ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.3/30.12.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

СОЛЕЕВА НИГИНА АХМАДЖОНОВНА

ГАУСС ЭГРИЛИГИ ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ НОЛГА ЭГА БЎЛГАН $\mathbb{R}^3$ ФАЗОДАГИ ГИПЕРСИРТЛАРНИНГ ЛАГРАНЖ МАХСУСЛИКЛАРИ.

01.01.04 – Геометрия ва топология

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2021 йил

УДК: 517.518.5+514.752

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата докторской диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.3/30.12.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

СОЛЕЕВА НИГИНА АХМАДЖОНОВНА

ГАУСС ЭГРИЛИГИ ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ НОЛГА ЭГА БЎЛГАН $\mathbb{R}^3$ ФАЗОДАГИ ГИПЕРСИРТЛАРНИНГ ЛАГРАНЖ МАХСУСЛИКЛАРИ.

01.01.04 – Геометрия ва топология

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2021 йил

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2019.3.PhD/FM401 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Самарқанд Давлат Университети ва В.И. Романовский номидаги математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз(резюме)) Илмий кенгаш веб - саҳифаси (http://ik-fizmat.nuu.uz/) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим парталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Икромов Исроил Акрамович** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Нарманов Абдигаппар Якубович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Жаббаров Гайратбай Фархадович физика-математика фанлари номзоди, доцент
Етакчи ташкилот:	**“ММФИ” миллий тадқиқот ядро университети Тошкент шахридаги филиали**

Диссертация ҳимояси Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc.3/30.12.2019.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2021 йил «26» август соат 14:00 даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4 - уй. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Диссертация автореферати 2021 йил «____» _______________куни тарқатилди.
(2021 йил «____» ___________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

А. Садуллаев
Илмий даражалар берувчи
илмий кенгаш раиси,
ф.-м.ф.д., академик

Н.К. Мамадалиев
Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш илмий котиби,
ф.-м.ф.ф.д. (PhD)

Р.Б. Бешимов
Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш ҳузуридаги илмий семинар
раиси, ф.-м.ф.д.

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар, кўпинча ясовчи деб аталадиган функция ёрдамида аниқланадиган лагранж акслантиришларини тадқиқ қилишга олиб келади. Бу функциялар лагранж махсусликлар деб номланадиган махсусликларга эга. Математиканинг амалий масалаларини ҳал қилиш учун силлиқ акслантиришлар, функциялар ва функциялар оиласининг классификацияси назарияси яратилган. Хусусан, кўпинча математиканинг татбиқларида Гausснинг сферик ёки нормал акслантиришларининг махсусликларини ўрганиш зарурати пайдо бўлади. Бу махсусликлар кўп ҳолларда амалий масалаларни ҳал қилишда юзага келади. Шунинг учун гиперсиртларнинг лагранж махсусликларини классификация қилиш геометрия ва топологияда катта аҳамиятга эга.

Жаҳонда фаза функциялари деб аталадиган функцияларнинг евклид фазоларидаги сиртлар билан боғланган ва уларга мос лагранж акслантиришларининг ясовчи функциялари оиласини ўрганиш бўйича илмий изланишлар олиб борилмоқда. Умумий ҳолатдаги акслантиришлар махсусликлари учун Арнольд классификацияси мавжуд. Бу ҳолларда критик нуқталар чекли карраликларга эга ва шунинг учун улар яккалангандир. Аммо шундай махсусликлар учрайдики, улар умумий ҳолатда бўлмайди ва бу махсусликлар яккаланмаган ҳоллар учрайди. Дискрет Шредингер операторига мос дисперсион муносабатлар сатҳ сирти қавариқ бўлмайди ва унинг гаусс эгрилиги баъзи нуқталарда нолга айланади. Л.Эрдош ва М.Салмхофер гаусс эгрилиги биринчи тартибли нолга эга бўлган ҳолни аниқлашган, бундан ташқари бир қанча илмий ишларда геометриянинг классик масалаларини қўйиш ва ечишга алоҳида эътибор берилмоқда.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий татбиқига эга бўлган геометрия ва топологиянинг долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, сўнгги йилларда қавариқ бўлмаган гиперсиртлар билан боғлиқ лагранж махсусликларини ўрганишда салмоқли натижаларга эришилди. Дисперсион муносабатларнинг сатҳ сиртида гаусс эгрилиги иккинчи тартибли ва ундан юқори нолларга эга бўладиган нуқталари ҳам учрайди. “Функционал анализ, геометрия ва топология” фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Шунинг учун, лагранж акслантиришларига мос ясовчи функцияларнинг махсусликларини классификация килиш муҳим ҳамда мавжуд классификацияларни янада ривожлантириш жиддий аҳамиятга молик масала ҳисобланади.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича

---

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамаси 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори.

Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони, 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги Қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Диссертация республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Лагранж махсусликларининг таснифи Х.Уитнининг классик ишидан бошланади. Бундан ташқари, Дж.Мозер, Дж.Мартинет, В.И.Арнольд, Дж.Дж.Дюстермаат, В.Мальгранж ва бошқаларнинг ишларида ушбу масалани ўрганишган. Классик ишларда асосан умумий холатдаги махсусликлар ўрганилган, лекин маълум таснифлар рўйхатларида учрамайдиган функция махсусликлари пайдо бўлган. Шундай масалалардан бири дискрет Шредингер операторининг дисперсион муносабатларига мос сатҳ сиртларида пайдо бўладиган лагранж махсусликлари билан богланган муаммоларни ўрганишга бағишланган.

Г.А.Хасанов 1997 йилда мувофиқлашган координаталар системасини қуриш мумкин бўлган силлиқ функциялар учун функционал тенглама топган ҳамда А.Н.Варченко натижасининг муҳим аналогини исботлаган. Унинг исботлаш усули А.Н.Варченко усулидан анча фарқ қилган. А.Н.Варченконинг исботи аналитик функциянинг махсусликларини ечиш тўғрисидаги Хиронаки теоремасига асосланган эди. Кейинчалик, 1999 йилда америкалик математиклар Д.Х.Фонг, Е.М.Стейн ва Дж.Штурмлар томонидан ихтиёрий аналитик функциялар учун шунга ўхшаш натижа, аниқроғи аналитик функциялар илдизларининг Пюзо қаторига асосланган исботи топилган. Г.Хасанов теоремасининг янада конструктив исботи 2011 йилда И.А.Икромов ва Д.Мюллерлар томонидан берилган. Бугунги кунда немис олимлари М. Круил ва М. Бернулолар функциянинг нормал шаклини топиш учун бир нечта компьютер дастурларини яратдилар. Аммо умумий ҳолатда функцияларни нормал шаклга келтириш қийин муаммо ҳисобланади. Шунинг учун В.И.Арнольд томонидан мувофиқлашган координаталар системасида қурилган фаза функциясининг Ньютон кўпёқлиги орқали тебранувчан интегралларнинг асимптотик ёйилмасининг асосий қисмини топиш масаласи қўйилган ҳамда бундай масалаларни ўрганишга бағишланган кўплаб мақолалар мавжуд.

Кўпгина ишларда критик нуқталарга эга бўлган функцияларнинг махсусликлари ўрганилган. Х.Уитни, Р.Том, Дж.Мозер, В.И.Арнольд, В.Мальгранжларнинг илмий ишларида силлиқ акслантиришларнинг махсусликлари ўрганилган. Ана шундай акслантиришларнинг муҳим синфларидан бири лагранж акслантиришларидан иборат бўлиб, умумий ҳолат учун ва $n \leq 10$ ўлчовли фазоларда лагранж махсусликларининг тўлиқ классификацияси мавжуд. Функцияларнинг махсусликларини ўрганишда ва тригонометрик интегралларни тадқиқ қилишда мувофиқлашган координаталар системаси муҳим аҳамиятга эга. Маълумки, лагранж акслантиришлари симплектик кўпхилликлардаги лагранж қисм кўпхилликларининг проекциялари билан аниқланади. Шундай кўпхилликларни ва уларга мос акслантиришларни тадқиқ қилиш симплектик геометриянинг муҳим масалаларидир. Бу масалалар Дж. Дюстермат, Л.Хермандер, Мелроуз, Гиеман, Вейнстейн, В.И. Арнольд, Ошм, Тейлор ва бошқаларнинг ишларида ўрганилган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Самарқанд давлат университетида олиб борилган Ф-4-17 "Чизиқли бўлмаган алгебраик ва дифференциал тенгламалар системаларини тадқиқ қилишнинг янги методларини ишлаб чиқиш, тебранувчи интеграллар ва уларнинг татбиқлари" мавзусидаги лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади мувофиқлашган координаталар системасини топиш алгоритмини қуриш, лагранж махсусликларини ва параметрлардан боғлиқ бўлган фаза функциясининг махсусликларини чизикли группаларга нисбатан классификациясини топишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

мувофиқлашган координаталар системаси қуришнинг чекли алгоритмини топиш мумкин бўлган функциялар синфини аниқлаш;

рационал сонлар майдони кенгайтмалари устидаги формал қаторлар учун умумлашган мувофиқлашган координаталар системасини топиш;

гаусс эгрилиги иккинчи тартибли нолга эга бўлган қавариқ бўлмаган икки ўлчовли сиртларнинг лагранж махсусликларини чизикли акслантиришларга нисбатан классификациялаш;

Арнольднинг D типига мос бўлган лагранж махсусликларини аниқлаш;

уч ўлчовли евклид фазосининг қавариқ бўлмаган сиртларида мужассамлашган силлиқ ўлчовларнинг Фурье алмаштиришлари йиғилиш кўрсаткичини аниқлаш.

Тадқиқотнинг объекти сифатида фаза функциялари, лагранж акслантиришлари, силлиқ гиперсиртлар, тебранувчан интеграллар, сиртларда мужассамлашган ўлчовларнинг Фурье алмаштиришлари олинган.

Тадқиқотнинг предмети фаза функциялари ва лагранж акслантиришларининг махсусликлари, гиперсиртларда мужассамлашган силлиқ борел ўлчовларининг Фурье алмаштиришларининг чексиздаги характери.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида алгебраик геометрия, махсусликлар назарияси усуллари, Ньютон кўпёқликлари, компьютер алгебраси, дифференциал геометрия ва анализнинг асимптотик усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

мувофиқлашган координаталар системасини қуриш учун чекли алгоритм мавжуд бўлган функциялар синфи аниқланган, рационал сонлар майдонининг чекли кенгайтмаси устидаги формал даражали қаторлар учун мувофиқлашган координаталар системасининг мавжудлиги ҳақидаги теорема исботланган ва мувофиқлашган координаталар системасини қуриш алгоритми тузилган;

диффеоморфизмлар группасининнг қисм группаси учун мувофиқлашган координаталар системасининг мавжудлиги исботланган ва карралилиги иккидан ошмайдиган ноллари бўлган гаусс эгрилигига эга сирт билан аниқланган фаза функцияларининг махсусликлари чизикли группага нисбатан классификация килинган;

уриниш нуқталарининг тартиби билан фаза функциялари критик нуқталари карраликлари орасидаги муносабат топилган, Арнольднинг *D* типидаги махсусликлар учун Л.Эрдош-М.Салмхофер масаласининг ечими берилган ва Л.Эрдош ва М.Салмхофер теоремасининг янги исботи олинган;

фаза функциялари Арнольднинг *D* типидаги махсусликларга эга бўлган сиртларида мужассамлашган ўлчовларнинг аниқ баҳоси берилган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

классик группалар инвариантлари асосида мувофиқлашган координаталар системасини топиш алгоритми тузилган;

фаза функцияси махсуслиги Арнольднинг *D* типида бўлса, гаусс эгрилиги иккинчи тартибли нольга эга бўлиши исботланган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги Ньютон кўпёқликлари, абстракт алгебра, дифференциал геометрия, аналитик функциялар назарияси, дифференциалланувчи функцияларнинг махсусликлари назарияси усулларидан фойдаланилгани ҳамда олинган натижалар математик жиҳатдан тўғри исботланганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқотнинг илмий аҳамияти рационал сонлар майдонининг чекли кенгайтмаси устида формал даражали қаторлар учун мувофиқлашган координаталар системасининг аниқланиш алгоритми тузилганлиги ҳамда уч ўлчовли фазонинг баъзи қаварик бўлмаган гиперсиртлари учун лагранж махсусликлари синфининг аниқланиши билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти мувофиқлашган координаталар системасини ва гиперсиртларнинг лагранж махсусликларини ўрганиш натижаларидан компьютер дастурларини тузишда, айрим "тўла" дифференциал геометриянинг ва математик физиканинг масалаларига қўлланилиши билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Қавариқ бўлмаган сиртларнинг лагранж махсусликларини ўрганиш билан боғлиқ натижалар асосида:

дисперсион муносабат орқали аниқланган сатҳ сиртларнинг лагранж махсусликлари сиртлардаги ночизиқли интеграл тенгламаларнинг махсусликларига мос келиши FASA 2/2017, "Newton- Kantorovich Method For

Solving A Class of Nonlinear Integral Equations" мавзусидаги фундаментал илмий лойиҳада ночизиқли интеграл тенгламалар ечимининг мавжудлиги ва ягоналигини исботлашда қўлланилган (Nilai University Malaysia, 10.06.2019). Диссертацияда топилган ўлчовлар Фурье алмаштиришларининг аниқ камайиш тартиби ночизиқли интеграл тенгламалар ечимининг мавжудлиги ва ягоналигини исботлаш жараёнида кулланилган;

силлиқ гиперсиртларда мужассамлашган ўлчовлар Фурье алмаштиришининг текис баҳолари ОТ-Ф4-69 «Гармоник анализ, даражали геометрия ва уларнинг математик физика масалаларига татбиқлари» мавзусидаги фундаментал лойиҳада дискрет Клейн-Гордон тенгламаси учун Коши масаласи ечимининг вақтнинг катта қийматларидаги характерини текширишда фойдаланилган (Самарканд давлат университети 2021 йил 10 апрельда 10-1030- сон маълумотномаси). Диссертацияда исботланган текис баҳолар ечимларнинг аниқ камайиш тартибини топиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 5 та халқаро ва 4 та республика илмий-амалий анжуманларда муҳокама қилинган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича 18 та илмий иш эълон қилинган, шулардан 9 таси Ўзбекистон Республикаси докторлик диссертациялари учун ОАК тавсия этган илмий нашрлар рўйхатига киради. Улардан 2 таси хорижий илмий нашрларда, 7 таси республика илмий нашрларда эълон қилинган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссетациянинг ҳажми 119 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устивор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«Дастлабки маълумотлар. Зарурий таърифлар ва маълум натижалар»** деб номланган биринчи бобида олинган натижаларни баён қилиш учун керакли бўлган маълумотлар келтирилган. Дастлаб Ньютон кўпёқликларининг асосий ғояси баён қилинган, сўнгра алгебраик сонлар ва рационал сонларнинг алгебраик кенгайтмаси тўғрисидаги маълумотлар келтирилган.

1 бобнинг 1.1 параграфида Ньютон кўпёқликларининг асосий таъриф, тушунчалари ва тасдиқлари келтирилган.

1.2 параграфда алгебраик сонлар назариясидан зарурий маълум фактлар келтирилган.

1 бобнинг 1.3 параграфида тайинланган нуқтанинг етарлича кичик атрофида функциянинг ўзгариши тадқиқ қилинади. Шунинг учун “Ньютон кўпёқликлари ва уларнинг нормал конуслари” тушунчалари бир оз ўзгартирилади. Бу ерда А.Н. Варченко ишининг усуллари коэффициентлари бирор умумий майдондан олинган формал даражали қатор учун мувофиқлашган координаталар системасини қуришда ишлатилиши мумкинлиги кўрсатилган.

Охирги параграфда В.И. Арнольднинг содда махсусликлари тўғрисида дастлабки маълумотлар берилган. Бу махсусликлар шу билан ажралиб турадики, уларга мос функциянинг баландлиги иккидан қатъий кичик бўлади.

Баъзи белгилашларни киритамиз. $\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$ муносабатда мос равишда манфий бўлмаган барча бутун сонлар тўплами, манфий бўлмаган барча ҳақиқий сонлар тўплами ва барча ҳақиқий сонлар тўпламлари бўлсин. $\mathcal{T} \subset Z_+^n$ қандайдир қисм тўплам бўлсин.

1.3.1-Таъриф. $\mathcal{T}$ тўпламнинг Ньютон кўпёқлиги деб, $\bigcup_{k\in\mathcal{T}}(k+\mathbb{R}_+^n)$ тўпламнинг $\mathbb{R}_+^n$ даги қаварик қобиғига айтилади.

$\mathbb{R}^n$ да координаталар системаси тайинланган бўлсин ва Φ нолнинг атрофида силлиқ функция бўлсин. Бу функциянинг маркази координаталар бошида бўлган Тейлор қаторини қараймиз:

$$\Phi_x \approx \sum_{k\in Z_+^n} c_k x^k, \qquad c_n \in \mathbb{K}, \tag{1}$$

Бу ерда $\mathbb{K}$ – $\mathbb{R}$ майдоннинг бирор қисм майдони ва рационал сонлар майдониниг кенгайтмасидан иборат. Шундай функциялар тўпламини $\mathcal{F}$ билан белгилаймиз. Хусусий ҳолда, бу рационал сонлар майдони, рационал сонлар майдонининг чекли алгебраик кенгайтмаси, ҳақиқий сонлар майдони ҳам бўлиши мумкин. Умуман олганда (1) қатор яқинлашмайди ва у формал даражали қатор сифатида қаралади.

Тейлор қатори Φ_x нинг ташувчиси деб қуйидаги тўпламга айтилади:

$$supp(\Phi_x) = \{k \in \mathbb{Z}_+^n \backslash \{0\}: c_k \neq 0\}.$$

(1.3.1) қаторга мос келадиган Ньютон кўпёқлиги $\mathcal{T} = supp(\Phi_x)$ тўпламнинг Ньютон кўпёқлиги орқали аниқланади ва $N(\Phi_x)$ билан белгиланади.

1.3.2-Таъриф. Координаталар бошидан Ньютон кўпёқлигигача бўлган масофа деб қуйидаги сонга айтилади

$$d(x) = inf\{t: (t, \dots, t) \in N(\Phi_x)\}\ .$$

Умуман олганда, координаталар бошидан Ньютон кўпёқлигича бўлган масофа локал координаталар системасининг танланишига боғлиқ.

1.3.3-Таъриф. Ньютон кўпёқлигининг бош ёғи деб $(d(x), \dots, d(x))$ нуқтани ўзида сақлайдиган энг кичик ўлчовли ёққа айтилади.

π билан $N(\Phi_x)$ Ньютон кўпёқлигининг бош ёғини белгилаймиз. Бош ёқнинг Тейлор қаторидаги мос қисми Φ_π билан белгиланади. Агар π компакт тўплам бўлса, у ҳолда Φ_π квазибиржинсли кўпҳад бўлади, акс ҳолда Φ_π формал даражали қатор деб қаралади. Энди $n = 2$ бўлган ҳолни қараймиз.

$\mathbb{R}^2$ да $Diff$ - координатлар бошини сақлайдиган локал чексиз силлиқ диффеоморфизмлар группаси бўлсин. Φ - тайинланган функция ёки формал даражали қатор бўлсин. $Diff$ группа силлиқ функциялар фазосида (силлиқ ростковлар фазосида ҳам) қуйидаги формула бўйича табиий таъсир этади:

$$\varphi^*\Phi(x) = \Phi\big(\varphi^{-1}(x)\big).$$

У ҳолда бирор $\varphi \in Diff$ учун $\varphi^*\Phi(x)$ функциянинг Ньютон кўпёқлиги табиий равишда аниқланади ва координаталар бошидан Ньютон кўпёқлигигача бўлган масофа $d_\varphi(\Phi)$ билан белгиланади, яъни $d_\varphi(\Phi)$ координаталар бошидан Ньютон кўпёқлиги $N(\varphi^*\Phi)$ гача бўлган масофадан иборат. Бу таъриф А.Н. Варченконинг классик таърифига эквивалентдир.

1.3.4-Таъриф. Φ функциянинг баландлиги деб (ёки А.Н.Варченко баландлиги) қуйидаги муносабат билан аниқланадиган сонга айтилади:

$$h(\Phi) = Sup_{\varphi \in Diff}\{d_\varphi(\Phi)\}.$$

Энди берилган функцияга G- баландлик ва G-мувофиқлашган координаталар системасини умумийроқ тушунчасини киритамиз.

G - $Diff$ группанинг бирор қисм группаси ва $\mathcal{F}$ силлиқ функциялар тўпламининг қандайдир қисм тўплами бўлсин.

Ихтиёрий $\Phi \in \mathcal{F}$ ва $\varphi \in G$ учун $\varphi^*\Phi \in \mathcal{F},$ яъни G қисм группа $\mathcal{F}$ тўпламга таъсир этсин.

1.3.5-Таъриф. Φ функциянинг G-баландлиги деб $h_G(\Phi)$ билан белгиланадиган ва қуйидаги муносабат билан аниқланадиган мусбат сонга айтилади:

$$h_G(\Phi) = Sup_{\varphi \in G} d_\varphi(\Phi)\ .$$

1.3.5-Таъриф. Агар $d_\varphi(\Phi) = h_G(\Phi)$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда координаталар системаси Φ функцияга G-мувофиқлаштирилган дейилади.

Хусусий ҳолда, $G = GL(2, \mathbb{R})$ бўлган ҳолда биз мос равишда чизиқли баландлик ва чизиқли мувофиқлашган координаталар системаси ҳақида фикр юритамиз.

G қисм группа $Diff$ группанинг қисм группаси ва $\mathcal{F}$ барча силлиқ функциялар тўпламининг қисм тўплами бўлса, у ҳолда $h_G(\Phi) \le h(\Phi)$.

Умуман олганда G - мувофиқлашган координаталар системаси ҳамма вақт ҳам мавжуд бўлавермайди. Бу албатта G қисм группадан боғлиқ.

$G(\mathbb{K})$ группани киритамиз. Формал даражали қатор ёки коэффициентлари бирор $\mathbb{K}$ майдондан олинган формал даражали қатор билан аниқланадиган аналитик (силлиқ) функцияни қараймиз

$$f(x_1, x_2) := \sum_{k,j=0}^{\infty} c_{kj} x_1^k x_2^j\,. \tag{2}$$

Шундай функциялар тўпламини $\mathbb{K}\{x_1, x_2\}$ билан белгилаймиз, яна биз $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ ўзгарувчиларни шундай алмаштирамизки $\varphi_j (j = 1{,}2)$ функциялар коэффициентлари бирор К майдондан олинган формал даражали қаторга эга бўлсин. ($\mathbb{K}[x]$ билан одатдагидек K майдон устида полиномиал халқани белгилаймиз. Шундай қилиб, $\mathbb{K}[x_1, x_2] = \mathbb{K}[\mathbb{K}[x_1]]$).

1 бобнинг 1.4 параграфида силлиқ функциялар учун мувофиқлашган координаталар системаси тўғрисида асосий тушунча ва натижалар келтирилган.

1 бобнинг 1.5 параграфида нормал формалар тўғрисида маълум натижалар келтирилган. Кейин бу натижалар тадқиқот ютуқларининг баёнида ишлатилади.

«$\mathbb{R}^3$ фазода гаусс эгрилиги иккинчи тартибли нолга эга бўлган гиперсиртларнинг лагранж махсусликлари» деб аталадиган иккинчи боб умумлашган мувофиқлашган координаталар системасига бағишланган. Бу бобда диффеоморфизмлар группасининг бирор қисм группаси бўлган ҳол учун чизиқли баландлик ва чизиқли мувофиқлашганлик тушинчалари умумлаштирилади.

2.1- параграфда коэффициентлари бирор $\mathbb{K}$ майдондан олинган формал даражали қатор учун $G(\mathbb{K})$ группа киритилади ва G- мувофиқлашган координаталар системаси ва G- баландлик қаралади. Бу ерда $\mathbb{K}$ рационал сонлар майдонидан ёки бу майдоннинг бирор чекли кенгайтмасидан иборат.

$G(\mathbb{K})$ группа $\mathbb{K}\{x_1, x_2\}$ функциялар тўпламига табиий таъсир этади, бунда $\mathbb{K}\{x_1, x_2\}$ коэффициентлари $\mathbb{K}$ майдондан олинган формал даражали қаторлар тўпламидан иборат. Агар бирор $\mathbb{K}$ майдон билан ишласак, у ҳолда мувофиқлашган координаталар системаси шу майдон устида формал даражали қатор билан бериладиган функция билан аниқланиши мумкинлигини кўрсатамиз.

Бу бобнинг асосий натижалари қуйидаги теоремаларда келтирилган.

2.1.1-Теорема. Айтайлик, Ф формал даражали қатор

$$\Phi(x_1, x_2) \approx \sum_{|\alpha|\geq 2} c_{\alpha_1\alpha_2} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}, \tag{3}$$

бўлсин, бу ерда $c_\alpha \in \mathbb{K}$. У ҳолда шундай $\varphi \in G$ алмаштириш мавжудки, $h_G(\Phi) = d(\varphi^*\Phi)$ бўлади. Бундан ташқари $\mathbb{K}\{x_1, x_2\}$ функциялар синфи учун $h_G(\Phi) = h(\Phi)$ тенглик ўринли бўлади, бу ерда $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$.

2.1.2-Теорема. Айтайлик, Ф ҳар қандай $\alpha \in Z_+^n$ мультииндекс учун $\frac{\partial^{|\alpha|}\Phi(0)}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\alpha_2}} \in \mathbb{K}$ муносабатни қаноатлантирадиган аналитик (силлиқ) функция бўлсин. У ҳолда $h_G(\Phi) = d(\varphi^*\Phi)$ шартни қаноатлантирадиган шундай аналитик (силлиқ) диффеоморфизм $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, мавжудки, ҳар қандай $\beta \in Z_+^n$ мультииндекс учун $\frac{\partial^{|\beta|}\varphi_j(0)}{\partial x_1^{\beta_1}\,\partial x_2^{\beta_2}} \in \mathbb{K}$, $j = 1{,}2$ муносабат ўринли бўлади. Бундан ташқари, агар Ф ҳақиқий аналитик (силлиқ) функция бўлса, у ҳолда φ диффеоморфизм ҳақиқий-аналитик (силлиқ) функциялар билан берилади, ва $h_G(\Phi) = h(\Phi)$ тенглик ўринли бўлади, бу ерда $|\beta| = \beta_1 + \beta_2$.

Умуман олганда, $\Phi \in \mathbb{K}[x_1, x_2]$ полиномиал функциялар учун полиномиал акслантиришга эга бўлган мувофиқлашган координаталар системаси, ҳатто полиномиал диффеоморфизмлар группаси $\mathbb{K}[x_1, x_2]$ га таъсир этса ҳам, мавжуд эмас.

2- бобнинг 2.2 параграфида мувофиқлашган координаталар системасини топиш алгоритми келтирилган.

2- бобнинг 2.3 параграфида $G = GL(2,\mathbb{R})$ чизиқли группа ва чизиқли-мувофиқлашган координаталар системасига оид маълумотлар келтирилади. Бу группа қавариқ бўлмаган сиртларга мос келадиган фаза функцияларининг махсусликларини тадқиқ қилишда ишлатилган ва қуйидагилар қаралган. $S \subset \mathbb{R}^3$ силлиқ гиперсирт ва $(0,0,0) \in S$ бўлсин. K билан S сиртнинг Гаусс эгрилигини белгилаймиз. Фараз қилайлик, $K(0,0,0) = 0$ бўлсин. Умумийликка зарар келтирмасдан S ни координаталар боши атрофида қуйидаги силлиқ функциянинг графиги билан берилган деб ҳисоблаймиз

$$x_3 = \Phi(x_1, x_2),$$

бу ерда Φ функция $\Phi(0,0) = 0, \nabla\Phi(0,0) = 0$ шартларни қаноатлантирадиган силлиқ функциядан иборат. У ҳолда K қуйидаги кўринишда бўлади:

$$K\big(x_1, x_2, \Phi(x_1, x_2)\big) = \frac{\det\big(Hess(\Phi(x_1, x_2))\big)}{(1+|\nabla\Phi(x)|^2)^2}.$$

Шундай қилиб, $K(0,0,0) = 0$ шарт $\det(Hess\Phi)(0,0) = 0$ шартга тенг кучли. Маълумки $K(0,0,0) = 0$ ва $\nabla K(0,0,0) = 0$ (бу ерда ∇ функция градиенти) бўлган ҳолдаги мос гиперсиртнинг фаза функцияларининг нормал формалари келтирилган.

Асосий шарт (АШ). Бу бобда $K(0,0,0) = 0, \nabla K(0,0,0) = 0$ ва $d^2K(0,0,0) \neq 0$ шартларни қаноатлантирувчи гиперсирт қаралади, яъни шундай $\alpha \in \mathbb{Z}_+^2$ мавжудки, $|\alpha| = 2$ ва $D_\Sigma^\alpha K(0,0,0) \neq 0$ бўлади. Қуйидаги белгилашни киритамиз

$$H := det(Hess\Phi)(x_1, x_2).$$

У ҳолда гаусс эгрилигига қўйилган шартлар қуйидагиларга эквивалент бўлади: бирор $\alpha \in \mathbb{Z}_+^2$, $|\alpha| = 2$ бўлганда $H(0,0) = 0, \nabla H(0,0) = 0$ ва $D^\alpha H(0,0) \neq 0$ бўлади. ∂_j^α билан α тартибли x_j ўзгарувчи бўйича хусусий ҳосила белгиланади ва $D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2}$.

Фаза функцияларини текширишда Ньютон кўпёқликлари усули қулай ҳисобланади. Бизга керакли бўлган таъриф ва тушунчаларни эслатиб ўтамиз.

Φ функцияга нисбатан (x_1, x_2) чизиқли мувофиқлашган координаталар системаси бўлсин. S нинг гаусс эгрилигини аниқловчи Гессиан чизиқли группанинг ковариантi бўлганлиги учун K га қўйилган шартлар координаталар системасини чизиқли алмаштиришига нисбатан инвариант бўлдаи.

Бу параграфнинг асосий натижасини келтирамиз:

2.3.3-Теорема. Аналитик гиперсирт $S \subset \mathbb{R}^3$ АШ ни қаноатлантирсин ва қуйидаги функциянинг графиги

$$x_3 = \Phi(x_1, x_2), \Phi(0,0) = 0, \nabla\Phi(0,0) = 0,$$

билан берилган бўлиб, бу ерда (x_1, x_2) чизиқли мувофиқлашган координаталар системасидан иборат. У ҳолда Φ қуйидаги шаклда ифодаланади:

$$\Phi(x_1, x_2) = b(x_1, x_2)(x_2 - x_1^m \omega(x_1))^2 + b_0(x_1)$$

бу ерда b,ω,b_0 силлиқ функциялар ва m чекли бўлганда $\omega(0)\neq 0$. Бундан ташқари қуйидаги бир-бирини инкор қиладиган тасдиқлар ўринли бўлади:

A. S нинг бирор бош эгрилиги координатлар бошида нолдан фарқли, яъни $b(0,0)\neq 0$, ёки*;*

A1. $m\geq 4$ ва Φ координаталар бошида A_3 типдаги махсусликка эга, ёки

$$2\frac{\partial^2 b(0,0)}{\partial x_1^2}b(0,0)-4\left(\frac{\partial b(0,0)}{\partial x_1}\right)^2\neq 0;$$

A2. $m=3$ ва Φ функция $A_k(k\geq 3)$ типдаги махсусликка эга;

D. Иккала бош эгриликлар координаталар бошида нолга айланади. Φ координаталар бошида $D_k(4\leq k\leq\infty)$ махсусликка эга. Бундан ташқари, $b(0,0)=0$ ва b функция қуйидаги шаклда ифодаланади:

$$b(x_1,x_2)=x_1b_1(x_1,x_2)+x_2^n b_2(x_2),$$

Бу ерда b_1,b_2 силлиқ функциялар, $b_1(0,0)\neq 0$ ва $2\leq n$ чекли бўлганда $b_2(0)\neq 0$. Аксинча, агар Φ функция $m\leq 3$ шартда A типдаги ёки D типдаги махсусликка эга бўлса, у ҳолда S асосий шартни қаноатлантиради.

III боб **«Чекли каррали уриниш нуқталари билан боғлиқ бўлган махсусликларнинг тадбиқлари»** деб аталади ва бу бобда биринчи ва иккинчи бобларнинг натижалари баъзи қавариқ бўлмаган сиртларнинг Фурье алмаштиришларининг характерини тадқиқ қилишга қўлланилади. Хусусий ҳолда, фаза функцияси D_∞ типдаги махсусликнинг деформацияси бўлган ҳол учун қавариқ бўлмаган сиртларда мужассамлашган ўлчовларнинг Фурье алмаштиришлари тўғрисидаги Л.Эрдош ва М.Салмхофер масаласининг ечими келтирилган. Бундан ташқари, сингуляр интеграл учун Л. Эрдош ва М. Салмхофернинг яхшиланган баҳоси олинган.

3.1- параграф “**Эрдош- Салмхофер томонларидан қаралган сиртлар синфи**” деб аталади ва унда қуйидаги фаразлар қаралган.

3.1.1- Шарт. Агар бирор $x_0\in\Sigma(a)$ нуқта учун $K(x_0,a)=0$ бўлса, у ҳолда $\nabla_x K(x_0,a)\neq 0$ бўлади.

3.1.2- Шарт. $a\in\mathbb{R}^m$- тайинланган нуқта бўлсин. Қуйидаги чеклашни киритамиз, Γ_a эгри чизиқда $|\ z(x)\times w(x)|^2$ силлиқ функция фақат чекли тартибдаги нолларга эга бўлсин, яъни агар $x^0\in\Gamma_a$ бу функциянинг илдизи бўлса, у ҳолда шундай $n\in N$ ва $c\neq 0$ топиладики,

$$|z(x)\times w(x)|^2=\left(dist(x,x^0)\right)^{2n}\left(c+o(1)\right)(\text{бунда } \Gamma_a \text{ бўйлаб } x\to x^0\ )$$

тенглик ўринли бўлади.

Теорема 3.1.1. Агар бирор $a\in\mathbb{R}^m$ учун силлиқ гиперсиртлар оиласи $\Sigma(a)$ 3.1.1- ва 3.1.2-шартларни қаноатлантирса, у ҳолда $M(\cdot,a)$ учун қуйидаги муносабат ўринлидир:

$$M(\cdot,a)\in L^{4-0}(S^2). \tag{4}$$

Бундан ташқари, ҳар қандай $p<4$ учун қуйидаги муносабат ўринли бўлади:

$$\|M(\cdot,a)\|_{L^p(S^2)}\in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^m).$$

Натижа 3.1.1. Агар бирор $a\in\mathbb{R}^m$ учун силлиқ гиперсиртлар оиласи $\Sigma(a)$ 3.1.1- ва 3.1.2- шартларни қаноатлантирса, у ҳолда қуйидаги муносабат ўринли

$\hat{\mu}(\xi, a) \in L^{3+0}(\mathbb{R}^3)$. Бундан ташқари, ҳар қандай $p > 3$ учун қуйидаги муносабатга эга бўламиз:

$$\| \hat{\mu}(\cdot, a)\|_{L^p(S^2)} \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^m). \qquad (5)$$

3.2- параграфда D_∞ типдаги махсуслика эга бўлган қавариқ бўлмаган сиртларда мужассамлашган ўлчовларнинг Фурье алмаштиришларининг L^p баҳолари қаралган.

$S \subset \mathbb{R}^3$ силлиқ сиртдан ва $\psi \in C_0^\infty(S)$ S да компакт ташувчига эга бўлган силлиқ функциядан иборат бўлсин. $d\mu = \psi d\sigma$ ўлчовни фараймиз, бу ерда $d\sigma$ сиртнинг ўлчовидан иборат. Ўлчовнинг Фурье алмаштиришлари қуйидаги тебранувчи интеграл билан аниқланади:

$$\hat{\mu}(\xi) := \int\limits_S e^{i(\xi,x)} d\mu.$$

Маълумки, $\hat{\mu}(\xi)$ аналитик функциядан иборат.

$\mathbb{R}^3$ даги гиперсиртлар учун қуйидаги масалани қараймиз. Фараз қилайлик, $(x, \omega)|_S$ фаза функцияси (бу ерда $\omega \in S^2$ -маркази координаталар бошида бўлган бирлик сфера) D_∞ типдаги махсусликнинг кичик қўзғалишидан иборат бўлсин.

Теорема 3.2.1. Айтайлик $\mathbb{R}^3$ да S аналитик сирт берилган бўлсин ва у координаталар бошида D_∞ типдаги махсусликка эга бўлсин. У ҳолда координаталар бошининг шундай U атрофи мавжудки, ҳар қандай $\psi \in C_0^\infty(U)$ учун барча ларда $\hat{\mu} \in L^P(\mathbb{R}^3)$ муносабат ўринли булади.

3.3 параграфда олинган натижалар тўрт махраж ҳақидаги баҳоларга қўлланилган.

ХУЛОСА

Олинган натижалар асосида қуйидаги хулосаларни ҳосил қилиш мумкин:

Формал даражали қаторлар учун локал координаталар системасининг мувофиқлашган бўлишининг зарурий ва етарли шартлари исботланган.

$G -$ мувофиқлашган координаталар системаси аниқланган.

$h_G(\Phi)$ баландликнинг $G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_n \subset Diff$ қисм группаларга боғланиши топилган ва $G-$ мувофиқлашган координаталар системаси мавжудлигининг етарли шартлари исботланган.

Агар силлиқ функциянинг Тейлор қаторига ёйилмасининг коэффициентлари рационал сонлар майдонига ёки рационал сонлар майдонининг чекли алгебраик кенгайтмаларига тегишли бўлса, у ҳолда умумлашган мувофиқлашган координаталар системаси мавжудлиги исботланган.

Чизиқли мувофиқлашган координаталар системаси асосида гаусс эгрилиги нолининг тартиби иккидан ошмайдиган ноқавариқ сирт билан боғланган фаза функциясининг махсусликлари аниқланган.

Гаусс эгрилиги нолининг тартиби иккидан ошмайдиган сиртга мос фаза функциялари тўртта $A_2, A_3, D_k^{\pm}$ ва D_∞ типдаги махсусликларга эга бўлишлиги исботланган.

Бундан ташқари Эрдош- Салмхоферлар томонидан қаралган сиртларга мос фаза функцияси $A_k (k \leq 3)$ махсусликларининг $\mathbb{R}_+$-версал деформацияси эканлиги кўрсатилган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.30.09.2019.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ
УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
УЗБЕКИСТАНА

САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

СОЛЕЕВА НИГИНА АХМАДЖОНОВНА

ЛАГРАНЖЕВЫ ОСОБЕННОСТИ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ В $\mathbb{R}^3$ С ГАУССОВОЙ КРИВИЗНОЙ, ИМЕЮЩЕЙ НУЛЬ ВТОРОГО ПОРЯДКА

01.01.04 – Геометрия и топология

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

Ташкент – 2021 год

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2019.3.PhD/FM401

Диссертация выполнена в Самаркандском Государственном Университете и Института математики имени В.И. Романовского.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http:ik-fizmat@nuu.uz/) и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Икромов Исроил Акрамович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Нарманов Абдигаппар Якубович** доктор физико-математических наук, профессор
	Жаббаров Гайратбай Фархадович кандидат физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	**Национальный исследовательский ядерный университет филиал «МИФИ» в городе Ташкенте**

Защита диссертации состоится «26» августа 2021 года в 14:00 часов на заседании Научного совета DSc.30.09.2019.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871)227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2021 года.
(протокол рассылки №_________ от «____» _______________2021 года).

А.Садуллаев
Председатель научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., академик

Н. К. Мамадалиев
Ученый секретарь научного
совета по присуждению ученых
степеней, д. ф. ф.-м. н. (PhD)

Р. Б. Бешимов
Председатель научного семинара
при научном совете по присуждению ученых
степеней, д. ф.-м. н.

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многочисленные научные и практические исследования, проводимые на мировом уровне, часто сводятся к изучению лагранжевых отображений, которые задаются с помощью так называемой производящей функцией. Эти функции имеют особенности, которые называются лагранжевыми особенностями. Была создана теория классификации гладких отображений, функций и семейств функций. Часто возникает необходимости изучения особенностей гауссова сферического или нормального отображения. Эти особенности часто появляются при решении прикладных задач. Элементарные катастрофы Тома также связаны с нормальными отображениеми, являющимися лагранжевыми отображениями. Поэтому изучение лагранжевых особенностей гиперповерхностей имеет важное значение в геометрии и топологии.

В мире проводятся научные исследования по изучению поверхностей евклидовых пространств связанных с так называемыми, фазовыми функциями, которые являются производящим семейством соответствующего лагранжевого отображения. Имеется Арнольдова классификация этих особенностей в случае общего положения. В этих случаях критические точки имеют конечные кратности и поэтому изолированы. Однако возникают такие особенности которые не появляются в случае общего положения и эти особенности не изолированы. В случае поверхности уровня дисперсионного соотношения дискретного оператора Шредингера невыпуклы и гауссова кривизна в некоторых точках обращается в нуль. Л.Эрдош и М.Салмхофер исследовали случай когда гауссова кривизна имеет нуль первого порядка, т.е. градиент гауссовой кривизны отличен от нуля в корнях гауссовой кривизны.

В нашей стране особое внимание уделяется актуальным аспектам геометрии и топологии, которые имеют научные и практические применения в фундаментальных науках. В частности, в последние годы значительные результаты были получены в исследовании лагранжевых особенностей, связанных с невыпуклыми гиперповерхностями. На поверхностях уровня более общего дисперсионного соотношения возникают точки, когда гауссова кривизна имеет нуль второго и более высокого порядка. Более того, имеются точки, где все главные кривизны обращаются в нуль. Проведение исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям «Функциональный анализ, геометрия и топология» было определено как одно из фундаментальных исследований[2]. В связи с этим представляется важным исследовать особенности производящих функций. Имеется взаимно-однозначное соответствие между производящими функциями и соответствующими лагранжевыми отображениями. Эта теория

---

[2] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан №292 от 18 мая 2017 года «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан».

до сих пор развивается на основе применения методов теории особенностей, коммутативной алгебры, лагранжевой геометрии и компьютерной алгебры.

Данное диссертационное исследование в определенной степени служит решению задач, указанных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О Стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В.И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан» и ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республики Узбекистан IV "Математика, механика и информатика".

Степень изученности проблемы. Классификация Лагранжевых особенностей развивается начиная с классической работы Уитни. Здесь можно отметить работы Дж.Мозера, Дж.Мартинета, В.И.Арнольда, Дж.Дж.Дюстермата, В. Мальгранжа и других. В классических работах в основном рассматриваются особенности общего положения. Однако в приложениях возникают особенности функций, которые не появляются в известных списках классификаций. Одним из таких примеров является Лагранжевы особенности возникающие на поверхностях уровня дисперсионного соотношения, ассоциированного с дискретным оператором Шредингера.

В 1997 году Г.А.Хасанов нашел функциональное уравнение для гладких функций, через которые могут быть построены приспособленные системы координат. Таким образом, Г.А.Хасанов доказал важный аналог результата А.Н.Варченко. Его способ доказательства сильно отличается от способа А.Н.Варченко. Доказательство А.Н.Варченко было основано на теореме Хиронака о разрешении особенностей аналитических функций. В дальнейшем, для произвольных аналитических функций аналогичный результат, точнее доказательство основанное на рядах Пюзио корней аналитических функций получены американскими математиками Д.Х.Фонгом, Е.М.Стейном и Дж. Штурмом в 1999 году. Более конструктивное доказательство теоремы Хасанова дано И.А.Икромовым и Д.Мюллером в 2011 году. В настоящее время немецкими учеными М. Круил и М. Бернулоами были созданы несколько компьютерных программ для нахождения нормальной формы функции. Но в общем случае приведение функций к нормальному виду является сложной проблемой. Поэтому, В. И. Арнольдом, была поставлена задача об определении главного члена асимптотического разложения осцилляторного интеграла через многогранников Ньютона фазовой функции, построенных в, так называемых, приспособленных системах координат. Такой многогранник Ньютона определяется через ряда Тейлора в критической точке.

Во многих работах изучены особенности функций, имеющих критические точки. Более того, в работах Уитни, Р. Тома, Дж. Мозера, В.И. Арнольда, В. Мальгранжа изучены особенности гладких отображений. Одним из важных классов таких отображений является лагранжевые отображения. В случае общего положения в размерностях $n \leq 10$ имеется полная классификация лагранжевых особенностей. При изучении особенностей функций а также исследовании тригонометрических интегралов важную роль играют, так называемые, приспособленные системы координат. Лагранжевы отображения определяются проекцией лагранжевых подмногообразий симплектического многообразия. Исследование таких многообразий и соответствующих отображений является важной задачей симплектической геометрии. Эти задачи рассмотрены в работах Дж. Дюстермата, Хермандера Л., Мелроуза, Гиемани, Вейнстейна, В.И. Арнольда, Ошма, Тейлора и других.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждением высшего образования, где выполнялась диссертация. Исследование выполнено в соответствии с планом научно-исследовательского пректа Ф-4-17 "Разработка новых методов исследования систем нелинейных алгебраических и дифференциальных уравнений, а также осцилляторных интегралов и их применение" Самаркандского государственного университета.

Целью исследования является построения алгоритмов нахождения приспособленных систем координат, классификация лагранжевых особенностей относительно линейной группы, а также исследование особенностей фазовой функции зависящей от параметров.

Задачи исследования:

определение классов функций, для которых можно найти конечный алгоритм построения приспособленных систем координат;

определение расширений поля рациональных чисел, для которых можно найти обобщенные приспособленные системы координат;

исследование лагранжевых особенностей поверхностей трехмерного пространства, гауссова кривизна которых имеет нуль второго порядка;

определение лагранжевых особенностей соответствующих к типу D Арнольда;

определение показателя суммируемости преобразования Фурье гладких мер, сосредоточенных на невыпуклых поверхностях трёхмерного евклидова пространства.

Объект исследования – фазовые функции, лагранжевы отображения, гладкие гиперповерхности, гауссова кривизна, преоразование Фурье мер, сосредоточенных на поверхностях.

Предмет исследования – особенности лагранжевых отображений и фазовых функций, поведение на бесконечности преобразования Фурье гладких борелевских мер, сосредоточенных на гиперповерхностях.

Методы исследования. В работе применяются методы алгебраической геометрии, теории особенностей, методы многогранников Ньютона, компьютерной алгебры, дифференциальной геометрии и асимптотические методы анализа.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

определен класс функций, для которых существует конечный алгоритм определения приспособленных систем координат, а также составлен алгоритм определения и доказана теорема существования приспособленных систем координат для формальных степенных рядов над конечным расширением поля рациональных чисел;

доказано существование приспособленных систем координат для подгруппы группы диффеоморфизмов и изучены особенности фазовых функций, ассоциированных с поверхностями, гауссова кривизна которых имеет нуль кратности не больше двух;

найдена связь между порядком касательных точек и кратностью критической точки фазовой функции, получено решение задачи Л.Эрдоша-М.Салмхофера для особенностей типа *D* Арнольда и приведено новое доказательство теоремы Л.Эрдоша и М.Салмхофера.

получена точная оценка для мер, сосредоточенных на гиперповерхностях, фазовая функция которых имеет особенность типа *D* Арнольда;

получено улучшение оценки Л.Эрдоша и М.Салмхофера для сингулярного интеграла и доказано точность полученной оценки.

Практические результаты исследования состоят в следующем:

составлен алгоритм построения приспособленных систем координат, основанный на инвариантах классических групп;

доказано, что гауссова кривизна имеет нуль второго порядка, когда фазовая функция имеет особенности типа *D* Арнольда.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием методов многогранников Ньютона, абстрактной алгебры, дифференциальной геометрии, теории аналитических функций, теории особенностей дифференцируемых функций, а также строгостью математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что найден алгоритм построения приспособленных систем координат для некоторых классов формальных степенных рядов над конечным алгебраическим расширением поля рациональных чисел. Определен класс лагранжевых особенностей некоторых невыпуклых гиперповерхностей трехмерного пространства.

Практическая значимость результатов обясняется тем, что исследование приспособленных систем координат и лагранжевых особенностей гиперповерхностей применяется при построение компьютерных программ, решений некоторых практических задач дифференциальной геометрии «в целом» и математической физики.

Внедрение результатов исследования. Результаты, полученные о лагранжевых особенностях невыпуклых поверхностей были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

Результат исследования лагранжевых особенностей, связанных с гладкими поверхностями, определяющимися дисперсионным соотношением был использованн в исследованиях зарубежного проекта FASA2/2017 "Newton-Kantorovich Method For Solving A Class of Nonlinear Integral Equations" для исследовании существования и единственности решений нелинейных интегральных уравнений (Nilai University Malaysia, 10.06.2019). В результате это позволило найти существования и единственность решений нелинейных интегральных уравнений;

результаты, полученные равномерные оценки преобразования Фурье мер, сосредоточенных на гладких гиперповерхностях были использованы в фундаментальном проекте ОТ-Ф4-69 «Гармониический анализ, степенная геометрия и их пременений к решению задач математической физики» при исследовании поведения решения задачи Коши дискретного уравнения Клейна- Гордона при больших значениях времени (Справка Самаркандского государственного университета за номером 1-1030 от 10 апреля 2021 года). В результате это позволило, вычислить точный порядок убывания решений с помощью равномерных оценок.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертации обсуждались на 6 международных и 3 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликованы 18 научных работ, из них 7 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе 2 из них опубликована в зарубежном журнале и 7 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 119 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **«Предварительные сведения. Необходимые определения и известные результаты»** приведены необходимые сведения, которые понадобятся в дальнейшим изложении основных результатов диссертационный работы. Для начала излагаются основные идеи многогранников Ньютона, затем некоторые сведения об алгебраических числах и алгебраическом расширении поля рациональных чисел.

В параграфе 1.1 главы изложены определения, понятия и утверждения о многогранниках Ньютона.

В параграфе 1.2 главы приведены известные необходимые факты из теории алгебраических чисел.

В параграфе 1.3 главы исследуется поведение функции в достаточно малой окрестности фиксированной точки. Поэтому, соответствующие понятия "Многогранники Ньютона и их нормальные конуса" слегка варьируются. Здесь будет показано, что методы работы А.Н. Варченко могут быть использованы для построения приспособленной системы координат формальных степенных рядов с коэффициентами из некоторого более общего поля.

В последнем параграфе приведены предварительные сведения о простых особенностях В.И. Арнольда. Эти особенности выделяются тем, что высота соответствующей функции строго меньше двух.

Введем некоторые обозначения. Пусть $\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$ множество всех неотрицательных целых чисел, всех неотрицательных действительных чисел, и всех действительных чисел соответственно. Пусть $\mathcal{T} \subset \mathbb{Z}_+^n$ некоторое подмножество.

Определение 1.3.1. Многогранником Ньютона множества $\mathcal{T}$ называется выпуклая оболочка множества $\bigcup_{k\in\mathcal{T}}(k + \mathbb{R}_+^n)$ в $\mathbb{R}_+^n$.

Пусть фиксирована система координат в $\mathbb{R}^n$ и Φ гладкая функция в окрестности нуля. Рассмотрим ряд Тейлора этой функции с центром в начале координат:

$$\Phi_x \approx \sum_{k\in Z_+^n} c_k x^k, \qquad c_k \in \mathbb{K}, \tag{1}$$

где $\mathbb{K}$ – некоторое подполе поля $\mathbb{R}$ и $\mathbb{K}$ является расширением поля рациональных чисел. Множество таких функций обозначается через $\mathcal{F}$. В частности, это может быть полем рациональных чисел, конечным расширением поля рациональных чисел или полем вещественных чисел. Вообще говоря ряд (1) не сходится и рассматривается как формальный степенной ряд.

Носителем ряда Тейлора Φ_x называется множество вида:

$$supp(\Phi_x) = \{k \in \mathbb{Z}_+^n \backslash \{0\}: c_k \neq 0\}.$$

Соответствующий многогранник Ньютона к ряду (1) определяется многогранником Ньютона множества $\mathcal{T} = supp(\Phi_x)$ и обозначается через $N(\Phi_x)$

Определение 1.3.2. Расстоянием от начала координат до многогранника Ньютона называется следующее число

$$d(x) = inf\{t: (t, \dots, t) \in N(\Phi_x)\} .$$

Вообще говоря, расстояние между началом координат и многогранником Ньютона зависит от выбора локальной системы координат.

Определение 1.3.3. Главной гранью многогранника Ньютона называется грань минимальной размерности, содержащая точку $(d(x),\dots,d(x))$.

Обозначим через π главную грань многогранника Ньютона $N(\Phi_x)$. Соответствующая главной грани часть ряда Тейлора обозначается Φ_π. Если π компактное множество, то Φ_π является квазиоднородным многочленом, иначе Φ_π рассматривается как формальный степенной ряд. Далее рассмотрим случай $n=2$.

Пусть $Diff$ - группа локальных бесконечно- гладких диффеоморфизмов $\mathbb{R}^2$, сохраняющих начало координат. Пусть Φ - фиксированная функция или формальный степенной ряд. Группа $Diff$ естественно действует в пространстве гладких (а также в пространстве ростков гладких) функций по формуле:

$$\varphi^*\Phi(x)=\Phi\big(\varphi^{-1}(x)\big).$$

Тогда для некоторого $\varphi\in Diff$, естественно определяется многогранник Ньютона функции $\varphi^*\Phi(x)$ и расстояние от начала координат до многогранника Ньютона обозначается через $d_\varphi(\Phi)$, т.е. $d_\varphi(\Phi)$ расстояние от начала координат до многогранника Ньютона $N(\varphi^*\Phi)$. Это определение фактически эквивалентно классическому определению А.Н. Варченко.

Определение 1.3.4. Высотой (или высотой А.Н. Варченко) функции Φ называется число, определяемое следующим соотношением:

$$h(\Phi)=Sup_{\varphi\in Diff}\{d_\varphi(\Phi)\}.$$

Теперь введем более общее понятие G -высоты и G -приспособленность системы координат к данной функции.

Пусть G некоторая подгруппа группы $Diff$ и $\mathcal{F}$ некоторое подмножество множества гладких функций.

Пусть для любого $\Phi\in\mathcal{F}$ и $\varphi\in G, \varphi^*\Phi\in\mathcal{F}$, т.е. G действует на множестве $\mathcal{F}$.

Определение 1.3.5. G -высотой функции Φ, обозначаемой через $h_G(\Phi)$, называется положительное число, определяемое следующим соотношением:

$$h_G(\Phi)=Sup_{\varphi\in G}d_\varphi(\Phi)\ .$$

Определение 1.3.6. Система координат называется G -приспособленной к функции Φ, если выполняется равенство $d_\varphi(\Phi)=h_G(\Phi)$.

В частном случае, когда $G=GL(2,\mathbb{R})$ мы будем говорить соответственно о линейной высоте и линейно приспособленной системе координат соответственно.

Так как G является подгруппой группы $Diff$ и F является подмножеством множества всех гладких функций, то $h_G(\Phi)\le h(\Phi)$.

Вообще говоря, G - приспособленные системы координат не всегда существует. Это зависит от подгруппы G.

Введем группу $G(\mathbb{K})$. Рассмотрим формальный степенной ряд или аналитическую (гладкую) функцию с формальным степенным рядом с коэффициентами из некоторого поля K

$$f(x_1, x_2) := \sum_{k,j=0}^{\infty} c_{kj} x_1^k x_2^j . \qquad (2)$$

Множество таких функций обозначим через $\mathbb{K}\{x_1, x_2\}$, а также мы ограничимся заменой переменных $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, так что $\varphi_j (j = 1,2)$ имеет формальный степенной ряд с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$ (через $\mathbb{K}[x]$ как обычно обозначается полиномиальное кольцо над полем $\mathbb{K}$. Таким образом $\mathbb{K}[x_1, x_2] = \mathbb{K}[\mathbb{K}[x_1]]$).

В параграфе 1.4 главы приведены основные понятия и результаты о приспособленных системах координат для гладких функций.

В параграфе 1.5 главы приведены известные результаты о нормальных формах. Эти результаты понадобятся в дальнейших изложениях.

Вторая глава диссертации, названная **«Лагранжевы особенности гиперповерхностей в $\mathbb{R}^3$ с гауссовой кривизной, имеющей нуль второго порядка»**, посвящена изучению обобщеных приспособленных систем координат. Здесь рассматривается обобщения понятия линейной высоты и линейной приспособленности в случае некоторой подгруппы группы диффеоморфизмов.

В параграфе 2.1 вводится группа $G(\mathbb{K})$ и определим G - приспособленные системы координат и G - высоты для степенных рядов с коэфициентами из поля $\mathbb{K}$. При этом $\mathbb{K}$ является полем рациональных чисел или конечным расширением этого поля.

Группа $G(\mathbb{K})$ естественно действует на множестве функций $\mathbb{K}\{x_1, x_2\}$, где $\mathbb{K}\{x_1, x_2\}$ множество формальных степенных рядов с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$.

Покажем, что если работать с некоторым полем $\mathbb{K}$, то приспособленная система координат может быть определена функцией с формальными степенными рядами над полем $\mathbb{K}$.

Основные результаты этой главы содержатся в следующих теоремах.

Теорема 2.1.1. Предположим, что Φ формальный степенной ряд

$$\Phi(x_1, x_2) \approx \sum_{|\alpha| \geq 2} c_{\alpha_1 \alpha_2} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}, \qquad (3)$$

где $c_\alpha \in \mathbb{K}$. Тогда существует преобразование $\varphi \in G$, такое, что$h_G(\Phi) = d(\varphi^* \Phi)$. Более того, для функции класса $\mathbb{K}\{x_1, x_2\}$ выполняется равенство $h_G(\Phi) = h(\Phi)$, где $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$.

Теорема 2.1.2. Пусть Φ аналитическая (гладкая) функция, такая, что для любого мульти- индекса $\alpha \in Z_+^n$

$$\frac{\partial^{|\alpha|} \Phi(0)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} \in \mathbb{K}.$$

Тогда существует аналитический (гладкий) диффеоморфизм $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, удовлетворяющий условиям: $h_G(\Phi) = d(\varphi^*\Phi)$, причем для любого мультииндекса $\beta \in Z_+^n$

$$\frac{\partial^{|\beta|}\varphi_j(0)}{\partial x_1^{\beta_1}\, \partial x_2^{\beta_2}} \in \mathbb{K}, j = 1,2.$$

Более того, если Φ является вещественно аналитической (гладкой) функцией, то диффеоморфизм φ задается вещественно-аналитическими (гладкими) функциями, при этом выполняется равенство $h_G(\Phi) = h(\Phi)$, где $|\beta| = \beta_1 + \beta_2$.

Вообще говоря, для полиномиальных функций $\Phi \in \mathbb{K}[x_1, x_2]$ не существуют приспособленные системы координат с полиномиальным отображением, хотя группа полиномиальных диффеоморфизмов действует на $\mathbb{K}[x_1, x_2]$.

В параграфе 2.2 второй главы приведен алгоритм определения приспособленных систем координат.

В параграфе 2.3 главы рассматривается линейная группа $G = GL(2, \mathbb{R})$ и линейно-приспособленная система координат. Эта группа используется для исследования особенностей фазовой функции, соответствующей невыпуклым поверхностям.

Пусть $S \subset \mathbb{R}^3$ гладкая гиперповерхность и $(0,0,0) \in S$. Обозначим через K гауссову кривизну поверхности S. Предположим, что $K(0,0,0) = 0$. Так как вблизи начала координат S задается в виде графика гладкой функции

$$x_3 = \Phi(x_1, x_2),$$

где Φ гладкая функция, удовлетворяющая условиям: $\Phi(0,0) = 0$ и $\nabla\Phi(0,0) = 0$. Тогда K имеет вид:

$$K(x_1, x_2, \Phi(x_1, x_2)) = \frac{\det(Hess(\Phi(x_1, x_2)))}{(1 + |\nabla\Phi(x)|^2)^2}.$$

Таким образом $K(0,0,0) = 0$ эквивалентно условию $\det(Hess\Phi)(0,0) = 0$. В работе дана нормальная форма фазовой функции, соответствующей гиперповерхности в случае, когда $K(0,0,0) = 0$ и $\nabla K(0,0,0) = 0$ (где ∇ градиент функции).

Основное предположение (ОП). В этой главе рассмотрим гиперповерхность в случае, когда $K(0,0,0) = 0$, $\nabla K(0,0,0) = 0$ и $d^2K(0,0,0)$, т.е. существует $\alpha \in Z_+^2$ такой что$|\alpha| = 2$ и $D_\Sigma^\alpha K(0,0,0) \neq 0$. Обозначим

$D_\Sigma^\alpha K(0,0,0) \neq 0$. Обозначим

$$H := det(Hess\Phi)(x_1, x_2).$$

Тогда условия, наложенные на гауссову кривизну, эквивалентны следующим: $H(0,0) = 0, \nabla H(0,0) = 0$ и $D^\alpha H(0,0) \neq 0$ для некоторы $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in Z_+^2$ с $|\alpha| = 2$. Далее через ∂_j^α обозначается частная производная по переменной x_j порядка α и $D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}\, \partial_2^{\alpha_2}$.

При исследовании особенностей фазовой функции удобно использовать метод многогранников Ньютона. Напомним соответствующие определения.

Пусть (x_1, x_2) линейно приспособленная система координат к функции Ф. Поскольку гауссова кривизна K определяется Гессианом, который является ковариантом линейной группы, то условия, поставленные на K, инвариантны относительно линейной замены системы координат.

Приведем основную теорему этого параграфа:

Теорема 2.3.3. Пусть аналитическая гиперповерхность $S \subset \mathbb{R}^3$ удовлетворяет ОП и задается графиком функции

$$x_3 = \Phi(x_1, x_2), \Phi(0,0) = 0, \nabla\Phi(0,0) = 0,$$

причем (x_1, x_2) линейно приспособленная система координат. Тогда Ф записывается в виде:

$$\Phi(x_1, x_2) = b(x_1, x_2)(x_2 - x_1^m \omega(x_1))^2 + b_0(x_1),$$

где b, ω, b_0 гладкие функции и $\omega(0) \neq 0$ при условии конечности m. Более того, возможны следующие взаимно исключающие варианты:

А. Одна из главных кривизн S в нуле отлична от нуля, т.е. $b(0,0) \neq 0$, либо;

А1. $m \geq 4$ и Ф в нуле имеет особенность типа A_3, либо

$$2\frac{\partial^2 b(0,0)}{\partial x_1^2} b(0,0) - 4\left(\frac{\partial b(0,0)}{\partial x_1}\right)^2 \neq 0;$$

А2. $m = 3$ и Ф имеет особенность типа $A_k (k \geq 3)$;

D. Обе главные кривизны обращаются в нуль в начале координат. Ф имеет особенность типа $D_k (4 \leq k \leq \infty)$ в начале координат. Более того, $b(0,0) = 0$ и функция b записывается в виде:

$$b(x_1, x_2) = x_1 b_1(x_1, x_2) + x_2^n b_2(x_2),$$

где b_1, b_2 гладкие функции, $b_1(0,0) \neq 0$ и $b_2(0) \neq 0$ при условии конечности $2 \leq n$. Обратно, если Ф имеет тип A с условием $m \leq 3$ или D, то S удовлетворяет основному предположению.

В параграфе 2.3 главы приведены вспомогательные утверждения и доказательство основных результатов.

В главе III **«Особенности связанные с конечнократными касательными точками и их применения»** результаты первой и второй главы применяются для исследования поведения преобразования Фурье на некоторых невыпуклых поверхностях. В частности представлено решение задачи Л.Эрдоша и М.Салмхофера о поведении преобразования Фурье мер, сосредоточенных на невыпуклых поверхностях в случае, когда фазовая функция является деформацией особенности типа D_∞. Кроме того получена улучшенная оценка Л. Эрдоша и М. Салмхофера для сингулярного интеграла.

В параграфе 3.1 «Класс поверхностей рассмотренный Эрдошем-Салмхофером» рассмотрены следующие:

Предположение 3.1.1. Если для некоторой точки $x_0 \in \Sigma(a), K(x_0, a) = 0$, то $\nabla K(x_0, a) \neq 0$.

Предположение 3.1.2. Пусть $a \in \mathbb{R}^m$- фиксированная точка. Предполагается, что ограничение на кривой Γ_a гладкой функции $|z(x) \times$

$w(x)|^2$ имеет лишь нули конечного порядка на Γ_a, т.е. если $x^0 \in \Gamma_a$ является корнем этой функции, то найдутся $n \in N$ и $c \neq 0$, такие что

$$|z(x) \times w(x)|^2 = \left(dist(x, x^0)\right)^{2n}\left(c + o(1)\right)(\text{при } x \to x^0, \text{вдоль } \Gamma_a)$$

Теорема 3.1.1. Если для некоторого $a \in \mathbb{R}^m$ семейство гладких гиперповерхностей $\Sigma(a)$ удовлетворяет предположениям 3.1.1 и 3.1.2, то справедливо следующее включение

$$M(\cdot, a) \in L^{4-0}(S^2). \tag{4}$$

Более того, для любого $p < 4$ мы имеет место включение

$$\|M(\cdot, a)\|_{L^p(S^2)} \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^m).$$

Следствие 3.1.1. Если для некоторого $a \in \mathbb{R}^m$ семейство гладких гиперповерхностей удовлетворяет предположениям 3.1.1, а также 3.1.2, то справедливо включение $\hat{\mu}(\xi, a) \in L^{3+0}(\mathbb{R}^3)$. Более того, для любого $p > 3$ имеем:

$$\| \hat{\mu}(\cdot, a)\|_{L^p(S^2)} \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^m). \tag{5}$$

В параграфе 3.2 рассмотрены L^p оценки преобразования Фурье поверхностных мер, сосредоточенных на гиперповерхностях с особенностью типа D_∞.

Пусть $S \subset \mathbb{R}^3$ является гладкой поверхностью и $\psi \in C_0^\infty(S)$ (т.е. ψ гладкая функция с компактным носителем на S). Рассмотрим меру $d\mu = \psi d\sigma$, где $d\sigma$ поверхностная мера. Преобразование Фурье меры определяется следующим осцилляторным интегралом:

$$\hat{\mu}(\xi) := \int_S e^{i(\xi, x)} d\mu.$$

Известно, что $\hat{\mu}(\xi)$ аналитическая функция. Рассмотрим задачу для гиперповерхностей в $\mathbb{R}^3$. Предположим, что фазовая функция $(x, \omega)|_S$ (где $\omega \in S^2$- единичная сфера с центром в начале координат) является малым возмущением особенности типа D_∞.

Теорема 3.2.1. Пусть S аналитическая гиперповерхность в $\mathbb{R}^3$ и имеет особенность типа D_∞ в начале координат. Тогда существует окрестность U начала координат такая, что для любого $\psi \in C_0^\infty(U)$ имеет место включение $\hat{\mu} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ при всех $p > 3$.

В параграфе 3.3 полученные результаты применены к оценкам о четырех знаменателях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По результатам проведенного исследования представляется возможным сформулировать следующие выводы.

Получены необходимые достаточные условия приспособленности локальных систем координат для формальных степенных рядов.

Определено понятие G- приспособленных систем координат.

Найдено соотношение относительно высоты $h_G(\Phi)$ для $G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_n \subset diff$ и доказано достаточное условие существования G-приспособленных систем координат.

Если коэффициенты разложения Тейлора гладкой функции принадлежат полю рациональных чисел или конечному алгебраическому расширению поля рациональных чисел, то существуют обобщенно приспособленные системы координат.

На основе линейно-приспособленных систем координат исследованы особенности фазовой функции, ассоциированной с невыпуклой поверхностью, для которой гауссова кривизна имеет нуль не выше второго порядка.

В случае, когда гауссова кривизна поверхности имеет нуль кратности не больше двух, форма особенностей соответствующей фазовой функции имеет четыре типа $A_2, A_3, D_k^{\pm}$ и D_∞.

При этом фазовая функция, соответствующая классу поверхностей, рассмотренных Эрдошем- Салмхофером, является $\mathbb{R}_+$-версальной деформацией особенности типа $A_k (k \leq 3)$.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES
DSc.30.09.2019.FM.01.01 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

SAMARKAND STATE UNIVERSITY

SOLEEVA NIGINA AHMADJONOVNA

LAGRANGIAN SINGULARITIES OF THE HYPERSURFACES IN $\mathbb{R}^3$ WITH GAUSSIAN CURVATURE, HAVING ZERO OF SECOND ORDER

01.01.04- Geometry and Topology

**ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD)
ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

Tashkent – 2021

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2019.3.PhD/FM401

Dissertation has been prepared at Samarkand State University and institute of mathematics named after V.I.Romanovsky.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, Russian, English (resume)) on the website (http:ik-fizmat@nuu.uz/) and the "ZiyoNet" Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Ikromov Isroil Akramovich** Doctor of Physical and mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Narmanov Abdigappar Yakubovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
	Djabbarov Gayratbay Farhadovich PhD of Physical and Mathematical Sciences, docent
Leading organization:	**Branch of National Research Nuclear MEPhI in Tashkent**

Defense will take place «26» August 2021 at 14:00 at the meeting of Scientific Council number DSc.30.09.2019.FM.01.01 at National University of Uzbekistan. (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871)246-53-21, fax: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource center at National University of Uzbekistan (is registered №_____). (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871)246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2021 year.
(Mailing report №____________ on «____» ________________2021 year).

A.Sadullaev
Chairman of scientific council
on award of scientific degrees,
D.F-M.S., Academician

N.K. Mamadaliyev
Scientific secretary of scientific council
on award of scientific degrees,
PhD in Math. And Physics

R.B.Beshimov
Chairman of scientific seminar
under scientific council on award
of scientific degrees, D. F.-M. S.

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of research work is construction of algorithms to find adapted coordinates system and application of the systems to investigate the singularities of Lagrangian maps associated to non-convex hypersurfaces in three-dimensional Euclidian space, having Gaussian curvature with zeros of second order. Also, investigate asymptote behavior of oscillatory integrals and uniform estimates for oscillatory integrals depending on small parameters.

The object of the research work are singularities of Lagrangian maps, phase function, oscillatory integrals associated to Fourier transform of smooth Borel's measures supported to hypersurfaces.

Scientific novelty of the research work is as follows:

It is constructed an algorithm to find adapted coordinates system and defined class of function for which there exist a finite algorithm to find adapted coordinates system.

It is constructed algorithm for determination and it is proved existence of adapted coordinate system for formal power series on finite extension of the rational numbers field.

It is proved existence of generalized adapted coordinate system for subgroup of diffeomorphisms group and studied singularities of the phase functions associated to hypersurfaces having Gaussian curvature with zeros of the second order.

It is finding relation in between order of tangential points and multiplicity of critical points of the phase function. It is obtained a solution of the Erdös Salmhofer problem for Arnold's D type singularities and presented a new proof of L.Erdös and M.Salmhofer Theorem.

It is obtained the sharp L^p- bound for measures, supported on hypersurfaces having D_∞ type singularities.

It is obtained an improvement analogy of L. Erdös and M. Salmhofer estimate for singular integral.

Implementation of the research results. The results obtained during the dissertation research are practiced in the following areas:

the result has played an important role to investigate their existence and uniqueness of solutions for nonlinear integral equations. The results of the dissertation have been used in the in the research under integral research grant of FASA 2/2017, "Newton- Kantorovich Method for solving a class of nonlinear integral equations" of the Nilai University (Malaysia,10.06.2019);

the results obtained uniform estimates of the Fourier transform of measures concentrated on smooth hypersurfaces were used in the fundamental project OT-F4-69 "Harmonic analysis, power geometry and their applications to solving problems of mathematical physics" when studying the behavior of the solution of the Cauchy problem of the discrete Klein-Gordon equation for large values of time (Reference of Samarkand State University No. 1-1030 dated April 10, 2021).

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 119 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (1 часть; part 1)

1. Икромов. И.А., Солеева Н.А. О точном показателе суммируемости преобразования Фурье поверхностных мер. // Uzbek Mathematical Journal. №4, 2013. С. 16-25. (01.00.00; №6)
2. Солеев А., Солеева Н.А. Power geometry for finding periodic solutions in one system of ODE. // Malaysian journal of mathematical sciences, Volume 8, Issue 2. 2014. P. 255-264. (№3. Scopus, IF=1.0)
3. Солеева Н.А. Обобщенные приспособленные системы координат для гладких функций. // Дан. Р.Уз, №5, 2014. С. 5-8. (01.00.00; №7)
4. Солеева Н.А. О существовании обобщенных приспособленных систем координат. // Uzbek Mathematical Journal. №4, 2014. С.134-143. (01.00.00; №6)
5. Солеева Н.А. Теорема Гильберта о нуль- формах и алгоритм построения приспособленных систем координат. // Научный Вестник СамГУ, № 5\87, 2014, С.15-18. (01.00.00; №2)
6. Туракулов Д. Д., Солеева Н.А., Равномерные оценки осцилляторных интегралов с фазой функций, имеющих конечный порядок // Научный Вестник СамГУ, №1\89, 2015, С.33-39. (01.00.00; №2)
7. Туракулов Д. Д., Солеева Н.А. О равномерных оценках преобразование Фурье гладких зарядов, сосредоточенных на некоторых гиперповерхностях // Uzbek Mathematical Journal. №2, 2016. С.109-123. (01.00.00; №6)
8. Солеева Н.А. Об особенностях фазовой функции, связанной с невыпуклыми поверхностями. // Uzbek Mathematical Journal. №4, 2015, С.118-128. (01.00.00; №6)
9. Soleeva N.A., L^p -bound for the Fourier Transform of Surface-Carried Measures Supported on Hypersurfaces with D_∞ Type Singularities. // Jour. of Siberian Federal Un, Math. and Physics. Volume 13, Issue 3, 2020. P. 350-359. (№3, Scopus, IF=0.5)

II бўлим (2 часть; part 2)

10. Икромов И.А., Солеева Н.А. Об оценках сингулярного интеграла. // CONTINUUM. Математика. Информатика. Образование. Выпуск № 2(6), Елец, 2017. С. 20-27.
11. N. Soleeva, D. Ikromova. On the Fourier transform of measures supported on curves with torsion. // International training- seminars on mathematics in conjunction with the joint mathematics meeting. Samarkand, 3-5 June, 2011, P. 128-132.

12. Солеева Н.А., Акрамова Д.И. Об одном обобщение теореме Гильберта-Хаджиева. // “Математик анализнинг долзарб муаммолари”, Ургенч, 9-10 ноябр, 2012, С. 29-30.
13. Солеева Н.А., Хайдаров З.Х. Алгоритм определения особенностей отображения Гаусса для некоторых поверхностей. // XXI-аср интелектуал авлод асри, Навоий.
14. N.A. Soleeva. On adapted coordinate system to polynomial functions. // International seminar of mathematics and natural sciences (ISMNS 2013). 15-17 August 2013, Samarkand, P. 42
15. Солеева Н.А., Хайдаров З.Х. Алгоритм определения особенностей отображения Гаусса для некоторых поверхностей // “Ёш математикларнинг янги теоремалари–2013”, Наманган давлат университети, 15- 16 апрел.
16. A. Soleev, N. Soleeva, Power geometry and algebraic equations // ICMSS 2013. AIP Conf. Proc. 1557, P. 85-88.
17. Солеева Н.А. О суммируемости преобразование Фурье мер сосредоточенных на невыпуклых гиперповерхностях // «Современные методы математической физики и их приложения-II», 15-17 апрель, Ташкент, 2015, С.76-77.
18. Солеева Н.А. Об особенностях фазовой функции, связанной с невыпуклыми поверхностями // International Conference Nonlinear Analysis and its Applications, 19-21 сентябрь, Самарканд-2016, С.39-40.

Автореферат Самарканд давлат университети босмахонасида таҳрирдан ўтказилиб, ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги матнлари ўзаро мувофиқлаштирилди.

Босишга рухсат этилди: __.__.202__ йил
Бичими 60х84 1/16, «Times New Roman»
гарнитурада рақамли босма усулида босилди.
Шартли босма табоғи 2,5. Адади: 100. Буюртма: № 43-1/2021

140104, Самарқанд шахри, Универитет хиебони, 15.

Самарканд давлат университети
босмахонасида чоп этилди