yuborish uning yaqinlashishiga yoki uzoqlashishiga ta'sir qilmaydi. Shuning uchun yordamchi qator uzoqlashuvchi bo'ladi. Berilgan qatorning umumiy hadlarini yordamchi qatorning umumiy hadlari bilan taqqoslaymiz: har qanday n uchun $\frac{1}{3(n+4)} < \frac{1}{3n+4}$ tengsizlik o'rinli. Demak, tekshirilayotgan qator uzoqlashadi.

e) Berilgan qatorni $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ cheksiz kamayuvchi geometrik qator bilan taqqoslaymiz.

Lopital qoidasidan foydalanib, ularning umumiy hadlari nisbatining limitini topamiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^n - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \ln 2}{2^n \ln 2 - 1} = 1.$$

Bu limit chekli bo'lgani uchun tekshirilayotgan qator, solishtirish alomatiga ko'ra yaqinlashuvchi bo'ladi.

f) Tekshirilayotgan qatorning umumiy hadini garmonik qatorning umumiy hadiga nisbati limitini topamiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)n}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 2.$$

Limit mavjud va chekli bo'lgani uchun berilgan qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

Nazorat savollari

1. Koshi alomati qanday?
2. Dalamber alomati qanday?
3. Koshining integral alomati qanday?

Foydalangan adabiyotlar:

1. G. Bauman. Mathematics for engineers I-II. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH. 2010. (pp. 47-53)
2. G'aniev I. G'. va boshq. Oliy matematika. Toshkent, 2013.
3. Yo.U.Soatov. Oliy matematika, 1-2 qism. 1995y.
4. C. Canuto, A. Tabacco. Mathematical Analysis I-II. Springer-Verlag Italia, Milan, 2008

4-Mavzu

Ishoralari o'zgaruvchi bo'lgan sonli qatorlar. Leybnits teoremasi. Absolyut va shartli yaqinlashuvchi qatorlar.

Reja:

1. Ishoralari o'zgaruvchi bo'lgan sonli qatorlar.
2. Leybnits teoremasi.
3. Absolyut va shartli yaqinlashuvchi qatorlar.

Tyanch so'z va iboralar: ishorasi o'zgaruvchi qatorlar, absolyut va shartli yaqinlashuvchi qatorlar.

1. Ishoralari o'zgaruvchi bo'lgan sonli qatorlar.

Ishorasi o'zgaruvchi qatorlar deb, qator hadlari musbat hamda manfiy haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan qatorlarga aytiladi.

Ta'rif 1. Ishorasi o'zgaruvchan qator absolyut yaqinlashuvchi deyiladi, agarda uning hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan qator yaqinlashuvchi bo'lsa.

Ta'rif 2. Ishorasi o'zgaruvchan qator shartli ravishda yaqinlashuvchi deyiladi, agar u yaqinlashuvchi bo'lsa, lekin hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan qator uzoqlashuvchi bo'lsa.

1-misol. Quyidagi qator³

$$\frac{\sin \alpha}{1^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \dots + \frac{\sin n\alpha}{n^2} + \dots$$

Ishorasi o'zgaruvchidir. Uning hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan qator

$$\left| \frac{\sin \alpha}{1^2} \right| + \left| \frac{\sin 2\alpha}{2^2} \right| + \left| \frac{\sin 3\alpha}{3^2} \right| + \dots + \left| \frac{\sin n\alpha}{n^2} \right| + \dots$$

ko'rinishga ega, uni yaqinlashishga taqqoslash alomatidan tekshirsak,

³ J. Stewart Calculus sixth edition 2008. USA pp 710-713.

$$\left| \frac{\sin n\alpha}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{va} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

yaqinlashuvchi.

Demak, berilgan qator absolyut yaqinlashuvchidir.

Teorema 1. Ishorasi o'zgaruvchan qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lsa, berilgan qator o'zi ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Teorema 2. Quyidagi ishorasi o'zgaruvchi qator

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

shartli yaqinlashuvchi bo'lsin, uning musbat hadlaridan qayta nomerlanib tuzilgan qator

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots \quad (2)$$

va manfiy hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan qator

$$w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n + \dots \quad (3)$$

bo'lsin, u holda (2) va (3) qatorlar ikkalasi ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

Teorema 3. (Koshi) Absolyut yaqinlashuvchi qatoming hadlarini (absolyut qiymatda) o'rinlarini istagancha almashtirsak ham, yaqinlashuvchi va yig'indisi o'zgarmaydi.

Teorema 4. (Riman teoremasi). Agar ishorasi o'zgaruvchi qator shartli yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda avvaldan olingan L soni qanday bo'lmasin, bu qatoming hadlarini shunday almashtirish mumkinki, hosil bo'lgan yangi qator yig'indisi L soniga teng bo'ladi.²

Ta'rif 3. Ishorasi o'zgaruvchan qator ishorasi navbatlanuvchi deyiladi, agar ixtiyoriy ikki qo'shni hadi har xil ishorali bo'lsa.

2. Leybnits teoremasi.

Ishorasi navbatlanuvchi qatorlar uchun Leybnits alomati

$$u_1 - u_2 + u_3 - \dots + (-1)^{n+1} u_n + \dots \quad (4)$$

qator hadlarining absolyut qiymatlari monoton o'smaydigan, nolga intiluvchi ketma – ketlikni tashkil etsa ya'ni

$$u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \dots \geq u_n \geq \dots \quad (5)$$

va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

bo'lsa (4) qator shartli yaqinlashuvchidir.²

2–misol. Garmonik qator ishorasi navbatlanuvchi bo'lib, kelgan holni ko'raylik

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$$

Bu qator ishorasi navbatlanuvchi va

² C. Canito, A. Tabacco *Mathematical Analysis II* pp 18-23.

² C. Canito, A. Tabacco *Mathematical Analysis II* pp 16-17.

$$1) 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > \dots$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ ekanligidan Leybnits alomatining hamma shartlarini}$$

qanoatlantiradi, shuning uchun qator shartli yaqinlashuvchi.

3 – misol. Quyidagi ishorasi navbatlashuvchi qatorni ko'raylik.

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{8} - \frac{3}{16} + \frac{1}{32} - \frac{3}{64} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{2 + (-1)^n}{2^n} + \dots$$

Bu qator uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n} = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n}, & \text{toq } n \text{ lar uchun,} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2^n}, & \text{juft } n \text{ lar uchun,} \end{cases}$$

ikkala holda ham limit nolga teng. Lekin $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \dots \geq u_n \geq u_{n+1} > \dots$ shart bajarilmaydi. Shuning uchun Leybnits alomatini qo'llab bo'lmaydi. Berilgan qatorni absolyut yaqinlashishga taqqoslash alomati bilan tekshiramiz:

$$\frac{2 + (-1)^n}{2^n} \leq \frac{3}{2^n} \text{ va } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} - \text{yaqinlashuvchi qator ekanligidan, berilgan qator}$$

absolyut yaqinlashuvchi. Absolyut yaqinlashuvchi qator, albatta shartli yaqinlashuvchidir.³

4 – misol. Quyidagi qatorni yaqinlashishga tekshirilsin³

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

Bu qator ishorasi navbatlashuvchi va Leybnits alomatining qolgan ikki sharti ham bajara oladi:

$$1) 1 - \cos 1 > 1 - \cos \frac{1}{\sqrt{2}} > \dots > 1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} > 1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \dots$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sin^2 \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0$$

qator shartli yaqinlashuvchi.

5-misol. Ushbu

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

qator absolyut va shartli yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◁ Berilgan qator ishorasi navbatlanuvchi qatordir. Umumiy hadini topamiz:

³ J. Stewart Calculus sixth edition 2008. USA pp 711-712

³ J. Stewart Calculus sixth edition 2008. USA pp 715-716.

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}.$$

Qatorning hadlari absolyut qiymati bo'yicha monoton kamayadigan bo'lib, uning umumiy hadi nolga intiladi: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = 0$. Demak, Leybnits teoremasiga ko'ra, berilgan qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Bu qatorni absolyut yaqinlashishiga tekshirish uchun Koshining integral alomatidan foydalanamiz:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{d(2x-1)}{2x-1} = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(2x-1) \Big|_1^b = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(2b-1) = \infty.$$

Integral uzoqlashuvchi bo'lgani uchun berilgan qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi. Demak, berilgan qator shartli yaqinlashuvchi.

6-misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha n}{n^2}$$

qator absolyut va shartli yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◁ Berilgan qator ishorasi almashuvchi qatordir. Har qanday α uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \alpha n}{n^2} = 0$, shuning uchun qator yaqinlashuvchi bo'lishi mumkin (uning umumiy hadi nolga intiladi), lekin bu intilish monoton emas: $|a_1| > |a_2| > |a_3| > \dots > |a_n| > \dots$ shart bajarilmayapti.

Quyidagi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin \alpha n|}{n^2}$ qatorni qarab chiqamiz. Agar uni $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ yaqinlashuvchi

Dirixle qatori bilan taqqoslasak: $\frac{|\sin \alpha n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ bo'lib, solishtirish alomati bo'yicha kichik qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Bundan berilgan qatorning absolyut yaqinlashishi kelib chiqadi.

7-misol. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \frac{n}{2^n}$ qator absolyut va shartli yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◁ Berilgan qatorni yoyib chiqamiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \frac{n}{2^n} = -\frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} - \dots$$

Bundan ko'rinyaptiki, bu ishorasi almashuvchi qatordir. Uni absolyut yaqinlashishiga Dalamber alomati bilan tekshiramiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \text{ qator uchun}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Demak, berilgan qator absolyut yaqinlashuvchi. Absolyut yaqinlashuvchi qator, albatta shartli yaqinlashuvchi bo'ladi.

8-misol. Ushbu $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ qator absolyut va shartli yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◁ Berilgan qator ishorasi navbatlanuvchidir. Leybnits teoremasi bo'yicha (Lopital qoidasini qo'llab, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ni topamiz) qator yaqinlashadi. Absolyut qiymatlaridan tuzilgan qatorni yaqinlashishiga integral alomati bo'yicha tekshiramiz.

$$\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \ln x d(\ln x) = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \ln^2 x \Big|_2^b = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln^2 b - \ln^2 2) = \infty.$$

Integral uzoqlashadi, shuning uchun bizning qator ham uzoqlashadi. Demak, berilgan qator shartli yaqinlashuvchi.

Demak, qisqacha qilib ta'rif va teoremlarni birlashtirsak quyidagi qoidalar ketma-ketligiga kelamiz:

1° Ushbu

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

ishoralari navbatma-navbat o'zgaruvchan bo'lgan sonli qator qaralayotgan bo'lsin.

Leybnits alomati. Agar hadlarni absolyut qiymatlari monoton kamayuvchi bo'lib, $n \rightarrow \infty$ da uning umumiy hadi nolga intilsa, ya'ni quyidagi shartlar bajarilsa:

$$1) a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \dots$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

u holda qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi musbat bo'ladi va birinchi haddan katta bo'lmaydi.

2° Agar ushbu

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

ishoralari o'zgaruvchan qator hadlarining absolyut qiymatlaridan iborat bo'lgan

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n| + \dots$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsa u holda qaralayotgan qatorni absolyut yaqinlashuvchi qator deb yuritiladi.

3° Agar ishoralari o'zgaruvchan qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning hadlarini absolyut qiymatlaridan tashkil topgan qator uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda qaralayotgan qatorni shartli yaqinlashuvchi qator deb yuritiladi.

4° Agar qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda uning hadlari o'rinlarini almashtirish qator yaqinlashuviga ta'sir etmaydi.

5° Agar qator shartli yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda uning hadlari o'rinlarini almashtirish natijasida u uzoqlashuvchi qator bo'lib qolishi ham mumkin yoki boshqa songa yaqinlashuvchi qatorga aylanib qolishi mumkin.

6° Agar ishoralari o'zgaruvchan qator absolyut ham, shartli ham yaqinlashmasa, u holda uni uzoqlashuvchi qator deb yuritiladi.

Nazorat savollari

1. Sonli qator deb nimaga aytiladi?
2. Yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi sonli qator deb nimaga aytiladi?
3. Yaqinlashuvchi sonli qatorning yig'indisi nimaga teng?
4. Hadlari geometrik progressiyani tashkil etuvchi sonli qatorni yaqinlashishga tekshiring.
5. Chekli sondagi hadlarni tashlab yuborishlik qator yaqinlashuviga ta'sir etmasligini isbotlang.
6. Qator yaqinlashuvchiligidining zaruriy sharti nimadan iborat?
7. Musbat hadli sonli qatorlarni yaqinlashishga tekshirish uchun solishtirish, D'alamber, Koshi va integral belgilari nimadan iborat?
8. Qachon ishoralari almashinuvchi bo'lgan sonli qatorni absolyut yoki shartli yaqinlashuvchi desa bo'ladi?
9. Ishoralari almashinuvchi sonli qatorning qoldig'ini qanday baholash mumkin.
10. Leybnist teoremasini bayon qiling.
11. Funksional qator deb nimaga aytiladi?
12. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} a_n$ qatorning ham absolyut yaqinlashuvchi ekanligini isbotlang.
13. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ va $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ qatorlar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda:
 - a. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ yaqinlashuvchi;
 - b. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolyut yaqinlashuvchi ekanligini isbotlang.
14. Aniq integralni qatorlar yordamida taqribiy hisoblash usullarini bayon qiling.
15. Differensial tenglamalarni qanday qilib qatorlar yordamida yechsa bo'ladi?
16. Ushbu $e^{100} = 1 + \frac{100}{1!} + \frac{100^2}{2!} + \dots$ yoyilma qaysi haddan boshlab kamaya boshlaydi?
17. Ushbu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n^2}$ qator yig'indisini 0,01 aniqlikda hisoblang.
18. Ushbu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n \cdot (n+1)}$ qator yig'indisini 0,001 aniqlikda hisoblang.
19. Ushbu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)}$ qator yig'indisini 0,0001 aniqlikda hisoblang.

20. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$ qator yig'indisini 0,001 aniqlikda hisoblang.

21. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 3^n}$ qator yig'indisini 0,001 aniqlikda hisoblang.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. G. Baumann, Mathematics for Engineers. II pp 53-56.
2. C. Canuto, A. Tabacco. Mathematical Analysis II. Springer-Verlag Italia, Milan 2008, pp 16-23.
3. J. Stewart Calculus sixth edition 2008. USA pp 710-713.

5-Mavzu

Funksional qatorlar. Asosiy tushunchalar. Majoratlanuvchi qatorlar. Funksional qator yig'indisining uzluksizligi. Funksional qatorlarni differensiallash va integrallash.

Reja:

1. Funksional qatorlar
2. Funksional qatorning tekis yaqinlashishi.
3. Funksional qatorlarni differensiallash va integrallash.

Tayanch so'z va iboralar: funksional qatorlar, qatorlarni differensiallash va integrallash, funksional qatorning yaqinlashish nuqtasi.

1. Funksional qatorlar.

Aytaylik, ushbu

$$u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$$

funksiyalar ketma-ketligidagi har bir funksiya (a, b) oraliqda berilgan bo'lsin. Bu ketma-ketlik hadlaridan tuzilgan

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (1)$$

ifoda **funksional qator** deyiladi. (1) funksional qator qisqacha

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

kabi ham yoziladi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

Masalan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \dots + \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} + \dots$$

qatorlar funksional qatorlar bo'ladi.

Agar x o'zgaruvchiga biror tayin x_0 , ($x_0 \in (a, b)$) qiymat berilsa, u holda (1) funksional qator sonli qator

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots \quad (3)$$

ga aylanadi. Masalan, (2) qator $x_0 = \frac{1}{2}$ da quyidagi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

sonli qatorga aylanadi.

Ravshanki, x o'zgaruvchining (a, b) ga tegishli turli qiymatlarida, umuman aytganda, turli sonli qatorlar hosil bo'ladi.

1-ta'rif. Agar (3) sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsa, (1) funksional qator x_0 **nuqtada yaqinlashuvchi** deyilib, x_0 nuqta esa funksional qatorning **yaqinlashish nuqtasi** deyiladi.

Agar (3) sonli qator uzoqlashuvchi bo'lsa, (1) funksional qator x_0 **nuqtada uzoqlashuvchi** deyilib, x_0 nuqta esa funksional qatorning **uzoqlashish nuqtasi** deyiladi.

(1) funksional qator (a, b) oraliqqa tegishli bo'lgan x o'zgaruvchining ba'zi qiymatlarida yaqinlashuvchi, ba'zi qiymatlarida esa uzoqlashuvchi bo'lishi mumkin.

2-ta'rif. x o'zgaruvchining (1) qator yaqinlashadigan barcha qiymatlaridan iborat M to'plam (1) qatorning yaqinlashish sohasi deyiladi. Bu holda (1) funksional qator M to'plamda yaqinlashuvchi deb yuritiladi. Ravshanki, $M \subset (a, b)$ bo'ladi.

Funksional qatorning yaqinlashish sohalarini topishda sonli qatorlarda keltirilgan ma'lumotlardan foydalaniladi.

Misollar. 1. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

funksional qatorning yaqinlashish sohasi topilsin.

◁ Bu qator hadlari mahraji $q = x$ ga teng bo'lgan geometrik progressiyani hosil qiladi. Demak, berilgan qator geometrik qator bo'ladi. Ma'lumki, geometrik qator $|q| < 1$ da yaqinlashuvchi bo'ladi. Demak, berilgan qator $|x| < 1$ da yaqinlashuvchi, uning yaqinlashish sohasi esa $(-1, 1)$ oraliqdan iborat. ▷

2. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \dots + \frac{n}{x^n} + \dots$$

funksional qatorning yaqinlashish sohasi topilsin.

◁ Bu qator uchun

$$u_n(x) = \frac{n}{x^n}, \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{x^{n+1}}.$$

Dalamber alomatidan foydalanib topamiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{x^{n+1}} : \frac{n}{x^n} \right| = \frac{1}{|x|} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{|x|} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{|x|}.$$

Demak, $\frac{1}{|x|} < 1$, ya'ni $|x| > 1$ da qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yaqinlashish sohasi $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ bo'ladi.

2. Funksional qatorning tekis yaqinlashishi.

Aytaylik, (1) funksional qator $[a, b]$ da yaqinlashuvchi bo'lsin. Demak, $[a, b]$ dan olingan x o'zgaruvchining har bir tayin qiymatida mos sonli qator yaqinlashuvchi. x o'zgaruvchining turli qiymatlarida mos sonli qatorlar ham turlicha bo'lib, ularning yig'indisi ham turlicha bo'ladi. Binobarin, bunday sonli qatorlar yig'indisi S olingan x ning qiymatiga bog'liq bo'ladi:

$$S = S(x).$$

Odatda, bu funksiya (1) **funksional qator yig'indisi** deyiladi va

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = S(x)$$

kabi yoziladi.

Funksional qator yig'indisini

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) \quad (4)$$

deb ham qarash mumkin, bunda

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x).$$

Masalan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

funksional qator $(-1, 1)$ da yaqinlashuvchi. Uning yig'indisi

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x + x^2 + \dots + x^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1-x} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{x}{1-x}$$

($|x| < 1$, ya'ni $x \in (-1, 1)$ da $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{1-x} = 0$) bo'ladi. Demak,

$$S(x) = \frac{x}{1-x}.$$

Yuqoridagi (4) tenglik quyidagini anglatadi: ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shu ε songa va olingan x ning qiymatiga bog'liq shunday natural n_0 son topiladiki, barcha $n > n_0$ lar uchun

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \quad (5)$$

tengsizlik bajariladi.

Demak, (5) tengsizlik o'rinli bo'ladigan n_0 ning qiymati ikki miqdorga, ε va qaralayotgan x ga bog'liq bo'ladi.

3-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham faqat ε ga bog'liq shunday natural n_0 son topilsaki, barcha $n > n_0$ lar va barcha $x \in [a, b]$ uchun

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, (1) funksional qator $[a, b]$ da $S(x)$ funksiyaga **tekis yaqinlashadi** deyiladi.

Demak, bu holda (5) o'rinli bo'ladigan n_0 ning qiymati faqat ε ga bog'liq bo'lib, qaralayotgan x ga bog'liq bo'lmaydi.

Masalan, $[0, 1]$ oraliqda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nx}{1+n^5x^2}$$

funksional qator tekis yaqinlashuvchi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nx}{1+n^2x^2}$$

funksional qator yaqinlashuvchi bo'lsa ham, u shu oraliqda tekis yaqinlashuvchi emas. Shuni ta'kidlash lozimki, funksional qator biror oraliqda tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u shu oraliqda yaqinlashuvchi bo'ladi. Ammo funksional qator biror oraliqda yaqinlashuvchi bo'lishidan uning shu oraliqda tekis yaqinlashuvchi bo'lishi har doim kelib chiqavermaydi.

Endi (1) funksional qatorning tekis yaqinlashuvchiligini ifodalovchi teoremani isbotsiz keltiramiz:

1-teorema (Koshi teoremasi) Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shu ε ga ko'ra shunday natural n_0 son topilib, barcha $n > n_0$ lar uchun ixtiyoriy $m \in N$ va ixtiyoriy $x \in M$ uchun ushbu

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+m}(x)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, u holda (1) funksional qator M to'plamda tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

Bu teoremadan foydalanib, amaliyotda ko'p tadbiiq etiladigan Veyershtass alomatini keltiramiz.

2-teorema. Agar (1) funksional qatorning har bir hadi M to'plamda quyidagi

$$|u_n(x)| \leq c_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (6)$$

tengsizlikni qanoatlantirsa va

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad (7)$$

sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda (1) funksional qator M to'plamda tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

◁ Shartga ko'ra (7) sonli qator yaqinlashuvchi. U holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ olinganda ham shunday natural n_0 son topiladiki, barcha $n > n_0$ va ixtiyoriy $m \in N$ uchun

$$c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_{n+m} < \varepsilon.$$

Endi (6) tengsizlikdan foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+m}(x)| &\leq |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \dots + |u_{n+m}(x)| < \\ < c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_{n+m}. \end{aligned}$$

Oxirgi ikki tengsizliklardan

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+m}(x)| < \varepsilon$$

bo'lishi kelib chiqadi. U holda 1-teoremaga ko'ra funksional qator M to'plamda tekis yaqinlashuvchi bo'ladi. ▷²

Misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} \quad (0 \leq x < \infty)$$

funksional qatorning $[0, +\infty)$ da tekis yaqinlashuvchi ekanini ko'rsatilsin.

◁ Ravshanki, berilgan qatorning umumiy hadi uchun

$$|u_n(x)| = \left| \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} \right| = \frac{1}{|x+n||x+n+1|} \leq \frac{1}{n \cdot n} = \frac{1}{n^2}$$

bo'ladi. Ayni paytda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

sonli qator (umumlashgan garmonik qator, $\alpha > 1$) yaqinlashuvchi.

Demak, Veyershtass alomatiga ko'ra berilgan funksional qator $[0, +\infty)$ da tekis yaqinlashuvchi bo'ladi. ▷

Tekis yaqinlashuvchi funksional qatorning xossalari

Tekis yaqinlashuvchi funksional qatorning xossalarini keltiramiz.

1-xossa. Funksional qator yig'indisining uzluksizligi

Aytaylik, (1) funksional qator M to'plamda yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi bo'lsin.

Agar (1) qatorning har bir $u_n(x)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) hadi M to'plamda uzluksiz bo'lib, bu funksional qator M to'plamda tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda qator yig'indisi $S(x)$ funksiya M to'plamda uzluksizdir.

² E. Kreyszig. *Advanced Engineering Mathematics*. 9 edition. pp 697

◁ Aytaylik, x_0 nuqta M to'plamga tegishli bo'lgan ixtiyoriy nuqta bo'lsin.

Shartga ko'ra funksional qator M da tekis yaqinlashuvchi. Unda ta'rifga binoan, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday natural n_0 topiladiki, barcha $n > n_0$ va ixtiyoriy $x \in M$ uchun

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (8)$$

jumladan

$$|S_n(x_0) - S(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (9)$$

Funksional qatorning har bir hadi M to'plamda uzluksiz bo'lganligi sababli

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$$

funksiya ham M da uzluksiz. Uzluksizlik ta'rifiga binoan yuqoridagi $\varepsilon > 0$ ga ko'ra shunday $\delta > 0$ topiladiki, $|x - x_0| < \delta$ da

$$|S_n(x) - S_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (10)$$

bo'ladi.

Ravshavki,

$$|S(x) - S(x_0)| = |(S(x) - S_n(x)) + (S_n(x) - S_n(x_0)) + (S_n(x_0) - S(x_0))|.$$

(8),(9) va (10) munosabatlaridan foydalanib topamiz:

$$|S(x) - S(x_0)| \leq |S(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n(x_0)| + |S_n(x_0) - S(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Bu esa qator yig'indisi $S(x)$ funksyaning x_0 nuqtada, demak, M to'plamda uzluksizligini bildiradi. ▷

Tekis yaqinlashuvchi funksional qatorlarning keyingi xossalarini isbotsiz keltiramiz.

3. Funksional qatorlarni differensiallash va integrallash.

2-xossa. Funksional qatorlarni hadlab integrellash

Aytaylik

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

funksional qator $[a, b]$ da yaqinlashuvchi bo'lib, yig'indisi $S(x)$ bo'lsin:

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

Agar bu qatorning har bir hadi $[a, b]$ da uzluksiz bolib, qator $[a, b]$ da tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $S(x)$ funksiya $[a, b]$ da intergrallanuvchi va

$$\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx,$$

ya'ni

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx$$

bo'ladi.

3-xossa. Funksional qatorlarni hadlab differensiallash

Aytaylik,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

funksional qator $[a, b]$ da yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi $S(x)$ bo'lsin:

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

Agar bu qatorning har bir hadi $[a, b]$ da uzluksiz $u'_n(x)$ hosilaga ega bo'lib, funksiya hosilasidan tuzilgan

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = u'_1(x) + u'_2(x) + \dots + u'_n(x) + \dots$$

funksional qator $[a, b]$ da tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $S(x)$ funksiya hosilaga ega va

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x),$$

ya'ni

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).^2$$

Misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$$

qator yig'indisi topilsin.

◁ Berilgan qatorning har bir hadi uzluksiz funksiya. Bu qator hadlarinng hosilalaridan tuzilgan qator

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots$$

bo'lib, u $(-1, 1)$ da yaqinlashuvchi, yig'indisi esa $\frac{1}{1-x}$.

Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = S(x)$$

² E. Kreyszig. *Advanced Engineering Mathematics*. 9 edition. pp 697-698

deyilsa, u holda

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$$

bo'lib,

$$\int_0^x S'(t) dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x)$$

bo'ladi. Ayni paytda

$$\int_0^x S'(t) dt = S(x) - S(0) = S(x).$$

Keyingi ikki tenglikdan

$$S(x) = -\ln(1-x) \quad (-1 < x < 1)$$

kelib chiqadi.

1-misol. Quyidagi qatorlar uchun yaqinlashish sohasi aniqlansin:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{\ln x}}; \quad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}.$$

Yechish. a) Berilgan qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln x}}$

qatorni ko'rib chiqamiz. Bu qatorning yaqinlashishga tekshirish uchun uni $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ Dirixle qatori bilan taqqoslaymiz. $x > e$ uchun $p = \ln x > 1$, demak, qaralayotgan qator Veyershtass alomatiga ko'ra absolyut yaqinlashadi.

$x = e$ uchun $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ ishorasi almashuvchi qatorga ega bo'lamiz. Bu qator

Leybnits teoremasiga ko'ra shartli yaqinlashuvchi bo'ladi. $1 < x < e$ uchun $0 < \ln x < 1$ bo'ladi va Leybnits teoremasiga ko'ra bu qator shartli yaqinlashadi (absolyut yaqinlashishga tekshirish uchun bu qator Dirixle qatori bilan taqqoslanadi). $0 < x \leq 1$

uchun $\ln x \leq 0$ bo'lib yaqinlashishning zaruriy alomatiga ko'ra $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\ln x}} = \infty \right)$ qator uzoqlashuvchi bo'ladi. Demak, qaralayotgan qator $x > e$ da absolyut yaqinlashadi, $1 < x \leq e$ da shartli yaqinlashadi va $0 < x \leq 1$ da uzoqlashuvchi bo'ladi.

b) D'alamber alomatini qo'llaymiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n+1} \sin \frac{x}{3^{n+1}}}{2^n \sin \frac{x}{3^n}} \right| = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x}{3^{n+1}} \cdot \frac{x}{3^n} \cdot \sin \frac{x}{3^{n+1}}}{\frac{x}{3^n} \cdot \frac{x}{3^{n+1}} \cdot \sin \frac{x}{3^{n+1}}} \right| = \frac{2}{3} < 1.$$

Topilgan limit 1 dan kichik va qator ixtiyoriy $x \in \mathbb{R}$ uchun yaqinlashadi. Demak, berilgan qatorning yaqinlashish sohasi $-\infty < x < \infty$.

Nazorat savollari

1. Funksional qatorlar nima?
2. Tekis yaqinlashuvchi funksional qatorning xossalarini ayting.
3. Funksional qatorlarni differensiallash va integrallash nima?

Foydalangan adabiyotlar:

1. G. Bauman. Mathematics for engineers I-II. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH. 2010. (pp. 115-138)
2. E. Kreyszig. Advanced Engineering Mathematics. 9 edition. (pp 697-698)
3. G‘aniev I. G‘. va boshq. Oliy matematika. Toshkent, 2013.
4. Yo.U.Soatov. Oliy matematika, 1-2 qism. 1995y.
5. C. Canuto, A. Tabacco. Mathematical Analysis I-II. Springer-Verlag Italia, Milan, 2008

6-Mavzu

Darajali qatorlar. Abel teoremasi. Darajali qatorning yaqinlashish intervali.

Reja:

1. Darajali qatorlar.
2. Abel teoremasi.
3. Darajali qatorning yaqinlashish intervali.

Tayanch so‘z va iboralar: darajali qatorlar, yaqinlashish radiusi va yaqinlashish intervali.

1. Darajali qatorlar.

Ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (1)$$

yoki umumiyroq

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots \quad (2)$$

ko‘rinishdagi qatorlar **darajali qatorlar** deyiladi.

Bunda x_0 va $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ lar o‘zgarmas sonlar bo‘lib, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ lar **darajali qatorning koeffitsientlari** deyiladi.

Agar (2) darajali qatorga $x - x_0$ ni biror o‘zgaruvchi, masalan t deyilsa ($t = x - x_0$), u holda bu qator (1) ko‘rinishidagi qatorga keladi. Shu sababli (1) ko‘rinishdagi darajali qatorlarni o‘rganish yetarli bo‘ladi.

Masalan,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (0! = 1),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

qatorlar darajali qatorlar bo'ladi.

Shuni aytish kerakki, darajali qatorlar o'z koeffitsientlari bilan to'la aniqlaydi.

1-teorema (Abel teoremasi). Agar (1) darajali qator $x = x_0 \neq 0$ da yaqinlashuvchi bo'lsa, ushbu

$$|x| < |x_0| \quad (3)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda (1) qator absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

◁ Aytaylik, $x = x_0 \neq 0$ da (1) qator yaqinlashuvchi, ya'ni

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n + \dots$$

sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsin. Qator yaqinlashishining zaruriy shartiga ko'ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0.$$

Bundan esa

$$|a_n x_0^n| \leq M \quad (M = \text{const}, n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4)$$

kelib chiqadi.

Endi (3) tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x ni olib ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n| = |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \dots + |a_n x^n| + \dots \quad (5)$$

qatorni qaraymiz. Ravshanki,

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0} \right)^n \right| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n.$$

Endi (4) munosabatidan foydalansak, hamda

$$\left| \frac{x}{x_0} \right| = q$$

($q < 1$ chunki $|x| < |x_0|$) desak, u holda

$$|a_n x^n| \leq M q^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (6)$$

kelib chiqadi.

Ma'lumki,

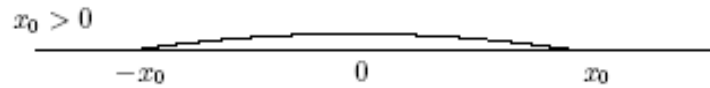
$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots \quad (q < 1)$$

geometrik qator yaqinlashuvchi. Yaqinlashuvchi qator xossasiga ko'ra

$$\sum_{n=0}^{\infty} Mq^n = M + Mq + Mq^2 + \dots + Mq^n + \dots$$

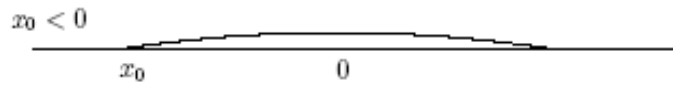
qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi. U holda (6) munosabat hamda solishtirish alomatidan foydalanib, (5) qatorning yaqinlashuvchiligini topamiz. Demak, (1) qator $(-x_0, x_0)$ da absolyut yaqinlashuvchi. $\triangleright$

Abel teoremasining sharti bajarilganda (1) qatorning yaqinlashishi nuqtalari to'plami, $x_0 > 0$ holda a) chizmada tasvirlangan:



a) chizma

(1) qatorning yaqinlashishi nuqtalari to'plami $x_0 < 0$ holda b) chizmada tasvirlangan:



b) chizma

Natija. Agar (1) darajali qator $x = x_1$ nuqtada uzoqlashuvchi, ya'ni

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n + \dots$$

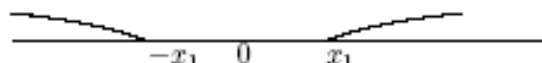
sonli qator uzoqlashuvchi bo'lsa, ushbu

$$|x| > |x_1|$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda qator uzoqlashuvchi bo'ladi.⁴

Teskarisini faraz qilaylik, qaralayotgan qator $|x| > |x_1|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi biror x^* nuqtada ($|x^*| > |x_1|$) yaqinlashuvchi bo'lsin. U holda Abel teoremasiga ko'ra $|x| < |x^*|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda, jumladan x_1 nuqtada ham yaqinlashuvchi bo'lib qoladi. Bu esa shartga zid. Demak, (1) darajali qator $|x| > |x_1|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda uzoqlashuvchi. $\triangleright$

Natijada keltirilgan darajali qatorning uzoqlashishi nuqtalari to'plami 2-chizmada tasvirlangan:



2-chizma

⁴ G. Bauman. *Mathematics for engineers I-II*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH. 2010. pp. 57-67.

2. Darajali qatorning yaqinlashish radiusi va yaqinlashish intervali.

Darajali qator

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (1)$$

ning yaqinlashishi hamda uzoqlashishi nuqtalari to'plami quyidagicha bo'lishi mumkin.

1) Har qanday darajali qator $x = 0$ nuqtada yaqinlashuvchi bo'ladi. (Chunki bu holda $S_n(0) = a_0$ bo'lib, $n \rightarrow \infty$ da chekli limitga ega.)

Shunday darajali qator borki, u faqat bitta nuqtaga yaqinlashadi. Masalan,

$$1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \dots + n!x^n + \dots$$

qator faqat $x = 0$ nuqtada yaqinlashadi. Bunday holda qatorning yaqinlashuvchi nuqtadagi to'plami bir elementli to'plamdur.

2) Shunday darajali qatorlar borki, ular ixtiyoriy $x \in (-\infty, +\infty)$ nuqtada yaqinlashuvchi bo'ladi. Masalan,

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

qator ixtiyoriy $x \in (-\infty, +\infty)$ da yaqinlashuvchi.

Bunday holda darajali qatorning yaqinlashishi nuqtalar to'plami $(-\infty, +\infty)$ bo'ladi.

3) Shunday darajali qatorlar borki, u biror $x = a$ nuqtada yaqinlashuvchi, $x = b$ nuqtada uzoqlashuvchi bo'ladi. Masalan,

$$1 + \frac{x}{2 \cdot 5} + \frac{x^2}{3 \cdot 5^2} + \frac{x^3}{4 \cdot 5^3} + \dots + \frac{x^n}{(n+1) \cdot 5^n} + \dots$$

darajali qator $x = 4$ nuqtada yaqinlashuvchi, $x = 6$ nuqtada uzoqlashuvchi.

Bunday holda, avvalo

$$|a| < |b|$$

bo'ladi. Keyin, Abel teoremasi va uning natijasiga ko'ra $|x| < |a|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda qator yaqinlashuvchi, ya'ni $(-|a|, |a|)$ intervalda qator yaqinlashuvchi; $|x| > |b|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda qator uzoqlashuvchi, ya'ni $(-\infty, -|b|) \cup (|b|, +\infty)$ to'plamda uzoqlashuvchi bo'ladi (3- chizma).



3-chizma

Endi ushbu

$$|a| < c_1 < |b|$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi c_1 sonni olaylik. Bu $x = c_1$ nuqtada (1) darajali qator quyidagi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n c_1^n = a_0 + a_1 c_1 + a_2 c_1^2 + \dots + a_n c_1^n + \dots$$

sonli qatorga aylanadi.

Agar bu sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda Abel teoremasiga ko'ra darajali qator $|x| < c_1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda yaqinlashuvchi, ya'ni darajali qator $(-c_1, c_1)$ da yaqinlashuvchi bo'ladi.

Agar sonli qator uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda natijaga ko'ra darajali qator $|x| > c_1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda uzoqlashuvchi, ya'ni $(-\infty, -c_1) \cup (c_1, +\infty)$ to'plamda uzoqlashuvchi bo'ladi.

Endi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n c_1^n$$

sonli qator yaqinlashuvchi bo'lganda c_1 bilan b sonlari orasiga, qator uzoqlashuvchi bo'lganda a bilan c_1 sonlar orasida joylashgan biror sonni olib, uni c_2 deylik. So'ng ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n c_2^n = a_0 + a_1 c_2 + a_2 c_2^2 + \dots + a_n c_2^n + \dots$$

sonli qatorni qaraymiz.

Yuqoridagi mulohazalarni takrorlab va bu jarayonni davom etirib

$$c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, \dots$$

sonlar ketma--ketligini hosil qilamiz. Bu ketma-ketlik chekli limitga ega bo'ladi. Uni r bilan belgilaymiz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = r.$$

Ravshanki, $r > 0$ bo'ladi.

Natijada (1) darajali qator $|x| < r$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda yaqinlashuvchi, $|x| > r$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda uzoqlanuvchi bo'ladi.

1-ta'rif. Yuqoridagi r son ($r > 0$) (1) darajali qatorning **yaqinlashish radiusi** deyiladi, $(-r, r)$ interval esa darajali qatorning **yaqinlashish intervali** deyiladi.

Eslatma

Agar darajali qator faqat bitta nuqtada yaqinlasuvchi bo'lsa, bu qatorning yaqinlashish radiusi $r = 0$ deb, agar darajali qator barcha $x \in (-\infty, +\infty)$ nuqtada yaqinlashuvchi bo'lsa, bu qatorning yaqinlashish radiusi $r = \infty$ deb qaraladi.

Endi darajali qatorning yaqinlashish radiusini topish imkonini beradigan teoremani keltiramiz.

1-teorema Aytaylik (1) darajali qator berilgan bo'lsin. Bu qator uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$$

bo'lib, L – chekli son, $L \neq 0$ bo'lsa, u holda darajali qatorning yaqinlashish radiusi

$$r = \frac{1}{L}$$

bo'ladi.⁵

◁ (1) qator hadlarning absolyut qiymatidan tuzilgan ushbu

$$|a_0| + |a_1||x| + |a_2||x|^2 + \dots + |a_n||x^n| + \dots \quad (2)$$

qatorni olib, unga Dalmber alomatini qo'llaymiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| = L|x|.$$

Ravshanki, (2) qator $L|x| < 1$ ya'ni

$$|x| < \frac{1}{L}$$

da yaqinlashuvchi, (2) qator $L|x| > 1$, ya'ni

$$|x| > \frac{1}{L}$$

da uzoqlashuvchi bo'ladi. Demak, (1) qator $|x| < \frac{1}{L}$ da yaqinlashuvchi, $|x| > \frac{1}{L}$ da

uzoqlashuvchi bo'lib, undan (1) qatorning yaqinlashish radiusi $r = \frac{1}{L}$ ekanligi kelib chiqadi. ▷

Eslatma. (1) darajali qator $x = r$, $x = -r$ nuqtalarda yaqinlashuvchi bo'lishi ham mumkin, uzoqlashuvchi bo'lishi ham mumkin. Uni qo'shimcha tekshirish bilan aniqlanadi.

Misol. Ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots$$

darajali qatorning yaqinlashish radiusi va yaqinlashish intervali topilsin.

◁ Ravshanki,

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1}, \quad a_{n+2} = \frac{1}{n+2}$$

bo'lib,

⁵ G. Bauman. *Mathematics for engineers I-II*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH. 2010. pp. 60-63.

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = 1$$

bo'ladi. Demak berilgan darajali qatorning yaqinlashish radiusi $r=1$, yaqinlashish integvali $(-1,1)$.

Agar $x=1$ bo'lsa, berilgan qator ushbu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

ko'rinishida bo'lib, u (garmonik qator bo'lgani uchun) uzoqlashuvchi bo'ladi.

Agar $x=-1$ bo'lsa, berilgan qator ushbu

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n} + \dots$$

ko'rinishda bo'lib, u (Leybnits teoremasiga ko'ra) yaqinlashuvchi bo'ladi.

Demak, berilgan darajali qatorning yaqinlanish sohasi $[-1,1)$. $\triangleright$

1-misol. Quyidagi qatorlar uchun yaqinlashish oralig'i topilsin:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}; \quad & \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}; \quad & \text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{3^n (n+1) \sqrt{n+1}}; \\ \text{d) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5}{(n+1)!} (x+5)^{2n+1}; \quad & \text{e) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{5^n \cdot n}. \end{aligned}$$

Yechish. a) Dalamber alomatidan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}; \quad a_{n+1} = \frac{(n+2)^5 x^{2n+2}}{2n+3}; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x^{2n+2}|}{|x^{2n}|} \cdot \frac{(n+2)^5 (2n+1)}{(2n+3)(n+1)^5} = x^2. \end{aligned}$$

Endi qachon topilgan limit 1 dan kichik bo'lishini aniqlaymiz:

$x^2 < 1$, bundan $-1 < x < 1$ kelib chiqadi. Bu oraliqda qator absolyut yaqinlashadi. $|x| > 1$ bo'lganda qator uzoqlashadi. $x = \pm 1$ chegaraviy nuqtalarda yaqinlashishga alohida tekshiramiz.

$$x = -1 \text{ bo'lsin. U holda } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1} \text{ qatorga ega bo'lamiz. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1} = \infty,$$

yaqinlashishining zaruriy sharti bajarilmagan, shuning uchun qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

$x=1$ bo'lganda xuddi shunday uzoqlashuvchi qatorga ega bo'lamiz. Demak, berilgan qator $(-1;1)$ oraliqda yaqinlashadi.

b) Berilgan qatorni yaqinlashishga tekshirish uchun Dalamber alomatidan foydalanamiz:

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}; \quad a_{n+1} = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \cdot \frac{n}{n+1} \right| = |x|$$

va bu limit qachon 1 dan kichik bo'lishini aniqlaymiz: $|x| < 1$; $-1 < x < 1$. Bu oraliqda qator absolyut yaqinlashadi.

$x=1$ da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ qatorga ega bo'lamiz. Bu qator Leybnits teoremasiga ko'ra yaqinlashadi.

$x=-1$ bo'lsin. U holda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n}$ uzoqlashuvchi garmonik qatorga ega bo'lamiz (bu qatorning hamma hadlari manfiy). Demak, qatorning yaqinlashish sohasi $-1 < x \leq 1$ oraliq bo'ladi.

c) Dalamber alomatini qo'llaymiz:

$$a_n = \frac{(-1)^n x^{2n}}{3^n (n+1) \sqrt{n+1}}; \quad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{3^{n+1} (n+2) \sqrt{n+2}};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{x^2}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \sqrt{n+1}}{(n+2) \sqrt{n+2}} = \frac{x^2}{3}.$$

Qaralayotgan qator $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ oraliqda absolyut yaqinlashadi. $x = \pm\sqrt{3}$ chegaraviy nuqtalarida $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) \sqrt{n+1}}$ qatorga ega bo'lamiz. Bu qator Leybnits teoremasiga ko'ra yaqinlashadi. Shuning uchun berilgan qatorning yaqinlashish oralig'i $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$.

d) Dalamber alomatiga ko'ra,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^5}{(n+2)!} \frac{|x+5|^{2n+3} (n+1)!}{n^5 |x+5|^{2n+1}} = (x+5)^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = 0 < 1.$$

Berilgan qator har qanday x uchun yaqinlashadi, demak, qatorning yaqinlashish oralig'i $-\infty < x < \infty$ (barcha sonlar o'qidan iborat) bo'ladi.

e) Dalamber alomatiga ko'ra,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-3)^{n+1} \cdot n \cdot 5^n}{(n+1) \cdot 5^{n+1} \cdot (x-3)^n} \right| = \frac{|x-3|}{5} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{|x-3|}{5}.$$

$\frac{|x-3|}{5} < 1$ yoki $-5 < x-3 < 5$ da qator yaqinlashadi, bundan qatorning yaqinlashish oralig'i $-2 < x < 8$ ni hosil qilamiz.

Endi qatorni chegaraviy nuqtalarda yaqinlashishga tekshiramiz. $x=8$ da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

uzoqlashuvchi qatorga ega bo'lamiz. $x=-2$ da qator $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ko'rinishda bo'lib,

Leybnits teoremasiga ko'ra yaqinlashuvchi bo'ladi. Demak, qaralayotgan qatorning yaqinlashish oralig'i quyidagicha: $-2 \leq x < 8$.

Anglash qiyin emaski, darajali qator o'zining $(-R; R)$ yaqinlashish sohasida x o'zgaruvining

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

funksiyasini aniqlaydi.

Bu $f(x)$ funksiya $(-R; R)$ yaqinlashish sohasida uzluksiz bo'lib, istalgan tartibli uzluksiz hosilalarga egadir. Shu bilan birga $f'(x)$ hosila yuqoridagi qator hadlarining hosilalari yig'indisiga tengdir, ya'ni

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}.$$

Xuddi shuningdek,

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} \quad f'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}$$

va hakazo.

Bu xossa, odatda «darajali qatorni hadma-had differensiallash» xossasi deb yuritiladi.

Shu kabi «Darajali qator yig'indisining integrali, qator hadlari integrallarining yig'indisiga tengdir» mazmundagi xossa ham o'rinalidir.

Ya'ni $(-R; R)$ oraliqdan olingan har qanday x uchun

$$\int f(x)dx = C + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2x^3}{3} + \dots + \frac{a_nx^{n+1}}{n+1} + \dots$$

$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ funksiya qatorning yig'indisi deyiladi, bunda

$$S_n(x) = a_1(x) + a_2(x) + \dots + a_n(x).$$

Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham faqat ε ga bog'liq shunday natural n_0 son topilsaki, barcha $n > n_0$ lar va barcha $x \in [a, b]$ uchun

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \quad (3)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda (1) funksional qator $[a, b]$ da $S(x)$ funksiyaga *tekis yaqinlashadi* deyiladi.⁶

$$S_n(x) = a_1(x) + a_2(x) + \dots + a_n(x)$$

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

$$S'(x) = u'_1(x) + u'_2(x) + u'_3(x) + \dots + u'_n(x) + \dots$$

$$\int S(x)dx = \int u_1(x)dx + \int u_2(x)dx + \int u_3(x)dx + \dots + \int u_n(x)dx + \dots$$

Nazorat savollari

1. Darajali qatorlar nima?
2. Abel teoremasi nima?
3. Darajali qatorning yaqinlashish intervali nima?

Foydalangan adabiyotlar

1. G. Bauman. Mathematics for engineers I-II. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH. 2010. (pp. 57-67)
2. G'aniev I. G'. va boshq. Oliy matematika. Toshkent, 2013.
3. Yo.U.Soatov. Oliy matematika, 1-2 qism. 1995y.
4. C. Canuto, A. Tabacco. Mathematical Analysis I-II. Springer-Verlag Italia, Milan, 2008.

7-Mavzu

Taylor qatori. Asosiy tushunchalar. Ba'zi funksiyalarni Taylor qatorlariga yoyish.

Reja:

1. Taylor qatori. Asosiy tushunchalar.
2. Ba'zi funksiyalarni Taylor qatorlariga yoyish.
3. Qatorlar yordamida aniq integralni hisoblash.

Tayanch so'z va iboralar: Taylor qatori, Makloren qatori, qatorlarga yoyish, qatorlar yordamida aniq integralni hisoblash.

Funksiyaning Taylor qatori.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $x_0 \in R$ nuqtaning biror

$$U_\delta(x_0) = \{x \in R : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta; \delta > 0\}$$

atrofida istalgan tartibdagi hosilaga ega bo'lsin. Bu hol $f(x)$ funksiyaning Taylor formulasini yozish imkonini beradi:

⁶ G. Bauman. Mathematics for engineers I-II. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH. 2010. pp. 63-67.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x),$$

bunda $r_n(x)$ - qoldiq had.

Modomiki, $f(x)$ funksiya $U_\delta(x_0)$ da istalgan tartibdagi hosilaga ega ekan, unda

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots \quad (1)$$

darajali qatorni qarash mumkin bo'ladi.

(1) darajali qatorning koeffitsientlari sonlar bo'lib, ular $f(x)$ funksiya va uning hosilalarining x_0 nuqtadagi qiymatlari orqali ifodalangan.

(1) darajali qator $f(x)$ funksiyaning Teylor qatori deyiladi.

Xususan, $x_0 = 0$ bo'lganda (1) darajali qator ushbu

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

ko'rinishga keladi.⁷

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya biror $(-r, r)$ da ($r > 0$) istalgan tartibdagi hosilaga ega bo'lib, uning $x_0 = 0$ nuqtadagi Teylor qatori

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (2)$$

bo'lsin. Bu qatorning qoldiq hadini $r_n(x)$ deylik:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x).$$

1-teorema. (2) darajali qator $(-r, r)$ da $f(x)$ ga yaqinlashishi uchun ushbu

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x)$$

Teylor formulasida, $\forall x \in (-r, r)$ uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$$

bo'lishi zarur va yetarli.

◀ **Zarurligi.** Aytaylik, (2) darajali qator $(-r, r)$ da yaqinlashuvchi, yig'indisi $f(x)$ bo'lsin. Ta'rifga binoan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x), \quad (x \in (-r, r))$$

bo'ladi, bunda

$$S_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

⁷ G. Bauman. *Mathematics for engineers I-II*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH. 2010. pp. 56-60.

Ravshanki, $\forall x \in (-r, r)$ da $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$ bo'lishidan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - S_n(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Yetarliligi. Aytaylik, $\forall x \in (-r, r)$ da $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ bo'lsin. U holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - S_n(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$$

bo'lib, undan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

bo'ladi. ►

Odatda, bu munosabat o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya Teylor qatoriga yoyilgan deyiladi.⁸

Funksiyani Teylor qatoriga yoyish.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya biror $(-r, r)$ da istalgan tartibdagi hosilalarga ega bo'lsin.

2-teorema. Agar $\exists M > 0$, $\forall x \in (-r, r)$, $\forall n \geq 0$ da

$$|f^{(n)}(x)| \leq M$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya $(-r, r)$ da Teylor qatoriga yoyiladi:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (3)$$

◀ Ma'lumki, $f(x)$ funksiyani Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi quyidagicha bo'ladi:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x),$$

bunda,

$$r_n(x) = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}. \quad (0 < \theta < 1). \quad ([3] \text{ 724-738 b. })$$

Teoremaning shartidan foydalanib topamiz:

$$|r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq M \cdot \frac{r^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (x \in (-r, r)).$$

Ravshanki,

⁸ C. Canuto, A. Tabacco. *Mathematical Analysis II*. Springer-Verlag Italia, Milan 2008, pp 55-58.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Demak, $\forall x \in (-r, r)$ da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$$

bo'lib, undan qaralayotgan $f(x)$ funksiyaning Teylor qatoriga yoyilishi kelib chiqadi. ►⁹

Elementar funksiyalarni Teylor qatoriga yoyish.¹⁰

b) Ko'rsatkichli va giperbolik funksiyalarni Teylor qatorlarini topamiz. Aytaylik,

$$f(x) = e^x$$

bo'lsin. Ravshanki, $f(0) = 1, f^{(n)}(0) = 1 \quad n \in \mathbb{N}$ bo'lib, $\forall x \in (-\alpha, \alpha)$ da ($\alpha > 0$)

$$0 < f(x) < e^\alpha, \quad 0 < f^{(n)}(x) < e^\alpha$$

bo'ladi. Binobarin, 2-teoremaga ko'ra $f(x) = e^x$ funksiya $(-\alpha, \alpha)$ da Teylor qatoriga yoyiladi va (3) formuladan foydalanib topamiz:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (0! = 1) \quad (4)$$

$\alpha > 0$ ixtiyoriy musbat son. Demak, (4) darajali qatorning yaqinlashish radiusi $r = +\infty$ bo'ladi.

(4) munosabatda x ni $-x$ ga almashtirib topamiz:

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Ma'lumki giperbolik sinus hamda giperbolik kosinus funksiyalari quyidagicha

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

ta'riflanar edi.

Yuqoridagi

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots$$

formulalardan foydalanib topamiz:

$$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

⁹ C. Canuto, A. Tabacco. *Mathematical Analysis II*. Springer-Verlag Italia, Milan 2008, pp 57-58.

¹⁰ J. Stewart *Calculus sixth edition* 2008. USA 724-743.

Bu $\sin x$, $\cos x$ funksiyalarining Teylor qatorlari bo'lib, ular ifodalangan darajali qatorlarning yaqinlashish radiuslari $r = +\infty$ bo'ladi.

b) Trigonometrik funksiyalarning Teylor qatorlarini topamiz. Aytaylik, $f(x) = \sin x$ bo'lsin. Ravshanki, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ da

$$|f(x)| \leq 1, \quad |f^{(n)}(x)| \leq 1$$

bo'lib, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f^{(2n)}(0) = 0$, $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$ ($n \in \mathbb{N}$) bo'ladi. Demak, 2-teoremaga ko'ra $f(x) = \sin x$ funksiya Teylor qatoriga yoyiladi va (3) formulaga binoan

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \dots \quad (5)$$

bo'ladi.

Aytaylik,

$$f(x) = \cos x$$

bo'lsin. Bu funksiya uchun $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ da

$$|f(x)| \leq 1, \quad |f^{(n)}(x)| \leq 1$$

bo'lib,

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f^{(2n)}(0) = (-1)^n, \quad f^{(2n+1)}(0) = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

bo'ladi. Unda 2-teoremaga ko'ra $f(x) = \cos x$ funksiya Teylor qatoriga yoyiladi va (3) formulaga binoan

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \dots \quad (6)$$

bo'ladi. (5) va (6) darajali qatorlarning yaqinlashish radiusi $r = +\infty$ bo'ladi.

c) Logarifmik funksiyaning Teylor qatorini topamiz. Aytaylik,

$$f(x) = \ln(1+x)$$

bo'lsin. Ma'lumki,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x)^n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

bo'lib,

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

bo'ladi. Bu funksiyaning Teylor formulasi

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + r_n(x) \quad (7)$$

ko'rinishga ega.

$f(x) = \ln(1+x)$ funksiyaning Teylor qatoriga yoyishda 1-teoremadan foydalanamiz. Buning uchun (7) formulada $r_n(x)$ ning 0 ga intilishini ko'rsatish yetarli bo'ladi.

Aytaylik, $x \in [0,1]$ bo'lsin. Bu holda Lagranj ko'rinishida yozilgan

$$r_n(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \quad (0 < \theta < 1)$$

qoldiq had uchun

$$|r_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$$

bo'ladi va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$$

tenglik bajariladi.

Aytaylik, $x \in [-\alpha, 0]$ bo'lsin, bunda $0 < \alpha < 1$.

Bu holda Koshi ko'rinishida yozilgan

$$r_n(x) = \frac{(-1)^n (1-\theta_1)^n \cdot x^{n+1}}{(1+\theta_1 x)^{n+1}} \quad (0 < \theta_1 < 1)$$

qoldiq had uchun

$$|r_n(x)| \leq \frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

bo'lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$$

bo'ladi.

Demak, $\forall x \in (-1, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0.$$

Unda 1-teoremaga ko'ra

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (8)$$

bo'ladi.

(8) darajali qatorning yaqinlashish radiusi $r = 1$ ga teng.

Agar yuqoridagi $\ln(1+x)$ ning yoyilmasida x ni $-x$ ga almashtirilsa, unda

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots$$

formula kelib chiqadi.¹¹

g) Darajali funksiyaning Teylor qatorini topamiz.

Aytaylik,

$$f(x) = (1+x)^\alpha \quad (\alpha \in R)$$

bo'lsin. Ma'lumki,

¹¹ J. Stewart Calculus sixth edition 2008. USA 738-740.

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \quad (n \in N)$$

bo'lib,

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)$$

bo'ladi. Bu funksiyaning Teylor formulasi ushbu

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + r_n(x)$$

ko'rinishga ega.

Endi $n \rightarrow \infty$ da $r_n(x) \rightarrow 0$ bo'lishini ko'rsatamiz.

Ma'lumki, Teylor formulasidagi qoldiq hadning Koshi ko'rinishi quyidagicha

$$r_n(x) = \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots[(\alpha-1)-(n-1)]}{n!} x^n \alpha \cdot x(1+\theta x)^{\alpha-1} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n$$

($0 < \theta < 1$) bo'lar edi.

Aytaylik, $x \in (-1, 1)$ bo'lsin. Bu holda:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} (\alpha-1)(\alpha-2)\dots[(\alpha-1)-(n-1)] x^n = 0 \quad \text{bo'ladi, chunki, limit ishorasi}$$

ostidagi ifoda yaqinlashuvchi ushbu

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

qatorning umumiy hadi;

$$2) |\alpha \cdot x| (1-|x|)^{\alpha-1} < \alpha \cdot x (1+\theta x)^{\alpha-1} < |\alpha \cdot x| (1+|x|)^{\alpha-1};$$

$$3) \left| \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right|^n \leq \left| \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right| < 1$$

bo'ladi. Bu munosabatlardan foydalanib, $\forall x \in (-1, 1)$ da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$$

bo'lishini topamiz. 1-teoremaga ko'ra

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad (9)$$

bo'ladi.

Bu darajali qatorning yaqinlashish radiusi $\alpha \neq 0$, $\alpha \notin N$ bo'lganda 1 ga teng: $r = 1$.

(9) munosabatda $\alpha = -1$ deb olinsa, unda ushbu

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

formula hosil bo'ladi. Bu formulada x ni $-x$ ga almashtirib topamiz:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

1-misol. Ushbu $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ funksiya Teylor qatoriga yoyilsin.

◀Ma'lumki,

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

bo'ladi.

Biz yuqorida

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots$$

bo'lishini ko'rgan edik. Bu munosabatlardan foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned} \ln(1+x) - \ln(1-x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \\ &\quad - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots \right) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \dots + \frac{2x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \end{aligned}$$

Demak,

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \right) \quad (10)$$

(10) darajali qatorning yaqinlashish radiusi $r=1$ bo'lib, yaqinlashish to'plami $(-1,1)$ bo'ladi. ▶

2-misol. Ushbu $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ funksiya Teylor qatoriga yoyilsin.¹²

◀Ma'lumki,

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

Unda

$$\frac{\sin t}{t} = 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^{2n-2}}{(2n-1)!} + \dots$$

bo'ladi. Bu darajali qatorni hadlab integrallab topamiz:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt &= \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^{2n-2}}{(2n-1)!} + \dots \right) dt = \\ &= x - \frac{x^3}{3! \cdot 3} + \frac{x^5}{5! \cdot 5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)! \cdot (2n-1)} + \dots \end{aligned}$$

Keyingi darajali qatorning yaqinlashish radiusi $r = +\infty$ bo'ladi. ▶

¹² C. Canuto, A. Tabacco. *Mathematical Analysis II*. Springer-Verlag Italia, Milan 2008, pp 66-73.

3-misol. Ushbu $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+x-6}$ funksiya Teylor qatoriga yoyilsin va bu qatorning yaqinlashish radiusi topilsin.

◀ Avvalo $f(x)$ funksiyani quyidagicha yozib olamiz:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2+x-6} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3} = \frac{1}{2\left(1+\frac{1}{2}x\right)} - \frac{1}{3\left(1-\frac{1}{3}x\right)}$$

Ma'lumki,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n,$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Bu formulalardan foydalanib topamiz:

$$\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{2}x\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n, \quad (r=2)$$

$$\frac{1}{3\left(1-\frac{1}{3}x\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}x\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} x^n \quad (r=3)$$

Demak,

$$\frac{2x-1}{x^2+x-6} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) x^n$$

bo'ladi.

Bu darajali qatorning yaqinlashish radiusi $r=2$ bo'ladi. ►

4-misol. Quyidagi funksiyalarni Makloren qatoriga yoying:

a) $\frac{x}{\sqrt{1+x}}$; b) $\frac{2x}{x^2-4x+3}$.

Yechish. a) Berilgan funksiyani $x(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ ko'paytmaga keltirib, $m = -\frac{1}{2}$ deb binomial qatoridan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} x(1+x)^{-\frac{1}{2}} &= x \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1!} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{2!} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{(2n-1)!! x^n}{2^n n!} + \dots \right) = \\ &= x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{1!} + \frac{3}{2^2} \cdot \frac{x^3}{2!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3} \cdot \frac{x^4}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{(2n-1)!! x^{n+1}}{2^n n!} + \dots \end{aligned}$$

b) $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) = (3-x)(1-x)$ ni e'tiborga olib,

$$\frac{2x}{x^2 - 4x + 3} = 2x(3-x)^{-1}(1-x)^{-1} = 6x\left(1 - \frac{x}{3}\right)^{-1} (1-x)^{-1}$$

ifodaga ega bo'lamiz. Endi (9) yoyilishidan foydalanib,

$$\begin{aligned} 6x\left(1 - \frac{x}{3}\right)^{-1} (1-x)^{-1} &= 6x \cdot \left(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} + \dots\right) \left(1 + x + x^2 + \dots\right) = \\ &= 6x \left(1 + \frac{4x}{3} + \frac{10x^2}{9} + \frac{28x^3}{27} + \dots + \frac{(3^n - 1)x^n}{3^n} + \dots\right) = 6x + \frac{8x^2}{3} + \frac{20x^3}{9} + \dots + \frac{2(3^n - 1)x^{n+1}}{3^{n-1}} + \dots \end{aligned}$$

ni hosil qilamiz.

Nazorat savollari

1. Teylor qatori. Asosiy tushunchalar.
2. Ba'zi funksiyalarni Teylor qatorlariga yoyish.
3. Teylor qatori deb nimaga aytiladi? Qanday shartlar bajarilganda u berilgan funktsiyaga yaqinlashadi?
4. $(x-a)$ ning darajalari bo'yicha yozilgan qator haqida tushuncha bering.

Foydalangan adabiyotlar:

1. G.Baumann. Mathematics for engineers I-II. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH. 2010. pp 56-60.
2. C. Canuto, A. Tabacco. Mathematical Analysis II. Springer-Verlag Italia, Milan 2008, pp 55-58, 66-73.
3. J. Stewart Calculus sixth edition 2008.USA 724-743.

Mustaqil bajarish uchun mashqlar

1-variant

1. Qatorning yaqinlashuvchanligini isbot qiling va yig'indisini toping.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{12^n}$

2. Qatorning yaqinlashishini tekshiring.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \lg \frac{1}{\sqrt{n}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 2}}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$

3. Qator yaqinlashishini Dalamber alomati yordamida tekshiring.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(n^2 - 1)}{n!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(n+2)!}{n^5}$

4. Qator yaqinlashishini Koshi alomati yordamida tekshiring.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n-1} \right)^{n^2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{\left(\frac{n+1}{n} \right)^n}$

5. Qator yaqinlashishini Koshining integral alomati yordamida tekshiring: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{4n^2+1} \right)^2$

6. Ishoralari navbatlashuvchi qatorning shartli yoki absolyut yaqinlashishini tekshiring.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1) \cdot 3^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^3}$

7. Qatorning yaqinlashish sohasini toping.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{n}{3}}}{n!} x^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2 + 1}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n^n}$

8. Berilgan $f(x)$ funksiyani Maklerson qatoriga yoying: $f(x) = \cos 5x$

2-variant

1. Qatorning yaqinlashuvchanligini isbot qiling va yig'indisini toping.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1 \ln n + 30}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

2. Qatorning yaqinlashishini tekshiring.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5 + 2}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$

3. Qator yaqinlashishini Dalamber alomati yordamida tekshiring.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{3^n \cdot (n+1)!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n-1}{5^n(n+1)!}$

4. Qator yaqinlashishini Koshi alomati yordamida tekshiring.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1} \right)^{n^2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-1}{5n} \right)^{n^2}$

5. Qator yaqinlashishini Koshining integral alomati yordamida tekshiring: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2) \ln(3n+2)}$

6. Ishoralari navbatlashuvchi qatorning shartli yoki absolyut yaqinlashishini tekshiring.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)!}$

7. Qatorning yaqinlashish sohasini toping.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{2^{n-1} \cdot 3^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n!} x^n$

8. Berilgan $f(x)$ funksiyani Maklerson qatoriga yoying: $f(x) = x^3 \arctg x$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. G. Baumann Mathematics for engineers I-II. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH. 2010.
2. C. Canuto, A. Tabacco. Mathematical Analysis I-II. Springer-Verlag Italia, Milan, 2008.
3. Gʻaniev I. Gʻ. va boshq. Oliy matematika. Toshkent, 2013.
4. Yo.U.Soatov. Oliy matematika, 1-2 qism. 1995 y.
5. J. Stewart. Calculus sixth edition. 2008.USA.
6. E. Kreyszig. Advanced Engineering Mathematics. 9 edition.
7. V.P.Minorskiy. Oliy matematikadan masalalar topʻlami. Toshkent-1977.

MUNDARIJA

	Kirish	3
1-mavzu	Sonli qatorlar. Asosiy tushunchalar. Qatorning yig'indisi. Qatorning yaqinlashishi. Qator yaqinlashishining zaruriy sharti	4
2-mavzu	Musbat hadli sonli qatorlarni yaqinlashishga tekshirishning solishtirish alomatlar.	12
3-mavzu	Musbat hadli sonli qatorlar va ular yaqinlashishining yetarli shartlari. Dalamber, Koshi va integral alomatlar.	16
4-mavzu	Ishoralari o'zgaruvchi bo'lgan sonli qatorlar. Leybnits teoremasi. Absolyut va shartli yaqinlashuvchi qatorlar.	24
5-mavzu	Funksional qatorlar. Asosiy tushunchalar. Majoratlanuvchi qatorlar. Funksional qator yig'indisining uzluksizligi. Funksional qatorlarni differensiallash va integrallash.	30
6-mavzu	Darajali qatorlar. Abel teoremasi. Darajali qatorning yaqinlashish intervali.	38
7-mavzu	Taylor qatori. Asosiy tushunchalar. Ba'zi funksiyalarni Taylor qatorlariga yoyish.	47
	Mustaqil ishdan namunalar	57
	Foydalanilgan adabiyotlar	58
	Mundarija	59

