ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSC.03/30.12.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ШаРИПОВ ХУРШИД ФАЗЛИДДИНОВИЧ

СУБМЕРСИЯЛАРНИНГ АКСЛАНТИРИШЛАР ГРУППАСИГА НИСБАТАН ДИФФЕРЕНЦИАЛ ИНВАРИАНТЛАРИ

01.01.04 – Геометрия ва топология

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PHD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ–2021

УДК: 514.763.2

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSC.03/30.12.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГаШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ШАРИПОВ ХУРШИД ФАЗЛИДДИНОВИЧ

СУБМЕРСИЯЛАРНИНГ АКСЛАНТИРИШЛАР ГРУППАСИГА НИСБАТАН ДИФФЕРЕНЦИАЛ ИНВАРИАНТЛАРИ

01.01.04 – Геометрия ва топология

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PHD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ–2021

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2018.2.PhD/FM227 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Ўзбекистон миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (www.ik-fizmat.nuu.uz) ва «Ziyonet» ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Нарманов Абдигаппар Якубович** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Мищенко Александр Сергеевич** физика-математика фанлари доктори
	Рахимов Абдуғофур абдумажидович физика-математика фанлари доктори
Етакчи ташкилот:	**“ММФИ” миллий тадқиқот ядро университети Тошкент шаҳридаги филиали**

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2021 йил «___»_________ соат_____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (____ рақами билан рўйхатга олинган). Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 246-02-24.

Диссертация автореферати 2021 йил «____» _______________куни тарқатилди.
(2021 йил «____» ___________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

А. Садуллаев
Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор,
академик

Н.К. Мамадалиев
Илмий даражалар берувчи
илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.ф.д. (PhD)

Р.Б.Бешимов
Илмий даражалар берувчи
илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси,
ф.-м.ф.д.

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида фундаментал фанлар соҳасида олиб борилаётган кўпгина илмий-амалий тадқиқотлар замонавий геометрик масалалари хусусан дифференциал инвариантлар назарияси масалаларини тадқиқ қилишга келтирилади. Феликс Клейн ўзининг Эрланген дастурида, турли геометрияларнинг таснифи учун ягона фикрни олға сурди. Бу дастурга кўра, геометриянинг асосий вазифаси геометрик обьектларнинг, шу геометрияни аниқловчи акслантиришлар группасига нисбатан инвариантларини қуришдан иборат. Шунинг учун бир параметрли акслантиришлар группасининг инвариантларини топиш, субмерсияларнинг акслантиришлар группасига нисбатан дифференциал инвариантларини топиш геометрия ва топологияда катта аҳамиятга эга ҳисобланади.

Жаҳонда дифференциал геометрия ва дифференциал инвариантлар назариясининг актуал масалаларидан бири субмерсияларнинг дифференциал инвариантларини ўрганиш бўйича илмий изланишлар олиб борилмоқда. Дифференциал инвариант тушунчаси инвариант дифференциаллаш тушунчаси билан бир қаторда замонавий геометрияда асосий ўринни эгаллайди. Максимал рангли дифференциалланувчи акслантиришлар математиканинг турли соҳаларида, хусусан, риман геометриясида муҳим аҳамият касб этмоқда. Бу борада, максимал рангли дифференциалланувчи акслантиришларнинииг муҳим синфи ҳисобланган субмерсиялар геометриясини таснифлаш, бир параметрли акслантиришлар группасининг инвариантларини топиш, субмерсияларнинг акслантиришлар группасига нисбатан дифференциал инвариантларини топишга алоҳида эьтибор берилмоқда.

Мамлакатимизда математиканинг фундаментал ва амалий тадбиқига эга бўлган геометрия ва топологиянинг долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, сўнги йилларда дифференциал геометрия замонавий математиканинг қадимий ташкил этувчиси сифатида замонавий математика масалаларини ечишга оид салмоқли натижаларга эришилди. “алгебра, динамик тизимлар назарияси, геометрия ва топология” фанларининг устувор йўналишлари бўйича ҳалқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифалар ва фаолият этиб белгиланди [1] . Бу борада акслантиришлар группасининг дифференциал инвариантларини топиш, субмерсияларнинг дифференциал инвариантларини топиш жиддий аҳамиятга эга бўлиб ҳисобланади.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида” ги ПФ-4947 Фармони, 2019 йил 9 июлдаги “Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида”ги 292-сонли қарори.

томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-4387-сонли ва 2020 йил 7 майдаги “Математика соҳасидаги таьлим сифатини ошириш ва илмий тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-4708 сонли Қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Диссертация Республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Субмерсиялар замонавий Риман геометриясининг кўплаб соҳаларида қўлланилганлиги учун, субмерсияларнинг дифференциал инвариантларини ўрганиш жуда самаралидир. Риман субмерсияларининг фундаментал хоссалари, хусусан эгрилик хоссалари ва фундаментал тенгламалари J. Cheeger, D. Gromoll, R. Hermann ишларида ўрганилган. Е.Виттеннинг ишларидаги квант майдонлар назариясида, В.В.Лычагиннинг ишларидаги геометрик квантлаш масалаларида ва а.М.Виноградов, В.В.Личагин, Л.В.Овсянниковларнинг ишларидаги чизиқли бўлмаган дифференциал тенгламаларнинг геометрик назариясида дифференциал инвариантларнинг қўлланилганлиги сабабли уларни ўрганишга қизиқиш ортди.

В.М.Кузаконнинг ишларида текисликдаги субмерсияларнинг ҳаракатлар группасига нисбатан дифференциал инвариантлар тўлиқ системаси келтирилган. Бундан ташқари, юқори тартибли ҳар қандай дифференциал инвариантларнинг, иккинчи тартибли дифференциал инвариантларни инвариант вектор майдонлар бўйлаб дифференциаллаш орқали ҳосил қилиш мумкинлиги кўрсатилган. И.С. Стрельцованинг ишларида Евклид ёки Минковский метрикаси киритилган текисликдаги эгри чизиқнинг R-конформ акслантиришларга нисбатан скаляр дифференциал инвариантлари алгебраси структураси тавсифланган. Бундан ташқари де Ситтер текислиги ҳаракатлари группасига нисбатан дифференциал инвариантлар алгебраси тузилган. Бу алгебрани битти иккинчи тартибли дифференциал инвариант ва иккита инвариант дифференциаллаш ёрдамида ҳосил қилиш мумкин. Де Ситтер текислиги ҳаракатларига нисбатан регуляр эгри чизиқларнинг эквиваленлиги ҳақидаги теорема исботланган. Хос ҳаракатлар группасининг махсус орбиталари тавсифланган.

Ҳозирги вақтда субмерсия тушунчаси ва субмерсиялар геометриясини ўрганиш бўйича асосий натижалар Риман геометрияси бўйича дарсликларга киритилган бўлиб, улар нафақат геометрияда, балки механика, назарий физика, нисбийлик назарияси каби фанларда қўлланилади. Субмерсияларнинг физика ва механикада қўлланилиши италиялик олимлар M. Falcitelli, A. M. Pastore, S. Ianus асарларида ўрганилган. Олимларимиз профессор А.Я. Нарманов ва унинг шогирдлари А. Байтураев, Г.

Каипназароваларнинг тадқиқотларида Евклид фазосида риман субмерсиялари ҳосил қилган қатламаларнинг тўлиқ классификацияси келтирилган ва қатламларнинг секцион эгрилиги билан боғлиқ геометрик хусусиятлари ўрганилган. А. С. Шарипов ишларида эса субмерсиялар ҳосил қилган қатламалар изометриялари группаси тадқиқ этилган. Б.А.Турсунов ишларида эгрилиги манфий бўлмаган кўпхилликларда Риман субмерсиялари геометрияси ўрганилган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Ўзбекистон Миллий университетининг MRU-10/2017 “Геометрик ва аналитик методларнинг дифференциал ўйинлар ва бошқарув назарияси масалаларида ривожлантириш” мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади субмерсияларнинг бир параметрли акслантиришлар группасига нисбатан ва конформ вектор майдон оқими ҳосил қилган акслантиришлар группасига нисбатан дифференциал инвариантларини топишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари қуйидагилар:

Бир параметрли акслантиришлар группасининг юқори тартибли дифференциал инвариантларини топиш;

Субмерсияларнинг конформ аклантиришлар группасиги нисбатан иккинчи тартибли дифференциал инварианларини топиш;

Риман субмерсияларининг сатҳ тўпламлари ўзаро изометрик эканлигини исботлаш;

Минковский фазосида субмерсияларнинг ҳаракатлар группасига нисбатан иккинчи тартибли дифференциал инвариантларини топиш.

Тадқиқот объекти субмерсияларнинг дифференциал инвариантлари, конформ вектор майдонлар, Ли алгебралари.

Тадқиқотнинг предмети субмерсиялар геометрияси, конформ вектор майдонлар хоссалари, бир параметрли акслантиришлар группасига нисбатдан субмерсиянинг дифференциал инвариатларини тадқиқ қилишдан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида дифференциал геометрия, дифференциал топология, риман геометрияси ва қатламалар назарияси усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

ихтиёрий бир параметрли группанинг нолинчи тартибли инвариантларини билган ҳолда юқори тартибли дифференциал инвариантини топиш усули топилган;

секцион эгрилии нолга тенг кўпхилликда риман субмерсияси ҳосил қилган қатламанинг қатламлари ўзаро изометрик бўлган тўла геодезик риман қатламаси бўлиши исботланган;

агар метрик функциянинг ҳар бир критик сатх тўпламлари нуқта ёки регуляр сирт ва улар ўзаро ажралган бўлса, у ҳолда бу метрик функциянинг сатх тўпламлари ўзаро конформ эквивалент эканлиги исботланган;

конформ вектор майдон оқими ҳосил қилган акслантиришлар группасига нисбатан, субмерсиянинг сатҳ тўплами бош эгриликлари нисбати субмерсиянинг иккинчи тартибли дифференциал инварианти бўлиши исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари. Субмерсияларнинг дифференциал инвариантлари бўйича тадқиқот натижалари вектор майдонлар оиласининг орбиталарини топишда ва дифференциал геометриянинг эквивалентлик масалаларини тадқиқ қилишда амалий аҳамиятга эга.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги. Риман геометрияси, дифференциал топология ва дифференциал геометрия методлари, ҳамда математик фикрлашнинг қатъийлиги билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти.

Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти шундан иборатки, субмерсиялар сатҳ тўпламларининг бош эгриликлари нисбати, конформ вектор майдон оқими ҳосил қилган акслантиришлар группасига нисбатан иккинчи тартибли дифференциал инвариант бўлиши исботланганлиги билан изоҳланади.

Диссертациянинг амалий аҳамияти шундан иборатки, дифференциал инвариантлар ва риман субмерсиялари геометриясини ўрганиш, сиртларнинг ва қатламалар ва субмерсиялар ёрдамида берилган қатламали кўпхилликлар қатламларининг дифференциал инвариантларини топишда ва тўла дифференциал геометриянинг масалаларида қўлланилиши билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Субмерсияларнинг дифференциал инвариантлари бўйича олинган диссертация натижалари қуйидаги илмий-тадқиқот лойиҳаларида қўлланилган:

Субмерсияларнинг акслантиришлар группасига нисбатан дифференциал инвариантлари Ф-4-42 рақамли “Яримаддитив $\tau-$ узлуксиз Радон функционаллари фазоси кардинал ва топологик хоссалари” мавзусидаги фундаментал лойиҳада топологик фазоларнинг топологик, алгебраик ва функционал инвариантлари орасидаги боғланишни аниқлашда фойдаланилган (Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетининг 2021 йил 19 апрелдаги № 04/11-2126 сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши топологик фазоларнинг топологик, алгебраик ва функционал инвариантлари орасидаги боғланишни аниқлаш, хусусан сиртлар ва улардаги дифференциал операторларининг дифференциал инвариантларини топиш имконини берган;

Бир параметрли акслантиришлар группасининг юқори тартибли дифференциал инвараинларини топишга доир илмий натижалар R.J130000.7854.5F235 рақамли илмий тадқиқот лойиҳасида хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг инвариант ечимларини топишда фойдаланилган (Малайзия Технологиялар Университетининг 2021 йил 29 мартадаги маьлумотномаси). Илмий натижаларнининг қўлланилиши хусусий ҳосилали тенгламалар билан аниқланувчи динамик системаларнинг ечимлар фазоларини ўрганиш имконини берган, хусусан, дифференциал инвариантларни топиш усуллари хусусий ҳосилали тенгламаларни оддий дифференциал тенгламаларга келтириш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 9 та Халқаро ва 3 та Республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Тадқиқот мавзуси бўйича жами 18 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 6 та мақола, жумладан, 2 таси хорижий ва 4 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 100 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Диссертация кириш қисм, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат.

Кириш қисмида диссертация мавзусига оид долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг Ўзбекистон Республикаси фан ва технологиялари ривожланишининг устивор йўналишларига мувофиқлиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси ҳамда Ўзбекистон Миллий Университети илмий тадқиқотлари билан боғлиқлиги келтирилган.

Тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг биринчи боби «Ли группалари ва уларнинг инвариант функциялари» деб номланган бўлиб, у учта параграфдан ташкил топган. Мазкур бобда диссертацияда ишлатиладиган асосий тушунча ва ёрдамчи фактлар келтирилган.

Ли группалари бир томондан алгебраик группа тушунчасини, иккинчи томондан эса, кўпхилликнинг дифференциал-геометрик тушунчасини мужассамлаштиради. Бу эса, чекли группалар учун ишлатиб бўлмайдиган, симметриялар группасини тадқиқ этиш учун мухим бўлган техника юзага келишига сабаб бўлди. абстракт группа таьрифини келтиришдан бошлаймиз.

Ли группаларининг фарқли тарафи шундаки, у силлиқ кўпхиллик структурасига ҳам эга бўлиб, унинг элементларини узлуксиз равишда ўзгартириш мумкин.

Таьриф 1.1.2. r – параметрли Ли группаси – бу r – ўлчовли силлиқ кўпхиллик структурасига эга бўлган Ли группаси бўлиб, группа амали

$m : G \times G \to G,\ m(g,h) = g \cdot h,\ g,h \in G$ ҳам, тескари элемент амали $i : G \to G,\ i(g) = g^{-1},\ g \in G$ ҳам кўпхилликнинг силлиқ аксlантириши бўлади.

Энди бир параметрли акслантиришлар оилага тегишли бўлган

$$f^t : M \to M,\ f^t(x) = \left(f_1^t, f_2^t, ..., f_n^t\right),$$

акслантиришни кўриб чиқамиз, бунда $t-$ ҳақиқий параметр. агар f^t акслантиришлар тўплами G

$$f^0(x) = x,\ f^{t_1}(x) f^{t_2}(x) = f^{t_1+t_2}(x),\ \left(f^t\right)^{-1} = f^{-t}$$

шартларни қаноатлантирса, бир параметрли группа дейилади

Бу f_i^t функцияларни t параметр бўйича, $t = 0$ нуқта атрофида Тейлор қаторига ёямиз ва $f_i^0 = x_i$ эканлигини ҳисобга олиб чексиз кичик акслантиришни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз

$$f_i^t \approx x_i + \xi_i t + o\left(t^2\right),\ \text{бунда}\ \xi_i = \left.\frac{df_i^t}{dt}\right|_{t=0}.$$

Ҳар бир $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ вектор, f^t акслантиш нуқталари образлари ёрдамида тавсифланувчи эгри чизиқнинг уринма вектори бўлади. Бу вектор майдон биринчи тартибли дифференциал оператор кўринишида ҳам ёзилиши мумкин:

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi_1 \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Бу вектор майдон G бир параметрли акслантиришлар группасининг инфинитезимал ясовчиси дейилади. агар G группа $k-$ўлчовли Ли группаси бўлса, у ҳолда группа k та инфинитезимал ясовчиларга (вектор майдонларга) эга бўлади.

Вектор майдонлар устидаги амаллар ичида муҳимларидан бири бу-уларнинг Ли қавси ёки коммутаторидир. Бу амални дифференциаллаш опреатори сифатида киритиш осонроқ бўлади. агар $X, Y-$ вектор майдонлар M кўпхилликда аниқланган бўлса, уларнинг Ли қавси $[X, Y]-$ барча $f : M \to R$ силлиқ функциялар учун

$$[X,Y](f) = X\left(Y(f)\right) - Y\left(X(f)\right). \qquad (1.1.5)$$

шартни қаноатлантирувчи ягона вектор майдондир.

агар $X, Y-$ вектор майдонлар локал координаталарда

$$X = \sum_{i=1}^{m} \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i},\ Y = \sum_{i=1}^{m} \eta^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

кўринишга эга бўлса, уларнинг Ли қавси

$$[X,Y] = \sum_{i=1}^{m} \left\{X\left(\eta^i\right) - Y\left(\xi^i\right)\right\} \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \left\{\xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\right\} \frac{\partial}{\partial x^i}. \qquad (1.1.6)$$

кўринишда бўлади.

Таьриф 1.1.3. Ли алгебраси деб, қуйидаги шартланни қаноатлантирувчи, алгебранинг Ли қавси деб аталувчи,

$$[\cdot,\cdot]: L\times L\to L,$$

бичизиқли форма аниқланган L вектор фазога айтилади:

(a) Бичизиқлилик:

$$[aX+bY,Z]=a[X,Z]+b[Y,Z],$$
$$[X,aY+bZ]=a[X,Y]+b[X,Z],$$

бунда $a,b\in R-$ ўзгармаслар.

(b) Кососимметриклик:

$$[X,Y]=-[Y,X].$$

(c) Якоби айтияти:

$$[X,[Y,Z]]+[Z,[X,Y]]+[Y,[Z,X]]=0$$

барча $X,Y,Z\in L$ лар учун.

M кўпхилликда аниқланган барча силлиқ вектор майдонлар тўплами (1.1.6) тенглик билан аниқланган Ли қавсига нисбатан Ли алгебрасини ташкил этади. агар G группа k параметрли группа бўлса, у ҳолда бу группанинг инфинитезимал ясовчилари тўплами k ўлчовли Ли алгебрасини ташкил этади.

Таьриф 1.2.1. M кўпхилликда G акслантиришлар группаси берилган бўлсин. агар барча $x\in N$ и $g\in G$ лар учун, $g\cdot x\in N$ шарт ўринли бўлса, $N\subset M$ қисм туплам $G-$ инвариант, G группа эса N қисм тўпламнинг симметриялар группаси дейилади.

Таьриф 1.2.2. M кўпхилликда G акслантиришлар группаси берилган бўлсин. агар барча $x\in M$ ва $g\in G$ лар учун, $I(g\cdot x)=I(x)$ ўринли бўлса, $I:M\to R$ функция $G-$инвариант функция дейилади.

Қуйидаги теоремалар ўринли [6],[63]**Ошибка! Источник ссылки не найден.**.

Теорема 1.2.1. агар G группа M кўпхилликда аниқланган группа, $I:M\to R-$ силлиқ функция бўлсин. I функция $G-$ инвариант функция бўлиши учун ҳар бир $\{x: I(x)=c\}, c\in R,$ сатҳ тўплам M кўпхилликнинг $G-$инвариант қисм тўплами бўлиши зарур ва етарли.

Теорема 1.2.2. G группа M кўпхиллик алмаштиришларидан иборат группа бўлсин. Ҳақиқий қийматли $I:M\to R$ функция G группанинг инвариант функцияси бўлиши учун, G группанинг ҳар бир X инфинитезимал ясовчиси ва барча $x\in M$ лар учун

$$X(I)=0 \qquad (1.2.1)$$

тенглик бажарилиши зарур ва етарли.

Агар $X_1,...,X_r$ ясовчилар G группанинг инфинитезимал ясовчилар Ли алгебрасининг базисини ташкил этса, у ҳолда 1.2.2-теорема, $I(x)-$ функция фақат ва фақат $X_k(I)=0, k=1...r$ тенгликлар ўринли бўлсагина инвариант функция бўлишини таькидлайди. Локал координаталарда

$$X_k = \sum_{i=1}^{m} \xi_k^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

эканлигидан I функция чизиқли, бир жинсли, биринчи тартибли хусусий ҳосилали тенгламалар сиситемасининг ечими бўлиши келиб чиқади

$$X_k(I) = \sum_{i=1}^{m} \xi_k^i(x) \frac{\partial I}{\partial x^i} = 0,\ k = 1,\dots,r. \qquad (1.2.2)$$

Ушбу $f, g : M \to B$ акслантиришлар $f(p) = g(p) = q$ шартни қаноатлантирувчи силлиқ акслантиришлар бўлсин.

1) Агар $T_pM \to T_pB$ акслантириш сифатида $(df)_p = (dg)_p$ бўлса, f акслантириш g билан p нуқтада биринчи тартибли уринмага эга бўлади.

2) Агар $(df): TM \to TB$ акслантириш (dg) акслантириш билан T_pM нинг ҳар бир нуқтасида $(k-1)$ тартибли уринмага эга бўлса, f акслантириш g билан p нуқтада $k-$ тартибли уринмага эга бўлади. Бу маьлумот қуйидагича ёзилади: p нуқтада $f \sim_k g$ ($k-$мусбат сон).

Ушбу $J^k(M,B)_{p,q}$ тўплам сифатида, $f(p) = q$ шартни қаноатлантирувчи $f : M \to B$ акслантиришлар фазосидаги " p нуқтада $\sim_k$ " муносабат билан аниқланган эквивалентлик синфини белгилаймиз.

$J^k(M,B) = \bigcup_{(p,q)\in M\times B} J^k(M,B)_{p,q}$ белгилаш киритамиз. Маьлумки, бу тўплам $n + m\sum_{i=0}^{k} C_{n+i-1}^{i}$ ўлчовли силлиқ кўпхиллик бўлади [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**].

Таьриф 1.3.1. Ушбу $J^k(M,B)$ кўпхиллик $k-$ жет фазо деб аталади [37].

G группанинг M даги таъсири $J^k(M,B)$ фазода таьсирни ҳосил қилади. Бу таьсир G группа таьсирининг $J^k(M,B)$ даги $k-$ давоми дейилади. G группа таьсирининг $k-$ давомининг инфинитезимал ясовчиси, группа инфенитезимал ясовчисининг $J^k(M,B)$ даги $k-$ давоми ҳисобланади.

Таьриф 1.3.2. $M \subset U \times V$ очиқ тўплам бўлсин. $X-$ вектор майдон M да аниқланган G_t бир параметрли группаниг инфинетизимал ясовчиси бўлсин. У ҳолда, $M^{(n)}$ $n-$ жет фазода аниқланган мос бир параметрли группа $G_t^{(n)}$ нинг инфинитезимал ясовчиси $X-$ вектор майдоннинг $n-$ давоми дейилади ва $X^{(n)}$ каби белгиланади.

Қуйидаги теорема ўринли [63].

Теорема 1.3.1. Қуйидаги

$$X = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x,y) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \varphi_\alpha(x,y) \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$$

$-$вектор майдон, $M \subset U \times V$ очиқ қисмтўпламда аниқланган бўлсин. У ҳолда $X-$ вектор майдоннинг $n-$ давоми $M^{(n)} \subset (U \times V)^{(n)}$ жет фазода аниқланган

$$X^{(n)} = X + \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_{J} \varphi_{\alpha}^{J} \left(x, y^{(n)} \right) \frac{\partial}{\partial y_J^{\alpha}}, \qquad (1.3.4)$$

вектор майдон бўлади, бунда иккинчи йиғинди барча $J = \left(j_1, ..., j_k \right), 1 \le j_{\chi} \le p, 1 \le k \le n$ мултииндекс бўйича олинади. $V^{(n)}$ даги φ_{α}^{J} функциялар қуйидаги формула бўйича аниқланади:

$$\varphi_{\alpha}^{J} \left(x, y^{(n)} \right) = D_J \left(\varphi_{\alpha} - \sum_{i=1}^{p} \xi^i y_i^{\alpha} \right) + \sum_{i=1}^{p} \xi^i y_{J,i}^{\alpha}, \qquad (1.3.5)$$

бунда $y_i^{\alpha} = \dfrac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^i}$ ва $y_{J,i}^{\alpha} = \dfrac{\partial y_J^{\alpha}}{\partial x^i}$.

Таьриф 1.3.3. Очиқ $M \subset U \times V$ қисм тўпламда аниқланган $G-$ акслантиришлар группаси берилган бўлсин. G группанинг $n-$ тартибли дифференциал инварианти $I : M^{(n)} \to R$ силлиқ функция бўлиб, $I\left(g^{(n)} \cdot \left(x, y^n \right) \right) = I\left(x, y^n \right), \left(x, y^n \right) \in M^{(n)}, \mathrm{g} \in \mathrm{G}$ тенгликни қаноатлантиради.

Қуйидаги теорема ўринли [63].

Теорема 1.3.2. $G-$ акслантиришлар группаси $M \subset R^2$ тўпламда аниқланган бўлсин. Фараз қилайлик, $I_1 = I_1\left(x, y^n \right)$ ва $I_2 = I_2\left(x, y^n \right)$ функциялар G группанинг $n-$ тартибли дифференциал инвариантлари бўлсин. У ҳолда қуйидаги

$$\frac{dI_2}{dI_1} = \frac{dI_2/dx}{dI_1/dx} \equiv \frac{D_x I_2}{D_x I_1} \qquad (1.3.7)$$

ҳосила G группанинг $n+1-$ тартибли дифференциал инварианти бўлади.

Диссертациянинг «Бир параметрли акслантиришлар группасининг дифференциал инвариантлари» деб номланган иккинчи боби иккита параграфдан ташкил топган. Ушбу бобда субмерсияларнинг бир параметрли акслантиришлар группасига нисбатан дифференциал инвариантлари топилган.

Ушбу $(M, g)-$ силлиқ, боғланишли n ўлчовли Риман кўпхиллиги бўлсин. Бу ерда g - риман метрикаси.

Таьриф 2.1.1. Ушбу $\pi : M \to B$ максимал рангли дифференциалланувчи акслантириш, $n > m$ шарт бажарилганда субмерсия дейилади, бунда $B-$ m ўлчовли силлиқ Риман кўпхиллиги.

Субмерсиялар геометриясини кўплаб муаллифлар томонидан ўрганилган, хусусан [76],[78].

Субмерсия ранги ҳақидаги теоремага асосан M кўпхилликда қатламлари $L_p = \{ q \in M : f(q) = p \}$ □ тўпламларнинг боғланишлилик компоненталаридан иборат $k = n - m$□ ўлчамли қатлама ҳосил бўлади.

Қатлам L_p нинг q нуқтасидаги уринма фазони T_qF орқали, T_qF қисм фазо ортогонал тўлдирувчисини H_qF орқали белгиласак, натижада уринма қатлама $TM=\left\{T_qM\right\}$ нинг қисм қатламалари $TF=\left\{T_qF\right\}, HF=\left\{H_qF\right\}$ ҳосил бўлиб, $TM=TF\oplus HF$ ортогонал йиғиндига эга бўламиз. Натижада ҳар бир X вектор майдон $X=X^v+X^h$ кўринишда тасвирланади, бунда $X^v\in TF,\ X^h\in HF$. агар $X^h=0$ (мос ҳолда $X^v=0$) бўлса, у ҳолда X вектор майдонга вертикал (мос ҳолда горизонтал) вектор майдон дейилади.

Ҳар қандай $u\in T_pB$ вектор ва ихтиёрий $q\in L_p$ нуқта учун шундай $h\in H_qF$ вектор мавжудки $df_p(h)=u$ бўлади. h вектор u векторнинг q нуқтадаги горизонтал кўтарилиши дейилади. B даги X вектор майдон учун ҳар бир q нуқтадаги қиймати $X_{f(q)}$ векторнинг горизонтал кўтарилиши бўладиган M даги $\overline{X}$ вектор майдон X вектор майдоннинг горизонтал кўтарилиши дейилади.

Таьриф 2.1.2. Агар $\pi: M\to B$ субмерсия дифференциали $d\pi$ горизонтал векторларнинг узунлигини сақласа, у риман субмерсияси деб аталади.

Қуйидаги

$$\pi: M\to R \qquad (2.1.1)$$

субмерсия ва бу субмерсия ҳосил қиладиган F қатламани кўриб чиқамиз.

Қуйидаги теорема иккинчи боб биринчи параграфининг асосий натижасиларидан биридир.

Теорема 2.1.1. Секцион эгрилиги нолга тенг бўлган силлиқ, боғланишли, тўла риман кўпхиллиги M берилган бўлсин. агар (2.1.1) риман субмерсияси бўлса, у ҳолда $F-$ қатламлари изометрик бўлган тўла геодезик риман қатламаси бўлади.

Таьриф 2.1.3. агар

$$f: M\to R \qquad (2.1.7)$$

дифференциалланувчи функция учун $X\,|\,gradf\,|^2=0$ шарт ҳар бир X вертикал вектор майдон учун бажарилса, f функция метрик функция дейилади [16].

Функциянинг бирорта сатҳ тўпламига критик нуқта тегишли бўлса, бу сатҳ тўплами критик сатҳ тўплами дейилади.

Фараз 2.1.1. Берилган $f: M\to R$ функциянинг **ҳ**ар бир критик сатҳ тўпламлари ёки нуқта, ёки ўзаро ажралган регуляр сиртлар бўлсин.

Теорема 2.1.2. Ушбу $f: R^n\to R$ метрик функция учун 2.1.1 фараз ўринли бўлсин. У ҳолда бу функциянинг сатҳ тўпламлари ўзаро конформ эквивалент бўлади.

Икинчи бобнинг иккинчи параграфида бир параметрли группанинг дифференциал инвариантларини топиш усули келтирилган.

Ушбу $G-$ группа иккита u,v эркли ва учта эркcиз x_1,x_2,x_3 ўзгарувчили фазода аниқланган аксалантиришлар Ли группаси ва қуйидаги вектор майдон

$$X=\xi_1(u,v,x)\frac{\partial}{\partial u}+\xi_2(u,v,x)\frac{\partial}{\partial v}+\sum_{i=1}^{3}\eta_i(u,v,x)\frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (2.2.1)$$

G группанинг инфинитиземал ясовчиси бўлсин.

Қуйидаги

$$X(F)=1. \qquad (2.2.2)$$

тенгламанинг илдизлари бўлган $F_1(u,x)$ ва $F_2(v,x)$ функцияларни кўриб чиқамиз.

Ушбу $I_1(u,v,x)$, $I_2(u,v,x)$ ва $I_3(u,v,x)$ функциялар группанинг функционал эркли инвариант функциялари бўлсин, яьни улар қуйидаги тенгламаларни қаноатлантирсин

$$X(I_i)=0, i=1,2,3. \qquad (2.2.3)$$

$D^k(F)$ сифатида k тартибли $D_s^k+D_t^k(F)$ ҳосилаларни белгилаймиз.

Теорема 2.2.1. Фараз қилайлик I_1,I_2,I_3 функциялар G группанинг эркли инвариантлари, $F_1(u,x)$ ва $F_2(v,x)$ функциялар $X(F)=1$ тенгламани қаноатлантиррсин. У ҳолда $I_i(u,v,x)$ ва $D^k(I_i)$ функциялар $k-$ тартибли дифференциал инвариантлар бўлади.

Диссертациянинг «Субмерсияларнинг дифференциал инварианлари» деб номланган учинчи бобида субмерсияларнинг конформ акслантиришлар группасиги нисбатан дифференциал инвариантлари ўрганилган.

M ва B мос равишдв n ва m ўлчовли силлиқ риман кўпхиллиги бўлсин.

Энди $f:R_1^3\to R$ субмерсияни кўриб чиқамиз, бунда R_1^3- уч ўлчовли Минковский фазоси. Эслатиб ўтиш жоизки, бу ҳолда метрика қуйидаги кўринишга эга бўлади

$$ds^2=-\left(dx_1\right)^2+\left(dx_2\right)^2+\left(dx_3\right)^2.$$

Қуйидаги вектор майдонлар билан ҳосил бўлган G группани қараймиз

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x_1},\ X_2=\frac{\partial}{\partial x_2},\ X_3=\frac{\partial}{\partial x_3}, \qquad (3.1.3)$$

$$X_4=x_2\frac{\partial}{\partial x_1}+x_1\frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad (3.1.4)$$

$$X_5=x_3\frac{\partial}{\partial x_1}+x_1\frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad (3.1.5)$$

$$X_6=-x_3\frac{\partial}{\partial x_2}+x_2\frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad (3.1.6)$$

$$X_7=h(u)\frac{\partial}{\partial u},h(u)\in \mathrm{C}^\infty\left(R\right). \qquad (3.1.7)$$

Қуйидаги теорема ўринли.

Теорема 3.1.1. $f: R_1^3 \to R$ субмерсиянинг Минковский фазосининг ҳаракатлари группаси G га нисбатан иккинчи тартибли дифференциал инвариантлари қуйидаги функциялар бўлади ($B \neq 0$ бўлса):

$$I_1 = H^2 = \frac{D^2}{B^3}, I_2 = K = \frac{F}{B^2},$$

$$I_3 = H^2 + \frac{AD + BC}{B^2}, I_4 = HK - \frac{(AF - BE)^2}{B^5},$$

бунда,

$$A = -p_{11} + p_{22} + p_{33}, B = -p_1{}^2 + p_2{}^2 + p_3{}^2,$$

$$C = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & -p_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{13} \\ p_{13} & -p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{22} & p_{23} \\ p_{23} & p_{33} \end{vmatrix},$$

$$D = \begin{vmatrix} -p_{11} & -p_{12} & p_1 \\ -p_{12} & -p_{22} & p_2 \\ p_1 & p_2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -p_{11} & -p_{13} & p_1 \\ -p_{13} & -p_{33} & p_3 \\ p_1 & p_3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{22} & p_{23} & p_2 \\ p_{23} & p_{33} & p_3 \\ p_2 & p_3 & 0 \end{vmatrix},$$

$$E = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & -p_{22} & -p_{23} \\ p_{13} & -p_{23} & -p_{33} \end{vmatrix},$$

$$F = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_1 \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} & p_2 \\ p_{13} & p_{23} & -p_{33} & -p_3 \\ p_1 & p_2 & -p_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Уч ўлчовли Евклид фазосида

$$X = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \qquad (3.2.1)$$

конформ вектор майдонни кўриб чиқамиз. Бу вектор майдоннинг оқими конформ акслантиришларни ҳосил қилади.

Юқоридаги (3.2.1) вектор майдоннинг $J^2(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_{11}, p_{12}, p_{22})$ фазодаги давоми қуйидаги кўринишга эга:

$$X^{(2)} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - p_{11} \frac{\partial}{\partial p_{11}} - p_{12} \frac{\partial}{\partial p_{12}} - p_{22} \frac{\partial}{\partial p_{22}}$$

Бу вектор майдон оқими

$$(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_{11}, p_{12}, p_{22}) \to (e^t x_1, e^t x_2, e^t x_3, p_1, p_2, e^{-t} p_{11}, e^{-t} p_{12}, e^{-t} p_{22})$$

кўринишда бўлади.

Энди $\varphi: R^3 \to R, \varphi(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2) - x_3$ субмерсияни кўриб чиқамиз. Бу субмерсиянинг сатҳ тўпламлари ошкор функция ёрдамида берилган $L_c = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_3 = f(x_1, x_2) - c\}$ регуляр сиртни ташкил этади.

Теорема 3.2.1. $\varphi: R^3 \to R, \varphi(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2) - x_3$ субмерсиянинг сатҳ тўпламлари бош йўналишлари (3.2.1) вектор майдон оқими ҳосил қилган конформ акслантиришларда бош йўналишларга ўтади.

Теорема 3.2.2. $\varphi: R^3 \to R, \varphi(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2) - x_3$ субмерсиянинг сатҳ тўпламлари бош эгриликлари нисбати, (3.2.1) вектор майдон оқими ҳосил қилган конформ акслантиришлар группасига нисбатан иккинчи тартибли дифференциал инвариант бўлади.

Теорема 3.2.3. $\varphi: R^3 \to R, \varphi(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2) - x_3$ субмерсиянинг сатҳ тўпламлари асимптотик йўналишлари (3.2.1) вектор майдон оқими ҳосил қилган конформ акслантиришларда асимптотик йўналишларга ўтади.

ХУЛОСА

Диссертация субмерсияларнинг акслантиришлар группасига нисбатан дифференциал инвариантларини топишга бағишланган. Диссертация ишида олинган асосий натижалар қуйидагилардан иборат:

Ихтиёрий бир параметрли группанинг нолинчи тартибли дифференциал инвариантини билган ҳолда, юқори тартибли дифференциал инвариантини топиш усули келтирилган.

Секцион эгрили нолга тенг бўлган риман кўпхиллигида аниқланган риман субмерсияси ҳосил қилган қатлама, изометрик қатламли, тўла геодезик риман қатламаси бўлиши исботланган.

Метрик функциянинг сатҳ тўпламлари ўзаро конформ эквивалент эканлиги кўрсатилган.

Субмерсиянинг Минковский фазосининг ҳаракатлари группасига нисбатан иккинчи тартибли дифференциал инвариантлари топилган.

Конформ вектор майдон оқими ҳосил қилган акслантиришда, субмерсиянинг сатх тўплами бош йўналишлари яна бош йўналишларга ўтиши исботланган.

Конформ вектор майдон оқими ҳосил қилган акслантиришлар группасига нисбатан, субмерсиянинг сатҳ тўплами бош эгриликлари нисбати субмерсиянинг иккинчи тартибли дифференциал инварианти бўлиши исботланган.

Конформ вектор майдон оқими ҳосил қилган акслантиришда, субмерсиянинг сатҳ тўплами асимптотик йўналиши яна асимптотик йўналишга ўтиши исботланган.

Диссертация ишидаги барча натижалар янги ҳисобланади ва улардан вектор майдонлар назариясида, қатламалар назариясида, риман субмерсиялари геометриясида ва замонавий геометриянинг бошқа бўлимларида олиб бориладиган тадқиқотларда фойдаланиш мумкин.

Муаллиф илмий раҳбари профессор Абдигаппар Якубович Нармановга муаммоларнинг қўйилиши ва уларни муҳокама қилишда доимий фойдали маслаҳатлари ва кўрсатмалари учун ўзининг чуқур миннатдорлигини билдиради.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSC.03/30.12.2019.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

ШАРИПОВ ХУРШИД ФАЗЛИДДИНОВИЧ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ СУБМЕРСИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

01.01.04 – Геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PHD) ПО ФИЗИКО – МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ТОШКЕНТ–2021 год

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за B2018.2.PhD/FM227.

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана имени М. Улугбека.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.ik-fizmat@nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель: **Нарманов Абдигаппар Якубович**
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Мищенко Александр Сергеевич**
доктор физико-математических наук
Рахимов Абдугофур абдумажидович
доктор физико-математических наук

Ведущая организация: **Националный исследовательский ядерный университет «МИФИ» филиалв городе Ташкенте.**

Защита диссертации состоится «____» _____________2021 года в ____ часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана. (адрес: 100174, г. Ташкент, алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871)227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №_____). (адрес: 100174, г. Ташкент, алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

автореферат диссертации разослан «___» _______________2021 года.

(протокол рассылки №________ от «____» _______________2021 года).

А.Садуллаев
Председатель Научного совета
по присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., профессор, академик

Н.К.Мамадалиев
Ученый секретарь Научного совета по
присуждению ученых степеней, Ph.D.

Р.Б.Бешимов
Председатель научного семинара при
Научном совете по присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., доцент

ВВЕДЕНИЕ (Аннотация диссертации доктора философии(PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многочисленные научные и практические исследования, проводимые в области фундаментальных и прикладных наук в мировом уровне, используют геометрические методы, в том числе методы и результаты теории дифференциальных инвариантов. В Эрлангенской программе Феликс Клейн предложил единый подход к описанию различных геометрий. Согласно этой программе, одной из основных задач геометрии является построение инвариантов геометрических объектов относительно действия группы, определяющей эту геометрию. Поэтому нахождение инвариантов однопараметрической группы, нахождение дифференциальных инвариантов субмерсии относительно групп преобразований имеют важное значение в геометрии и топологии.

В мире проводится научные исследования по изучению дифференциальных инвариантов субмерсий, одной из актуальных проблем дифференциальной геометрии и теории дифференциальных инвариантов. Концепция дифференциального инварианта, наряду с концепцией инвариантного дифференцирования, занимает центральное место в современной геометрии. Дифференцируемые отображения максимального ранга играют важную роль в различных разделах математики, в частности в римановой геометрии. В связи с этим особое внимание уделяется классификации геометрии субмерсий, которая является важным классом дифференцируемых отображений максимально ранга, нахождению инвариантов однопараметрических групп преобразований, нахождению дифференциальных инвариантов субмерсий относительно группы преобразований.

В нашей стране особое внимание уделяется актуальным аспектам геометрии и топологии, которые имеют научные и практические применения в фундаментальных науках. В частности, в последние годы дифференциальная геометрия как древний основоположник современной математики достигла значительных результатов в решении задач современной математики. Проведение научных исследований по приоритетным направлениям математики наук на уровне международных стандартов по важным направлениям специальности «алгебра, теория динамических систем, геометрия и топология и т.д.» рассматривается как важная задача фундаментальных исследований [2]. В связи с этимпредставляется важным наахожление дифференциальные инварианты группы преобразований и дифференциальные инварианты субмерсий.

Данное диссертационное исследование в определенной степени служит решению задач, указанных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по

[2] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно исследовательских учреждений академии наук Республики Узбекистан»

дальнейшему развитию Республики Узбекистан», № ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В.И. Романовского академии Наук Республики Узбекистан» и ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах образования и развитию нучных исследований в области математики», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Поскольку субмерсии используются во многих областях современной римановой геометрии, изучение дифференциальных инвариантов субмерсий очень эффективно. Фундаментальные свойства римановых субмерсий, в частности свойства кривизны и фундаментальные уравнения, изучались в работах Дж. Чигера, Д. Громолля, Р. Германа. Интерес к дифференциальным инвариантам особенно возрос в связи с их использованием в квантовой теории поля в работах Е.Виттена, в проблемах геометрического квантования в работах В.В.Лычагина и в теории нелинейных дифференциальных уравнений в работах а.М.Виноградова, В.В. Лычагина, Л.В.Овсянникова.

В работах В.М.Кузаконь дается полное описание алгебры дифференциальных инвариантов субмерсий на плоскости относительно группы движений. Кроме того, показано, что дифференциальные инварианты любого порядка получаются из дифференциальных инвариантов второго порядка при помощи дифференцирования последних вдоль инвариантных векторных полей. В работах И.С. Стрельцовой описывается структура алгебры скалярных дифференциальных инвариантов кривых на плоскости с метриками Евклида или Минковского относительно R-конформных преобразований. Кроме того, строится алгебра дифференциальных инвариантов относительно движений плоскости де Ситтера. Оказывается, эта алгебра порождается одним дифференциальным инвариантом второго порядка и двумя инвариантными дифференцированиями. Доказана теорема об эквивалентности регулярных кривых относительно движений плоскости де Ситтера. Описаны особые орбиты группы собственных движений.

В настоящее время понятие субмерсии и основные результаты по изучению геометрии субмерсий вошли в учебники по римановой геометрии, они используются не только в геометрии, но во многих смежных науках, таких, как механика, теоретическая физика и теория относительности. Приложения субмерсий в физике и механике изучены в работах итальянских математиков М. Фальчителли, А. М. Пасторе, С. Януса. В работах наших ученых доктора физика-математических наук, профессора А. Я. Нарманова и его учеников А.М. Байтураева, Г. Каипназаровой получены полная классификация слоений евклидовых пространств, порожденных римановыми субмерсиями и геометрические характеристики, связанные с секционной кривизной слоев, а в работах А. С. Шарипова изучены изометрические группы слоение, порожденное субмерсией. В работах Б.а.Турсунова изучена геометрия римановых субмерсий многообразий неотрицательной кривизны.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждением высшего образования, где выполнялась диссертация. Исследование выполнено в соответствии с планом научного исследовательского проекта MRU-10/2017 «Развитие геометрических и аналитических методов в задачах теории управления и дифференциальных играх» Национального университета Узбекистана.

Целью исследования является изучение дифференциальных инвариантов субмерсий относительно однопараметрических групп преобразований и групп преобразований порожденным потоком конформных векторных полей.

Задачи исследования, решаемые в данной работе, следующие:

Нахождение дифференциальных инвариантов высших порядков однопараметрической группы;

Нахождение дифференциальных инвариантов второго порядка субмерсий относительно групп конформных преобразований;

Доказать, что, поверхности уровня римановой субмерсии являются изометричнимы**;**

Нахождение дифференциальных инвариантов второго порядка субмерсий относительно групп движений пространство Минковского.

Объект исследования– дифференциальные инварианты субмерсий, конформное векторное поле, алгебры Ли.

Предмет исследования – геометрия субмерсий, свойства конформных векторных полей, дифференциальные инварианты субмерсий относительно однопараметрических групп преобразований.

Методы исследования. В диссертационной работе используются методы дифференциальной геометрии, дифференциальной топологии, римановой геометрии и теории слоений.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

найден способ нахождения дифференциальных инвариантов высщих порядков зная инварианты нулевого порядка для любых однопараметрических групп преобразований;

доказано что, на многообразии с нулевой секционной кривизной если субмерсия является римановой, то слоение является вполне геодезическим римановым слоением с изометричными слоями;

доказано что, если каждая компонента поверхности критического уровня либо является точкой, либо является регулярной поверхностью, и они изолированы друг от друга, тогда поверхности уровней функции конформно эквивалентны;

доказано что, отношение главных кривизн поверхности уровня субмерсии является дифференциальным инвариантом второго порядка относительно группы преобразований, порожденных потоком конформного векторного поля.

Практические результаты исследования – результаты исследования дифференциальных инвариантов субмерсий применяются для нахождения орбит векторных полей, а также для различных задач дифференциальной геометрии.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием методов римановой геометрии, дифференциальной топологии и дифференциальной геометрии, а также строгостью математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования заключается в том, что доказано отношение главных кривизн поверхности уровня субмерсии является дифференциальным инвариантом второго порядка относительно группы преобразований, порожденных потоком конформного векторного поля.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что изучение дифференциальных инвариантов и геометрии римановых субмерсий является практической основой для нахождения инвариантов поверхностей и слоев слоения и слоеного многообразия, заданных субмерсиями, а также для других задач дифференциальной геометрии в «целом».

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты по дифференциальным инвариантам субмерсий были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

Результаты, полученные по дифференциальным инвариантам субмерсий относительно группы преобразований были использованы в фундаментальном проекте F-4-42 «Кардинальные и топологические свойства пространств полуаддитивных-гладких функционалов Радона» при решении задач по изучению кардинальных и функциональных инвариантов топологических структур (Справка Национального университета Узбекистана от 19 апреля 2021 года № 04/11-2126). В результате это позволило определить связи между топологическими, алгебраическими и функциональными инвариантами топологических пространств, в частности дифференциальными инвариантами поверхностей, а также дифференциальных операторов на них;

Дифференциальные инварианты однопараметрических групп были использованы Университета Технологий Малайзии утвержденном Министерством высшего образования Малайзии, .

Результаты по нахождению дифференциальных инвариантов высокого порядка однопараметрических групп преобразований был использован в научно-исследовательском проекте R.J130000.7854.5F235 для нахождения инвариантных решений дифференциальных уравнений в частных производнях (Справка Университета Технологий Малайзии от 29 марта 2021 года). В результате это позволило изучить фазовое пространство динамических систем, определяемых уравнениями в частных производных, в частности, полученные методы нахождения дифференциальных инвариантов позволили свести уравнения в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на 9 международных и 3 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 18 научных работ, из них 6 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертации на степень доктора философии по физико-математическим наукам, в том числе 2 опубликованы в зарубежных журналах и 4 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 100 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и список использованной литературы.

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики Узбекистан, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы и связь с научным направлением Национального университета Узбекистан,

Во введении также сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации, названная «Группы Ли и их инвариантные функции», состоит из трёх параграфов. В этой главе диссертации приведены необходимые понятия и факты для изложения работы.

Группа Ли обладает сочетанием алгебраического понятия группы, с одной стороны, и дифференциально-геометрического понятия многообразия, с другой стороны. Этот факт, т.е. комбинация алгебры и анализа привел к мощной технике для изучения групп симметрий, которая непригодна для конечных групп. Мы начинаем с напоминания определения абстрактной группы.

Определение 1.1.2. $r-$ параметрическая группа Ли $-$ это группа G, обладающая также структурой $r-$мерного гладкого многообразия, причем и групповая операция $m: G\times G\to G,\ m(g,h)=g\cdot h,\ g,h\in G,$ и взятие обратного $i: G\to G,\ i(g)=g^{-1},\ g\in G,$ являются гладкими отображениями многообразий.

Теперь рассмотрим преобразования, включенные в однопараметрическое семейство

$$f^t : M \to M,\ f^t(x) = \left(f_1^t(x), f_2^t(x), ..., f_n^t(x) \right),$$

где $t-$ вещественный параметр. Совокупность G преобразований f^t называется однопараметрической группой, если выполняются равенства

$$f^0(x) = x,\ f^{t_1}(x) f^{t_2}(x) = f^{t_1+t_2}(x), \left(f^t\right)^{-1} = f^{-t}.$$

Разложим функции f_i^t в ряд Тейлора по параметру t в окрестности $t = 0$, и запишем инфинитезимальное (бесконечно малое) преобразование с учетом $f_i^0 = x_i$ в виде

$$f_i^t \approx x_i + \xi_i t + o\left(t^2\right), \text{ где } \xi_i = \left. \frac{df_i^t}{dt} \right|_{t=0}.$$

Вектор $\xi = \left(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\right)$ является касательным вектором к кривой, описываемой преобразованными точками f^t, и поэтому называется касательным векторным полем группы. Касательное векторное поле записывают также в виде дифференциального оператора первого порядка:

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi_1 \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Это векторное поле называется инфинитезимальным образующим однопараметрический группы преобразований G. Если группа G является $k-$ мерной группой Ли, тогда она имеет равно k инфинитезимальных образующих (векторных полей).

Наиболее важная операция над векторными полями $-$ это их скобка Ли, или коммутатор. Легче всего эту операцию определить в терминах их действия как дифференцирований функций. а именно, если $X, Y-$ векторные поля на M, то их скобка Ли $[X,Y]-$ единственное векторное поле, удовлетворяющее условию

$$[X,Y](f) = X\left(Y(f)\right) - Y\left(X(f)\right) \qquad (1.1.5)$$

для всех гладких функций $f : M \to R$. В локальных координатах, если

$$X = \sum_{i=1}^{m} \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}, Y = \sum_{i=1}^{m} \eta^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

то

$$[X,Y] = \sum_{i=1}^{m} \left\{ X\left(\eta^i\right) - Y\left(\xi^i\right) \right\} \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \left\{ \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right\} \frac{\partial}{\partial x^i}. \qquad (1.1.6)$$

Определение 1.1.3. Алгебра Ли — это векторное пространство g с билинейной операцией

$$[\cdot,\cdot] : L \times L \to L,$$

называемой скобкой Ли алгебры g и удовлетворяющей следующим аксиомам:

(c) Билинейность:

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z],$$
$$[X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z],$$

где $a, b \in R -$ постоянные.

(d) Кососимметричность:

$$[X, Y] = -[Y, X].$$

(c) Тождество Якоби:

$$[X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] = 0$$

для всех X, Y, Z из L.

Множество гладких векторных полей определенных на многообразии M составляет алгебру Ли относительно скобки Ли определенное равенством (1.1.6). Если группа $G - k$ параметрическая группа, тогда множество инфинитезимальных образующих образует k мерную алгебру Ли.

Определение 1.2.1. Пусть $G -$ группа преобразований, действующая на многообразии M. Подмножество $N \subset M$ называется $G -$инвариантным, а группа G называется группой симметрий подмножества N, если для любых $x \in N$ и $g \in G$, выполняется $g \cdot x \in N$.

Определение 1.2.2. Пусть $G -$группа преобразований, действующая на многообразии M. Функция $I : M \to R$, называется $G -$ инвариантной функцией, если для всех $x \in M$ и $g \in G$, выполняется $I(g \cdot x) = I(x)$.

Известны следующие теоремы [6],[63]**Ошибка! Источник ссылки не найден.**.

Теорема 1.2.1. Если группа G действует на многообразии M и $I : M \to R -$ гладкая функция, то I будет $G -$инвариантной функцией, тогда и только тогда, когда каждое множество уровня $\{x : I(x) = c\}, c \in R$, будет $G -$инвариантным подмножеством многообразия M.

Теорема 1.2.2. Пусть $G -$ группа преобразований, действующая на многообразии M. Гладкая вещественнозначная функция $I : M \to R$ является инвариантной функцией группы G, тогда и только тогда, когда

$$X(I) = 0 \text{ для всех } x \in M \tag{1.2.1}$$

и каждой инфинитезимальной образующей X группы G.

Если образующие $X_1, ..., X_r$ составляют базис алгебры Ли инфинитезимальных образующих группы G, то теорема 1.2.2 утверждает, что функция $I(x) -$ инвариант, если и только если $X_k(I) = 0, k = 1...r$. В локальных координатах

$$X_k = \sum_{i=1}^{m} \xi_k^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

так что функция I должна быть решением однородной системы линейных уравнений в частных производных первого порядка

$$X_k\left(I\right)=\sum_{i=1}^{m}\xi_k^i\left(x\right)\frac{\partial I}{\partial x^i}=0,\ k=1,...,r. \qquad (1.2.2)$$

Пусть $f,g:M\to B$ гладкие отображения, удовлетворяющие условию $f(p)=g(p)=q.$

1) f имеет касание первого порядка с g в точке $p,$ если $(df)_p=(dg)_p$ как отображения $T_pM\to T_pB.$

2) f имеет касание $k-$ го порядка с g в точке p , если отображение $(df):TM\to TB$ имеет касание порядка $(k-1)$ с отображением (dg) в каждой точке T_pM. Этот факт записывается следующим образом: $f\sim_k g$ в точке p ($k-$положительное число).

Обозначим через $J^k(M,B)_{p,q}$ – множества классов эквивалентности по отношению " $\sim_k$ в точке p " в пространстве отображений $f:M\to B,$ удовлетворяющие условию $f(p)=q.$

Положим $J^k(M,B)=\bigcup_{(p,q)\in M\times B}J^k(M,B)_{p,q}$. Известно, что это множество является гладким многообразием размерности $n+m\sum_{i=0}^{k}C_{n+i-1}^{i}$ [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**].

Определение 1.3.1. Многообразие $J^k(M,B)$ называется пространством $k-$ джетов [37].

Действие группы G на M порождает некоторое действие группы на $J^k(M,B)$. Это действие называется k-ым продолжением действия группы G на $J^k(M,B)$. Инфинитезимальные образующие $k-$го продолжение действия группы G на $J^k(M,B)$ назқваются k -ыми продолжениями инфинитезимальных образующих группы G.

Определение 1.3.2. Пусть $M\subset U\times V$ открыто. Пусть $X-$ векторное поле на M с соответствующей однопараметрической группой G_t. Тогда $n-$е продолжение поля X, которое мы обозначаем $X^{(n)}$ будет векторным полем на пространстве $M^{(n)}$ $n-$ джетов и по определению будет инфинитезимальной образующей соответствующей продолженной однопараметрической группы $G_t^{(n)}$.

Известна следующая теорема [63].

Теорема 1.3.1. Пусть

$$X=\sum_{i=1}^{p}\xi^i\left(x,y\right)\frac{\partial}{\partial x^i}+\sum_{\alpha=1}^{q}\varphi_\alpha\left(x,y\right)\frac{\partial}{\partial y^\alpha}$$

$-$векторное поле, заданное на открытом подмножестве $M\subset U\times V.$ Тогда $n-$е продолжение поля $X-$это векторное поле

$$X^{(n)}=X+\sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{J}\varphi_\alpha^J\left(x,y^{(n)}\right)\frac{\partial}{\partial y_J^\alpha}, \qquad (1.3.4)$$

определенное на соответствующем пространстве джетов $M^{(n)} \subset U \times V^{(n)}$, второе суммирование ведется по всем мультииндексам $J = \left(j_1, ..., j_k \right), 1 \le j_\chi \le p, 1 \le k \le n.$ Функции φ_α^J в $X^{(n)}$ задаются следующей формулой:

$$\varphi_\alpha^J \left(x, y^{(n)} \right) = D_J \left(\varphi_\alpha - \sum_{i=1}^{p} \xi^i y_i^\alpha \right) + \sum_{i=1}^{p} \xi^i y_{J,i}^\alpha, \qquad (1.3.5)$$

где $y_i^\alpha = \dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}$ и $y_{J,i}^\alpha = \dfrac{\partial y_J^\alpha}{\partial x^i}$.

Определение 1.3.3. Пусть $G-$ группа преобразований, действующая на $M \subset X \times Y$. Дифференциальным инвариантом $n-$ го порядка группы G называется гладкая функция $I : M^{(n)} \to R,$ зависящая от x, y и производных от $y,$ такая, что $I -$инвариант продолженного действия $G^{(n)}$:

$$I\left(g^{(n)} \cdot \left(x, y^n \right) \right) = I\left(x, y^n \right), \left(x, y^n \right) \in M^{(n)},$$

для всех $g \in G,$ для которых определено $g^{(n)} \cdot \left(x, y^n \right).$

Известна следующая теорема [63].

Теорема 1.3.2. Пусть $G-$группа преобразований, действующая на $M \subset R^2.$ Предположим, что $I_1 = I_1\left(x, y^n \right)$ и $I_2 = I_2\left(x, y^n \right)$ дифференциальные инварианты $n-$го порядка группы $G.$ Тогда производная

$$\frac{dI_2}{dI_1} = \frac{dI_2/dx}{dI_1/dx} \equiv \frac{D_x I_2}{D_x I_1} \qquad (1.3.7)$$

является дифференциальным инвариантом группы G порядка $n+1.$

Вторая глава диссертации, названная «Дифференциальные инварианты однопараметрической группы преобразований», состоит из двух параграфов. В этой главе диссертации исследованы геометрия субмерсий, в частности, найдены дифференциальные инварианты однопараметрических групп преобразований.

Пусть M – гладкое связное риманово многообразие размерности n с римановой метрикой g .

Определение 2.1.1. Дифференцируемое отображение максимального ранга $\pi : M \to B$, где $B-$ гладкое риманово многообразие размерности m, называется субмерсией при $n > m$.

Геометрия субмерсий исследованы многими авторами, в частности в работах [76],[78].

По теореме о ранге субмерсии на многообразии M возникает слоение размерности $k = n - m,$ слоями которого являются компоненты связности подмногообразий $L_p = \left\{ q \in M : f(q) = p \right\}.$

Обозначим через $T_q F -$касательное пространство слоя L_p в точке $q,$ через $H_q F-$ ортогональное дополнение подпространства $T_q F,$ то в результате возникают подрасслоения $TF = \{T_q F\}, HF = \{H_q F\}$ касательного расслоения $TM = \{T_q M\}$ и имеем ортогональное разложение $TM = TF \oplus HF$. Таким образом каждое векторное поле X разложимо в виде: $X = X^v + X^h$, где $X^v \in TF$, $X^h \in HF$. Если $X^h = 0$ (соответственно $X^v = 0$), то поле X называется вертикальным (соответственно горизонтальным) векторным полем.

Для любого вектора $u \in T_p B$ и любой точки $q \in L_p$ существует единственный вектор $h \in H_q F$ такой, что $df_p(h) = u$. Вектор h называют горизонтальным поднятием вектора u u в точку q. Для векторного поля X на B векторное поле $\overline{X}$ на M, значение которого в каждой точке q является горизонтальным подъёмом вектора $X_{f(q)}$ называется горизонтальным поднятием векторного поля X

Определение 2.1.2. Субмерсия $\pi : M \to B$ называется римановой, если ее дифференциал $d\pi$ сохраняет длину горизонтальных векторов.

Рассмотрим субмерсию

$$\pi : M \to R \qquad (2.1.1)$$

и обозначим через F слоение, порожденное этой субмерсией.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1.1. Пусть $M-$ гладкое связное полное риманово многообразие нулевой секционной кривизны. Если субмерсия (2.1.1) является римановой, то слоение F является вполне геодезическим римановым слоением с изометричными слоями.

Определение 2.1.3. Дифференцируемая функция

$$f : M \to R^1 \qquad (2.1.7)$$

называется метрической функцией, если $X \, | \, gradf \, |^2 = 0$ для каждого вертикального поля X [16].

Напомним, что множество уровня, содержащее критические точки, называется множеством критического уровня.

Предположение 2.1.1. Каждая компонента поверхности критического уровня либо является точкой, либо является регулярной поверхностью, и они изолированы друг от друга.

Теорема 2.1.2. Пусть $f : R^n \to R^1$ метрическая функция и имеет место предположение 2.1.1. Тогда поверхности уровней функции конформно эквивалентны.

В работах [10,62,64,70,71] исследуются дифференциальные инварианты группы преобразований Ли.

Пусть G – группа Ли преобразований пространства двух независимых u,v и трех зависимых переменных x_1, x_2, x_3 и следующего векторного поля

$$X = \xi_1(u,v,x)\frac{\partial}{\partial u} + \xi_2(u,v,x)\frac{\partial}{\partial v} + \sum_{i=1}^{3}\eta_i(u,v,x)\frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (2.2.1)$$

является инфинитиземальным образующим группы G.

Рассмотрим функции $F_1(u,x)$ и $F_2(v,x)$, которые являются решениями следующего уравнения

$$X(F) = 1. \qquad (2.2.2)$$

Пусть функции $I_1(u,v,x),\ I_2(u,v,x)$ и $I_3(u,v,x)$ являются функционально независимыми инвариантными функциями группа G, т.е. они удовлетворяют следующим уравнениям

$$X(I_i) = 0, i = 1,2,3. \qquad (2.2.3)$$

Обозначим через $D^k(F)$ производные $D_s^k + D_t^k(F)$ порядка k.

Теорема 2.2.1. Предположим, что I_1, I_2, I_3 являются независимыми инвариантами группы G, $F_1(u,x)$, $F_2(v,x)$, являются решениями уравнения $X(F) = 1$. Тогда функции $I_i(u,v,x)$ и $D^k(I_i)$ являются дифференциальными инвариантами порядка k.

В третьей главе диссертации, названной «Дифференциальные инварианты субмерсий» изучаются дифференциальные инварианты субмерсий относительно групп конформных преобразований.

Пусть M и B гладкие риманово многообразии размерности n и m соответственно.

Теперь рассмотрим субмерсию $f : R_1^3 \to R$, где R_1^3- трехмерное пространство Минковского. Напомним, что в этом случае метрика имеет вид

$$ds^2 = -\left(dx_1\right)^2 + \left(dx_2\right)^2 + \left(dx_3\right)^2$$

Рассмотрим группу G порождаеющую векторными полями

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2},\ X_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}, \qquad (3.1.3)$$

$$X_4 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad (3.1.4)$$

$$X_5 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad (3.1.5)$$

$$X_6 = -x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad (3.1.6)$$

$$X_7 = h(u)\frac{\partial}{\partial u}, h(u) \in \mathrm{C}^\infty\left(R\right). \qquad (3.1.7)$$

Верна следующая теорема.

Теорема- 3.1.1. Дифференциальными инвариантами второго порядка субмерсии $f : R_1^3 \to R$ относительно группы движений G пространства Минковского являются следующие функции, при $B \neq 0$:

$$I_1 = H^2 = \frac{D^2}{B^3},\ I_2 = K = \frac{F}{B^2},$$

$$I_3 = H^2 + \frac{AD+BC}{B^2},\ I_4 = HK - \frac{\left(AF-BE\right)^2}{B^5},:$$

где,

$$A = -p_{11} + p_{22} + p_{33},\ B = -p_1{}^2 + p_2{}^2 + p_3{}^2,$$

$$C = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & -p_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{13} \\ p_{13} & -p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{22} & p_{23} \\ p_{23} & p_{33} \end{vmatrix},$$

$$D = \begin{vmatrix} -p_{11} & -p_{12} & p_1 \\ -p_{12} & -p_{22} & p_2 \\ p_1 & p_2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -p_{11} & -p_{13} & p_1 \\ -p_{13} & -p_{33} & p_3 \\ p_1 & p_3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{22} & p_{23} & p_2 \\ p_{23} & p_{33} & p_3 \\ p_2 & p_3 & 0 \end{vmatrix},$$

$$E = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & -p_{22} & -p_{23} \\ p_{13} & -p_{23} & -p_{33} \end{vmatrix},$$

$$F = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_1 \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} & p_2 \\ p_{13} & p_{23} & -p_{33} & -p_3 \\ p_1 & p_2 & -p_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим конформное векторное поле в трехмерном Евклидовом пространстве:

$$X = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial}{\partial x_3} \qquad (3.2.1)$$

Поток этого векторного поля порождает конформные отображения.

Продолжение векторного поля (3.2.1) в $J^2(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_{11}, p_{12}, p_{22})$, имеет следующий вид:

$$X^{(2)} = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial}{\partial x_3} - p_{11}\frac{\partial}{\partial p_{11}} - p_{12}\frac{\partial}{\partial p_{12}} - p_{22}\frac{\partial}{\partial p_{22}}$$

Поток этого векторного поля имеет вид:

$$(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_{11}, p_{12}, p_{22}) \to (e^t x_1, e^t x_2, e^t x_3, p_1, p_2, e^{-t} p_{11}, e^{-t} p_{12}, e^{-t} p_{22}).$$

Теперь рассмотрим субмерсую $\varphi : R^3 \to R,\ \varphi(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2) - x_3$. Поверхности уровня этой субмерсии являются регулярными поверхностями заданными с помощью явной функции $L_c = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_3 = f(x_1, x_2) - c\}$.

Теорема-3.2.1. Главные направления поверхностей уровня субмерсии $\varphi : R^3 \to R,\ \varphi(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2) - x_3$ при конформных преобразованиях порожденными потоком векторного поля (3.2.1) переходят в главные направления.

Теорема 3.2.2. Отношения главных кривизн поверхности уровня субмерсии $\varphi : R^3 \to R,\ \varphi(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2) - x_3$ является дифференциальным инвариантом второго порядка группы конформных преобразований, порожденных потоком векторного поля (3.2.1).

Теорема 3.2.3. асимптотическое направление поверхностей уровня субмерсии $\varphi: R^3 \to R, \varphi(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2) - x_3$ переходит в асимптотическое направление при конформных преобразований, порожденных потоком векторного поля (3.2.1).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация посвящена изучению нахождения дифференциальных инвариантов субмерсии относительно групп преобразований. Основными результатами диссертации являются следующие:

Доказано, что если риманова субмерсия задана на римановом много образии нулевой секционной кривизны, то она порождает вполне геодезическое риманово слоение с изометричными слоями.

Приведены примеры римановых слоений, которые порождают слоения, не являющиеся вполне геодезическими.

Доказано, что поверхности уровня метрической функци порождают слоение, слои которого являются взаимно конформно эквивалентными.

Построен метод построения дифференциальных инвариантов высокого порядка однопараметрической группы преобразований, если известны независимые инвариантные функции этой группы.

Найдены дифференциальные инварианты второго порядка субмерсии относительно группы движений пространства Минковского;

Доказано что, главные направления поверхности уровня субмерсии при преобразованиях порожденными потоками конформного векторного поля переходят в главные направления;

Доказано что, отношение главных кривизн поверхности уровня субмерсии является дифференциальным инвариантом второго порядка относительно группы преобразований, порожденных потоком конформного векторного поля;

Доказано что, асимптотическое направление переходит в асимптотическое направление при преобразованиях, порожденных потоком конформного векторного поля.

Все результаты диссертационной работы являются новыми и могут быть использованы при дальнейших исследованиях по теории орбит векторных полей, по дифференциальной геометрии поверхностей и по другим отраслям современной геометрии.

Автор приносит свою глубокую признательность научному руководителю пофессору Абдигаппар Якубович Нарманову за постановку задач, ценные советы и полезные консультации при подготовке диссертации.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

SHARIPOV XURSHID FAZLIDDINOVICH

DIFFERENTIAL INVARIANTS OF SUBMERSIONS WITH RESPECT TO TRANSFORMATION GROUPS

01.01.04 – Geometry and topology

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT-2021

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2018.2.PhD/FM227.

Dissertation has been prepared at National University of Uzbekistan

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.ik-fizmat.nuu.uz) and the “Ziyonet” Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Narmanov Abdigappar Yakubovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Mishchenko Aleksandr Sergeevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences
	Raximov Abdugofur Abdumajidovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Dotsent
Leading organization: **in Tashkent**	**Branch of National Research Nuclear University MEPhI**

Defense will take place «____» _____________2021 at _____ at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 at National University of Uzbekistan. (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №____) (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2021 year
(Mailing report № ___________on «____» _______________2021 year)

A. Sadullaev
Chairman of scientific council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Academician

N.K.Mamadaliyev
Scientific secretary of scientific council
on award of scientific degrees, C.F.-M.S.

R.B.Beshimov
Chairman of scientific Seminar under Scientific
Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Dotsent

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is to study differential invariants of submersions with respect to one-parameter transformation groups and transformation groups generated by the flow of conformal vector fields.

The object of research is differential invariants of submersions, conformal vector field, Lie algebras.

Scientific novelty of the research work is as follows:

A method for finding differential invariants of higher orders, knowing the zero-order invariants for any one-parameter transformation groups, is described;

It is proved that if a submersion is Riemannian, then the foliation is a totally geodesic Riemannian foliation with isometric fibers;

It is proved that the level surfaces of the metric function are conformally equivalent;

Found are second order differential invariants of submersion with respect to group of motions of the Minkowski space;

It is proved that the main directions of the level surfaces of the submersion under transformations generated by the flows of the conformal vector field pass into the main directions;

It is proved that the ratio of the principal curvatures of the level surface submersion is a differential invariant of the second order with respect to the group of transformations generated by the flow of a conformal vector field;

It is proved that the asymptotic direction turns into the asymptotic direction under the transformations generated by the flow of the conformal vector field.

Implementation of the research results. The results obtained in the dissertation on differential invariants of submersions were used in the following research projects:

The results obtained in the works of X. Sharipov on finding differential invariants of submersions with respect to one-parameter transformation groups were used in the research of the project F4-OT-0-79517 “Geometry and topology of foliated manifolds” when solving problems on the geometry of foliated manifolds. (Certificate of the Ministry of Higher and Secondary Specialized Education of the Republic of Uzbekistan dated June 25, 2020 No. 89-03-2265).

Differential invariants of one-parameter groups were used in the research project R.J130000.7854.5F235 of the University of Technology of Malaysia approved by the Ministry of Higher Education of Malaysia to find invariant solutions of partial differential equations (University of Technology Malaysia, Malaysia, Reference dated March 29, 2021). The application of these scientific results made it possible to study the phase space of dynamical systems determined by partial differential equations.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 100 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГаН ИШЛаР РЎЙХаТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВаННЫХ РаБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (1 часть; part 1)

1. Narmanov A.Ya., Sharipov X.F. Differential invariants of submersions. Uzbek Mathematical Journal, 2018, №3, pp 132-138. DOI: 10.29229/uzmj.2018-3-12. (01.00.00, № 6).
2. Sharipov X.F. Second-order diff erential invariants of submersions. Uzbek Mathematical Journal, 2019, №3, pp.146-154 DOI: 10.29229/uzmj.2019-3-16. (01.00.00, № 6).
3. Abdishukurova G., Narmanov A.Ya., Sharipov X.F. Differential Invariants of One Parametrical Group of Transformations. Mathematics and Statistics 8(3): 347-352, 2020 DOI: 10.13189/ms.2020.080314 (3. Scopus IF= 0.3)
4. Нарманов а.Я., Шарипов Х.Ф. О геометрии субмерсий. Доклады академии наук Узбекистана. №3, с. 6-10. (01.00.00, № 7).
5. Ражабов Э.О., Шарипов Х.Ф. О геометрии орбит конформных векторных полей в Евклидовом пространстве. Бюллетень Института математики 2021, том 4, № 1, стр. 38-45.
6. Narmanov A.Ya., Sharipov X.F. On the geometry of submersions. Geometry, Integrability and Quantization, 2021, volume 22. pp 199–208 DOI: 10.7546/giq-22-2021-199-208. (3. Scopus IF= 0.7)

II бўлим (2 часть; part 2)

7. Sharipov X.F.Differential invariants of second order of submersions. Abstracts of the international scientific conference “Modern problems of applied mathematics and information technologies-Al-Khorezmiy 2018”, September 2018, pp 111-112.Tashkent, NUUz
8. Sharipov X.F. Differential invariants of second order of some submersions. Abstracts of the international conference “Mathematical analysis and its application to mathematical physics”, September 2018, pp 105-106. Samarkand, SamSU
9. Шарипов Х.Ф. Дифференциальные инварианты второго порядка субмерсий. Материалы молодежной школы-конференции «Лобачевская чтения-2018», 2018 ноябрь, с.326-329, Казань.
10. Шарипов Х.Ф. Дифференциальные инварианты субмерсии. Fundamental matematika muammolari va ularning tatbiqlari respublika ilmiy-amaliy konferensiyasi materiallari, Navoiy–2019, 189-192
11. Sharipov X.F. Second-order differential invariants of submersions. Tahlilning dolzarb muammolari va ularning tatbiqlari respublika ilmiy-amaliy konferensiyasi materiallari, Qarshi–2019, 232-234

12. Sharipov X.F. Second-order differential invariants of submersions. Abstracts conference Topology, Geometry, and Dynamics: Rokhlin – 100 Conference dedicated to the 100th anniversary of Vladimir Abramovich Rokhlin, August 19 – 23, 2019 PDMI & EIMI, 80-82.

13. Sharipov X.F. Differential invariants of submersions. Сборник трудов международной научной конференции современные проблемы прикладной математики, информатики и механики, Нальчик - 2020г, 60-63.

14. Sharipov X.F., Шарипова С.Ф. Second order differential invariants of submersions. Сборник тезисов научной онлайн-конференции "Современные проблемы математики" 20 мая 2020 года Нукус, 50-51

15. Sharipov X.F., Шарипова С.Ф. Second-order differential invariants of submersions. Материалы республиканской научной онлайн конференции молодых ученых «Современные проблемы математики и прикладной математики» посвященной 100 летию академика С.Ҳ.Сирожиддинова, Ташкент 2020, 274-278.

16. Narmanov A., Sharipov X.F. Differential invariants of transformations group. Abstracts of the international conference Algebraic and Geometric Methods of Analysis, 26-30 may 2020 Odesa, Ukraine, 56-58

17. Шарипов Х.Ф., Ражабов Э. О. Геометрия орбит конформных векторных полей. Материалы Всероссийской конференции с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», посвященной памяти профессора Н. В. азбелева и профессора Е. Л. Тонкова Ижевск, Россия 15–19 июня 2020 г, 358-360

18. Narmanov A.Ya., Sharipov X.F. On the geometry of submersions. Proceedings of scientific conference “Actual problems of stochastic analysis” dedicated to the 80th anniversary of the birth of academicaian Sh.K.Formanov. February 20-21, 2021, Tashkent, 225-227.

Авторефератнинг ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги нусхалари
«ЎзМУ хабарлари» таҳририятида таҳрирдан ўтказилди.

Босишга рухсат этилди: .2021 йил