

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI AXBOROT TEXNOLOGIYALARI
VA KOMMUNIKASIYALARNI RIVOJLANTIRISH VAZIRLIGI**

**TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI
SAMARQAND FILIALI**

Ro'yxatga olindi:

№ _____
2021 yil « » _____

"TASDIQLAYMAN"

O'quv va ilmiy ishlari bo'yicha
direktor o'rinbosari

_____ Z.A.Qarshiyev
2021 yil « » _____

“KOMPYUTER INJINERING ” FAKULTETI

«Tabiiy fanlar» kafedrasi

CHIZIQLI ALGEBRA

FANI BO‘YICHA O‘QUV-USLUBIY MAJMUUA

Tuzuvchilar: M.U.Yaxshiboyev
U.X.Narzullayev

“Tabiiy fanlar” kafedra majlisida muxokama etilgan va tasdiqlangan
(bayonnoma № _____ «____» _____ 2021 y.)

Kafedra mudiri _____ dotsent SH.A.Asrarov

Samarqand - 2021

Yaxshiboyev M.U., Narzullayev U.X. Chiziqli algebra. O'quv-uslubiy majmua Samarqand: SamDU nashri, 2021 – 220 bet.

Ushbu o'quv-uslubiy majmua «Oliy matematika» fanining keng va muxim bo'limlaridan biri bo'lgan chiziqli algebra bag'ishlangan bo'lib. O'quv-uslubiy majmua mavzularning nazariy qismi, uni mustahkamlash uchun o'z-o'zini tekshirish savollari, amaliy mashg'ulotlar uchun misol va masalalar, testlar va mustaqil bajarish uchun yozma ishlar materiallari berilgan.

Hozirgi vaqtda amaliyotda bir necha yaxshi matematik dasturlar (Mathcad, Maplye, Mathematica, Mathlab va h.k.) matematik masalalarni kompyuter imkoniyatlaridan foydalanib yechishda samarali natijalar bermoqda. Shu an'anadan chetda qolmaslik uchun, qo'llanmada ba'zi bo'limlar bo'yicha misol va masalalar yechishda «Maplye» tizimining qo'llanilishi va uning qulayliklari namoyish etilgan.

Taqrizchilar: f.-m.f.n,dos. A. G'oziyev
f.-m.f.n,dos. S.R Muxiddinov

TATU Samarqand filiali, 2021

MUNDARIJA

	So'z boshi	6
	Chiziqli algebra fanidan fan dasturi	7
1-ma'ruza	Matrisalar nazariyasi elementlari.	18
	Asosiy ta'rif va tushunchalar. Matrisalarning turlari. Matrisalarni songa ko'paytirish, matrisalarni qo'shish, matrisalarni ayirish va matrisani matrisaga ko'paytirish amallari, hamda ularning xossalari.	
2-ma'ruza	Determinantlar nazariyasi.....	25
	Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar va ularni hisoblash usullari. O'rin almashtirishlar. n - tartibli determinantning ta'rifi.	
3-ma'ruza	Determinantning xossalari.....	33
	Determinantning asosiy xossalari. Minor va algebraik to'ldiruvchi tushunchalari. Laplas teoremasi	
4-ma'ruza	Matrisa rangi. Matrisa rangini hisoblash usullari.....	41
	Matrisa rangining ta'rifi. Matrisa rangini hisoblashning minorlar usuli. Ekvivalent almashtirishlar yordamida matrisa rangini hisoblash..	
5-ma'ruza	Teskari matrisa. Teskari matrisani hisoblash usullari.....	45
	Teskari matrisa ta'rifi. Xos va xosmas matrisalar. Teskari matrisa mavjudligining zaruriy va yetarli sharti. Ekvivalent almashtirishlar yordamida teskari matrisani hisoblash	
6-ma'ruza	Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi va ularni yechish usullari.	50
	Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi va uning yechimi. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining yechimi mavjudligining zaruriy va yetarli sharti (Kroneker-Kapelli teoremasi). Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning Kramer usuli.	
7-ma'ruza	Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning matrisa, Gauss va Gauss-Jordan usullari.	54
	Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning matrisa usuli. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning Gauss va Gauss-Jordan usullari.	
8-ma'ruza	Bir jinsli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi.....	58
	Bir jinsli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining notrivial yechimi mavjudlik sharti. Bir jinsli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining fundamental yechimlari sistemasi. Bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan chiziqli algebraik tenglamalar sistemalari yechimlari orasidagi bog'lanish.	
9-ma'ruza	Vektorlar nazariyasi elementlari.....	64

Tekislikda va fazoda vektor tushunchalari. Vektorning matrisaviy ko'rinishi. Vektorlar ustida arifmetik amallar-vektorni songa ko'paytirish, hamda vektorlarni qo'shish va ayirish. Vektorlarning skalyar, vektor va aralash ko'paytmalari, hamda bu ko'paytmalarni determinantlar yordamida hisoblash. Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi.

10-ma'ruza Arifmetik vektor fazo va unga misollar..... 83

n o'lchovli vektorlar va ular ustida arifmetik amallar. n o'lchovli vektorlar sistemasining rangi va bazisi. n o'lchovli arifmetik vektor fazo va unga misollar.

11-ma'ruza Chiziqli fazo. Yevklid fazosi..... 89

Chiziqli fazoning ta'rifi va misollar. Chiziqli fazoning o'lchovi va bazisi. Chiziqli fazo elementini bazis bo'yicha yoyish. Chiziqli fazoning qism fazolari. Yevklid fazosining ta'rifi. Yevklid fazosida elementning normasi tushunchasi. Yevklid fazosida ortonormallangan bazis qurish.

12-ma'ruza Chiziqli operatorlar va ularning xossalari..... 102

Chiziqli operatorning ta'rifi va misollar. Chiziqli operatorning matrisasi. Chiziqli operatorlar ustida arifmetik amallar. Chiziqli operatorlar fazosi. Chiziqli operatorlarning o'tish matrisasi. Chiziqli operatorning xos son va xos vektorlari.

13-ma'ruza Xos vektorlari bazis tashkil qiluvchi chiziqli operatorlar..... 114

Chiziqli operatorning xos son va xos vektorlari. Xos vektorlari bazis tashkil qiluvchi chiziqli operatorlar. Chiziqli operatorning xos vektorlari bazis tashkil qilishining yetarli sharti.

14-ma'ruza Kvadratik forma va uni kanonik ko'rinishga keltirish..... 117

Kvadratik formaning ta'rifi. Kvadratik formaning kanonik ko'rinishi. Kvadratik formani kanonik ko'rinishga keltirish.

15-ma'ruza Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini taqribiy yechish usullari..... 125

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini taqribiy yechishning oddiy iteratsiya va Zeydel usullari. Iteratsion jarayon yaqinlashishining zaruriy va yetarli shartlari

O'z-ozini tekshirish savollari 130

Chiziqli algebra fanni bo'yicha nazariy materiallarni mustahkamlash uchun topshiriqlar 131

1- , 2- amaliy mashg'ulot	Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar va ularni hisoblash. O'rin almashtirishlar. n – tartibli determinantning ta'rif. Determinantning asosiy xossalari. Minor va algebraik to'ldiruvchi tushunchalari. Laplas teoremasi.....	132
3-,4- amaliy mashg'ulot	Matrisalar ustida amallar. Teskari matrisa.....	138
5- amaliy mashg'ulot	Matrisa rangi.....	146
6-,7- amaliy mashg'ulot	Chiziqli algebraik tenglamalar sistemani yechishda Kramer, matrisa va Gauss usullari.....	148
8- amaliy mashg'ulot	Bir jinsli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi.....	158
9- amaliy mashg'ulot	Vektorlar.....	171
10-, 11- amaliy mashg'ulot	Arifmetik vektor fazo. Chiziqli fazo.....	179
12- amaliy mashg'ulot	Chiziqli operator va uning matrisasi.....	189
13- amaliy mashg'ulot.	Chiziqli operatorning xos son va xos vektorlari.....	195
14-amaliy mashg'ulot.	Kvadratik forma va uni kanonik ko'rinishga keltirish.....	199
15-amaliy mashg'ulot.	Chiziqli tenglamalar sistemalarini oddiy iteratsiya usuli va Zeydel usuli bilan yechish.....	202
	Chiziqli algebra fanni bo'yicha amaliy mashg'ulotlarni mustahkamlash uchun nazorat topshiriqlari	215
	Chiziqli algebra fanni bo'yicha testlar	216
	Adabiyotlar	219

S O' Z B O S H I

Hozirgi vaqtda chiziqli algebra fani, texnika va iqtisodning turli –tuman masalalarini hal qilishda keng qo'llanilmoqda. Talabalar o'quv adabiyotni mustaqil o'rganish va undan foydalana bilish malakalarini hosil qilish; mantiqiy fikrlashni o'stirish va matematikaviy madaniyatning umumiy saviyasini ko'tarish; tatbiqiy masalalarni matematikaviy tomondan tekshirish malakalarini hosil qilish kabilar talab qilinadi. Ma'ruzalar kursi "Chiziqli algebra " fani bo'yicha yozilgan bo'lib, 5330500 – Kompyuter injiniringi ("Kompyuter injiniringi", "AT-servis", "Multimedia texnologiyalari"); 5330300 – Axborot xavfsizligi; 5330600 – Dasturiy injiniring; 5350100 – Telekommunikasiya texnologiyalari ("Telekommunikasiyalar", "Teleradioeshittirish", Mobil tizimlari); 5350400 – Axborot-kommunikasiya texnologiyalari sohasida kasb ta'limi bakalaviatura yo'nalishlari bo'yicha ta'lim olayotgan talabalar uchun mo'ljallangan.

Mazkur ma'ruzalar kursiga 15 ta ma'ruza kiritilgan bo'lib, u 1- kurs bakalaviaturaning 2-semestrda o'qitiladi. Ma'ruzalar kursi Oliy texnika o'quv yurtlarida o'qiladigan «Chiziqli algebra» fanining nisbatan ko'p o'rganilgan, tadbiq doirasi keng va muxim bo'limlaridan biri bo'lgan chiziqli algebra bag'ishlangan. Ushbu ma'ruzalar kursi oliy texnika o'quv yurtlari uchun belgilangan dastur asosida yozilgan.

Ma'ruzalar kursi talabalar uchun shunchaki chiziqli algebra o'rganish uchun emas, balki ularning matematik mushohadasini, fikrlashini rivojlantirish va matematik dunyoqarashini kengaytirishga ham qaratilgandir. Har bir ma'ruzada tegishli ta'riflar tushunchalar va tasdiqlarga doir misollar yechib ko'rsatilgan, hamda mavzuni o'zlashtirish uchun sinov savollari va misollar keltirilgan.

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС
ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ
МУҲАММАД АЛ-ХОРАЗМИЙ НОМИДАГИ ТОШКЕНТ
АХБОРОТ ТЕХНОЛОГИЯЛАРИ УНИВЕРСИТЕТИ**

“ТАСДИҚЛАЙМАН”

ТАТУ ректори

_____ Т.Тешабоев

202__йил “__” _____

“КЕЛИШИЛДИ”

Олий ва ўрта махсус таълим
вазирлиги

202__йил “__” _____

Рўйхатга олинди:

№ БД _____.

202__йил “__” _____

ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРА

ФАН ДАСТУРИ

Билим соҳалари:	200 000 – Ижтимоий соҳа, иқтисод ва ҳуқуқ. 300 000 – Ишлаб чиқариш – техник соҳа.
Таълим соҳалари:	230 000 – Иқтисод. 330 000 – Компьютер технологиялари ва информатика, телекоммуникация технологиялари. 350 000 – Алоқа ва ахборотлаштириш, телекоммуникация технологиялари.
Таълим йўналишлари:	5232800 – Электрон тижорат; 5234100 – Рақамли иқтисодиёт; 5330500 – Компьютер инжиниринги (“Компьютер инжиниринги”, “АТ-сервис”, “Мультимедиа технологиялари”); 5330300 – Ахборот хавфсизлиги; 5330600 – Дастурий инжиниринг; 5350100 – Телекоммуникация технологиялари (“Телекоммуникациялар”, “Телерадиоэшиттириш”, Мобиль тизимлари); 5350200 – Телевизион технологиялар (“Аудиовизуал технологиялар”, “Телестудия тизимлари ва иловалари”); 5350300 – Ахборот-коммуникация технологиялари соҳасида иқтисодиёт ва менежмент; 5350400 – Ахборот-коммуникация технологиялари соҳасида касб таълими; 5350600 – Кутубхона-ахборот фаолияти.

Тошкент 2020

Фан/модул коди МТН1234 (бакалавриат)		Ўқув йили 2020-2021	Семестр 2	ЕСТС-Кредитлар 4	
Фан/модул тури мажбурий		Таълим тили Ўзбек/Рус		Ҳафтадаги дарс соатлари 4	
1.	Фаннинг номи	Аудитория машғулотлари (соат)		Мустақил таълим (соат)	Жами юклама (соат)
	Чизиқли алгебра	60		60	120
2.	I. Фаннинг мазмуни Фанни ўқитишдан мақсад: – талабалар иқтидорини ўстириш, мантиқий ва алгоритмик фикрлаш қобилиятини шакллантириш; ахборотлар билан боғлиқ жараёнларни таҳлил қилиш ва математик моделлаштириш учун зарур бўлган математик усулларни ўқитиш; ахборотлар ва технологиялар соҳасидаги турли йўналишдаги масалаларнинг асосли ва оптимал (энг мақбул) ечимларини топишда “Чизиқли алгебра” фанининг ўрни ва аҳамиятини кўрсатиш; – ўтилган мавзуларни мустақил ривожлантириш, тўғри ечимларини топиш, турли ахборот манбалари (адабиёт ва интернет)дан фойдаланиш, кўникма ва қобилиятларини шакллантириш ҳамда уларни амалда татбиқ этиш кўникмасини ҳосил қилиш. Фаннинг вазифаси: • умумий ўрта ва ўрта махсус, касб-ҳунар таълими билан узвийлик ва узлуксизликни таъминлаш; • талабаларга умумилмий, муҳандислик ва махсус фанларни ўзлаштириш ҳамда чизиқли алгебра усулларни муҳандислик ишларига татбиқ қилишни ўргатиш; • назарий ва амалий масалаларини еча олишга етарли бўлган математик аппаратни эгаллашга ва уни қўллашга, шунингдек, муҳандислик масалаларининг математик моделини тузиш ҳамда уларни таҳлил қилишга ўргатиш; • мантиқий, алгоритмик, абстракт фикрлашни, математик тафаккурни ривожлантириш, ўзининг фикр-мулоҳаза, хулосаларини асосли тарзда аниқ баён этишга ўргатиш ҳамда эгалланган билимлари бўйича, кўникма ва малакаларни шакллантириш;				

- ахборотни олиш, сақлаш, қайта ишлаш ва узатишнинг асосий усуллари ва воситаларидан фойдаланишни эгаллаган бўлиши;
- экологик дунёқараш шаклланган бўлиши, экологиянинг концептуал асосларини билишини ўргатишдан иборат.

II. Асосий назарий қисм (маъруза машғулоти)

II.1. Фан таркибига қуйидаги мавзулар киради:

1-мавзу. Матрицалар назарияси элементлари.

Асосий таъриф ва тушунчалар. Матрицаларнинг турлари. Матрицаларни сонга кўпайтириш, матрицаларни кўшиш, матрицаларни айириш ва матрицани матрицага кўпайтириш амаллари, ҳамда уларнинг хоссалари.

2-мавзу. Детерминантлар назарияси.

Иккинчи ва учинчи тартибли детерминантлар ва уларни ҳисоблаш усуллари. Ўрин алмаштиришлар. n - тартибли детерминантнинг таърифи.

3-мавзу. Детерминантнинг хоссалари.

Детерминантнинг асосий хоссалари. Минор ва алгебраик тўлдирувчи тушунчалари. Лаплас теоремаси.

4-мавзу. Матрица ранги. Матрица рангини ҳисоблаш усуллари.

Матрица рангининг таърифи. Матрица рангини ҳисоблашнинг минорлар усули. Эквивалент алмаштиришлар ёрдамида матрица рангини ҳисоблаш.

5-мавзу. Тескари матрица. Тескари матрицани ҳисоблаш усуллари.

Тескари матрица таърифи. Хос ва хосмас матрицалар. Тескари матрица мавжудлигининг зарурий ва етарли шarti. Эквивалент алмаштиришлар ёрдамида тескари матрицани ҳисоблаш.

6-мавзу. Чизиқли алгебраик тенгламалар системаси ва уларни ечиш усуллари.

Чизиқли алгебраик тенгламалар системаси ва унинг ечими. Чизиқли алгебраик тенгламалар системасининг ечими мавжудлигининг зарурий ва етарли шarti (Кронекер-Капелли теоремаси). Чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечишнинг Крамер усули.

7-мавзу. Чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечишнинг матрица, Гаусс ва Гаусс-Жордан усуллари.

Чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечишнинг матрица усули. Чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечишнинг Гаусс ва Гаусс-Жордан усуллари.

8-мавзу. Бир жинсли чизиқли алгебраик тенгламалар системаси.

Бир жинсли чизиқли алгебраик тенгламалар системасининг нотривиал ечими мавжудлик шarti. Бир жинсли чизиқли алгебраик тенгламалар системасининг фундаментал ечимлари системаси. Бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган чизиқли алгебраик тенгламалар системалари ечимлари орасидаги боғланиш.

9-мавзу. Векторлар назарияси элементлари.

Текисликда ва фазода вектор тушунчалари. Векторнинг матрицавий кўриниши. Векторлар устида арифметик амаллар-векторни сонга кўпайтириш, ҳамда векторларни қўшиш ва айириш. Векторларнинг скаляр, вектор ва аралаш кўпайтмалари, ҳамда бу кўпайтмаларни детерминантлар ёрдамида ҳисоблаш. Коши-Буняковский тенгсизлиги.

10-мавзу. Арифметик вектор фазо ва унга мисоллар.

n ўлчовли векторлар ва улар устида арифметик амаллар. n ўлчовли векторлар системасининг ранги ва базиси. n ўлчовли арифметик вектор фазо ва унга мисоллар.

11-мавзу. Чизиқли фазо. Евклид фазоси.

Чизиқли фазонинг таърифи ва мисоллар. Чизиқли фазонинг ўлчови ва базиси. Чизиқли фазо элементини базис бўйича ёйиш. Чизиқли фазонинг қисм фазолари. Евклид фазосининг таърифи. Евклид фазосида элементнинг нормаси тушунчаси. Евклид фазосида ортонормалланган базис куриш.

12-мавзу. Чизиқли операторлар ва уларнинг хоссалари.

Чизиқли операторнинг таърифи ва мисоллар. Чизиқли операторнинг матрицаси. Чизиқли операторлар устида арифметик амаллар. Чизиқли операторлар фазоси. Чизиқли операторларнинг ўтиш матрицаси. Чизиқли операторнинг хос сон ва хос векторлари.

13-мавзу. Хос векторлари базис ташкил қилувчи чизиқли операторлар.

Чизиқли операторнинг хос сон ва хос векторлари. Хос векторлари базис ташкил қилувчи чизиқли операторлар. Чизиқли операторнинг хос векторлари базис ташкил қилишининг етарли шarti.

14-мавзу. Квадратик форма ва уни каноник кўринишга келтириш.

Квадратик форманинг таърифи. Квадратик форманинг каноник кўриниши. Квадратик формани каноник кўринишга келтириш.

15-мавзу. Чизиқли алгебраик тенгламалар системасини тақрибий ечиш усуллари.

Чизиқли алгебраик тенгламалар системасини тақрибий ечишнинг оддий итератция ва Зейдел усуллари. Итерацион жараён яқинлашишининг зарурий ва етарли шартлари.

III. Амалий машғулотлар бўйича кўрсатма ва тавсиялар

Амалий машғулотлар учун қуйидаги мавзулар тавсия этилади:

1. Матрицаларнинг турлари. Матрицаларни сонга кўпайтириш, матрицаларни кўшиш, матрицаларни айириш ва матрицани матрицага кўпайтириш амаллари, ҳамда уларнинг хоссалари.
2. Иккинчи ва учинчи тартибли детерминантлар ва уларни ҳисоблаш. Ўрин алмаштиришлар. n – тартибли детерминантнинг таърифи.
3. Детерминантнинг асосий хоссалари. Минор ва алгебраик тўлдирувчи тушунчалари. Лаплас теоремаси.
4. Матрица рангининг таърифи. Матрица рангини ҳисоблашнинг минорлар усули. Эквивалент алмаштиришлар ёрдамида матрица рангини ҳисоблаш.
5. Тескари матрица таърифи. Хос ва хосмас матрицалар. Тескари матрица мавжудлигининг зарурий ва етарли шarti. Эквивалент алмаштиришлар ёрдамида тескари матрицани ҳисоблаш.
6. Чизиқли алгебраик тенгламалар системаси ва унинг ечими. Чизиқли алгебраик тенгламалар системасининг ечими мавжудлигининг

зарурий ва етарли шarti (Кронекер-Капелли теоремаси). Чизикли алгебраик тенгламалар системасини ечишнинг Крамер усули.

7. Чизикли алгебраик тенгламалар системасини ечишнинг матрица усули. Чизикли алгебраик тенгламалар системасини ечишнинг Гаусс ва Гаусс-Жордан усуллари.

8. Бир жинсли чизикли алгебраик тенгламалар системасининг нотривиал ечими мавжудлик шarti. Бир жинсли чизикли алгебраик тенгламалар системасининг фундаментал ечимлари системаси. Бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган чизикли алгебраик тенгламалар системалари ечимлари орасидаги боғланиш.

9. Текисликда ва фазода вектор тушунчалари. Векторнинг матрицавий кўриниши. Векторлар устида арифметик амаллар-векторни сонга кўпайтириш, ҳамда векторларни кўшиш ва айириш. Векторларнинг скаляр, вектор ва аралаш кўпайтмалари, ҳамда бу кўпайтмаларни детерминантлар ёрдамида ҳисоблаш. Коши-Буняковский тенгсизлиги.

10. n ўлчовли векторлар ва улар устида арифметик амаллар. n ўлчовли векторлар системасининг ранги ва базиси. n ўлчовли арифметик вектор фазо ва унга мисоллар.

11. Чизикли фазонинг таърифи ва мисоллар. Чизикли фазонинг ўлчови ва базиси. Чизикли фазо элементини базис бўйича ёйиш. Чизикли фазонинг қисм фазолари. Евклид фазосининг таърифи. Евклид фазосида элементнинг нормаси тушунчаси. Евклид фазосида ортонормалланган базис қуриш.

12. Чизикли операторнинг таърифи ва мисоллар. Чизикли операторнинг матрицаси. Чизикли операторлар устида арифметик амаллар. Чизикли операторлар фазоси. Чизикли операторларнинг ўтиш матрицаси. Чизикли операторнинг хос сон ва хос векторлари.

13. Чизикли операторнинг хос сон ва хос векторлари. Хос векторлари базис ташкил қилувчи чизикли операторлар. Чизикли операторнинг хос векторлари базис ташкил қилишининг етарли шarti.

14. Квадратик форманинг таърифи. Квадратик форманинг каноник кўриниши. Квадратик формани каноник кўринишга келтириш.

15. Чизикли алгебраик тенгламалар системасини тақрибий ечишнинг

	оддий итерация ва Зейдел усуллари. Итерацион жараён яқинлашишининг зарурий ва етарли шартлари. 16. Амалий машғулотларда талабалар “Чизиқли алгебра” фанидан олган назарий билимларини мустаҳкамлайдилар. Амалий машғулотларда ечиладиган мисол ва масалалар қуйидаги принципларга асосан танланади: типик мисол ва масалаларни ечишга малака ҳосил қилдирувчи, фаннинг моҳиятини англатувчи ва мавзулар орасидаги боғлиқликни ифодаловчи маълум миқдордаги мисол ва масалалар танланади. IV. Мустақил таълим ва мустақил ишлар Талаба мустақил ишининг асосий мақсади ўқитувчининг раҳбарлиги ва назоратида муайян ўқув ишларини мустақил равишда бажариш учун билим ва кўникмаларини шакллантириш ва ривожлантиришдир. <i>Талаба мустақил ишини ташкил этишда қуйидаги шакллардан фойдаланади:</i> • айрим назарий мавзуларни ўқув адабиётлари ёрдамида мустақил ўзлаштириш; • берилган мавзулар бўйича ахборот (реферат) тайёрлаш; • назарий билимларни амалиётда қўллаш; • макет, модел ва намуналар яратиш; • илмий мақола, анжуманларда маъруза тайёрлаш ва ҳоказо. <i>Мустақил таълим учун тавсия этиладиган мавзулар:</i> 1. Матрицаларни LU ва LDU кўпайтмаларга ёйиш ва уларнинг татбиқлари. 2. Евклид фазолари. Евклид фазосида ортонормал базис қуриш. 3. Чизиқли операторларни берилган базисда ифодалаш. Чизиқли операторларнинг турли базислардаги матрицалари орасидаги боғланиш. Ўтиш матрицалари. 4. Чизиқли алгебраик тенгламалар системасини тақрибий ечиш усуллари ва уларни компьютерда бажариш.
3.	V. Фан ўқитилишининг натижалари (шаклландиган компетенциялар).

	Фанни ўзлаштириш натижасида талаба: • амалий масалаларда математик текширишнинг бошланғич кўникмасини ишлаб чиқиш (ҳаётий масалаларнинг математик моделини қуриш, уни текшириш ва ечишнинг қулай усулини танлаш, олинган натижаларни баҳолаш, қўллаш ва ҳоказолар); • мавжуд математик пакетлар ёки ахборот технологияларидан фойдалана олиш; • мавзуга доир мисол ва масалаларни ечишга мос қулай усулни топа олиш; • математик масалаларни ечиш усуллари мукаммал ўзлаштириб, ечимларни амалиётда қўлланиш кўринишигача етказиш (формула, сон, график ва ҳоказо) ва натижада логик ва алгоритмик фикрлаш қобилиятига эга бўлиши керак; • талаба мутахассислиги билан боғлиқ адабиётларда учрайдиган математик аппарат тушунчаларини мустақил таҳлил қила олиши, шунингдек, “Чизиқли алгебра” фанидан олинган билимларни мутахассислиги билан боғлай олиши керак; • ўз фикр-мулоҳаза ва хулосаларини асосли тарзда аниқ баён эта олиш малакаларига эга бўлиши керак.
4.	ВИ. Таълим технологиялари ва методлари: • маърузалар; • интефаол кейс-стадилар; • семинарлар (мантикий фикрлаш, тезкор савол-жавоблар); • кичик гуруҳларда ишлаш; • тақдимотларни қилиш; • индивидуал лойиҳалар; • жамоа бўлиб ишлаш ва ҳимоя қилиш учун лойиҳалар тайёрлаш; • ақлий ҳужум ва бошқалар.
5.	VII. Кредитларни олиш учун талаблар: Фанга оид назарий ва амалий тушунчаларни тўла ўзлаштириш, таҳлил натижаларини тўғри акс эттира олиш,

	ўрганилаётган жараёнлар ҳақида мустақил мушоҳада юритиш, тавсия этилган мустақил таълим мавзуларни ўз муддатида сифатли тайёрлаш(ҳимоя қилиш), жорий, оралиқ назорат шаклида берилган вазифа ва топшириқларни бажариш, якуний назорат бўйича ёзма ишни топшириш.
6.	Асосий адабиётлар: 1. Gilbert Strang “Introduction to Linear Algebra”, USA, Cambridge press, 5nd Edition, 2016. 2. Grewal B.S. “Higher Engineering Mathematics”, Delhi, Khanna publishers, 42nd Edition, 2012. 3. Raxmatov R.R., Adizov A.A., Tadjibaeva Sh.E., Shoyimardonov S.K. Chiziqli algebra va analitik geometriya. O‘quv qo‘llanma. Toshkent 2020. 4. Raxmatov R.R., Adizov A.A. “Chiziqli fazo va chiziqli operatorlar” O‘quv uslubiy qo‘llanma. TATU, Toshkent 2019. 5. Соатов Ё.У. “Олий математика”, Т., Ўқитувчи нашриёти, 1- 5 қисмлар, 1995. 6. Рябушко А.П. и др. “Сборник индивидуальных заданий по высшей математике”, Минск, Высшая школа, 1-3 частях, 1991. Қўшимча адабиётлар: 7. Мирзиёев Ш. Буюк келажакимизни мард ва олижаноб халқимиз билан бирга қурамыз. –Т.: Ўзбекистон, 2017. - 488 бет. 8. Мирзиёев Ш.М. Қонун устуворлиги ва инсон манфаатларини таъминлаш-юрт тараққиёти ва халқ фаровонлигининг гарови. –Т.: Ўзбекистон, 2017. 9. Мирзиёев Ш.М. Эркин ва фаровон, демократик Ўзбекистон давлатини биргаликда барпо этамыз. Т.: Ўзбекистон, 2017. 10. Adizov A.A., Xudoyberganov M.O‘. Amaliy matematika. O‘quv uslubiy qo‘llanma. Toshkent. 2014. 11. Шодиев Т.Ш. Аналитик геометрия ва чизикли алгебра. Тошкент “Ўқитувчи” 1984. 12. Илин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. — 6-е изд., стер. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 13. Задорожный В. Н. и др. Высшая математика для технических университетов. Част II. Линейная алгебра. - Томск: Изд-во ТПУ,

	2009. 14. Данко П.С., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Седьмое издание. -М.: Высшая; школа, 2015. 15. Семёнова Т.В. Высшая математика: учебное пособие для студентов технических вузов. Част 1. - Пенза: Пензенский гос. ун-т, 2008. 16. Макаров Е. В., Лунгу К. Н. Высшая математика: руководство к решению задач: учебное пособие, Част 1, Физматлит. 2013. 17. Минорский В.И. Сборник задач по высшей математике. М: Наука, 1987. 18. Беклемешев Д.В., Петрович А.Ю., Чуберов И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. -М.: Наука, 1987. 19. Бугров Я.С., Николский С.М. Сборник задач по высшей математике, - М.: Наука. 1997. Интернет сайтлари 1. www.mv.gov.uz – Ўзбекистон Республикаси ҳукумат портали. 2. www.lex.uz– Ўзбекистон Республикаси Қонун ҳужжатлари маълумотлари миллий базаси. 3. www.Ziyo net.uz 4. www.my.tuit.uz 5. www.Math.uz 6. www.bilim.uz 7. www.ocw.mit.edu
7.	Фан дастури Олий ва профессионал таълими йўналишлари бўйича Ўқув-услугий бирлашмалар фаолиятини Мувофиқлаштирувчи Кенгашининг 202__ йил “__” _____ даги ____ -сонли баённомаси билан маъқулланган. Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 202__ йил “__” _____даги _____ - сонли буйруғи билан маъқулланган фан дастурларини таянч олий таълим муассасаси томонидан тасдиқлашга розилик берилган. Фан дастури Муҳаммад ал-Хоразмий номидаги Тошкент ахборот технологиялари университетида ишлаб чиқилди.
8.	Фан/модул учун масъуллар: 1.Кафедра мудири Рахматов Р., 2.Кафедра доценти Адизов А.А.,

	3.Кафедра доценти Чай З.С.
9.	Такризчилар: Худойбердиев А.Х. – Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети “Алгебра ва функционал анализ” кафедраси профессори, ф.-м.ф.д.; Абдуллаев Р.З.– ТАТУ “Олий математика” профессори, ф.-м.ф.д.

1-maruza.

Matrisalar nazariyasi elementlari

1.1. Matrisa tushunchasi

1.1-ta'rif. m ta satr n ta ustundan iborat ushbu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

jadval to'g'ri burchakli $m \times n$ tartibli (*o'lchamli*) matrisa deyiladi.

Matrisaning tuzuvchi a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$) sonlar uning *elementlari* deyiladi. Matrisada satrlar soni ustunlar sonidan kichik, unga teng yoki katta, ya'ni $m < n$, $m = n$, $m > n$ bo'lishi mumkin. Umumiy holda matrisaning elementlari, odatda, pastiga ikkita indeks qo'yilib, bitta kichik lotin harfi bilan yoziladi. Indekslerden birinchisi satr tartibini, ikkinchisi esa ustun tartibini bildiradi. Matrisalar uchun quyidagi ko'rinishdagi belgilashlar ham ishlatiladi:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ yoki } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, A = (a_{ij}).$$

Agar matrisaning satrlari soni ustunlar soniga teng (ya'ni $m = n$) bo'lsa, matrisani *kvadrat matrisa* deyiladi. Bunday matrisa (n - tartibli) matrisa deb yuritiladi.

Ushbu

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

ko'rinishdagi kvadrat matrisa *diagonal matrisa* deyiladi va qichqacha quyidagicha yoziladi $D = \{d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn}\}$ yoki $D = \{d_{ii}\}$.

Agar (1.1) diagonal matrisa $d_{ii}=1(i=1,2,...,n)$ bo'lsa, bu matrisa birlik matrisa deyiladi va E harfi orqali belgilanadi, ya'ni

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 1 \end{bmatrix}$$

Agar matrisaning barcha elementlari nollardan iborat bo'lsa, u *nol matrisa* deyiladi va E^0 orqali belgilanadi, ya'ni

$$E^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 0 \end{bmatrix}$$

Agar m ta satrli va n ta ustunli ikkita A va B matrisadan birining hamma elementlari ikkinchisining hamma mos elementlariga teng, ya'ni $a_{ij} = b_{ij}$ bo'lsa, bu *matrisalar teng* deyiladi va $A = B$ kabi yoziladi.

Agar bir matrisaning kamida bitta elementi ikkinchisining mos elementiga teng bo'lmasa, bu matrisalar *teng emas* deyiladi va $A \neq B$ ko'rinishda yoziladi. Matrisalar uchun kichik va katta tushunchalari ma'noga ega emas.

1. 2. Matrisalar ustida chiziqli amallar

1.2–ta'rif. Bir xil o'lchamli ikkita $A = (a_{ij})$ va $B = (b_{ij})$ ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$) matrisalarning *yig'indisi* deb, shunday $C = (c_{ij})$ matrisaga aytiladiki, bu matrisaning elementlari A va B matrisalarning mos elementlari yig'indilariga $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i, j, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ teng bo'ladi va $C = A + B$ deb belgilanadi.

Ta'rif bo'yicha

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \dots a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \dots a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} \dots a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrisalar yig'indisi tarifidan uning qo'yidagi xossalari kelib chiqadi:

$$1^0. A + (B + C) = (A + B) + C. \quad 2^0. A + B = B + A.$$

3⁰. $A + E^0 = A$ (bunda $E^0 = (0)$, A, B, C – berilgan bir xil tartibli kvadrat matrisalar).

Matrisalarning ayirmasi ularning yig'indisiga o'xshash ta'riflanadi va

$$C = A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \dots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \dots & a_{2n} - b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \dots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}$$

ko'rinishda yoziladi. Agar matrisalarning tartibi bir xil bo'lmasa, unday matrisalarda qo'shish va ayirish amallari kiritilmagan.

1.3–ta'rif. $A = (a_{ij})$ matrisani $\alpha \neq 0$ songa ko'paytmasi deb, A matrisaning hamma elementlarini shu α songa ko'paytirishdan hosil bo'lgan matrisaga aytiladi va αA ko'rinishda yoziladi.

Ta'rifga ko'ra,

$$A\alpha = \alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matrisani songa ko'paytirish ta'rifidan qo'yidagi xossalari kelib chiqadi:

$$1^0. 1 \cdot A = A \cdot 1 = A. \quad 2^0. A \cdot 0 = 0 \cdot A = E^0.$$

$$3^0. \alpha(\beta)A = \beta(\alpha A) = (\alpha\beta)A. \quad 4^0. (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$$

$$5^0. \alpha(A + B) = \alpha A + \beta B.$$

Bu yerda A va V – bir xil tartibli kvadrat matrisalar, α, β – haqiqiy sonlar.

Misollar:

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ berilgan bo'lsa, u holda

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 3-2 \\ 4+3 & 5+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \text{ bo'ladi.}$$

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ va $\alpha = 2$ berilgan bo'lsa, u holda

$$A\alpha = \alpha A = 2 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 3 \cdot 2 \\ 4 \cdot 2 & 5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

1.3. Matrisalarni ko'paytirish. Tartiblari mos ravishda $m \times n$ va $p \times q$ bo'lgan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix} \text{ va } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \dots b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} \dots b_{2q} \\ \dots & \dots \\ b_{p1} & b_{p2} \dots b_{pq} \end{pmatrix}$$

to'g'ri burchakli matrisalar berilgan bo'lsin.

Agar A matrisaning ustunlari soni n berilgan B matrisaning satrlari soni p ga teng bo'lsa, u holda bu matrisalar uchun ko'paytirish amalini aniqlash mumkin.

1.4-ta'rif. Berilgan $m \times n$ o'lchamli A va $n \times p$ o'lchamli B matrisalarning ko'paytmasi AB deb, shunday $m \times p$ o'lchamli

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \dots c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} \dots c_{2p} \\ \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} \dots c_{mp} \end{pmatrix}$$

matrisaga aytiladi, C matrisaning elementlari

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, p$$

formulalar bilan aniqlanadi.

Agar A va B lar n - tartibli kvadrat matrisalar bo'lsa, ularning $C = AB$ ko'paytmasi ham n - tartibli kvadrat matrisa bo'ladi.

Qoida. Ikkita matrisani ko'paytirishdan hosil bo'lgan matrisaning i - satri va j - ustunida turuvchi c_{ij} elementni topish uchun birinchi matrisaning i - satrida turuvchi elementlarni ikkinchi matrisaning j - ustunida turuvchi elementlarga mos ravishda ko'paytirib qo'shish kerak.

Misol. Quyidagicha

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ va } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisalar ko'paytmasini topamiz.

$$C = AB = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) + 8 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + (-4) \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot (-1) + (-4) \cdot (-3) + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 7 & 14 \end{bmatrix}$$

Matrisalarning ko'paytmasi quyidagi xossalarga ega:

$$1^0. A(BC) = (AB) \cdot C. \quad 2^0. \alpha(AB) = (\alpha A) \cdot B = A(\alpha B), \quad \alpha \neq 0.$$

$$3^0. (A+B)C = AC + BC. \quad 4^0. C(A+B) = CA + CB.$$

$$5^0. A^m = AA \dots A. \quad 6^0. AE = EA = A. \quad 7^0. OA = AO = E^0.$$

Bunda A, B, C matrisalar, α -haqiqiy son.

Ikki matrisaning ko'paytmasi uchun kommutativlik (o'rin almashtirish) xossasi umuman aytganda, o'rinli emas, ya'ni

$$AB \neq BA$$

Misol. Agar $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ bo'lsa, u holda $AB = \begin{pmatrix} 11 & 18 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$,

$$BA = \begin{pmatrix} 18 & 18 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \text{ bo'ladi.}$$

Shunday qilib, $AB \neq BA$.

Satr va ustun matrisalarni ko'paytirish.

1. Istalgan m o'lchamli ustun matrisani istalgan n o'lchamli satr matrisaga ko'paytirish mumkin, natijada $m \times n$ o'lchamli matrisa hosil bo'ladi.

2. n o'lchamli satr matrisani n o'lchamli ustun matrisaga ko'paytirish mumkin, natijada 1×1 o'lchamli matrisa hosil bo'ladi.

1. 4. Transponirlangan matrisa. Elementar almashtirishlar. Ushbu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{bmatrix}$$

matrisa berilgan bo'lsin.

1.5–ta'rif. A matrisaning satrlari bilan ustunlarining o'rinlarini nomerlarini o'zgartirmasdan almashtirishga *transponirlash* deyiladi va quyidagicha belgilanadi

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \dots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} \dots a_{m2} \\ \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} \dots a_{mn} \end{bmatrix}$$

Masalan, ushbu $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 4 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ matrisani transponirlashdan $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ -7 & 9 \end{bmatrix}$

matrisa hosil bo'ladi.

Transponirlash amali quyidagi xossalarga ega:

$$1^0. (A^T)^T = A. \quad 2^0. (A+B)^T = A^T + B^T. \quad 3^0. (\alpha A)^T = \alpha A^T,$$

bunda α - haqiqiy son, A va B lar $m \times n$ o'lchamli matrisalardir.

Agar A kvadrat matrisa uchun $A = A^T$ ya'ni $\forall ij$ lar uchun $a_{ij} = a_{ji}$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda A *simmetrik matrisa* deyiladi. Masalan, ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \\ -3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

simmetrik matrisa bo'ladi.

Agar $A = -A^T$ $\forall ij$ lar uchun $a_{ij} = -a_{ji}$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda A matrisa antisimmetrik (nosimmetrik) matrisa deyiladi.

Masalan, ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -8 \\ 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

antisimmetrik matrisa bo'ladi.

Eslatma. Har qanda A matrisani simmetrik va antisimmetrik matrisa lar yig'indisi ko'rinishda tasvirlash mumkin:

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) + \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji})$$

$$i = 1, 2, \dots, m > j = 1, 2, \dots, n.$$

1.6-ta'rif. Matrisada elementar almashtirishlar deb, quyidagi amallarni tushunamiz

1. Transponirlashni;
2. Istalgan ikki satr (ikki ustun) ni o'zaro almashtirishni;
3. Istalgan satr (ustun) ning elementlarini noldan farqli har qanday m songa ko'paytirishni;
4. Biror satri(ustuni)ning elementlarini istalgan m songa ko'paytirib, boshqa satri (ustuni) ning mos elementlariga qo'shishni.

Agar B matrisa A matrisaning satrlari (yoki ustunlari) ni bir necha marta ketma-ket elementar almashtirishlar yordamida hosil qilingan bo'lsa, u holda A matrisa B matrisaga *ekvivalent* deyiladi va $A \approx B$ ko'rinishda yoziladi.

Masalan, ushbu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ matrisalar ekvivalentdir. Haqiqatan

ham, A matrisaning 2- satrni 1- satrga qo'shamiz,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \approx$$

2- satrni (-1) ga ko'paytirib, 1- satrni qo'shamiz;

$$\approx \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = B$$

2- satrni (-1) ga ko'paytirib, 1- satrni qo'shamiz natijada B matrisa hosil bo'ladi

2-ma'ruza. Determinantlar nazariyasi

2.1. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar va ularni hisoblash usullari

n -tartibli kvadratik A matritsaga mos qo'yiluvchiuning determinanti deb ataluvchi va $\det A$ (yoki $|A|, \Delta$) kabi belgilanuvchi sonni quyidagicha ta'riflaymiz.

2.1-ta'rif. Berilgan ixtiyoriy $a(a \in R)$ haqiqiy son, birinchi tartibli determinat deyiladi va $\det A := \Delta := |A| := a$ kabi yoziladi.

2.2-ta'rif. Ushbu $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ifodaga *ikkinchi tartibli determinant* deyiladi va u

$$n = 2, \det A := \Delta := |A| := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

kabi yoziladi. Bunda $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ larga determinantning *elementlari* bo'lib, a_{11}, a_{22} elementlar determinantning bosh diagonalini, a_{12}, a_{21} elementlar esa determinantning yordamchi diagonalini tashkil etadi. Ikkinchi tartibli determinant bosh diagonal elementlari ko'paytmasi bilan yordamchi diagonal elementlari ko'paytmasining ayirmasiga teng:

$$\begin{vmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{vmatrix}.$$

2.1-misol. Determinantlarni hisoblang:

$$1) \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}; \quad 2) \Delta_1 = \begin{vmatrix} x & 2x \\ 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

Yechilishi. Determinantlarni ta'rif (sxema) asosida topamiz:

$$1) \Delta = 2 \cdot 6 - 5 \cdot 4 = -8; \quad 2) \Delta_1 = x \cdot 6 - 3 \cdot 2x = 0.$$

2.3-ta'rif. Ushbu

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

ifodaga uchinchi tartibli determinant deyiladi va u

$$n = 3, \det A := \Delta := |A| := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \quad (2.1)$$

kabi yoziladi.

Bu ifoda uchburchaklar qoidasi (*Sarryus qoidasi*) bo'yicha topiladi. Uni quyidagi jadvallar orqali tasvirlash mumkin bo'lib, bir xil ishora bilan bitta ko'paytmada ishtirok etuvchi elementlar kesmalar bilan birlashtirilib ko'rsatilgandir:

$$+ \left| \begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right|$$

yoki

$$\begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{vmatrix}$$

Uchinchi tartibli determinantni hisoblashning yana bir usuli quyidagicha. Determinantning o'ng tomonidagi birinchi ustunlarni yozamiz va asosiy diagonal yelementlari va ikkita parallel diagonalning elementlari ko'paytmalarini plyus belgisi bilan yig'amiz. Keyin ikkilamchi diagonal yelementlari va ikkita parallel diagonalning elementlari ko'paytmalarini minus belgisi bilan qo'shamiz.

$$\begin{array}{ccccccc} & + & & + & & + & \\ & & \diagdown & & \diagup & & \diagdown \\ & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & \\ & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & \\ - & & \diagup & & \diagdown & & \diagup \\ & - & & - & & - & \end{array}$$

1.5.6-misol. Ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

matritsaning determinantini uchburchak qoidasi bo'yicha hisoblang.

Yechilishi. Determinantni ta'rif (sxema) asosida topamiz:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) \cdot 5 - 5 \cdot 2 \cdot 2 - 0 \cdot (-3) \cdot 3 - 1 \cdot (-1) \cdot 4 = 23.$$

2.2. O'rin almashtirishlar va o'rniga qo'yishlar

n ta $1, 2, \dots, n$ sonlar (yoki n ta har xil $a_1, a_2, \dots, a_n$ simvollar) ning ma'lum tartibda mumkin bo'lgan ixtiyoriy joylashuviga shu sonlarning (yoki simvollarning) *o'rin almashtirishi* deyiladi. Berilgan n ta simvollarni $1, 2, \dots, n$ sonlar bilan tartiblash mumkin bo'lganligi sababli ixtiyoriy n ta simvollarning o'rin almashtirishlarini o'rganish $1, 2, \dots, n$ larning o'rin almashtirishlarini o'rganishga keltiradi. n ta sonlarning barcha o'rin almashtirishlari soni $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!$ («*n-faktorial*» deb o'qiladi) ga teng. Masalan, a_1, a_2, a_3 simvollarning barcha o'rin almashtirishlari quyidagilardir: $a_1 a_2 a_3, a_1 a_3 a_2, a_2 a_1 a_3, a_2 a_3 a_1, a_3 a_1 a_2, a_3 a_2 a_1$. Ularning soni $3! = 6$ ta.

Agar o'rin almashtirishda ikki sondan kattasi kichigidan oldin kelsa bu sonlar *inversiyani* tashkil etadi, agar kichigi kattasidan oldin kelsa, *tartib* deyiladi.

Inversiyalar sonini hisoblash usuli: o'rin almashtirishdagi sonlarni yozilish tartibi bo'yicha (chapdan o'ngga) har bir son uchun undan o'ng tomonda turgan kichik sonlar sanaladi va hosil bo'lgan barcha sonlar qo'shiladi. Masalan, (613542) o'rin almashtirishda inversiyalar soni $5 + 1 + 2 + 1 = 9$ ga teng.

Inversiyalar sonining juft-toqligiga qarab o'rin almashtirish *juft* yoki *toq* deyiladi.

O'rin almashtirishdagi ikki sonni o'rnini almashtirish *transpozitsiya* deyiladi. i va j sonlarning transpozitsiyasi (i, j) bilan belgilanadi. n ta sonning har qanday o'rin almashtirishidan shu sonlarning istagan boshqa o'rin almashtirishiga bir nechta transpozitsiyalarni bajarish bilan kelish mumkin bo'lib, bunda $n-1$ tadan ko'p bo'lmagan transpozitsiyalar bilan chegaralanishi mumkin. Misol. (312546) o'rin almashtirishdan (631254) almashtirishga beshta: $(3, 6)$, $(3, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 5)$, $(5, 4)$ transpozitsiyalarni bajarish bilan kelish mumkin.

$1, 2, \dots, n$ sonlarning barcha $n!$ o'rin almashtirishlarni har keyingisi oldingisida bitta transpozitsiyani bajarishdan hosil bo'lgan qilib (tushirib qoldirmaydigan va takrorlanmaydigan), birin-ketin joylashtirish mumkin. Har bir transpozitsiya o'rin almashtirishning juft-toqligini o'zgartiradi. $n \geq 2$ son uchun n ta sondan tuzilgan o'rin almashtirishlardan juftlari soni toqlari soniga, ya'ni $\frac{1}{2}n!$ ga teng bo'ladi.

n ta $1, 2, \dots, n$ sonlar to'plamining o'ziga o'zaro bir qiymatli akslantirishiga (biyeksiyasiga) bu sonlarning *o'rniga qo'yish* yoki *n -tartibli o'rniga qo'yish* deyiladi. Shunday qilib, o'rniga qo'yishda 1 dan n gacha bo'lgan har bir songa shu sonlardan qandaydir biri mos keltirilgan bo'lib, ikkita har xil songa ikkita har xil son mos keladi. O'rniga qo'yish umumiy qavsga olingan ikkita satr ko'rinishida: yuqori satrda turgan har bir sonning tagida unga mos keluvchi sonni yozish bilan ifodalanadi. Masalan, $\begin{pmatrix} 623451 \\ 436251 \end{pmatrix}$ o'rniga qo'yishda $1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 6, 4 \rightarrow 2, 5 \rightarrow 5, 6 \rightarrow 4$ mos keltirilganligini bildiradi.

Sonlarning yuqori satrda joylashuviga qarab bitta o'rniga qo'yishni bir nechta ko'rinishda yozish mumkin. Masalan,

$$\begin{pmatrix} 1234 \\ 3412 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2134 \\ 4312 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3124 \\ 1342 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4123 \\ 2341 \end{pmatrix}$$

o'rniga qo'yishlarning barchasida 1 soni 3 ga, 2 soni 4 ga, 3 soni 1 ga, 4 soni 2 ga o'tganligi sababli, ular aynan bitta o'rniga qo'yishni ifodalaydi. n ta son yordamida

tuzilgan har bir o'rniga qo'yishni $n!$ har xil ko'rinishlarda yozish mumkin. n ta sondan tuzilgan har xil o'rniga qo'yishlar soni ham $n!$ ga tengdir.

Agar o'rniga qo'yishning ikkala satridagi inversiyalar yig'indisi juft bo'lsa, o'rniga qo'yish *juft* deb, agar inversiyalar yig'indisi toq bo'lsa, *toq* deb aytiladi. Demak, agar ikkala satrdagi inversiyalar bir xilda juft, yoki ikkalasi ham toq bo'lsa, o'rniga qo'yish juft, agar har xil bo'lsa o'rniga qo'yish toq bo'ladi. O'rniga qo'yishning juft-toqligi uning ikkita satr yordamida ko'rinishidan bog'liq emas, ya'ni bitta o'rniga qo'yishning har xil ko'rinishida inversiyalar juft-toqligi bir xildir.

Masalan, $\begin{pmatrix} 3214 \\ 1324 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1234 \\ 2314 \end{pmatrix}$ o'rniga qo'yishning birinchi yozuvida to'rtta, ikkinchisida ikkita inversiya bor, ya'ni juft.

n elementdan tuzilgan juft o'rniga qo'yishlar soni toq o'rniga qo'yishlar soniga va demak, $\frac{1}{2}n!$ ga tengdir ($n \geq 2$).

O'rniga qo'yishning juft-toqligini aniqlashning boshqa usuli ham bor. Bir nechta sonlar ketma-ketligida berilgan o'rniga qo'yishda birinchi son -ikkinchisiga, ikkinchisi-uchinchisiga va h.k oxirgisi - birinchisiga o'tsa, bu sonlar *sikl* deb ataladi. Siklni undagi sonlarni umumiy qavslarga olib yozish bilan belgilanadi. Agarda son yana o'ziga o'tsa, u ham bitta siklni tashkil etadi. Umumiy sonlarga ega bo'lmagan sikllar, *o'zaro bog'liq bo'lmagan sikllar* deyiladi. Har qanday o'rniga qo'yishni o'zaro bog'liq bo'lmagan sikllarga ajratish mumkin (yoki yoyish mumkin).

Masalan, $\begin{pmatrix} 123456 \\ 613542 \end{pmatrix} = (162)(45)(3).$

O'rniga qo'yishdagi elementlar soni n va uning yoyilmasidagi sikllar soni k ning ayirmasi bo'lgan d soniga, ya'ni $d = n - k$ ga *o'rniga qo'yishning dekrementi* deyiladi. O'rniga qo'yishning juft-toqligi uning dekrementining juft-toqligi bilan bir xildir. Masalan: $n = 6, k = 3, d = 3$ bo'lib, o'rniga qo'yish toq. n - tartibli ikkita o'rniga qo'yishni ketma-ket bajarishdan hosil bo'lgan o'rniga qo'yishga

ularning *ko'paytmasi* deyiladi. Masalan, agar $a = \begin{pmatrix} 12345 \\ 31254 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 12345 \\ 25314 \end{pmatrix}$, bo'lsa, u holda $ab = \begin{pmatrix} 12345 \\ 32541 \end{pmatrix}$ bo'ladi.

Agar siklni o'rniga qo'yish deb tushunsak, u holda o'rniga qo'yishni o'zaro bog'liq bo'lmagan sikllarga yoyilmasiga uning shu sikllarning ko'paytmasi ko'rinishidagi ifodasi deb qarash mumkin. Agar $1, 2, \dots, n$, sonlarning o'rniga qo'yishda i_1 son i_2 ga, $i_2 \rightarrow i_3$ ga, ..., $i_{k-1} \rightarrow i_k$ ga ($k \leq n$), $i_k \rightarrow i_1$ ga o'tib, qolgan sonlar o'ziga o'tsa, bunday o'rniga qo'yishga *sikl* yoki *siklik o'rniga qo'yish* deyiladi va $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ ko'rinishida belgilanadi. $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ va masalan, $(i_2, i_3, \dots, i_k, i_1)$ sikllar o'zaro tengdir. k songa *siklning uzunligi* deyiladi.

Uzunligi 1 ga teng sikl ko'paytmada yozilmaydi. Masalan, $\begin{pmatrix} 12345678 \\ 82157463 \end{pmatrix} = (183)(4576)$. Uzunligi ikkiga teng sikl *transpozitsiya* deyiladi. Har qanday o'rniga qo'yishni transpozitsiyar ko'paytmasi shaklida ifodalash mumkin. Masalan, $(i_1, i_2, \dots, i_k) = (i_1, i_2)(i_1, i_3) \dots (i_1, i_k)$. Bu ifodalanish yagona emas, har qanday juft o'rniga qo'yishni juft sondagi transpozitsiyalar, toq o'rniga qo'yishni toq sondagi transpozitsiyalar ko'paytmasi ko'rinishida ifodalash mumkin.

2.2-misol. Agar RPOKUTME harfli o'rin almashtirishni tartib deb qarab, unga nisbatan KOMPUTER o'rin almashtirishining juft yoki toqligini aniqlang.

Yechilishi. K harfi O, P, R harflari bilan 3 inversiyani tashkil qiladi. O harfi P, R bilan 2 inversiyani, M harfi P, U, T, R harflari bilan 4 ta inversiyani, P harfi R harfi bilan 1 inversiyani, U harfi R bilan 1 inversiyani, U harfi R bilan 1 inversiyani, T harfi R bilan 1 inversiyani, E harfi R bilan 1 inversiyani hosil qiladi. Hammasi bo'lib KOMPUTER o'rin almashtirishida 14 ta inversiya bor. Demak, bu o'rin almashtirish juft. ■

2.3-misol. $(2n, 2n-2, \dots, 6, 4, 2, 2n-1, 2n-3, \dots, 5, 3, 1)$ (1)

o'rin almashtirishida inversiyalar sonini toping. O'rin almashtirishi juft bo'ladigan n larning va toq bo'ladigan n larning umumiy ko'rinishini ko'rsating. *Yechilishi.* Inversiyalar sonini hisoblaymiz:

$$(2n-1) + (2n-3) + \dots + 5 + 3 + 1 + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 =$$

$$= \frac{1+(2n-1)}{2} \cdot n + \frac{1+(n-1)}{2} \cdot (n-1) = n^2 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}n(3n-1)$$

bundan $n = 4k$ va $n = 4k + 3$ bo'lgandagina (1) o'rin almashtirish juft bo'lishini ko'ramiz. ■

2.4-misol. (9, 5, 1, 8, 3, 7, 4, 6, 2) o'rin almashtirishdan (9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1) o'rin almashtirishga o'tish mumkin bo'lgan transpozitsiyalarni ko'rsating.

Yechilishi. Bu transpozitsiyalar quyidagilardan iboratligini ko'rish qiyin emas. (5, 8), (1, 7), (5, 6), (3, 5), (1, 4), (1, 3), (2, 1). ■

2.3. n - tartibli determinantning ta'rifi

n - tartibli determinant deb quyidagi simvol bilan belgilangan sonni ataymiz:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n -tartibli determinant yoki $n > 1$ da A matritsaning determinanti deb, shu matritsaning elementlaridan quyidagi formula yordamida hosil qilingan songa aytiladi:

$$|A| = \det A = |a_{ij}|_1^n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum (-1)^{S+t} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n} = \sum (-1)^k a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n}.$$

Bunda birinchi to'rtta ifoda determinantning belgilanishi; birinchi summa o'zaro teng bo'lmagan barcha

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}, \quad (*)$$

o'rniga qo'yishlar bo'yicha olinib, bunda s – yuqori satrdagi inversiyalar soni, t – quyi satrdagi inversiyalar soni, ikkinchi summa barcha $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ o'rin almashtirishlar bo'yicha olinib, k - bu o'rin almashtirishdagi inversiyalar soni. Bu ikki summa aynan tengdir. Summalardagi qo'shiluvchilar *determinantning hadlari* deyiladi; determinantning har bir hadi – matritsaning har bir satridan bittadan, har bir ustunidan bittadan olingan n ta elementlar ko'paytmasiga teng bo'lib, agar (*) o'rniga qo'yish juft bo'lsa, bu ko'paytma o'z ishorasi bilan, agar o'rniga qo'yish toq bo'lsa, teskari ishora bilan olinadi. Birinchi tartibli determinant o'zining yagona elementiga teng. n -tartibli determinantning barcha elementlari soni $n!$ ga teng. A matritsaning elementlari, satrlari, ustunlari mos determinantning *elementlari, satrlari, ustunlari* deb ataladi.

n -tartibli determinant n ta satr, n ta ustun va n^2 ta elementga ega, bunda $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ elementlar birinchi (bosh) diagonalni, $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ elementlar esa ikkinchi (yordamchi) diagonalni tashkil etadi.

3-ma'ruza. Determinantning xossalari

3.1. Determinantning asosiy xossalari

1⁰. Determinantda hamma satrlar mos ustunlar qilib yozilsa, ya'ni transponirlanganda, determinantning qiymati o'zgarmaydi, ya'ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (3.1)$$

Isboti. Bu xossani isbot etish uchun (3.1) tenglikning to'g'riligini ko'rsatish yetarli. Ammo (3.1) dagi har ikki determinantni uchburchak qoidasini qo'llab hisoblasak, bir xil natijaga kelamiz. ■

2⁰. Determinantning biror satridagi (yoki biror ustunidagi) barcha elementlar nolga teng bo'lsa, bunday determinant nolga teng bo'ladi, ya'ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.2)$$

Isboti. (3.2) ni har ikki determinantni uchburchak qoidasini qo'llab hisoblasak, har bir hadida nol qatnashadi. Bunday determinant qiymati nolga teng bo'ladi. ■

3⁰. Determinantda istalgan ikki satrni (yoki ikki ustunni) o'zaro almashtirsak, determinantning faqat ishorasi o'zgaradi.

Isboti. Bu xossaning to'g'riligiga berilgan determinantga va undan ikki satr yoki ikki ustunning o'rnini almashtirishda hosil bo'lgan determinantga uchburchak qoidasini bevosita qo'llash bilan ishonch hosil qilish mumkin. Jumladan, 1-va 3-ustunlarning o'rnini almashtirsak, Ushbu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}$$

tenglikka ega bo'lamiz. ■

4⁰. Determinantning ikkita satri (yoki ikkita ustuni) teng bo'lsa, bu determinant nolga teng bo'ladi.

Isboti. (3.1) determinantning 1- va 2- satri elementlari mos ravishda bir-biriga teng bo'lsin,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta.$$

Shu determinantdagi bu satrlar o'rinlarini amlashtiramiz. U vaqtda, bir tomondan, 3⁰-xossaga asosan, determinantning qiymati o'z ishorasini o'zgartiradi. Lekin ikkinchi tomondan, o'zaro almashtirilayotgan satrlar bir xil bo'lgani uchun ularni o'zaro almashtirish determinant qiymatini o'zgartirmaydi. Demak, $\Delta = -\Delta$ tenglikka egamiz, bundan $2\Delta = 0$ yoki $\Delta = 0$ kelib chiqadi. Determinantning elementlari teng ikki ustunining o'rinlarini almashtirishga tegishli mulohazalar ham shunga o'xshash yuritiladi. ■

5⁰. Determinantning ixtiyoriy satri (ustuni) elementlarini biror o'zgarma k soniga ko'paytirilsa, determinantning qiymati ham k ga ko'paytiriladi.

Isboti. (3.1) determinantning birinchi satri elementlarini k ga ko'paytirib determinantni uchburchak qoidasini qo'llanib hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{22}a_{33} + ka_{12}a_{23}a_{31} + ka_{13}a_{21}a_{32} - ka_{13}a_{22}a_{31} - \\ &\quad - ka_{11}a_{23}a_{32} - ka_{12}a_{21}a_{33} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\Delta. \end{aligned}$$

Demak, determinantnin satrdagi (yoki ustundagi) barcha elementlarning umumiy ko'paytuvchisini determinant belgisi ostidan chiqarish mumkin. ■

6⁰. Biror satridagi barcha elementlari boshqa bir satrining mos elementlariga proporsional bo'lgan determinant nolga tengdir. Xuddi shundayxossa ustunlar uchun ham o'rinli.

Isboti. (3.1) determinintning, masalan, birinchi satri elementlari uning uchinchi satri elementlari bilan proporsional, ya'ni $a_{11} = ka_{31}$, $a_{12} = ka_{32}$, $a_{13} = ka_{33}$ munosabatlar o'rinli bo'lsin deylik. Bu munosabatlardan foydalanib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0.$$

Oxirgi determinantning birinchi va uchinchi satrlari elementlari bir hil bo'lgani uchun 4^o-xossaga ko'ra uning qiymati nolga teng. Qolgan hollarda ham mulohazalar shu kabi yuritiladi. ■

7^o. Agar determinantning i -satri dagi barcha elementlar m ta qo'shiluvchidan iborat bo'lsa, u holda bu determinantni m ta determinantlarning yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lib, bunda ularning i -dan farqli barcha satrlari berilgan determinantdagidek, i -satri esa birinchi determinantda birinchi qo'shiluvchilardan ikkinchisida - ikkinchilaridan va h.k. tuzilgandir. Xuddi shunday, ustunlar uchun ham o'rinlidir. Xususiyl holda bitta satrga boshqa bir satrni (ustunni) qo'shish (yoki undan ayirish) mumkin, ya'ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + b & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + c & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + d & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b & a_{13} \\ a_{21} & c & a_{23} \\ a_{31} & d & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8^o. Agar determinantning hech bo'lmaganda bitta satri boshqa satrlari orqali chiziqli bog'langan bo'lsa, bu determinant nolga tengdir. Aksincha, agar n -tartibli ($n > 2$) determinant nolga teng bo'lsa, u holda uning hech bo'lmaganda bitta satri boshqa satrlari orqali chiziqli ifodalangan bo'ladi. Xuddi shunday ustunlar uchun ham o'rinlidir.

9^o. Determinantda biror ustun (satr) ning hamma elementlarini bitta k songa ko'paytirib, bu ko'paytmalarni boshqa ustun (satr) ning mos elementlariga qo'shsak, determinantning qiymati o'zgarmaydi.

Isboti. (3.1) determinintning bininchi satri elementlarini k ga ko'paytirib, ikkinchi satri elementlariga mos ravishda qo'shaylik (boshqa hollar uchun ham isbot shunga o'xshash bo'ladi). Ko'rilayotgan holda

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{11} & a_{22} + ka_{12} & a_{23} + ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Bu determinant qiymatini $\tilde{\Delta}$ deb belgilaylik. Biz $\Delta = \tilde{\Delta}$ ekanini ko'rsatishimiz lozim. Determinintning 6^0 - va 7^0 -xossalarga ko'ra, qo'yidagiga ega bo'lamiz:

$$\tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ma_{11} & ma_{12} & ma_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta + 0 = \Delta. \blacksquare$$

3.2. Minor va algebraik to'ldiruvchi tushunchalari.

Laplas teoremasi

3.1–ta'rif. n - tartibli D determinantning istalgan k ta satri va k ta ustunlarini ajrataylik. Bu satrlar va ustunlarning kesishgan joylaridagi elementlarni D determinantdagidek tartibda olib, ulardan k - tartibli M determinantni tuzsak, u D ning k - tartibli *minor* deb ataladi.

3.2–ta'rif. D determinantda ajratilgan k ta satr va k ta ustunni o'chiraylik. D ning qolgan elementlarini shu D dagidek tartibda olib, ulardan $(n-k)$ tartibli M determinantni tuzsak, u, M ga *qo'shma minor* deyiladi.

3.1-misol. Ushbu

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

determinantda 1- va 5- satrlarni, 3 va 4- ustunlarni ajratib minor va qo'shma minorlarni tuzing.

Yechilishi. Berilgan determinantning 1- va 5- satrlarni, 3 va 4- ustunlarni kesishgan joylaridagi elementlarni ajratamiz. Budan 2- tartibli

$$M = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{53} & a_{54} \end{vmatrix}$$

minor tuziladi. Bu ajratilgan satr va ustunlarni o'chirsak, qolgan elementlardan ushbu

$$\overline{M} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{45} \end{vmatrix}$$

qo'shimcha minor hosil bo'ladi. ■

3.3- ta'rif. Ushbu

$$(-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k, \beta_1+\beta_2+\dots+\beta_k}$$

darajaning $\overline{M}$ qo'shimcha minorga ko'paytmasi k - tartibli M minorning algebraik to'ldiruvchisi (yoki M minorga mos algebraik to'ldiruvchi) deb ataladi, bunda $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ va $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ mos ravishda, D determinantning M minorga tegishli satr va ustunlarining raqamlarini bildiradi.

Algebraik to'ldiruvchi, odatda, A harf bilan belgilanadi. Ta'rifga muvofiq:

$$A = (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k+\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_k} \cdot \overline{M}.$$

ko'rinishda yoziladi.

Agar M minor bitta elementdan iborat, ya'ni $M = a_{kl}$ bo'lsa, unga mos algebraik to'ldiruvchini A_{kl} bilan belgilaydilar. Bu holda

$$A_{kl} = (-1)^{k+l} \cdot M_{kl}.$$

3.1-misoldagi $M = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{53} & a_{54} \end{vmatrix}$ minorning algebraik to'ldiruvchisi

$$A = (-1)^{1+5+3+4} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{45} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{45} \end{vmatrix}$$

bo'ladi.

3.1-lemma. M minorning istalgan hadini shu minorga mos A algebraik to'ldiruvchining istalgan hadiga ko'paytirsa, D determinantning hadi hosil bo'ladi.

3.1-teorema (Laplas). n - tartibli D determinantda istalgan k ta satr (yoki ustun) ni ajratamiz ($1 \leq k < n$). Bu ajratilgan satr (yoki ustun) larning elementlaridan tuzilgan hamma k - tartibli minorlarni o'z algebraik to'ldiruvchilari ko'paytirib natijalarni qo'shsak, yig'indi D determinantga teng bo'ladi.

3.2-misol. Ushbu

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

5- tartibli determinantni 2-tartibli minorlar bo'yicha yoyib hisoblang.

Yechilishi. Determinantda, masalan, 1 va 2 satrlarni ajratsak, ularning elementlaridan, hammasi bo'lib $C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$ ta 2- tartibli minor tuziladi. Laplas teoremasiga asosan quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+1+3} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+1+4} \cdot \\ &\cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+2+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+2+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+2+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \cdot 10 - 1(-1) + 14 \cdot (-23) - 11 \cdot (-2) - \\ &- 7 \cdot 4 + 23 \cdot (-5) = 70 + 1 - 322 + 22 - 28 - 115 = -372. \blacksquare \end{aligned}$$

3.3. Determinantni satr yoki ustun elementlari bo'yicha yoyish

Agar Laplas teoremasisida $k=1$ bo'lsa, ya'ni D determinantda bitta satr ajratilsa, u vaqtda $M_1, M_2, \dots, M_t$ minorlar, birinchi tartibli minorlar sifatida, satrning elementlaridan iborat bo'ladi.

Masalan, bu minorlar, i -satrning $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ elementlarini bildirsa, u vaqtda $A_1, A_2, \dots, A_t$ algebraik to'ldiruvchilar bu elementlarning

$$A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in}$$

algebraik to'ldiruvchilariga aylanadi va Laplas teoremasiga ko'ra,

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} \quad (3.3)$$

ko'rinishni oladi. Bu (3.3) tenglik D determinantning *i* satr elementlari bo'yicha yoyilmasi deyiladi.

Agar minorlar *j*-ustunning $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$ elementlarini ifodalasa, u holda Laplas teorimasiga ko'ra D determinantning qiymati

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} \quad (3.4)$$

bo'ladi. Bu (3.4) tenglikka D determinantning *j*-ustun elementlari bo'yicha yoyilmasidir.

3.3-misol. Ushbu $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ determinantni ikkinchi va uchinchi ustun

bo'yicha hisoblang.

Yechilishi. Berilgan Δ determinantni (1.9.2)-formula bo'yicha hisoblaymiz:

$$\Delta = -2(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 5(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 6(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 18,$$

$$\Delta = 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 0(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 18.$$

Demak, berilgan Δ determinantning qiymati bir xil chiqdi. ■

3.2-teorema. Determinantda *i*- satr (yoki *j*- ustun) ning a_{ij} dan boshqa, hamma elementlari nolga teng bo'lsa, bu determinant o'sha a_{ij} element bilan unga mos algebraik to'ldiruvchining ko'paytmasiga teng bo'ladi, ya'ni

$$D = a_{ij}A_{ij}.$$

3.2-teoremaga asosan, ushbu $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 5(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = -125$, determinantni

hisoblash engil.

3.3–teorema. D determinantning bitta satri (yoki ustuni) dagi hamma elementlarini boshqa satr (ustuni) dagi mos elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirib, natijalarni qo'shsak, yig'indi nolga teng bo'ladi, ya'ni

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j),$$

$$a_{1s}A_{1t} + a_{2s}A_{2t} + \dots + a_{ns}A_{nt} = 0 \quad (s \neq t).$$

3.4–teorema. D determinantning bitta satri (yoki ustuni) dagi hamma elementlarini shu satr (ustuni) dagi mos elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirib, natijalarni qo'shsak, yig'indi D determinantga teng bo'ladi, ya'ni

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = D, \quad a_{1s}A_{1s} + a_{2s}A_{2s} + \dots + a_{ns}A_{ns} = D.$$

4-ma'ruza.

Matrisa rangi. Matrisa rangini hisoblash usullari

4.1. Matrisa rangi.

4.1-tarif. *Matrisa rangi* dyeb, uning noldan farqli minorlari tartibining eng kattasiga aytiladi va u $r(A)$ yoki $\text{rang}(A)$ kabi belgilanadi.

Agar A matrisaning rangi r ga teng bo'lsa bu narsa A matrisada hech bo'lmaganda bitta noldan farqli r tartibli minor birligini, biroq r dan katta tartibli har qanday minor nolga tengligini anglatadi.

A matritsada noldan farqli aqalli bitta s tartibli minor mavjud bo'lib, shu A dagi s dan yuqori tartibli hamma minorlari nolga teng bo'lsa, A ning rangi s ga teng, ya'ni $\text{rang}A = s$ bo'ladi.

Agar A matritsaning 2 va undan yuqori tartibli minorlari nolga teng bo'lsayu, lekin A da aqalli bitta element noldan farqli bo'lsa, A ning rangi 1 ga teng, ya'ni $\text{rang}A = 1$ bo'ladi.

Agar A matritsaning hamma elementlari nollardan iborat bo'lsa, bu matritsaning rangi 0 ga teng, ya'ni $\text{rang}A = \text{rang}E^0 = 0$ bo'ladi.

4.1-teorema. Elementar almashtirishlar matritsaning rangini o'zgartirmaydi.

4.2-teorema. Agar A matritsaning rangi s ga teng bo'lsa, rangni aniqlovchi D minorga kirgan satrlar (ustunlar) orqali A ning qolgan har bir satri (ustuni) chiziqli ifodalanadi.

4.3-teorema. Agar matritsada noldan farqli s -tartibli D minor mavjud bo'lib, bu minorga kiruvchi satrlar (ustunlar) orqali A ning qolgan har bir satri (ustuni) chiziqli ifodalansa, A ning rangi s ga teng bo'ladi.

4.4-teorema. To'g'ri burchakli A matritsaning noldan farqli minorlarning eng yuqori tartibi shu matritsaning rangiga teng.

Matrisa rangini aniqlashda odatda, ko'p sondagi dityerminantlarni hisoblashga to'g'ri kyeladi. Bu ishni osonlashtirish uchun maxsus usullarni bayonidan oldin matrisaning elyemyentar almashtirishlarini kyeltiramiz:

4.1.. Elementar almashtirishlar.

4.2–ta’rif. Matritsani elementar almashtirishlar deb,

1. Transponirlashni;
2. Istalgan ikki satr (ikki ustun) ni o’zaro almashtirishni;
3. Istalgan satr (ustun) ning elementlarini noldan farqli har qanday m songa ko’paytirishni;
4. Bir satr (ustun) ning elementlarini istalgan m songa ($m = 0$ bo’lishi ham mumkin) ko’paytirib, boshqa satr (ustun) ning mos elementlariga qo’shishni aytamiz.

5. Matrisada, barcha elyemyentlari nol bo’lgan satrini tashlab yuborish;

Agar B matritsa A matritsaning satrlari (yoki ustunlari) ni bir necha marta ketma-ket elementar almashtirishlar yordamida olingan bo’lsa, u holda A matritsa B matritsaga ekvivalent deyiladi va $A \approx B$ ko’rinishda yoziladi. Ekvivalyent matrisalar umuman aytganda bir- biriga tyeng emas lyekin ularning ranglari tyeng bo’lishidan foydalanish mumkin.

Masalan, ushbu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ matritsalar ekvivalentdir.

Haqiqatan ham, 2 satrni 1 satrga qo’shamiz, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \approx$

satrga 2 satrni -1 ga ko’paytirib, 1 satrni 2 satrga qo’shamiz;

$$\approx \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = B$$

1 satrni -1 ga ko’paytirib 2 satrni qo’shamiz.

Teorema. Elementar almashtirishlar matrisaning rangini o’zgartirmaydi.

Matrisa rangi uchun quyidagi xossa o’rinli:

1⁰. $\text{rang}(A + B) \leq \text{rang}(A) + \text{rang}(B);$

2⁰. $\text{rang}(A \cdot B) \leq \min \{ \text{rang}(A), \text{rang}(B) \};$

3⁰. $\text{rang}(A \cdot B) + \text{rang}(BC) - r(B) \leq \text{rang}(ABC).$

4.2. Matrisa rangini hisoblashning minorlar usuli. Ekvivalent almashtirishlar yordamida matrisa rangini hisoblash

4.1-misol. Xoshiyalavchi minor yordamida quyidagi matrisaning rangini topig

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 5 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Yechilishi. Xoshiyalavchi minor yordamida bu matrisaning rangini hisoblaymiz. Matrisaning chap burchagidagi birinchi tartibli minor noldan farqli $1 \neq 0$. Uning xoshiyalavchi ikkinchi tartibli minorlarni hisoblaymiz:

$$M_2^1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2^2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

M_2^2 minorni saqlagan xoshiyalavchi uchinchi tartibli minorni hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{va} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Uchinchi tartibli minorlarning barchasi nolga teng. Demak, berilgan matrisaning rangi $\text{rang} A = 2$. ■

4.2-misol. Elemantar almashtirishlar yordamida quyidagi matrisaning rangini toping

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Yechilishi. Biz qo'shni matritsalarini $\sim$ ekvivalentlik belgisi bilan birlashtirib, bosqichma-bosqich shaklga olib keladigan elementar almashtirishlar yordamida ushbu matritsaning rangini hisoblaymiz.

Ikkinchi satrdan birinchi satrni ayiramiz va satrlarning o'rinlarini almashtiramiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

Ikkinch satrdan uchinchi satrni ayiramiz va mos ravishda 2 va 5 ga ko'paytiramiz:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Uchinchi satrdan ikkinch satrni ayiramiz

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demak, matritsaning rangi ikkitadir.

Olingan matritsa osongina kanonikka ko'rinishga olib keladi. Birinchi ustunni chiqarib, tegishli sonlar bilan ko'paytiriladi, quyidagilardan, birinchi qatordan tashqari birinchi satrning barcha elementlarini nolga aylantiramiz va boshqa satrlarning elementlari o'zgarmaydi. Keyin, ikkinchi ustunni chiqarib, quyidagi raqamlarga ko'paytiramiz, ikkinchisidan tashqari ikkinchi satrning barcha elementlarini nolga aylantiramiz va kanonik matritsani olamiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

5-ma'ruza.

Teskari matrisa. Teskari matrisani hisoblash usullari

5.1. Teskari matrisa haqida tushuncha

5.1-ta'rif. Agar n -tartibli A va B kvadrat matrisalar orasida $AB = BA = E$ (E – birlik matrisa) munosabat o'rinli bo'lsa, u holda B matrisani A matrisaga (va aksincha) **teskari matrisa** deyiladi.

A matrisa uchun teskari matrisasini A^{-1} orqali belgilanadi. U holda o'zaro teskari matrisalar uchun ushbu munosabat o'rinli:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Berilgan kvadrat matrisaga teskari matrisa har doim ham mavjud bo'lavermaydi. Bunday matrisa mavjud bo'lganda uni topish ko'p masalalarni hal etishda muhim ahamiyat kasb etadi.

5.2-ta'rif. Agar A kvadrat matrisaning determenanti nolga teng bo'lsa, u holda A matrisani **maxsus**, aks holda, **maxsusmas** matrisa deyiladi.

5.1-teorema. Ixtiyoriy maxsusmas matrisa uchun unga teskari matrisa mavjud.

Isboti. Faraz qilaylik, $A = [a_{ij}]$ matrisa n tartibli kvadrat matrisa bo'lib, $D = \det A \neq 0$ bo'lsin. A matrisaning a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) elementlariga mos keluvchi algebraik to'ldiruvchilardan tuzilgan ushbu matrisani qaraymiz:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \dots A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} \dots A_{2n} \\ \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} \dots A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Agar bu matrisani transponirlasak,

$$\tilde{A}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \dots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \dots A_{n2} \\ \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{2n} \dots A_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisaga ega bo'lamiz. $\tilde{A}^T$ matrisani odatda $\tilde{A}$ matrisaga qo'shma matrisa deyiladi. Qo'shma matrisaning barcha elementlarini A matrisaning determinantiga bo'lib, qo'yidagi matrisani hosil qilamiz:

$$B = \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \frac{A_{21}}{\det A} & \cdots & \frac{A_{n1}}{\det A} \\ \frac{A_{12}}{\det A} & \frac{A_{22}}{\det A} & \cdots & \frac{A_{n2}}{\det A} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{\det A} & \frac{A_{2n}}{\det A} & \cdots & \frac{A_{nn}}{\det A} \end{vmatrix}$$

Hosil bo'lgan bu B matrisani A matrisaga teskari ekanini, ya'ni $B = A^{-1}$ ekanligini isbot qilamiz. Buning uchun determinantning xossalari asoslanib, A va B matrisalarning ko'paytmasini hisoblaymiz:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{ccc} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 0 \end{bmatrix}.$$

Demak, $B = A^{-1}$. Bundan $\det A^{-1} = \frac{1}{D} A$ ekani kelib chiqadi. ■

Eslatmalar.

1. Berilgan maxsusmas A matrisa uchun uning teskari A^{-1} matrisasi mavjud yagonadir.
2. Maxsus kvadrat matrisa uchun teskari matrisa mavjud emas.

5.1-misol.Ushbu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

matrisa uchun teskari matrisani topaylik.

Yechilishi. Buning uchun avval $\det A$ determinantni tuzamiz va uni hisoblaymiz.

$$D = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Demak, A maxsusmas matrisa.

Endi qo'shma matrisani tezamiz. Buning uchun A matrisaning satr elementlarining algebraik to'ldiruvchilarini topamiz va ularni mos ravishda ustunlarga joylashtiramiz:

$$A_{11} = 4 \cdot 6 - 5 \cdot 5 = -1, \quad A_{12} = -(2 \cdot 6 - 3 \cdot 5) = 3,$$

$$A_{21} = -(2 \cdot 6 - 5 \cdot 3) = 3, \quad A_{22} = 1 \cdot 6 - 3 \cdot 3 = -3,$$

$$A_{31} = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = -2, \quad A_{32} = -(1 \cdot 5 - 3 \cdot 2) = 1,$$

$$A_{13} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = -2$$

$$A_{23} = -(5 \cdot 1 - 3 \cdot 2) = 1$$

$$A_{33} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$$

Shunday qilib,

$$\tilde{A}^T = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nihoyat, A ning barcha elementlarini $\Delta = -1 \Delta = -1$ ga bo'lamiz, u holda teskari matrisa ushbu ko'rinishga ega bo'ladi:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tekshirish ko'rsatadiki, $A \cdot A^{-1} = E$. Haqiqatan,

$$\begin{aligned}
AA^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 9 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2(-3) + 3 \cdot 2 & 1(-3) + 2 \cdot 3 + 3(-1) & 1 \cdot 2 + 2(-1) + 3 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 + 4(-3) + 5 \cdot 2 & 2(-3) + 4 \cdot 3 + 5(-1) & 2 \cdot 2 + 4(-1) + 5 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 5(-3) + 6 \cdot 2 & 3(-3) + 5 \cdot 3 + 6(-1) & 3 \cdot 2 + 5(-1) + 6 \cdot 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E
\end{aligned}$$

Shu yo'l bilan $A^{-1}A = E$ ekanini isbotlash mumkin. ■

5.2. Ekvivalent almashtirishlar yordamida teskari matrisani hisoblash

Teskari matrisa quyidagi xossalarga ega:

1⁰. Teskari matrisaning determinanti berilgan matrisa determinantining teskari qiymatiga teng, ya'ni $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

2⁰. Kvadrat matrisalar ko'paytmasi AB uchun teskari ikkinchi B matrisaga teskari matrisaning birinchi A matrisaga teskari matrisaga ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

3⁰. Transponirlangan teskari matrisa berilgan transponirlangan matrisaning teskarisiga teng, ya'ni

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$

4⁰. Teskari matrisaning teskarisi berilgan matrisaning o'ziga teng, ya'ni

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

2×2 o'lchamli matrisa uchun teskari matrisa quy'dagicha aniqlanadi.

$$\text{Agar } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ va } ad - bc \neq 0 \text{ bo'lsa, u holda } A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

bo'ladi.

5.2-misol. Elimentar satrlarni almashtirish yordamida A^{-1} teskari matrisani toping:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Yechilishi. Matrisani ko'rinishda yozamiz:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -13 & -3 & 3 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \xrightarrow{R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -3 & 11 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & -18 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & 29 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 18 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Shunday qilib, izlangan teskari matrisa ko'rinishda bo'ladi:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

6-ma'ruza.

Yuqoridagi paragraflarda chiziqli algebraning asosiy tushunchalaridan bo‘lgan matritsalar, determinantlar va ularning asosiy xossalarini o‘rgandik. Endi ular asosida chiziqli algebraik tenglamalar sistemalarini batafsil o‘rganamiz.

6.1. Chiziqli tenglamalar sistemasi. Kroneker-Kapelli teoremasi. n noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{m1}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \text{\scriptsize } \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (6.1)$$

bunda tenglamalar soni noma'lumlar sonidan kichik, teng yoki undan katta $m < n, m = n, m > n$) bo'lishi mumkin. (6.1) tenglamalar sistemasida a_{ij} -koeffitsiyentlar x_i -noma'lumlar, b_j -ozod hadlar ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$) deyiladi.

6.1-ta’rif. Agar $x_1, x_2, \dots, x_n$ noma’lumlariga berilgan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ qiymatlarni qo’yganda (6.1) sistemasining hamma tenglamalarini qanoatlantirsa, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sonlar to’plami (6.1) *sistemaning yechimi* deyiladi.

(6.1) tenglamalar sistemasi koeffitsiyentlaridan tuzilgan ushbu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisani va A matrisada unga ozod hadlar ustunini qo'shish bilan hosil qilingan ushbu

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

matrisani qaraymiz. A matrisa (6.1) tenglamalar sistemasining *matrisasi yoki asosiy matrisasi*, B esa *kengaytirilgan matrisasi* deyiladi. Bu matrisalarning ranglari $\text{rang}A \leq \text{rang}B$ tengsizlik bilan bog'langanligi ravshan.

Agar chizqli tenglamalar sistemasi yechimga ega bo'lsa, u *birgalikda*, agar yechimga ega bo'lmasa, u *birgalikda emas* deyiladi.

Birgalikda chizqli tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo'lsa, u *aniqlangan*, agar cheksiz ko'p yechimlarga ega bo'lsa, u *aniqmas sistema* deb ataladi.

Agar ikkita birgalikdagi tenglamalar sistemasidan birining har bir yechimi ikkinchisining yechimi va aksincha, ikkinchisining har bir yechimi birinchisining yechimi bo'lsa, bu sistemalar *teng kuchli* sistemalar deb ataladi.

Quyidagi almashtirishlar tenglamalar sistemasidan unga teng kuchli sistemaga o'tkazishni isbotlash mumkin:

1. Istalgan ikkita tenglamaning o'rinlarini almashtirish;
2. Tenglamalardan istalgan birining ikkala tomonini noldan farqli istalgan songa ko'paytirish;
3. Sistema tenglamalardan birining ikkala tomoniga boshqa bir tenglamaning istalgan haqiqiy songa ko'paytirilgan mos qismini qo'shish.

Endi (6.1) chizqli tenglamalar sistemasining yechilishi alomatini qaraymiz.

6.1-teorema (Kroneker-Kapelli teoremasi). (6.1) chizqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo'lishi uchun, asosiy matrisa bilan kengaytirilgan matrisaning ranglari teng, ya'ni $\text{rang}A = \text{rang}B$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

(6.1) sistemani tekshirish va yechish quyidagi tartibda amalga oshiriladi.
Tekshirish: (6.1) sistema asosiy va kengaytirilgan matritsalarining ranglari topiladi. Bunda:

1. Agar $\text{rang}(B) \neq \text{rang}(A)$ bo'lsa, (6.1) sistema birgalikda bo'lmaydi;
2. Agar $\text{rang}(B) = \text{rang}(A) = n$, ya'ni (6.1) sistemaning rangi uning noma'lumlari soniga teng bo'lsa, (6.1) sistema birgalikda va aniq bo'ladi;

3. Agar $\text{rang}(B) = \text{rang}(A) < n$ bo'lsa, sistema birgalikda va aniqmas bo'ladi.

6.2. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning

Kramer usuli

n ta nomalumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi deb, ushbu

[illegible]

koʻrinishdagi chiziqli tenglamalarning chekli toʻplamiga aytiladi. Bunda $a_{ij} (i, j = \overline{1, n})$ sonlar berilgan sistemaning *koeffitsientlari*, $b_i (i = \overline{1, n})$ esa, sistemaning *ozod hadlari* deyiladi. Bu (6.1) sistemadagi nomaʼlumlarning koeffitsiyentlaridan n - tartibli ushbu detriminantni tuzamiz:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (6.3)$$

Bu determinant (6.2) sistemaning determinanti deyiladi. Bunda ikki hol bo'lishi mumkin: $D \neq 0$ va $D = 0$. Biz hozircha $D \neq 0$ bo'lgan holni ko'raylik.

(6.2) sistemaning birinchi tenglamasini A_{1s} ($s = \overline{1, n}$) algebraik to'ldiruvchiga, ikkinchisini A_{2s} ga, ..., n -sini A_{ns} ga ko'paytirib, natijalarni hadlab qo'shamiz:

$$\begin{aligned} & (a_{11}A_{1s} + a_{21}A_{2s} + \cdots + a_{n1}A_{ns})x_1 + \\ & + (a_{12}A_{1s} + a_{22}A_{2s} + \cdots + a_{n2}A_{ns})x_2 + \\ & + \dots\dots\dots + \\ & + (a_{1n}A_{1s} + a_{2n}A_{2s} + \cdots + a_{nn}A_{ns})x_n = \\ & = b_1A_{1s} + b_2A_{2s} + \cdots + b_nA_{ns}. \end{aligned} \tag{6.4}$$

5-mavzudagi determinantni satr yoki ustun elementlari bo'yicha yoyish, 5.5- va 5.6-teoremlarga asosan,

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning matrisa, Gauss va Gauss-Jordan usullari

Bizga m noma'lum n ta chizikli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin, ya'ni

[illegible]

Agar (7.1) sistemadagi biror tenglamani ikkinchisiga qo'shganda yoki har qanday haqiqiy songa ko'paytirganda, (7.1) sistemaga ekvivaliyent tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz. Faraz qilaylik, (7.1) dagi $a_{11} \neq 0$ bo'lsin. (7.1) sistemadagi birinchi tenglamani a_{11} ga bo'lamiz. U holda

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n = \frac{b_1}{a_{11}} \quad (7.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1, \\ c_{12}x_2 + \cdots + c_{2m}x_m = d_2, \\ c_{32}x_2 + \cdots + c_{3m}x_m = d_3, \\ \dots \\ c_n = x_2 + \cdots + c_{nm}x_m = d_n, \end{array} \right. \quad (7.3)$$

54

Shunday qilib, $c_{22}, c_{32}, \dots, c_{n2}$ koefitsientlar orasida noldan farqlilari bor; aniqlik uchun $c_{22} \neq 0$ deb qabul qilamiz. (7.3) sistemaning ikkinchi tenglamasining hamma hadlarini c_{22} ga bo'lamiz, so'ngra uni mos ravishda $-c_{22}, -c_{32}, \dots, -c_{n2}$ sonlarga ko'paytirib uchinchi, turtinchi va boshqa tenglamalarga qo'shamiz, u holda

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1, \\ c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \cdots + c_{2m}x_m = d_2, \\ p_{33}x_3 + \cdots + p_{3m}x_m = q_3, \\ \dots\dots\dots \\ p_{n3}x_3 + \cdots + p_{nm}x_m = q_n, \end{array} \right. \quad (7.4)$$

Agar bu tenglamalardan biri noldan farqli ozod hadga ega bo'lib, chap tomonidagi barcha koeffitsiyentlari esa nolga teng bo'lgan sistemaga ega bo'lib qolsa, u holda bu sistema yechimga ega bo'lmaydi.

Agar o'zgaruvchilar soni bilan tenglamalar soni ($m = n$) teng bo'lib va (7.1) sistema birgalikda (yechimga ega) bo'lsin, u holda (7.4) sistema quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

[illegible]

Bu qiymatni oxiridan ikkinchi tenglamaga qo'yib, x_{n-1} x_n -1 noma'lum uchun bir qiymatli aniqlangan tayin qiymatni topamiz. Shunday davom ettirib, (7.1) sistemaning $x_1, x_2, \dots, x_n$ yagona yechimiga ega bo'lamiz.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1, \\ c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \cdots + c_{2m}x_m = b_2, \\ \\ p_{nn}x_n + \cdots + p_{nm}x_m = q_n, \end{cases} \quad (7.6)$$
[illegible]

Agar $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_m$ ga ixtiyoriy qiymatlar berish mumkinligini e'tiborga olsak, bu holda berilgan (7.1) sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

Ushbu n ta noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasini ko'raylik:

$$(7.7)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (7.8)$$
$$AX = B, \quad (7.9)$$

Agar A matrisa xosmas, ya'ni $\det A \neq 0$ bo'lsa, u holda uning uchun A^{-1} teskari matrisa mavjud. (7.9) matrisali tenglamaning ikkala qismini A^{-1} ga chapdan ko'paytirib, qo'yidagini hosil qilamiz:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \text{ yoki}$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B, A^{-1}A = E, EX = X$$

$$X = A^{-1}B \quad (7.10)$$
$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\Delta} \{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n\} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \\ x_2 &= \frac{1}{\Delta} \{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n\} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= \frac{1}{\Delta} \{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + b_n A_{nn}\} = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \end{aligned}$$

57

Bir jinsli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi

Ushbu n ta noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasini ko'raylik:

[illegible]

Ushbu bir jinsli

[illegible]

8.1-teorema. n noma'lum n ta bir jinsli tenglamalar sistemasi noldan farqli yechimlarga ega bo'lishi uchun, sistema determinanti nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

8.2-teorema. (8.2) sistema nolmas yechimga ega bo'lishi uchun A matrisaning $\text{rang}A$ rangi noma'lumlar soni n dan kichik bo'lishi zarur va yetarlidir, ya'ni $\text{rang}A < n$.

58

8.1-misol. Ushbu

tenglamalar sistemasining nol yoki nolmas yechimlarga tekshiring.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 15 \neq 0.$$

Demak, sistema bittagina $(0,0,0)$ yechimga ega, chunki $D \neq 0$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 3 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

8.2. Bir jinsli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining fundamental yechimlari sistemasi

(8.2) sistema cheksiz ko'p vechimlarga (demak $s < n$) bo'lgan holni ko'ramiz.

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1n}, \\ &\alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{2n}, \\ &..... \\ &\alpha_{l1}, \alpha_{l2}, \dots, \alpha_{ln}, \end{aligned} \tag{8.3}$$

dan iborat l ta yechimi o'zaro chiziqli bog'lanmagan bo'lib, (8.3) sistemaning istalgan

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$$

yechimi (8.3) yechimlar orqali chiziqli ifodalansa, ya'ni

[illegible]

tenglikni qanoatlantiruvchi $c_1, c_2, \dots, c_l$ sonlar topilsa, (8.3) sistema fundamental yechimlar sistemasi yoki fundamental sistema deyiladi.

8.3-teorema. (8.2) bir jinsli tenglamalar sistemasining asosiy A matrisasi noma'lumlar sonidan kichik rangga ega ($s < n$) bo'lsa, bu sistema uchun fundamental yechimlar sistemasi mavjud va fundamental sistemasiga kiruvchi yechimlarning soni parametrlar soniga teng.

8.2-misol. Ushbu

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 6x_1 - x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

sistemaning fundamental yechimlar sistemasini toping.

Yechilishi. Ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisada elementar almashtirishlar bajaramiz. 1 satrni -1 , 2-sini -3 ga ko'paytirib ketma-ket 3-siga qo'shamiz. Bu vaqtda

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hosil bo'лади. Demak, A ning rangi 2 ga teng, chunki

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$

Berilgan sistemaning avvalgi ikkita tenglamasini olib yechamiz:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = x_3 + x_4, \\ x_1 - x_2 = x_3 - x_4. \end{cases} \quad (2)$$

Parametrlarning soni ikkita bo'lgani uchun, fundamental sistema ikkita yechimdan tuziladi va Δ determinant 2-tartibli bo'ladi. Parametrlarga $\Delta \neq 0$ shart bajariladigan qiymatlarni beraylik. Masalan, $x_3=5$ va $x_4=-$, so'ngra $x_3=0$ va $x_4=5$ qiymatlarda

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 25 \neq 0$$

bo'ladi. Parametrlarning birinchi qiymatlarida (2) sistema

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5, \\ x_1 - x_2 = 5 \end{cases}$$

ko'rinishni oladi. Bundan: $x_1=3$, $x_2=-2$ bo'ladi. Parametrlarning ikkinchi qiymatlarida esa

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5, \\ x_1 - x_2 = -5 \end{cases}$$

hosil bo'lib, $x_1=-1$, $x_2=4$ bo'ladi.

Demak, fundamental yechimlardan bittasi

$$3, -2, 5, 0,$$

$$-1, 4, 0, 5,$$

Berilgan (1) sistemasining yechimlari

$$\beta_1 = 3c_1 - c_2$$

$$\beta_2 = -2c_1 + 4c_2$$

$$\beta_3 = 5c_1 + 0c_2$$

$$\beta_4 = 0c_1 + 5c_2$$

tengliklar bilan aniqlanadi. Masalan, $s_1=s_2=1$ qiymatlarda $\beta_1=2$, $\beta_2=2$, $\beta_3=5$, $\beta_4=5$ bo'ladi.

8.3. Bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan chiziqli algebraik tenglamalar sistemalari yechimlari orasidagi bog'lanish

(8.1) — asosiy sistema, (8.2) esa unga mos sistema deyiladi.

Avvla shuni aytib o'taylikki, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ va $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ yechimlarning yig'indisi va ayirmasi deb mos ravishda, $\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n$ va $\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_n - \beta_n$ sonlarni tushunamiz va quyidagicha yozishni qabul qilamiz:

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \dots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$$

va

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) - (\beta_1, \dots, \beta_n) = (\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_n - \beta_n).$$

Bir jinslimas va bir jinsli sistemalarning yechimlari orasidagi bog'lanish

1-tasdiq. Ixtiyoriy bir jinsli bo'lmagan sistemaning istalgan yechimi bilan unga mos bir jinsli sistemaning istagan yechimining yigindisi bir jinsli bo'lmagan sistemaning yechimi bo'ladi.

2-tasdiq. Ixtiyoriy bir jinsli bo'lmagan sistemaning istalgan ikkita yechimlarining ayirmasi unga mos bir jinsli sistemaning yechimi bo'ladi.

3-tasdiq. Ixtiyoriy bir jinsli bo'lmagan sistemaning umumiy yechimi X_u unga mos bir jinsli sistemaning umumiy yechimi X bilan o'zining istalgan bitta X_0 xususiy yechimining yig'indisiga teng bo'ladi, ya'ni $X_u = X + X_0$.

8.4-teorema. (8.1) bir jinsli bo'lmagan chiziqli algebraik tenglamalar sistemaning hamma yechimlarini hosil qilish uchun uning bitta yechimga (8.2) bir jinsli sistemaning hamma yechimlarini ketma-ket qo'shish kifoya.

Isboti. 1. (8.1) bir jinsli bo'lmagan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining tayin bir yechimini $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ bilan va istalgan yechimini $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ bilan belgilab, istalgan yechimini hosil qilish uchun $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ yechimga (8.2) sistemaning tegishli yechimini qo'shish kifoya ekanini ko'rsataylik. Haqiqatan, ham $\alpha_1 - \beta_1 = \gamma_1, \dots, \alpha_n - \beta_n = \gamma_n$ sonlarni (8.1) sistemaning istalgan tenglamasiga qo'yib, ushbuni topamiz:

$$a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \dots + a_{in}\gamma_n = a_{i1}(\alpha_1 - \beta_1) + a_{i2}(\alpha_2 - \beta_2) + \dots + a_{in}(\alpha_n - \beta_n) =$$

$$= (a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n) - (a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \dots + a_{in}\beta_n) = b_i - b_i = 0.$$

Demak, $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ sonlar (8.2) sistemaning yechimini ifodalaydi va shu bilan birga, quyidagi tenglik hosil bo'ladi:

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\beta_1 + \gamma_1, \dots, \beta_n + \gamma_n) = (\beta_1, \dots, \beta_n) + (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

2. Endi $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ yechimga (8.2) sistemaning istalgan $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ yechimini qo'shsak, (8.1) bir jinsli bo'lmagan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining yechimi hosil bo'lishini ko'rsataylik. Chindan ham

$$(\beta_1, \dots, \beta_n) + (\gamma_1, \dots, \gamma_n) = (\beta_1 + \gamma_1, \dots, \beta_n + \gamma_n)$$

sonlar (8.1) sistemani qanoatlantiradi:

$$\begin{aligned} & a_{i1}(\gamma_1 + \beta_1) + a_{i2}(\gamma_2 + \beta_2) + \dots + a_{in}(\gamma_n + \beta_n) = \\ & = (a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \dots + a_{in}\gamma_n) + (a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \dots + a_{in}\beta_n) = 0 + b_i = b_i. \end{aligned}$$

Misol. Ushbu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

asosiy sistemaning 1, 3, 2 yechimiga mos bir jinsli

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

sistemaning 2, 2, 4 yechimini qo'shsak, yana asosiy sistemaning

$$(1, 3, 2) + (2, 2, 4) = 3, 5, 6$$

yechimi hosil bo'ladi.

9-ma'ruza.

Vektorlar ustida amallar. Ikki vektorning skalyar va vektor ko'paytmalari

9.1. Vektorning ta'rifi, asosiy tushunchalar. Matematika, fizika, mexanika, elektrotexnika, radiotexnika va shunga o'xshash soxalarda ikki xil miqdorlar uchrab turadi. Bu miqdorlarning bir turi uzining son qiymati bilan to'la aniqlanadi. Masalan, shaklning yuzi, jismning xajmi, temperatura, elektr kattalik, zichlik kabi miqdorlar. Bunday miqdorlar *skalyar miqdorlar* deyiladi. Ikkinchi tur miqdorlar o'zining son qiymati bilan to'la aniqlanmaydi, ularni to'la aniqlash uchun son qiymatlari bilan bir qatorda yo'nalishlari xam berilgan bo'lishi kerak. Masalan, kuch, tezlik, tezlanish kabi miqdorlar.

Vektorlar – uzunlik va yo'nalishga ega bo'lgan miqdorlardir. Vektorlarning uzunligi uning *moduli yoki absolyut miqdori* deyiladi. Nul vektorning o'ziga xos xususiyatlari shundan iboratki, uning uzunligi nulgga teng, u yo'nalishga ega emas.

Nulga teng bo'lmagan vektorlar yo'naltirilgan kesmalar ko'rinishida ifodalanadi va $\vec{AB}$ kabi yoziladi, bunda A - berilgan vektorning boshi, B – uning oxiridan iborat. $\vec{AB}$ vektorning uzunligi (moduli) $|\vec{AB}|$ kabi yoziladi. Bundan buyon vektorlar yoki ikkita harflar bilan (masalan $\vec{AB}$), yoki bitta harf bilan (masalan, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$) belgilanadi.

9.1.1-ta'rif. Agar ikkita nulga teng bo'lmagan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning uzunliklari teng, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ va ular bir xil yo'nalishga ega bo'lsalar, $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$, bu vektorlar *o'zaro teng* deyiladi va $\vec{a} = \vec{b}$ kabi yoziladi.

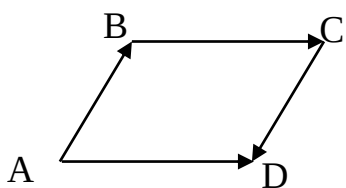
9.1.2-ta’rif. Agar ikkita nurga teng bo’lmagan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning uzunliklari teng, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, va ular qarama-qarshi yo’nalishlarga ega bo’lsalar, bu vektorlar *qarama-qarshi* deyiladi va $\vec{a} = -\vec{b}$ kabi yoziladi.

9.1.3-ta’rif. Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar bitta to’g’ri chiziqda yoki parallel to’g’ri chiziqlarda yotsalar, ular *kollinear* deyiladi.

9.1.4-ta’rif. Bitta tekislikda yoki bir necha parallel tekisliklarda yotgan uchta yoki undan ortiq vektorlar *komplanar vektorlar* deyiladi.

Fazoda ikki, uch, yoki ulardan ko’p vektorlar berilgan bo’lsin. Ularning uzunliklarini o’zgartirmasdan, barcha vektorlarni o’z-o’ziga parallel ravishda bitta umumiy A nuqtaga ko’chiramiz. Vektorlar ustida bunday amal – vektorlarni umumiy boshlang’ich nuqtaga keltirish deyiladi.

9.1.5-masala. $ABCD$ parallelogramm berilgan. Parallelogrammning tomonida: a) teng; b) qarama-qarshi vektorlar ko’rsatilsin.



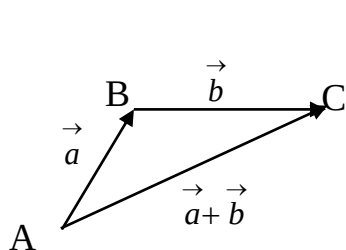
9.1-чизма.

Yechilishi. Parallelogrammning qarama-qarshi tomonlari teng va parallel bo’lganligidan, javoblar quyidagicha bo’ladi (9.1-chizma):

$$a) \vec{AB} = \vec{DC}, \quad \vec{BC} = \vec{AD}, \quad \vec{BA} = \vec{CD}, \quad \vec{CB} = \vec{DA};$$

$$b) \vec{AB} = -\vec{CD}, \quad \vec{AD} = -\vec{CB}, \quad \vec{DA} = -\vec{BC}, \quad \vec{BA} = -\vec{DC};$$

9.2. Vektorlar ustida amallar. Fazodagi vektorlarni qo’shish, ayirish va vektorni skalyarga ko’paytirish amallari tekislikda vektorlar ustidagi shunday amallarga o’xshashdir.



9.2-чизма.

1. Ikkita, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni yoki uchburchak qoidasi bo’yicha, yoki parallelogramm qoidasi bo’yicha qo’shish mumkin.

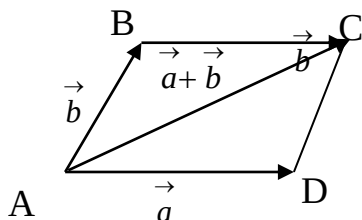
a) **Uchburchak qoidasi.** $\vec{a} = \vec{AB}$ vektorning

boshini A nuqtaga joylashtirib, $\vec{b}$ vektorning boshini B nuqtaga joylashtiramiz (9.2-chizma) va $\vec{BC} = \vec{b}$ vektorni yasaymiz. Unda $\vec{a}$ vektorning boshini $\vec{b}$ vektorning oxiri bilan tutashtiruvchi $\vec{AC}$ vektor, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig'indisidan iborat bo'ladi:

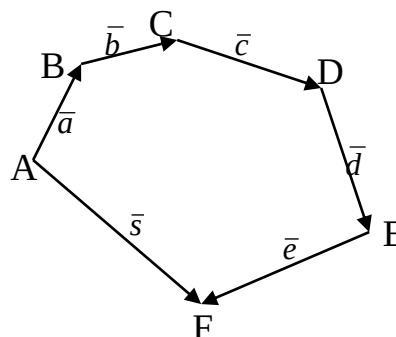
$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}, \quad \vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}.$$

b) **Parallelogramm qoidasi.** Berilgan ikkita, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning boshini bitta umumiy A nuqtaga keltiramiz va $\vec{AD} = \vec{a}$, $\vec{AB} = \vec{b}$ vektorlarni yasaymiz (9.3-chizma). So'ngra, $\vec{AB}$ va $\vec{AD}$ vektorlarni tomonlar sifatida qarab, $ABCD$ parallelogrammni yasaymiz. Unda AC diagonalda yotuvchi va umumiy A nuqtadan chiquvchi $\vec{AC}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig'indisidan iborat bo'ladi:

$$\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$$



9.3-чизма.



9.4-чизма

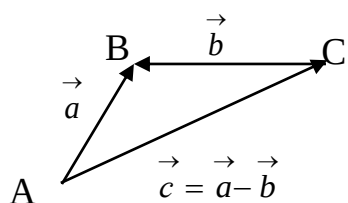
c) **Ко'пбurchak qoidasi.** Bir nechta, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ vektorni qo'shish uchun, har bir keyingi vektorning boshini undan oldingi vektorning oxiriga keltiramiz (9.4-chizma). Unda birinchi $\vec{a}$ vektorning A boshini oxirgi $\vec{e}$ vektorning oxiri bilan tutashtiruvchi $\vec{s}$ vektor berilgan $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ vektorlarning yig'indisi deyiladi va $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$ bo'ladi.

Vektorlarni qo'shish amali quyidagi xossalarga ega:

1⁰. Qo'shishning o'rin almashtirish xossasi: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

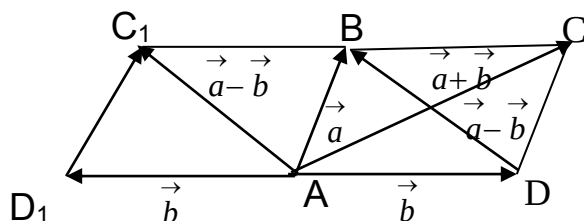
2⁰. Qo'shishning guruhlash xossasi: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

2. Vektorlarni ayirish. Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning ayirmasi deb, $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ shartni qanoatlantiruvchi $\vec{c}$ vektorga aytiladi va u $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ kabi yoziladi.



9.5-чизма.

Shunday qilib, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning ayirmasini topish uchun, $\vec{a}$ vektorning oxiriga $\vec{b}$ vektorning oxirini ko'chirish lozim. Unda, birinchi $\vec{a}$ vektorning boshini ikkinchi vektorning boshi bilan tutashtiruvchi



9.6-чизма.

$\vec{AC} = \vec{c}$ vektor, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning ayirmasidan iborat bo'ladi: $\vec{AC} = \vec{a} - \vec{b}$. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning ayirmasini $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$ tenglikdan topish

mumkin. Buning uchun, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni A nuqtaga keltirib, ularda ABCD parallelogramm yasaymiz (9.6-chizma). So'ngra $-\vec{b}$ vektorni yasaymiz va $\vec{a}$ va $-\vec{b}$ vektorlarda ABC_1D_1 parallelogramm yasaymiz.

Unda $\vec{AC} = \vec{a} - \vec{b}$ deb yozish mumkin. Nixoyat, $\vec{AC}$ vektorni o'ziga parallel ravishda D nuqtaga ko'chiramiz. Unda $\vec{DB} = \vec{AC}_1 = \vec{a} - \vec{b}$ bo'ladi.

Shunday qilib, agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarda ABCD parallelogramm yasalgan bo'lsa, uning bitta diagonalida ularning yig'indisi vektori, ikkinchisida esa, ularning ayirmasi vektori yotadi: $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$; $\vec{DB} = \vec{a} - \vec{b}$.

9.3. Vektorni songa ko'paytirish

9.3.1-ta'rif. $\vec{b}$ vektorning λ songa ko'paytmasi deb: 1) $|\vec{a}| = |\lambda| |\vec{b}|$ va

2) $\lambda > 0$ bo'lganda $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$; $\lambda < 0$ bo'lganda $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$ shartlarni

qanoatlantiruvchi $\vec{a}$ vektorga aytiladi, bunda $\uparrow \uparrow$ -vektorlarning yo'nalishdoshligini, $\uparrow \downarrow$ - vektorlar qarama-qarshi yo'nalganligini anglatadi.

Vektorning songa ko'paytmasi quyidagi xossalarga ega:

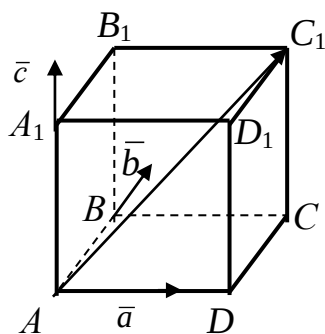
$$1^0. \quad 1 \cdot \vec{b} = \vec{b}, \quad 2^0. \quad \lambda \left(\mu \vec{b} \right) = (\lambda \mu) \vec{b};$$

$$3^0. \quad (\lambda + \mu) \vec{b} = \lambda \vec{b} + \mu \vec{b}; \quad 4^0. \quad \lambda \left(\vec{b} + \vec{c} \right) = \lambda \vec{b} + \lambda \vec{c}.$$

Bu xossalarning isbotlari planimetriyadagi shu kabi xossalarning isbotiga o'xshashdir. Ushbu $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ tenglikni $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinearligining zaruriy va yetarli sharti sifatida qarash mumkin.

9.4. Fazodagi bazis haqida

9.4.1. Vektorning koordinatalari. Biz tekislikdagi bazisni kollinear bo'lmagan vektorlar jufti shaklida kiritgan edik. Unda har qanday uchinchi vektorni bazisning ikkita vektori orqali ifodalash mumkin bo'lgan edi.



9.7-чизма.

Fazodagi vektorlarning yuqoridagiga o'xshash xossasini qarab chiqamiz. Fazoda uchta komplanar bo'lmagan $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar berilgan bo'lsin. Bunda ixtiyoriy to'rtinchi $\vec{d}$ vektorni $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar orqali ifodalash mumkinligini isbotlaymiz.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ vektorlarni umumiy A nuqtaga keltiramiz (9.7-chizma). $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

vektorlar komplanar bo'lmaganligidan $\left(\vec{a} \vec{b} \right), \left(\vec{a} \vec{c} \right), \left(\vec{b} \vec{c} \right)$ vektorlar juftining

har biri tekislikni aniqlaydi. C_1 uch orqali mos ravishda $(ABCD)$, $(ABBA_1)$ va (ADD_1A_1) tekisliklarga parallel tekisliklar o'tkazamiz. Natijada $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ prizmani hosil qilamiz. Vektorlarni qo'shish qoidasi bo'yicha

$$\vec{AC_1} = \vec{AD} + \vec{DC} + \vec{CC_1}$$

deb yozish mumkin. $\vec{AD} \parallel \vec{a}$ bo'lganligidan, ikki vektorning kollinearlik shartiga ko'ra, $\vec{AD} = x \vec{a}$ deb yozish mumkin. Shunga o'xshash, $\vec{AB} \parallel \vec{b}$ va $\vec{AA_1} \parallel \vec{c}$ munosabatlardan,

$$\vec{AB} \parallel y \vec{b} \quad \text{va} \quad \vec{AA_1} \parallel z \vec{c}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu ifodalarni o'rniga keltirib qo'yib, $\vec{d} = \vec{AC_1}$ vektor uchun

$$\vec{d} = x \vec{a} + y \vec{b} + z \vec{c} \quad (9.4.2)$$

tenglikni hosil qilamiz.

(9.4.2) tenglik $\vec{d}$ vektorning uchta komplanar bo'lmagan $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar bo'yicha yoyilmasi deyiladi. Bu holda $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar fazoda bazis hosil qiladi deyishadi, x, y, z koefitsiyentlar esa, $\vec{d}$ vektorning bu bazisdagi koordinatalari deyiladi va u $\vec{d}(x, y, z)$ kabi yoziladi. (9.4.2) yoyilmadagi $x\vec{a}, y\vec{b}, z\vec{c}$ qo'shiluvchilar $\vec{d}$ vektorning (9.4.2) yoyilmasini tashkil etuvchilar deyiladi.

Berilgan bazisda $\vec{d}$ vektor yoyilmasining yagonaligini isbotlaymiz. $\vec{d}$ vektorning (1) yoyilmasidan boshqa, yana koefitsiyentlari boshqa bo'lgan ,

$$\vec{d} = x_1 \vec{a} + y_1 \vec{b} + z_1 \vec{c} \quad (9.4.3)$$

yoyilmasi ham mumkin bo'lsin.

Modomiki, yoyilmalar har xil ekan, ularning koefitsiyentlari uchun

$$x \neq x_1, \quad y \neq y_1, \quad z \neq z_1$$

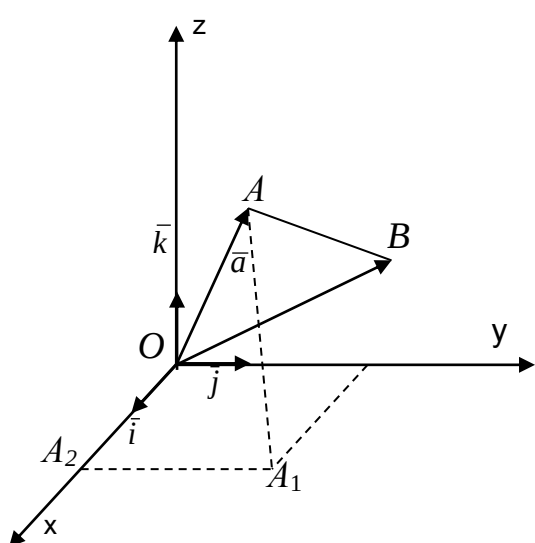
shartlardan hiech bo'lmaganda bittasi bajariladi. (9.4.2) tenglikdan (9.4.3) tenglikni ayirib,

$$(x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b} + (z - z_1)\vec{c} = 0 \quad (9.4.4)$$

munosabatni olamiz. (9.4.4) dan $x - x_1 \neq 0$ bo'lganda $\vec{a}$ vektorni $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar orqali quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\vec{a} = -\frac{y - y_1}{x - x_1}\vec{b} - \frac{z - z_1}{x - x_1}\vec{c} \quad (9.4.5)$$

Bunday yoyilma esa, faqat $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlar komplanar bo'lganda mumkin



9.8-чизма.

bo'ladi, bu esa, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlarning komplanar emasligi shartiga ziddir. Demak, (9.4.4) tenglik, faqat $x - x_1 = 0$, $y - y_1 = 0$, $z - z_1 = 0$ va $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$ bo'lgandagina o'rinli bo'ladi. (9.4.2) yoyilmaning yagonaligi isbotlandi.

9.5. Vektorning dekart koordinatalari

Fazoda to'g'ri burchakli Oxyz

koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin. Unda

bazis vektorlar sifatida Ox o'q bo'yicha $\vec{i}$, Oy o'q bo'yicha $\vec{j}$, Oz o'q bo'yicha $\vec{k}$ birlik vektorlarni kiritamiz (9.8-chizma). Fazoda $A(x_1, y_1, z_1)$ nuqta berilgan bo'lsin. A va O nuqtalarni tutashtirib, $\vec{a} = \vec{AO}$ vektorni yasaymiz. A nuqtadan xOy tekislikka AA_1 perpendikulyarni va Ox o'qqa A_1A_2 perpendikulyar o'tkazamiz. Uch perpendikulyar haqidagi teoremaga ko'ra, $AA_2 \perp Ox$, yani $OA_2 - \vec{a}$ vektorning Ox o'qqa proyeksiyasidan iborat bo'ladi.

Vektorlarni qo'shish qoidasidan foydalanib,

$$\vec{OA} = \vec{OA_2} + \vec{A_2A_1} + \vec{A_1A}$$

kabi yozishimiz mumkin. Modomiki, $\vec{OA_2} \parallel \vec{i}$ ekan, $\vec{OA_2} = OA_2 \cdot \vec{i} = x_1 \vec{i}$ bo'ladi, shunga o'xshash, $\vec{A_2A_1} \parallel \vec{j}$ va $\vec{A_1A} \parallel \vec{k}$ bo'lganligidan, $\vec{A_2A_1} = y_1 \vec{j}$ va $\vec{A_1A} = z_1 \vec{k}$ bo'lishi kelib chiqadi. Natijada,

$$\vec{a} = \vec{OA} = x \vec{i} + y_1 \vec{j} + z \vec{k}$$

yoyilmaga ega bo'lamiz.

Shunday qilib, agar $\vec{a} = \vec{OA}$ vektor koordinatalar sistemasi boshidan chiqsa, $\vec{a}$ vektorning koordinatalari bu vektorning oxiri A nuqtaning koordinatalari bilan ustma-ust tushadi.

$\vec{AB}$ vektor o'zining boshi $A(x_1, y_1, z_1)$ va oxiri $B(x_2, y_2, z_2)$ koordinatalari bilan berilgan bo'lsin. $\vec{OA}$ va $\vec{OB}$ vektorlarni yasaymiz.

Vektorli $\triangle OAB$ dan

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$$

kabi yozish mumkin, undan

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

bo'ladi.

$\vec{AB}$ vektorning koordinatalari (x, y, z) bo'lsin. Unda vektorlarning yoyilmalari

$$\vec{AB} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}, \quad \vec{OA} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}, \quad \vec{OB} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k},$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu ifodalarni (2.4.4) ga keltirib qo'yib,

$$x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} = \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (x_2 - x_1) \vec{i} + (y_2 - y_1) \vec{j} + (z_2 - z_1) \vec{k}$$

munosabatni olamiz.

Vektorlar o'zaro teng bo'lganligidan, ularning mos koordinatalari ham o'zaro teng bo'ladi:

$$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1, \quad z = z_2 - z_1.$$

Shunday qilib, agar vektorning uchlari koordinatalari ma'lum bo'lsa, vektorning koordinatalari vektorning boshi va oxiri mos koordinatalari ayirmasiga teng ekan.

Endi o'z koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida amallarni qarab chiqamiz. Bizga $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ va $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ vektorlar berilgan bo'lsin. Ularning yoyilmalari

$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}, \quad \vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$$

bo'ladi. Bu vektorlarning yig'indisi va ayirmasini topamiz:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2) \vec{i} + (y_1 + y_2) \vec{j} + (z_1 + z_2) \vec{k},$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2) \vec{i} + (y_1 - y_2) \vec{j} + (z_1 - z_2) \vec{k},$$

ya'ni vektorlarni qo'shishda (ayirishda) ularning mos koordinatalari qo'shiladi (ayiriladi). Bu xulosa koordinataning geometrik ma'nosidan ham kelib chiqadi. Vektorlar (kesmalar) yig'indisi (ayirmasi) proyeksiyasi vektorlar (kesmalar) proyeksiyalari yig'indisiga (ayirmasiga) tengligidan, vektorlarni (kesmalarni) qo'shishda (ayirishda) ularning mos koordinatalari qo'shiladi (ayiriladi).

Agar $\vec{b}$ vektor λ songa ko'paytirilsa, uning har bir koordinatasi ana shu songa ko'paytiriladi: $\lambda \vec{b} = (\lambda x_2, \lambda y_2, \lambda z_2)$, bu proyeksiyaning xossasidan kelib chiqadi.

Agar $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ bo'lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'ladi, buning koordinatalar vositasidagi ifodasi

$$x_1 = \lambda x_2, \quad y_1 = \lambda y_2, \quad z_1 = \lambda z_2$$

ko'rinishni oladi, ya'ni agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lsalar, ularning mos koordinatalari proporsionaldirlar:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

9.6. Chiziqli bog'liq va chiziqli erkli vektorlar. Agar $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorlar berilgan bo'lsin.

9.6.1-ta'rif. Ushbu $\lambda \vec{a}_1 + \lambda \vec{a}_2 + \dots + \lambda \vec{a}_n$ ifoda $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorlarning $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ koeffisientli chiziqli *kombinasiyasi* deyiladi, bunda $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ biror haqiqiy sonlar.

9.6.2-ta'rif. Agar berilgan $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorlar uchun kamida bittasi noldan farqli shunday $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sonlar mavjud bo'lsinki, ushbu $\lambda \vec{a}_1 + \lambda \vec{a}_2 + \dots + \lambda \vec{a}_n = \vec{0}$ tenglik o'rinli bo'lsa, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorlar *chiziqli bog'loq* deyiladi. Agar bunday $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sonlar mavjud bo'lmasa, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorlar *chiziqli erkli* deyiladi.

9.6.3-misol. Kollinear vektorlar chiziqli bog'liqdir.

Xaqiqatan, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lsin. U holda $\vec{a} // \vec{b} \Rightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b} \Rightarrow \vec{a} - \lambda \vec{b} = \vec{0}$ bo'ladi. Agar $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\lambda$ desak, $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} = \vec{0}$ kelib chiqadi.

9.7. Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi

9.7.1-teorema. Nul bo'lmagan ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb, bu vektorlar uzunliklarining ular orasidagi burchak kosinusiga ko'paytmasiga aytiladi:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi, \quad (9.7.2)$$

bunda φ – $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak.

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan hech bo'lmaganda bittasi nul vektor bo'lsa, ularning skalyar ko'paytmasi nulga tengdir: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Ikki vektor skalyar ko'paytmasining ba'zi xususiy hollari haqida to'xtalamiz:

1. Agar $\vec{b} = \vec{a}$ bo'lsa, $\varphi = 0$, $|\vec{b}| = |\vec{a}|$ bo'ladi. Unda ta'rifdan, $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ bo'lishi kelib chiqadi.

$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ ko'paytma - $\vec{a}$ vektorning skalyar kvadrati deb ataladi. Bundan vektorning uzunligini aniqlash uchun

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

formulani olamiz, ya'ni vektorning uzunligi bu vektorning skalyar kvadratidan olingan kvadrat ildizga tengdir.

2. Agar nul bo'lmagan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar uchun $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ bo'lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar bir-biriga perpendikulyardirlar.

Nul bo'lmagan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar uchun $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ bo'lishi faqat $\cos\varphi = 0$ va unda $\varphi = 90^\circ$ bo'lishi mumkinligini bildiradi.

Skalyar ko'paytmaning asosiy xossalari quyidagilardan iborat:

1^o. O'rin almashtirish qonuni: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

2^o. Guruhlash qonuni: $\lambda \vec{a} \cdot \vec{b} = (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b})$.

3^o. Taqsimot qonuni: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

4^o. $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Bu xossalarning isboti planimetriyadagi shunday xossalarning isbotiga o'xshashdir.

Skalyar ko'paytmaning fizikaga tadbiri quyidagicha: $\vec{S}$ siljishda o'zgarmas $\vec{F}$ kuch bajaradigan A ish bu vektorlarning skalyar ko'paytmasiga teng:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S} = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos\varphi,$$

bunda φ $-\vec{F}$ va $\vec{S}$ vektorlar yo'nalishlari orasidagi burchakdir.

9.8. Skalyar ko'paytmaning vektorlar koordinatalari orqali ifodasi

Agar $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ va $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ vektorlarning koordinatalari ma'lum bo'lsa, ularning yoyilmalari

$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}, \quad \vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$$

ko'rinishni oladi.

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ skalyar ko'paytmani hisoblashdan oldin, birlik vektorlarning skalyar ko'paytmalarini topamiz:

$$(\vec{i} \cdot \vec{i}) = (\vec{j} \cdot \vec{j}) = (\vec{k} \cdot \vec{k}) = 1, \quad (\vec{i} \cdot \vec{j}) = (\vec{j} \cdot \vec{k}) = (\vec{i} \cdot \vec{k}) = 0.$$

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ skalyar ko'paytma vektorlar yoyilmalari orqali

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k})(x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k})$$

ko'rinishda yoziladi.

Skalyar ko'paytmaning taqsimot xossasidan foydalanib, oxirgi ifodaning o'ng tomonini ko'phadlar kabi ko'paytiramiz:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= x_1 x_2 \vec{i}^2 + y_1 y_2 \vec{j}^2 + z_1 z_2 \vec{k}^2 + x_1 x_2 (\vec{i} \cdot \vec{j}) + x_1 z_2 (\vec{i} \cdot \vec{k}) + y_1 x_2 (\vec{j} \cdot \vec{i}) + \\ &+ y_2 z_1 (\vec{j} \cdot \vec{k}) + x_2 z_1 (\vec{i} \cdot \vec{k}) + z_2 y_1 (\vec{j} \cdot \vec{k}) \end{aligned}$$

yoki

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Shunday qilib, ikki vektorning skalyar ko'paytmasi ko'paytiriluvchi vektorlar mos koordinatalari ko'paytmalari yig'indisiga teng ekan.

$\vec{a}$ vektorning skalyar kvadrati

$$\vec{a} = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

bo'ladi. $|\vec{a}|^2 = a^2$ bo'lganligidan, $\vec{a}$ vektorning uzunligini topish formulasi

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

ko'rinishda yoziladi, ya'ni vektorning uzunligi vektor koordinatalari kvadratlari yig'indisidan olingan kvadrat ildizga teng.

Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi formulasidan foydalanib, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchakni hisoblashimiz mumkin:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

yoki

$$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

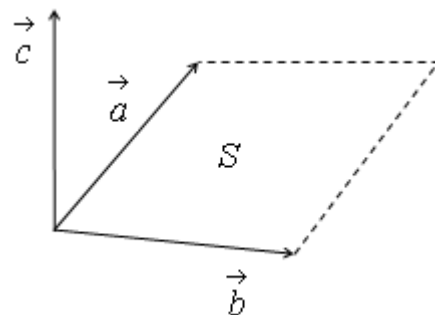
Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning perpendikulyarlik sharti

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$$

ko'rinishda yoziladi.

9.9. Ikki vektorning vektor ko'paytmasi. Vektor ko'paytma ta'rifini kiritishdan avval, biz uchta o'zaro nokomplanar vektor uchligining fazoda joylashishi bilan bog'liq bo'lgan zarur bir tushunchani kiritamiz. Shuni aytib o'tamizki, keyingi bandlarda yuritiladigan mulohazalar faqat uch o'lchovli fazoga doir bo'ladi.

9.9.1-ta'rif. Agar komplanar $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar boshi umumiy nuqtaga keltirilgandan so'ng $\vec{c}$ vektorning oxiridan (uchidan) qaralganda $\vec{a}$ vektordan $\vec{b}$ vektorga qarab π dan kichik burchakka burish soat strelkasiga



teskari bo'lsa, bu $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ uchlik o'ng uchlik, aks holda chap uchlik

deyiladi. Chap yoki o'ng uchlikni tashkil etadigan uchlik *tartiblangan uchlik* deb yuritiladi (9.9-chizma).

9.9-chizma.

9.9.2-ta'rif. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi deb quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan $\vec{c}$ vektorga aytiladi:

1. $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga perpendikulyar (ortogonal)

$$2. \vec{c} = \left| \vec{a} \right| \left| \vec{b} \right| \sin(\overset{\wedge}{\vec{a}, \vec{b}});$$

3. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarning tartiblangan uchligi o'ng uchlikni tashkil etadi.

(Bu ta'rifda $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ deb faraz qilinadi) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi $\vec{a} * \vec{b}$ yoki $[\vec{a}, \vec{b}]$ ko'rinishda yoziladi.

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lmasa, u holda $\left| \vec{c} \right| = \left| [\vec{a}, \vec{b}] \right|$ son $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga yasalgan parallelogrammning yuzasiga teng bo'ladi.

Haqiqatan, maktab geometriya kursidan ma'lumki. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga yasalgan parallelogrammning S yuzi uning tomonlari uzunliklarini shu tomonlar orasidagi burchak sinusi bilan ko'paytmasiga teng.

Demak,

$$S = \left| \vec{a} \right| \left| \vec{b} \right| \sin(\overset{\wedge}{\vec{a}, \vec{b}}) = \left| [\vec{a}, \vec{b}] \right|.$$

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lsa, u holda $\left| \vec{a} * \vec{b} \right| = 0$, chunki

$$\overset{\wedge}{\vec{a}, \vec{b}} = 0 \text{ yoki } \pi \text{ va } \sin(\overset{\wedge}{\vec{a}, \vec{b}}) = 0.$$

Vektor ko'paytma quyidagi qonunlarga bo'ysunadi.

1⁰. Vektor ko'paytmada ko'paytuvchilar o'rnini almashtirilsa, uning ishorasi o'zgaradi, ya'ni $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$.

Haqiqatdan ham, agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lsa, bu ravshan. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear emas deb faraz qilaylik. Bu holda ikki vektorning vector ko'paytmasi ta'rifiga ko'ra $\vec{c}_1 = [\vec{a}, \vec{b}]$ hamda $\vec{c}_2 = [\vec{b}, \vec{a}]$ vektorlarning uzunligi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga yasalgan parallelogrammning yuziga teng bo'lgani uchun bir xil; ammo $\vec{c}_1$ va $\vec{c}_2$ vektorlar bir biriga qarama-qarshi yo'nalgan.

$$\text{Demak } [\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$$

2⁰. Har qanday $\lambda \in R$, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar uchun vektor ko'paytma skalyar ko'paytuvchiga nisbatan guruhlash qonuniga bo'ysunadi, ya'ni

$$[\vec{a}, \lambda \vec{b}] = [\lambda \vec{a}, \vec{b}] = \lambda [\vec{a}, \vec{b}].$$

3⁰. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar yig'indisi bilan $\vec{c}$ vektorning vektor ko'paytmasi taqsimot qonuniga bo'ysunadi, ya'ni

$$[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}].$$

9.10.Vektorlari ko'paytmani ko'paytuvchi vektorlarning oordinatalari orqali ifodalash. Quyidagi teorema, ikki vektorning koordinatalarini, ya'ni to'g'ri burchakli Dekart koordinatalari sistemasi o'qlariga proeksiyalarini bilgan holda, ularning vektorial ko'paytmasini hisoblash mumkin.

9.10.1-teorema. Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zlarining, $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ koordinatalari bilan berilgan bo'lsa, $\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektorga vektorial ko'paytmasi

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} y_1 z_1 \\ y_2 z_2 \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} x_1 z_1 \\ x_2 z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{vmatrix} \right\} = \begin{vmatrix} y_1 z_1 \\ y_2 z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 z_1 \\ x_2 z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

formula bilan aniqlanadi.

Isboti. Avvalo koordinata o'qlarining $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ koordinatalar uchun quyidagi munosabatlar o'rinli bo'lishini eslatib o'tamiz :

$$\begin{aligned} [\vec{i}, \vec{i}] &= 0, & [\vec{i}, \vec{j}] &= \vec{k}, & [\vec{i}, \vec{k}] &= -\vec{j}, \\ [\vec{j}, \vec{i}] &= -\vec{k}, & [\vec{j}, \vec{j}] &= 0, & [\vec{j}, \vec{k}] &= \vec{i}, \\ [\vec{k}, \vec{i}] &= \vec{j}, & [\vec{k}, \vec{j}] &= -\vec{i}, & [\vec{k}, \vec{k}] &= 0. \end{aligned} \quad (2.10.2)$$

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar Dekart koordinatalar sistemasida mos ravishda $\{x_1, y_1, z_1\}$ va $\{x_2, y_2, z_2\}$ koordinatalarga ega bo'lsin, ya'ni

$$\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}, \vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}.$$

$[\vec{a}, \vec{b}]$ ko'paytmani (2.10.2) ni hamda vektor ko'paytmaning xossalarini e'tiborga olib topamiz:

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}] &= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k})(x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) = x_1 x_2 [\vec{i}, \vec{i}] + y_1 x_2 [\vec{j}, \vec{i}] + z_1 x_2 [\vec{k}, \vec{i}] + \\ &+ x_1 y_2 [\vec{i}, \vec{j}] + y_1 y_2 [\vec{j}, \vec{j}] + z_1 y_2 [\vec{k}, \vec{j}] + x_1 z_2 [\vec{i}, \vec{k}] + y_1 z_2 [\vec{j}, \vec{k}] + z_1 z_2 [\vec{k}, \vec{k}] \end{aligned}$$

yoki

$$[\vec{a}, \vec{b}] = -y_1 x_2 \vec{k} + z_1 x_2 \vec{j} + x_1 y_2 \vec{k} - z_1 y_2 \vec{i} - x_1 z_2 \vec{j} + y_1 z_2 \vec{i}.$$

Bir xil ortogonalga ega bo'lgan qo'shiluvchilarni gruppalar yozamiz:

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}] &= (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{i} - (x_1 z_2 - z_1 x_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k} = \\ &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}. \end{aligned}$$

Bu ifodani yana uchunchi tartibli determinant ko'rinishda yozish mumkin

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

9.10.3-teorema. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lishi uchun $[\vec{a}, \vec{b}] = 0$ bo'lishi zarur va yetarli.

9.10.4-natija. Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lsa, u holda ularni koordinatalari proporsional bo'ladi, ya'ni $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$

9.10.5- teorema (Uchburchak yuzining formulasi). $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga uchburchak yasalgan bo'lsin, u holda bu uchburchakning yuzi:

$$S = \frac{1}{2} \left| [\vec{a}, \vec{b}] \right| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

formula bilan topiladi.

9.11. Vektorlarning aralash ko'paytmasi

9.11.1-ta'rif. $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar tartiblangan uchligining aralash ko'paytmasi deb, $[\vec{a}, \vec{b}]$ vektor bilan $\vec{c}$ vektorning skalyar ko'paytmasiga teng bo'lgan songa aytiladi va $(\vec{a} * \vec{b}) \cdot \vec{c}$ yoki $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c}$ kabi belgilanadi.

Aralash ko'paytmaning miqdor nuqtai nazaridan ma'nosini tekshiramiz.

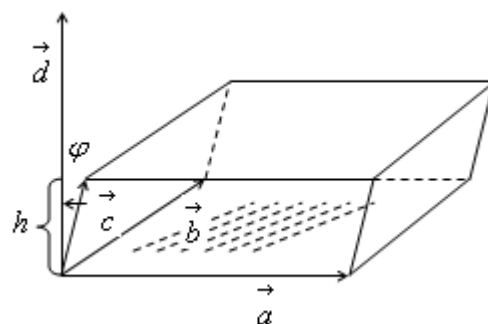
$\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar komplanar bo'lmagan

vektorlar bo'lsin. $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{d}$ deb belgilasak, $\vec{d}$

vektor miqdori $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan yasalgan parallelogramning yuziga teng

$$[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = \vec{d} \cdot \vec{c}.$$

bo'lgani uchun skalyar ko'paytma ta'rifiga



9.10-chizma.

ko'ra $\vec{d} \cdot \vec{c} = \left| \vec{d} \right| np_{\vec{d}} \vec{c}$. Ammo $np_{\vec{d}} \vec{c} = h$ miqdorning moduli, ya'ni $|h|$ son $\vec{a}, \vec{b}$ va

$\vec{c}$ vektorlarga yasalgan paralelepipedning balandligini anglatadi. $\vec{c}$ bilan $\vec{d}$ orasidagi burchak o'tkir bo'lsa, h musbat ishora bilan, o'tmas burchak esa manfiy ishorasi bilan olinadi (9.10-chizma).

Shunday qilib $\vec{d} \cdot \vec{c} = \left| \vec{d} \right| np_{\vec{d}} \vec{c} = \pm \left| \vec{d} \right| h$.

Aralash ko'paytmaning absolyut qiymati shu $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarga yasalgan parallelepiped hajmiga teng, ya'ni $V = \left| [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} \right|$.

Endi aralash ko'paytmaning ba'zi xossalarini keltiramiz.

1⁰. Ko'paytmada ikki qo'shni vektorning o'rinlari almashtirilsa, aralsh ko'paytmaning ishorasi teskariga almashadi, ya'ni quyidagi tengliklar o'rinli.

$$[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = -[\vec{b}, \vec{a}] \cdot \vec{c} = -[\vec{a}, \vec{c}] \cdot \vec{b} = -[\vec{c}, \vec{b}] \cdot \vec{a}.$$

2⁰. $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning o'rinlari doiraviy siklda almashtirilsa, aralash ko'paytma o'z ishorasini o'zgartirmaydi, ya'ni ushbu tengliklar o'rinli

$$[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = [\vec{b}, \vec{c}] \cdot \vec{a} = [\vec{c}, \vec{a}] \cdot \vec{b}.$$

3⁰. Agar $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlardan istalgan ikkitasi bir-biriga teng yoki parallel(kollinear) bo'lsa, ularning aralash ko'paytmasi nolga teng bo'ladi, ya'ni $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$.

4⁰. Agar $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar o'zaro komplanar vektorlar bo'lsa, ularning aralash ko'paytmasi nolga teng bo'ladi, ya'ni $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$.

9.12. Proeksiyalari bilan berilgan vektorlarning aralsh ko'paytmasi.

$\vec{a}\{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b}\{x_2, y_2, z_2\}$, $\vec{c}\{x_3, y_3, z_3\}$ vektorlar o'zlarining koordinatalari bilan berilgan bo'lsin. Bu vektorlarning aralsh ko'paytmasini topaylik. $[\vec{a}, \vec{b}]$ vektor bilan $\vec{c}$ vektorning skalyar ko'paytmasi bu vektorlarga mos proeksiyalari ko'paytmalarining yig'indisiga teng ekanini bilamiz. Shuning uchun

$$[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} + y_3 \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

yoki

$$[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Demak, proeksiyalari bilan berilgan uchta vektorlarning aralsh ko'paytmasi bu vektorlar proeksiyalaridan tuzilgan uchinchi tartibli determinantga teng.

$\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning komplanar bo'lishi uchun

$$[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

tenglik bajarilishi zaruriy va yetarli.

9-mavzu bo'yicha nazariy materiallarni mustahkamlash uchun topshiriqlar

- 2.1. Vektorning ta'rifi, asosiy tushunchalar([14], 37-39 betlar, [4],[6], [9]).
- 2.2. Vektorlar ustida amallar([14], 39-40 betlar, [5],[4], [9]).
- 2.3.Vektorni songa ko'paytirish([14], 44-45 betlar, [4],[6], [9]).
- 2.4. Fazodagi bazis haqida([14], 51-52 betlar, [5],[4], [9])
- 2.5. Vektorning dekart koordinatalari([14], 51-53 betlar, [4],[6], [9]).
- 2.6. Chiziqli bog'liq va chiziqli erkli vektorlar([14], 48-50 betlar, [4],[6], [9]).
- 2.7. Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi([14], 65-66 betlar, [4],[6], [9])
- 2.8. Skalyar ko'paytmaning vektorlar koordinatalari orqali ifodasi([14], 68-69 betlar, [5],[6], [9])
- 2.9. Ikki vektorning vektor ko'paytmasi([14], 71-75 betlar, [],[6], [9])
- 2.10.Vektorlarning ko'paytmani ko'paytuvchi vektorlarning oordinatalari orqali ifodalash ([14], 72-75 betlar, [5],[6], [9]).
- 2.11.Vektorlarning aralash ko'paytmasi([14], 78-79 betlar, [],[6], [9])
- 2.12. Proeksiyalari bilan berilgan vektorlarning aralsh ko'paytmasi([14], 79-80 betlar, [4],[6], [9]).

10-ma'ruza.

Arifmetik vektor fazo va unga misollar

10.1. n o'lchovli vektorlar va ular ustida arifmetik amallar

Chiziqli tenglamalar sistemasining umumiy nazariyasini qurish uchun Kramer qoidasi tatbiq etilishi mumkin bo'lgan sistemalarni yechishda muvaffaqiyat bilan xizmat qilgan apparat endi yetarli emas. Determinantlar va matrisalardan tashqari o'zicha ham katta umummatematik ahamiyatga ega bo'lgan yangi bir tushuncha, ya'ni *ko'p o'lchovli vektor fazo* tushunchasini kiritishimiz kerak bo'ladi.

Dastlab bir nechta boshlang'ich izohlar berib o'tamiz: Analitik geometriya kursidan ma'lumki, tekislikning har qanday nuqtasi o'zining ikkita koordinatasi (berilgan koordinata o'qlaridagi) bilan, ya'ni ikkita haqiqiy sonning tartiblangan sistemasi bilan aniqlanadi; tekislikdagi har qanday vektor o'zining ikkita komponent bilan, ya'ni yana ikkita haqiqiy sonning tartiblangan sistemasi bilan aniqlanadi. Shunga o'xshash uch o'lchovli fazoning har qanday nuqtasi o'zining uchta koordinatasi bilan, fazodagi har qanday vektor o'zining uchta komponent bilan aniqlanadi.

Geometriyada, shuningdek, mexanikada va fizikada ko'pincha shunday obyektlarni o'rganishga to'g'ri keladiki, ularni to'la aniqlash uchun uchta haqiqiy sonning berilishi yetarli bo'lmaydi. Masalan, uch o'lchovli fazoda sharlar to'plamini qaraylik. Shar to'la aniqlangan bo'lishi uchun uning radiusi va markazining koordinatalari berilgan bo'lishi, ya'ni to'rtta haqiqiy sonidan iborat tartiblangan sistema berilishi kerak. Yana shuni ham borki, radius faqat musbat qiymatlar qabul qilishi mumkin. Ikkinchi tomondan, qattiq jismning fazodagi turli holatlarini qaraylik. Agar jismning og'irlik markazi koordinatalari (ya'ni uchta haqiqiy son), og'irlik markazidan o'tuvchi birorta tayinlangan o'qning yo'nalishi (ikkita son - uchta yo'naltiruvchi kosinusdan ikkitasi) va, nihoyat, bu o'q atrofida burilish burchagi ko'rsatilgan bo'lsa, uning vaziyati to'la aniqlangan bo'ladi.

Shunday qilib, fazodagi qattiq jismning vaziyatni oltita haqiqiy sondan iborat tartiblangan sistema bilan aniqlanadi.

Bu misollar n ta haqiqiy sonining barcha mumkin bo'lgan tartiblangan sistemalari to'plamini qarash maqsadga muvofiqigini ko'rsatadi. Bu to'plam unda qo'shish va songa ko'paytirish operatsiyalarni kiritilgandan keyin (bu quyiroqda, uch o'lchovli fazoning komponentlar orqali ifodalangan vektorlari ustidagi mos operatsiyalarga o'xshash amalga oshiriladi) « *o'lchovli vektor fazo* » nomini oladi. Shunday qilib, n o'lchovli vektor fazo faqat algebraik tuzilma bo'lib, u uch o'lchovli fazoning koordinatalar boshidan chiquvchi vektorlari to'plamining ba'zi eng sodda xossalari saqlaydi.

10.1-ta'rif. n ta sonining tartiblangan ushbu

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (10.1)$$

sistemi n o'lchovli vektor deyiladi. a_i ($i = 1, \dots, n$) sonlar $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ vektorning *komponentlari* deyiladi.

Agar $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ va

$$\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n) \quad (10.2)$$

vektorlarning bir xil o'rinda turgan komponentlari ustma-ust tushsa, ya'ni agar $a_i = b_i$ ($i = 1, \dots, n$) bo'lsa, bu vektorlar *teng* deb hisoblanadi.

Vektorlarni belgilash uchun bundan buyon grek alfavitining kichik harflari ishlatiladi, latin alfavitining kichik harflari esa sonlarni belgilash uchun ishlatiladi.

Misollar. Vektorlarga misollar sifatida quyidagilarni keltiramiz:

1) tekislikda yoki uch o'lchovli fazoda koordinatalar boshidan chiqqan vektor-kesmalar tayinlangan koordinatalar sistemasida mos ravishda yuqorida aytilgan ma'noda ikki va uch o'lchovli vektorlar bo'ladi;

2) n noma'lumli har qanday chiziqli tenglamaning koeffitsiyentlari n o'lchovli vektor tashkil etadi;

3) n noma'lumli chiziqli tenglamalarning istalgan sistemasining har qanday yechimi n o'lchovli vektor bo'ladi;

4) agar s ta satrlar va n ta ustunli matrisa berilgan bo'lsa, u holda uning satrlari n o'lchovli vektorlar, ustunlari esa s o'lchovli vektorlar bo'ladi;

5) s ta satrli va n ta ustunli matrisaning sn o'lchovli vektor sifatida qaralishi mumkin: matrisa elementlarini satrma satr bo'yicha ketma-ket o'qib chiqish kifoya; xususiyl holda, n tartibli kvadrat matrisani n - o'lchovli vektor deb qarash mumkin, shu bilan birga, ravshanki, har qanday n^2 o'lchovli vektor shu yo'l bilan n - tartibli birorta matrisadan hosil qilinishi mumkin.

10.2-ta'rif. $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ va $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ vektorlarning yig'indisi deb komponentlari qo'shilayotgan vektorlarning mos komponentlari yig'indisidan iborat bo'lgan

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \quad (10.3)$$

vektorga aytiladi.

Vektorlarni qo'shish sonlarni qo'shish kommutativ va assosiativ bo'lgani sababli kommutativ va assosiativdir.

Nol rolini ushbu

$$0 = (0, 0, \dots, 0) \quad (10.4)$$

nol vektor uynaydi.

Haqiqatan ham,

$$\alpha + 0 = (a_1 + 0, a_2 + 0, \dots, a_n + 0) = (a_1, a_2, \dots, a_n) = \alpha.$$

Nol vektorii yozish uchun nol soninn ifodalovchi 0 simvolning o'zidan foydalanamiz; ayni paytda nol soni haqida gapirilyaptimi yoki nol vektor to'g'risidami ekanligi masalasi hych qachon qiyinchilik to'g'dirmaydi.

10.3-ta'rif. $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ vektorga qarama-qarshi vektor deb, ushbu

$$-\alpha = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n) \quad (10.5)$$

vektorii aytamiz.

Ravshankn, $\alpha + (-\alpha) = (a_1 - a_1, a_2 - a_2, \dots, a_n - a_n) = 0$. Endi vektorlarni qo'shishga teskari amal —ayirish mavjud ekanligini ko'rish oson: (10.1) va (10.2) vektorlarning ayirmasi $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ bo'ladi, ya'ni

$$\alpha + (-\beta) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n) = 0. \quad (10.6)$$

n o'lchovli vektorlarni (10.3) formula bilan aniqlanadigan qo'shish vektorlarni tekislikda yoki uch o'lchovli fazoda parallelogramm qoidasi bo'yicha geometrik qo'shishdan kelib chiqqan. Geometriyada vektorni haqiqiy songa (skalyarga) ko'paytirish ham ishlatiladi: $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ vektorni k songa ko'paytirish $k > 0$ bo'lganda, $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ni k marta cho'zish (ya'ni $k < 1$ da siqish) ni, $k < 0$ da esa, $|k|$ marta cho'zish va yo'nalishni teskarisiga almashtirishni bildiradi. Bu qoidani $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ vektorning komponentlari orqali ifodalab va tekshirilayotgan umumiy holga o'tib, quyidagi ta'rifni hosil qilamiz:

10.4-ta'rif. (10.1) vektorning k songa ko'paytmasi deb komponentlari $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ vektorning mos komponentlarini k ga ko'paytmasiga teng bo'lgan

$$k\alpha = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n) \quad (10.7)$$

vektorga aytiladi.

Bu ta'rifdan quyidagi muhim xulosalar kelib chiqadi (ularni tekshirish o'quvchining o'ziga havola qilinadi);

$$1^0. k(\alpha \pm \beta) = k\alpha \pm k\beta;$$

$$2^0. (k \pm l)\alpha = k\alpha \pm l\alpha;$$

$$3^0. k(l\alpha) = (kl)\alpha;$$

$$4^0. 1 \cdot \alpha = \alpha.$$

10.5-ta'rif. Vektorlarni qo'shish va vektorni songa ko'paytirish amallari aniqlangan barcha haqiqiy komponentli n o'lchovli vektorlar to'plami p o'lchovli vektor fazo deyiladi.

Shuni ta'kidlab o'tamizki, n o'lchovli vektor fazo ta'rifiga vektorni vektorga hyech qanday ko'paytirish kirmaydi. Vektorlarni ko'paytirishni aniqlash qiyin emas-masalan, vektorlar ko'paytmasining komponentlari ko'paytuvchi vektorlar mos komponentlarining ko'paytmasiga teng deb olish mumkin. Biroq

bunday ko'paytirish hiech qanday jnddiy tatbiqqa ega bo'lmas edi. Masalan, tekislikda yoki uch o'lchovli fazoda koordinatalar boshidan chiqqan vektor-kesmalar tayinlangan koordinatalar sistemasida ikki o'lchovli va mos ravnshta uch o'lchovli vektor fazolar tashkil etadilar. Bu misolda vektorlarni qo'shish va vektorni songa ko'paytirish, yuqorida qayd qilib o'tilganidek, muhim geometrik ma'no kasb etgan bir paytda vektorlarning komponentlari bo'yicha ko'paytirishga biroi bir tuzukroq geometrik talqin berib bo'lmaydi.

10.2. n o'lchovli vektorlar sistemasining rangi

10.6-ta'rif. Agar shunday $l_1, l_2, \dots, l_s$ sonlar mavjud bo'lsaki, ular uchun

$$\beta = l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + \dots + l_s \alpha_s$$

munosabat bajarilsa, β vektor $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ vektorlarnnng *chiziqli kombnnasiyasi* deyiladi.

10.7-ta'rif. Ushbu

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \quad (r \geq 2) \tag{10.8}$$

vektorlar sistemasiinng hiech bo'lmaganda bir vektori (10.8) sistemaning qolgan vektorlarining chiziqli kombnnasiyasi bo'lsa, (10.8) sistema **chiziqli bog'liq**, aks xolda esa **chiziqli erkli** deyiladi.

Agar hiech bo'lmaganda bittasi noldan farqli shunday $k_1, k_2, \dots, k_r$ sonlarni topish mumkin bo'lsaki, ular uchun

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_r \alpha_r = 0$$

tenglik o'rinli bo'lsa, (10.8) vektorlar sistemasi **chiziqli bog'liq** bo'ladi.

Agar ikkita vektorlar sistemasining har qaysisi boshqasi orqali chiziqli ifodalansa, bu sistemalar **ekvivalent** deyiladi.

10.1-teorema. Agar n o'lchovchi vektor fazoda ikkita $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ va $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ vektorlar sistemasi berilgan bo'lib, ulardan birinchisi chiziqli erkli hamda ikkinchisi orqali chiziqli ifodalansa, u holda birinchi sistemadagi vektorlar soni ikkinchi sitemadagi vektorlar sonidan ortiq bo'lmaydi, ya'ni $r < s$ bo'ladi.

10.1-natija. Har qanday ikkita ekvivalent chiziqli erkli vektorlar sistemasi teng sondagi vektorlarga ega bo'ladi.

Berilgan vektorlar sistemasining istalgan maksimal chiziqli erkli sistemasiga kiruvchi vektorlar soni bu sistemaning **rangi** deyiladi. Bu tushunchadan foydalanib asosiy teoremadan yana bir natija keltirib chiqaramiz.

10.2-natija. n o'lchovchi vektor fazoda ikkita $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ va $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ vektorlar sistemasi berilgan bo'lsin. Bu sistemalar chiziqli erkli bo'lishi shart emas, shu bilan birga $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ sistemaning rangi k songa, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ sistemaning rangi esa l songa teng bo'lsin. Agar birinchi sistema ikkinchi sistema orqali chiziqli ifodalansa, $k \leq l$ bo'ladi. Agar bu sistemalar ekvivalent bo'lsa, $k = l$ bo'ladi.

11-ma'ruza.

Chiziqli fazo. Yevklid fazosi

11.1. Chiziqli fazoning ta'rifi va misollar . L to'plam berilgan bo'lib, uning elementlari $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots, \bar{u}$ vektorlar bo'lsin.

I. L to'plamda «elementlarni qo'shish» amali kiritilgan, ya'ni $\forall \bar{x}, \bar{y} \in L$ elementlari uchun shunday uchinchi bir $\bar{z} \in L$ element biror qoida bo'yicha mos qo'yilgan bo'lsin, va uni $\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$ deb belgilaymiz.

II. L to'plamda «elementlarni songa ko'paytirish» amali kiritilgan, ya'ni $\forall \bar{x} \in L$ va $\forall \bar{a} \in R$ son uchun L to'plamda shunday $\bar{u} \in L$ element biror qoida bo'yicha mos qo'yilgan bo'lsin, va uni $\bar{u} = \bar{a} \cdot \bar{x}$

III. Bu ko'rsatilgan yuqoridagi ikkita amallar quyidagi sakkizta aksiomani qanoatlantirsin.

$$1^0 \quad \bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x} \text{ (o'rin almashtirish xossasi);}$$

$$2^0 \quad (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} (\bar{y} + \bar{z}) \text{ (assosiativlik xossasi);}$$

3⁰. L to'plamda shunday nol $\bar{0}$ element mavjud bo'lib, $\forall \bar{x} \in L$ element uchun mana ushbu

$$\bar{x} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{x} = \bar{x}$$

tenglik bajarilsa;

4⁰ L to'plamdagi har qanday $\bar{x} \in L$ element uchun L da shunday $-\bar{x} \in L$ element mavjud bo'lib, ushbu

$$\bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{0}$$

tenglik bajarilsa ($-\bar{x}$ ni $\bar{x}$ qarama-qarshi element deb ataymiz)

$$5^0 \quad 1 \cdot \bar{x} = \bar{x} \quad (\forall \bar{x} \in L)$$

$$6^0 \quad \lambda(\mu \bar{x}) = (\lambda\mu) \bar{x} \quad (\forall \bar{x} \in L, \forall \lambda, \mu \in R) \quad (\text{guruhlash xossasi})$$

$$7^0 \quad (\lambda + \mu) \bar{x} = \lambda \bar{x} + \mu \bar{x} \quad (\forall \bar{x} \in L, \forall \lambda, \mu \in R) \quad (\text{sonlar yig'indisini ko'p.taq.xossasi})$$

$$8^0 \quad \lambda(\bar{x} + \bar{y}) = \lambda \bar{x} + \lambda \bar{y} \quad (\forall \bar{x}, \bar{y} \in L, \forall \lambda \in R) \quad (\text{element yig'indi sonini taq.xossasi})$$

Bu I,II,III – shartni qanoatlantiruvchi L to'plamni **chiziqli fazo** deb ataymiz. Haqiqiy sonlar to'plamidagi chiziqli fazo, odatda *haqiqiy fazo* deyiladi, kompleks sonlar to'plamidagi chiziqli fazo esa, *kompleks fazo* deyiladi.

Chiziqli fazoga doir misollarni qaraymiz.

$$1. \quad R^n = \left\{ \bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i - \text{haqiqiy sonlar} \right\} \quad \text{to'plamini qaraymiz. } R^n$$

to'plamning elementlari ustida qo'shish va songa ko'paytirish amallari va 8 aksioma bajariladi. Haqiqatan,

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n, \bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n, \forall \lambda \in R \quad \text{bo'lsin, u holda}$$

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in R^n$$

$$\lambda \bar{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \in R^n.$$

$$\bar{0} = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n \text{ marta}}), \quad -\bar{x} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n).$$

Demak, R^n - chiziqli fazo bo'ladi.

2. Darajasi n natural sondan oshmaydigan hamda qo'shish va songa ko'paytirish amallari odatdagicha bajariladigan barcha ko'phadlar to'plami chiziqli fazo hosil qiladi.

3. Fazoning tayinlangan nuqtasidan chiquvchi barcha radius vektorlar to'plami haqiqiy chiziqli fazo hosil qiladi.

11.2.Vektorlarning chiziqli bog'lanishi. Elementlari $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots, \bar{n}$ bo'lgan ixtiyoriy haqiqiy chiziqli L fazo berilgan bo'lsin.

11.1-ta’rif. Agar $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots, \bar{u}$ vektorlar uchun $\bar{x} = \bar{y}\alpha + \bar{z}\beta + \dots + \bar{u}\gamma$

tenglikni qanoatlantiruvchi $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ sonlar mavjud bo’lsa, u hoida $\bar{x}$ vektor $\bar{y}, \bar{z}, \dots, \bar{u}$ vektorlar orqali chiziqli ifodalangan yoki ularning chiziqli kombinatsiyasidan iborat deyiladi.

Bunda $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ sonlarning ba’zilari (hatto hammasi) nolga teng bo’lishi mumkin.

Masalan. $\bar{x} = (7, 12, 7)$ vektor $\bar{y} = (1, 2, 5)$, $\bar{z} = (-3, 0, 7)$, $\bar{u} = (4, 6, -8)$ vektorlar orqali chiziqli ifodalanadi:

$$\bar{x} = 3\bar{y} + 0\bar{z} + 1\bar{u} \quad ; \quad (7, 12, 7) = 3(1, 2, 5) + 0(-3, 0, 7) + 1(4, 6, -8)$$

11.2-ta’rif. Agar berilgan $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots, \bar{u}$ vektorlar uchun kamida bittasi noldan farqli shunday $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu$ ($\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu \in R$) sonlar mavjud bo’lsaki, ushbu

$$\alpha \bar{x} + \beta \bar{y} + \gamma \bar{z} + \dots + \mu \bar{u} = \bar{0} \quad (11.1)$$

tenglik o’rinli bo’lsa, $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots, \bar{u}$ vektorlar L chiziqli fazoda **chiziqli bog’liq** deyiladi.

11.3-ta’rif. Agar berilgan $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots, \bar{u}$ vektorlar uchun yuqorida aytilgan shartlarni qanoatlantiruvchi sonlar mavjud bo’lmasa, ya’ni (11.1) tenglik faqat $\alpha = \beta = \gamma = \dots = \mu = 0$ shartdagina bajarilsa, $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots, \bar{u}$ vektorlar L chiziqli fazoda **chiziqli bog’lanmagan (erkli)** deyiladi.

1-misol. Rasional sonlar maydonidagi uch o’lchovli vektor fazoning

$$\bar{x} = (1, 0, -2), \quad \bar{y} = (3, -9, 3), \quad \bar{z} = (3, -6, 0) \quad \bar{u} = (2, 5, 7)$$

vektorlari chiziqli bog’langan, chunki rasional $3, 2, -3, 0$ sonlar uchun

$$3\bar{x} + 2\bar{y} - 3\bar{z} + 0\bar{u} = \bar{0}$$

tenglik bajariladi, bunda $\bar{0} = (0, 0, 0)$.

2-misol. Ushbu $\bar{a} = (1, 2, -1)$, $\bar{b} = (-2, 1, 3)$, $\bar{c} = (-1, 3, 1)$

vektorlarning chiziqli bog’lanmaganligini ko’rsating.

Haqiqatan ham

$$\alpha \bar{x} + \beta \bar{y} + \gamma \bar{z} = \bar{0} \quad (11.2)$$

tenglikdan $\alpha = \beta = \gamma = 0$ kelib chiqishini ko'rsatamiz.

Berilgan vektorlarni (11.2) tenglikka qo'ysak qo'yidagi birjinsli chiziqli tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$\alpha(2, 2, -1) + \beta(-2, 1, 3) + \gamma(-1, 3, 1) = (0, 0, 0)$$

yoki

$$\left. \begin{aligned} \alpha - 2\beta - \gamma &= 0 \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma &= 0 \\ -\alpha + 3\beta + \gamma &= 0 \end{aligned} \right\}$$

bu bir jinsli sistemaning asosiy determinanti noldan farqli shu sababli u faqat hol

$$\text{yechimga ega bo'ladi } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

Demak, (11.2) tenglik faqat $\alpha = \beta = \gamma = 0$ bo'lgandagina bajarilar ekan.

11.1-teorema. R^n chiziqli fazoning $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots, \bar{u}$ elementlari chiziqli bog'langan bo'lishi uchun bu elementlardan birortasi qolganlari orqali chiziqli (kombinasiyasi) ifodalangan bo'lishi zarur va yetarli.

Isboti. Zaruriyligi. Faraz qilaylik $\bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{z}$, elementlar chiziqli bog'langan bo'lsin, ya'ni

$$\gamma_1 \bar{x} + \gamma_2 \bar{y} + \dots + \gamma_n \bar{z} = \bar{0} \quad (11.3)$$

tenglik bajarilsin, bunda $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ lardan aqalli birortasi noldan farqli, masalan $\gamma_1 \neq 0$ bo'lsin, u holda (11.3) ni quyidagicha yozih mumkin

$$\bar{x} = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \bar{y} - \dots - \frac{\gamma_n}{\gamma_1} \bar{z}$$

$-\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \alpha, \frac{\gamma_3}{\gamma_1} = \beta, \dots, \frac{-\gamma_n}{\gamma_1} = \gamma$ deb belgilashlar kiritib, $\bar{x} = \alpha \bar{y} + \beta \bar{z} + \dots + \gamma \bar{u}$ ni olamiz.

Bu esa $\bar{x}$ elementni qolgan $\bar{y}, \bar{z}, \dots, \bar{u}$ elementlar orqali chiziqli ifodalanganligini bildiradi.

Yetarliligi. Faraz qilaylik $\bar{x}$ element qolgan $\bar{y}, \bar{z}, \dots, \bar{u}$ elementlarning chiziqli (kombinasiyasi) ifodasi bo'lsin, ya'ni

$$\bar{x} = \alpha \bar{y} + \beta \bar{z} + \dots + \gamma \bar{u}$$

Bu tenglikni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin.

$$\bar{x} + \alpha \bar{y} + \beta \bar{z} + \dots + \gamma \bar{u} = 0 \quad (11.4)$$

Bu (-1), $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ sonlar bittasi noldan farqli, u holda (11.4) tenglik $\bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{u}$ elementlarning chiziqli bog'langanligini ko'rsatadi. Teorema isbotlandi.

Qo'yidagi elementar tasdiqlar o'rinlidir:

1⁰ Agar $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots, \bar{u}$ elementlardan birortasi nol elementga ega bo'lsa, u holda bu elementlar chiziqli bog'langandir.

Haqiqatan ham, $\bar{x} = \bar{0}$ ega bo'lsin, u holda $\alpha \bar{x} + \beta \bar{y} + \dots + \gamma \bar{z} = \bar{0}$ tenglik o'rinli bo'ladi, agar $\alpha = 1, \beta = \dots = \gamma = 0$ bo'lsa.

2⁰ Agar $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots, \bar{u}$ elementlarning bir qismi chiziqli bog'langan bo'lsa, u holda hamma elementlari chiziqli bog'langan bo'ladi.

3⁰ Har qanday $\bar{x}$ vektorini chiziqli ifodalash mumkin.

$$\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

11.3. Chiziqli fazo elementini bazis bo'yicha yoyish

11.4-ta'rif. L chiziqli fazoning har bir $\bar{x}$ elementni uchun shunday $x_1, x_2, \dots, x_n$ sonlar mavjud bo'lib, ushbu

$$\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ chiziqli bog'lanmagan vektorlar sistemasi L chiziqli fazoning bazisi deyiladi, bunda $x_1, x_2, \dots, x_n$ sonlar $\bar{x}$ vektorning koordinatalari deyiladi.

11.2-teorema. L chiziqli fazoning har bir $\bar{x}$ elementini yagona usulda bazis vektorlari orqali yoyish mumkin, ya'ni

$$\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n$$

11.4. Chiziqli fazoning o'lchovi. L chiziqli fazo $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots, \bar{u}$ elementlari bilan berilgan bo'lsin.

11.5-ta'rif. L chiziqli fazoning $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots, \bar{u}$ elementlaridan n tasi chiziqli bog'lanmagan (erkli) vektorlar sistemasi bo'lib, ixtiyoriy $n+1$ tasi chiziqli bog'langan bo'lsa, u holda L n **o'lchamli chiziqli fazo** deyiladi va quyidagicha belgilanadi $\dim L = n$.

11.6-ta'rif. Agar L chiziqli fazoda cheksiz ko'p chiziqli bog'lanmagan vektorlar sistemasi mavjud bo'lsa, u holda bu L **cheksiz o'lchovli chiziqli fazo** deyiladi va $\dim L = \infty$ bo'ladi.

Misol. R maydonda darajalari $(n-1)$ dan ortiq bo'lmagan ko'phadlar fazosini olaylik. Bu fazoda ushbu

$$1, x, x^2, \dots, x^{n-1} \quad (11.5)$$

vektorlar chiziqli bog'lanmagan, chunki

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} = 0$$

tenglik, ma'lumki, $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$ martdagina o'rinli bo'ladi. Endi, fazoning istalgan

$$f(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_{n-1} x^{n-1}$$

vektorni olsak, uning (11.5) vektorlar orqali ifodalanishi ko'rinib turadi. Shunday qilib, biz bunda n o'lchovli fazoga ega bo'lamiz.

11.3-teorema. Agar L chiziqli fazoning o'lchovi n ga teng bo'lsa, u holda bu L chiziqli fazoning n ta chiziqli bog'lanmagan vektorlari uning bazisi bo'ladi.

Isboti. L chiziqli fazoning elementlari $n+1$ ta bo'lsin: $\bar{x}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ bu elementlarga mos $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \delta$ sonlar mos kelsin. U holda bu sistema chiziqli bog'langandir:

$$\alpha \bar{x} + \beta \bar{e}_1 + \gamma \bar{e}_2 + \dots + \delta \bar{e}_n = \bar{0}$$

$\alpha \neq$

bo'lsin, u holda

$$\bar{x} = -\frac{\beta}{\alpha} \bar{e}_1 - \frac{\gamma}{\alpha} \bar{e}_2 - \dots - \frac{\delta}{\alpha} \bar{e}_n$$

bo'ladi. $x_1 = -\frac{\beta}{\alpha}, x_2 = -\frac{\gamma}{\alpha}, \dots, x_n = -\frac{\delta}{\alpha}$, belgilasak, u holda

$$\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n \quad (11.6)$$

bo'ladi. Shartga ko'ra, $\bar{x}$ L fazoning ixtiyoriy elementi, u holda (11.6) tenglikdagi $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ elementlar sistemasi L fazoning bazisi bo'ladi.

11.5. Qism fazo

F maydon ustidagi V chiziqli fazoda V' qism to'plam berilgan bo'lsin.

11.7-ta'rif. Agar V dagi qo'shish amaliga va vektorlarni F dagi skalyarlarga ko'paytirish amaliga nisbatan V' to'plam yopiq bo'lsa, ya'ni har qanday $x, y \in V'$, uchun $x + y \in V'$ va har qanday $x \in V', \lambda \in F$, uchun $\lambda x \in V'$ bo'lsa, u holda V' qism to'plamga V chiziqli fazoning **qism fazosi** deyiladi.

1-natija. $\bar{0} \in V'$.

Haqiqatdan ham ixtiyoriy $x \in V'$ uchun $\lambda = 0$ deb olsak $\bar{0} \in V'$.

2-natija. Agar $x \in V'$ bo'lsa, $-x \in V'$ bo'ladi.

Buni ko'rsatish uchun $\lambda = -1$ deb olish kerak.

2-natija. V' to'plamning o'zi ham F maydon ustida V chiziqli fazoda kiritilgan amallarga nisbatan chiziqli fazo tashkil etadi.

11.4-teorema. 1) V' fazo V chiziqli fazoning qism fazosi bo'lsa,

$$\dim V' \leq \dim V$$

bo'ladi.

2) Agar V' va V'' lar V chiziqli fazoning qism fazolari va $V' \subset V''$ bo'lsa, $\dim V' \leq \dim V''$ buladi. Bundan tashqari oxirgi tengsizlikdan tenglik bo'lishi uchun $V' = V''$ tenglik bajarilishi zarur va yetarli.

11.6. Yevklid fazosining ta'rifi. Yevklid fazosida elementning normasi tushunchasi. Yevklid fazosida ortonormallangan bazis qurish

Chiziqli fazolarda norma kiritishning sinalgan usullaridan biri, unda skalyar ko'paytma kiritishdir.

11.8-ta'rif. Bizga L haqiqiy chiziqli fazo berilgan bo'lsin. Agar $L \times L$ dekart ko'paytmada aniqlangan p funksional quyidagi to'rtta shartni qanoatlantirsa, unga **skalyar ko'paytma** deyiladi:

$$1) p(x, x) \geq 0, \quad \forall x \in L; \quad p(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta;$$

$$2) p(x, y) = p(y, x), \quad \forall x, y \in L;$$

$$3) p(\alpha x, y) = \alpha p(x, y), \quad \forall \alpha \in R, \quad \forall x, y \in L;$$

$$4) p(x_1 + x_2, y) = p(x_1, y) + p(x_2, y), \quad \forall x_1, x_2, y \in L,$$

11.8-ta'rif. Skalyar ko'paytma kiritilgan chiziqli fazo **Evklid fazosi** deyiladi va x, y elementlarning skalyar ko'paytmasi (x, y) orqali belgilanadi.

Evklid fazosida x elementning normasi

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \quad (11.7)$$

formula orqali aniqlanadi. Bu funksional norma aksiomalarini qanoatlantiradi. Skalyar ko'paytmaning 1-4 shartlaridan normaning 1-2 shartlari bevosita kelib

chiqadi. Uchburchak aksiomasining bajarilishi Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi deb ataluvchi quyidagi

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad (11.8)$$

tengsizlikdan kelib chiqadi.

Endi (11.8) tengsizlikni, ya'ni Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini isbotlaymiz. $\lambda \in R$ ning barcha qiymatlarida nomanfiy bo'lgan kvadrat uchhadni qaraymiz:

$$\phi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2(x, x) + 2\lambda(x, y) + (y, y) = \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda(x, y) + \|y\|^2.$$

Bu kvadrat uchhadning diskriminanti musbat emas, ya'ni

$$D = 4[(x, y)]^2 - 4\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0.$$

Bundan

$$[(x, y)]^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2, \quad \text{ya'ni} \quad |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Endi (11.7) norma uchun uchburchak aksiomasining bajarilishini ko'rsatamiz:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leq \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Bundan $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ tengsizlik kelib chiqadi.

Shuni ta'kidlaymizki, Evklid fazosida yig'indi, songa ko'paytirish va skalyar ko'paytma amallari uzluksizdir, ya'ni agar $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ (norma bo'yicha yaqinlashish ma'nosida), $\alpha_n \rightarrow \alpha$ (sonli ketma-ketlik sifatida) bo'lsa, u holda

$$x_n + y_n \rightarrow x + y, \quad \alpha_n x_n \rightarrow \alpha x, \quad (x_n, y_n) \rightarrow (x, y).$$

Bu tasdiqlarning isboti quyidagicha:

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| = \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty;$$

$$\begin{aligned} \|\alpha_n x_n - \alpha x\| &= \|\alpha_n x_n - \alpha x_n + \alpha x_n - \alpha x\| \leq \|(\alpha - \alpha_n)x_n\| + \|\alpha(x_n - x)\| = \\ &= |\alpha - \alpha_n| \cdot \|x_n\| + |\alpha| \cdot \|x_n - x\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |(x_n, y_n) - (x, y)| &= |(x_n, y_n) - (x, y_n) + (x, y_n) - (x, y)| \leq \\ &\leq |(x_n - x, y_n)| + |(x, y_n - y)| \leq \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Evklid fazolarida nafaqat vektorning normasini (ya'ni uzunligini), balki vektorlar orasidagi burchak tushunchasini ham kiritish mumkin. Noldan farqli x va y vektorlar orasidagi φ burchakning kosinusi

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \quad (11.9)$$

formula bilan aniqlanadi. Koshi-Bunyakovskiy tengsizligiga ko'ra (11.9) ning o'ng tomoni moduli bo'yicha birdan oshmaydi va demak (11.9) formula haqiqatan ham, nolmas x va y vektorlar orasidagi φ , $0 \leq \varphi \leq \pi$ burchakni bir qiymatli aniqlaydi.

Agar $(x, y) = 0$ bo'lsa, u holda x va y vektorlar ortogonal deyiladi.

11.10-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\alpha \neq \beta$ da $(x_\alpha, x_\beta) = 0$ bo'lsa, u holda nolmas $\{x_\alpha\}$ vektorlar sistemasiga **ortogonal sistema** deyiladi. Agar bu holda har bir elementning normasi birga teng bo'lsa, $\{x_\alpha\}$ ortogonal normalangan sistema, qisqacha **ortonormal sistema** deyiladi.

Agar $\{x_\alpha\}$ vektorlar ortogonal sistemani tashkil qilsa, u holda $\{x_\alpha\}$ chiziqli bog'lanmagan bo'ladi. Haqiqatan ham,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \theta$$

bo'lsin. Bu tenglikning ikkala qismini x_i ga skalyar ko'paytirib, quyidagiga ega bo'lamiz

$$(x_i, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) = \alpha_i (x_i, x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$(x_i, x_i) \neq 0$ bo'lgani uchun, barcha $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ larda $\alpha_i = 0$ bo'ladi.

11.11-ta'rif. Agar $\{x_\alpha\}$ sistemani o'zida saqllovchi minimal yopiq qism fazo E fazoning o'ziga teng bo'lsa, u holda $\{x_\alpha\}$ **sistema to'la** deyiladi.

11.12-ta'rif. Agar $\{x_\alpha\}$ ortonormal sistema to'la bo'lsa, u holda bu sistema E fazodagi **ortonormal (ortogonal normalangan) bazis** deyiladi.

Ravshanki, agar $\{x_\alpha\}$ - ortogonal sistema bo'lsa, u holda

$$\left\{ \|x_\alpha\|^{-1} \cdot x_\alpha \right\}$$

ortonormal sistema bo'ladi.

11.1-misol. $R^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in R\}$ - n o'lchamli Evklid fazosi. Bu fazoda skalyar ko'paytma quyidagicha kiritiladi

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Bu fazoda $\{e_k = (\underbrace{0, \dots, 0}_k, 1, 0, \dots, 0)\}_{k=1}^n$ vektorlar sistemasi ortonormal bazisni tashkil qiladi.

11.2. Kvadrati bilan jamlanuvchi ketma-ketliklar fazosi, ya'ni ℓ_2 ni qaraymiz. Bu fazoda skalyar ko'paytma quyidagicha kiritiladi

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

ℓ_2 fazoda ortonormal bazis sifatida (5.8) tenglik bilan aniqlanuvchi $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ vektorlar sistemasini olish mumkin.

11.3. $C_2[a, b]$ fazoda skalyar ko'paytma quyidagicha kiritiladi

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt. \quad (11.10)$$

Bu fazoda ortogonal (normalanmagan) bazisga

$$\frac{1}{2}, \cos \frac{2\pi nt}{b-a}, \sin \frac{2\pi nt}{b-a}, \quad n = 1, 2, \dots$$

funksiyalardan tashkil topgan trigonometrik sistema misol bo'ladi.

11.4. $L_2[a, b]$ fazoda ham f va g elementlarning skalyar ko'paytmasi (11.10) tenglik bilan aniqlanadi.

11.13-ta'rif. Agar E Evklid fazosining hamma yerida zich bo'lgan sanoqli to'plam mavjud bo'lsa, E separabel Evklid fazosi deyiladi.

Yuqorida keltirilgan R^n , ℓ_2 , $C_2[a, b]$ va $L_2[a, b]$ fazolar separabel Evklid fazolariga misol bo'ladi. Har qanday separabel Evklid fazosidagi ixtiyoriy ortonormal sistema ko'pi bilan sanoqlidir. Mustaqil isbotlang.

11.5-teorema. (Ortogonalashtirish jarayoni). Bizga E Evklid fazosida chiziqli bog'lanmagan

$$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots \quad (11.11)$$

elementlar sistemasi berilgan bo'lsin. U holda E Evklid fazosida quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi

$$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots \quad (11.12)$$

sistema mavjud:

1) (11.12) ortonormal sistema.

2) Har bir ϕ_n element $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ elementlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat, ya'ni

$$\phi_n = a_{n1} f_1 + a_{n2} f_2 + \dots + a_{nn} f_n, \quad a_{nn} > 0;$$

3) har bir f_n element

$$f_n = b_{n1} \phi_1 + b_{n2} \phi_2 + \dots + b_{nn} \phi_n, \quad b_{nn} > 0$$

ko'rinishda tasvirlanadi.

4) (11.12) sistemaning har bir elementi 1-3 shartlar bilan bir qiymatli aniqlanadi.

Isbot. ϕ_1 element $a_{11} f_1$ ko'rinishda izlanadi va a_{11}

$$(\phi_1, \phi_1) = a_{11}^2 (f_1, f_1) = 1$$

shartdan aniqlanadi. Bu yerdan

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{(f_1, f_1)}} = \frac{1}{\|f_1\|} > 0.$$

Ko'rinib turibdiki, ϕ_1 bir qiymatli aniqlanadi. Faraz qilaylik, 1-3 shartlarni qanoatlantiruvchi $\phi_k, k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ elementlar qurilgan bo'lsin. Ushbu

$$\psi_n = f_n - (f_n, \phi_1)\phi_1 - (f_n, \phi_2)\phi_2 - \dots - (f_n, \phi_{n-1})\phi_{n-1}$$

elementni kiritamiz. Ko'rinib turibdiki, agar $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ bo'lsa, $(\psi_n, \phi_k) = 0$

bo'ladi. $(\psi_n, \psi_n) = 0$ tenglik (11.11) sistemaning chiziqli erkli ekanligiga zid, shuning uchun $(\psi_n, \psi_n) > 0$. Endi

$$\phi_n = \frac{\psi_n}{\sqrt{(\psi_n, \psi_n)}}$$

deymiz. ψ_n vektorning qurilishiga ko'ra u $f_1, f_2, \dots, f_n$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi va demak, ϕ_n ham ularning chiziqli kombinatsiyasi, ya'ni

$$\phi_n = a_{n1}f_1 + a_{n2}f_2 + \dots + a_{nn}f_n, \text{ bu yerda } a_{nn} = \frac{1}{\sqrt{(\psi_n, \psi_n)}} > 0$$

Bundan tashqari $(\phi_n, \phi_n) = 1, (\phi_n, \phi_k) = 0, (k < n)$ va

$$f_n = b_{n1}\phi_1 + b_{n2}\phi_2 + \dots + b_{nn}\phi_n, \quad b_{nn} = a_{nn}^{-1} = \sqrt{(\psi_n, \psi_n)} > 0,$$

ya'ni ϕ_n teorema shartlarini qanoatlantiradi. Δ

(11.11) sistemadan 1-3 shartlarni qanoatlantiruvchi (11.12) sistemaga o'tish ortogonallashtirish jarayoni deyiladi. Ko'rinib turibdiki, (11.11) va (11.12) sistemalardan hosil bo'lgan qism fazolar ustma-ust tushadi. Bundan kelib chiqadiki, bu sistemalar bir vaqtda to'la yoki to'la emas.

11.1-natija. Har qanday separabel Evklid fazosida sanoqli ortonormal bazis mavjud.

Isbot. ϕ_n - E Evklid fazosining hamma yerida zich sanoqli to'plam bo'lsin. Undan chiziqli bog'langan elementlarni chiqarib tashlab, qolgan $\{f_n\}$ sistemaga ortogonallashtirish jarayonini qo'llab, ortonormal bazisni hosil qilamiz. Δ

12-ma'ruza.

Chiziqli operatorlar va ularning xossalari

12.1. Chiziqli operatorning ta'rifi va misollar

Biz asosan chiziqli operatorlarni qaraymiz. Chiziqli operatorlarning aniqlanish sohasi va qiymatlar to'plami chiziqli normalangan fazolarning qism fazolari bo'ladi. Shunday qilib, bizga X va Y chiziqli normalangan fazolar berilgan bo'lsin.

12.1-ta'rif. X fazodan olingan har bir x elementga Y fazoning yagona y elementini mos qo'yuvchi

$$Ax = y \quad (x \in X, y \in Y)$$

akslantirish **operator** deyiladi.

Umuman A operator X ning hamma yerida aniqlangan bo'lishi shart emas. Bu holda Ax mavjud va $Ax \in Y$ bo'lgan barcha $x \in X$ lar to'plami A operatorning aniqlanish sohasi deyiladi va $D(A)$ bilan belgilanadi, ya'ni:

$$D(A) = \{ \exists x \in X : Ax \text{ mavjud va } Ax \in Y \}.$$

Agar chiziqli A operator qaralayotgan bo'lsa, $D(A)$ ning chiziqli ko'pxillilik bo'lishi talab qilinadi, ya'ni agar $x, y \in D(A)$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $\alpha, \beta \in C$ lar uchun $\alpha x + \beta y \in D(A)$.

12.2-ta'rif. Agar ixtiyoriy $x, y \in D(A) \subset X$ elementlar va ixtiyoriy $\alpha, \beta \in C$ sonlar uchun

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$$

tenglik o'rinli bo'lsa, A ga **chiziqli operator** deyiladi.

12.3-ta'rif. Bizga $A: X \rightarrow Y$ operator va $x_0 \in D(A)$ nuqta berilgan bo'lsin. Agar $y_0 = Ax_0 \in Y$ ning ixtiyoriy V atrofi uchun, x_0 nuqtaning shunday U atrofi mavjud bo'lib, ixtiyoriy $x \in U \cap D(A)$ lar uchun $Ax \in V$ bo'lsa, A operator $x = x_0$ **nuqtada uzluksiz** deyiladi.

12.3-ta'rifga teng kuchli quyidagi ta'riflarni keltiramiz.

12.4-ta’rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mavjud bo‘lib, $\|x - x_0\| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x \in D(A)$ lar uchun $\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, A operator $x = x_0$ **nuqtada uzluksiz** deyiladi.

12.5-ta’rif. Agar x_0 nuqtaga yaqinlashuvchi ixtiyoriy x_n ketma-ketlik uchun $\|Ax_n - Ax_0\| \rightarrow 0$ bo‘lsa, u holda A operator x_0 **nuqtada uzluksiz** deyiladi.

Agar A operator ixtiyoriy $x \in D(A)$ nuqtada uzluksiz bo‘lsa, A **uzluksiz operator** deyiladi.

12.6-ta’rif. $Ax = \theta$ tenglikni qanoatlantiruvchi barcha $x \in X$ lar to‘plami A operatorning **yadrosi** deb ataladi va u $KerA$ bilan belgilanadi.

12.7-ta’rif. Biror $x \in D(A)$ uchun $y = Ax$ bajariladigan $y \in Y$ lar to‘plami A operatorning **qiymatlar sohasi** yoki **tasviri** deb ataladi va u ImA yoki $R(A)$ bilan belgilanadi.

Matematik simvollar yordamida operator yadrosi va qiymatlar sohasini quyidagicha yozish mumkin:

$$KerA = \{ \exists x \in D(A) : Ax = \theta \},$$

$$R(A) := ImA = \{ \exists y \in Y : \text{biror } x \in D(A) \text{ uchun } y = Ax \}.$$

Chiziqli operatorning qiymatlar sohasi va yadrosi chiziqli ko‘pxillilik bo‘ladi. Agar $D(A) = X$ bo‘lib, A uzluksiz operator bo‘lsa, u holda $KerA$ yopiq qism fazo bo‘ladi, ya’ni $KerA = [KerA]$. A operator uzluksiz bo‘lgan holda ham $ImA \subset Y$ yopiq qism fazo bo‘lmasligi mumkin.

12.2. Chiziqli operatorlarga misollar

12.1-misol. X - ixtiyoriy chiziqli normalangan fazo bo‘lsin.

$$Ix = x, \quad x \in X$$

akslantirish birlik operator deyiladi. Uni chiziqlilik va uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Bu operatorning chiziqliligi va uzluksizligi quyidagi tengliklardan bevosita kelib chiqadi:

$$I(\alpha x + \beta y) = \alpha x + \beta y = \alpha Ix + \beta Iy, \quad \|I(x - x_0)\| = \|x - x_0\|.$$

Qo'shimcha qilib aytishimiz mumkinki, uning aniqlanish sohasi, qiymatlar sohasi va yadrosi uchun quyidagilar o'rinli:

$$D(I) = X, \quad R(I) = X, \quad \text{Ker} I = \{\theta\}.$$

12.2-misol. X va Y ixtiyoriy chiziqli normalangan fazolar bo'lsin.

$$\Theta: X \rightarrow Y, \quad \Theta x = \theta$$

operator nol operator deyiladi. Uni chiziqlilik va uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Nol operatorning chiziqliligi va uzluksizligi bevosita ta'rifdan kelib chiqadi. Uning aniqlanish sohasi, qiymatlar sohasi va yadrosi uchun quyidagilar o'rinli:

$$D(\Theta) = X, \quad R(\Theta) = \{\theta\}, \quad \text{Ker}(\Theta) = X.$$

12.3-misol. Aniqlanish sohasi $D(A) = C^{(1)}[a, b] \subset C[a, b]$ bo'lgan va $C[a, b]$ fazoni o'zini-o'ziga akslantiruvchi

$$A: C[a, b] \rightarrow C[a, b], \quad (Af)(x) = f'(x)$$

operatorni qaraymiz. Bu operator differensial operator deyiladi. Uni chiziqlilik va uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Uning chiziqli ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun ixtiyoriy $f, g \in D(A)$ elementlarning chiziqli kombinatsiyasi bo'lgan $\alpha f + \beta g$ elementga A operatorning ta'sirini qaraymiz:

$$(A(\alpha f + \beta g))(x) = (\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x) = \alpha (Af)(x) + \beta (Ag)(x).$$

Biz bu yerda yig'indining hosilasi hosilalar yig'indisiga tengligidan, hamda o'zgarish sonni hosila belgisi ostidan chiqarish mumkinligidan foydalandik. Demak, A operator chiziqli ekan. Uni nol nuqtada uzluksizlikka tekshiramiz. Ma'lumki, $A\theta = \theta$, bu yerda $\theta - C[a, b]$ fazoning nol elementi, ya'ni $\theta(x) \equiv 0$. Endi nolga yaqinlashuvchi $f_n \in D(A)$ ketma-ketlikni tanlaymiz. Umumiylikni buzmaganda holda $a = 0, b = 1$ deymiz.

$$f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Ikkinchi tomondan,

$$(Af_n)(x) = x^n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|Af_n - A\theta\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq 1} |x^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq 0.$$

Demak, A operator nol nuqtada uzluksiz emas ekan. 12.2-teoremaga ko'ra differensial operator aniqlanish sohasining barcha nuqtalarida uzilishga ega.

Uning qiymatlar sohasi va yadrosi uchun quyidagilar o'rinli:

$$R(A) = C[a, b], \quad \text{Ker} A = \{\text{const}\}.$$

12.4-misol. Endi $C[a; b]$ fazoni o'zini-o'ziga akslantiruvchi B operatorni quyidagicha aniqlaymiz:

$$(Bf)(x) = \int_a^b K(x, t) f(t) dt \quad (12.1)$$

Bu operator integral operator deyiladi. Bu yerda $K(x, y)$ funksiya $[a, b] \times [a, b]$ - kvadratda aniqlangan, uzluksiz. $K(x, y)$ integral operator-ning o'zagi (yadrosi) deyiladi. B operatorni chiziqlilik va uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Ma'lumki, ixtiyoriy $f \in C[a, b]$ uchun $K(x, t) f(t)$ funksiya x va t larning uzluksiz funksiyasidir. Matematik analiz kursidan ma'lumki,

$$\int_a^b K(x, t) f(t) dt$$

integral parametr $x \in [a, b]$ ning uzluksiz funksiyasi bo'ladi. Bulardan B operatorning aniqlanish sohasi $D(B)$ uchun $D(B) = C[a; b]$ tenglik o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Integral operatorning chiziqli ekanligi integrallash amalining chiziqlilik xossasidan kelib chiqadi, ya'ni ixtiyoriy $f, g \in C[a; b]$ va $\alpha, \beta \in C$ lar uchun

$$\begin{aligned} (B(\alpha f + \beta g))(x) &= \int_a^b K(x, t)(\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \\ &= \alpha \int_a^b K(x, t) f(t) dt + \beta \int_a^b K(x, t) g(t) dt = \alpha (Bf)(x) + \beta (Bg)(x) \end{aligned}$$

tengliklar o'rinli. Endi integral operator B ning uzluksiz ekanligini ko'rsatamiz. $f_0 \in C[a; b]$ ixtiyoriy tayinlangan element va $\{f_n\} \subset C[a; b]$ unga yaqinlashuvchi ixtiyoriy ketma-ketlik bo'lsin. U holda

$$\begin{aligned} \|Bf_n - Bf_0\| &= \max_{a \leq x \leq b} \left| \int_a^b K(x, t) (f_n(t) - f_0(t)) dt \right| \leq \\ &\leq \max_{a \leq x \leq b} |f_n(t) - f_0(t)| \max_{a \leq x \leq b} \left| \int_a^b K(x, t) dt \right| = C \cdot \|f_n - f_0\|. \end{aligned} \quad (12.2)$$

Bu yerda

$$C = \max_{a \leq x \leq b} \int_a^b |K(x, t)| dt.$$

C ning chekli ekanligi $[a, b]$ kesmada uzluksiz funksiyaning chegaralangan ekanligidan kelib chiqadi. Agar (12.2) tengsizlikda $n \rightarrow \infty$ da limitga o'tsak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Bf_n - Bf_0\| \leq C \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_0\| = 0$$

ekanligini olamiz. Agar $\|Bf_n - Bf_0\| \geq 0$ tengsizlikni hisobga olsak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Bf_n - Bf_0\| = 0.$$

Shunday qilib, B integral operator ixtiyoriy nuqtada uzluksiz ekan.

B integral operatorning qiymatlar sohasi va yadrosi integral operatorning o'zagi - $K(x, y)$ funksiyaning berilishiga bog'liq. Masalan, $K(x, t) \equiv 1$ bo'lsa, B operatorning qiymatlar sohasi $\text{Im} B$ o'zgarmas funksiyalardan iborat, ya'ni $\text{Im} B = \{f \in C[a, b] : f(t) = \text{const}\}$, uning yadrosi $\text{Ker} B$ o'zgarmasga ortogonal funksiyalardan iborat, ya'ni

$$\text{Ker} B = \left\{ \exists f \in C[a, b] : \int_a^b f(t) dt = 0 \right\}.$$

12.8-ta'rif. Bizga X normalangan fazoning M to'plami berilgan bo'lsin. Agar shunday $C > 0$ son mavjud bo'lib, barcha $x \in M$ uchun $\|x\| \leq C$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, M to'plam **chegaralangan** deyiladi.

12.9-ta'rif. X fazoni Y fazoga akslantiruvchi A chiziqli operator berilgan bo'lsin. Agar A ning aniqlanish sohasi $D(A) = X$ bo'lib, har qanday chegaralangan to'plamni yana chegaralangan to'plamga akslantirsa, A ga **chegaralangan operator** deyiladi.

Chiziqli operatorning chegaralanganligini tekshirish uchun quyidagi ta'rif qulaydir.

12.10-ta’rif. $A: X \rightarrow Y$ chiziqli operator bo‘lsin. Agar shunday $C > 0$ son mavjud bo‘lib, ixtiyoriy $x \in D(A)$ uchun

$$\|Ax\| \leq C \cdot \|x\| \quad (12.3)$$

tengsizlik bajarilsa, A **chegaralangan operator** deyiladi.

12.11-ta’rif. (12.3) tengsizlikni qanoatlantiruvchi C sonlar to‘plamining aniq quyi chegarasi A **operatorning normasi** deyiladi, va u $\|A\|$ bilan belgilanadi, ya’ni

$$\|A\| = \inf C.$$

Bu ta’rifdan ixtiyoriy $x \in D(A)$ uchun $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ tengsizlik o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

12.1-teorema. X normalangan fazoni Y normalangan fazoga akslantiruvchi chiziqli chegaralangan A operatorning normasi $\|A\|$ uchun

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad (12.4)$$

tenglik o‘rinli.

Isbot. Quyidagicha belgilash kiritamiz

$$\alpha = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

A chiziqli operator bo‘lgani uchun

$$\alpha = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq \theta} \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Ixtiyoriy $x \neq 0$ uchun

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \alpha.$$

Demak, ixtiyoriy $x \in X$ uchun $\|Ax\| \leq \alpha \|x\|$. Bundan esa

$$\|A\| \leq \alpha. \quad (12.5)$$

Aniq yuqori chegara ta’rifiga ko‘ra, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun, shunday $x_\varepsilon \neq \theta$ element mavjudki,

$$\alpha - \varepsilon \leq \frac{\|Ax_\varepsilon\|}{\|x_\varepsilon\|} \leq \|A\|$$

tengsizlik bajariladi. Bu yerdan $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy bo'lgani uchun,

$$\alpha \leq \|A\|. \quad (12.6)$$

(12.5) va (12.6) lardan $\|A\| = \alpha$ tenglik kelib chiqadi. Δ

12.1-tasdiq. Chiziqli chegaralangan A operator uchun

$$\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

tenglik o'rinli.

12.1-tasdiqni mustaqil isbotlang.

X chiziqli normalangan fazoni Y chiziqli normalangan fazoga akslantiruvchi chiziqli chegaralangan operatorlar to'plamini $L(X, Y)$ bilan belgilaymiz. Xususan, $X = Y$ bo'lsa $L(X, X) = L(X)$.

12.1-natija. Ixtiyoriy $A \in L(X, Y)$ va $x \in D(A)$, $\|x\| = 1$ uchun

$$\|Ax\| \leq \|A\| \quad (12.7)$$

tengsizlik o'rinli.

(12.7) tengsizlikning isboti (12.4) tengsizlikdan bevosita kelib chiqadi.

12.12-ta'rif. $A : X \rightarrow Y$ va $B : X \rightarrow Y$ chiziqli **operatorlarning yig'indisi** deb, $x \in D(A) \cap D(B)$ elementga $y = Ax + Bx \in Y$ elementni mos qo'yuvchi $C = A + B$ operatorga aytiladi.

Ravshanki, C chiziqli operator bo'ladi. Agar $A, B \in L(X, Y)$ bo'lsa, u holda C ham chegaralangan operator bo'ladi va

$$\|C\| = \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad (12.8)$$

tengsizlik o'rinli. Haqiqatan ham,

$$\|Cx\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \|A\| \cdot \|x\| + \|B\| \cdot \|x\| \leq (\|A\| + \|B\|) \|x\|.$$

Bu yerdan (12.8) tengsizlik kelib chiqadi.

12.13-ta'rif. A chiziqli operatorning α **songa ko'paytmasi** x elementga αAx elementni mos qo'yuvchi operator sifatida aniqlanadi, ya'ni

$$(\alpha A)(x) = \alpha Ax.$$

12.14-ta'rif. $A : X \rightarrow Y$ va $B : Y \rightarrow Z$ chiziqli operatorlar berilgan bo'lib $R(A) \subset D(B)$ bo'lsin. B va A **operatorlarning ko'paytmasi** deganda, har bir $x \in D(A)$ ga Z fazoning $z = B(Ax)$ elementini mos qo'yuvchi $C = BA : X \rightarrow Z$ operator tushuniladi.

Agar A va B lar chiziqli chegaralangan operatorlar bo'lsa, u holda C ham chiziqli chegaralangan operator bo'ladi va

$$\|C\| \leq \|B\| \cdot \|A\| \quad (12.9)$$

tengsizlik o'rinli. Haqiqatan ham,

$$\|Cx\|_Z = \|B(Ax)\|_Z \leq \|B\| \cdot \|Ax\|_Y \leq \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|_X.$$

Bu yerdan (12.9) tengsizlik kelib chiqadi.

Operatorlarni qo'shish va ko'paytirish assotsiativdir. Qo'shish amali kommutativ, lekin ko'paytirish amali kommutativ emas.

Agar X va Y lar chiziqli normalangan fazolar bo'lsa, $L(X, Y)$ ham chiziqli normalangan fazo bo'ladi, ya'ni $p : L(X, Y) \rightarrow R$,

$$p(A) = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

funksional normaning 1-3 - shartlarini qanoatlantiradi.

12.2-teorema. X normalangan fazoni Y normalangan fazoga akslantiruvchi $A : X \rightarrow Y$ chiziqli operator berilgan bo'lsin. U holda quyidagi tasdiqlar teng kuchli:

- 1) A operator biror x_0 nuqtada uzluksiz;
- 2) A operator uzluksiz;
- 3) A operator chegaralangan.

Isbot. 1) $\rightarrow$ 2). Chiziqli A operatorning biror x_0 nuqtada uzluksiz ekanligidan uning ixtiyoriy nuqtada uzluksiz ekanligini keltirib chiqaramiz.

A operator x_0 nuqtada uzluksiz bo'lganligi uchun, x_0 ga intiluvchi ixtiyoriy $\{x_n^0\}$ ketma-ketlik uchun $Ax_n^0 \rightarrow Ax_0$. Ixtiyoriy $x' \in D(A)$ nuqta uchun, $x'_n \rightarrow x'$

ekanligidan $Ax'_n \rightarrow Ax'$ kelib chiqishini ko'rsatamiz. $y'_n = x'_n - x' + x_0 \rightarrow x_0$ deymiz. U holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ay'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A(x'_n - x' + x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (Ax'_n - Ax' + Ax_0) = Ax_0.$$

Bu esa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ax'_n = Ax'$$

ekanligini bildiradi. Demak, A operator ixtiyoriy x' nuqtada uzluksiz.

2) $\rightarrow$ 3). A operatorning uzluksiz ekanligidan uning chegaralanganligi kelib chiqishini ko'rsatamiz. Teskaridan faraz qilaylik, A chiziqli operator uzluksiz bo'lsin, lekin chegaralangan bo'lmasin, ya'ni ixtiyoriy $C > 0$ son uchun shunday $x_c \in D(A)$ element mavjud bo'lib,

$$\|Ax_c\| \geq C\|x_c\|$$

bo'lsin. Agar $C = n \in N$ desak, ixtiyoriy $n \in N$ uchun shunday $x_n \in D(A)$ mavjudki, $\|Ax_n\| \geq n\|x_n\|$ tengsizlik bajariladi. Quyidagi

$$\xi_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$$

ketma-ketlikni qaraymiz. Ko'rinib turibdiki, $\xi_n \rightarrow \theta$, ya'ni

$$\|\xi_n - \theta\| = \left\| \frac{x_n}{n\|x_n\|} \right\| = \frac{1}{n\|x_n\|} \|x_n\| = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Ikkinchi tomondan,

$$\|A\xi_n - A\theta\| = \left\| A\left(\frac{x_n}{n\|x_n\|} \right) \right\| = \left\| \frac{1}{n\|x_n\|} Ax_n \right\| = \frac{1}{n\|x_n\|} \|Ax_n\| \geq 1$$

Bu qarama-qarshilik A operatorning chegaralangan ekanligini ko'rsatadi.

3) $\rightarrow$ 1). A chiziqli chegaralangan operatorning biror nuqtada uzluksizligini ko'rsatamiz.

Ta'rifga ko'ra, shunday $C > 0$ son mavjudki, ixtiyoriy $x \in D(A)$ uchun

$$\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X$$

tengsizlik bajariladi. Faraz qilaylik, $\{x_n\}$ - x ga yaqinlashuvchi ixtiyoriy ketma-ketlik bo'lsin, u holda $Ax_n \rightarrow Ax$ ekanligini ko'rsatamiz:

$$\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \leq C\|x_n - x\| \rightarrow 0,$$

ya'ni $Ax_n \rightarrow Ax$. Δ

12.2-natija. A chiziqli operator chegaralangan bo'lishi uchun uning uzluksiz bo'lishi zarur va yetarli.

12.5-misol. Birlik va nol operatorlarning (12.1 va 12.2-misollar) chegaralangan ekanligini ko'rsatib, ularning normasini hisoblang.

Yechish. Birlik operatorning chegaralangan ekanligini ko'rsatib, normasini hisoblaymiz. Ixtiyoriy $x \in E$ uchun $\|Ix\| = \|x\|$ tenglik o'rinli. Ta'rifga ko'ra, I chegaralangan va uning normasi 1 ga teng. Endi nol operatorning chegaralangan ekanligini ko'rsatib, uning normasini topamiz. Istalgan $x \in E$ uchun $\|\Theta x\| = \|\theta\| = 0$ tenglik o'rinli. Bundan $\|\Theta\| = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Nol operator $L(X, Y)$ chiziqli normalangan fazoning nol elementi bo'ladi.

12.6. 12.3-misolda keltirilgan $A: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ differensial operatorning chegaralanmagan ekanligini ko'rsating.

Yechish. Buning uchun A akslantirishda $D(A) = C^{(1)}[0, 1]$ fazodagi birlik shar $B[\theta, 1]$ ning tasviri chegaralanmagan to'plam ekanligini ko'rsatish yetarli. Birlik shar $B[\theta, 1]$ da yotuvchi $\{f_n\}$ ketma-ketlikni quyidagicha tanlaymiz:

$$f_n(x) = x^n, \quad \|f_n\| = \max_{0 \leq x \leq 1} |x^n| = 1.$$

U holda

$$(Af_n)(x) = n \cdot x^{n-1}, \quad \|Af_n\| = \max_{0 \leq x \leq 1} |n \cdot x^{n-1}| = n.$$

Bundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Af_n\| = \infty$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak, differensial operator chegaralanmagan ekan.

12.7. 12.4-misolda keltirilgan $B: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ integral operatorning chegaralangan ekanligini ko'rsating.

Yechish. 12.4-misolda B operatorning uzluksiz ekanligi ko'rsatilgan edi. 12.2-natijaga ko'ra, u chegaralangan bo'ladi.

12.8. $C[-1,1]$ fazoda x ga ko'paytirish operatorini, ya'ni

$$B: C[-1,1] \rightarrow C[-1,1], \quad (Bf)(x) = x f(x) \quad (12.10)$$

operatorni qaraymiz. Uning chegaralangan ekanligini ko'rsatib, normasini toping.

Yechish. B operatorning chiziqli ekanligi oson tekshiriladi. Uzluksiz funksiyalarning ko'paytmasi uzluksiz ekanligidan B operatorning aniqlanish sohasi $D(B) = C[-1,1]$ ekanligi kelib chiqadi. Endi B operatorning chegaralangan ekanligini ko'rsatamiz.

$$\|Bf\| = \max_{-1 \leq x \leq 1} |x f(x)| \leq \max_{-1 \leq x \leq 1} |x| \cdot \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)| = 1 \cdot \|f\|.$$

Bu tengsizlikdan B operatorning chegaralangan ekanligi va $\|B\| \leq 1$ kelib chiqadi.

Ikkinchi tomondan, agar $f_0(x) = 1$ desak, u holda

$$(Bf_0)(x) = x, \quad \|Bf_0\| = 1, \quad \|B\| \geq \frac{\|Bf_0\|}{\|f_0\|} = 1$$

ni olamiz. Yuqoridagilardan $\|B\| = 1$ kelib chiqadi.

Xuddi shunday ko'rsatish mumkinki, $L_2[-1,1]$ Hilbert fazosida ham (12.10) tenglik bilan aniqlangan B operator chiziqli chegaralangan bo'lib, normasi 1 ga teng bo'ladi.

12.9. Endi ℓ_2 fazoda ko'paytirish operatorini, ya'ni

$$A: \ell_2 \rightarrow \ell_2, \quad (Ax)_n = a_n x_n, \quad \sup_{n \geq 1} |a_n| = a < \infty \quad (12.11)$$

operatorni qaraymiz. Uning chegaralangan ekanligini ko'rsatib, normasini toping.

Yechish. Ixtiyoriy $x \in \ell_2$ uchun $Ax \in \ell_2$ ekanligini ko'rsatamiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(Ax)_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n x_n|^2 \leq \sup_{n \geq 1} |a_n|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = a^2 \|x\|^2. \quad (12.12)$$

Bu munosabatlardan $D(A) = \ell_2$ ekanligini olamiz. Endi uning chiziqli ekanligini ko'rsatamiz. A operatorning aniqlanishiga ko'ra

$$(A(\alpha x + \beta y))_n = a_n (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha a_n x_n + \beta a_n y_n = \alpha (Ax)_n + \beta (Ay)_n.$$

Demak, A chiziqli operator ekan. Uning chegaralangan ekanligi (12.12) tengsizlikdan kelib chiqadi. Bundan tashqari (12.12) tengsizlikdan $\|A\| \leq a$ ekanligi ham kelib chiqadi. A operatorning normasi $\|A\| = a$ ekanligini isbotlaymiz. Buning uchun ℓ_2 fazoda $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormal sistemani ((5.8)ga qarang) olamiz. A operatorning aniqlanishiga ko'ra, ixtiyoriy $n \in N$ uchun $Ae_n = a_n e_n$ tenglik o'rinli. Bundan va (12.7) dan

$$\|A\| \geq \|Ae_n\| = \|a_n e_n\| = |a_n| \cdot \|e_n\| = |a_n|$$

munosabat kelib chiqadi. Bu tengsizlik ixtiyoriy $n \in N$ da o'rinli bo'lgani uchun

$$\|A\| \geq \sup_{n \geq 1} |a_n| = a \quad (12.13)$$

ni olamiz. Demak, $\|A\| = a$ tenglik isbotlandi. Δ

13-ma'ruza.

Xos vektorlari bazis tashkil qiluvchi chiziqli operatorlar

13.1. Chiziqli operatorlarning xos sonlari va xos vektorlari. Xarakteristik ko'phad

Kvadrat matrisani qaraymiz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Bu matrisaning bosh dioganali elementlarini $a_{11} - \lambda$, $a_{22} - \lambda$, ..., $a_{nn} - \lambda$, elementlar bilan almashtirib, boshqa matrisa tuzamiz, λ - ixtiyoriy haqiqiy yoki kompleks son

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

bu matrisaning determinanti λ ga nisbatan n - tartibli algebraik ko'phaddan iborat bo'lib, A matrisaning *xarakteristik ko'phadi* deyiladi, E - birlik matrisa.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = \Delta(\lambda)$$

n -tartibli $\Delta(\lambda) = 0$ algebraik tenglama esa, A matrisaning xarakteristik tenglamasi, uning ildizlari esa A matrisaning *xos sonlari* (qiymatlari) deyiladi. Algebraning asosiy teoremasiga ko'ra xarakteristik tenglama kamida bitta haqiqiy yoki kompleks ildizga ega bo'ladi.

13.1-teorema. O'xshash matrisalar bir xil xarakteristik ko'phadlarga, binobarin bir xil xarakteristik ildizlarga ega.

Haqiqiy R yoki kompleks C sonlar maydonida berilgan A matrisani n -o'chamli R^n fazoda chiziqli operator deb ham qarash mumkin.

13.1-ta'rif. Agar shunday $\lambda \in R(\lambda \in C)$ son va nolmas $x \in R^n$ vektor (element) topilib, $Ax = \lambda x$ tenglik bajarilsa, u holda λ son A (matrisaning) chiziqli operatorning **xos soni**, x esa unga mos **xos vektor** deyiladi.

Ta'rifdan kelib chiqadiki x xos vektor λx vektorga kollinar ekan. A operator xos vektorlarining muhim xossalari keltiramiz :

1. Har bir xos vektorga yagona xos son mos keladi.
2. Agar x_1 va x_2 A operatorning λ xos songa mos xos vektorlari bo'lsa, u holda $x_1 + x_2$ vektor ham shu xos songa mos xos vektor bo'ladi.
3. Agar x , A operatorning λ xos songa mos xos vektori bo'lsa, u holda ixtiyoriy c o'zgarmas uchun cx kollinar vektor ham A operatorning xos vektori bo'ladi.

13.2. Chiziqli operatorning xos vektorlari bazis tashkil qilishining yetarli sharti

13.2-teorema. Agar $e_1, \dots, e_n$ bazisning barcha vektorlari A chiziqli operatorlarning xos vektorlari bo'lsa, u holda faqat shu holda A chiziqli operator bu bazisda diagonal matrisa orqali beriladi.

13.3-teorema. A chiziqli operatorning turli xos qiymatlariga taalluqli bo'lgan $b_1, \dots, b_n$ xos vektorlari chiziqli erki sistemani tashkil etadi.

13.1-misol. Matrisaning xos sonlari va xos vektorlarini toping.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}.$$

Yechish: A matrisaning xarakteristik tenglamasini tuzamiz

$$\det(A - \mu E) = \begin{vmatrix} 7-\mu & 12 & 6 \\ 10 & -19-\mu & 10 \\ 12 & -24 & 13-\mu \end{vmatrix} = 0.$$

Determinantni hisoblab, quyidagi tenglamani hosil qilamiz $(1 - \mu)(\mu^2 - 1) = 0$ bu tenglamani yechib, matrisaning xos sonlarini topamiz: $\mu_{1,2} = 1, \mu_3 = -1$; Endi A matrisa(operator)ning bu xos sonlarga mos xos vektorlarni topamiz.

1. $\mu_{1,2} = 1$ ikki karrali xos songa mos xos vektorni topamiz, buning uchun $(A - \mu E)X = 0$ birjinsli tenglamaar sistemasini $\mu=1$ deb yechib,

$$\begin{cases} 6x_1 - 12x_2 + 6x_3 = 0 \\ 10x_1 - 20x_2 + 10x_3 = 0 \\ 12x_1 - 24x_2 + 12x_3 = 0 \end{cases}$$

xos vektorning koordinatalari uchun quyidagi bog'anishni topamiz

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

bundan x_2 va x_3 koordinatalarini erkin o'zgarmaslarni

$x_2 = C_1, x_3 = C_2$ deb olsak, xos vektorning umumiy ko'rinishi quyidagicha bo'adi.

$$X = \begin{pmatrix} 2x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bunda C_1 va C_2 lar ixtiyoriy o'zgarmas sonlar, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ va $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ birjinsli sistemaning fundamental yechimlar sistemasidan iborat.

2. $\mu_3 = -1$ xos songa mos xos vektorni topamiz. $(A - \mu E)X = 0$ da $\mu = 1$ deb quyidagi birjinsli sistemani hosil qilamiz

$$\begin{cases} 8x_1 - 12x_2 + 6x_3 = 0 \\ 10x_1 - 18x_2 + 10x_3 = 0 \\ 12x_1 - 24x_2 + 14x_3 = 0 \end{cases}$$

Bu sistemani yechib, xos vektorning koordinatalari uchun quyidagi bog'lanishlarni olamiz

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = -\frac{5}{6}x_3 \end{cases}$$

x_3 erkli o'zgarmasni $6C$ deb tanlasak, xos vektorning umumiy ko'rinishi quyidagicha bo'ladi

$$Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

bunda, C ixtiyoriy o'zgarmas son.

14- ma'ruza.

Kvadratik forma va uni kanonik ko'rinishga keltirish

14.1. Kvadratik formaning ta'rifi. Kvadratik formalar nazariyasining manbalari analitik geometriyada, chunonchi ikkinchi tartibli chiziqlar (va sirtlar) nazariyasida yotadi. Ma'lumki, tekislikdagi ikkinchi tartibli markaziy egri chiziqning tenglamasi to'g'ri burchakli koordinatalar boshini shu egri chiziq markaziga ko'chirgandan so'ng quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = D. \quad (14.1)$$

Yana, ma'lumki, koordinata o'qlarini biror α burchakka shunday burish mumkinki, ya'ni x, y koordinatalardan x', y' koordinatalarga shunday o'tish mumkinki,

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases} \quad (14.2)$$

bo'ladi, bu yangi koordinatalarda egri chiziqning tenglamasi ushbu "kanonik" ko'rinishga ega bo'ladi:

$$A'x'^2 + C'y'^2 = D; \quad (14.3)$$

demak, bu tenglamada noma'lumlar ko'paytmasi $x' \cdot y'$ ning oldidagi koeffitsiyent nolga teng. Koordinatalarni almashtirish (14.2) ni ravshanlik, noma'lumlarni chiziqli almashtirish deb, shu bilan birga xosmas almashtirish deb talqin etish mumkin, chunki uning koeffitsiyentlaridan tuzilgan determinant birga teng. Bu almashtirish (14.1) tenglamaning chap tomoniga tatbik qiliyadi va shuning uchun (14.1) tenglamaning chap tomoni (14.2) xosmas chiziqli almashtirish orqali (14.3) tenglamaning chap tomoniga keltiriladi deb aytish mumkin.

Turli-tuman tatbiqlar shunga o'xshash nazariyani noma'lumlar soni ikkita emas, balki istalgan n ga teng bo'lgan, koeffitsiyentlar esa yo haqiqiy, yoki istalgan kompleks sonlar bo'lgan hol uchun ham tuzishni taqozo etdi.

(14.1) tenglamaning chap tomonida turgan ifodani umumlashtirib, quyidagi tushunchaga kelamiz.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisa kvadratik formaning *matrisasi* deyiladi.

Dastlab quyidagicha belgilashni kiritamiz: agar kvadrat, yoki umuman, to'g'ri burchakli $A = (a_{ij})$ matrisa berilgan bo'lsa, u holda $A' = (a_{ji})$ orqali $A = (a_{ij})$ matrisani transponirlash natijasida hosil qilingan matrisa belgilaymiz.

(14.5) kvadratik forma matrisa ko'rinishda ham yozish mumkin:

$$f(x) = X'AX, \quad A' = A,$$

bunda noma'lumlardan tuzilgan ustunni $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ orqali belgilaymiz, bu n – ta satr

va bitta ustundan iborat matrisadir, X matrisani transponirlab, bitta satrdan iborat $X' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ matrisani hosil qilamiz. Xususan, $i = j$ bo'lganda $a_{ii}x_i^2$ had hosil bo'ladi.

14.2-ta'rif. Kvadratik forma $A = (a_{ij})$ matrisasining rangi r esa, bu kvadratik formaning *rangi* deyiladi.

14.1-teorema. n – tartibli kvadratik $A = (a_{ij})$ matrisalar ko'payitma-sining rangi shu shu matrisalardan har birining rangidan katta emas.

Xususan, agar $r = n$, ya'ni matrisa xosmas bo'lsa, $f(x)$ kvadratik forma ham *xosmas* deyiladi. (14.4) tenglikka ko'ra, $A = (a_{ij})$ matrisaning bosh diagonalga nisbatan simmetrik bo'lgan elementlari bir-biriga teng, ya'ni $A = (a_{ij})$ – *simmetrik* matrisa. Aksincha, n – tartibli istalgan A simmetrik matrisa uchun koeffisiyentlari $A = (a_{ij})$ matrisa elementlaridan iborat bo'lgan, n ta noma'lumning to'la aniqlangan (tayin bir) (14.5) kvadratik formasini ko'rsatish mumkin.

(14.5) kvadratik formani to'g'ri burchakli matrisalarni 1-ma'ruzada kiritilgan ko'paytirishdan foydalanib, boshqacha ko'rinishda yozish ham mumkin.

14.2-teorema. Agar $A = (a_{ij})$ va $B = (b_{ij})$ matrisalarni ko'paytirish mumkin bo'lsa, u holda ko'paytmani transponirlash natijasida olingan matrisa ko'paytuvchi matrisalarni transponirlashdan hosil qilingan matrisalarning teskari tartibda olingan ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$(AB)' = B' A' \quad (14.6)$$

tenglik urinli bo'ladi.

Isboti. Agar AB ko'paytma aniqlangan bo'lsa, osongina tekshirib ko'rish mumkinki, $B'A'$ ko'paytma ham aniqlangan: B' matrisaning ustunlari soni A' matrisaning satrlari soniga teng. $(AB)'$ matrisaning i -satri va j -ustunida turgan elementi AB matrisada j -satr va i -ustunda joylashgan. Shuning uchun u A matrisaning j -satri va V matrisa i -ustunidagi mos elementlar ko'paytmalarining yig'indisiga, ya'ni A' matrisaning j -ustuni va B' matrisaning i -satri mos elementlari ko'paytmalarining yig'indisiga teng. Shu bilan (14.6) tenglik isbot bo'ldi.

Natija. $A = (a_{ij})$ matrisa o'zining transponirlangan matrisasiga teng bo'lganda va faqat shundagina, ya'ni $A = A'$ bo'lgandagina simmetrik bo'ladi.

14.2. Kvadratik formaning kanonik ko'rinishi. Kvadratik formani kanonik ko'rinishga keltirish

Bu bandda asosiy masala $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kvadratik formaga xosmas chiziqli almashtirishni tatbiq etib, bu formani

$$F = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \dots + \lambda_n z_n^2 \quad (14.7)$$

ko'rinishga keltirishdan iborat, bunda $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ koeffitsiyentlar P maydon elementlaridan iborat, $z_1, z_2, \dots, z_n$ esa, yangi o'zgaruvchilar.

(14.7) ga kvadratik formaning *kanonik ko'rinishi* deyiladi, bunda $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ koeffitsiyentlardan ba'zilari nolga teng bo'lishi mumkin. Agar $\lambda_i \neq 0, i = \overline{1, n}$ bo'lsa, $\lambda_i z_i^2, i = \overline{1, n}$ ni *noldan farqli kvadratik forma* deyiladi. Agar $\lambda_i = 0, i = \overline{1, n}$ bo'lsa, u holda kvadratik forma *nolga teng kvadrat forma* deyiladi.

14.3-teorema. P maydondagi har bir $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kvadratik formani shu maydondagi xosmas chiziqli almashtirish yordami bilan kanonik shakilga keltirish mumkin.

Isboti. (14.5) kvadratik formani olib, ikki holni tekshiramiz:

1. $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kvadratik formaning $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ koeffitsiyentlaridan aqalli bittasi nolga teng emas. Masalan, $a_{11} \neq 0$. Ushbu $\frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2$ ifoda- kvadratik formadan iborat bo'lib, uning x_1 o'zgaruvchili hadlari

$$f(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + g_1(x)$$

kvadratik formaning xuddi shunday hadlariga teng. Shu sababli,

$$f(x) - \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2 = g_2(x)$$

ayirmaga x_1 kirmaydi va bu ayirma $x_2, x_3, \dots, x_n$ o'zgaruvchilarga nisbatan kvadratik formani ifodalaydi.

Shunday qilib, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kvadratik forma

$$f(x) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2 + g_2(x) \quad (14.8)$$

shakilda yoziladi. Quyidagi chiziqli almashtirishni olamiz:

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, y_2 = x_2, \dots, y_n = x_n. \quad (14.9)$$

Bu almashtirish — xosmasdir, chunki uning determinanti noldan farqli

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_{11} \neq 0.$$

(14.9) almashtirishga teskari almashtirish

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}} y_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}} y_2 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} y_n, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n \quad (14.10)$$

ko'rinishga ega bo'lib, u ham xosmasdir. (14.10) almashtirishni S bilan belgilab, (14.8) kvadratik formaga tatbiq etsak,

$$F(y_1, \dots, y_n) = a_{11}^{-1} y_1^2 + \varphi \quad (14.11)$$

hosil bo'ladi, bunda φ ni $x_2, x_3, \dots, x_n$ o'rniga mos ravishda $y_2, y_3, \dots, y_n$ ni qo'yish orqali g_2 dan topamiz.

Shuni takidlab o'taylikki, (14.11)ni hosil qilish uchun, (14.8) ga (14.9) qo'yish qulayroq.

2. $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kvadratik formaning $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ koeffitsiyentlari nolga teng. Lekin, qolgan koeffitsiyentlaridan eng kamida bittasi nolga teng bo'lmasligi kerak. Masalan, $a_{12} \neq 0$ deylik. Ushbu

$$x_1 = y_1 - y_2, x_2 = y_1 + y_2, x_k = y_k, k = \overline{3, n}$$

chiziqli almashtirishni T bilan belgilaymiz. Bu chiziqli almashtirish xosmasdir, chunki unga mos matrisaning determinanti noldan farqli, ya'ni

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

T chiziqli almashtirishni $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kvadratik formaga tatbiq etsak, $2a_{12}x_1x_2$ had $2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 2a_{12}y_1^2 - 2a_{12}y_2^2$ ko'rinish oladi.

Demak, kvadratik formaning yangi $\Phi(y_1, \dots, y_n)$ shakliga birdaniga ikkita o'zgaruvchining kvadratlari paydo bo'ladi.

Shunday qilib, bu hol bitta T xosmas chiziqli almashtirish yordami bilan birinchi holga keltiriladi.

Endi, birinchi holdagi mulohazani $\Phi(y_1, \dots, y_n)$ kvadratik formaga nisbatan takrorlab, bu formani (16) ga o'xshash

$$\Psi(z_1, \dots, z_n) = b_{11}^{-1}z_1^2 + \psi \quad (14.12)$$

shaklga keltiramiz, bunda $b_{11} = 2a_{12}$.

Ikkala holda ham φ va ψ qo'shiluvchilar $n-1$ ta $z_2, z_3, \dots, z_n$ o'zgaruvchilarga nisbatan kvadratik formani bildiradi, shu sababli, farazimizga muvofiq, bu forma uchun teorema to'g'ridir, ya'ni $z_2, z_3, \dots, z_n$ o'zgaruvchilarni xosmas chiziqli almashtirsak, φ va ψ kvadratik forma kanonik shaklni oladi. φ va ψ ga tatbiq etilgan chiziqli almashtirish

$$z_2 = c_{22}u_2 + c_{23}u_3 + \dots + c_{2n}u_n,$$

$$z_3 = c_{32}u_2 + c_{33}u_3 + \dots + c_{3n}u_n,$$

.....

$$z_n = c_{n2}u_2 + c_{n3}u_3 + \dots + c_{nn}u_n$$

ko'rinishga ega desak, ushbu U maxsusmas:

$$z_2 = u_1 + 0 \cdot u_2 + \dots + 0 \cdot u_n,$$

$$z_3 = 0 \cdot u_1 + a_{22}u_2 + \dots + c_{2n}u_n,$$

.....

$$z_n = 0 \cdot u_1 + c_{n2}u_2 + \dots + c_{nn}u_n$$

chiziqli almashtirish yordami bilan (14.11) va (14.12) kvadratik formani kanonik shaklga keltirgan bo'lamiz.

Demak, ikkita S va U yoki uchta T, S, U xosmas chiziqli almashtirishlarni tatbiq etib, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kvadratik formani kanonik shaklga keltiramiz.

Agar $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kvadratik formaning matrisasini A bilan belgilab xulosani ikki yoki uch marta takrorlasak, kvadratik formaning shakli $(CD)'ACD = D'C'ACD$ yoki $(BCD)'ABCD = B'D'C'ABCD$ matrisaga ega bo'ladi, bunda B, C, D bilan mos ravishda T, S, U chiziqli almashtirishlarning matrisalarini belgiladik. S va U yoki uchta T, S, U chiziqli almashtirishlar o'rniga bitta $SU = V$ yoki $TSU = V$ xosmas chiziqli almashtirishni olishimiz mumkin.

Shunday qilib, P maydondagi bitta V xosmas chiziqli almashtirish yordami bilan, usha maydonda kvadratik forma kanonik shaklga keltiriladi. Teorema isbotlandi.

Eslatma. Konkret misol yechganmizda, berilgan kvadratik forma kanonik shaklga keltirguncha 1 va 2 mulohazani bir necha marta takrorlash lozim bo'lishi mumkin.

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini taqribiy yechish usullari

[illegible]

125

(15.2)

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

Faraz qilamiz $a_{ii} \neq 0$ ($i=1,2,\dots,n$) diognal elementlari noldan farqli bo'lsin.

(15.1) sistemaning birinchi tenglamasini x_1 ga nisbatan ikkinchisini x_2 ga nisbatan, uchinchisini x_3 ga nisbatan va h.k yechib qo'yidagini hosil qilamiz:

(15.3)

buyerdagi $\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$, $\alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$, $i \neq j$ bo'lganda, $\alpha_{ij} = 0$, agar $i = j$ bo'lganda

qo'yidagi matrisani kiritamiz

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \quad \bar{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

va (15.3) quyidagicha yozamiz:

(15.4)

(15.4) ketma-ket yaqinlashish metodi bilan yechamiz. Nolinchi yaqinlashish deb ozod hadlar ustunini olamiz: $\bar{x}^{(0)} = \bar{\beta}$. Buni (15.4) ga qo'yib 1 – yaqinlashishni topamiz :

$$\begin{aligned}
\bar{x}^{(1)} &= \bar{\beta} + \alpha \bar{x}^{(0)} \\
\bar{x}^{(2)} &= \bar{\beta} + \alpha \bar{x}^{(1)} \\
&\text{-----} \\
\bar{x}^{(k+1)} &= \bar{\beta} + \alpha \bar{x}^{(k)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)
\end{aligned}
\tag{15.5}$$

Agar ketma-ket yaqinlashishlar $\bar{x}^{(0)}, \bar{x}^{(1)}, \dots, \bar{x}^{(k)} \dots$ limitga ega bo'lsa, ya'ni $\bar{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}^{(k)}$. Bu limit (15.3) sistemaning yechimi bo'ladi.

(15.5) formula ketma-ket *yaqinlashish usuli* yoki *iterasiya usuli* deb aytiladi.

Haqiqattan ham (15.5) dan limitga o'tib hosil qilamiz:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}^{(k+1)} = \bar{\beta} + \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}^{(k)}$$

yoki

$$\bar{x} = \bar{\beta} + \alpha \bar{x}$$

ya'ni limit vektori $\bar{x}$ (15.4), ya'ni (15.1) ning yechimi bo'ladi.

Eslatma. Iterasiya metodini qo'llaganda boshlang'ich yaqinlashish sifatida ozod hadlar usulini olish shart emas, chunki iterasiya jarayonining yaqinlashishi α matrisaga bog'liq bo'ladi.

Boshlang'ich yaqinlashish sifatida taqribiy sonlarni (ildizga yaqinini) olish maqsadga muvofiqdir.

Teorema. Agar (15.3) keltirilgan sistema uchun quyidagi

$$1) \sum_{j=1}^n |a_{ij}| < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad 2) \sum_{i=1}^n |a_{ij}| < 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

ikki shartdan hyech bo'lmaganda bittasi bajarilsa (15.5) iterasion jarayon boshlang'ich shartga bog'liq bo'lmasdan yagona ildizga yaqinlashadi.

Натижа. (15.1) система учун

$$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{15.6}$$

тенгсизликлар бажарилса, яъни (15.1) системанинг ҳар бир тенгламаси учун бош диагоналдаги коэффициентлар модули қолган бошқа барча коэффициентлар (озод ҳадларни ҳисобга олмаганда) модуллари йиғиндисидан катта бўлса, итерация жараёни яқинлашувчи бўлади.

15.2. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini taqribiy yechishning Zeydel usuli

Zeydel metodi chiziqli bir qadamli birinchi tartibli iterasion metoddur.

Bu metod oddiy iterasion metodidan shu bilan farq qiladiki, dastlabki yaqinlashish $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ ga ko'ra $x_1^{(1)}$ yaqinlashish topiladi.

Bundan keyin $(x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ ga ko'ra, $x_2^{(1)}$ topiladi va hokazo. Bunga $x_i^{(1)}$ lar aniqlangandan keyin $x_i^{(2)}, x_i^{(3)}$ lar topiladi.

Zeydel metodi iterasiya metodining o'zgartirilgan ko'rinishidagi formasidir. Bu metodning asosiy ideasi quyidagidan iborat.

x_i -ning $(k+1)$ - yaqinlashishini topish uchun $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$ lar uchun topilgan $(k+1)$ - yaqinlashishdan foydalaniladi.

Faraz qilamiz keltirilgan chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$x_i = \beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Ildizlarning ixtiyoriy dastlabki yaqinlashishini olamiz:

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$$

Bu yaqinlashishlar albatta haqiqiy ildizni biroz bo'lsa ham aks etirishi kerak.

Bundan keyin $x_i^{(k)}$ -ildizlarni k - yaqinlashishini ma'lum deb $(k+1)$ - yaqinlashishini quyidagi formula orqali topamiz.

Aniqroq aytganda, hisoblashlar quyidagi sxema bo'yicha olib boriladi:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1}{a_{11}} - \sum_{j=2}^n \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j^{(k)};$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(k+1)} - \sum_{j=3}^n \frac{a_{2j}}{a_{22}} x_j^{(k)}$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)},$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{b_n}{a_{nn}} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_{nj}}{a_{nn}} x_j^{(k+1)}.$$

Teorema. Zeydel metodini yaqinlashishi uchun tenglamani barcha ildizlari bo'yicha birdan kichik bo'lishi zarur va kifoyadir.

Ushbu

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}\lambda & a_{22}\lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\lambda & a_{n2}\lambda & a_{n3}\lambda & \dots & a_{nn}\lambda \end{vmatrix} = 0$$

tenglamaning barcha ildizlari modullari bo'yicha birdan kichik bo'lishi zarur va kifoyadir.

Zeydel metodi iterasiya metodiga qaraganda yaxshi natija beradi va tezrok yaqinlashadi. Ayrim hollarda iterasiya metodi o'zoqlashsa ham Zeydel metodi yaqinlashadi.

1-15- ma'ruzalar bo'yicha o'z-o'zini tekshirish savollari

1. Matrisa deb nimaga aytiladi?
2. Matrisa bilan determinant o'rtasidagi farq qanday?
3. Matrisalar ustida qanday chiziqli amallarni bajarish mumkin?
4. Matrisalar qanday ko'paytiriladi?
5. Elementar almashtirishlar qanday bajariladi?
6. Transponirlangan matrisa deb nimaga aytiladi?
7. Teskari matrisa qanday topiladi?
8. Maxsus matrisa deb nimaga aytiladi?
9. Maxsusmas matrisa deb nimaga aytiladi?
10. Teskari matrisa qanday xossalarga ega?
11. Simmetrik va antisimmetrik matrisalarning ta'riflarini ayting.
12. Determinantlarning asosiy xossalarini ayting.
13. Minor va algebraik to'ldiruvchi deb nimaga aytiladi?
14. Determinantni satr (ustun) elementlari bo'yicha yoyishni misol orqali tushuntiring.
15. Kramer qoidasini aytib bering.
16. Noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish usuli, ya'ni Gauss usulining ma'nosini aytib bering.
17. Yuqori tartibli determinantlarni hisoblash usullarini ayting va misollar keltiring.
18. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning matrisa usulini ayting.
19. Kroniker- Kapelli teoremasini ayting.
20. Birjinsli chiziqli tenglamalar sistemasini yechish haqida ayting.
21. Vektorlarning skalyar, vektor va aralash ko'paytmalari deb nimaga aytiladi?
22. Arifmetik vektor fazo va unga misollar.
23. Chiziqli fazo. Yevklid fazosi.
24. Chiziqli operatorlar va ularning xossalarini ayting.
25. Xos vektorlari bazis tashkil qiluvchi chiziqli operatorlar.
26. Kvadratik forma va uni kanonik ko'rinishga keltirish.
27. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini taqribiy yechish usullarini ayting.

Chiziqli algebra bo'yicha nazariy materiallarni mustahkamlash uchun topshiriqlar

- 1.1. Matrisa tushunchasi ([7], 1-q., 68-70 betlar; [14], 195-197 betlar; [4] [6]).
1. 2. Matrisalar ustida chiziqli amallar([1], [6], [10]; [14], 197-199 betlar).
- 1.3. Matrisalarni ko'paytirish([1], [6], [10]; [3], 199-200 betlar).
1. 4. Transponirlangan matrisa([1], [6], [10]; [14], 202-204 betlar).
- 1.5. Elementar almashtirishlar ([1], [6], [10] [14], 195-197 betlar).
- 1.6. Ikkinchi, uchinchi va yuqori tartibli determinantlarning ta'riflari([7], 1-q., 28-36 betlar; [1], [6], [10]; [14], 15-20 va 28-30 betlar).
- 1.7. Determinantlarning asosiy xossalari([7], 1-q., 36-46 betlar; [14], 15-20 betlar).
- 1.8. Minorlar va algebraik to'ldiruvchilar([7], 1-q., 46-8 betlar; [14], 20-22 betlar).
- 1.9. Laplas teoremasi([7], 1-q., 48-52 betlar; ([1], [6], [10])).
- 1.10. Determinantni satr yoki ustun elementlari bo'yicha yoyish([7], 1-q., 52-57 betlar; [1], [6], [10])).
- 1.11. Teskari matrisa haqida tushuncha ([1], [6], [10] [14], 204-208 betlar).
- 1.12. Matrisa rangi([7], 1-q., 70-76 betlar; [14], 212-218 betlar).
- 1.13. Chiziqli tenglamalar sistemasi. Kroneker-Kapelli teoremasi ([1], [6], [10]; [14], 212-218 betlar).
- 1.14. Kramer qoidasi([7], 1-q., 83-87 betlar; [14], 209-212 betlar).
- 1.15. Gauss usuli([7], 1-q., 87-90 betlar; [14], 221-226 betlar).
- 1.16. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning matrisa usuli([4], 1-q., 68-70 betlar; [14], 209-211 betlar).
- 1.17. Birjinsli chiziqli tenglamalar sistemasini yechish haqida ayting ([1], [6], [10]; [3], 199-200 betlar).
- 1.18. Vektorlarning skalyar, vektor va aralash ko'paytmalari ([1], [6], [10]; [3], 199-200 betlar).
- 1.19. Arifmetik vektor fazo va unga misollar([2]; [1], 62-65 betlar).
- 1.20. Chiziqli fazo. Yevklid fazosi([1], [6], [10]; [1], 196-242 betlar)..
- 1.21. Chiziqli operatorlar va ularning xossalarini ayting([1], [6], [10]; [1], 219-224 betlar)..

1.22. Xos vektorlari bazis tashkil qiluvchi chiziqli operatorlar([1], [6], [10]; [1], 219-224 betlar).

1.23. Kvadratik forma va uni kanonik ko'rinishga keltirish([1], [6], [10]; [3], 199-200 betlar).

1.24. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini taqribiy yechish usullarini ayting([1], [6], [10]; [3], 199-200 betlar)..

1. Kurosh A.G. Oliy algebra kursi. T.O'qituvchi. 1976

2. Narzullayev U.X.

3. Isroilov M.

1-, 2-amaliy mashg'ulot.

Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar va ularni hisoblash. O'rin almashtirishlar. n – tartibli determinantning ta'rifi. Determinantning asosiy xossalari. Minor va algebraik to'ldiruvchi tushunchalari. Laplas teoremasi.

1-misol. Determinantni hisoblang

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}.$$

Yechilishi.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 - 4 \cdot 6 = 16 - 24 = -8 \blacksquare$$

2-misol. Quyidagi $d = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ determinantni hisoblang.

Yechilishi. 1-usul. Uchinch tartibli determinantni hisoblash uchun uchburchak qoudasidan foydalanamiz:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \cdot 5 + 1 \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 5 - 3 \cdot 0 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 \cdot 0 = -6.$$

2-usul. Uchinch tartibli determinantning ikkinchi ustun elementlari bitta elementdan tashqari barchasi nol. Qulaylik uchun ikkinchi ustun bo'yicha yoyishdan foydalanib hisoblaymiz

$$d = 0 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -6. \blacksquare$$

3-misol. Determinant xossalaridan satr yoki ustun bo'yicha yoyishdan foydalanib, quyidagi ayniyatlarni isbotlang:

$$\begin{vmatrix} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} & \sin \frac{\alpha + \beta}{2} & \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \cos \frac{\beta - \gamma}{2} & \sin \frac{\beta + \gamma}{2} & \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \\ \cos \frac{\gamma - \alpha}{2} & \sin \frac{\gamma + \alpha}{2} & \cos \frac{\gamma + \alpha}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [\sin(\beta - \alpha) + \sin(\gamma - \beta) + \sin(\alpha - \gamma)].$$

Yechilishi. Determinantni birinchi ustun bo'yicha yoysak, quyidagilar hosil bo'ladi:

$$\begin{aligned} & \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \begin{vmatrix} \sin \frac{\beta + \gamma}{2} & \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \\ \sin \frac{\gamma + \alpha}{2} & \cos \frac{\gamma + \alpha}{2} \end{vmatrix} - \cos \frac{\beta - \gamma}{2} \begin{vmatrix} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} & \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \sin \frac{\gamma + \alpha}{2} & \cos \frac{\gamma + \alpha}{2} \end{vmatrix} + \\ & + \cos \frac{\gamma - \alpha}{2} \begin{vmatrix} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} & \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \sin \frac{\beta + \gamma}{2} & \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \left(\sin \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\gamma + \alpha}{2} - \sin \frac{\gamma + \alpha}{2} \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \right) - \\
&- \cos \frac{\beta - \gamma}{2} \left(\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\gamma + \alpha}{2} - \sin \frac{\gamma + \alpha}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) + \\
&= \cos \frac{\gamma - \alpha}{2} \left(\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\beta + \gamma}{2} - \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = \\
&= \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2} - \cos \frac{\beta - \gamma}{2} \sin \frac{\beta - \gamma}{2} + \cos \frac{\gamma - \alpha}{2} \sin \frac{\alpha - \gamma}{2} = \\
&= \frac{1}{2} [\sin(\beta - \alpha) + \sin(\gamma - \beta) + \sin(\alpha - \gamma)]. \blacksquare
\end{aligned}$$

4-misol. Ushbu $d = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -5 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ determinantni xossalaridan foydalanib

hisoblang.

Yechilishi. Determinantda quyidagi almashtirishlarni bajaramiz:

- a) 1- ustun elementlarini 2- ustunning mos elementlariga qo'shamiz;
- b) (-2) ga ko'paytirilgan 1-ustun elementlarini 3-ustunning mos elementlariga qo'shamiz;
- c) (-1) ga ko'paytirilgan 1-ustun elementlarini 4-ustunning mos elementlariga qo'shamiz.

Natijada determinantning qiymati o'zgarmaydi:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -5 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -7 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ -5 & -5 & 11 & 3 \end{vmatrix}.$$

Birinchi satrda uchta nol bo'lganligi sababli bu determinantni 1-satr elementlari bo'yicha yoyish qulaydir. Shunday qilib,

$$d = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -7 & -3 \\ 3 & -1 & -1 \\ -5 & 11 & 3 \end{vmatrix} = -21 - 99 - 35 + 15 + 77 + 63 = 0. \blacksquare$$

5-misol. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ determinantni hisoblang.

Yechilishi. Har bir keyingi ustundan 1-ustunni ayiramiz.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8 \blacksquare.$$

6-misol. Laplas teoremasidan foydalanib determinantni hisoblang:

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}.$$

Yechilishi. Ikkinchi va beshinchi satrlardagi ikkinchi tartibli o'nta minorlardan faqat uchtasi noldan farqli. Shu satrlar bo'yicha yoyamiz:

$$\begin{aligned} d &= (-1)^{10} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{12} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{18} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot 49 + 1 \cdot (-100) + 2(-1) = -4. \blacksquare \end{aligned}$$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Determinantlarni hisoblang:

$$a) \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}; \quad b) \begin{vmatrix} ab & ac \\ bd & cd \end{vmatrix}; \quad c) \begin{vmatrix} \sin \alpha & \sin \beta \\ \cos \alpha & \cos \beta \end{vmatrix}; \quad d) \begin{vmatrix} \log_b a & 1 \\ 1 & \log_a b \end{vmatrix};$$

$$e) \begin{vmatrix} \cos \alpha + i \sin \alpha & 1 \\ 1 & \cos \alpha - i \sin \alpha \end{vmatrix}; \quad f) \begin{vmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{vmatrix}.$$

2. Determinantlarni hisoblang:

$$a) \begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix}; \quad b) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}; \quad c) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix};$$

$$d) \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}; \quad e) \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}; \quad f) \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & 1 \\ \sin \beta & \cos \beta & 1 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 1 \end{vmatrix}; \quad g) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix};$$

3. Determinantlarni yoymasdan turib, quyidagi ayniyatlarni isbotlang:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b);$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+ac+bc)(b-a)(c-a)(c-b);$$

$$c) \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}; \quad d) \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

$$1. a) \begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix} \text{ determinantning } x^4 \text{ va } x^3 \text{ ni saqlovchi hadlarni toping.}$$

$$b) \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 3 & 2 \\ 3 & 1 & x & 2 \\ 5 & 3 & 1 & x \end{vmatrix}, \text{ determinantning } x^4, x^3 \text{ va } x^2 \text{ ni saqlovchi hadlarni toping.}$$

$$5. a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 2 & 1 & b \\ 3 & 2 & 1 & c \\ 1 & 2 & 3 & d \end{vmatrix} \text{ determinantni 4-ustun elementlari bo'yicha yoying;}$$

$$b) \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \text{ determinantni 1-ustun elementlari bo'yicha yoying;}$$

$$c) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ a & b & c & d \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \text{ determinantni 3-satr elementlari bo'yicha yoying.}$$

6. Determinantni uni yoymasdan turib hisoblang:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix}.$$

7. Determinantning xossalaridan foydalanib (satr va ustun bo'yicha yoyishni ham hisobga olganda) ayniyatlarni isbotlang:

$$a) \begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3;$$

$$b) \begin{vmatrix} \frac{1}{a+x} & \frac{1}{a+y} & 1 \\ \frac{1}{b+x} & \frac{1}{b+y} & 1 \\ \frac{1}{c+x} & \frac{1}{c+y} & 1 \end{vmatrix} = \frac{(a-b)(a-c)(b-c)(x-y)}{(a+x)(b+x)(c+x)(a+y)(b+y)(c+y)};$$

8. Determinantlarni hisoblang:

$$a) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -5 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}; \quad b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad c) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

9. Laplas teoremasidan foydalanib, quyidagi determinantlarni hisoblang:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 5 & 62 & -79 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 183 & 201 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix};$$

10. Quyidagi determinantlarni avval almashtirishlar bajarib soddalashtiring, so'ng Laplas teoremasidan foydalanib hisoblang:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -8 & 5 & 9 & 5 \\ -11 & 7 & 7 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 9 & 7 & 9 & 7 \\ 8 & 6 & 8 & 6 \\ -9 & -7 & 9 & 7 \\ -8 & -6 & 8 & 6 \end{vmatrix}; \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 6 & 8 & -9 & -12 \\ 4 & 6 & -6 & -9 \\ -3 & -4 & 6 & 8 \\ -2 & -3 & 4 & 6 \end{vmatrix};$$

Mustaqil yechish uchun misollarning javoblari

1. a) -1; b) 0; s) $\sin(\alpha - \beta)$; d) 0; e) 0; f) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. **2.** a) -50; b) 16; s) 0; v) $3abc - a^3 - b^3 - c^3$; e) 0; f) $\sin(\beta - \delta) + \sin(\delta - \alpha) + \sin(\alpha - \beta)$; g) -2; $\sqrt{3}$. **4.** a) $10x^4, -2x^2, -3x^3$; b) $x^4, -x^3, -32x^2$; **5.** a) $4a - c - d$; b) $2a + b - c - d$; c) $-5a - 5b - 5c - 5d$. **6.** 0. **8.** a) -252; b) -3; c) -3. **9.** a) 216; b) 1; c) -106. **10.** a) -12; b) 16; c) 1.

3-,4-amaliy mashg'ulot.

Matrisalar ustida amallar. Teskari matrisa

1-misol.

$$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ va } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ berilgan bo'lsa, u holda}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 3-2 \\ 4+3 & 5+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \text{ bo'ladi. } \blacksquare$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ va } \alpha = 2 \text{ berilgan bo'lsa, u holda}$$

$$A\alpha = \alpha A = 2 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 3 \cdot 2 \\ 4 \cdot 2 & 5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

2-misol. Quyidagi

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ va } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

to'g'ri burchakli matritsalar ko'paytmasini toping.

Yechilishi. Ta'rifga ko'ra,

$$C = AB = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) + 8 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + (-4) \cdot (-3) + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot (-1) + (-4) \cdot (-3) + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 7 & 14 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

3-misol. Ushbu $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ matritsa uchun teskari matritsani toping.

Yechilishi. Buning uchun avval $\det A$ determinantni tuzamiz va uni hisoblaymiz.

$$D = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Demak, A maxsusmas matritsa. Endi qo'shma matritsani tuzamiz. Buning uchun A matritsaning satr elementlarining algebraik to'ldiruvchilarini topamiz va ularni mos ravishda ustunlarga joylashtiramiz:

$$A_{11} = 4 \cdot 6 - 5 \cdot 5 = -1, \quad A_{12} = -(2 \cdot 6 - 3 \cdot 5) = 3,$$

$$A_{21} = -(2 \cdot 6 - 5 \cdot 3) = 3, \quad A_{22} = 1 \cdot 6 - 3 \cdot 3 = -3,$$

$$A_{31} = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = -2, \quad A_{32} = -(1 \cdot 5 - 3 \cdot 2) = 1,$$

$$A_{13} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = -2$$

$$A_{23} = -(5 \cdot 1 - 3 \cdot 2) = 1$$

$$A_{33} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$$

Shunday qilib,

$$\tilde{A}^T = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nihoyat, $\tilde{A}^T$ ning barcha elementlarini $\Delta = -1$ ga bo'lamiz, u holda teskari matritsa ushbu ko'rinishga ega bo'ladi:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tekshirish ko'rsatadiki, $A \cdot A^{-1} = E$. Haqiqatan,

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 9 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2(-3) + 3 \cdot 2 & 1(-3) + 2 \cdot 3 + 3(-1) & 1 \cdot 2 + 2(-1) + 3 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 + 4(-3) + 5 \cdot 2 & 2(-3) + 4 \cdot 3 + 5(-1) & 2 \cdot 2 + 4(-1) + 5 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 5(-3) + 6 \cdot 2 & 3(-3) + 5 \cdot 3 + 6(-1) & 3 \cdot 2 + 5(-1) + 6 \cdot 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \blacksquare \end{aligned}$$

4-misol. Satrlarning elementar almashtirishlari yordamida teskari matritsa A^{-1} ni toping

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Yechilishi. Quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \\ &\xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -13 & -3 & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - 2R_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \xrightarrow{R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 - 4R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 3 & 11 & -4 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 + 7R_1} \\
& \xrightarrow{R_2 + 7R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -3 & 11 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & -18 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & 29 & -11 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & -18 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)R_2} \\
& \xrightarrow{(-1)R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & 29 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 18 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Bunda R_i matritsaning i -satri.

Shunday qilib, teskari matritsa quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Matritsalarining chiziqli kombinatsiyasi topilsin:

a) $3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$ b) $2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix};$

c) $2 \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 & -15 \\ 1 & -5 & -6 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 24 & -7 & -1 \\ -1 & 2 & 7 & 3 \end{pmatrix};$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix};$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix};$

f) $2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

2. Qanday shartlarda quyidagi ayniyatlar o'rinli bo'ladi:

a) $A + B = B + A;$ b) $A + (B + C) = (A + B) + C;$

c) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A;$ d) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B;$

e) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$

3. Matritsalarining ko'paytmasini hisoblang:

$$\text{a) } (2 \ -3 \ 0) \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} (2 \ -3 \ 0); \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix};$$

$$\text{d) } (1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{g) } \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{h) } (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{e) } (0 \ 1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{f) } \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \text{i) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

4. Ko'paytmaning mavjudligini tekshiring va mavjud bo'lganda hisoblang:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} (1 \ 2) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} (1 \ 2) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \text{c) } (1 \ 2) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} (2 \ 4);$$

$$\text{d) } (-12 \ 13) \begin{pmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} (-12 \ 13).$$

5. Hisoblang:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n; \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3;$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^n; \quad \text{e) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n; \quad \text{f) } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n.$$

6. Ayniyatlarning to'g'riligini tekshiring:

$$\begin{aligned} \text{a) } (\alpha A)^T &= \alpha A^T; & \text{b) } (AB)^T &= B^T A^T; \\ \text{c) } (ABC)^T &= C^T B^T A^T; & \text{d) } (A+B)^T &= A^T + B^T. \end{aligned}$$

7. $f(A)$ ni hisoblang, agar

$$\text{a) } f(x) = x^2 - 2x + 1, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } f(x) = x^2 - 2x + 1, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

c) $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; d) $f(x) = (x - \varepsilon)^2$, $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{pmatrix}$;

8. A matritsa bilan o'rin almashinuvchi bo'lgan hamma matritsalar topilsin, agar:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

9. $\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ tenglikdan foydalanib,

$\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^5$ ni hisoblang.

10. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ tenglikdan foydalanib,

$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}^6$ ni hisoblang.

11. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matritsa $x^2 - (a + d)x + ad - bc = 0$ tenglamani

qanoatlantirishini isbotlang.

12. Teskari matritsani topish formulasidan foydalanib quyidagi matritsalar uchun teskari matritsani toping:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

13. Matritsaviy tenglamalar sistemasini yeching:

$$\text{a) } \begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ -4X - 2Y = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

14. Elementar almashtirishlar yordamida berilgan matritsa uchun teskari matritsani toping:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

15. Quyidagi tenglamalardan X matritsani toping:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } X \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

Mustaqil yechish uchun misollarning javoblari

$$1. \text{ a) } 0; \text{ b) } \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \\ -16 \end{pmatrix}; \text{ c) } \begin{pmatrix} -3 & -8 & 21 & -29 \\ 3 & -8 & -19 & 19 \end{pmatrix}; \text{ d) } \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}; \text{ e) } \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{f) } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad 2. \text{ a), b), d) lar o'rinlidir, agar matritsalar bir xil o'lchovli}$$

$$\text{bo'lsa; c), e) lar doimo o'rinli. } 3. \text{ a) } (-1); \text{ b) } \begin{pmatrix} 8 & -12 & 0 \\ 6 & -9 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 8 & 14 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}; \text{ d) } (1 \ 1); \text{ e) } \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}; \text{ f) } (6, 9, 12); \text{ g) } (0 \ 3 \ 2); \text{ h) } \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}; \text{ i) } \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$4. \text{ a) mavjud emas; b) } \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}; \text{ c) } (8 \ 16); \text{ d) } (-1200 \ 1300).$$

5. a) $2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; d) 0 agar $n > 1$ bo'lsa;

e) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. 6. b), c), d) lar o'rinli, agar ularda foydalanilgan amallar

bajarilsa; a) doimo o'rinlidir. 7. a) 0; b) 0; c) 0; d) $-E$. 8. a)

$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C} \right\}$; b) $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -3\beta & \alpha + 3\beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbf{C} \right\}$; c)

$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbf{C} \right\}$; 9. $\begin{pmatrix} 3197 & -1266 \\ 7385 & -922 \end{pmatrix}$. 10. $\begin{pmatrix} 190 & 189 & -189 \\ 126 & 127 & -126 \\ 252 & 252 & -251 \end{pmatrix}$. 12. a)

$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$; c) $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; f) $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

$$g) \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}; \mathbf{13. a) } X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \text{ b) } Y = 2X + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

bunda X – ikkinchi tartibli ixtiyoriy matritsa. $\mathbf{14. a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \text{ b) }$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \text{ c) } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{15. a) } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ b) } \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix};$$

5-amaliy mashg'ulot.

Matritsa rangi

1-misol. Ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

matritsaning rangini toping.

Yechilishi. Bu matritsaning yuqori chap burchagida joylashgan ikkinchi tartibli minori nolga teng. Ammo matritsada bundan boshqa noldan farqli

2-tartibli minorlari bor. Jumladan,

$$M = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Endi uni o'rab turgan uchinchi tartibli minorni hisoblaymiz.

$$M_1 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

M_1 minorni o'rab turgan ikkala to'rtinchi tartibli minorlar nolga teng. Haqiqatan,

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0 \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Demak, berilgan matritsaning rangi $\text{rang}A = 3$ ga teng ekan.

1. Xoshiyalavchi minor yordamida quyidagi matrisalarning rangini topig:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & -34 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{b)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{c)} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -7 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{d)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -4 \\ 1 & 9 & 8 & -2 \\ 1 & -12 & -7 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\text{e)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{f)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -5 & -7 & 0 \\ 7 & -5 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{g)} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 1 & 5 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -7 & 4 & 1 & -7 \\ 0 & 11 & -5 & 4 & -4 \end{pmatrix};$$

$$\text{h)} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -6 & 10 & -11 \\ 2 & 1 & 9 & -11 & 16 \\ 10 & 5 & 10 & -6 & 17 \end{pmatrix}.$$

2. Elemantar almashtirishlar yordamida quyidagi matrisaning rangini toping:

$$a) \begin{pmatrix} 17 & 51 & 27 & 31 \\ 93 & 25 & 14 & 121 \\ 94 & 27 & 15 & 120 \\ 18 & 53 & 28 & 30 \end{pmatrix};$$

$$b) \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix};$$

$$c) \begin{pmatrix} 12 & -51 & 23 & 48 & 94 \\ 25 & 31 & 48 & 73 & -103 \\ 11 & -186 & 21 & 71 & 385 \\ 19 & 203 & 27 & 39 & 111 \end{pmatrix}; d) \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix};$$

$$e) \begin{pmatrix} 3 & 18 & 23 & 48 \\ 17 & 15 & 31 & -47 \\ 23 & 27 & 42 & 33 \\ 4 & 6 & 27 & -110 \\ 26 & 21 & 30 & 67 \end{pmatrix};$$

$$f) \begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 & 7 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 7 & 9 & 11 & 12 \\ 3 & 0 & -1 & 2 & 7 & 1 \\ 15 & 11 & 9 & 13 & 19 & 15 \\ 17 & 10 & 2 & -5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Mustaqil yechish uchun misollarning javoblari

1. a) $r=2$; b) $r=2$; c) $r=3$; d) $r=2$; e) $r=3$; f) $r=3$; g) $r=3$; h) $r=2$.
2. a) $r=3$; b) $r=3$; c) $r=4$; d) $r=3$; e) $r=4$; f) $r=5$.

6-, 7-amaliy mashg'ulot.

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemani yechishda Kramer, matrisa va Gauss usullari

1-misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

sistemani yeching.

Yechilishi. Bu sistemaning D determinantini tuzamiz.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$$

$D \neq 0$ bo'lgani uchun sistemaga Kramer qoidasini qo'llash mumkin. D_1, D_2, D_3, D_4 larni tuzamiz.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 5 & 1 \\ 9 & 3 & 0 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 81, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 108,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -27, \quad D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 27.$$

(1.13.7) formulaga asosan, berilgan sistemaning yechimi $x_1=3, x_2=-4, x_3=-1, x_4=1$ bo'ladi. ■

2-misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 0, \\ 3x_1 + 14x_2 + 12x_3 = 18, \\ 5x_1 + 25x_2 + 16x_3 = 39. \end{cases}$$

sistemani Gauss usulidan foydalanib yeching.

Yechilishi. Bunda $a_{11} = 2 \neq 0$. Shuning uchun birinchi tenglamaning hamma hadlarini 2 ga bo'lamiz. Natijada berilgan tenglamaga ekvivalent bo'lgan ushbu tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{7}{2}x_2 + \frac{13}{2}x_3 = 0, \\ 3x_1 + 14x_2 + 12x_3 = 18, \\ 5x_1 + 25x_2 + 16x_3 = 39. \end{cases}$$

hosil bo'lgan sistemaning birinchi tenglamasini -3 ga ko'paytirib, ikkinchi tenglamaga, so'ngra -5 ga ko'paytirib uchinchi tenglamaga qo'shamiz. Natijada berilgan sistemaga ekvivalent bo'lgan quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{7}{2}x_2 + \frac{13}{2}x_3 = 0, \\ \frac{7}{2}x_2 - \frac{15}{2}x_3 = 18, \\ \frac{15}{2}x_2 - \frac{33}{2}x_3 = 39. \end{cases}$$

shu bilan birinchi qadam tugadi.

Ikkinchi qadamda $a_{22} = \frac{7}{2} \neq 0$ ekanligidan foydalanib, ikkinchi tenglamaning hamma hadlarini $\frac{7}{2}$ ga bo'lib, hosil bo'lgan tenglamani $-\frac{15}{2}$ ga ko'paytirib, uchinchi tenglamaga qo'shamiz:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{7}{2}x_2 + \frac{13}{2}x_3 = 0, \\ x_2 - \frac{15}{7}x_3 = \frac{36}{7}, \\ -\frac{3}{7}x_3 = \frac{3}{7}. \end{cases}$$

Bunda uchburchak sistema hosil bo'ldi. Uchinchi tenglamadan $x_3 = -1$.
ikkinchi tenglamadan $x_2 = \frac{15}{7}(-1) + \frac{36}{7} = \frac{36}{7} - \frac{15}{7} = 3$. Birinchi tenglamadan esa,
 $x_1 = \frac{7}{2} \cdot 3 - \frac{13}{2} \cdot (-1) = -4$.

Demak, berilgan sistemaning yagona yechimi $x_1 = -4$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$ bo'ladi. ■

3-misol. Ushbu

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

sistemani yeching.

Yechilishi. Bu misolda (1.15.2) belgilashga asosan,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

ko'rinishda bo'ladi. U holda berilgan tenglamalar sistemasini (1.15.3)

ko'rinishda yozish mumkin. Endi $\det A$ ni topamiz:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

A matritsa maxsusmas ekan. Bu A matritsa uchun teskari matritsa mavjud. Teskari matrisani topamiz

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

(1.15.4) formulaga asosan, berilgan sistemani ham $X=A^{-1}B$ ko'rinishda yozish mumkin. Endi x_1, x_2, x_3 larni topamiz:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bundan $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2$ bo'ladi. ■

4-misol. Tenglamalar sistemasini yeching:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 8x_3 - x_4 = 8, \\ 7x_1 + 9x_2 + x_3 + 8x_4 = 0. \end{array} \right.$$

Yechilishi. Matritsaning shaklini almashtiramiz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 & | & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & | & -2 \\ 1 & 2 & 8 & -1 & | & 8 \\ 7 & 9 & 1 & 8 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & -1 & | & 8 \\ 0 & -2 & -22 & 6 & | & -26 \\ 0 & -1 & -11 & 3 & | & -13 \\ 0 & -5 & -55 & 15 & | & -56 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & -1 & | & 8 \\ 0 & 1 & 11 & -3 & | & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & -1 & | & 8 \\ 0 & 1 & 11 & -3 & | & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Dastlab birinchi va uchinchi satrlarning o'rinlarini almashtiramiz, hosil bo'lgan birinchi satrni mos ravishda 3, 2, 7 larga ko'paytirib, qolgan satrlardan ayiramiz. Ikkinchi satrni (-2) ga bo'lib, mos ravishda 1 va 5 larga ko'paytirib qolgan satrlarga qo'shamiz, uchinchi qadamda esa, to'rtinchi satrni 9 ga bo'lib uchinchi satr bilan o'rinlarini almashtiramiz.

Sistemada $0=1$ ko'rinishdagi tenglama hosil bo'ladi. Demak, berilgan sistema yechimga ega emas. ■

5- misol. Ushbu

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{array} \right.$$

sistema birgalikdami?

Yechilishi. Asosiy va kengaytirilgan matrisalarni tuzamiz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Asosiy matrisaning rangini topish uchun, uni elementar almashtirishlar yordamida topamiz:

$$A \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = A_1$$

hosil bo'lgan ekvivaliyent A_1 matrisaning rangi $\text{rang}A_1 = 3$, chunki

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Demak, A matrisaning rangi ham 3 ga teng: $\text{rang}A = 3$.

Endi kengaytirilgan matrisaning rangini topish uchun elementar almashtirishlar bajaramiz:

$$B \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B_1.$$

Ekvivaliyent B_1 matrisaning rangi $\text{rang}B_1 = 4$ teng, chunki

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

B matrisaning rangi ham 4 ga teng, $\text{rang}B = 4$. Matrisaning ranglari har xil.

Demak, berilgan sistema birgalikda emas. ■

6- misol. Ushbu

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$$

sistema birgalikdami?

Yechilishi. A matrisaning rangini hisoblaymiz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{rang}A = 2$ chunki $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Endi kengaytirilgan B matrisaning rangini

hisoblaymiz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{rang}B = 2$, chunki $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Sistema birgalikda, chunki $\text{rang}A = \text{rang}B = 2$. Rang noma'lumlar sonidan kichik bo'lgani uchun sistema cheksiz ko'p yechimlarga ega. Ushbu

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 1 - x_1 - 2x_2, \\ x_3 - x_4 = -1 - x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

sistemani yechamiz. x_1 va x_2 ozod noma'lumlarga ixtiyoriy qiymatlarni, masalan, $x_1 = 1, x_2 = 0$ qiymatlarni beramiz. Sistema ushbu ko'rinishni oladi

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 0, \\ x_3 - x_4 = -2. \end{cases}$$

Uni yechib, $x_3 = -1, x_4 = 1$ ni topamiz.

Demak, berilgan sistemaning cheksiz ko'p yechimlaridan biri $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1, x_4 = 1$ aniqlanadi. ■

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Tenglamalar sistemasini Kramer qoidasi va matrisa usullarida yeching:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 4y = -10, \\ 3x - y = 9; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x - 5y = 1, \\ ax - 5y = -2a - 5; \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 2y - z = 12, \\ 3x - y + 4z = -13, \\ -x + 5y - z = 27; \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 2x + 4y + 3z = 14, \\ 3x - y + 4z = -13, \\ -x + 5y - z = 27; \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6; \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3; \end{cases}$$

2. Tenglamalar sistemasini Gauss usulida yeching:

$$\text{a) } \begin{cases} x - 2y = 3, \\ 2x - 4y = 6; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - 2y = 3, \\ 2x - 4y = 5; \end{cases}$$

$$\text{s) } \begin{cases} x - 2y = 1 - i, \\ 2x - 4y = 2 - 2i; \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x - 2y = 1 - i, \\ 2x - 4y = 2 + i; \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x + 2y - z = 5, \\ 3x - y + z = -4; \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} 2z_1 - (1 + i)z_2 - 3iz_3 = b_1, \\ -2z_1 + (1 + i)z_2 + (1 + 3i)z_3 = b_2, \\ z_3 = b_3; \end{cases}$$

$$\text{g) } \begin{cases} 2x + 3y - z = 0, \\ x - 2y + 4z = 9, \\ y + z = 2; \end{cases} \quad \text{h) } \begin{cases} 2x + 3y - z = -1, \\ x + 2y - 4z = 9, \\ -x - 12y + 14z = 1; \end{cases}$$

$$\text{i) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22; \end{cases} \quad \text{j) } \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1, \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12; \end{cases}$$

3. Agar $f(1) = -1$, $f(-1) = 9$, $f(2) = -3$ bo'lsa, $f(x)$ kvadrat ko'phadni toping.

4. Agar $f(-1) = 0$, $f(1) = 4$, $f(2) = 3$, $f(3) = 16$ bo'lsa, uchinchi darajali ko'phadni toping.

5. k ning qanday haqiqiy qiymatlarida sistema nol yechimga ega bo'lmaydi:

$$\text{a) } \begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + (1+k)x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + (2+k)x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + (3+k)x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + kx_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + kx_3 = 0 \end{cases} ?$$

Mustaqil yechish uchun berilgan misolning javoblari

1. a) $\{(2, -3)\}$; b) $\{(-2, -1) | a \neq -2\}$; s) $\{(0, 5, -2)\}$;

d) Kramer qoidasi bo'yicha sistemani yechish mumkin emas;

ye) $\{(1, 1, -1, -1)\}$; f) $\{(-2, 0, 1, -1)\}$. 2.a) $\{(3 + 2\alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbf{R}\}$;

b) Yechimi yo'q; s) $\{(1 - i + 2\alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbf{C}\}$; d) Yechimi yo'q;

e) $\{(\alpha, 1 - 4\alpha, -3 - 7\alpha) | \alpha \in \mathbf{R}\}$; f) Agar $b_3 \neq b_1 + b_2$, u holda yechimi yo'q;

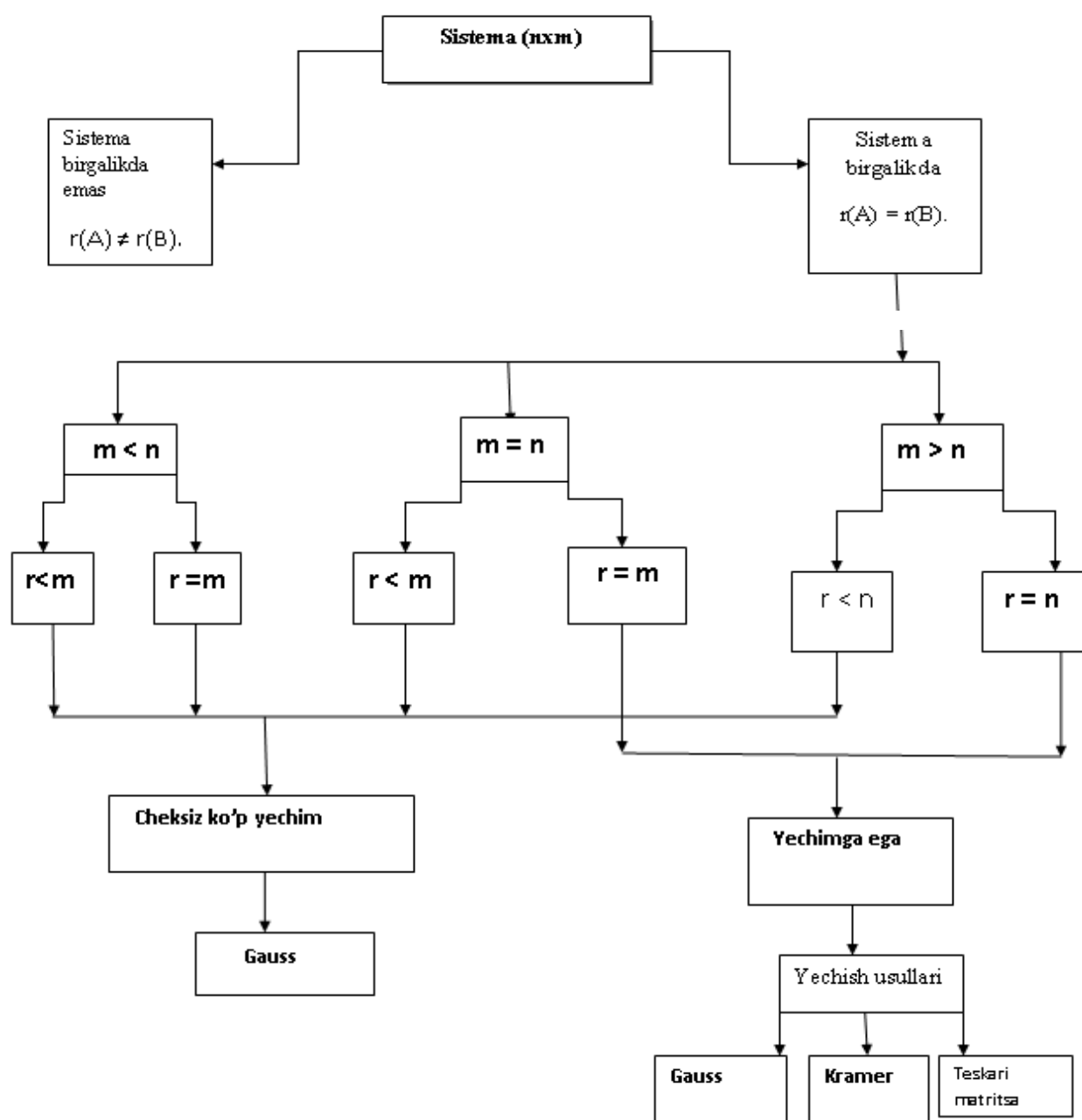
$\left\{ \left(\frac{1}{2}(1+i)\alpha + b_1 + 3ib_3, \alpha, b_3 \right) | \alpha \in \mathbf{C}, b_3 = b_1 + b_2 \right\}$; g) $\{(1, 0, 2)\}$;

h) $\left(\frac{13}{3}, -\frac{13}{3}, -\frac{10}{3} \right)$; i) $\{(-1, 3, -2, 2)\}$; j)

$\{(6 - 28\alpha + 17\beta, -1 + 7\alpha - 5\beta, \alpha, \beta) | \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$. 3. $f(x) = x^4 - 5x + 3$.

4. $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7$. 5. a) $-1; 0; 1$; b) $-2; 1$.

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning umumiy sxemasi:



Bir jinsli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi

[illegible]

8.1-ta’rif. Agar $x_1, x_2, \dots, x_n$ noma’lumlariga berilgan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ qiymatlar (1) sistemasining hamma tenglamalarini qanoatlantirsa, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sonlar to’plami (1) sistemaning *yechimi* deyiladi.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Agar chizqli tenglamalar sistemasi yechimga ega bo'lsa, u birgalikda, agar yechimga ega bo'lmasa, u *birgalikda emas* deyiladi.

Birgalikda chiziqli tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo'lsa, u aniqlangan, agar cheksiz ko'p yechimlarga ega bo'lsa, u aniqmas sistema deb ataladi.

Agar ikkita birgalikdagi tenglamalar sistemasidan birining har bir yechimi ikkinchisining yechimi va aksincha, ikkinchisining har bir yechimi birinchisining yechimi bo'lsa, bu sistemalar teng kuchli sistemalar deb ataladi.

Quyidagi almashtirishlar tenglamalar sistemasidan unga teng kuchli sistemaga o'tkazishni isbotlash mumkin:

1. Istalgan ikkita tenglamaning o'rinlarini almashtirish;
2. Tenglamalardan istalgan birining ikkala tomonini noldan farqli istalgan songa ko'paytirish;
3. Sistema tenglamalardan birining ikkala tomoniga boshqa bir tenglamaning istalgan haqiqiy songa ko'paytirilgan mos qismini qo'shish.

8.2. Kroneker-Kapelli teoremasi. Endi (1) chiziqli tenglamalar sistemasining yechilishi alomatini qaraymiz.

8.1-teorema (Kroneker-Kapelli teoremasi). (1) chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo'lishi uchun, asosiy matritsa bilan kengaytirilgan matritsaning ranglari teng, ya'ni $\text{rang}A = \text{ang}B$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

Natija. (1) sistema yechilmaydigan bo'lsa, A va B matritsalarining ranglari bir xil bo'lmaydi, va aksincha, A va B matritsalarining ranglari bir xil bo'lmasa, (1) sistema yechilmaydigan bo'ladi.

1- **misol.** Ushbu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

sistema birgalikdami?

Yechilishi. Asosiy va kengaytirilgan matritsalarini tuzamiz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Asosiy matritsaning rangini topish uchun, uni elementar almashtirishlar yordamida topamiz:

$$A \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_1$$

hosil bo'lgan ekvivalent A_1 matritsaning rangi $\text{rang}A_1 = 3$, chunki

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Demak, A matritsaning rangi ham 3 ga teng $\text{rang}A = 3$.

Endi kengaytirilgan matritsaning rangini topish uchun elementar almashtirishlar bajaramiz.

$$B \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B_1$$

Ekvivalent B_1 matritsaning rangi $\text{rang}B_1 = 4$ teng, chunki

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

B matritsaning rangi ham 4 ga teng, $\text{rang}B = 4$. Matritsaning ranglari har xil. Demak, berilgan sistema birgalikda emas.

8.3. Chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi. Ushbu bir jinsli

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{m1}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (4)$$

tenglamalar sistemasi doimo birgalikda, chunki B matritsa A matritsadan faqat elementlari nollardan iborat ustuni bilan farq qiladi va shu sababli $\text{rang} A = \text{rang} B$.

(4) sistemani $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ qiymatlar ham qanoatlantiradi. (4) bir jinsli sistema qachon nolmas yechimga ega bo'lishi haqidagi savolga ushbu teorema javob beradi.

8.2-teorema. (4) sistema nolmas yechimga ega bo'lishi uchun A matritsaning $\text{rang}A$ rangi noma'lumlar soni n dan kichik bo'lishi zarur va yetarlidir, ya'ni $\text{rang}A < n$.

2-misol. Ushbu

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining nol yoki nolmas yechimlarga tekshiring.

Yechilishi. a) noma'lumlar oldidagi koeffitsientlardan tuzilgan determinantni hisoblaymiz.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$$

Demak, sistema bittagina $(0,0,0)$ yechimga ega, chunki $D \neq 0$.

b) Berilgan sistemaning determinantini hisoblaymiz.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 3 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Demak, $D = 0$, shu sababli sistema nolmas yechimlarga ega. Ulardan bittasi $(2,1,1)$ bo'ladi.

2-ta’rif. (4) bir jinsli tenglamalar sistemasining

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ yechimi (5) yechimlar orqali chiziqli ifodalansa, ya'ni

tenglikni qanoatlantiruvchi $c_1, c_2, \dots, c_{ye}$ sonlar topilsa, (5) sistema fundamental yechimlar sistemasi yoki *fundamental sistema* deyiladi.

8.3-teorema. (4) bir jinsli tenglamalar sistemasining asosiy A matritsasi noma'lumlar sonidan kichik rangga ega ($s < n$) bo'lsa, bu sistema uchun fundamental yechimlar sistemasi mavjud va fundamental sistemasiga kiruvchi yechimlarning soni parametrlar soniga teng.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 6x_1 - x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

sistemaning fundamental yechimlar sistemasini toping.

Yechilishi. Ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

matritsada elementar almashtirishlar bajaramiz. 1 satrni -1 , 2-sini -3 ga ko'paytirib ketma-ket 3-siga qo'shamiz. Bu vaqtda

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hosil bo'ladi. Demak, A ning rangi 2 ga teng, chunki

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

Berilgan sistemaning avvalgi ikkita tenglamasini olib yechamiz:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = x_3 + x_4 \\ x_1 - x_2 = x_3 - x_4 \end{cases} \quad (2)$$

Parametrlarning soni ikkita bo'lgani uchun, fundamental sistema ikkita yechimdan tuziladi va Δ determinant 2-tartibli bo'ladi. Parametrlarga $\Delta \neq 0$ shart bajariladigan qiymatlarni beraylik. Masalan, $x_3 = 5$ va $x_4 = 0$, so'ngra $x_3 = 0$ va $x_4 = 5$ qiymatlarda

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 25 \neq 0$$

bo'ladi. Parametrlarning birinchi qiymatlarida (2) sistema $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5 \\ x_1 - x_2 = 5 \end{cases}$

ko'rinishni oladi. Bundan: $x_1 = 3$, $x_2 = -2$ bo'ladi. Parametrlarning ikkinchi qiymatlarida esa

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5 \\ x_1 - x_2 = -5 \end{cases}$$

hosil bo'lib, $x_1 = -1$, $x_2 = 4$ bo'ladi. Demak, fundamental yechimlardan bittasi $(3, -2, 5, 0)$, $(-1, 4, 0, 5)$. Berilgan (1) sistemasining yechimlari

$$\beta_1 = 3c_1 - c_2, \beta_2 = -2c_1 + 4c_2, \beta_3 = 5c_1 + 0c_2, \beta_4 = 0c_1 + 5c_2$$

tengliklar bilan aniqlanadi. Masalan, $c_1 = c_2 = 1$ qiymatlarda $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 2$,

$\beta_3 = 5$, $\beta_4 = 5$ bo'ladi. ■

4-misol. Tenglamalar sistemasini tekshiring va yeching:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=-1, \\ 2x_1+2x_2+3x_4+x_5=1, \\ 2x_3+2x_4-x_5=1, \\ -2x_3+4x_4-3x_5=7, \\ 6x_3+3x_4-x_5=-1. \end{cases}$$

Yechilishi. Gauss algoritmini qo'llab, quyidagi kengaytirilgan matritsaga ega bo'lamiz:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

soddalashtirgandan so'ng,

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Demak, sistema birgalikda, chunki sistemaning matritsasining rangi bilan kengaytirilgan matritsaning rangi teng, ya'ni $\text{rang}A = \text{rang}B = 3$.

Bu matritsaga mos sistemaga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=-1, \\ -2x_3+x_4-x_5=3, \\ 3x_4-2x_5=4. \end{cases}$$

Bunda

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

bo'lganligi uchun, x_1, x_3, x_4 lar erksiz o'zgaruvchilar, x_2, x_5 lar ozod o'zgaruvchilar.

Ozod o'zgaruvchilarni o'ng tomonga o'tkazib sistemani umumiy yechimini topamiz:

$$x_1 = \frac{-3-2\alpha-\beta}{2}, x_2 = \alpha, x_3 = \frac{-5-\beta}{6}, x_4 = \frac{4+\beta}{3}, x_5 = \beta.$$

Faraz qilaylik, $\alpha = 0, \beta = 0$ bo'lsa, xususiy yechimini topamiz:

$$x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = 0, x_3 = -\frac{5}{6}, x_4 = \frac{4}{3}, x_5 = 0. \blacksquare$$

5-misol. Quyidagi bir jinsli tenglamar sistemasi uchun fundamental yechimlar sistemasini toping:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$$

Yechilishi. Berilgan sistemada elementar almashtirishlar bajarib, quyidagi sistemaga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Bunda x_1 va x_2 lar bosh o'zgaruvchilar, x_3 va x_4 lar esa ozod o'zgaruvchilar.

Agar $x_3 = \alpha, x_4 = \beta$ bo'lsa, $x_2 = \frac{7}{2}\alpha - 2\beta, x_1 = -\frac{3}{2}\alpha - \beta$ bo'ladi.

Shunday qilib, sistemaning umumiy yechimi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\left(-\frac{3}{2}\alpha - \beta, \frac{7}{2}\alpha - 2\beta, \alpha, \beta \right).$$

Ozod o'zgaruvchilarni mos elementlari $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ ikkinchi tartibli

determinantning satr elementlaridan iborat bo'lsa, sistemaning fundamental yechimlar sistemasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi: $\left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, 1, 0 \right), (-1, -2, 0, 1). \blacksquare$

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. Tenglamalar sistemasini birgalikka tekshiring va umumiy yechimini toping:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 9x_1 - 6x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 1; \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 3x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 5; \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 6x_1 - x_3 - 2x_5 = 3, \\ 4x_1 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 3; \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_5 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7; \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2; \end{cases}$$

$$\text{g) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6; \end{cases}$$

$$\text{h) } \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 1; \end{cases}$$

$$\text{i) } \begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18; \end{cases}$$

$$\text{j) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 7; \end{cases}$$

2. Tenglamalar sistemasini birgalikka tekshiring va λ parametrga bog'liq bo'lgan umumiy yechimini toping:

$$\text{a) } \begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} (\lambda + 1)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1 + \lambda)x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + (1 + \lambda)x_3 = \lambda^2; \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{c)} \quad & \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + \lambda x_4 = 9; \end{cases} & \text{d)} \quad & \begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1; \end{cases} \\
\text{e)} \quad & \begin{cases} (\lambda + 1)x_1 + x_2 + x_3 = \lambda^2 + 3\lambda, \\ x_1 + (\lambda + 1)x_2 + x_3 = \lambda^3 + 3\lambda^2, \\ x_1 + x_2 + (\lambda + 1)x_3 = \lambda^4 + 3\lambda^3; \end{cases} \\
\text{f)} \quad & \begin{cases} 3x_1 + (2 - \lambda)x_2 + x_3 = -\lambda, \\ \lambda x_1 + (\lambda - 1)x_2 + x_3 = 2\lambda, \\ (4\lambda + 3)x_1 + (2\lambda - 1)x_2 + (\lambda + 4)x_3 = 2\lambda + 3; \end{cases}
\end{aligned}$$

3. Berilga tenglamalar sistemasini uch fundamental yechimlar sistemasini toping:

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad & \begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 = 0; \end{cases} & \text{b)} \quad & \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0; \end{cases} \\
\text{s)} \quad & \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 - x_5 = 0; \end{cases} & \text{d)} \quad & \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0; \end{cases} \\
\text{e)} \quad & \begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0; \end{cases} & \text{f)} \quad & \begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0, \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0, \\ -x_3 + x_5 = 0, \\ -x_4 + x_6 = 0; \end{cases} \\
\text{g)} \quad & \begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0; \end{cases} & \text{h)} \quad & \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0; \end{cases}
\end{aligned}$$

$$i) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0, \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

4. Martritsaning har bir satri

$$A = \begin{pmatrix} 30 & -24 & 43 & -50 & -5 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

ushbu tenglamalar sistemasi uchun fundamental yechimlar sistemasi bo'ladimi:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 11x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$$

Mustaqil yechish uchun berilgan misol va masalalarning javoblari

1. a) Yechimi yo'q; b) $\{(\alpha, \beta, 6 - 15\alpha + 10\beta, -7 + 18\alpha + 2\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$;

s) $\{(\alpha, 1 + \alpha - \beta, 1, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$; d) $\{(\alpha, 2\alpha - 1, 6\alpha - 2\beta - 3, -\alpha + 2\beta, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$;

e) $\left\{ \left(-\frac{6+8\alpha}{7}, \frac{1-13\alpha}{7}, -\frac{15-6\alpha}{7}, \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbf{R} \right\}$; f) Yechimi yo'q; g)

$\left\{ \left(\alpha, \beta, -\frac{9}{2} - \alpha - 2\beta, -\frac{25}{2} - 2\alpha - 4\beta, -\frac{15}{2} - 2\alpha - 4\beta \right) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R} \right\}$;

h) $\left\{ \left(\alpha, \beta, \frac{4}{3}\alpha + \frac{2}{3}\beta, -\frac{14}{3}\alpha - \frac{7}{3}\beta - 1, \frac{4}{3}\alpha + \frac{2}{3}\beta + 2 \right) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R} \right\}$;

i) $\{(3, 0, -5, 11)\}$; j) Yechimi yo'q.

2.a) $\left\{ \left(\frac{1}{\lambda+3}, \frac{1}{\lambda+3}, \frac{1}{\lambda+3} \right) \mid (\lambda-1)(\lambda+2) \neq 0 \right\}$; $\{(1-\alpha-\beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \lambda=1\}$;

$\lambda = -2$ da sistema birgalikda emas;

$$\text{b) } \left\{ \left(\frac{2-\lambda^2}{\lambda(\lambda+3)}, \frac{2\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)}, \frac{\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)} \right) \mid \lambda(\lambda+3) \neq 0 \right\}; \quad \lambda=0 \text{ va } \lambda=-3 \text{ larda}$$

$$\text{sistema birgalikda emas; s) } \left\{ \left(\alpha, \beta, -1, 2-\alpha-\frac{3}{2}\beta \right) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \lambda=8 \right\};$$

$$\left\{ \left(\alpha, \frac{4}{3}-\frac{2}{3}\alpha, -1, 0 \right) \mid \alpha \in \mathbf{R} \right\}; \text{d) } \left\{ \left(\frac{1}{\lambda+3}, \frac{1}{\lambda+3}, \frac{1}{\lambda+3}, \frac{1}{\lambda+3} \right) \right\}$$

$$\mid (\lambda-1)(\lambda+3) \neq 0; \{ (1-\alpha-\beta-\gamma, \alpha, \beta, \gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}, \lambda=1 \}; \quad \lambda=-3 \text{ da sistema}$$

$$\text{birgalikda emas; f) } \{ (2-\lambda^2, 2\lambda-1, \lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1) \mid \lambda(\lambda+3) \neq 0 \};$$

$$\{ (-\alpha-\beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \lambda=0 \}; \{ (\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbf{R}, \lambda=-3 \};$$

$$\text{3. a) } \{(1,1)\}; \text{ b) } \{(0,1,1)\}; \text{ s) } \{(1,0,0,5,4), (0,1,-1,-7,-4)\};$$

$$\text{d) } \left\{ \left(1, 0, 0, -\frac{9}{4}, \frac{3}{4} \right), \left(0, 1, 0, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(0, 0, 1, -2, 1 \right) \right\};$$

$$\text{e) } \left\{ \left(1, 0, 0, -\frac{9}{11}, -\frac{3}{11} \right), \left(0, 1, 0, \frac{3}{11}, \frac{1}{11} \right), \left(0, 0, 1, -\frac{10}{11}, \frac{4}{11} \right) \right\};$$

f) Sistema faqat nol yechimga ega;

$$\text{g) } \{(1,1,1,1,0,0), (-1,0,0,0,1,0), (0,-1,0,0,0,1)\};$$

$$\text{h) } \left\{ \left(0, \frac{1}{3}, 1, 0, 0 \right), \left(0, -\frac{2}{3}, 0, 0, 1 \right) \right\}; \text{ i) } \{ (-3, 2, 1, 0, 0), (-5, 3, 0, 0, 1) \}.$$

4. A matritsaning satrlari fundamental yechimlar sistemasini tashkil qilmydi,

B matritsaning satrlari esa fundamental yechimlar sistemasini tashkil qiladi.

9- amaliy mashg'ulot.

Vektorlar

1-misol Agar $A(3;4;1)$ va $B(6; 8; 6)$ bo'lsa, $\vec{AB}$ vektorning koordinata o'qlari bilan tashkil etgan burchaklarning kosinuslarini toping.

Yechilishi. $\vec{AB}$ vektorning Ox, Oy, Oz o'qlardagi proyeksiyalarini topamiz:

$$np_{Ox} \vec{AB} = 6 - 3 = 3; \quad np_{Oy} \vec{AB} = 8 - 4 = 4; \quad np_{Oz} \vec{AB} = 6 - 1 = 5.$$

$\vec{AB}$ vektorning modulini topamiz: $|\vec{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$

Ushbu

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

formulalarga asosan, vektorning yo'naltiruvchi kosinuslarini topamiz:

$$\cos \alpha = \frac{3}{5\sqrt{2}}, \quad \cos \beta = \frac{4}{5\sqrt{2}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}. \blacksquare$$

2-misol. Agar $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4$ va $\varphi = \frac{\pi}{3}$ bo'lsa, $2\vec{a} + \lambda\vec{b}$ va $\vec{a} - 4\vec{b}$ vektorlar

λ ning qanday qiymatlarida o'zaro perpendikulyar bo'ladi?

Yechilishi. Berilgan vektorlarning skalyar ko'paytmasini topamiz:

$$\begin{aligned} (2\vec{a} + \lambda\vec{b})(\vec{a} - 4\vec{b}) &= 2\vec{a}\vec{a} - 8\vec{a}\vec{b} + \lambda\vec{a}\vec{b} - 4\lambda b^2 \\ &= 2 \cdot |a|^2 - 8|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3} + \lambda|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3} - 4\lambda|b|^2 = \\ &= 18 - 8 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} + \lambda \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \lambda 16 = 18 - 48 + 62 - 64\lambda = \\ &= -30 - 58\lambda \end{aligned}$$

Ikki vektor perpendikulyar bo'lishi uchun ularning skalyar ko'paytmasi nolga teng

bo'lishi shartidan topamiz: $30 - 58\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{15}{29}. \blacksquare$

3- misol. $\vec{F} = \{3; 2; -4\}$ kuch $A(2; -1; 1)$ nuqtaga qo'yilgan. Bu kuchning koordinatalar boshiga nisbatan momentini aniqlang.

Yechilishi. Agar $\vec{F}$ vektor A nuqtaga qo'yilgan bo'lsa, $\vec{a}$ vektor O nuqtadan A nuqtaga yo'nalgan, ya'ni $\vec{OA} = \vec{a}$ bo'ladi. $[\vec{a}, \vec{F}]$ vektor ko'paytma esa, $\vec{F}$ kuchning O nuqtaga nisbatan kuch momentini ifodalaydi.

Demak,

$$\vec{a} = \vec{OA} = \{2; -1; 1\}, \quad [\vec{OA}, \vec{F}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 11\vec{j} + 7\vec{k}. \blacksquare$$

Mustaqil yechish uchun berilgan misol va masalalar

1. Quyida berilgan vektorlarning uzunligi va vektor yo'nalishidagi birlik vektorni toping.

1) $\vec{a} = \{2; -6; 3\}$; 2) $\vec{b} = \{4; -5; 2\}$; 3) $\vec{c} = \{6; 10; 0\}$.

2. Ushbu $\vec{a} = \{-2; 11; z\}$ vektorning uzunligi 15 ga teng bo'lsa, z ni toping.

3. $A(-2; 5; -4)$, $B(3; -7; 8)$, $C(2; 4; 0)$ nuqtalar berilgan. $\vec{AB}$, $\vec{BA}$, $\vec{AC}$, $\vec{BC}$ va $\vec{CA}$ vektorlarni toping.

4. Agar $\vec{a} = \{-1; 3; 7\}$ vektor va $M(4; -3; 0)$ nuqta berilgan bo'lib, $a = MN$ bo'lsa, N nuqtaning koordinatalarini toping.

5. Agar $|\vec{a}| = 4$ bo'lib, $\vec{a}$ vektorning Ox , Oy , Oz o'qlari bilan mos ravishda

$\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$ tashkil etsa, $\vec{a}$ vektorining koordinata o'qlaridagi proeksiyalarini toping.

6. Quyida berilgan vektorlarning yo'naltiruvchi kosinuslarini toping.

1) $\vec{a} = \{-3; 12; -4\}$; 2) $\vec{b} = \{3; -4; 5\}$.

7. Vektor koordinata o'qlari bilan quyidagi burchaklarni tashkil etishi mumkinmi?

- 1) $\alpha = 225^0, \beta = 240^0, \gamma = 120^0$; 2) $\alpha = 60^0, \beta = 45^0, \gamma = 60^0$;
3) $\alpha = 60^0, \beta = 90^0, \gamma = 120^0$.

8. $\vec{a}$ vektor Ox va Oy o'qlari bilan $\alpha = 120^0$ va $\beta = 60^0$ tashkil etadi. Agar $|\vec{a}| = 5$ bo'lsa, uning koordinatalarini toping.

9. Agar $M(x,y)$ nuqtani aniqlovchi radius vektori koordinata o'qlari bilan bir xil burchakni tashkil qilib, uning uzunligi $5\sqrt{3}$ ga teng bo'lsa, M nuqtaning koordinatalarini toping.

10. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar berilgan. Quyidagi berilgan:

- 1) $2\vec{a}$; 2) $-0,5\vec{b}$; 3) $-\vec{a} + \vec{b}$; 4) $0,5\vec{a} - 3\vec{b}$ vektorlarni yasang.

11. $|\vec{a}| = 15$, $|\vec{b}| = 25$ va $|\vec{a} + \vec{b}| = 32$ bo'lsa, $|\vec{a} - \vec{b}|$ ni toping.

12. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar 60^0 burchakni tashkil etadi. $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$ ekanligini bilgan holda $(2\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - 3\vec{b})$ vektorni hisoblang.

13. ABC uchburchakda $\vec{AB}$ vektor $\vec{m}$ ga va $\vec{AC}$ vektor $\vec{n}$ ga teng bo'lsa, quyidagi vektorlarni yasang:

- 1) $\vec{m} + \frac{\vec{n}}{2}$; 2) $\vec{n} - \frac{\vec{m}}{2}$; 3) $\frac{\vec{m} - \vec{n}}{2}$.

14. $\vec{a} = \{5; -3; 7\}$ va $\vec{b} = \{3; -1; -2\}$ vektorlar berilgan. Quyida berilgan vektorlarning koordinata o'qlaridagi proeksiyalarini toping:

- 1) $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{a} - \vec{b}$; 3) $-3\vec{a}$; 4) $\frac{1}{3}\vec{b}$; 5) $2\vec{a} - 3\vec{b}$; 6) $\frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b}$

15. α va β ning qanday qiymatlarida $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \alpha\vec{k}$ va $\vec{b} = \beta\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$ vektorlar kollinear bo'ladi?

16. $\vec{c} = 11\vec{i} + 1\vec{j} - 10\vec{k}$ vektor berilgan. $\vec{c}$ vektorga parallel, unga qarama-qarshi yo'nalgan va uzunligi 45 ga teng bo'lgan $\vec{d}$ vektorni toping.

17. $\vec{AB} = \{4; 6; 2\}$ va $\vec{AC} = \{-8; 10; -12\}$ vektorlar ABC uchburchakning tomonlari bilan ustma-ust tushadi. Boshlari uchburchakning uchlarida va medianalar bilan ustma-ust tushgan vektorlarning koordinatalarini toping.

18. $\vec{a} = \{1; -2\}$, $\vec{b} = \{-2; 3\}$, $\vec{c} = \{-4; 7\}$ vektorlar berilgan. Har bir vektorni, qolgan ikki vektorlarni bazis deb olganda, yoyilmalarini aniqlang.

19. Tekislikda $A(2; -1)$, $B(-1; -2)$, $C(-2; -3)$, $D(-3; 2)$ nuqtalar berilgan. $\vec{AB}$ va $\vec{AC}$ vektorlarni bazis vektorlari deb, quyidagi vektorlarning yoyilmalarini toping:

1) $\vec{AD}$; 2) $\vec{BD}$; 3) $\vec{CD}$; 4) $\vec{BD} + \vec{CD}$; 5) $\vec{AB} + \vec{BD} + \vec{CD}$.

20. $\vec{a} = \{1; -3; 2\}$, $\vec{b} = \{-2; 1; 3\}$, $\vec{c} = \{1; -2; -1\}$ vektorlar berilgan.

$\vec{d} = \{-6; 5; 11\}$ vektorning $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bazis vektorlari bo'yicha yoyilmasini toping.

21. $\vec{a} = \{2; -1; 2\}$, $\vec{b} = \{1; 0; 2\}$, $\vec{c} = \{7; -7; 3\}$, $\vec{d} = \{-1; 2; 1\}$ vektorlar berilgan. Bu vektorlarning har birining yo'yilmasini qolgan uchta vektorlarni bazis vektori deb qabul qilgan holda toping.

22. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar $\frac{\pi}{3}$ burchakni tashkil qiladi. $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 6$ ekanligini

bilgan holda quyidagilarni hisoblang.

1) $(\vec{a}, \vec{b})$; 2) $\vec{a}^2$; 3) $\vec{b}^2$; 4) $(\vec{a} + \vec{b})^2$; 5) $(\vec{a} - \vec{b})^2$;

6) $(2\vec{a} - 3\vec{b}, 2\vec{a} + 3\vec{b})$; 7) $(2\vec{a} - 3\vec{b})^2$.

23. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zaro ortogonal bo'lib, $\vec{c}$ vektor bilan esa $\frac{2\pi}{3}$

burchakni tashkil etadi. $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, $|\vec{c}| = 8$ ekanini bilgan holda, quyidagilarni

hisoblang.

1) $(2\vec{a} + 3\vec{b}, 2\vec{b} - 3\vec{c})$; 2) $(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})^2 \vec{a}$;

3) $(2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c})^2$; 4) $(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})^2$

24. Ushbu $(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)$ ayniyatni isbotlang va uning geometrik ma'nosini aniqlang.

25. Ushbu $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ shartni qanoatlantiruvchi birlik $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar berilgan. $(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}) + (\vec{c}, \vec{a})$ ni hisoblang.

26. $|\vec{a}| = 7, |\vec{b}| = 7$ ekanini bilgan holda, α ning qanday qiymatlarida $\vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$ va $\vec{a} - \alpha \cdot \vec{b}$ vektorlar perpendikulyar bo'ladi.

27. ABC uchburchakning tomonlari bilan ustma-ust tushgan $\vec{b} = \vec{AB}, \vec{c} = \vec{AC}$ vektorlar berilgan. Boshi C uchida va CD balandlik bilan ustma-ust tushgan vektorning $\vec{b}, \vec{c}$ bazis vektorlari bo'yicha yoyilmasini toping.

28. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak $\frac{2\pi}{3}$ burchakni tashkil etadi. $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4$ ekanini bilgan holda, $\vec{a} - \vec{b}$ va $\vec{a} + \vec{b}$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

29. $\vec{a} = \{2; -4; -2\}, \vec{b} = \{4; -3; 2\}$ vektorlar berilgan. Quyidagilarni hisoblang:

- | | | |
|--|------------------------------|----------------------------|
| 1) $(\vec{a}, \vec{b})$; | 2) $\sqrt{\vec{a}^2}$; | 3) $\sqrt{\vec{b}^2}$; |
| 4) $(3\vec{a} - \vec{b}, 2\vec{a} + 3\vec{b})$; | 5) $(\vec{a} + \vec{b})^2$; | 6) $(\vec{a} - \vec{b})^2$ |

30. To'rtburchakning $A(3; -1; 2), B(2; 1; -3), C(5; -4; 7)$ va $D(6; 7; -1)$ uchlari berilgan. Uning AC va BD diagonallari perpendikulyar ekanligini isbotlang.

31. ABC uchburchakning $A(2; -3; 1), B(5; -3; 5), C(9; -3; 2)$ uchlari berilgan. A uchidagi ichki burchakni toping.

32. ABC uchburchakning $A(4; -2; 7), B(2; 1; 1)$ va $C(-1; 7; 3)$ uchlari berilgan. ABC uchburchakning ichki burchaklarini hisoblab, uning teng yonli uchburchak ekanligini isbotlang.

33. $\vec{a} = \{2; -6; 3\}$ va $\vec{x}$ vektorlar o'zaro kollinear bo'lib, Oz o'qi bilan o'tkir burchakni tashkil qiladi. $|\vec{x}| = 42$ ekanini bilgan holda $\vec{x}$ vektorning koordinatalarini toping.

34. $\vec{a} = \{2; -3; 4\}, \vec{b} = \{-1; 2; 3\}$ vektorlar berilgan. $(\vec{x}, \vec{a}) = -7, (\vec{x}, \vec{b}) = 2$ ekanligini bilgan holda $\vec{x}$ o'qqa perpendikulyar bo'lgan $\vec{x}$ vektorni toping.

35. $\vec{c} = \{3; 6; 3\}$ vektorning koordinata o'qlari bilan teng o'tkir burchaklarni tashkil etuvchi o'qdagi proeksiyalarini toping.

36. $\vec{a} = \{4; -2; -5\}, \vec{b} = \{6; 1; -3\}, \vec{c} = \{4; -12; 3\}$ vektorlar berilgan.

$\vec{a} + \vec{b}$ vektorning $\vec{c}$ vektordagi proeksiyalarini toping.

37. $\vec{a} = \{4; -2; -4\}, \vec{b} = \{-1; -4; 1\}$ va $\vec{c} = \{5; -8; -4\}$ vektorlar berilgan. $\vec{a}$ vektorning $\vec{b} + \vec{c}$ vektorlardagi proeksiyalni toping.

39. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar $\frac{5\pi}{6}$ burchakni tashkil etadi. $|\vec{a}| = 3$ va $|\vec{b}| = 4$ ekanini bilgan holda $[\vec{a}, \vec{b}]$ ni hisoblang.

40. $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 12$ va ular 36° burchak tashkil etishini bilgan holda $[\vec{a}, \vec{b}]$ ni hisoblang.

41. O'zaro ortogonal bo'lgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning uzunliklari $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$ ekanini bilgan holda quyidagilarni hisoblang:

$$1) [2\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - 2\vec{b}]; \quad 2) [\vec{a} - 3\vec{b}, 3\vec{a} + \vec{b}]^2.$$

42. Ushbu $[\vec{a}, \vec{b}]^2 + (\vec{a}, \vec{b})^2 = a^2 b^2$ ayniyatni isbotlang.

43. $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ shartni qanoatlantiradi. Ushbu $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}]$ o'rinli ekanligini isbotlang.

44. $\vec{a} = \{2; 1; -3\}$ va $\vec{b} = \{1; -2; -1\}$ vektorlar berilgan. Quyidagi vektor ko'paytmalarining koordinatalarini toping.

$$1) [\vec{a} - \vec{b}]; \quad 2) [\vec{a}, \vec{a} - 2\vec{b}]; \quad 3) [\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}]; \quad 4) [3\vec{a} - 2\vec{b}, 2\vec{a} + 3\vec{b}].$$

45. ABC uchburchakning $A(1; 2; -1), B(3; -1; 2)$ va $C(-2; 3; 5)$ uchlari berilgan. ABC uchburchakning yuzini hisoblang.

46. ABC uchburchakning $A(1;-2;-1)$, $B(6;-2;-5)$, $C(-3;1;-1)$ uchlari berilgan. B uchudan AC tomoniga tushirilgan balandlikning uzunligini toping.

47. $\vec{a}$ vektor $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar bilan o'zaro perpendikulyar bo'lib, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar $\frac{5\pi}{6}$ burchakni tashkil qiladi. $|\vec{a}|=5, |\vec{b}|=8, |\vec{c}|=3$ ekanligini bilgan holda ($\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]$) aralash ko'paytmani hisoblang.

48. $\vec{a} = \{2;-3;1\}$, $\vec{b} = \{-1;2;4\}$, $\vec{c} = \{3;-5;2\}$ vektorlar berilgan. $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$ aralash ko'paytmani hisoblang.

49. Ushbu $A(1; 2; 3)$, $B(1; 0; 5)$, $C(2; 1; -1)$ va $D(2; -1; 1)$ nuqtalarning bitta tekislikda yotishini isbotlang.

50. Uchlari $A(2; -1; 3)$, $B(1; 3; 4)$, $C(-1; 1; 2)$, $D(5; 4; 5)$ nuqtalarda joylashgan tetraedrning hajmini toping.

51. Piramidaning $A(3; 7; 6)$, $B(3; 1; 2)$, $C(-4; 8; -5)$, $D(1; -2; 4)$ uchlari berilgan. C uchudan tushirilgan piramidaning balandligini toping.

52. $ABCD$ tetraedrning uchta $A(1; -3; -2)$, $B(3; -1; 4)$, $C(2; -3; 4)$ uchlari va uning hajmi 3 ga teng. Tetraedrning D uchi Ox o'qiga tegishli ekanini bilgan holda, uning koordinatalarini toping.

Mustaqil yechish uchun misol va masalalarning javoblari

1. 1) $7; \{\frac{2}{7}, -\frac{6}{7}, \frac{3}{7}\}$; 2) $13; \{\frac{4}{13}, -\frac{3}{13}, -\frac{12}{13}\}$; 3) $15; \{\frac{2}{15}, \frac{2}{3}, \frac{11}{15}\}$. 2. ± 10 .
3. a) $\{5, -12, 12\}$; b) $\{-5, 12, -12\}$; c) $\{4, -1, 4\}$; d) $(-1, 11, -8)$; e) $\{-4, 1, -4\}$.
4. $N(3, 0, 7)$. 5. $\{2; 2\sqrt{2}; 2\}$. 6. 1) $-\frac{3}{13}; \frac{12}{13}; -\frac{4}{13}$; 2) $\frac{3}{5\sqrt{2}}; -\frac{4}{5\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}$;
7. 1) Ha; 2) Ha; 3) Yo'q. 8. $(-\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; \pm \frac{5}{\sqrt{2}})$. 9. $\pm \{5; 5; 5\}$. 11. 26.
12. 81. 14. 1) $\{8; -4; 5\}$; 2) $\{2; -2; 9\}$; 3) $\{-15; 9; -21\}$; 4) $\{1; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\}$;
- 5) $\{1; -3; 20\}$; 6) $\{\frac{14}{3}; -2; \frac{1}{3}\}$. 15. 4; -4, 5. 16. $\{-33; -6; 30\}$. 17. $\{-2; 2; -5\}$;

- $\{-8; 11; -8\}; \{10; -13; 13\}$. **18.** $\vec{a} = 0,5\vec{b} - 0,5\vec{c}; \vec{b} = 2\vec{a} + \vec{c}; \vec{c} = -2\vec{a} + \vec{b}$. **19.**
 1) $\{11; -7\}$; 2) $\{10; -7\}$; 3) $\{11; -8\}$; 4) $\{21; -15\}$; 5) $\{32; -22\}$.
- 20.** $\vec{c} = \vec{p} + 2\vec{q} - 3\vec{r}$. **21.** $\vec{a} = -2\vec{b} + \vec{c} + 3\vec{d}, \vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{3}{2}\vec{d},$
 $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{d}, \vec{b} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{d}$. **22.** 1) 15; 2) 25; 3) 36; 4) 91; 5) 31; 6) -118;
 7) 244 **23.** 1) 240; 2) 132; 3) 1440; 4) 68. **25.** -1,5. **26.** $\alpha = \pm 1$.
- 27.** $\frac{(\vec{b}, \vec{c})}{|\vec{b}|^2} \vec{b} - \vec{c}$. **28.** $\arccos(-\frac{7}{\sqrt{481}})$. **29.** 1) 16; 2) $\sqrt{24}$; 3) $\sqrt{29}$;
 4) 169; 5) 85; 6) 21. **31.** $\frac{\pi}{4}$. **33.** $\{12; -36; 18\}$. **34.** $\{-8; -3; 0\}$. **35.** $\{3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}\}$.
37. 4. **39.** 6. **40.** $36\sqrt{3}$. **41.** 1) 18; 2) 5184. **44.** 1) $\{7; 1; 5\}$; 2) $\{14; 2; 10\}$;
 3) $\{-28; -4; -20\}$; 4) $\{-98; -13; -69\}$. **46.** $h = 5$. **47.** 60. **48.** 5. **50.** 3. **51.** $\frac{22}{3}$.
52. $\frac{13}{3}$.

10-, 11-amaliy mashg'ulot.
Arifmetik vektor fazo. Chiziqli fazo

11.1.Chiziqli fazoning ta'rifi. L to'plam berilgan bo'lib, uning elementlari $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots, \bar{u}$ vektorlar bo'lsin.

I. L to'plamda «elementlarni qo'shish» amali kiritilgan, ya'ni $\forall \bar{x}, \bar{y} \in L$ elementlari uchun shunday uchinchi bir $\bar{z} \in L$ element qo'yilgan bo'lsin, bunda $\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$ deb belgilaymiz.

II L to'plamda «elementlarni songa ko'paytirish» amali kiritilgan, ya'ni $\forall \bar{x} \in L$ va $\forall \alpha \in R$ son uchun L to'plamda shunday $\bar{u} \in L$ element mos qo'yilgan bo'lsin, bunda $\bar{u} = \alpha \cdot \bar{x}$

III Bu ko'rsatilgan yuqoridagi ikkita amallar quyidagi sakkizta aksiomani qanoatlantirsin.

1⁰ $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$ (o'rin almashtirish xossasi);

2⁰ $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$ (assosiativlik xossasi);

3⁰ L to'plamda shunday nol $\bar{0}$ element mavjud bo'lib, $\forall \bar{x} \in L$ element uchun ushbu $\bar{x} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{x} = \bar{x}$ tenglik bajarilsa;

4⁰ L to'plamdagi har qanday $\bar{x} \in L$ element uchun L da shunday $-\bar{x} \in L$ element mavjud bo'lib, ushbu $\bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{0}$ tenglik bajarilsa ($-\bar{x}$ ni $\bar{x}$ qarama-qarshi element deb ataymiz)

5⁰ $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$ ($\forall \bar{x} \in L$)

6⁰ $\lambda(\mu \bar{x}) = (\lambda\mu) \bar{x}$ ($\forall \bar{x} \in L, \forall \lambda, \mu \in R$) (guruhlash xossasi)

$7^0 (\lambda + \mu) \bar{x} = \lambda \bar{x} + \mu \bar{x} \quad (\forall \bar{x} \in L, \forall \lambda, \mu \in R) \quad (\text{sonlar yig'indisini ko'p.taq.xossasi})$

$8^0 \lambda(\bar{x} + \bar{y}) = \lambda \bar{x} + \lambda \bar{y} \quad (\forall \bar{x}, \bar{y} \in L, \forall \lambda \in R) \quad (\text{element yig'indi sonini taq.xossasi})$

Bu I,II,III – shartni qanoatlantiruvchi α to'plamni *chiziqli fazo* deb ataymiz. Haqiqiy sonlar to'plamidagi chiziqli fazo, odatda *haqiqiy fazo* deyiladi, kompleks sonlar to'plamidagi chiziqli fazo esa, *kompleks fazo* deyiladi.

Chiziqli fazoga doir misollarni qaraymiz.

1. $R^n = \left\{ \bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i - \text{haqiqiy sonlar} \right\}$ to'plamini qaraymiz. R^n

to'plamning elementlari ustida qo'shish va songa ko'paytirish amallari va 8 aksioma bajariladi. Haqiqatan,

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n, \bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n, \forall \lambda \in R \text{ bo'lsin, u holda}$$

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in R^n$$

$$\lambda \bar{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \in R^n. \quad \bar{0} = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{n \text{ ta}}, \quad -\bar{x} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n).$$

Demak, R^n - chiziqli fazo bo'ladi.

2. Darajasi n natural sondan oshmaydigan hamda qo'shish va songa ko'paytirish amallari odatdagicha bajariladigan barcha ko'phadlar to'plami chiziqli fazo hosil qiladi.

3. Fazoning tayinlangan nuqtasidan chiquvchi barcha radius vektorlar to'plami haqiqiy chiziqli fazo hosil qiladi.

12.2.Vektorlarning chiziqli bog'lanishi. Elementlari $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots, \bar{u}$ bo'lgan ixtiyoriy haqiqiy chiziqli L fazo berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Agar $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots, \bar{u}$ vektorlar uchun $\bar{x} = \alpha \bar{y} + \beta \bar{z} + \dots + \gamma \bar{u}$

tenglikni qanoatlantiruvchi $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ sonlar mavjud bo'lsa, $\bar{x}$ vektorlar orqali *chiziqli ifodasi* yoki *chiziqli kombinatsiyasi* deyiladi.

Bunda $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ sonlarning ba'zilar (hatto hammasi) nolga teng bo'lishi mumkin.

1-misol. $\bar{x} = (7, 12, 7)$ vektor $\bar{y} = (1, 2, 5)$, $\bar{z} = (-3, 0, 7)$, $\bar{u} = (4, 6, -8)$ vektorlar orqali chiziqli ifodalanadi:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 3\bar{y} + 0\bar{z} + 1\bar{u}, \\ (7, 12, 7) &= 3(1, 2, 5) + 0(-3, 0, 7) + (4, 6, -8)\end{aligned}$$

2-ta'rif. Agar berilgan $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots, \bar{u}$ vektorlar uchun kamida bittasi noldan farqli shunday $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu$ ($\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu \in R$) sonlar mavjud bo'lsaki, ushbu

$$\alpha \bar{x} + \beta \bar{y} + \gamma \bar{z} + \dots + \mu \bar{u} = \bar{0} \quad (1)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots, \bar{u}$ vektorlar L chiziqli fazoda chiziqli bog'liq deyiladi.

3-ta'rif. Agar berilgan $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots, \bar{u}$ vektorlar uchun yuqorida aytilgan shartlarni qanoatlantiruvchi sonlar mavjud bo'lmasa, ya'ni (1) tenglik faqat $\alpha = \beta = \gamma = \dots = \mu = 0$ shartdagina bajarilsa, $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots, \bar{u}$ vektorlar L chiziqli fazoda chiziqli bog'lanmagan (erkli) deyiladi.

2-misol. Ratsional sonlar maydonidagi uch o'lchovli vektorlar fazosini olganimizda bu fazoning $\bar{x} = (1, 0, -2)$, $\bar{y} = (3, -9, 3)$, $\bar{z} = (3, -6, 0)$, $\bar{u} = (2, 5, 7)$ vektorlar chiziqli bog'langan, chunki ratsional $3, 2, -3, 0$ sonlar uchun

$$3\bar{x} + 2\bar{y} - 3\bar{z} + 0\bar{u} = \bar{0}$$

bajariladi, bunda $\bar{0} = (0, 0, 0)$.

3-misol. Ushbu $\bar{a} = (1, 2, -1)$, $\bar{b} = (-2, 1, 3)$, $\bar{c} = (-1, 3, 1)$ vektorlar chiziqli bog'lanmagan haqiqatan

$$\alpha \bar{x} + \beta \bar{y} + \gamma \bar{c} = \bar{0} \quad (*)$$

tenglikdan albatta $\alpha = \beta = \gamma = 0$ degan natija kelib chiqishini ko'rsataylik.

Tegishli ifodani (*) tenglikka qo'ysak qo'yidagi hosil bo'ladi

$$\alpha(2,2,-1) + \beta(-2,1,3) + \gamma(-1,3,1) = (0,0,0)$$

$$\begin{array}{l} \alpha - 2\beta - \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha + 3\beta + \gamma = 0 \end{array} \quad \text{Bu bir jinsli sistemasi deyiladi.} \quad \left| \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{array} \right| = -5 \neq 0$$

Shu sababli $\alpha = \beta = \gamma = 0$ bo'ladi. Demak, (*) tenglik faqat $\alpha = \beta = \gamma = 0$ bajarilar ekan.

1-teorema. R^n chiziqli fazoning $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots, \bar{u}$ elementlari chiziqli bog'langan bo'lishi uchun bu elementlardan birortasi qolgan elementlarni chiziqli (kombinatsiyasi) ifodalangan bo'lishi zarur va yetarli.

Quyidagi elementar tasdiqlar o'rinlidir:

1⁰ Agar $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots, \bar{u}$ elementlardan birortasi nol elementga ega bo'lsa, u holda bu elementlar chiziqli bog'langandir.

2⁰ Agar $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots, \bar{u}$ elementlarni bir qismi chiziqli bog'langan bo'lsa, u holda hamma elementlari chiziqli bog'langan bo'ladi.

3⁰ Har qanday $\bar{x}$ vektorini chiziqli ifodalash mumkin.

$$\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

12.3. Bazis va koordinatalar.

4-ta'rif. L chiziqli fazoning har bir $\bar{x}$ elementni uchun, shunday $x_1, x_2, \dots, x_n$ sonlar mavjud bo'lib, ushbu

$$\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n$$

Tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \dots, \overline{e}_n$ chiziqli bog'lanmagan $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \dots, \overline{e}_n$ vektorlar sistemasi L chiziqli fazoning *bazisi* deyiladi, bunda $x_1, x_2, \dots, x_n$ sonlar $\overline{x}$ vektorning koordinatalari deyiladi.

2-teorema. L chiziqli fazoning har bir $\overline{x}$ elementini yagona usulda bazis vektorlari orqali yechish mumkin, ya'ni

$$\overline{x} = x_1 \overline{e}_1 + x_2 \overline{e}_2 + \dots + x_n \overline{e}_n \quad (1)$$

12.4. Chiziqli fazoning o'lchovi. L chiziqli fazo $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \dots, \overline{u}$ elementlari bilan berilgan bo'lsin.

5-ta'rif. L chiziqli fazoning $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \dots, \overline{u}$ elementlaridan n tasi chiziqli bog'lanmagan (erkli) vektorlar sistemasi mavjud bo'lib, $n+1$ tasi chiziqli bog'langan bo'lsin, u holda L chiziqli fazo n o'lchovli *chiziqli fazo* deyiladi va n o'lchovli chiziqli fazoning o'lchovi odatda quyidagicha belgilanadi. $\dim L = n$

6-ta'rif. Agar L chiziqli fazoda cheksiz ko'p chiziqli bog'lanmagan vektorlar sistemasi mavjud bo'lsa, u holda bu L cheksiz *o'lchovli chiziqli fazo* deyiladi va $\dim L = \infty$ bo'ladi.

4-misol. R maydonda darajalari $(n-1)$ dan ortiq bo'lmagan ko'phadlar fazosini olaylik. Bu fazoda ushbu

$$1, x, x^2, \dots, x^{n-1} \quad (2)$$

vektorlar chiziqli bog'lanmagan, chunki

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} = 0$$

tenglik, ma'lumki, $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$ shartdagina o'rinli bo'ladi. Endi, fazoning istalgan

$$f(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_{n-1} x^{n-1}$$

vektorni olsak, uning (2) vektorlar orqali ifodalanishi ko'rinib turadi. Shunday qilib, biz bunda n o'lchovli fazoga ega bo'lamiz.

3-teorema. Agar L chiziqli fazoning o'lchovi n ga teng bo'lsa, u holda bu L chiziqli fazoning n ta chiziqli bog'lanmagan vektorlari uning bazisi bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Quyida keltirilgan sonlar to'plamlari haqiqiy chiziqli fazoni tashkil etadimi?

a) N b) Z c) Q d) R e) R^+ (Barcha musbat haqiqiy sonlar to'plami)

2. Vektorlar algebrasida kiritilgan vektorlarning qo'shish, vektorlarni songa ko'paytirish amallariga bo'ysunadigan quyidagi geometrik vektorlar to'plamlari haqiqiy chiziqli fazoni tashkil etadimi?

- a) Berilgan to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan barcha vektorlar to'plami;
- b) Berilgan tekislikka parallel bo'lgan barcha vektorlar to'plami;
- c) Berilgan to'g'ri chiziqqa parallel bo'lmagan barcha vektorlar to'plami;
- d) Oxirgi nuqtasi berilgan to'g'ri chiziqqa yotuvchi barcha vektorlar to'plami;
- e) Oxirgi nuqtasi birinchi chorakda yotuvchi barcha vektorlar to'plami;

3. Matrisalarni qo'shish, matrisani R maydondan olingan elementga ko'paytirish amallarga bo'ysunadigan matrisalar to'plami R maydon ustida chiziqli fazoni tashkil etadimi?

- a) barcha matrisalar to'plami;
- b) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in R \right\};$
- c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in R \right\};$
- d) $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in R \right\};$
- e) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in R \right\};$

4. Agar vektorlar sistemasida ikkita vektor skalyar ko'paytuvchilari bilan farq etilsa, unda vektorlar sistemasi chiziqli bog'langanligini isbotlang.

5. a, b, c – chiziqli bog'lanmagan vektorlar sistemasi bo'lsin. Quyida berilgan vektorlar sistemasi chiziqli bog'lanmagan bo'la oladimi?

a) $a, a+b, a+b+c$; b) $a+b, b+c, c+a$; c) $a-b, b-c, c-a$.

6. R_3 fazoda berilgan vektorlar sistemasi $a_1 = (\alpha, 1, 0)$, $a_2 = (1, \alpha, 1)$, $a_3 = (0, 1, \alpha)$ chiziqli bog'langan bo'lishi uchun, α son qanday shartga qanoatlantirishi kerak.

7. Haqiqiy chiziqli fazoda berilgan vektorlar sistemasi chiziqli bog'langanligini ko'rsatib, $\vec{O}$ ga teng bo'lgan notrival chiziqli kombinatsiyasini toping.

a) $a_1 = (1, 2, 5)$, $a_2 = (5, 3, 1)$, $a_3 = (-15, -2, 21)$

b) $f_1(x) = x^2 + 5$, $f_2(x) = x^2 - 4x + 3$, $f_3(x) = x^2 + 16x + 13$;

c) $z_1 = 2 + 5i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = 6 + 29i$;

d) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -5 \\ -8 & 5 & -11 \end{pmatrix}$;

e) $f_1(t) = \sin^2 t$, $f_2(t) = \cos^2 t$, $f_3(t) = t$, $f_4(t) = 3$, $f_5(t) = e^t$.

8. Haqiqiy chiziqli fazoda berilgan vektorlar sistemasi chiziqli bog'lanmaganliklarini ko'rsating:

a) $(5, 3, 1)$, $(1, 1, 1)$, $(1, 4, 2)$;

b) $(x, y, 3)$, $(2, x - y, 1)$ $\forall x, y \in \mathbf{R}$, $x \neq 6$, $y = \frac{9}{2}$;

c) $e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $2 + 5i$, $1 - i$;

9. Keltirilgan chiziqli fazolarni o'lchovini va biror bazisini ko'rsatingi ko'rsating:

a) $x + 2$, $x - 2$;

b) $6x + 9$, $8x + 12$;

c) $\sin x$, $\cos x$;

d) $1, (x-1)^2, (x-1)$;

e) $4 - x$, $2x + 3$, $6x + 8$;

f) $x^2 + 2x$, $3x^2 - 1$, $x + 4$;

g) $x^2 - x + 3$, $2x^2 + x$, $2x - 4$;

h) e^x , e^{2x} , e^{3x} ;

i) x , e^x , xe^x ;

j) $1, \sin^2 x, \cos 2x$;

k) $2^x, 3^x, 6^x$;

l) $\sin x, \cos x, \sin 2x$;

m) $\sin x, \sin(x+2), \cos(x-5)$; n) $x^2, x|x|$;

o) $x, x^3, |x^3|$;

p) $\arctg x, \operatorname{arcctg} 1$.

10. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ vektorlarning

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \gamma \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

Haqiqiy chiziqli fazo $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bazisdagi koordinatalari

topilsin.

11. Keltirilgan vektorlar sistemasi $\mathbb{R}^3$ fazoning bazisini tashkil etilishini tekshirib, $a = (3, 7, 13)$ vektorning keltirilgan har bir bazisdagi koordinatalari toping:

a) $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$

b) $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (1, 1, 0), e_3 = (1, 1, 1)$

c) $e_1 = (1, 1, 1), e_2 = (1, 2, 3), e_3 = (1, 4, 9)$.

12. $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazisda $f_1, f_2, \dots, f_n$ bazisga o'tish matrisasi topilsin va a bilan b vektorlarning shu bazisdagi koordinatalarini aniqlang, agar:

a) $e_1 = i - j, e_2 = 2i + j, f_1 = 5i - 2j, f_2 = -5i - 4j, a = 10i - j, b = 2i$; b)

$e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2, f_1 = 2, f_2 = x - 1, f_3 = (x - 1)^2, a = 6x^2 - 4x + 5,$

$b = 3x^3 - 5x^2 + 4x - 2$; c) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$

$f_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, f_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix},$

$b = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$; d) $e_1 = 1 - i, e_2 = 1 + i, f_1 = 2, f_2 = 2i, a = 2 + 2i, b = 2 - 2i$

e) $e_1 = (1, 2, 1), e_2 = (2, 3, 3), e_3 = (3, 7, 1), f_1 = (3, 1, 4), f_2 = (5, 2, 1),$
 $f_3 = (1, 1, -6), a = (9, 4, -1)$

13. Berilgan vektorlar sistemalarining barcha bazislari topilsin:

a) $a_1 = (4, -1, 3, -2),$

$a_2 = (8, -2, 6, -4),$

$a_3 = (3, -1, 4, -2),$

$a_4 = (6, -2, 8, -4);$

b) $a_1 = (1, 2, 0, 0),$

$a_2 = (1, 2, 3, 4),$

$a_3 = (3, 6, 0, 0);$

c) $a_1 = (2, 1, -3, 1),$

$a_2 = (4, 2, -6, 2),$

$a_3 = (6, 3, -9, 3),$

$a_4 = (1, 1, 1, 1);$

d) $a_1 = (1, 2, 3, 4),$

$a_2 = (2, 3, 4, 5),$

$a_3 = (3, 4, 5, 6),$

$a_4 = (4, 5, 6, 7).$

14. Berilgan vektorlar sistemalarini fazoning bazisigacha to'ldiring:

a) $a_1 = (1, 2, 1),$

$a_2 = (2, 4, 3);$

c) $a_1 = (1, 2, 0, 0),$

$a_2 = (2, 1, 0, 3);$

b) $a_1 = (2, 3, 1, 1),$

$a_2 = (2, 4, 1, 0);$

d) $a_1 = (2, 1, 0, 3),$

$a_2 = (4, 2, 0, 6).$

Mustaqil yechish uchun berilgan misollarning javoblari

1. a) – c), e) yo'q; d) ha. 2. a)- b) ha; c), e), f), g) yo'q; d) da, agar to'g'ri chiziq 0 nuqta orqali o'tsa; aks holda yo'q. 12.3. a) – c) yo'q ; b), d) ha. 5. a) ha ; b) ha s) yo'q. 6. $\alpha^2 - 2\alpha = 0$. 7. a) $5a_1 - 4a_2 - a_3 = 0$; b) $5f_1 - 4f_2 - f_3 = 0$; c) $5z_1 - 4z_2 - z_3 = 0$; d) $5A_1 - 4A_2 - A_3 = 0$; e) $-3f_1 - 3f_2 + 0f_3 + f_4 + 0f_5 = 0$. 9. b) $4(6x + 9) - 3(8x + 12) = 0$; e) $2(4 - x) - 32(3 + 2x) + 11(8 + 6x) = 0$; g) $4(x^2 - x + 3) - 2(2x^2 + x) + 2(2x - 4) = 0$; j) $1 - 2\sin^2 x - \cos 2x = 0$;

$$m) -\cos 7 \sin x + \cos 5 \sin(x+2) - \sin 2 \cos(x-5) = 0;$$

$$p) \arctg x + \operatorname{arccctg} x - \frac{\pi}{2} = 0. \quad \mathbf{10.} \quad A(3,4,-2), B \notin L. \quad \mathbf{11.} \quad \text{a) } (3,7,13); \text{ b) } (-4,-6,13); \text{ c) } (1,1,1).$$

$$\mathbf{12.} \quad \text{a) } \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \mathbf{a} = 4\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2, \mathbf{a} = \frac{3}{2}\mathbf{f}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{f}_2, \mathbf{b} = \frac{2}{3}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2), \mathbf{b} = \frac{2}{15}(2\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2);$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a} = 5\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3, \mathbf{a} = \frac{7}{2}\mathbf{f}_1 + 8\mathbf{f}_2 + 6\mathbf{f}_3, \mathbf{b} \notin L;$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3 - 3\mathbf{e}_4,$$

$$\mathbf{a} = 5\mathbf{f}_1 + 2\mathbf{f}_2 - 8\mathbf{f}_3 + 3\mathbf{f}_4, \mathbf{b} \in L;$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a} = 2\mathbf{e}_2, \mathbf{a} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2, \mathbf{b} = 2\mathbf{e}_1, \mathbf{b} = \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2;$$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}, \mathbf{a} = -139\mathbf{e}_1 + 38\mathbf{e}_2 + 24\mathbf{e}_3, \mathbf{a} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3.$$

13. a) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4; \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3; \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$; b) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2; \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$; c) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4; \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4; \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$; d) har qanday ikkita vektor bazisni tashkil qiladi. **14.** Bazisni tashkil qiladi, masalan, vektorlar a) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ va $\mathbf{a}_3 = (1,0,0)$; b) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 = (1,0,0,0)$ va $\mathbf{a}_4 = (0,1,0,0)$ c) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 = (1,0,0,0)$ va $\mathbf{a}_4 = (0,0,0,1)$; d) to'ldirish mumkin emas.

12-amaliy mashg'ulot.

Chiziqli operator va uning matrisasi

1-misol. R^3 fazoda e_1, e_2, e_3 basis berilgan bo'lsin. Mos ravishda $a_1 = e_1 - e_2 + e_3$, $a_2 = e_1 + e_2 - e_3$, $a_3 = e_1 - e_2 - e_3$ vektorlarni $b_1 = e_1 + 2e_2 + e_3$, $b_2 = e_2 + e_3$, $b_3 = e_1 + e_3$ vektorlarga o'tkazivch chiziqli operatorning mavjudligini isbotlang. e_1, e_2, e_3 bazisda uning matrisasini toping.

Yechilishi. Ravshanki a_1, a_2, a_3 chiziqli bog'liq bo'lmagan vektorlar, shuning uchun ular fazoda bazisni tashkil qiladi. Har qanday a vektorni bir qiymatli ko'rinishda yozish mumkin

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3.$$

Izlanayotgan operator $\varphi(a) = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3$ ko'rinishda bo'ladi. Mos ravishda e_1, e_2, e_3 bazisdan a_1, a_2, a_3 vektorga o'kazivchi operatorni ψ orqali belgilaymiz. U e_1, e_2, e_3 bazisda quyidagi matrisani aniqlaydi

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bu maxsusmas matrisa. Mos ravishda e_1, e_2, e_3 bazisdan b_1, b_2, b_3 vektorga o'kazivchi operator, ularning ko'payitmasi bo'ladi, shuning uchun u e_1, e_2, e_3 bazisda ushbu

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisaga ega. Shu bazisda operatorlarning ko'payitmasi matrisasi ularning matrisalarining ko'payitmasi teng bo'ladi, yani $D = AC$, bunda A – e_1, e_2, e_3 bazisdagi φ operatorning matrisasidir.

Demak,

$$A = DC^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

2-misol. Ushbu $\mathbf{a}_1 = (8, -6, 7)$, $\mathbf{a}_2 = (-16, 7, -13)$, $\mathbf{a}_3 = (9, -3, 7)$ bazisda φ chiziqli operator quyidagi matrisaga ega:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 15 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{b}_1 = (1, -2, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (3, -1, 2)$, $\mathbf{b}_3 = (2, 1, 2)$ bazisda φ chiziqli operatorning matrisasini toping.

Yechilishi. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ bazisdan $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ bazisga o'tish matrisasini topamiz

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & -16 & 9 & 1 & 3 & 2 \\ -6 & 7 & -3 & -2 & -1 & 1 \\ 7 & -13 & 7 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & 4 & -1 & 1 & 3 \\ 7 & -13 & 7 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & 1 & -5 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 & -11 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 & -11 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 15 & -30 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -6 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -6 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Demak, o'tish matrisasi T quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

T matrisaga T^{-1} teskari bo'lgan matrisani hisoblaymiz:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ bazisda φ chiziqli operatorning V matrisasini topamiz:

$$B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

3-misol. $\mathbf{a}_1 = (3,1)$, $\mathbf{a}_2 = (-2,3)$ φ chiziqli operator $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ matrisaga,

$\mathbf{b}_1 = (-1,3)$, $\mathbf{b}_2 = (4,2)$ bazisda esa ψ chiziqli operator $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ matrisaga ega bo'lsin.

$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ bazisda $\varphi + \psi$ chiziqli operatorning matrisasini toping.

Yechilishi. Dastlab $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ bazisda φ chiziqli operatorning matrisasini hisoblaymiz. Buning uchun $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ bazisdan $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ bazisga o'tish matrisasini topamiz:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -11 & -10 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & \frac{3}{11} & \frac{2}{11} \\ 0 & 1 & \frac{10}{11} & \frac{2}{11} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{11} & \frac{16}{11} \\ 0 & 1 & \frac{10}{11} & \frac{2}{11} \end{array} \right).$$

Demak, o'tish matrisasi T quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi

$$T = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{16}{11} \\ \frac{10}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}.$$

T matrisaga T^{-1} teskari bo'lgan matrisani hisoblaymiz:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{8}{7} \\ \frac{5}{7} & \frac{3}{14} \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ bazisda φ chiziqli operatorning V matrisasini topamiz:

$$T^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} T = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 2 & 16 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 3 & 16 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{154} \begin{pmatrix} 944 & 1236 \\ 426 & -38 \end{pmatrix} = \frac{1}{77} \begin{pmatrix} 472 & 618 \\ 213 & -19 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ bazisda $\varphi + \psi$ chiziqli operatorning matrisasini quyidagi ko'rinishda hisoblaymiz

$$\frac{1}{77} \begin{pmatrix} 472 & 618 \\ 213 & -19 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{703}{77} & \frac{772}{77} \\ \frac{367}{77} & \frac{520}{77} \end{pmatrix} = \frac{1}{77} \begin{pmatrix} 703 & 772 \\ 367 & 520 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ vektorlarga mos ravishda $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ vektorlarni o'tkazuvchi ikki o'lchovli fazoda chiziqli operatorning mavjudligini aniqlang va ushbu $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ bazisda operatorning matritsasini toping:

$$\text{a) } \begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2, & \mathbf{b}_1 &= 6\mathbf{e}_1 + 9\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{a}_2 &= 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, & \mathbf{b}_2 &= 11\mathbf{e}_1 - 8\mathbf{e}_2; \end{aligned}$$

$$\text{b) } \begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2, & \mathbf{b}_1 &= 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{a}_2 &= 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2, & \mathbf{b}_2 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2; \end{aligned}$$

$$\text{c) } \begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2, & \mathbf{b}_1 &= 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{a}_2 &= 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2, & \mathbf{b}_2 &= 4\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

2. $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ vektorlarga mos ravishda $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ vektorlarni o'tkazadigan uch o'lchovli fazoda chiziqli operatori mavjudligini aniqlang va $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ bazisda ushbu operatorning matritsasini toping, unda barcha vektorlarning koordinatalari berilgan:

$$\text{a) } \begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (2, 3, 5), & \mathbf{a}_2 &= (0, 1, 2), & \mathbf{a}_3 &= (1, 0, 0), \\ \mathbf{b}_1 &= (1, 1, 1), & \mathbf{b}_2 &= (1, 1, -1), & \mathbf{b}_3 &= (2, 1, 2); \end{aligned}$$

$$\text{b) } \begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (1, 2, 0), & \mathbf{a}_2 &= (1, 1, 1), & \mathbf{a}_3 &= (2, 3, 1), \\ \mathbf{b}_1 &= (1, 1, 1), & \mathbf{b}_2 &= (1, 1, 0), & \mathbf{b}_3 &= (1, 0, 0). \end{aligned}$$

3. $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ bazisda φ chiziqli operator $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ matrisasiga ega. Ushbu

$\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ bazisda uning matrisasini toping.

4. $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ bazisda φ chiziqli operator $\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$ matrisasiga ega.

Ushbu $\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{a}_2 = 3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ bazisda uning matrisasini toping.

5. $\mathbf{a}_1 = (1,2)$, $\mathbf{a}_2 = (1,1)$ bazisda φ chiziqli operator $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ matrisasiga ega.

Ushbu $\mathbf{b}_1 = (2,3)$, $\mathbf{b}_2 = (0,1)$ bazisda uning matrisasini toping.

6. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bazisda φ chiziqli operator

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ matrisasiga ega. Ushbu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ bazisda φ

chiziqli operatorning matrisasini toping.

7. $\mathbf{a}_1 = (1,2)$, $\mathbf{a}_2 = (2,3)$ bazisda φ chiziqli operator $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ matrisasiga,

$\mathbf{b}_1 = (3,1)$, $\mathbf{b}_2 = (4,2)$ bazisda esa ψ chiziqli operator $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ matrisasiga ega.

Ushbu $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ bazisda $\varphi + \psi$ operatorning matrisasini toping.

8. $\mathbf{a}_1 = (-3,7)$, $\mathbf{a}_2 = (1,-2)$ bazisda φ chiziqli operator $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ matrisasiga,

$\mathbf{b}_1 = (6,-7)$, $\mathbf{b}_2 = (-5,6)$ bazisda esa ψ chiziqli operator $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ matrisasiga ega.

Ushbu $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ bazisda $\varphi\psi$ operatorning matrisasini toping.

Mustaqil yechish uchun berilgan misol va masalalarning javoblari

$$1. a) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}; s) \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \frac{1}{2}(2-\alpha) \\ \beta & -\frac{1}{2}(1+\beta) \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbf{R} \right\}. 2. a) \text{Ha, } \begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}; b)$$

yo'q, chunki $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ chiziqli bo'g'liq sistema, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ esa chiziqli bo'g'liq

bo'lmagan sistema. 3. $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 8 & -11 \\ 9 & 22 \end{pmatrix}$. 4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. 5. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. 6.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. 7. \begin{pmatrix} 44 & 44 \\ -\frac{59}{2} & -25 \end{pmatrix}. 8. \begin{pmatrix} 109 & 93 \\ 34 & 29 \end{pmatrix}.$$

13-amaliy mashg'lot.

Chiziqli operatorning xos son va xos vektorlari

P maydonda L chiziqli fazo bo'lib, $A: L \rightarrow L$ chiziqli operator bo'lsin.

13.1-ta'rif. Agar noldan farqli x vektor uchun shunday $\lambda \in P$ son mavjud bo'lsaki, $Ax = \lambda x$ tenglik bajarilsa, u holda x vektor A chiziqli operatorning xos vektori va λ esa, bu xos vektorga mos xos son deb ataladi.

$n=1$ bo'lganda A chiziqli operatorning xarakteristik ko'phadi:

$$\varphi_A(\lambda) := \det(A - \lambda E) = \det(A_e - \lambda E) = a_{11} - \lambda.$$

$n=2$ bo'lganda A chiziqli operatorning xarakteristik ko'phadi:

$$\begin{aligned}\varphi_A(\lambda) &:= \det(A - \lambda E) = \det(A_e - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.\end{aligned}$$

$n=3$ bo'lganda A chiziqli operatorning xarakteristik ko'phadi:

$$\begin{aligned}\varphi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 - \\ &- \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda + \det A.\end{aligned}$$

1-misol. R^3 fazoda matritsasi berilgan operatorning barcha xos vektorlarini toping:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Yechilishi. Berilgan matrisaning $A - \lambda E$ xarakteristik ko'phadi va xarakteristik tenglamasini $\det(A - \lambda E) = 0$ to'zimiz:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 & 2 \\ 0 & 1 - \lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix}; \quad \det(A - \lambda E) = (1 - \lambda)^3 = 0.$$

Shunday qilib, 1 xarakteristik tenglamaning uch karrali ildizga bo'lib, u xos son haqiqiy sonlar yotadi.

Ushbu $A - E$ matritsasi bilan chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasini tuzamiz. Shunday qilib, xos vektorlari $x_1 = \alpha$, α – bu erda har qanday haqiqiy son, $x_2 = x_3 = 0$.

Ushbu misolda biz barcha ildizlar haqiqiy bo'lsa– da, xos vektorlaridan hech qanday bazisi mavjud emas–xos vektori mutanosiblikka ega.■

2-misol. C^3 fazoda A operatorning matritsasi berilgan

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ushbu operatorning xos vektorlarini va xos qadriyatlarini toping. Ushbu matritsani yangi bazaga o'tish orqali diagonal ko'rinishga olib kelish mumkinmi? Ushbu bazis va unga mos keladigan matritsani toping.

Yechilishi. Berilgan matrisaning $A - \lambda E$ xarakteristik ko'phadi va xarakteristik tenglamasini $\det(A - \lambda E) = 0$ to'zimiz:

$$\begin{aligned} \varphi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - \\ &- \left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right) \lambda + \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Shunday qilib, xarakteristik tenglamaning ildizlar $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1 + i$, $\lambda_3 = 1 - i$ bo'ladi.

Operatorning xos qiymatlari turli xil bo'lganligi asosan, unga mos xos vektorlari chiziqli bog'lanmagan bo'lgani uchun, berilgan operatorning xos vektorlarining bazisi mavjud bo'ladi.

Ushbu sistemadan

$$(A - 2E) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

xos qiymatlarga mos xos vektorlarni topamiz:

$$\lambda_1 = 2 \Rightarrow (0, 1, -1)^T$$

$$\lambda_2 = 1 + i \Rightarrow (1 + i, 1, 1)^T$$

$$\lambda_3 = 1 - i \Rightarrow (1 - i, 1, 1)^T$$

Shunday qilib, ushbu operatorning bazisdagi matritsasi

$f_1 = (0, 1, -1)^T$, $f_2 = (1 + i, 1, 1)^T$, $f_3 = (1 - i, 1, 1)^T$ diagonal ko'rinishga olib keladi:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + i & 0 \\ 0 & 0 & 1 - i \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Chiziqli fazoning qandaydir bazisida matrisalar berilgan. Berilgan 1) **Q**; 2) **R**; 3) **C** maydonlarda chiziqli operatorning xos qiymatlari va xos vektorlarini toping:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Chiziqli fazoning qandaydir bazisida matrisalar berilgan. Berilgan **C** maydonlarda chiziqli operatorning xos qiymatlari va xos vektorlarini toping:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Ushbu operatorning xos vektorlarini va xos qadriyatlarini toping. **R** maydonda **L** chiziqli fazoda chiziqli operatorning matritsalarini yangi bazaga o'tish orqali diagonal ko'rinishga olib kelish mumkinmi? Ushbu bazis va unga mos keladigan matritsani toping.

$$\begin{aligned} \text{a)} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}; & \text{b)} & \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; & \text{c)} & \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}; \\ \text{d)} & \begin{pmatrix} 3 & 12 & -4 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -12 & 6 \end{pmatrix}; & \text{e)} & \begin{pmatrix} 10 & -3 & -9 \\ -18 & 7 & 18 \\ 18 & -6 & -17 \end{pmatrix}; & \text{f)} & \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -12 & 5 & 12 \\ 10 & -3 & -9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mustaqil yechish uchun misollarning javoblari

1. a) $\mathbf{Q} : \lambda_1 = \lambda_2 = -1, \{\alpha(1,1) | 0 \neq \alpha \in \mathbf{Q}\};$

$\mathbf{R} : \lambda_1 = \lambda_2 = -1, \{\alpha(1,1) | 0 \neq \alpha \in \mathbf{R}\};$

$\mathbf{C} : \lambda_1 = \lambda_2 = -1, \{\alpha(1,1) | 0 \neq \alpha \in \mathbf{C}\};$

b) $\mathbf{Q}$ va $\mathbf{R}$ xos vektorlari yo'q;

$\mathbf{C} : \lambda_1 = 1+2i, \{\alpha(1,1-i) | 0 \neq \alpha \in \mathbf{C}\}; \lambda_2 = 1-2i, \{\alpha(1,1+i) | 0 \neq \alpha \in \mathbf{C}\};$

c) $\mathbf{Q}$ xos vektorlari yo'q;

$\mathbf{R} : \lambda_1 = \sqrt{2}, \{\alpha(1, \sqrt{2}) | 0 \neq \alpha \in \mathbf{R}\}; \lambda_2 = -\sqrt{2}, \{\alpha(1, -\sqrt{2}) | 0 \neq \alpha \in \mathbf{R}\}$

$\mathbf{C} : \lambda_1 = \sqrt{2}, \{\alpha(1, \sqrt{2}) | 0 \neq \alpha \in \mathbf{C}\}; \lambda_2 = -\sqrt{2}, \{\alpha(1, -\sqrt{2}) | 0 \neq \alpha \in \mathbf{C}\};$

d) $\mathbf{Q} : \lambda_1 = 1, \{\alpha(1,1) | 0 \neq \alpha \in \mathbf{Q}\}; \lambda_2 = -1, \{\alpha(1,-1) | 0 \neq \alpha \in \mathbf{Q}\};$

$\mathbf{R} : \lambda_1 = 1, \{\alpha(1,1) | 0 \neq \alpha \in \mathbf{R}\}; \lambda_2 = -1, \{\alpha(1,-1) | 0 \neq \alpha \in \mathbf{R}\};$

$\mathbf{C} : \lambda_1 = 1, \{\alpha(1,1) | 0 \neq \alpha \in \mathbf{C}\}; \lambda_2 = -1, \{\alpha(1,-1) | 0 \neq \alpha \in \mathbf{C}\};$

2. a) $\lambda_1 = i, x = (-(1+i)x_2, x_2)^T; \lambda_2 = -i, x = ((i-1)x_2, x_2)^T, \forall x_2 \in \mathbf{C};$

b) $\lambda_1 = 1, x = (x_1, 2x_1, x_1)^T; \lambda_2 = 2+i, x = (x_1(2-i), (2+i)x_1, x_1)^T;$

$\lambda_3 = 2-i, x = (x_1(1-i), (2+i)x_1, x_1)^T;$

3. a) $\mathbf{a}_1(1,1), \mathbf{a}_2(1,-4), \text{diag}[0,5];$

b), c), f) diagonal ko'rinishga kelmaydi;

d) $\mathbf{a}_1(-2,1,2), \mathbf{a}_2(-8,3,7), \mathbf{a}_3(-3,1,3), \text{diag}[1,2,3];$

e) $\mathbf{a}_1(1,3,0), \mathbf{a}_2(0,-3,1), \mathbf{a}_3(1,-2,2), \text{diag}[1,1,-2].$

61. b), c) da ; b) $\text{diag}[1,2,2];$ c) $\text{diag}[1,1,-1,-1].$

14-mavzu.

Kvadratik forma va uni kanonik ko'rinishga keltirish

1-misol. Kompleks C va R haqiqiy sonlar maydonida quyidagi

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

kvadratik formani normal ko'rinishga keltiring va bu ko'rinish keltiradigan bitta almashtirishni toping:

Yechilishi. Ushbu kvadratik formada kvadrat hadlar yo'qligi sababli, o'zaro qo'shma chiziqli almashtirish olamiz:

$$x_1 = y_1 - y_2, \quad x_2 = y_1 + y_2, \quad x_3 = y_3 \quad (1)$$

U holda berilgan kvadratik forma quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi

$$f(y) = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 = (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2.$$

Endi quyidagi chiziqli almashtirishni olamiz *Primeniv preobrazovaniye*

$$z_1 = y_1 + y_3, \quad z_2 = y_2, \quad z_3 = y_3, \quad (2)$$

Bu almashtirishga asosan, kvadratik forma normal ko'rinishga keladi

$$f_2(z) = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2.$$

(2) dan $y_1 = z_1 - z_3, y_2 = z_2, y_3 = z_3$ topamiz. Bu ifodalarni (1) ga qo'ysak, quyidagi chiziqli almashtirishni olamiz

$$x_1 = z_1 - z_2 - z_3, \quad x_2 = z_1 + z_2 - z_3, \quad x_3 = z_2. \quad (3)$$

Berilgan $f(x)$ kvadratik forma quyidagi $f_2(z)$ kanonik ko'rinishga keltirildi.

Ravshanki, R haqiqiy sonlar maydonida berilgan $f(x)$ kvadratik formaning kanonik ko'rinish yana normal korinishda, (3) chiziqli almashtirish bilan ham bu ko'rinishga keladi. C kompleks sonlar maydonida kvadratik formaning normal shaklini topamiz. Bu hol uchun quyidagi chiziqli almashtirishni qo'llaymiz:

$$z_1 = t_1, \quad z_2 = it_2, \quad z_3 = it_3, \quad (4)$$

u holda C kompleks sonlar maydonida kvadratik formaning normal shakliga ega bo'lamiz

$$f_3(t) = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2.$$

(4) almashtirishni (3) ga qo'ysak, ushbu almashtirishga ega bo'lamiz:

$$x_1 = t_1 - it_2 - it_3, \quad x_2 = t_1 + it_2 - it_3, \quad x_3 = it_3.$$

$\mathbb{C}$ kompleks sonlar maydonida berilgan $f(\mathbf{x})$ kvadratik forma quyidagi $f_3(\mathbf{t})$ normal ko'rinishga keltirildi. ■

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Ushbu matritsaga ega bo'lgan kvadrat formaning yozing:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}; \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. $\mathbb{R}$ haqiqiy sonlar maydonida quyidagi kvadratik formalarni normal ko'rinishga keltiring

$$\text{a) } f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3;$$

$$\text{b) } f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3;$$

$$\text{c) } f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3.$$

3. Quyidagi kvadratik formalarni normal ko'rinishga keltiring:

$$\text{a) } 2x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 12x_2x_3;$$

$$\text{b) } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3;$$

$$\text{c) } x_1^2 + 5x_2^2 - x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_2x_3;$$

$$\text{d) } x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3;$$

$$\text{e) } x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_1x_4.$$

3. $\mathbb{R}$ maydonining kvadratik formalarni normal ko'rinishga keltiring:

$$\text{a) } 2x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2;$$

$$\text{b) } x_1^2 + x_2x_3 + x_3x_4;$$

$$\text{c) } x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Mustaqil yechish uchun misollarning javoblari

1. a) $5x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_2^2$; b) $-4x_1^2 + 10x_1x_2 - 4x_2^2$;
c) $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 3x_2^2 + 4x_3^2$; d) $4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 8x_2^2 + 4x_2x_3$.
2. a) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$; b) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$; c) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$;
 $x_1 = y_1 - 0,5y_2 + \frac{5}{6}y_3$, $x_2 = \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{6}y_3$, $x_3 = \frac{1}{3}y_2$.
3. a) Nad $\mathbf{R}: y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$; nad $\mathbf{C}: y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$;
b) nad $\mathbf{R}: y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$; nad $\mathbf{C}: y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$
c), d), e) nad $\mathbf{R}: y_1^2 - y_2^2$, nad $\mathbf{C}: y_1^2 + y_2^2$.
4. a) $\frac{1}{2}y_1^2 + \frac{3}{2}y_2^2 - 5y_3^2$; 3, 2, 1, 1; $y_1 = 2x_1 + x_2, y_2 = x_2, y_3 = x_3$;
b) $z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$; 3, 2, 1, 1; $z_1 = x_1, z_2 = \frac{1}{2}(x_2 + x_3 + x_4)$,
 $z_3 = \frac{1}{2}(x_2 - x_3 + x_4), z_4 = x_4$;
c) $y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{9}{2}y_3^2$; 3, 2, 1, 1; $y_1 = x_1 - 3x_2 - x_3, y_2 = 4x_2 + x_3, y_3 = x_3$;

15-amaliy mashg'ulot.

Chiziqli tenglamalar sistemalarini oddiy iteratsiya usuli va Zeydel usuli bilan yechish

Iteratsiya usuli va Zeydel usulining chiziqli tenglamalar sistemalarini yechishga tatbiq etilishiga oid misollar ko'ramiz.

1-misol. Ushbu chiziqli tenglamalar sistemasini (0,1 gacha aniqlikda) oddiy iteratsiya usuli bilan yeching:

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 = 26, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 7. \end{cases}$$

Yechilishi. Berilgan sistemani maxsus (15.3) ko'rinishga keltiramiz:

$$\begin{cases} x_1 = 3,25 - 0,125x_2 - 0,125x_3, \\ x_2 = 1,4 - 0,2x_1 + 0,2x_3, \\ x_3 = 1,4 - 0,2x_1 + 0,2x_2. \end{cases}$$

Ushbu matrisalarni tuzamiz:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -0,125 & -0,125 \\ -0,2 & 0 & 0,2 \\ -0,2 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 3,25 \\ 1,4 \\ 1,4 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Ketma- ket yaqinlashishlarni amalga oshiramiz. Nolinchi yaqinlashish sifatida $x^{(0)} = \beta$ olinadi:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,25 \\ 1,4 \\ 1,4 \end{pmatrix}.$$

Birinchi yaqinlashish: $\bar{x}^{(1)} = \bar{\beta} + \alpha \bar{x}^{(0)}$:

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,25 \\ 1,4 \\ 1,4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0,125 & -0,125 \\ -0,2 & 0 & 0,2 \\ -0,2 & 0,2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3,25 \\ 1,4 \\ 1,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,9 \\ 1,03 \\ 1,03 \end{pmatrix}.$$

Ikkinchi yaqinlashish $\bar{x}^{(2)} = \bar{\beta} + \alpha \bar{x}^{(1)}$:

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,25 \\ 1,4 \\ 1,4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0,125 & -0,125 \\ -0,2 & 0 & 0,2 \\ -0,2 & 0,2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2,9 \\ 1,03 \\ 1,03 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,992 \\ 1,026 \\ 1,026 \end{pmatrix}.$$

Uchinchi yaqinlashish $\bar{x}^{(3)} = \bar{\beta} + \alpha \bar{x}^{(2)}$:

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,25 \\ 1,4 \\ 1,4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0,125 & -0,125 \\ -0,2 & 0 & 0,2 \\ -0,2 & 0,2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2,992 \\ 1,026 \\ 1,026 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,99 \\ 1,01 \\ 1,01 \end{pmatrix}.$$

Shunday qilib, $x_1^{(3)} = 2,99$, $x_2^{(3)} = 1,01$, $x_3^{(3)} = 1,01$ va 0,1 gacha aniqlikda $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ ni hosil qilamiz.

2- misol. Ushbu tenglamalar sistemasini 0,001 gacha aniqlikda Zeydel usuli bilan yeching

$$\left. \begin{aligned} 10x_1 + x_2 + x_3 &= 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 &= 13, \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 &= 14. \end{aligned} \right\}$$

Yechilishi. Iterasiya jarayoni yaqinlashadi, chunki ushbu

$$\begin{aligned} |a_{11}| = 10 &> |a_{12}| + |a_{13}| = 2, \\ |a_{22}| = 10 &> |a_{21}| + |a_{23}| = 3, \\ |a_{33}| = 10 &> |a_{31}| + |a_{32}| = 4. \end{aligned}$$

(15.6) shart bajariladi. Berilgan sistemani (15.3) ko'rinishga keltiramiz:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 1,2 - 0,1x_2 - 0,1x_3, \\ x_2 &= 1,3 - 0,2x_1 - 0,1x_3, \\ x_3 &= 1,4 - 0,2x_1 - 0,2x_2. \end{aligned} \right\}$$

Nolinchi yaqinlashish sifatida

$$x_1^{(0)} = 1,2, x_2^{(0)} = 1,3, x_3^{(0)} = 1,4$$

yechimlarini olamiz. Zeydel jarayonini ketma-ket qo'llab, quyidagilarni ketma-ket hosil qilamiz:

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(1)} &= 1,2 - 0,1 \cdot 1,3 - 0,1 \cdot 1,4 = 0,93, \\ x_2^{(1)} &= 1,3 - 0,2 \cdot 0,93 - 0,1 \cdot 1,4 = 0,974, \\ x_3^{(1)} &= 1,4 - 0,2 \cdot 0,93 - 0,2 \cdot 0,974 = 1,0192. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(2)} &= 1,2 - 0,1 \cdot 0,974 - 0,1 \cdot 1,0192 = 1,0007, \\ x_2^{(2)} &= 1,3 - 0,2 \cdot 1,0007 - 0,1 \cdot 1,0192 = 0,9979, \\ x_3^{(2)} &= 1,4 - 0,2 \cdot 1,0007 - 0,2 \cdot 0,9979 = 1,0003. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(3)} &= 1,2 - 0,1 \cdot 0,9979 - 0,1 \cdot 1,0003 = 1,0002, \\ x_2^{(3)} &= 1,3 - 0,2 \cdot 1,0002 - 0,1 \cdot 1,0003 = 0,9999, \\ x_3^{(3)} &= 1,4 - 0,2 \cdot 1,0002 - 0,2 \cdot 0,9999 = 1,0000. \end{aligned} \right\}$$

Tenglamalar sistemasining yechimi sifatida uchinchi yaqinlashishni qabul qilamiz:

$$x_1^{(3)} = 1,0002, x_2^{(3)} = 0,9999, x_3^{(3)} = 1,0000.$$

0,001 gacha aniqlikda yechim $x_1 = 1,000, x_2 = 1,000, x_3 = 1,000$ bo'ladi.

Taqqoslash uchun sistemaning aniq yechimini keltiramiz: $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Ushbu chiziqli tenglamalar sistemasini 0,001 gacha aniqlikda oddiy iteratsiya usuli bilan yeching:

$$\left. \begin{aligned} 7,6x_1 + 0,5x_2 + 2,4x_3 &= 1,9, \\ 1) \quad 2,2x_1 + 9,1x_2 + 4,4x_3 &= 9,7, \\ -1,3x_1 + 0,2x_2 + 5,8x_3 &= -1,4. \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} 8,3x_1 - 0,1x_2 + 0,2x_3 &= 16,1, \\ 2) \quad 0,3x_1 + 4,5x_2 - 0,1x_3 &= -3,6, \\ 0,4x_1 - 0,2x_2 + 5,5x_3 &= -15,5. \end{aligned} \right\}$$

2. Ushbu tenglamalar sistemasini 0,001 gacha aniqlikda Zeydel usuli bilan yeching

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1, \\ 1) \quad -x_1 + 3x_2 &= 1, \\ 2x_{12} + 4x_3 &= -2. \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} 4,3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 13,6, \\ 2) \quad x_1 + 5,1x_2 + 0 \cdot x_3 &= -13,3, \\ 0,3x_1 - 2,1x_2 + 6,2x_3 &= 13,1. \end{aligned} \right\}$$

Mustaqil yechish uchun misollarning javoblari

1. 1) $x_1 = 0,236; x_2 = 1,103; x_3 = -0,214$. 2) $x_1 = 2; x_2 = -1; x_3 = -3$.

2. 1) $x_1 = 4,83; x_2 = 1,94; x_3 = -2,91$. 2) $x_1 = 2; x_2 = -3; x_3 = 1$.

1-7- mavzu bo'yicha amaliy mashg'ulotlarni mustahkamlash uchun nazorat topshiriqlari

1.1.-misol. Berilgan tenglamalar sistemasini a) Kramer qoidasidan foydalanib; b) Gauss usuli; c) Maple tizimidan foydalanib yeching.

$$1.1.1. \begin{cases} 2x + 2y - z + t = 4, \\ 4x + 3y - z + 2t = 6, \\ 8x + 5y - 3z + 4t = 12, \\ 3x + 3y - 2z + 2t = 6 \end{cases}$$

$$1.1.2. \begin{cases} 2x + 3y + 11z + 5t = 2, \\ x + y + 5z + 2t = 1, \\ 2x + y + 3z + 2t = -3, \\ x + y + 3z + 4t = -3 \end{cases}$$

$$1.1.3. \begin{cases} 2x + y + 4z + 8t = -1, \\ x + 3y - 6z + 2t = 3, \\ 3x - 2y + 2z - 2t = 8, \\ 2x - y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$1.1.4. \begin{cases} 2x - y - 6z + 3t + 1 = 0, \\ 7x - 4y + 2z - 15t + 32 = 0, \\ x - 2y - 4z + 9t - 5 = 0, \\ x - y + 2z - 6t + 8 = 0 \end{cases}$$

$$1.1.5. \begin{cases} 2x + 5y + 4z + t = 20, \\ x + 3y + 2z + t = 11, \\ 2x + 10y + 9z + 7t = 40, \\ 3x + 8y + 9z + 2t = 37 \end{cases}$$

$$1.1.6. \begin{cases} 6x + 5y - 2z + 4t + 4 = 0, \\ 9x - y + 4z - t - 13 = 0, \\ 3x + 4y + 2z - 2t - 1 = 0, \\ 3x - 9y + 2t - 11 = 0 \end{cases}$$

$$1.1.7. \begin{cases} 7x + 9y + 4z + 2t - 2 = 0, \\ 2x - 2y + z + t - 6 = 0, \\ 5x + 6y + 3z + 2t - 3 = 0, \\ 2x + 3y + z + t = 0 \end{cases}$$

$$1.1.8. \begin{cases} 3x + 4y + z + 2t + 3 = 0, \\ 3x + 5y + 3z + 5t + 6 = 0, \\ 6x + 8y + z + 5t + 8 = 0, \\ 3x + 5y + 3z + 7t + 8 = 0 \end{cases}$$

$$1.1.9. \begin{cases} 3x - 2y - 5z + t = 3, \\ 2x - 3y + z + 5t = -3, \\ x + 2y - 4t = -3, \\ x - y - 4z + 9t = 22 \end{cases}$$

$$1.1.10. \begin{cases} 4x - 3y + z + 5t - 7 = 0, \\ x - 2y - 2z - 3t - 3 = 0, \\ 3x - y + 2z + 1 = 0, \\ 2x + 3y + 2z - 8t + 7 = 0 \end{cases}$$

$$1.1.11. \begin{cases} 2x - 2y + t + 3 = 0, \\ 2x + 3y + z - 3t + 6 = 0, \\ 3x + 4y - z + 2t = 0, \\ x + 3y + z - t - 2 = 0 \end{cases}$$

$$1.1.12. \begin{cases} x + y - 6z - 4t = 6, \\ 3x - y - 6z - 4t = 2, \\ 2x + 3y + 9z + 2t = 6, \\ 3x + 2y + 3z + 8t = -7 \end{cases}$$

$$1.1.13. \begin{cases} 2x - 3y + 3z + 2t - 3 = 0, \\ 6x + 9y - 2z - t + 4 = 0, \\ 10x + 3y - 3z - 2t - 3 = 0, \\ 8x + 6y + z + 3t + 7 = 0 \end{cases}$$

$$1.1.14. \begin{cases} x + 2y + 5z + 9t = 79, \\ 3x + 13y + 18z + 30t = 263, \\ 2x + 4y + 11z + 16t = 146, \\ x + 9y + 9z + 9t = 92 \end{cases}$$

$$1.1.15. \begin{cases} x + 2y + 3z - 2t = 6, \\ 2x - y - 2z - 3t = 8, \\ 3x + 2y - z + 2t = 4, \\ 2x - 3y + 2z + t = -8 \end{cases}$$

$$1.1.16. \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 5, \\ 2x + y + 2z + 3t = 1, \\ 3x + 2y + z + 2t = 1, \\ 4x + 3y + 2z + t = -5 \end{cases}$$

$$1.1.17. \begin{cases} y - 3z + 4t = -5, \\ x - 2z + 3t = -4, \\ 3x + 2y - 5t = 12, \\ 4x + 3y - 5z = 5 \end{cases}$$

$$1.1.18. \begin{cases} -3x + 9y + 3z + 6t = 2, \\ -5x + 8y + 2z + 7t = 3, \\ 4x - 5y - 3z - 2t = 0, \\ 7x - 8y - 4z - 5t = 4 \end{cases}$$

$$1.1.19. \begin{cases} 3x - 3y - 5z + 8t = 1, \\ -3x + 2y + 4z - 6t = 2, \\ 2x - 5y - 7z + 5t = 4, \\ -4x + 3y + 5z - 6t = 4 \end{cases}$$

$$1.1.20. \begin{cases} 2x - 5y + 4z + 3t - 2 = 0, \\ 3x - 4y + 7z + 5t + 4 = 0, \\ 4x - 9y + 8z + 5t - 4 = 0, \\ -3x + 2y - 5z + 3t + 6 = 0 \end{cases}$$

$$1.1.21. \begin{cases} 2x - 5y + z + 2t = 4, \\ -3x + 7y - z + 4t = 1, \\ 5x - 9y + 2z + 7t = 2, \\ 4x - 6y + z + 2t = 4 \end{cases}$$

$$1.1.22. \begin{cases} 3x - 5y - 2z + 2t = 6, \\ -4x + 7y + 4z + 4t = 4, \\ 4x - 9y - 3z + 7t = 6, \\ 2x - 6y - 3z + 2t = 1 \end{cases}$$

$$1.1.23. \begin{cases} 3x + 2y + 2z + 2t = 1, \\ 9x - 8y + 5z + 10t = 2, \\ 5x - 8y + 5z + 8t = 4, \\ 6x - 5y + 4z + 7t = 1 \end{cases}$$

$$1.1.24. \begin{cases} 7x + 6y + 3z + 7t = 4, \\ 3x + 5y + 7z + 2t = 3, \\ 5x + 4y + 3z + 5t = 1, \\ 5x + 6y + 5z + 4t = 6 \end{cases}$$

$$1.1.25. \begin{cases} 6x - 5y + 8z + 4t = 1, \\ 9x + 7y + 5z + 2t = 4, \\ 7x + 5y + 3z + 7t = 1, \\ -4x + 8y - 8z - 3t = 2 \end{cases}$$

$$1.1.26. \begin{cases} 7x + 3y + 2z + 6t = 4, \\ 8x - 9y + 4z + 9t = 1, \\ 7x - 2y + 7z + 3t = 4, \\ 5x - 3y + 3z + 4t = 6 \end{cases}$$

1.1.27-misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z + 5t = 3, \\ 5x + 4y + 3z + 2t = -3, \\ 3x + 2y + 5z + 4t = -3, \\ 5x + 2y + 3z + 4t = -1, \end{cases} \quad (1)$$

sistemani a) Kramer qoidasidan foydalanib; b) Gauss usuli; c) Maple tizimidan foydalanib yeching.

Yechilishi. a) **Kramer qoidasi.** Berilgan (1) sistemaning yechimini Kramer qoidasidan foydalanib topamiz. (1) sistemaning koeffitsiyentlaridan tuzilgan determinantni Laplas teoremasiga asosan, qo'yidagi yoyilmaga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned}
\Delta = \det A &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} (-1)^{1+2+1+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \\
&+ \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} (-1)^{1+2+1+4} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \\
&+ \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} (-1)^{1+2+2+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} (-1)^{1+2+2+4} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} (-1)^{1+2+3+4} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = \\
&= -56 + 84 - 56 - 224 + 28 = -112 \neq 0.
\end{aligned}$$

Endi $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z, \Delta_t$ determinantlarni hisoblash uchun Δ ning, navbat bilan, 1-,2-,3- va 4- ustunlari o'rniga ozod hadlarni qo'yamiz. Determinantni hisoblashda tartibni pasaytirish uslubidan foydalanamiz:

$$\begin{aligned}
\Delta_x &= \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & 4 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 9 & 13 & 17 \\ 0 & -2 & -6 & -10 \\ 0 & -4 & -4 & -8 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 9 & 13 & 17 \\ -2 & -6 & -10 \\ -4 & -4 & -8 \end{vmatrix} = \\
&= 8 \begin{vmatrix} 9 & 13 & 17 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 \cdot 14 = 112,
\end{aligned}$$

bunda ikkinchi sirtan -2, uchinchi sirtan -4 determinant belgisidan tashqari chiqargan.

$$\begin{aligned}
\Delta_y &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & -3 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & 5 & 4 \\ 5 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17 & 0 & 13 & 17 \\ -10 & 0 & -6 & -10 \\ -12 & 0 & -4 & -8 \\ 5 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 17 & 13 & 17 \\ -10 & -6 & -10 \\ -12 & -4 & -8 \end{vmatrix} = -112, \\
\Delta_z &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17 & 9 & 0 & 17 \\ -10 & -2 & 0 & -10 \\ -12 & -4 & 0 & -8 \\ 5 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 17 & 9 & 17 \\ -10 & -2 & -10 \\ -12 & -4 & -8 \end{vmatrix} = 224,
\end{aligned}$$

$$\Delta_t = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 5 & -3 \\ 5 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17 & 9 & 13 & 0 \\ -10 & -2 & -6 & 0 \\ -12 & -4 & -4 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 17 & 9 & 13 \\ -10 & -6 & -6 \\ -12 & -4 & -4 \end{vmatrix} = -224$$

Kramer formulalardan foydalanib x, y, z, t ni topamiz:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{112}{-112} = -1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-112}{-112} = 1,$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{224}{-112} = -2, \quad t = \frac{\Delta_t}{\Delta} = \frac{-224}{-112} = 2,$$

Shunday qilib, (1) sistemaning yechimi $(-1, 1, -2, 2)$ bo'ladi. ■

b) Gauss usuli. Berilgan (1) sistema noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish usuli ya'ni Gauss usuli bilan yechimini topamiz. Berilgan sistemaning determinanti $\Delta = \det A = -112 \neq 0$ bo'lganligi uchun, bu sistema yagona yechimga ega.

Avval -5 ga ko'paytirilgan birinchi tenglamani ko'paytirilgan ikkinchi tenglamani qo'shib, so'ngra -3 ga ko'paytirilgan birinchi tenglamani 2 ga ko'paytirilgan uchinchi tenglamani qo'shib, undan keyin -5 ga ko'paytirilgan birinchi tenglamani 2 ga ko'paytirilgan to'rtinchi tenglamaga qo'shib, ushbuni hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z + 5t = 3, \\ -7y - 24z - 21t = -21, \\ -5y - 2z - 7t = -15, \\ -11y - 14z - 17t = -17 \end{cases}$$

Bu sistemaning ikkinchi tenglamasini -7 ga qisqartirib, uchinchi va to'rtinchi tenglamalarni esa -1 ga ko'paytiramiz, natijada, ushbu

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z + 5t = 3, \\ y + 2z + 3t = 3, \\ 5y + 2z + 7t = 15, \\ 11y + 14z + 17t = 17 \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz.

Ikkinchi tenglamani -5 va -11 ga ko'paytirib, mos ravishda uchinchi va to'rtinchi tenglamalarga qo'shamiz:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z + 5t = 3, \\ y + 2z + 3t = 3, \\ -8z - 8t = 0, \\ -8z - 16t = -16, \end{cases}$$

Bu sistemaning uchinchi va to'rtinchi tenglamalarni -8 ga qisqartirib, uchinchi tenglamani to'rtinchi tenglamadan ayiramiz:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z + 5t = 3, \\ y + 2z + 3t = 3, \\ z + t = 0, \\ t = 2 \end{cases}$$

To'rtinchi tenglamadagi $t = 2$ qiymatini uchinchi tenglamaga qo'yib, z ni aniqlaymiz: $z = -t$, $z = 2$ z va t ning qiymatlarini ikkinchi tenglamaga qo'yib, y ni aniqlaymiz: $y = 3 - 2z - 3t = 3 + 4 - 6 = 1$. Nihoyat, birinchi tenglamadan x ni topamiz: $2x - 3y - 4z - 5t = 3 - 3 + 8 - 10 = -2$; $2x = -2$; $x = -1$

Shunday qilib, (1) sistemaning yechimi $(-1, 1, -2, 2)$ bo'ladi. ■

c) Maple tizimidan foydalanib misolni yechish:

> with(Student[LinearAlgebra]):

> A := <<2,5,3,5>|<3,4,2,2>|<4,3,5,3>|<5,2,4,4>>:

b := <3,-3,-3,-1>:

LinearSolve(A, b);

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \blacksquare$$

1. 2-misol. Berilgan tenglamalar sistemani matrisa usulida yeching.

$$1.2.1. \begin{cases} 2x + y + 3z = 7. \\ 2x + 3y + z = 1. \\ 3x + 2y + z = 6. \end{cases}$$

$$1.2.2. \begin{cases} 3x - y + z = 12. \\ x + 2y + 4z = 6. \\ 5x + y + 2z = 3. \end{cases}$$

$$1.2.3. \begin{cases} 2x - y + 2z = 3. \\ x + y + 2z = -4. \\ 4x + y + 4z = -3. \end{cases}$$

$$1.2.4. \begin{cases} 2x - y + 3z = -4. \\ x + 3y - z = 11. \\ x - 2y + 2z = -7. \end{cases}$$

$$1.2.5. \begin{cases} 3x - 2y + 4z = 12. \\ 3x + 4y - 2z = 6. \\ 2x - y - z = -9. \end{cases}$$

$$1.2.6. \begin{cases} 8x + 3y - 6z = -4. \\ x + y - z = 2. \\ 4x + y - 3z = -5. \end{cases}$$

$$1.2.7. \begin{cases} 4x + y - 3z = 9. \\ x + y - z = -2. \\ 8x + 3y - 6z = 12. \end{cases}$$

$$1.2.8. \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 33. \\ 7x - 5y = 24. \\ 4x + 11z = 39. \end{cases}$$

$$1.2.9. \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 12. \\ 7x - 5y + z = -33. \\ 4x + z = -7. \end{cases}$$

$$1.2.10. \begin{cases} 3x - 2y + 4z = 21. \\ 3x + 4y - 2z = 9. \\ 2x - y - z = 10. \end{cases}$$

$$1.2.11. \begin{cases} 4x + y + 4z = 19. \\ 2x - 2 + 2z = 11. \\ x + y + 2z = 8. \end{cases}$$

$$1.2.12. \begin{cases} 2x - y + 2z = 8. \\ x + y + 2z = 11. \\ 4x + y + 4z = 22. \end{cases}$$

$$1.2.13. \begin{cases} 2x - y - 3z = 0. \\ 3x + 4y + 2z = 1. \\ x + 5y + z = -3. \end{cases}$$

$$1.2.14. \begin{cases} 3x + y + z = -4. \\ -3x + 5y + 6z = 36. \\ x - 4y - 2z = -19. \end{cases}$$

$$1.2.15. \begin{cases} 3x - y + z = 9. \\ 5x + y + 2z = 11. \\ x + 2y + 4z = 19. \end{cases}$$

$$1.2.16. \begin{cases} 2x + 3y + z = 12. \\ 2x + y + 3z = 16. \\ 3x + 2y + z = 8. \end{cases}$$

$$1.2.17. \begin{cases} x + 4y - z = 6. \\ 5y + 4z = -20. \\ 3x - 2y + 5z = -22. \end{cases}$$

$$1.2.18. \begin{cases} 3x - 2y - 5z = 5. \\ 2x + 3y - 4z = 12. \\ x - 2y + 3z = -1. \end{cases}$$

$$1.2.19. \begin{cases} 2x - y + 2z = 0. \\ 4x + y + 4z = 6. \\ x + y + 2z = 4. \end{cases}$$

$$1.2.20. \begin{cases} 2x - y - 3z = -9. \\ x + 5y + z = 20. \\ 3x + 4y + 2z = 15. \end{cases}$$

$$1.2.21. \begin{cases} -3x + 5y + 6z = -8. \\ 3x + y + z = -4. \\ x - 4y - 2z = -9. \end{cases}$$

$$1.2.22. \begin{cases} 3x - y + z = -11. \\ 5x + y + 2z = 8. \\ x + 2y + 4z = 16. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
1.2.23. & \begin{cases} 2x + 3y + z = 4. \\ 2x + y + 3z = 0. \\ 3x + 2y + z = 1. \end{cases} & 1.2.24. & \begin{cases} x - 2y + 3z = 14. \\ 2x + 3y - 4z = -16. \\ 3x - 2y - 5z = -8. \end{cases} \\
1.2.25. & \begin{cases} 3x + y - z = 11. \\ 2x - y - z = 4. \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases} & 1.2.26. & \begin{cases} x + 5y - 6z = -15. \\ 3x + y + 4z = 13. \\ 2x - 3y + 3z = 9. \end{cases}
\end{array}$$

1.2.27-misol. Ushbu

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_3 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

sistemani matrisa usulida yeching.

Yechilishi. Bu misolda (2.2) belgilashga asosan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

ko'rinishda bo'ladi. U holda berilgan tenglamalar sistemasini

$$AX = V$$

ko'rinishda yozish mumkin. Endi $\det A$ ni topamiz:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

A matrisa maxsusmas ekan. Bu A matrisa uchun teskari matrisa mavjud.

Endi A matrisa elementlarining algebraik to'ldiruvchilarini hisoblab, so'ngra teskari matrisani topamiz:

$$\begin{array}{lll}
A_{11} = 1, & A_{21} = 3, & A_{31} = 2, \\
A_{12} = 0, & A_{22} = 3, & A_{32} = 3, \\
A_{13} = 2, & A_{23} = 3, & A_{33} = 4,
\end{array} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

(3.4) formulaga asosan, berilgan sistemani $X = A^{-1}B$ ko'rinishda yozish mumkin.

Endi x_1, x_2, x_3 larni topamiz:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bundan $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2$ bo'ladi. ■

Marlye tizimidan foydalanib misolni yechish:

> **with(Student[LinearAlgebra]):**

> **A := <<1,2,-2>|<-2,0,1>|<1,-1,1>>:**

b := <5,0,-1>:

LinearSolve(A, b);

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

9-mavzu bo'yicha amaliy mashg'ulotlarni mustahkamlash

uchun nazorat topshiriqlari

$\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar berilgan. Quyidagilarni bajaring: a) ikki vektorning skalyar ko'paytmasini hisoblang; b) berilgan vektorlarning kollinear yoki ortogonal bo'lish yoki bo'lmasligini tekshiring; c) vektor ko'paytmasining uzunligini toping; g) uch vektorning aralash ko'paytmasini hisoblang; d) berilgan vektorlar komplanar bo'lish yoki bo'lmasligini tekshiring.

1. $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = \vec{j} + 4\vec{k}, \vec{c} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k} :$

a) $\vec{b}, -4\vec{c};$ b) $\vec{a}, \vec{c};$ c) $3\vec{a}, 2\vec{c};$ g) $\vec{a}, 3\vec{b}, \vec{c};$ d) $\vec{a}, 2\vec{b}, \vec{c}.$

2. $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 7\vec{k}, \vec{c} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + 21\vec{k} :$

a) $\vec{a}, \vec{c}$; b) $\vec{b}, \vec{c}$; c) $4\vec{b}, 2\vec{c}$; g) $5\vec{a}, 2\vec{b}, \vec{c}$; d) $2\vec{a}, -3\vec{b}, \vec{c}$.

3. $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 7\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}$:

a) $-2\vec{a}\vec{c}$; b) $\vec{a}, \vec{c}$; c) $3\vec{a}, -7\vec{b}$; g) $\vec{a}, 2\vec{b}, 3\vec{c}$; d) $3\vec{a}, 2\vec{b}, 3\vec{c}$.

4. $\vec{a} = -7\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$:

a) $2\vec{a}, -7\vec{c}$; b) $\vec{b}, \vec{c}$; c) $4\vec{b}, 3\vec{c}$; g) $\vec{a}, -2\vec{b}, -7\vec{c}$; d) $2\vec{a}, 4\vec{b}, 3\vec{c}$.

5. $\vec{a} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$; $\vec{b} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{j} + 5\vec{k}$:

a) $\vec{a}, -4\vec{c}$; b) $\vec{a}, \vec{b}$; c) $2\vec{b}, 2\vec{a}$; g) $\vec{a}, 6\vec{b}, 3\vec{c}$; d) $\vec{a}, 6\vec{b}, 3\vec{c}$.

6. $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$:

a) $2\vec{a}, 4\vec{b}$; b) $\vec{a}, \vec{c}$; c) $5\vec{a}, 3\vec{c}$; g) $\vec{a}, 3\vec{b}, 2\vec{c}$; d) $5\vec{a}, 4\vec{b}, 3\vec{c}$.

7. $\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = 7\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$:

a) $2\vec{b}, 4\vec{c}$; b) $\vec{b}, \vec{c}$; c) $3\vec{b}, 5\vec{c}$; g) $7\vec{a}, 4\vec{b}, 2\vec{c}$; d) $7\vec{a}, 2\vec{b}, 5\vec{c}$.

8. $\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{k}$, $\vec{c} = 12\vec{i} - 6\vec{j} + 9\vec{k}$:

a) $\vec{b}, 4\vec{c}$; b) $\vec{a}, \vec{c}$; c) $4\vec{a}, 3\vec{b}$; g) $2\vec{a}, 3\vec{b}, \vec{c}$; d) $2\vec{a}, 3\vec{b}, -4\vec{c}$.

9. $\vec{a} = -\vec{i} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = -2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$:

a) $3\vec{a}, 2\vec{b}$; b) $\vec{b}, \vec{c}$; c) $7\vec{a}, -3\vec{c}$; g) $3\vec{a}, -4\vec{b}, 2\vec{c}$; d) $7\vec{a}, 2\vec{b}, -3\vec{c}$.

10. $\vec{a} = 6\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{b} = 9\vec{i} - 6\vec{j} + 9\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 8\vec{k}$:

a) $3\vec{a}, -5\vec{c}$; b) $\vec{a}, \vec{b}$; c) $3\vec{b}, -9\vec{c}$; g) $2\vec{a}, -4\vec{b}, 3\vec{c}$; d) $3\vec{a}, -4\vec{b}, -9\vec{c}$.

11. $\vec{a} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}$:

a) $-3\vec{a}, 6\vec{c}$; b) $\vec{b}, \vec{c}$; c) $-2\vec{b}, 4\vec{c}$; g) $\vec{a}, -4\vec{b}, 2\vec{c}$; d) $\vec{a}, -2\vec{b}, 6\vec{c}$.

12. $\vec{a} = -4\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = 6\vec{i} + 9\vec{j} - 3\vec{k}$:

a) $5\vec{a}, -3\vec{b}$, b) $\vec{b}, \vec{c}$; c) $4\vec{b}, 7\vec{c}$; g) $-2\vec{a}, \vec{b}, -2\vec{c}$; d) $-2\vec{a}, 4\vec{b}, 7\vec{c}$.

13. $\vec{a} = -5\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 7\vec{i} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$:

a) $8\vec{a}, -6\vec{c}$, b) $\vec{a}, \vec{c}$; c) $3\vec{b}, 11\vec{c}$; g) $2\vec{a}, 4\vec{b}, -5\vec{c}$; d) $8\vec{a}, -3\vec{b}, 11\vec{c}$.

14. $\vec{a} = -4\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$:

a) $3\vec{a}, -7\vec{c}$, b) $\vec{a}, \vec{b}$; c) $-4\vec{i}, 11\vec{a}$; g) $5\vec{a}, -\vec{b}, 3\vec{c}$; d) $3\vec{a}, -9\vec{b}, 4\vec{c}$.

15. $\vec{a} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{c} = 6\vec{i} + 6\vec{j} - 4\vec{k}$:

a) $3\vec{a}, 9\vec{b}$, b) $\vec{a}, \vec{c}$; c) $-7\vec{a}, 4\vec{c}$; g) $\vec{a}, 3\vec{b}, \vec{c}$; d) $\vec{a}, 2\vec{b}, \vec{c}$.

16. $\vec{a} = -3\vec{i} + 8\vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = 8\vec{i} + 12\vec{j} - 8\vec{k}$:

a) $3\vec{b}, -8\vec{c}$ b) $\vec{b}, \vec{c}$; c) $-7\vec{a}, 9\vec{c}$; g) $4\vec{a}, -6\vec{b}, 6\vec{c}$; d) $4\vec{a}, -6\vec{b}, 9\vec{c}$.

17. $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = -9\vec{i} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}$:

a) $3\vec{b}, -8\vec{b}$ b) $\vec{a}, \vec{c}$; c) $-5\vec{a}, 4\vec{b}$; g) $7\vec{a}, 5\vec{b}, -\vec{c}$; d) $\vec{a}, 2\vec{b}, \vec{c}$.

18. $\vec{a} = 9\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -9\vec{i} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 5\vec{j} + 7\vec{k}$:

a) $7\vec{a}, 5\vec{b}$, b) $\vec{b}, \vec{c}$; c) $-6\vec{a}, 4\vec{c}$; g) $2\vec{a}, -7\vec{b}, 3\vec{c}$; d) $2\vec{a}, -7\vec{b}, 4\vec{c}$.

19. $\vec{a} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = 7\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$:

a) $-9\vec{a}, 7\vec{c}$, b) $\vec{a}, \vec{b}$; c) $-8\vec{b}, 5\vec{c}$; g) $\vec{a}, -6\vec{b}, 2\vec{c}$; d) $\vec{a}, -6\vec{b}, 5\vec{c}$.

20. $\vec{a} = -9\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = -5\vec{i} + 10\vec{j} - 20\vec{k}$:

a) $9\vec{a}, 4\vec{c}$, b) $\vec{b}, \vec{c}$; c) $-6\vec{b}, 7\vec{c}$; g) $-2\vec{a}, 7\vec{b}, 5\vec{c}$; d) $-2\vec{a}, 7\vec{b}, 4\vec{c}$.

21. $\vec{a} = 2\vec{i} - 7\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$:

a) $7\vec{a}, -4\vec{b}$, **b)** $\vec{b}, \vec{c}$; **c)** $5\vec{b}, 3\vec{c}$; **g)** $-3\vec{a}, 6\vec{b}, -\vec{c}$; **d)** $7\vec{a}, -4\vec{b}, 3\vec{c}$.

22. $\vec{a} = 7\vec{i} - 4\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 11\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = 5\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$:

a) $-4\vec{a}, -5\vec{c}$, **b)** $\vec{a}, \vec{c}$; **v)** $3\vec{b}, 6\vec{c}$; **g)** $3\vec{a}, -7\vec{b}, 2\vec{c}$; **d)** $-4\vec{a}, 2\vec{b}, 6\vec{c}$.

23. $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{c} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$:

a) $-5\vec{a}, 4\vec{c}$, **b)** $\vec{a}, \vec{b}$; **v)** $6\vec{a}, -7\vec{b}$; **g)** $6\vec{a}, 3\vec{b}, 8\vec{c}$; **d)** $-5\vec{a}, 3\vec{b}, 4\vec{c}$.

24. $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{c} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$:

a) $-2\vec{a}, 5\vec{b}$, **b)** $\vec{a}, \vec{c}$; **c)** $6\vec{a}, -4\vec{c}$; **g)** $4\vec{a}, -7\vec{b}, -2\vec{c}$; **d)** $6\vec{a}, -7\vec{b}, -2\vec{c}$.

25. $\vec{a} = -3\vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$:

a) $\vec{a}, -4\vec{c}$, **b)** $\vec{a}, \vec{c}$; **c)** $6\vec{b}, 3\vec{c}$; **g)** $-3\vec{a}, 4\vec{b}, -5\vec{c}$; **d)** $-2\vec{a}, 5\vec{b}, -6\vec{c}$.

26. $\vec{a} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 7\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$:

a) $3\vec{b}, \vec{c}$ **b)** $\vec{a}, \vec{c}$; **c)** $5\vec{a}, -2\vec{c}$; **g)** $-2\vec{a}, \vec{b}, 7\vec{c}$; **d)** $-2\vec{a}, 3\vec{b}, 7\vec{c}$.

Testlar

1. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ determinantning a_{11} elementini algebraik to'ldiruvchisini toping.

A)* a_{22} . B) a_{12} . C) $-a_{12}$. D) $-a_{11}$.

2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \end{vmatrix} = 0$ ekanligi ma'lum bo'lsa, x ning qiymatini toping.

A)* 6. B) -6. C) 3 D) -3.

3. Agar $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}$ bo'lsa, k ni toping.

A)* $-\frac{1}{2}$. B) 1. C) 2. D) $\frac{1}{2}$.

4. $7x = \begin{vmatrix} -3i & 2 \\ i & 4 \end{vmatrix}$ tenglamani yeching.

A)* $-2i$ B) $2i$. C) -1 . D) -1 .

5. $\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ determinantni xisoblang.

A)* 0. B) -1 C) 1 D) a_1, a_1, b_2 .

6. $\begin{vmatrix} a & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ determinantning a elementi minorini xisoblang.

A)* 15 B) -13 C) -15 D) 17.

7. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ determinantning A_{21} algebraik to'ldiruvchisini xisoblang.

A)* 3 B) 4 C) -3. D) 5.

8. $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ determinantni xisoblang.

A)* -5 B) 6 C) 5 D) 9.

9. Agar $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ bo'lsa, $\alpha \cdot A$ ni toping (bunda $\alpha \in R$).

A)* $\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$C). \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix} \quad D). \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix}$$

10. Agar $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ бўлса, m ni toping.

A)*. 2. B). -2. C). 4. D). -4.

11. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrisalar berilgan бўлса, $2A + B$ ni toping.

$$A)*. \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B). \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C). \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad D). \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

12. m ning qanday qiymatida $\begin{cases} 6x - 4y = 15. \\ 2x + my = 3. \end{cases}$ sistema yechimga ega bo'lmaydi?

$$A)*. -\frac{4}{3} \quad B). \frac{4}{3} \quad C). \frac{3}{4} \quad D). 3.$$

13. $\begin{cases} 5x - 3y = 4 \\ 10x - 6y = 1 \end{cases}$ tenglamalar sistemasi berilgan. Quyidagi mulohazalardan qaysilari to'g'ri?

A)*. Sistema yechimga ega emas. B). Sistema cheksiz ko'p yechimga ega.

C). Sistema yagona yechimga ega. D). Sistema nol yechimga ega.

$$14. \begin{cases} x = 1 \\ x + 2y = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \quad \text{sistemaning yechimini toping.}$$

A)*. (1;1;2). B). (1;-1;2). C). (1;1;0). D). (1;1;1).

15. Agar $A(2;3)$ va $B(-1;-1)$ nuqtalar berilgan bo'lsa, $\overline{AB}$ vektorning uzunligini toping.

A)*. 5. B). 9. C). $\sqrt{2}$. D). 0.

16. $\vec{a} = \{4;4;-4\}$ va $\vec{b} = \{3;-6;-3\}$ vektorlar bir-biriga nisbatan qanday joylashgan?

A)*. $\vec{a} \perp \vec{b}$. B). $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$. C). $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$. D). $\vec{a} = \vec{b}$.

17. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi $(\vec{a}, \vec{b})$ berilgan. Quyidagi tengliklardan qaysi biri notug'ri.

$$A)*. \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b}). \quad B). (\vec{a} \cdot \lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{b} \cdot \vec{a}).$$

$$C). (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \vec{a}). \quad D). (\vec{a}(\vec{b} + \vec{c})) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) + (\vec{a} \cdot \vec{c}).$$

18. $\vec{a} = 2i + 3j$ va $\vec{b} = 3i - 2j$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini toping.

A)*. 0. B). 1. C). 4. D). -1.

19. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi uchun quyidagi munosabatlarning qaysi biri noto'g'ri:

A)* $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$ B) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a}, \vec{b})$
 C). $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$. D). $\vec{a} \times \lambda \vec{b} = \lambda \vec{a} \times \vec{b}$

20. $(\vec{k} \times \vec{j}) \cdot \vec{i}$ aralash ko'paytmasini yozing.

A)*. -1 B). 0 C). $\vec{i}$ D). 1

21. Agar $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalar berilgan bo'lsa, AB kesma o'rtasining absissasi x_c ni toping.

A)* $x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}$ B). $x_c = \frac{x_1 - x_2}{2}$ C). $x_c = \frac{x_2 - x_1}{2}$ D). $x_c = \frac{x_1 + x_2}{3}$

22. To'g'ri chiziqning normal tenglamasi $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ berilgan. $M(x_0; y_0)$ nuqtada bu to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani toping.

A)*. $d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p|$ B). $d = |x_0 \cos \alpha - y_0 \sin \alpha + p|$

C). $d = |x_0 \sin \alpha + y_0 \cos \alpha - p|$ D). $d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha|$

23. Agar $6x + 3y - 2 = 0$ to'g'ri chiziq berilgan bo'lsa, unga perpendikulyar to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentini toping.

A)*. -2 B). 2 C). $\frac{1}{2}$ D). $-\frac{1}{2}$

10. $x + 4 = 0$ va $y + 6 = 0$ to'g'ri chiziqlar orasidagi, burchakni toping.

A)*. $\frac{\pi}{2}$ B). $\frac{\pi}{4}$ C). $\frac{\pi}{3}$ D). 0.

24. $y - 2x + 3 = 0$ to'g'ri chiziqning Oy o'qi bilan kesishgan nuqtasining ordinatasi nimaga teng.

A)*. $b = 3$ B). $b = 1$ C). $b = -2$ D). $b = 3$

25. $P(4;1)$ nuqtadan koordinatalar boshigacha bo'lgan masofani toping.

A)*. $\sqrt{17}$ B). 4 C). $\sqrt{5}$ D). $\sqrt{19}$.

26. Ellipsning katta yarim o'qi 5 ga, kichik yarim o'qi 2 ga teng. Uning tenglamasini tuzing.

A)*. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ B). $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{2} = 1$ C). $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 1$ D). $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2} = 1$

27. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ giperbola fokuslarining koordinatalarini toping.

A)*. $F_1(5;0), F_2(-5;0)$. B). $F_1(-3;0), F_2(3;0)$.

C). $F_1(-4;0), F_2(4;0)$. D). $F_1(4;0), F_2(-4;0)$.

Асосий адабиётлар:

1. Gilbert Strang “Introduction to Linear Algebra”, USA, Cambridge press, 5nd Edition, 2016.
2. Grewal B.S. “Higher Engineering Mathematics”, Delhi, Khanna publishers, 42nd Edition, 2012.
3. Raxmatov R.R., Adizov A.A., Tadjibaeva Sh.E., Shoyimardonov S.K. Chiziqli algebra va analitik geometriya. O‘quv qo‘llanma. Toshkent 2020.
4. Raxmatov R.R., Adizov A.A. “Chiziqli fazo va chiziqli operatorlar” O‘quv uslubiy qo‘llanma. TATU, Toshkent 2019.
5. Соатов Ё.У. “Олий математика”, Т., Ўқитувчи нашриёти, 1- 5 қисмлар, 1995.
6. Рябушко А.П. и др. “Сборник индивидуальных заданий по высшей математике”, Минск, Высшая школа, 1-3 частях, 1991.

Қўшимча адабиётлар:

7. Мирзиёев Ш. Буюк келажакимизни мард ва олижаноб халқимиз билан бирга курашимиз. –Т.: Ўзбекистон, 2017. - 488 бет.
8. Мирзиёев Ш.М. Қонун устуворлиги ва инсон манфаатларини таъминлаш-юрт тараққиёти ва халқ фаровонлигининг гарови. –Т.: Ўзбекистон, 2017.
9. Мирзиёев Ш.М. Эркин ва фаровон, демократик Ўзбекистон давлатини биргаликда барпо этамиз. Т.: Ўзбекистон, 2017.
10. Adizov A.A., Xudoyberganov M.O‘. Amaliy matematika. O‘quv uslubiy qo‘llanma. Toshkent. 2014.
11. Шодиев Т.Ш. Аналитик геометрия ва чизикли алгебра. Тошкент “Ўқитувчи” 1984.
12. Илин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. — 6-е изд., стер. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
13. Задорожный В. Н. и др. Высшая математика для технических университетов. Част II. Линейная алгебра. - Томск: Изд-во ТПУ, 2009.
14. Данко П.С., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Седмoe издание. -М.: Высшая; школа, 2015.
15. Семёнова Т.В. Высшая математика: учебное пособие для студентов технических вузов. Част 1. - Пенза: Пензенский гос. ун-т, 2008.
16. Макаров Е. В., Лунгу К. Н. Высшая математика: руководство к решению задач: учебное пособие, Част 1, Физматлит. 2013.
17. Минорский В.И. Сборник задач по высшей математике. М: Наука, 1987.
18. Беклемешев Д.В., Петрович А.Ю., Чуберов И.А. Сборник задач по

аналитической геометрии и линейной алгебре. -М.: Наука, 1987.

19. Бугров Я.С., Николский С.М. Сборник задач по высшей математике, - М.: Наука. 1997.

Интернет сайтлари

1. www.my.gov.uz – Ўзбекистон Республикаси ҳукумат портали.
2. www.lex.uz– Ўзбекистон Республикаси Қонун ҳужжатлари маълумотлари миллий базаси.
3. www.Ziyo net.uz
4. www.my.tuit.uz
5. www.Math.uz
6. www.bilim.uz