

**ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ
ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ
ИЛМИЙ КЕНГАШ**

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

МУМИНОВ ЗАХРИДДИН ЭШҚОБИЛОВИЧ

**ПАНЖАРАДАГИ КЎП ЗАРРАЧАЛИ ШРЁДИНГЕР
ОПЕРАТОРЛАРИНИНГ СПЕКТРИ ҲАҚИДА**

01.01.02- Дифференциал тенгламалар ва математик физика

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ
АВТОРЕФЕРАТИ**

Тошкент-2021

Докторлик (DSc) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата докторской (DSc) диссертации

Content of the abstract of doctoral (DSc) dissertation

Мўминов Захриддин Эшқобилович

Панжарадаги кўп заррачали Шрёдингер операторларининг спектри
ҳақида..... 3

Muminov Zahriddin Eshkobilovich

On the spectrum of multi-particle Schrödinger operators on a lattices..... 27

Муминов Захриддин Эшқобилович

О спектре многочастичных операторов Шрёдингера на решетках..... 49

Эълон қилинган ишлар рўйхати

Список опубликованных работ
List of published works..... 52

**ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ
ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ
ИЛМИЙ КЕНГАШ**

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

МУМИНОВ ЗАХРИДДИН ЭШҚОБИЛОВИЧ

**ПАНЖАРАДАГИ КЎП ЗАРРАЧАЛИ ШРЁДИНГЕР
ОПЕРАТОРЛАРИНИНГ СПЕКТРИ ҲАҚИДА**

01.01.02- Дифференциал тенгламалар ва математик физика

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ
АВТОРЕФЕРАТИ**

Тошкент-2021

Докторлик диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий Аттестация комиссиясида В2020.4.DSc/FM168 рақам билан рўйхатга олинган.

Докторлик диссертацияси Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (<http://ik-fizmat.nuu.uz>) ва «ZIYONET» таълим ахборот тармоғида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий маслаҳатчи:

Лақаев Саидахмат Норжигитович
физика-математика фанлари доктори, академик

Расмий оппонентлар:

Алимов Шавкат Арифжанович
физика-математика фанлари доктори, академик

Ғанихўжаев Расул Набиевич
физика- математика фанлари доктори, профессор

Халхўжаев Аҳмад Мияссарович
физика-математика фанлари доктори, доцент

Етакчи ташкилот:

Хўжа Аҳмад Яссавий номидаги халқаро қозоқ-турк университети

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг 26 август 2021 йил соат 10.00 даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (99871) 227-12-24, факс: (99871) 246-53-21, 246-02-24, э-маил: nauka@nuu.uz)

Докторлик диссертацияси билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (_____ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (99871) 246-02-24.)

Диссертация автореферати 2021 йил « ____ » _____ кунни тарқатилди.
(2021 йил « ____ » _____ даги _____ рақамли реестр баённомаси).

А.С.Садуллаев

Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., академик

Н.К.Мамадалиев

Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш котиби, PhD

Ш.А.Алимов

Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш ҳузуридаги илмий семинар раиси, ф.-м.ф.д., академик

КИРИШ (докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар, аксарият ҳолларда микродунёда кечаётган жараёнларнинг илмий моделларини қарайди. Микродунё ҳодисаларининг назарияси М.Планк, А.Эйнштейн, В.Гейзенберг, Э.Шрёдингер, В.Паули, П.Дирак ва бошқа олимлар томонидан яратилган квант механикаси дир. Квант механикасининг ҳар қандай системасида энг муҳим физик миқдорлардан бири бу энергия дир. Энергия (гамильтониан ёки Шрёдингер) операторининг спектрал хоссаларини таҳлил қилиш квант механикасининг асосий масалаларидан биридир. Бу борада панжарадаги бир ва кўп заррачали Шрёдингер оператори экспериментал кузатишларнинг назарий асоси сифатида хизмат қилади. Шу сабабли қаттиқ жисмлар физикаси, квант механикаси ва статистик физикада учрайдиган панжарадаги бир ва кўп заррачали системаларга мос Шрёдингер операторлари спектрларининг хос қийматлари, дискрет спектри, ва муҳим спектрига оид тадқиқотларни ривожлантириш муҳим вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Жаҳон илм-фанида панжарадаги бир ва кўп квант заррачали системага мос энергия операторлари муҳим спектрининг ўрни, дискрет спектри ва уларнинг сони бир заррачанинг ташқи майдон билан ва кўп заррачали система ўзаро таъсир энергиясининг ўзгаришига нисбатан ўзгарувчан бўлганлиги учун ушбу операторлар спектрига оид муаммоларни ҳал этиш математик физикада муҳим аҳамият касб этмоқда. Жумладан, бир ва икки заррачали дискрет Шрёдингер операторларининг яккаланган хос қийматларининг, қуйи бўсаға резонанси ва бўсаға хос қийматининг мавжудлигини исботлаш; икки ва кўп заррачали дискрет Шрёдингер операторининг муҳим спектридан пастда ётувчи хос қиймати мавжудлигининг етарли шартини топиш ва муҳим спектрининг тузилиши ва ўрнини аниқлашга оид тадқиқотларни ривожлантириш амалий-назарий жиҳатдан муҳим илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий татбиққа эга бўлган долзарб йўналишларга эътибор кучайтирилди, хусусан, кубик панжара бўйлаб ҳаракатланадиган бир ва кўп заррачалар системаси билан боғлиқ дискрет Шрёдингер операторлари ва гамилтонларининг спектрал назариясини ривожлантиришга алоҳида эътибор берилмоқда. “Алгебра ва унинг татбиқлари, дифференциал тенгламалар ва унинг татбиқлари, чизиқсиз тизимлар, динамик тизимлар ва уларнинг татбиқларини математик моделлаштириш, стохастик таҳлил, тиббий-биологик информатика, ҳисоблаш математикаси¹” фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалари ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди. Бу

¹ Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон “Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида” ги қарори.

қарор ижросини таъминлашда квант механикаси, квант майдонлар назарияси, қаттиқ жисмлар физикаси, жумладан, дискрет ва узлуксиз Шрёдингер операторлари, Фридрихс моделларининг спектрал назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида» Фармони, 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида» ва 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи². Панжарадаги Шрёдингер операторлари назарияси бўйича илмий изланишлар етакчи хорижий давлатларнинг илмий марказлари ва олий таълим муассасалари, жумладан, Цукуба университети, Кюшу университети (Япония), Санкт-Петербург давлат университети (Россия), Халқаро атом энергияси агентлиги (IAEA, Австрия), Пьер ва Мария Кюри номидаги университет (Франция), Халқаро илмий тадқиқотлар маркази (SISSA, Италия), Назарий физика институти (Цюрих, Швейцария), Реньи математика институти (Венгрия), Миссури университети (АҚШ)да кенг қамровли олиб борилмоқда.

Панжарадаги Шрёдингер операторлари назарияси бўйича олинган натижаларни таҳлил қилишга оид олиб борилган тадқиқотлар натижасида қатор долзарб масалалар ечилган. Жумладан, қуйидаги илмий натижалар олинган: ихтиёрий ўлчамли панжарадаги ташувчиси компакт бўлган потенциалли дискрет Шрёдингер операторларининг спектри ва S -матрицаси умумлашган хос функциялар ёрдамида тасвири ҳамда барча энергияларнинг S -матрицалари ёрдамида потенциал оператори қурилган (Цукуба университети, Санкт-Петербург давлат университети). Шу билан бирга изи чегераланган потенциаллар синфи учун спектрал силжитиш оператори ва дискрет спектри силжитиш операторларининг моменти билан баҳоланиши

² Диссертация мавзуси бўйича хорижий тадқиқотлар шарҳи: Annales Henri Poincaré <https://link.springer.com/article/10.1007/s00023-011-0141-0>, International Nuclear Information System https://inis.iaea.org/search/search.aspx?orig_q=RN:51056693, Reviews in Mathematical Physics <https://doi.org/10.1142/S0129055X20500154>, Applications in Rigorous Quantum Field Theory <https://doi.org/10.1515/9783110403541-004>, Mathematical Physics, Analysis and Geometry <https://www.springer.com/journal/11040/> ва бошқа манбалар асосида ишлаб чиқилган.

қаралган (Санкт-Петербург давлат университети); изотропик гармоник тузоғидаги уч заррачали система масаласи унитар чегарада қаралганда, бозонли заррачалар учун икки ҳолат топилган: биринчиси тузоқдаги заррачанинг частотасига, зарралар массасига ва Планк доимийсига боғлиқ универсал ҳолат, иккинчиси Ефимов томонидан кашф этилган уч заррачали боғланган ҳолатга ўхшаш уч заррачали параметрга боғлиқ бўлган ҳолатдир. Тажриба ёрдамида бозон атомлари учун ёт бўлган универсал ҳолатларнинг узоқ вақт содир бўлиши кўрсатилган (Халқаро атом энергияси агентлиги (ИАЕА), Австрия). N заррачали ҳолда, газнинг глобал ҳажмини тавсифловчи уюшган эркинлик даражаси, гипер радиус топилган ва N заррачали резонанс тушунчаси умумлаштирилган (Пьер ва Мария Кюри номидаги университет). Чегараланган дисперсион функциялар учун тортишиш қиймати мусбат бўлганда икки заррачали спин-бозон гамилтониани спектри ва унинг муҳим спектрининг тортишиш қийматига боғлиқлиги батафсил кўрсатилган ҳамда тортишиш қиймати катта бўлганда муҳим спектрнинг икки заррачали ва уч заррачали шохларнинг орасида бўшлиқ пайдо бўлиши исботланган (Назарий физика институти, Швейцария). Скаляр квант майдонида чизиқли тортишувчи икки ҳолатли квант системасини ифодаловчи спин-бозон модели хоссалари ва унга мос гамилтонианинг спектрал хоссалари қаралган (Кюшу университети (Япония), Ренъи математика институти, (Венгрия)).

Дунё миқёсида бугунги кунда қаттиқ жисмлар физикаси, квант механикаси, қаттиқ жисмлар ва квант графлари моделлари учун дискрет бир, икки, уч ва N заррачали гамилтонианлар, уларга мос Шрёдингер операторларининг спектрал хоссаларини татбиқ этиш бўйича бир қатор изланишлар олиб борилмоқда. Жумладан, уларнинг хос қийматлари, боғланган ҳолатлари, муҳим спектри, спектрал силжитиш оператори, тўлқин оператори, сочилиш матрицаси, спектрал ёйилмаси ва спин-бозон гамилтонианининг спектрал хоссалари, хусусан бозонлар сонининг камайиш тартиби, каби устувор йўналишларда илмий тадқиқот ишлари олиб борилмоқда.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Бир заррачали дискрет Шрёдингер операторлари комбинаторик Лапласианлар ва квант графлари соҳасида катта эътиборни жалб этган. Мисол учун баъзи сўнгги натижалар учун Ф.Чунг, А.Григорьян, Г.Берколаико, П.Экснер, О.Пост, Е.Коротяев ва Н.Сабуроваларнинг ишларида ўз аксини топган. Хусусан, дискрет Шрёдингер операторлари потенциаллари дельта функциялар бўлганда бу операторлар хос қийматларининг ўзгариши С.Альбеверо, Ж.Белиссард ва Х.Шульс-Балдес, Х.Хаяши, Ф.Хирошима, П.Фариа да Вига, С.Лакаев ва И.Бозоровларнинг ишларида қисқача муҳокама қилинган.

Бу натижаларнинг икки заррачали узлуксиз Шрёдингер операторлари учун анологини Ньютон таъкидлаб ўтган ва Х.Тамура эса Б.Саймон томонидан олинган натижалар ёрдамида исботлаган. С.Лакаев, Ф.Хирошима ва П.Фариа да Вига нуқтали потенциаллар учун панжара ўлчами бешга тенг ёки бешдан катта бўлганда қуйи чегарада бўсаға хос қиймати мавжудлигини,

лекин панжара ўлчами бешдан кичик ҳолда эса мавжуд эмаслигини кўрсатишди.

Кўп заррачали узлуксиз гамильтониан ва панжарадаги кўп заррачали дискрет гамильтониан ўртасидаги фундаментал фарқлардан бири шуки, иккинчиси буралишга нисбатан инвариант (турғун) эмас (А.Могилнер, Г.Граф ва Д.Шенкер, С.Лакаев, Д.Яфаевларнинг ишларида қайд этилган (ёки кўрсатилган), яъни кўп заррачали системага мос дискрет гамильтониан узлуксиз фазодаги каби бири масса ҳаракати марказига ва иккинчиси ички эркинлик энергиясига тегишли бўлган иккита қисмга бўлинмайди. Натижада узлуксиз фазодаги ҳолатдан фарқли ўлароқ, тўғри интеграл ёйилмага мос келадиган қатлам гамильтонианлар, яъни дискрет Шрёдингер операторлари параметрик равишда квазиимпульсга боғлиқ бўлади, бунда квазиимпульс панжаранинг фундаментал соҳасида ўзгаради.

С.Альбеверио, С.Лакаев, Ж.Раух, Д.Яфаевларнинг ишида уч ўлчамли ҳақиқий фазодаги икки заррачали узлуксиз Шрёдингер операторлари ҳолатида критик потенциал таъсири натижасида узлуксиз спектрдан қуйида манфий қийматли боғланган ҳолатнинг пайдо бўлиши қаралган.

Кўп заррачали узлуксиз Шрёдингер операторларининг спектрал назариясидаги ажойиб натижалардан бири бу муҳим спектрнинг тузилиши (Хунцикер–ван Винтер–Жислин (ХВЖ) теоремаси) кўплаб ишларда кенг исботланган (масалан В.Энс, Л.Фаддеев, М.Клаус ва Б.Саймон, Р.Рид ва Б.Саймон, Х.Золадекларнинг ишлари ва улардаги ҳаволаларга қаранг). Эслатиб ўтамизки, кўп заррачали узлуксиз Шрёдингер операторлари учун муҳим спектри сонлар ўқидаги ярим ўқдан иборат, бунда интервалнинг чап чегараси номусбат сон бўлиб, икки кластерли қисм гамильтонианлар спектрининг энг қуйи чегарасига тенг. Шундай қилиб, кўп заррачали узлуксиз Шрёдингер операторларининг муҳим спектрида бўшлиқлар мавжуд эмас.

С.Лакаев, Ж.Абдуллаев, С.Саматов, С.Альбевериоларнинг ишларида уч ўлчамли панжарада заррачалар ҳаракатини бир тугундан яқин қўшни тугунларга кўчишини ифодаловчи “дисперсион функция” ларга эга ва нуқтали потенциаллар билан ўзаро таъсирлашувчи учта квант заррачалар системасига мос гамильтонианлар учун муҳим спектрнинг жойлашиши ва тузилиши қаралган.

Адабиётларда панжарадаги кўп заррачали системаларга мос Шрёдингер операторларининг муҳим спектрлари ҳақидаги маълумотлар унча кўп эмас: аналитик дисперсион функциялар ёрдамида аниқланган уч заррачали система гамильтонианининг муҳим спектри С.Альбеверио, С.Лакаев, М.Мўминов; дискрет Лапласиан ва нуқтали потенциалларга эга бўлган тўрт заррачали система учун ХВЖ теоремаси М.Мўминовнинг ишларида кўрсатилган ва панжарада кўп заррачали операторларнинг спектрал хоссаларига боғлиқ баъзи натижалар охириги икки ишларнинг ҳаволаларида келтирилган.

ХВЖ теоремасининг амалий қўлланмаларидан бири у кўп заррачали боғланган ҳолатлар учун вариацион усуллардан самаралироқ фойдаланишга имкон беради. Жуфт-жуфти билан қисқа таъсирлашувчи потенциалларга эга бўлган узлуксиз Шрёдингер операторлари боғланган ҳолатларининг

чеклилигига бағишланган жуда кўп адабиётлар мавжуд (М.Клаус ва Б.Саймон, Ж.Шечтерларнинг ишлари ва улардаги ҳаволаларга қаранг). Шунга қарамай, Ефимов эффекидан бошқа чексизта боғланган ҳолатлар мавжудлиги ҳақида кўп нарса маълум эмас (А.Соболев, Х.Тамура ва Д.Яфаевларнинг ишларига қаранг). Кўп заррачали боғланган ҳолатлар мавжудлигининг етарли шартларини масалан, К.Чадан ва А.Мартин, Д.Болле, Ж.Пересларнинг ишларидан топиш мумкин.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасаси ва илмий-тадқиқот институтининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация Бонн университетининг амалий математика институти ва фанлараро комплекс тизимлар маркази (IZKS, Германия) DFG 436 USB 113/4 ва DFG 436 USB 113/6 лойиҳаси; Малайзиянинг Путра университети 9190883 рақамли университет тадқиқотлари (RUGS дастури) лойиҳаси; Самарқанд давлат университетининг ОТ-Ф4-66 рақамли лойиҳаси; Япония фанини қўллаб-қувватлаш фонди 15K13445 рақамли лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади кубик панжарадаги бир, икки, уч ва N заррачали Шрёдингер операторлари хос қийматлари мавжудлигининг етарли шартини ва муҳим спектрининг ўрнини аниқлашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари: панжарадаги бир заррачали Шрёдингер операторининг қуйи бўсағаси хос қиймати ва қуйи бўсағаси резонанси ва супер бўсаға резонанси пайдо бўлишини кўрсатиш;

система тўла квазиимпульсининг қиймати нолга тенг бўлган ҳолда икки заррачали Шрёдингер оператори бўсаға хос қиймати ёки бўсаға хос қиймати ва қуйи бўсаға резонансига эга бўлганда, квазиимпульсининг нолмас қийматлари учун икки заррачали Шрёдингер оператори муҳим спектри тубидан пастда дискрет спектр мавжудлигининг етарли шартини топиш;

уч заррачали дискрет Шрёдингер оператори муҳим спектрининг чекли сондаги кесмалардан ташкил этишини аниқлаш;

потенциаллар ва дисперсион муносабатларнинг кенг синфи учун панжарадаги N заррачали Шрёдингер оператори учун ХВЖ (Хунцикер–ван Винтер–Жислин) теоремасининг аналогини исботлаш;

потенциаллар ва дисперсион муносабатларнинг кенг синфи учун панжарадаги N заррачали Шрёдингер оператори муҳим спектридан пастда ётувчи хос қиймати мавжудлигининг етарли шартларини топиш.

Тадқиқотнинг объекти: Кубик панжарадаги бир, икки, уч ва N заррачали Шрёдингер операторлари.

Тадқиқотнинг предмети. Операторлар назарияси, спектрал назария, функциялар назарияси, матрицалар назарияси, тенгламалар назарияси, кўзғалишлар назарияси, асимптотикалар назарияси.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида комплекс анализ, функционал анализ, чизикли операторлар назарияси, аналитик функциялар, резольвента учун Фаддеев–Ньютон интеграл тенгламаси, хос функциялар учун Вайнберг–ван Винтер тенгламаси, Бирман–Швингер принципи, вариацион усуллар, Фредгольм детерминантининг аналитик давоми усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

бир заррачали Шрёдингер оператори учун қуйи бўсаға хос қиймати, қуйи бўсаға резонанси ва супер бўсаға резонансининг пайдо бўлиши кўрсатилган;

квазиимпульснинг нолмас қийматлари учун икки заррачали Шрёдингер оператори муҳим спектри тубидан пастда дискрет спектр мавжудлигининг етарли шартлари топилган;

уч заррачали дискрет Шрёдингер операторининг муҳим спектри чекли сондаги кесмалардан иборат эканлиги исботланган;

панжарадаги N заррачали дискрет Шрёдингер оператори учун ХВЖ теоремасининг аналоги диаграммалар усули ёрдамида исботланган;

панжарадаги N заррачали Шрёдингер операторининг муҳим спектридан пастда хос қиймати мавжудлигининг етарли шартлари топилган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари бир ва кўп заррачали Шрёдингер операторларининг ҳамда параметрга боғлиқ Фридрихс модел операторларининг спектрал хоссалари устида изланишда фойдаланилган;

кўп заррачали дискрет Шрёдингер операторлари учун боғланган ҳолатларнинг мавжудлиги билан боғлиқ спектрал хоссалари бўйича олинган натижадан нейтронларга бой деформацияланган лантаноид ядроларининг кўзгалган ҳолатлари динамикасини симуляция қилишда ядро ҳаракати ва электрон ҳолатлар ўртасида кучли тортишувида таъсирлашув энергия сатҳларининг қийматларини ва потенциал энергия сатҳини ҳисоблашда экспериментал кузатиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги. Тадқиқот ишида резольвента учун Фаддеев–Ньютон интеграл тенгламаси, хос функциялар учун Вайнгберг-ван Винтер тенгламаси, Бирман-Швингер принципи, вариацион усул, Фредгоlm детерминантининг аналитик давоми усулидан фойдаланилганлиги ҳамда қатъий математик мулоҳазаларни қўллаш орқали, математик исботлашлар билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти шундан иборатки, олинган натижалар ўз-ўзига қўшма операторлар спектрал назарияси, квант майдонлар назарияси, хусусан, бир, икки, уч ва кўп заррачали система гамильтонианларининг спектрал назариясининг кейинги ривожидида қўлланилиши мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти олинган илмий натижаларнинг қаттиқ жисмлар физикаси ва квант механикасида экспериментал тадқиқотлар ўтказиш ва қўллашга назарий асос сифатида хизмат қилиши билан белгиланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Панжарадаги бир ва кўп заррачали дискрет Шрёдингер операторининг муҳим ва дискрет спектрлари бўйича олинган натижалар асосида:

бир заррачали ва икки заррачали дискрет Шрёдингер операторларининг спектрал хоссалари бўйича олинган натижадан етакчи хорижий журналларда (Rend. Mat. Appl. **39** (7), 161 – 180 (2018); Journal of Physics A: Mathematical and

Theoretical, **46** (20), 205304 (2013); Technology audit and production reserves, **4** (54), 46-49 (2020); Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **40**, 10109 (2007); Journal of Physics A: Mathematical and General, **39** (26), 8377 (2006); Phys. Rev. Lett. **107**, 030504 (2011), Complex Analysis and Operator Theory, **2**, 637–668 (2008); Complex Analysis and Operator Theory, **4**, 1–38 (2010)) баъзи икки ва уч заррачали гамилтониани, потенциал оператори дельта функциядан иборат кўп заррачали Шрёдингер операторларининг ҳамда параметерга боғлиқ Фридрихс модел операторларининг спектрал хоссаларини устида изланишда фойдаланилган;

панжарадаги уч заррачали дискрет Шрёдингер операторларининг муҳим спектри ва хос қийматлари сони учун олинган натижалардан етакчи хорижий журналларда (Reviews in Mathematical Physics, **32** (06), 2050015 (2020); Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **40** (49), 14819 (2007); Europhysics Letters Association EPL (Europhysics Letters), **86** (6), 6006 (2009); Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika), **54** (2), 16–27 (2010); Journal of Mathematical Physics **49**, 093502 (2008)) ва хорижий китобларда (Applications in Rigorous Quantum Field Theory, 2 tom, De Gruyter 2020) ва хорижий PhD диссертация (Thesis/Dissertation, Humboldt-Universitaet, Berlin (Germany). Report Number INIS-DE-1118, Jun 18, 2010; Thesis/Dissertation, Universite Pierre et Marie Curie – Paris 6 (France). Report Number FRNC–TH–10838) фойдаланилиб, улар уч заррачали дискрет ва узлуксиз Шрёдингер операторларининг муҳим спектрининг ўрни, хос қийматлари сонининг чеклилиги ёки чексизлигини; спин-бозон гамилтонианлаиринг муҳим спектрини ташкил этган кесмалар сонини аниқлаш имконини берган;

кўп заррачали дискрет Шрёдингер операторлари учун боғланган ҳолатларнинг мавжудлиги билан боғлиқ спектрал хоссалари бўйича олинган натижадан FRGS19–039–0647 рақамли хорижий грант лойиҳасида нейтронларга бой деформацияланган лантаноид ядроларининг кўзғалган ҳолатлари динамикасини симуляция қилишда ядро ҳаракати ва электрон ҳолатлар ўртасида кучли таъсирлашувини таҳлил қилишда фойдаланилган (2020 йил 5-март, Малайзия ҳалқаро ислом университетининг 001-КОЕ-21 рақамли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланиши таъсирлашув энергия сатҳларини, қийматларини ва потенциал энергия сатҳини ҳисоблашда экспериментал кузатиш имконини берган;

бир заррачали дискрет Шрёдингер оператори учун хос қийматларини ўзгаришишни таҳлил қилиш натижасида олинган натижалар Малайзия муҳитига мос келадиган бир нечта молиявий муаммоларни башорат қилишда математик воситаларни таҳлил этишга мўлжалланган LRGS/TD/2011/УКМ/ICT/03/02 рақамли хорижий грант лойиҳасида (2021 йил 5-март, Малайзия Миллий университетининг маълумотномаси) қаралган математик модель-дискрет каср Лапласианнинг хос қийматлари сони учун баҳо олиш имконини берган;

диссертациядаги бир заррачали Шрёдингер операторларга доир хос қийматларнинг ўзгаришига доир натижалар FRGS/1/2018/STG06/USIM/02/1 рақамли хорижий грант лойиҳасида фойдаланилган (2021 йил 10-феврал, Малайзия Ислон табиий фанлари университетининг маълумотномаси) қўлланилиши параметерга боғлиқ чизиқли ўз-ўзига қўшма дифференциал операторнинг энг кичик хос қиймати мавжудлиги ва унга мос хос функциянинг бир карралилигини исботлашга имкон берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 16 та халқаро илмий-амалий анжуманларда муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 32 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестатция комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 27 та мақола, жумладан, 18 таси хорижий скопус базаси рўйхатига кирган ва 9 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш, тўрт боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 153 (титул, мундарижа ва адабиётлар рўйхати иш ҳажмига кирмайди) саҳифани ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган. Шунингдек, бу қисмда диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқотнинг мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиқ берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг “**Ўлчами d га тенг панжарадаги дельта потенциалли бир заррачали Шрёдингер операторининг бўсағаси**” деб номланувчи биринчи бобида ўлчами d га тенг \mathbb{Z}^d панжарада $d + 1$ та дельта потенциалли $H_{\lambda\mu}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$) бир заррачали дискрет Шрёдингер операторининг хос қийматининг ўзгаришини тадқиқ қиламиз. Панжара ўлчами $d \geq 2$ бўлганда бир заррачали Шрёдингер операторининг қуйи бўсаға хос қиймати ва қуйи бўсаға резонанси ва $d = 1$ учун эса супер бўсаға резонансини пайдо бўлиши кўрсатилган.

Квазиимпульс тасвирда, $H_{\lambda\mu}$ оператор $L^2(\mathbb{T}^d) - \mathbb{T}^d = (-\pi, \pi]^d$ даги L^2 - функциялар гильберт фазосида таъсир қилади:

$$H_{\lambda\mu} = H_0 - V,$$

бунда H_0 функцияга кўпайтириш оператори:

$$(H_0 f)(p) = E(p)f(p), \quad f \in L^2(\mathbb{T}^d)$$

бунда $E(p)$ функция қуйидаги формула билан аниқланган

$$E(p) = \sum_{j=1}^d (1 - \cos p_j), \quad p = (p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{T}^d,$$

V эса интеграл оператор:

$$(Vf)(p) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{T}^d} v(p-s)f(s)ds, \quad f \in L^2(\mathbb{T}^d).$$

Бу ерда интеграл операторнинг ядроси $v(\cdot)$ қуйидагича аниқланган

$$v(p) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \left(\mu + \lambda \sum_{i=1}^d \cos p_i \right), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad p = (p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{T}^d.$$

Потенциал оператор V нинг ранги чекли бўлганлиги сабабли, унинг муҳим спектри $\sigma_{\text{ess}}(H_{\lambda\mu})$ қуйидаги хоссага эга:

1-тасдиқ. $\sigma_{\text{ess}}(H_{\lambda\mu}) = \sigma_{\text{ac}}(H_{\lambda\mu}) = \sigma(H_0) = [0, 2d]$ тенглик ўринли.

1-таъриф. (Бўсаға хос қиймати ва бўсаға резонанси) *Фараз қилайлик f $H_{\lambda\mu} f = 0$ тенгламанинг ечими бўлсин.*

- a) Агар $f \in L^2(\mathbb{T}^d)$ муносабат бажарилса, унда 0 сони $H_{\lambda\mu}$ операторнинг қуйи бўсага хос қиймати дейилади.
- b) Агар $f \in L^1(\mathbb{T}^d) \setminus L^2(\mathbb{T}^d)$ бажарилса, унда 0 сони $H_{\lambda\mu}$ операторнинг қуйи бўсага резонанси дейилади.
- c) Агар $f \in L^\varepsilon(\mathbb{T}^d) \setminus L^1(\mathbb{T}^d)$ ($0 < \varepsilon < 1$) бажарилса, унда 0 сони $H_{\lambda\mu}$ операторнинг қуйи бўсага супер-резонанси дейилади.

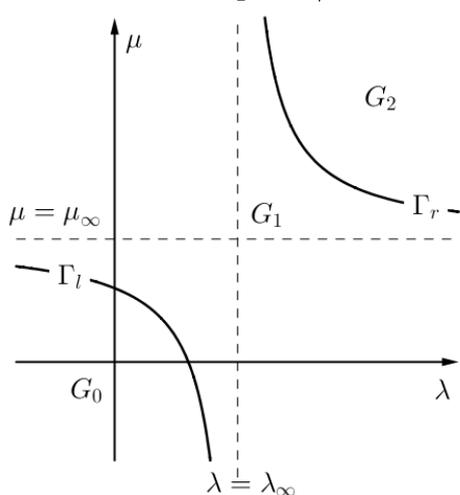
1-бобнинг асосий натижаларини баён қилиш учун, асимптотаси $(\lambda_\infty, \mu_\infty)$ куйидаги гиперболани киритамиз

$\mathfrak{H}_0 = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathcal{H}_0(\lambda, \mu) = 0\}$ (1- ва 2- чизмаларга қаранг), бунда

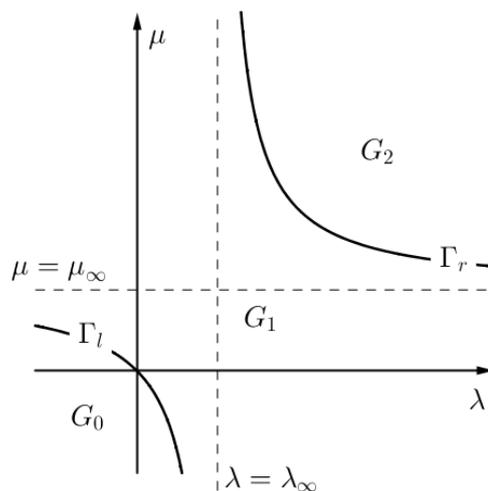
$$\mathcal{H}_0(\lambda, \mu) = \begin{cases} (\lambda - \lambda_\infty)(\mu - d) - d & \text{агар } d \geq 3 \\ (\lambda - 1)(\mu - d) - d & \text{агар } d = 1, 2 \end{cases}$$

Бу ерда

$$\mu_\infty = d, \quad \lambda_\infty = \int_{\mathbb{T}^d} \frac{1}{E(p)} dp \Big/ \int_{\mathbb{T}^d} \frac{\cos^2 p_1}{E(p)} dp, \quad d \geq 3, \quad \text{ва } \lambda_\infty = 1, \quad d = 1, 2.$$



1-чизма. $d \geq 3$ учун G_j соҳалар



2-чизма. $d = 1, 2$ учун G_j соҳалар

\mathfrak{H}_0 гиперболанинг Γ_l ва Γ_r шохлари \mathbb{R}^2 текисликни куйидаги учта очик тўпلامга ажратади

$$G_0 = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2; \mathcal{H}_0(\lambda, \mu) > 0, \lambda < \lambda_\infty\}, \quad G_1 = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2; \mathcal{H}_0(\lambda, \mu) < 0\},$$

$$G_2 = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2; \mathcal{H}_0(\lambda, \mu) > 0, \lambda > \lambda_\infty\}.$$

Куйидаги тенгликларни киритамиз

$$\lambda_c = \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{(\cos q_1 - \cos q_2)^2 dq}{E(q)} \quad \text{агар } d \geq 2.$$

$$\lambda_s = \frac{1}{s}, \quad s = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{dq}{E(q)} \quad \text{агар } d \geq 3, \quad \text{ва } s = 1 \text{ агар } d = 1, 2.$$

Юқоридаги каби (λ, μ) – текисликни \mathfrak{E}_\pm иккита ярим текисликга ва \mathfrak{E}_0 уларнинг чегарасига (мос ҳолда \mathfrak{S}_\pm иккита ярим текисликка ва \mathfrak{S}_0 уларнинг чегарасига) бўламиз

$\mathfrak{E}_- = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2; \lambda < \lambda_c\}$, $\mathfrak{E}_0 = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2; \lambda = \lambda_c\}$, $\mathfrak{E}_+ = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2; \lambda > \lambda_c\}$
 (мос ҳолда

$\mathfrak{S}_- = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2; \lambda < \lambda_s\}$, $\mathfrak{S}_0 = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2; \lambda = \lambda_s\}$, $\mathfrak{S}_+ = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2; \lambda > \lambda_s\}$)

Шуни таъкидлаб ўтамышки, $\mathfrak{S}_- \subset \mathfrak{E}_-$ ва $\mathfrak{E}_+ \subset \mathfrak{S}_+$ муносабатлар ўринли ва биз \mathfrak{H}_0 гиперболо ва унинг шоҳлари Γ_l ва Γ_r ёрдамида қуйидаги очик тўпламларни аниқлаймиз

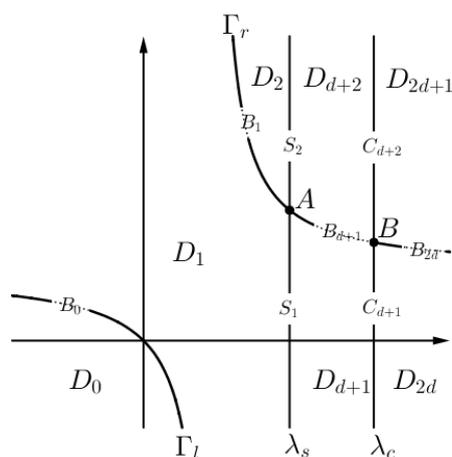
$$D_0 = G_0, \quad D_1 = G_1 \cap \mathfrak{S}_-, \quad D_2 = G_2 \cap \mathfrak{S}_-, \quad D_{d+1} = G_1 \cap (\mathfrak{S}_+ \cap \mathfrak{E}_-), \\ D_{d+2} = G_2 \cap (\mathfrak{S}_+ \cap \mathfrak{E}_-), \quad D_{2d} = G_1 \cap \mathfrak{E}_+, \quad D_{2d+1} = G_2 \cap \mathfrak{E}_+.$$

Юқоридаги тўпламларнинг чегараси 8 та кесишмайдиган чизиқдан:

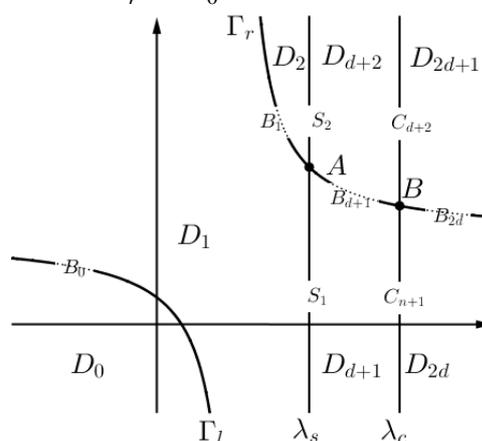
$$B_0 = \Gamma_l, \quad B_1 = \Gamma_r \cap \mathfrak{S}_-, \quad B_{d+1} = \Gamma_r \cap (\mathfrak{S}_+ \cap \mathfrak{E}_-), \quad B_{2d} = \Gamma_r \cap \mathfrak{E}_+, \\ S_1 = \mathfrak{S}_0 \cap G_1, \quad S_2 = \mathfrak{S}_0 \cap G_2, \quad C_{d+1} = \mathfrak{E}_0 \cap G_1, \quad C_{d+2} = \mathfrak{E}_0 \cap G_2,$$

ҳамда қуйидаги иккита нуқтадан ташкил топади (3-чизмага қаранг)

$$A = \Gamma_r \cap \mathfrak{S}_0, \quad B = \Gamma_r \cap \mathfrak{E}_0.$$



$d = 2$



$d \geq 3$

3-чизма. Гипербола. $d \geq 2$ ҳолларда

Панжаранинг ўлчами $d \geq 2$ бўлганда асосий теоремани баён қиламиз.

1-теорема. $d \geq 2$ бўлсин.

- Агар $(\lambda, \mu) \in D_k$ бўлса, у ҳолда $H_{\lambda\mu}$ операторнинг $(-\infty, 0)$ интервалда k та хос қиймати мавжуд, лекин қуйи бўсага хос қиймати ва қуйи бўсага резонанси йўқ (1-жадвалга қаранг).
- Ихтиёрий $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ учун 0 сони $H_{\lambda\mu}$ оператор учун қуйи бўсага супер-резонанси бўлмайди.
- Фараз қилайлик (λ, μ) жуфтлик B_k, S_k, C_k ва A, B бўлсин. У ҳолда 2-жадвалдаги натижалар тўғри.

1-жадвал. (λ, μ) жуфтлик D_k да ва $d \geq 2$ бўлганда $H_{\lambda\mu}$ нинг спектри.

	D_0	D_1	D_2	D_{d+1}	D_{d+2}	D_{2d}	D_{2d+1}
Э.в.ин $(-\infty, 0)$	0	1	2	$d+1$	$d+2$	$2d$	$2d+1$

2-жадвал. $d \geq 2$ бўлганда (λ, μ) жуфлик D_k нинг қиррасида $H_{\lambda\mu}$ нинг спектри.

	B_k чизик		S_k чизик		C_k чизик		A нуқта		B нуқта	
$(-\infty, 0)$ даги хос қиймат	k		k		k		1		$d+1$	
Бўсага резонанси	$d=2$	–	$d=2$	2	$d \geq 2$ –	$d=2$	–	$d=2$	2	
	$d=3,4$	1	$d \geq 3$	–		$d=3,4$	1	$d=3,4$	1	
	$d \geq 5$	–				$d \geq 5$	–	$d \geq 5$	–	
Бўсага хос қиймати	$d=2$	–	$d=2$	–	$d \geq 2$ $d-1$	$d=2$	–	$d=2$	1	
	$d=3,4$	–	$d \geq 3$	d		$d=3,4$	d	$d=3,4$	$d-1$	
	$d \geq 5$	1				$d \geq 5$	$d+1$	$d \geq 5$	d	

Энди $d=1$ бўлганда асосий теоремани баён қиламиз.

2-теорема. $d=1$ бўлсин.

- Агар $(\lambda, \mu) \in D_k$ бўлса, у ҳолда $H_{\lambda\mu}$ операторнинг $(-\infty, 0)$ интервалда k та хос қиймати мавжуд, лекин қуйи бўсага хос қиймати ва қуйи бўсага резонанси йўқ (3-жадвалга қаранг).
- Агар $(\lambda, \mu) \in S_1$ бўлса, у ҳолда $H_{\lambda\mu}$ нинг қуйи бўсага супер-резонанси мавжуд.
- Агар $(\lambda, \mu) \in B_k \cup S_1$ бўлса, у ҳолда 4-жадвалда келтирилган натижалар тўғри.
- Хусусан $H_{\lambda\mu}$ оператор учун қуйи бўсага хос қиймати ва қуйи бўсага резонанси мавжуд эмас.

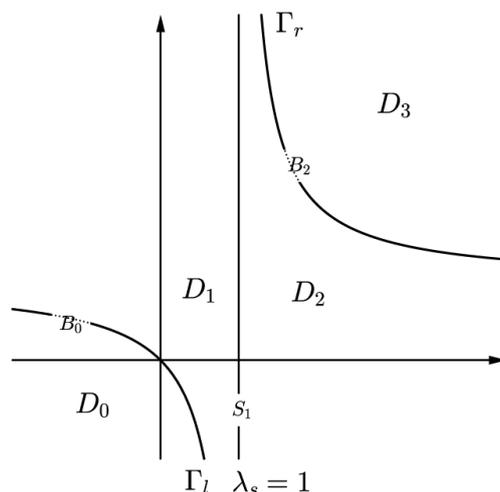
3-жадвал. (λ, μ) жуфлик D_k да ва $d=1$ бўлганда $H_{\lambda\mu}$ нинг спектри.

	D_0	D_1	D_2	D_3
$(-\infty, 0)$ даги хос қиймат	0	1	2	3

4-жадвал. $d=1$ бўлганда (λ, μ) жуфлик D_k нинг қиррасида $H_{\lambda\mu}$ нинг спектри.

	B_k чизик	S_k чизик
$(-\infty, 0)$ даги хос қиймат	k	k
Бўсага резонанси	–	–
Бўсага хос қиймати	–	–

Олинган натижалардан кўриниб турибдики, тайинланган λ учун μ нинг қиймати ўзгарганда $H_{\lambda\mu}$ нинг спектри ўзгаради. Буни 1-, 2-, 3-чизмалардан ҳам кўриш мумкин. Чизмалардаги чизиклар гипербола ва вертикал тўғри чизиклардан иборат. Шу сабабли гиперболанинг вертикал асимптотаси вертикал чизиклар билан кесишмайди.



4-чизма. Гипербола. $d = 1$ ҳолда

Кўриш мумкинки, $d = 1, 2$ бўлганда

$$\{(1, \mu) \in \mathbb{R}^2; \mu \in \mathbb{R}\} \quad \text{va} \quad \{(\lambda, d) \in \mathbb{R}^2; \lambda \in \mathbb{R}\}$$

чизиқ $\mathcal{H}_z(\lambda, \mu) = 0$ гиперболанинг асимптоталари бўлади. Иккинчи томондан эса $d \geq 3$ ҳолда

$$\{(\lambda_\infty, \mu) \in \mathbb{R}^2; \mu \in \mathbb{R}\} \cup \{(\lambda, d) \in \mathbb{R}^2; \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$\mathcal{H}_z(\lambda, \mu) = 0$ гиперболанинг асимптоталари бўлади.

Қуйидаги натижани ҳавола қиламиз.

Натижа 1. Фараз қилайлик $d = 1, 2$ учун $\lambda = 1$ ва $d \geq 3$ учун $\lambda = \lambda_\infty$ бўлсин.

- Агар $d = 1$ бўлса, у ҳолда ҳар бир μ учун $H_{\lambda, \mu}$ операторнинг қуйи супер-бўсага резонанси ва $(-\infty, 0)$ интервалда ягона хос қиймати мавжуд.
- Агар $d \geq 2$ бўлса, у ҳолда ҳар бир μ учун $H_{\lambda, \mu}$ операторнинг $(-\infty, 0)$ интервалда ягона хос қиймати мавжуд.

Диссертациянинг “Панжарадаги икки заррачали гамильтониан учун бўсага эффеќти” номли иккинчи бобида квазиимпульснинг нол қийматида $h(0)$ икки заррачали гамильтониан (уч ва тўрт ўлчамли панжарада) қуйи бўсага резонансига ва (уч ва ундан катта ўлчамли панжарада) қуйи бўсага хос қийматига эришганда $k \in \mathbb{T}^d$ квазиимпульснинг нолдан фарқли қийматларига, $0 \neq k \in \mathbb{T}^d$ мос $h(k)$ икки заррачали гамильтонианнинг муҳим спектрдан қуйида хос қиймати мавжудлигини етарли шартини вариацион усул билан исботланган.

Икки заррачали Шрёдингер оператори, $h(k)$ ($k \in \mathbb{T}^d$) қуйидагича аниқланади

$$h(k) = h^0(k) + v,$$

бунда

$$(h^0(k)f)(p) = \mathcal{E}_k(p)f(p),$$

$$(vf)(p) = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{T}^d} v(p-q)f(q)dq, \quad f \in L^2(\mathbb{T}^d)$$

ва икки заррачали дисперсион муносабат

$$\mathcal{E}_k(p) = \varepsilon_1(p) + \varepsilon_2(k - p), \quad p \in \mathbb{T}^d,$$

$k \in \mathbb{T}^d$ квазиимпульсга параметрик боғлиқ.

Панжара ўлчами $d = 3, 4$ бўлган ҳолда икки заррачали энергия оператори $h(0)$ қуйи бўсага резонансига (виртуал сатҳ) эга бўлишини таъминлаш учун $\varepsilon_1(p)$, $\varepsilon_2(p)$ бир заррачали дисперсион муносабатлар ва интеграл оператор ядроси $v(p)$ функциялар силлиқликлгини таъминлаш учун қуйидаги фаразни қабул қиламиз.

1-фараз. Фараз қилайлик $\varepsilon_\alpha(p)$ ($\alpha = 1, 2$) функция \mathbb{T}^d да (даврий) узлуксиз ҳақиқий қийматли ва шартли манфий аниқланган ва ягона (айнимаган) минимумга эга ва

$$\liminf_{|p| \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_\alpha(p) - \varepsilon_\alpha(0)}{|p|^2} > 0$$

бўлсин. Бунга қўшимча қилиб, $v(p)$ функция \mathbb{T}^d да узлуксиз ва қуйидаги тенгликни қаноатлантирсин

$$v(p) = \overline{v(-p)}, \quad p \in \mathbb{T}^d.$$

2-таъриф. Агар $\varepsilon: \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{C}$ комплекс қийматли функция $\varepsilon(p) = \overline{\varepsilon(-p)}$ ва

$$\sum_{i,j=1}^n \varepsilon(p_i - p_j) z_i \bar{z}_j \leq 0$$

тенгсизликни барча $n \in \mathbb{N}$, ихтиёрий $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{T}^d$ ва барча $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ ($\sum_{i=1}^n z_i = 0$) учун қаноатлантирса, бу функцияга шартли манфий аниқланган функция дейилади.

1-фаразга асосан $h^0(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$ операторнинг v -қўзғатувчи оператори Гильберт-Шмидт оператори бўлади ва муҳим спектрнинг турфинлиги ҳақидаги Вейл теоремасига кўра $h(k)$ операторнинг муҳим спектри $h^0(k)$ оператор спектрига тенг, ва ҳақиқий ўқдаги қуйидаги кесма билан устма-уст тушади

$$\sigma_{\text{ess}}(h(k)) = [\mathcal{E}_{\min}(k), \mathcal{E}_{\max}(k)],$$

бунда

$$\mathcal{E}_{\min}(k) = \min_{q \in \mathbb{T}^d} \mathcal{E}_k(q), \quad \mathcal{E}_{\max}(k) = \max_{q \in \mathbb{T}^d} \mathcal{E}_k(q).$$

Муҳим спектрдан ташқаридаги ҳар бир $\lambda \leq \mathcal{E}_{\min}(0)$ учун, \mathbb{T}^d ($d \geq 3$) да аниқланган узлуксиз даврий функцияларнинг $C(\mathbb{T}^d)$ Банах фазосида (Бирман-Швингер) ядроси

$$G(p, q; \lambda) = (2\pi)^{\frac{d}{2}} v(p - q) (\mathcal{E}_0(q) - \lambda)^{-1}, \quad p, q \in \mathbb{T}^d.$$

дан иборат бўлган $G(\lambda)$ интеграл операторни аниқлаймиз.

Бўсага ходисасини $\lambda = \mathcal{E}_{\min}(0)$ бўлганда Альбеверио, Кострекин ва Шрадернинг ишларидаги мулоҳазалардан келиб чиқиб, 1-фараз бажарилганда қуйидаги беш ҳолатни қараб чиқамиз:

I ҳол: -1 сони $G(\mathcal{E}_{\min}(0))$ оператор учун хос қиймат бўлмасин, яъни
 $0 = \dim \text{Ker}(h(0) - \lambda I) = \dim \text{Ker}(G(\lambda) + I)$.

II ҳол: -1 сони $G(\mathcal{E}_{\min}(0))$ оператор учун оддий хос қиймат ва унга мос ψ хос функция қуйидаги шартни қаноатлантирсин

$$\frac{\psi(\cdot)}{\mathcal{E}_0(\cdot) - \mathcal{E}_{\min}(0)} \notin L^2(\mathbb{T}^d),$$

яъни,

$$0 = \dim \text{Ker}(h(0) - \lambda I) \quad \text{ва} \quad \dim \text{Ker}(G(\lambda) + I) = 1.$$

III ҳол: -1 сони $G(\mathcal{E}_{\min}(0))$ оператор учун хос қиймат ва унга мос ихтиёрий ψ хос функция қуйидаги шартни қаноатлантирсин

$$\frac{\psi(\cdot)}{\mathcal{E}_0(\cdot) - \mathcal{E}_{\min}(0)} \in L^2(\mathbb{T}^d),$$

яъни,

$$1 \leq \dim \text{Ker}(h(0) - \lambda I) = \dim \text{Ker}(G(\lambda) + I).$$

IV ҳол: -1 сони $G(\mathcal{E}_{\min}(0))$ оператор учун хос қиймат ва унга мос камида битта ψ хос функция қуйидаги шартни қаноатлантирсин

$$\frac{\psi(\cdot)}{\mathcal{E}_0(\cdot) - \mathcal{E}_{\min}(0)} \notin L^2(\mathbb{T}^d),$$

яъни,

$$2 \leq \dim \text{Ker}(G(\lambda) + I) \geq \dim \text{Ker}(h(0) - \lambda I) + 1.$$

V ҳол: -1 сони $G(\mathcal{E}_{\min}(0))$ оператор учун хос қиймат ва
 $\dim \text{Ker}(h(0) - \lambda I) + 2 \leq \dim \text{Ker}(G(\lambda) + I)$.

Юқоридаги синфлашдан фойдаланиб, $d = 3$ ва $d = 4$ ўлчамларда бўсага резонанси таърифига келамиз ($d \geq 5$ ўлчамларда II, IV ва V ҳоллар содир бўлмайди).

3-таъриф. *Фараз қилайлик $d = 3, 4$ бўлсин. II, IV ва V ҳоллардан бири содир бўлса, $h(0)$ оператор бўсага резонансига эришади деб айтилади.*

1-эслатма. *Панжарадаги бўсага резонанси тушунчаси узлуксиз фазодаги таърифнинг тўғридан-тўғри аналоги ҳисобланади. Панжара ўлчами $d = 1$ ва $d = 2$ бўлганда бўсага резонанси тушунчасини ҳам киритиш мумкин. Бироқ, кичик ўлчамларда Бирман-Швингер ядросининг сингулярлиги бизнинг ёндашувимизни тўғридан-тўғри қўллашга имкон бермайди.*

Бундан кейин биз $d \geq 3$ деб фараз қиламиз.

Биринчи натижа кўрсатадики, квазиимпульснинг ўзгариши таъсирида $h(k)$ нинг дискрет спектри бўсага орқали муҳим спектрнинг ичига сўрилмайди.

3-теорема. *Панжара ўлчами $d \geq 3$ ҳамда 1-фараз бажарилсин. Қўшимчасига дисперсион муносабатлар $\varepsilon_j(p)$, $j = 1, 2$, икки марта узлуксиз дифференциалланувчи функциялар бўлсин. Ҳар бир $k \in \mathbb{T}^d$ учун $h(k)$ операторнинг қуйи чегарасини қуйидагича аниқлаймиз*

$$m(k) = \inf \sigma(h(k)), \quad k \in \mathbb{T}^d.$$

Агар $h(0)$ операторнинг қуйи чегараси $m(0) < \mathcal{E}_{\min}(0)$ хос қиймат бўлса, унда қуйидаги муносабат ўринли

$$\mathcal{E}_{\min}(0) - m(0) < \mathcal{E}_{\min}(k) - m(k), \quad k \in \mathbb{T}^d, \quad k \neq 0, \quad d \geq 3.$$

Бизнинг иккинчи натижамиз иккинчи бобнинг асосий натижаси ҳисобланиб, у тўла гамильтониан $h(k)$ ($k \neq 0$) нинг муҳим спектрдан қуйида дискрет спектри бўш бўлмаслигини етарли шартини тامينлайди.

4-теорема. *Панжара ўлчами $d \geq 3$ ҳамда 1-фараз бажарилсин. Қўшимчасига дисперсион муносабатлар $\varepsilon_j(p)$, $j = 1, 2$, икки марта узлуксиз дифференциалланувчи функциялар бўлсин. Агар оператор $h(0)$ бўсага хос қиймати ёки бўсага резонансига эришса, у ҳолда барча $k \in \mathbb{T}^d \setminus \{0\}$ лар учун $h(k)$ гамильтонианнинг дискрет спектри муҳим спектрнинг қуйи чегараси, $\mathcal{E}_{\min}(k)$ дан чанда бўш тўплам бўлмайди.*

Диссертациянинг “**Панжарадаги уч заррачали Шрёдингер операторининг муҳим спектрининг тузилиши**” деб аталувчи учинчи бобида уч ўлчамли панжарада уч заррачали система қаралади, бунда заррачалар “*дисперсион тақсимооти*” нинг ташувчиси компакт бўлиши шарт эмас ҳамда улар жуфт-жуфти билан ўзаро таъсирлашувчи потенциаллар ёрдамида берилган.

Импульсли тасвирда, $H(K)$, $K \in \mathbb{T}^3$ уч заррачали дискрет Шрёдингер операторлари $L^2((\mathbb{T}^3)^2)$ Гильберт фазосида қуйидаги формула билан берилади

$$H(K) = H_0(K) - V_1 - V_2 - V_3,$$

бунда $H_0(K)$ ва V_α операторлар $(k_\alpha, k_\beta) \in (\mathbb{T}^3)^2$ координаталар системасида $L^2((\mathbb{T}^3)^2)$ фазода қуйидагича таъсир этади:

$$(H_0(K)f)(k_\alpha, k_\beta) = E_{\alpha\beta}(K; k_\alpha, k_\beta) f(k_\alpha, k_\beta), \quad f \in L^2((\mathbb{T}^3)^2),$$

ва

$$(V_\alpha f)(k_\alpha, k_\beta) = (2\pi)^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{T}^3} v_\alpha(k_\beta - k'_\beta) f(k_\alpha, k'_\beta) dk'_\beta, \quad f \in L^2((\mathbb{T}^3)^2).$$

Бу ерда $(k_\alpha, k_\beta) \in (\mathbb{T}^3)^2$ ($\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{1, 2, 3\}$) координаталар $k_1 + k_2 + k_3 = K$ тенглик билан боғланган, кўпайтириш функцияси

$$E_{\alpha\beta}(K; k_\alpha, k_\beta) = \varepsilon_\alpha(k_\alpha) + \varepsilon_\beta(k_\beta) + \varepsilon_\gamma(K - k_\alpha - k_\beta),$$

йиғинди ёрдамида аниқланади, бунда $\varepsilon_\alpha(p)$ ва $v_\alpha(p)$ ($\alpha = 1, 2, 3$) функциялар \mathbb{T}^3 да аниқланган ҳақиқий қийматли узлуксиз функциялар ҳамда

$$v_\alpha(p) = \overline{v_\alpha(-p)}, \quad p \in \mathbb{T}^3.$$

Асосий натижани баён қилишимиз мақсадида $\varepsilon_\alpha(p)$ ($\alpha = 1, 2, 3$) дисперсион муносабат ва интеграл операторнинг ядроси $v_\alpha(p)$ ($\alpha = 1, 2, 3$) функциялар учун қуйидаги фаразни қабул қиламиз.

2-фараз. Фараз қилайлик $\varepsilon_\alpha(p)$ ($\alpha=1,2,3$) дисперсион функция \mathbb{T}^3 да аниқланган ҳақиқий қийматли икки марта дифференциалланувчи бўлиб, координата бошида ягона айнамаган минимумга эришсин ҳамда

$$\liminf_{|p| \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_\alpha(p) - \varepsilon_\alpha(0)}{|p|^2} > 0$$

бўлсин. Қушимча равишда $v_\alpha(p)$ ($\alpha=1,2,3$) функция \mathbb{T}^3 да узлуксиз ва мусбат операторни аниқласин.

Таъкидлаб ўтамизки, агар $E_{\alpha\beta}(K; p, q)$ функция (k_α, k_β) нуқтада минимумга эришса, унда унинг минимум қийматида $E_{\beta\gamma}(K; p, q)$ ($\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{1, 2, 3\}$) функция $(k_\beta, K - k_\alpha - k_\beta)$ нуқтада эришади. Шу сабабли, ҳар бир $K \in \mathbb{T}^3$ учун $E_{\alpha\beta}(K; p, q)$ функцияларнинг минимуми $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ га боғлиқ эмас.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$E_{\min}(K) \equiv \min_{p, q \in \mathbb{T}^3} E_{\alpha\beta}(K, p, q), \quad E_{\max}(K) \equiv \max_{p, q \in \mathbb{T}^3} E_{\alpha\beta}(K, p, q).$$

Уч заррачали системанинг икки заррачали қисм системаларига мос $h_\alpha(k)$ ($k \in \mathbb{T}^3, \alpha = 1, 2, 3$) икки заррачали Шрёдингер операторлари $L_2(\mathbb{T}^3)$ гильберт фазосида қуйидаги тенглик билан аниқланади

$$h_\alpha(k) = h_\alpha^0(k) - v_\alpha.$$

Бу ерда $h_\alpha^0(k)$ ва v_α операторлар $L^2(\mathbb{T}^3)$ фазода аниқланади:

$$(h_\alpha^0(k)f)(p) = E_k^{(\alpha)}(p)f(p), \quad f \in L^2(\mathbb{T}^3),$$

бунда

$$E_k^{(\alpha)}(p) = \varepsilon_\beta(p) + \varepsilon_\gamma(k - p), \quad \{\alpha, \beta, \gamma\} = \{1, 2, 3\}, \quad p \in \mathbb{T}^3,$$

ва

$$(v_\alpha f)(p) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{T}^3} v_\alpha(p - q)f(q) dq, \quad f \in L^2(\mathbb{T}^3).$$

Бизнинг асосий натижамиз $H(K)$, $K \in \mathbb{T}^3$ уч заррачали Шрёдингер операторининг муҳим спектри чекли сондаги кесмаларнинг бирлашмасидан ташкил топишини кўрсатишдан иборат. Бунда квазиимпульс $k \in \mathbb{T}^3$ нинг баъзи қийматларида $h_\alpha(k)$ ($k \in \mathbb{T}^3, \alpha = 1, 2, 3$) операторнинг чексиз сондаги хос қийматларга эришиш эҳтимоли бўлса ҳам бу натижа ўринли бўлади. Бизнинг исботимизда $k \in \mathbb{T}^3$ нинг барча қийматларида $h_\alpha(k), k \in \mathbb{T}^3, \alpha = 1, 2, 3$ операторлар чекли сондаги хос қийматларга эга бўлиши асосий вазифани бажаради.

5-теорема. 2-фараз ўринли бўлсин. У ҳолда шундай $\delta > 0$ сон мавжуд бўлиб, ҳар бир $\alpha = 1, 2, 3$ ва барча $k \in U_\delta(0)$ лар учун $h_\alpha(k)$ оператор ўзининг

муҳим спектри $\sigma_{ess}(h_\alpha(k))$ дан ташқарида чекли сондаги хос қийматга эга бўлади.

6-теорема. 2-фараз ўринли бўлсин. У ҳолда уч заррачали $H(K)$ операторнинг муҳим спектри, $\sigma_{ess}(H(K))$ учун

$$\sigma_{ess}(H(K)) = \bigcup_{\alpha=1}^3 \bigcup_{p \in \mathbb{T}^3} \{\sigma_d(h_\alpha(K-p)) + \varepsilon_\alpha(p)\} \cup [E_{\min}(K), E_{\max}(K)]$$

тенглик ўринли, бунда $\sigma_d(h_\alpha(k))$ тўплам $h_\alpha(k)$, $k \in \mathbb{T}^3$ операторнинг дискрет спектри.

7-теорема. 2-фараз ўринли бўлсин. У ҳолда уч заррачали $H(K)$ операторнинг муҳим спектри, $\sigma_{ess}(H(K))$ чекли сондаги кесмаларнинг бирлашмасидан ташкил топади.

Диссертациянинг “Панжарадаги N заррачали муаммо боғланган ҳолатларнинг мавжудлиги” номли тўртинчи бобида жуфт-жуфти билан қисқа таъсирлашувчи (мутлақо тортишувчи ёки мутлақо итаришувчи бўлмаган) потенциалларга эга d ўлчамли \mathbb{Z}^d панжарада кўчиб юрувчи N та заррачалар системасига мос N заррачали Шрёдингер оператори $H(K)$ ($K \in \mathbb{T}^d$) ни қараймиз. Биз потенциалларнинг ва (компакт ташувчига эга бўлиши шарт бўлмаган) дисперсион муносабатларнинг кенг синфи учун ХВЖ теоремасининг аналогини диаграммалар усули ёрдамида исботлаймиз. Батафсил айтадиган бўлсак, биз $H(K)$ нинг муҳим спектри барча икки кластерли операторларнинг спектрларининг бирлашмасидан ташкил топгани ва кўпи билан саноқли сондаги кесмаларнинг бирлашмасидан иборат эканлигини кўрсатамиз.

Физикага оид адабиётларда, $K \in \mathbb{T}^d$ параметер N -заррачали квазиимпульс ва унга мос оператор, $H(K)$, $K \in \mathbb{T}^d$, N -заррачали дискрет Шрёдингер оператори (қатлам оператор) деб аталади.

Ҳар бир $K \in \mathbb{T}^d$ учун, биз $(\mathbb{T}^d)^{N-1}$ гомеоморф

$$\mathbb{F}_K^N := \{q = (q_1, \dots, q_N) \in (\mathbb{T}^d)^N : q_1 + \dots + q_N = K\}$$

кўпхилликни аниқлаймиз.

Ҳар бир $K \in \mathbb{T}^d$ қиймат учун $H(K)$ қатлам оператор $L^2(\mathbb{F}_K^N)$ гильберт фазосида

$$H(K) = H_0(K) - V,$$

тенглик билан таъсир этади, бунда $H_0(K)$ функцияга кўпайтириш оператори

$$H_0(K)f(p) = \left(\frac{1}{m_1}\varepsilon_1(p_1) + \dots + \frac{1}{m_N}\varepsilon_N(p_N)\right)f(p), \quad p \in \mathbb{F}_K^N,$$

ва

$$V = \sum_{1 \leq i < j \leq N} V_{ij}$$

эса

$$(V_{ij}f)(p) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{T}^d} v_{ij}(t) f(p_1, \dots, p_i - t, \dots, p_j + t, \dots, p_N) dt,$$

хусусий интегралли интеграл операторларнинг йиғиндисидан ташкил топган. Бу ерда $\varepsilon_\alpha(\cdot)$ ($\alpha = 1, \dots, N$) функция α ($\alpha = 1, \dots, N$) заррачанинг дисперсион муносабати ва $v_{ij}(\cdot)$ ($1 \leq i < j \leq N$) эса \mathbb{T}^d даги узлуксиз функция бўлиб,

$$v_{ij}(p) = \overline{v_{ij}(-p)}, \quad p \in \mathbb{T}^d$$

тенгликни қаноатлантиради.

Яхши натижа олиш учун \mathbb{T}^d да аниқланган (даврий) силлик функцияларнинг

$$\|f\|_\mu = \sup_{t, \ell \in \mathbb{T}^d} [|f(t)| + |\ell|^{-\mu} |f(t + \ell) - f(t)|]$$

нормага нисбатан ёпиғи бўлган \mathbb{T}^d да аниқланган гёлдер узлуксиз функцияларнинг $\mathcal{B}(\mu)$, $0 < \mu \leq 1$ Банах фазосини киритамиз.

Куйидаги техник фазанини қабул қиламиз.

3-фараз. Фараз қилайлик $\varepsilon_\alpha(p)$ ($\alpha = 1, \dots, N$) дисперсион муносабат $\mathcal{B}(\mu)$ ($0 < \mu \leq 1$) Банах фазосида ётсин. Шунингдек $v_{ij}(\cdot)$ ($1 \leq i < j \leq N$) функциялар \mathbb{T}^d да узлуксиз бўлсин.

Таъкидлаб ўтамизки, $H(K)$ га унитар эквивалент ҳар қандай оператор N -заррачали дискрет Шрёдингер оператори деб аталади. Уларнинг қўлланишига қараб ҳар хир тасвирларидан фойдаланамиз.

4-таъриф. $\{1, \dots, N\}$ тўпلامни кесишмайдиган C_1, C_2, \dots, C_ℓ қисм тўпلامларга ажратишдан ҳосил бўлган $C = \{C_1, C_2, \dots, C_\ell\}$ оила кластер ёйилма деб аталади. Ҳар бир C_k тўпلام кластер деб аталади.

Берилган $C = \{C_1, C_2, \dots, C_\ell\}$ кластер ёйилма учун: $|C_k|$ билан C_k тўпلامнинг элементлари сонини; $ij \in C$ муносабат биронта $1 \leq k \leq \ell$ учун $i, j \in C_k$ ўринлилигини англатади; шунга ўхшаш $ij \notin C$ муносабат i ва j заррачалар бошқа-бошқа кластерларга тегишлилигини (яъни $i \in C_\alpha$ ва $j \in C_\beta$ бунда $\alpha \neq \beta$) ва $\#C$ орқали C кластер ёйилмасидаги элементлар сонини, яъни $\#C = \ell$ ни англатади.

Шу билан бирга куйидагини аниқлаймиз

$$V^C := \sum_{ij \in C} V_{ij}, \quad I^C := \sum_{ij \notin C} V_{ij} = V - V^C.$$

5-таъриф. Оператор

$$H^C(K) = H(K) + I^C, \quad K \in \mathbb{T}^d$$

C кластер ёйилмага мос “кластер оператор” деб номланади.

Фараз қилайлик C_κ , $1 \leq \kappa \leq l$ кластер $C = \{C_1, \dots, C_l\}$ кластер ёйилмада ётсин ва $n_\kappa = |C_\kappa|$ бўлсин. Айтайлик $C_\kappa = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n_\kappa}\} \subseteq \{1, \dots, N\}$. Ҳар бир $k \in \mathbb{T}^d$ учун биз

$$\mathbb{F}_k^{n_\kappa} := \{q = (q_{\alpha_1}, \dots, q_{\alpha_{n_\kappa}}) \in (\mathbb{T}^d)^{n_\kappa} : q_{\alpha_1} + \dots + q_{\alpha_{n_\kappa}} = k\}.$$

тўпламни аниқлаймиз. Таъкидлаб ўтамизки, $\mathbb{F}_k^{n_\kappa}$ тўплам $(\mathbb{T}^d)^{n_\kappa-1}$ га гомеоморф бўлади.

C_κ кластердаги заррачалар системасига мос дискрет Шрёдингер оператори $h^{C_\kappa}(k) : L^2(\mathbb{F}_k^{n_\kappa}) \rightarrow L^2(\mathbb{F}_k^{n_\kappa})$ қуйидагича аниқланади

$$h^{C_\kappa}(k) = h_0^{C_\kappa}(k) - v^{C_\kappa},$$

бунда

$$(h_0^{C_\kappa}(k)f)(p) = \sum_{\alpha_i \in C_\kappa} \frac{1}{m_{\alpha_i}} \varepsilon_{\alpha_i}(p_i) f(p), \quad p \in \mathbb{F}_k^{n_\kappa}$$

ва

$$v^{C_\kappa} = \sum_{\alpha_i, \alpha_j \in C_\kappa, \alpha_i < \alpha_j} v_{\alpha_i, \alpha_j}$$

v_{α_i, α_j} – хусусий интегралли интеграл операторлар

$$(v_{\alpha_i, \alpha_j} f)(p) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{T}^d} v_{\alpha_i, \alpha_j}(t) f(p_{\alpha_1}, \dots, p_{\alpha_i} - t, \dots, p_{\alpha_j} + t, \dots, p_{\alpha_{n_\kappa}}) dt.$$

C кластер ёйилмага мос $H^C(K) = H(K) + I^C$, $K \in \mathbb{T}^d$ кластер оператори учун қуйидаги тасдиқ ўринли.

8-теорема. $H^C(K)$ операторнинг спектри фақат муҳим спектрдан иборат ҳамда

$$\sigma(H^C(K)) = \sigma_{\text{ess}}(H^C(K)) = \bigcup_{\substack{k_1, \dots, k_l \in \mathbb{T}^d, \\ k_1 + \dots + k_l = K}} \sigma(h^C(k_1, \dots, k_l)).$$

$C = \{C_1, \dots, C_m\}$ ёйилма $D = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ ёйилманинг такомиллашгани дейилади, агар D_j кластер C_i кластерларнинг бирлашмасидан ташкил топган бўлса.

9-теорема. Фараз қилайлик C ёйилма D нинг такомиллашгани ва $C \neq D$ бўлсин. У ҳолда $\sigma(H^C(K)) \subseteq \sigma_{\text{ess}}(H^D(K))$. Хусусан, ҳар бир C , $\#C \geq 2$ учун $\sigma(H^C(K)) \subseteq \sigma_{\text{ess}}(H(K))$ ўринли.

ХВЖ теоремасининг дискрет аналоги бобнинг асосий натижаларидан бири ҳисобланади.

10-теорема. Ҳар бир $K \in \mathbb{T}^d$ учун $H(K)$ операторнинг муҳим спектри ўзаро кесилмайдиган кесмаларнинг (қўпи билан саноқли) бирлашмасидан ташкил топади; аниқроғи, муҳим спектр барча икки кластерли операторларнинг спектрлари бирлашмасидан иборат:

$$\sigma_{\text{ess}}(H(K)) = \bigcup_{D \in \Xi, \#D=2} \sigma(H^D(K)),$$

бунда Ξ кластер ёйилмаларидан иборат. Бундан ташқари, $\sigma_{\text{disc}}(H(K))$ нинг қуйўқлашув нуқталари бу кесмаларнинг чегара нуқталари бўлади.

Шунингдек, 4-бобда, тортушувчи потенциалларга эга N та заррачалар системаси учун камида битта боғланган ҳолат мавжуд бўлиши учун етарли шартларни келтирамиз. Қуйидаги натижаларни итаришувчи потенциалларга эга системага ҳам осонликча ўтказилиши мумкин.

Бундай бўён заррачалар фақат ўзаро тортишади деб, яъни потенциал операторлар $V_{ij} \geq 0$ ($1 \leq i < j \leq N$) мусбат бўлсин деб фараз қиламиз. Бизнинг мақсадимиз, муҳим спектрнинг қуйи чегараси

$$\Sigma := \Sigma(K) = \inf \sigma_{\text{ess}}(H(K)) \quad (K \in \mathbb{T}^d)$$

дан қуйида камида битта N -заррачали боғланган ҳолат борлигини кўрсатишдир. Таъкидлаб ўтамизки 8-теорема ва 10-теоремага асосланиб, шундай кластер ёйилма $D = (D_1, D_2)$ топилиб, $\Sigma = \min_{k \in \mathbb{T}^d} \inf \sigma(h^D(k))$ ўринли

бўлади, бунда

$$h^D(k) = h^{D_1}(k) \otimes I^{D_2}(K-k) + I^{D_1}(k) \otimes h^{D_2}(K-k), \quad k \in \mathbb{T}^d.$$

Умумийликка зарар келтирмасдан $D_1 = \{1, \dots, n\}$ ва $D_2 = \{n+1, \dots, N\}$ деб оламиз. Қуйидаги муҳим натижа боғланган ҳолатлар мавжудлигини исботлашда асосий восита ҳисобланади.

11-теорема. Фарарз қилайлик $z_1(k_0)$ ва $z_2(K-k_0)$ лар, мос ҳолда $h^{D_1}(k_0)$ ва $h^{D_2}(K-k_0)$ ларнинг яккаланган хос қийматлар бўлсин. У ҳолда кесими, $\sigma_{\text{disc}}(H(K)) \cap (-\infty, \Sigma(K))$ бўш бўлмайди.

ХУЛОСА

Диссертация кубик панжарадаги бир, икки, уч ва N заррачали Шрёдингер операторининг спектрал хоссаларини тадқиқ этишга бағишланган.

Илмий изланишнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Бир заррачали Шрёдингер оператори учун қуйи бўсаға хос қиймати, қуйи бўсаға резонанси ва супер бўсаға резонансининг пайдо бўлиши аниқланган.
2. Квазиимпульснинг нолга тенг бўлмаган қийматлари учун икки заррачали Шрёдингер операторининг муҳим спектри тубидан пастда дискрет спектри нуқтаси мавжудлигининг етарли шarti топилган.
3. Уч заррачали дискрет Шрёдингер оператори муҳим спектрининг чекли сондаги кесмалардан иборат эканлиги аниқланган.
4. Панжарадаги N заррачали Шрёдингер оператори учун ХВЖ теоремасининг аналоги исботланган.
5. Панжарадаги N заррачали Шрёдингер операторининг муҳим спектридан пастда ётувчи хос қийматлари мавжудлигининг етарли шarti топилган.

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES
DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN**

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

MUMINOV ZAHRIDDIN ESHKOBILOVICH

**ON THE SPECTRUM OF MULTI-PARTICLE SCHRÖDINGER
OPERATORS ON LATTICES**

01.01.02- Differential Equations and Mathematical Physics

**ABSTRACT OF DISSERTATION FOR THE DOCTOR OF SCIENCE (DSc)
ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

TASHKENT-2021

The theme of dissertation of doctor of science (DSc) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2020.4.DSc/FM168

Dissertation has been prepared at National University of Uzbekistan.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, english, russian (resume)) on the website (www.ik-fizmat.nuu.uz) and the “Ziyonet” information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific consultant: **Lakaev Saidakhmat Norjigitovich**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Academician

Official opponents: **Alimov Shavkat Arifjanovich**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Academician

Ganikhodjaev Rasul Nabievich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Khalkhuzhaev Akhmad Miyassarovich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Leading organization: **Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University**

Defense will take place 26 August 2020 at 10.00 am at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 at National University of Uzbekistan, Institute of Mathematics. (Address: University str. 4, Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99878) 227-12-24, fax: (+99878) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №____) (Address: University str. 4, Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99878) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on « ____ » _____ 2021 year
(Mailing report № _____ on « ____ » _____ 2021 year)

A. Sadullaev
Chairman of scientific council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Academician

N.Mamadaliev
Scientific secretary of scientific council
on award of scientific degrees, PhD.

Sh.A.Alimov
Chairman of scientific Seminar under Scientific
Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Academician

INTRODUCTION (abstract of DSc thesis)

Actuality and demand of the theme of dissertation. Many scientific and practical studies conducted around the world are mostly devoted to scientific models of the processes occurring in the microworld. The theory microworld processes, called quantum mechanics, was developed by M.Planck, A.Einstein, W.Heisenberg, E.Schrödinger, W.Pauli, P.Dirac and other scientists. One of the most important physical quantities in any system of quantum mechanics is energy. The analysis of the spectral properties of the energy operator (Hamiltonian or Schrödinger operator) is one of the main problems of quantum mechanics. In this regard, the single- and multi-particle Schrödinger operators on the lattice serve as the theoretical basis for experimental observations. Therefore, the development of research on eigenvalues, discrete spectrum, and essential spectrum of Schrödinger operators corresponding to one- and multi-particle systems on the lattice remain to be important in solid state physics, quantum mechanics, and statistical physics.

The location and structure of essential spectra of energy operators corresponding to one- and (quantum) multi-particle systems on a lattice, their discrete spectra and the number of the points in the discrete spectrum depended on an external field of one-particle and pair interaction energy of many particles are important in the advanced mathematical physics. Also, to prove the existence of discrete eigenvalues, threshold resonances and threshold eigenvalues of one- and two-particle discrete Schrödinger operators, and to define the structure and location of the essential spectrum of many-particle discrete Schrödinger operators are very demanding, and the development of this research is one of the most important scientific researches in practice and theory.

In our country, much attention has been paid to develop important directions of applied and fundamental sciences, particularly, special attention is paid to the development of the spectral theory of the discrete Schrödinger operators and Hamiltonians associated with systems of several particles moving on lattices.

Conducting research have been identified as the main tasks and areas of activity of mathematical science at the level of international standards in the priority areas of "Algebra and its applications, differential equations and their applications, linear systems, dynamic systems and mathematical modeling of their applications, stochastic analysis, medical-biological informatics, computational mathematics"³.

To ensure the implementation of the decision, it is important to develop quantum mechanics, theory of quantum field, solid state physics, particularly, spectral theory of discrete and continuous Schrödinger operators and Fridriks models.

The subject and object of our dissertation are in line with tasks identified in the Decrees and Resolutions of the President of the Republic of Uzbekistan of February 7, 2017, PF-4947, "On the strategy of action for the further development of the Republic of Uzbekistan", PQ-4387 dated July 9, 2019 "On state support for the

³ Decree of Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan at the 2017 year 18 May « On measures on the organization of activities of the first created scientific research institutions of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan» № 292 dated May 17, 2017.

further development of mathematics education and science, as well as measures to radically improve the activities of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan”, PQ-4708 of May 7, 2020 “On measures to improve the quality of education and research in the field of mathematics” as well as in other regulations related to this activity.

Connection of research to priority directions of development of science and technologies of the Republic. This study was performed in accordance with the priority areas of science and technology of the Republic of Uzbekistan, IV, “Mathematics, Mechanics and Computer Science”.

Review of foreign research on the topic of the dissertation.⁴ The theory of lattice Schrödinger operators has been intensively studied in leading research centers and institutions of the world, including Tsukuba University, Kyushu University (Japan), St. Petersburg State University (Russia), International Atomic Energy Agency (IAEA, Austria), Université Pierre et Marie Curie (France), International School for Advanced Studies (SISSA, Italy), Institute for Theoretical Physics (Zurich, Switzerland), Alfréd Rényi Institute of Mathematics (Hungary), University of Missouri (USA), etc.

In particular, the following scientific results were obtained: the spectrum of the discrete Schrödinger operators with compactly supported potentials on the arbitrarily dimension lattice and spectral representations and representing S-matrices by the generalized eigenfunctions have been considered (Tsukuba University, St. Petersburg State University). It was shown that the potential is uniquely reconstructed from the S-matrix of all energies. The spectral shift function for the trace class potentials, and estimate the discrete spectrum in terms of the moments of the shift function and the potential have been studied St. Petersburg State University;

The 3-body problem at the unitary limit in an isotropic harmonic trap was considered for bosonic particles, and it was found two types of eigenstates: universal states which only depend on the oscillation frequency of a particle in the trap, the particles' mass and Planck's constant; and the states which also depend on a three-body parameter, similarly to the three-body bound states in free space discovered by Efimov (International Atomic Energy Agency (IAEA), Austria). In the N-body case, a collective degree of freedom describing the global size of the gas and hyper-radius was found and the concept of N-body resonances was generalized (Université Pierre et Marie Curie). The spectrum of the spin-boson Hamiltonian with two bosons for arbitrary positive coupling in the case when the dispersion relation is a bounded function was considered and explicit description of the essential spectrum was derived which consists of the so-called two- and three-particle branches that can be separated by a gap if the coupling is sufficiently large (Institute for Theoretical

⁴ Review of foreign research on the topic of the dissertation: Annales Henri Poincaré <https://link.springer.com/article/10.1007/s00023-011-0141-0>, International Nuclear Information System https://inis.iaea.org/search/search.aspx?orig_q=RN:51056693, Reviews in Mathematical Physics <https://doi.org/10.1142/S0129055X20500154>, Applications in Rigorous Quantum Field Theory <https://doi.org/10.1515/9783110403541-004>, Mathematical Physics, Analysis and Geometry <https://www.springer.com/journal/11040/> and others.

Physics, Zurich). The spin-boson model corresponding to a two-state quantum system linearly coupled at a scalar quantum field and spectral properties of associated Hamiltonian were studied. Using this probability measure, ground state expectations are represented for Hamiltonian operators of interest (Kyushu University, Japan, Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Hungary).

Nowadays, a lot of works are devoted to study application areas of spectral properties of discrete one-, two-, three- and N -particle Hamiltonians, corresponding Schrödinger operators for solid state physics, quantum mechanics, solid state and quantum graph models. In particular, their eigenvalues, coupling states, essential spectrum, also shift operators, wave operators, scattering matrix, spectral asymptotic, the spin-boson Hamiltonian, the order of decreasing number of bosons are being widely investigated.

The degree of scrutiny of the problem. In the present thesis we consider discrete Schrödinger operators of one, two, three and N particles, defined over the cubic lattice, and we shall be interested in the discrete and essential spectrum of such operators and some possible characterizations.

The single-particle discrete Schrödinger operators have attracted considerable attention for both combinatorial Laplacians and quantum graphs; for some recent summaries refer to the works of F. Chung, A.Grigor'yan, G.Berkolaiko, P.Exner O.Post, E.Korotyaev&N.Saburova and the references therein. Particularly, eigenvalue behavior of discrete Schrödinger operators are discussed by S.Albeverio, J. Bellissard, H.Schulz-Baldes, H.Hayashi, and are briefly discussed in the works of F.Hiroshima, P.Faria da Veiga, S.Lakaev, I.Bozorov when potentials are delta functions with a single point mass.

A continuous version, two-particle Schrödinger operator, is mentioned by R.Newton and proved by H.Tamura using a result of B.Simon. In the case of a zero range potential, F.Hiroshima showed that a threshold eigenvalue appears for the dimension of larger than five, and does not otherwise.

One of the fundamental differences between the multi-particle continuous Hamiltonian and the discrete Hamiltonians is that the latter is not rotationally invariant (see the works of A. Mogilner, G.Graf&D.Schenker, S.Lakaev, D.Yafaev), i.e. the discrete Hamiltonian of a multi-particle system does not separate into two parts, one relating to the center-of-mass motion and the other one to the internal degrees of freedom. The kinematics of system of quantum quasi-particles on lattices, even in the two-particle sector, is rather exotic. For instance, due to the fact that the discrete analogue of the Laplacian or its generalizations are not rotationally invariant. In particular, such a handy characteristics of inertia as mass is not available. Unlike to the continuous case, the corresponding fiber Hamiltonians associated with the direct decomposition depend parametrically on the internal binding of the *quasi-momentum*, which ranges over a cell of the dual lattice. As a consequence, due to the loss of the spherical symmetry of the problem, the spectra of the family of fiber operators turn out to be rather sensitive to the variation of the quasi-momentum.

In the case of two-particle continuous Schrödinger operators in the three dimensional space, one observes the emission of negative bound states from the

continuous spectrum at so-called critical potential strength (see, e.g., S. Albeverio, S.Lakaev, J.Rauch, D.Yafaev) which leads to the appearance of negative bound states for Schrödinger operators under infinitesimally small negative perturbations.

One of the remarkable results in the spectral theory of multi-particle continuous Schrödinger operators is the description of the essential spectrum (the Hunziker, van Winter and Zhislin (HVZ)-theorem), which has been extensively studied in many works (see, e.g., V.Enss, L.Faddeev, M.Klaus&B.Simon, R.Reed&B.Simon, H.Zoladek and references therein). We recall that for the multi-particle continuous Schrödinger operators, the essential spectrum coincides with the semi-axis, where the lowest value of the spectrum of the two-cluster subhamiltonians is a non-positive number. Thus, there are no gaps in the essential spectrum of the multi-particle continuous Schrödinger operators.

The location and structure of the essential spectrum has been investigated by S.Albeverio, S.Lakaev, J.Abdullaev, S.Samatov for the Hamiltonians of systems of three quantum particles moving on the three-dimensional lattice \mathbb{Z}^3 with "dispersion functions" describing the transport of a particle from a site to nearest neighboring sites and interacting via zero-range attractive pair potentials. Particularly, in [4], it is shown that the essential spectrum of the three-particle discrete Schrödinger operator consists of no more than four bounded closed intervals.

Few results are available in the literature on the essential spectra of the discrete Schrödinger operators associated to the many-body systems on the lattice: the essential spectrum of the three-body problem on the three dimensional space with analytic dispersion functions was described in S.Albeverio, S.Lakaev, M.Muminov; the four-body HVZ theorem with the discrete Laplacian and zero-range potentials was shown in M.Muminov *et. al.* and the references therein.

One of the practical applications of the HVZ theorem is that it allows to use the variational techniques more efficiently to study N -particle bound states. There are considerably many literature devoted to the finiteness of bound states of the Schrödinger operators with short-range pair potentials (see e.g. M.Klaus&B.Simon, J.Schechter and references therein). Nevertheless, apart from the Efimov effect (A.Sobolev, H.Tamura and D.Yafaev and references therein), not much seems known on the existence of bound states: some sufficient conditions to have an N -particle bound state can be found, for example, by K.Chadan&A.Martin, D.Bolle, J.Perez.

Connection of the theme of the dissertation with the research works of higher education and research institute, where the dissertation is carried out. The dissertation is done in accordance with the planned theme of scientific research; in the Institute of Applied Mathematics and of the Interdisciplinary Center for Complex Systems (IZKS) of the University of Bonn (Germany) supported by the grant of DFG 436 USB 113/4 and DFG 436 USB 113/6 project; Samarkand State University supported by the grand of Fundamental Science Foundation of Uzbekistan; University Putra Malaysia under research university grant scheme (RUGS) project with a code 9190883; Samarkand State university supported by Grant OT-F4-66 of Fundamental Science Foundation of Uzbekistan; under research Japan Challenging Exploratory Research grant number 15K13445.

The aim of research work was to find the sufficient condition of existence of eigenvalues and the location and structure of an essential spectrum of one-, two-, three- and N-particle discrete Schrödinger operators defined over the cubic lattice.

Research problems: showing the emergence of the lower threshold eigenvalue and lower threshold resonance, as well as the lower super-threshold resonance of one-particle Schrödinger operator;

finding sufficient conditions for the existence of the discrete spectrum below the bottom of the essential spectrum of the two-particle Schrödinger operator for all non-zero values of the quasi-momentum, provided that the two-particle Schrödinger operator corresponding to zero value of the quasi-momentum has either a threshold resonance or a threshold eigenvalue;

establishing the fact that the essential spectrum of the three-particle discrete Schrödinger operator consisting of a finitely many bounded closed intervals;

proving the analogue of the HVZ (Hunziker, van Winter and Zhislin) theorem for N-particle discrete Schrödinger operators using the diagrammatic method for a large class of potentials and dispersion relations that are not necessarily of compact support;

providing sufficient conditions to have at least one N-particle eigenvalue below the essential spectrum of a large class of N-particle discrete Schrödinger operators.

The research object: One-particle, two-particle, three-particle and N-particle discrete Schrödinger operators.

The research subject: Operator theory, Spectral theory, Function theory, Matrix theory, Theory of equations, Perturbation theory, Asymptotic theory, and Quantum Mechanics.

Research methods: The research used the methods of complex analysis, functional analysis, and theory of the linear operators, the methods of analytical functions, Faddeev-Newton integral equations for resolvents, and Vaingberg-van Winter equation for eigenfunctions, Birman-Schwinger principle, variational principle and analytical continuity of the Fredholm determinant.

The scientific novelty of the research is as follows:

the appearance of the lower threshold eigenvalue, lower threshold resonance and super-threshold resonance is shown for the one-particle Schrödinger operator;

a sufficient condition for the existence of the discrete spectrum below the bottom of the essential spectrum of the two-particle Schrödinger operator for all non-zero values of the quasi-momentum is found;

it was shown that the essential spectrum of the three-particle discrete Schrödinger operator consists of a finitely many bounded closed intervals;

the analogue of the HVZ theorem for N-particle discrete Schrödinger operators is proven using the diagrammatic method;

the sufficient conditions to have at least one N-particle eigenvalue below the essential spectrum of a large class of N-particle discrete Schrödinger operators are provided.

Practical results of the research used in the study of spectral properties of one- and multi-particle Schrödinger operators as well as parameter-dependent Friedrichs model operators;

Spectral properties of many-particle discrete Schrödinger operators related to the existence of the eigenstates served as a theoretical basis for experimental observations carried out in the calculation of energy levels, values and potential energy surface of the dynamics of excited states of neutronrich well deformed lanthanide nuclei constitutes.

The reliability of the results of the study. The results have been obtained by using the methods of Faddeev-Newton integral equations for resolvents, and Vaingberg-van Winter equation for eigenfunctions, Birman-Schwinger principle, Variational Principle and analytical continuity of the Fredholm determinant, strict mathematical proofs and the application of rigorous mathematical considerations .

Scientific and practical significance of research results. The scientific significance of the research results is explained by the fact that the obtained results can be applied in the further development of spectral theory of self-adjoint operators, quantum field theory, in particular, spectral theory of one-, two-, three- and multi-particle system Hamiltonians.

The practical importance of the research results is determined by the fact that the obtained scientific results are relevant to solid state physics and quantum mechanics.

Implementation of the research results. Results on the essential and discrete spectrum of the one- and multi-particle discrete Schrödinger operators on the cubic lattice are applicable to different fields of science. Some of them are stated below.

The results obtained on the spectral properties associated with one-particle and two-particle discrete Schrödinger operators are used in the leading foreign journals (Rend. Mat. Appl. **39** (7), 161 – 180 (2018); Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **46** (20), 205304 (2013); Technology audit and production reserves, **4** (54), 46-49 (2020); Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **40**, 10109 (2007); Journal of Physics A: Mathematical and General, **39** (26), 8377 (2006); Phys. Rev. Lett. **107**, 030504 (2011), Complex Analysis and Operator Theory, **2**, 637–668 (2008); Complex Analysis and Operator Theory, **4**, 1–38 (2010)) in the investigation of the spectral properties of some two- and three-particle Hamiltonians, multi-particle Schrödinger operators whose potential operator consists of a delta function, as well as parameter-dependent Friedrichs model operators;

In the leading foreign journals (Reviews in Mathematical Physics, **32** (06), 2050015 (2020); Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **40** (49), 14819 (2007); Europhysics Letters Association EPL (Europhysics Letters), **86** (6), 6006 (2009); Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika), **54** (2), 16–27 (2010); Journal of Mathematical Physics **49**, 093502 (2008)) and foreign books (Applications in Rigorous Quantum Field Theory, **2** tom, De Gruyter 2020) and foreign PhD dissertation (Thesis/Dissertation, Humboldt-Universitaet, Berlin (Germany). Report Number INIS-DE-1118, Jun 18, 2010; Thesis/Dissertation, Universite Pierre et Marie Curie – Paris 6 (France). Report Number FRNC–TH–10838) the results obtained for the essential spectrum and number of eigenvalues of the three-particle discrete Schrödinger operators allow to define the location and

structure of the essential spectrum and the finiteness or infinity of the number of eigenvalues of three-particle discrete and continuous Schrödinger operators; spin-boson to determine the number of cuts that make up a significant spectrum of gamiltonianlairing; to define number of intervals that make up the essential spectrum of the spin-boson Hamiltonian;

The theorem proved for spectral properties related to the presence of bound states for multi-particle discrete Schrödinger operators were used in the foreign grant project FRGS19–039–0647 to analyze the dynamics of excited states of neutron-rich well deformed lanthanide nuclei) (March 5, 2020 reference from the International Islamic University of Malaysia) approved by Ministry of Higher Education of Malaysia (MOHE). The application of the abovementioned results served as a theoretical basis for experimental observations carried out in the calculation of energy levels, values and potential energy surface of the dynamics of excited states of neutronrich well deformed lanthanide nuclei constitutes.

The results obtained from the analysis of the change in the specific values for the one-particle discrete Schrödinger operator were employed in the foreign grant project LRGS / TD / 2011 / UKM / ICT / 03/02 on mathematical tools in predicting several financial problems to fit Malaysian environment (March 5, 2021 reference from the National University of Malaysia). The results allowed to obtain an estimation for the number eigenvalues of discrete fraction Laplacian;

The statements related to the behaviour of eigenvalues of one-particle discrete Schrödinger operators were used in the foreign grant project FRGS / 1/2018 / STG06 / USIM / 02/1 about effective hybrid method for Cauchy type singular double integrals (February 10, 2021, Reference of the Universiti Sains Islam Malaysia, Malaysia) approved by Ministry of Higher Education of Malaysia. For a parameter-dependent linear self-aligning differential operator, the mentioned results allowed to define smallest eigenvalue and to show that and the corresponding eigenfunction is a non-degenerate.

Approbation of the research results. The main results of the research have been discussed in 16 international scientific conferences.

Publications of the research results. On the topic of the dissertation 32 research papers have been published in the scientific journals, all of them are included in the list of journals proposed by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for defending the DSc thesis, in addition 18 of them were published in international journals of mathematics and physics indexed in Scopus and Web of Science, and 9 papers published in national mathematical journals.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of introduction, three main chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is **153** pages (it does not include the title, content and references).

THE MAIN CONTENT OF THE DISSERTATION

In the introduction besides the motivation of research theme and correspondence to the priority research areas of science and technology of the Republic, we present a review of international research on the theme of the dissertation and the degree of scrutiny of the problem, formulate our goals and objectives, identify the object and subject of study, and state scientific novelty and practical results of the research. Moreover, we reduce the theoretical and practical importance of the obtained results, and give information on the implementation of the research results, the published works and the structure of dissertation.

In the first chapter of the thesis, titled “**Threshold of discrete one-particle Schrödinger operators with delta potentials on d -dimensional lattice**”, we have investigated eigenvalue behaviors of one-particle Schrödinger operator $H_{\lambda\mu}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ defined on d -dimensional lattice with $d+1$ delta potentials. It can be shown that lower threshold eigenvalue and lower threshold resonance appear for $d \geq 2$, and lower super-threshold resonance appears for $d = 1$.

The operator $H_{\lambda\mu}$, in the momentum representation, acts in the Hilbert space $L^2(\mathbb{T}^d)$ of L^2 -functions on the set $\mathbb{T}^d = (-\pi, \pi]^d$:

$$H_{\lambda\mu} = H_0 - V,$$

where H_0 is defined as the multiplication operator:

$$(H_0 f)(p) = E(p)f(p), \quad f \in L^2(\mathbb{T}^d)$$

with the function $E(p)$ is given by

$$E(p) = \sum_{j=1}^d (1 - \cos p_j), \quad p = (p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{T}^d,$$

V is an integral operator of convolution type

$$(Vf)(p) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{T}^d} v(p-s)f(s)ds, \quad f \in L^2(\mathbb{T}^d).$$

Here the kernel function $v(\cdot)$ is defined by

$$v(p) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \left(\mu + \lambda \sum_{i=1}^d \cos p_i \right), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Since the potential operator V is a finite, the essential spectrum $\sigma_{\text{ess}}(H_{\lambda\mu})$ satisfies

Proposition 1. *It follows that $\sigma_{\text{ess}}(H_{\lambda\mu}) = \sigma_{\text{ac}}(H_{\lambda\mu}) = \sigma(H_0) = [0, 2d]$.*

Definition 1. (Threshold eigenvalue and threshold resonance) *Let f be a solution of $H_{\lambda\mu}f = 0$.*

- a) *If $f \in L^2(\mathbb{T}^d)$, we say that 0 is a lower threshold eigenvalue of $H_{\lambda\mu}$.*
- b) *If $f \in L^1(\mathbb{T}^d) \setminus L^2(\mathbb{T}^d)$, we say that 0 is a lower threshold resonance of $H_{\lambda\mu}$.*

c) If $f \in L^\varepsilon(\mathbb{T}^d) \setminus L^1(\mathbb{T}^d)$ for any $0 < \varepsilon < 1$, we say that 0 is a lower super-threshold resonance of $H_{\lambda\mu}$.

In order to state the main results in Chapter 1, we define rectangular hyperbola:

$$\mathfrak{H}_0 = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathcal{H}_0(\lambda, \mu) = 0\} \text{ (see Figures 1 and 2),}$$

where

$$\mathcal{H}_0(\lambda, \mu) = \begin{cases} (\lambda - \lambda_\infty)(\mu - d) - d & \text{if } d \geq 3 \\ (\lambda - 1)(\mu - d) - d & \text{if } d = 1, 2 \end{cases},$$

with the asymptote $(\lambda_\infty, \mu_\infty)$.

Here

$$\mu_\infty = d, \quad \lambda_\infty = \int_{\mathbb{T}^d} \frac{1}{E(p)} dp \Big/ \int_{\mathbb{T}^d} \frac{\cos^2 p_1}{E(p)} dp, \quad d \geq 3, \quad \text{and} \quad \lambda_\infty = 1, \quad d = 1, 2.$$

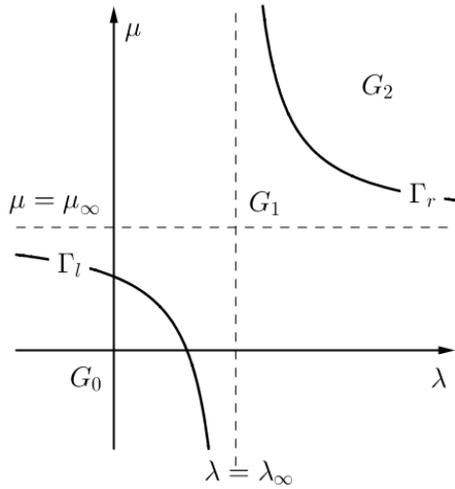


Figure 1: Region of G_j for $d \geq 3$

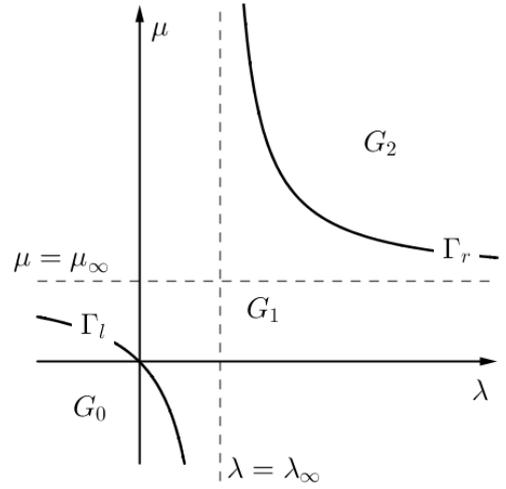


Figure 2: Region of G_j for $d = 1, 2$

The branches Γ_l and Γ_r of the hyperbola \mathfrak{H}_0 split \mathbb{R}^2 into three open sets

$$G_0 = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2; \mathcal{H}_0(\lambda, \mu) > 0, \lambda < \lambda_\infty\}, \quad G_1 = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2; \mathcal{H}_0(\lambda, \mu) < 0\}, \\ G_2 = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2; \mathcal{H}_0(\lambda, \mu) > 0, \lambda > \lambda_\infty\}.$$

Set

$$\lambda_c = \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{(\cos q_1 - \cos q_2)^2 dq}{E(q)} \text{ if } d \geq 2. \\ \lambda_s = \frac{1}{s}, \quad s = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{dq}{E(q)} \text{ if } d \geq 3, \quad \text{and } s = 1 \text{ if } d = 1, 2.$$

We divide (λ, μ) -plane into two half planes \mathfrak{E}_\pm and the boundary \mathfrak{E}_0 (resp. into two half planes \mathfrak{S}_\pm and the boundary \mathfrak{S}_0).

$$\mathfrak{E}_- = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2; \lambda < \lambda_c\}, \quad \mathfrak{E}_0 = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2; \lambda = \lambda_c\}, \quad \mathfrak{E}_+ = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2; \lambda > \lambda_c\}$$

(resp.

$$\mathfrak{S}_- = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2; \lambda < \lambda_s\}, \quad \mathfrak{S}_0 = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2; \lambda = \lambda_s\}, \quad \mathfrak{S}_+ = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2; \lambda > \lambda_s\})$$

Note that $\mathfrak{S}_- \subset \mathfrak{C}_-$ and $\mathfrak{C}_+ \subset \mathfrak{S}_+$, and we define open sets surrounded by hyperbola \mathfrak{H}_0 and boundary Γ_l and Γ_r by:

$$D_0 = G_0, \quad D_1 = G_1 \cap \mathfrak{S}_-, \quad D_2 = G_2 \cap \mathfrak{S}_-, \quad D_{d+1} = G_1 \cap (\mathfrak{S}_+ \cap \mathfrak{C}_-), \\ D_{d+2} = G_2 \cap (\mathfrak{S}_+ \cap \mathfrak{C}_-), \quad D_{2d} = G_1 \cap \mathfrak{C}_+, \quad D_{2d+1} = G_2 \cap \mathfrak{C}_+.$$

The boundaries of these sets define disjoint 8 curves:

$$B_0 = \Gamma_l, \quad B_1 = \Gamma_r \cap \mathfrak{S}_-, \quad B_{d+1} = \Gamma_r \cap (\mathfrak{S}_+ \cap \mathfrak{C}_-), \quad B_{2d} = \Gamma_r \cap \mathfrak{C}_+, \\ S_1 = \mathfrak{S}_0 \cap G_1, \quad S_2 = \mathfrak{S}_0 \cap G_2, \quad C_{d+1} = \mathfrak{C}_0 \cap G_1, \quad C_{d+2} = \mathfrak{C}_0 \cap G_2,$$

and two one point sets given by

$$A = \Gamma_r \cap \mathfrak{S}_0, \quad B = \Gamma_r \cap \mathfrak{C}_0 \text{ (see Figure 3).}$$

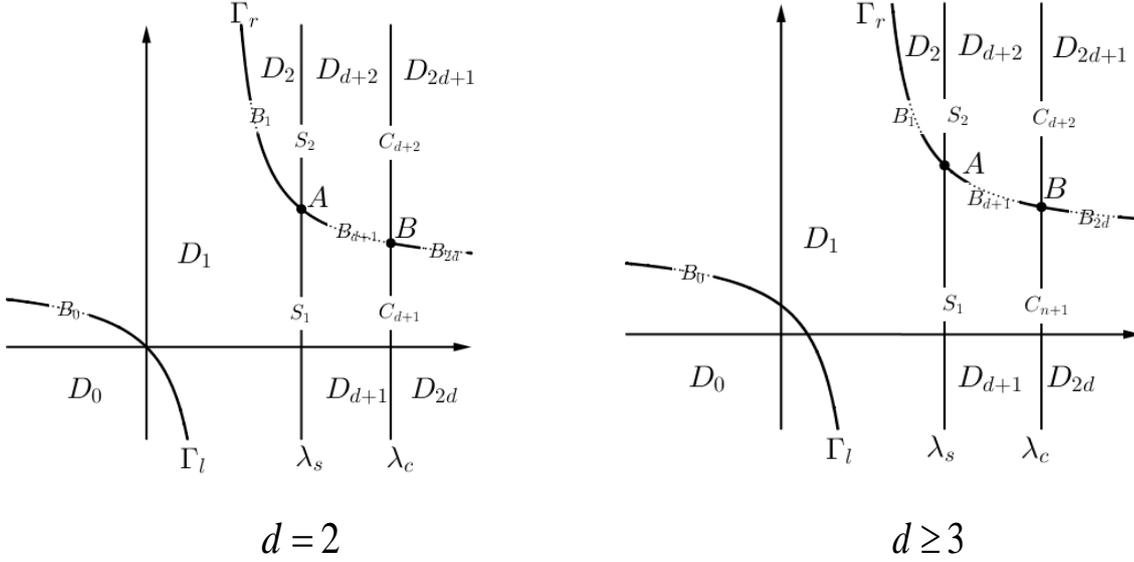


Figure 3: Hyperbola for $d \geq 2$

We are now in the position to state the main theorem for $d \geq 2$.

Theorem 1. *Let $d \geq 2$.*

- a) *Let $(\lambda, \mu) \in D_k$. Then $H_{\lambda\mu}$ has k eigenvalues in $(-\infty, 0)$, but has neither a threshold eigenvalue nor a threshold resonance (see Table 1).*

Table 1: Spectrum of $H_{\lambda\mu}$ for (λ, μ) on D_k for $d \geq 2$.

	D_0	D_1	D_2	D_{d+1}	D_{d+2}	D_{2d}	D_{2d+1}
E.v. in $(-\infty, 0)$	0	1	2	$d+1$	$d+2$	$2d$	$2d+1$

- b) *0 is not a super-threshold resonance of $H_{\lambda\mu}$ for any $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.*

- c) *Let (λ, μ) be in B_k, S_k, C_k and A, B . Then the results described in Table 2 are true.*

Table 2: Spectrum of $H_{\lambda\mu}$ for (λ, μ) on the edges of D_k for $d \geq 2$.

	Curve B_k		Curve S_k		Curve C_k		Point A		Point B	
E.v. $(-\infty, 0)$	k		k		k		1		$d+1$	
Th.res.0	$d=2$	-	$d=2$	2	$d \geq 2$	-	$d=2$	-	$d=2$	2
	$d=3,4$	1	$d \geq 3$	-			$d=3,4$	1	$d=3,4$	1

	$d \geq 5$	-				$d \geq 5$	-	$d \geq 5$	-	
Th.e.v.0	$d = 2$	-	$d = 2$	-	$d \geq 2$	$d - 1$	$d = 2$	-	$d = 2$	1
	$d = 3, 4$	-	$d \geq 3$	d			$d = 3, 4$	d	$d = 3, 4$	
	$d \geq 5$	1					$d \geq 5$	$d + 1$		$d - 1$
									$d \geq 5$	d

Now we formulate next result for $d = 1$.

Theorem 2. *Let $d = 1$.*

- a) *Let $(\lambda, \mu) \in D_k$. Then $H_{\lambda\mu}$ has k eigenvalues in $(-\infty, 0)$, and 0 is neither a threshold resonance nor a threshold eigenvalue (see Table 3).*

Table 3: Spectrum of $H_{\lambda\mu}$ for (λ, μ) on D_k for $d = 1$.

	D_0	D_1	D_2	D_3
E.v.in $(-\infty, 0)$	0	1	2	3

- b) *Let $(\lambda, \mu) \in S_1$. Then $H_{\lambda\mu}$ has a super-threshold resonance.*
c) *Let $(\lambda, \mu) \in B_k \cup S_1$. Then the next result in Table 4 is true.*
d) *In particular $H_{\lambda\mu}$ has neither a threshold resonance nor a threshold eigenvalue.*

Table 4: Spectrum of $H_{\lambda\mu}$ for (λ, μ) on the edges of D_k for $d = 1$.

	B_k	Curve S_k
E.v.in $(-\infty, 0)$	k	k
Th.res.0	-	-
Th.e.v.0	-	-

In general the spectrum of $H_{\lambda\mu}$ is changed according to varying μ with a fixed λ . This can be also seen from Figures 1, 2 and 4. Curves on these figures consist of only hyperbolas and vertical lines. Then an asymptote has no intersection of these lines.

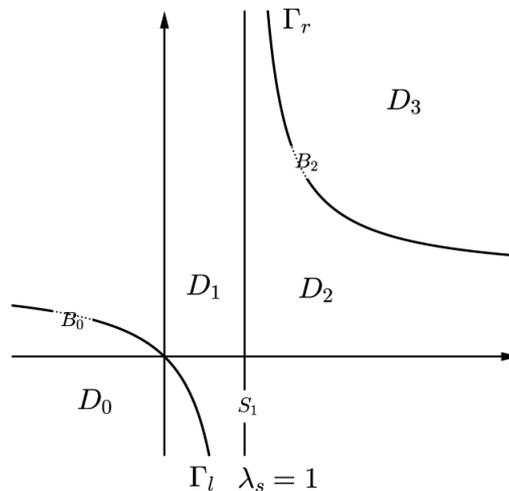


Figure 4: Hyperbola for $d = 1$

It can be seen that

$$\{(1, \mu) \in \mathbb{R}^2; \mu \in \mathbb{R}\} \cup \{(\lambda, d) \in \mathbb{R}^2; \lambda \in \mathbb{R}\}$$

is the asymptote of hyperbola $\mathcal{H}_z(\lambda, \mu)$ for $d = 1, 2$. On the other hand

$$\{(\lambda_\infty, \mu) \in \mathbb{R}^2; \mu \in \mathbb{R}\} \cup \{(\lambda, d) \in \mathbb{R}^2; \lambda \in \mathbb{R}\}$$

is the asymptote of hyperbola $\mathcal{H}_0(\lambda, \mu)$ for $d \geq 3$. Then we can have the corollary below.

Corollary 1. *Let $\lambda = 1$ for $d = 1, 2$ and $\lambda = \lambda_\infty$ for $d \geq 3$.*

a) *Let $d = 1$. Then $H_{\lambda, \mu}$ has a super-threshold resonance 0 and only one eigenvalue in $(-\infty, 0)$ for any μ .*

b) *Let $d \geq 2$. Then $H_{\lambda, \mu}$ has only one eigenvalue in $(-\infty, 0)$ for any μ .*

In the second chapter, titled “**The threshold effects for the two-particle Hamiltonians on lattices**” we give the (variational) proof of existence of the discrete spectrum below the bottom of the essential spectrum of the two-particle Schrödinger operator $h(k)$ for all non-zero values of the quasi-momentum $0 \neq k \in \mathbb{T}^d$, provided that the Hamiltonian $h(0)$ has either a threshold resonance (in dimensions three and four) or a threshold eigenvalue (in all dimensions $d \geq 3$).

The two-particle Schrödinger operator $h(k)$ ($k \in \mathbb{T}^d$) has the form

$$h(k) = h^0(k) + v,$$

where

$$(h^0(k)f)(p) = \mathcal{E}_k(p)f(p),$$

$$(vf)(p) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{T}^d} v(p-q)f(q)dq, \quad f \in L^2(\mathbb{T}^d)$$

and the *two-particle dispersion relations*

$$\mathcal{E}_k(p) = \varepsilon_1(p) + \varepsilon_2(k-p), \quad p \in \mathbb{T}^d,$$

parametrically depend on the quasi-momentum k , $k \in \mathbb{T}^d$.

In order to introduce the concept of a *threshold resonance* (virtual level) for the (lattice) energy operator $h(0)$ in dimensions three and four ($d = 3, 4$) we assume the following technical hypotheses that guarantee some smoothness of the one-particle dispersion relation $\varepsilon_1(p)$, $\varepsilon_2(p)$ and the kernel function $v(p)$.

Hypothesis 1. *Assume that the dispersion relation $\varepsilon_\alpha(p)$ ($\alpha = 1, 2$) is a continuous (periodic) real-valued functions and conditionally negative definite on \mathbb{T}^d with a unique (non-degenerate) minimum at the origin such that*

$$\liminf_{|p| \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_\alpha(p) - \varepsilon_\alpha(0)}{|p|^2} > 0.$$

Assume, in addition, that $v(p)$ is a continuous function on \mathbb{T}^d such that

$$v(p) = \overline{v(-p)}, \quad p \in \mathbb{T}^d.$$

Recall that a complex-valued bounded function $\varepsilon: \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{C}$ is called conditionally negative definite if $\varepsilon(p) = \overline{\varepsilon(-p)}$ and

$$\sum_{i,j=1}^n \varepsilon(p_i - p_j) z_i \bar{z}_j \leq 0$$

for any $n \in \mathbb{N}$, for all $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{T}^d$ and all $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ satisfying $\sum_{i=1}^n z_i = 0$.

Under Hypothesis 1 the perturbation v of the operator $h^0(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, is a Hilbert-Schmidt operator and, therefore, in accordance with the Weyl Theorem the essential spectrum of the operator $h(k)$ fills in the following interval on the real axis:

$$\sigma_{\text{ess}}(h(k)) = [\mathcal{E}_{\min}(k), \mathcal{E}_{\max}(k)],$$

where

$$\mathcal{E}_{\min}(k) = \min_{q \in \mathbb{T}^d} \mathcal{E}_k(q), \quad \mathcal{E}_{\max}(k) = \max_{q \in \mathbb{T}^d} \mathcal{E}_k(q).$$

For $\lambda \leq \mathcal{E}_{\min}(0)$, on the Banach space $C(\mathbb{T}^d)$, $d \geq 3$, of continuous (periodic) functions on \mathbb{T}^d we shall consider the integral operator $G(\lambda)$ with the (Birman-Schwinger) kernel function

$$G(p, q; \lambda) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} v(p - q) (\mathcal{E}_0(q) - \lambda)^{-1}, \quad p, q \in \mathbb{T}^d.$$

In order to discuss the threshold phenomena, that is, the case $\lambda = \mathcal{E}_{\min}(0)$, following Albeverio S. (2004) (see also Kostykin V. and Schrader R. (1998) for a related discussion), under Hypothesis 1 we distinguish five mutually disjoint cases:

Case I: -1 is not an eigenvalue of $G(\mathcal{E}_{\min}(0))$, that is,

$$0 = \dim \text{Ker}(h(0) - \lambda I) = \dim \text{Ker}(G(\lambda) + I).$$

Case II: -1 is a simple eigenvalue of $G(\mathcal{E}_{\min}(0))$ and the associated eigenfunction ψ satisfies the condition

$$\frac{\psi(\cdot)}{\mathcal{E}_0(\cdot) - \mathcal{E}_{\min}(0)} \notin L^2(\mathbb{T}^d),$$

that is,

$$0 = \dim \text{Ker}(h(0) - \lambda I) \quad \text{and} \quad \dim \text{Ker}(G(\lambda) + I) = 1.$$

Case III: -1 is an eigenvalue of $G(\mathcal{E}_{\min}(0))$ and any of the associated eigenfunctions ψ satisfies the condition

$$\frac{\psi(\cdot)}{\mathcal{E}_0(\cdot) - \mathcal{E}_{\min}(0)} \in L^2(\mathbb{T}^d),$$

that is,

$$1 \leq \dim \text{Ker}(h(0) - \lambda I) = \dim \text{Ker}(G(\lambda) + I).$$

Case IV: -1 is a multiple eigenvalue of $G(\mathcal{E}_{\min}(0))$ and at least one (up to a normalization) of the associated eigenfunctions ψ satisfies the condition

$$\frac{\psi(\cdot)}{\mathcal{E}_0(\cdot) - \mathcal{E}_{\min}(0)} \notin L^2(\mathbb{T}^d),$$

that is,

$$2 \leq \dim \text{Ker}(G(\lambda) + I) \geq \dim \text{Ker}(h(0) - \lambda I) + 1.$$

Case V: -1 is a multiple eigenvalue of $G(\mathcal{E}_{\min}(0))$ and
 $\dim \text{Ker}(h(0) - \lambda I) + 2 \leq \dim \text{Ker}(G(\lambda) + I)$.

Given the classification above, we arrive at the following definition of a threshold resonance in dimensions $d = 3$ or $d = 4$ (in dimensions $d \geq 5$ Cases II, IV and V do not occur).

Definition 2. *Let $d = 3, 4$. In Cases II, IV and V, the operator $h(0)$ is said to have a threshold resonance (at the threshold).*

Remark 1. *Our definition of a threshold resonance is equivalent to the direct analogue of that in the continuous case. One can also introduce the concept of a threshold resonance in demensions $d = 1$ and $d = 2$. However, due to additional thershold singularities of the Birman-Schwinger kernel in the momentum representation our approach is not directly applicable in low dimensions ($d = 1, 2$).*

From now and later on we will assume that $d \geq 3$.

Our first non-perturbative result shows that under Hypothesis 1 the discrete spectrum of the fiber operators $h(k)$ under the variation of the quasi-momentum can not be absorbed by the threshold.

Theorem 3. *Let $d \geq 3$. Assume Hypothesis 1. Assume, in addition, that the dispersion relations $\varepsilon_j(p)$, $j = 1, 2$, are twice differentiable functions. Denote by $m(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, the lower bound of the operator $h(k)$,*

$$m(k) = \inf \sigma(h(k)), \quad k \in \mathbb{T}^d.$$

Assume, in addition, that the lower edge $m(0) = \mathcal{E}_{\min}(0)$ of the spectrum of the operator $h(0)$ is an eigenvalue. Then

$$\mathcal{E}_{\min}(0) - m(0) < \mathcal{E}_{\min}(k) - m(k), \quad k \in \mathbb{T}^d, k \neq 0, \quad d \geq 3.$$

Our second non-perturbative result, the main result of the Chapter, provides sufficient conditions for the discrete spectrum of the whole family of fiber Hamiltonians $h(k)$ with $k \neq 0$ to be non-empty.

Theorem 4. *Let $d \geq 3$. Assume Hypothesis 1. Assume, in addition, that the dispersion relations $\varepsilon_j(p)$, $j = 1, 2$, are twice differentiable functions. Suppose that the operator $h(0)$ has either a threshold eigenvalue or a threshold resonance. Then, for all $k \in \mathbb{T}^d \setminus \{0\}$ the discrete spectrum of the fiber Hamiltonian $h(k)$ below the bottom $\mathcal{E}_{\min}(k)$ of its essential spectrum is a non-empty set.*

In the third chapter, titled “**On the structure of the essential spectrum for three-particle Schrödinger operators on a lattice**” we consider a system of three quantum particles on the three-dimensional lattice \mathbb{Z}^3 with arbitrary “*dispersion functions*” having not necessarily compact support and interacting via short-range pair potentials.

We show that the three-particle discrete Schrödinger operator $H(K)$, $K \in \mathbb{T}^3$ acts on the Hilbert space $L^2((\mathbb{T}^3)^2)$ as

$$H(K) = H_0(K) - V_1 - V_2 - V_3,$$

where the operators $H_0(K)$ and V_α in the coordinates $(k_\alpha, k_\beta) \in (\mathbb{T}^3)^2$ are defined on the Hilbert space $L^2((\mathbb{T}^3)^2)$:

$$(H_0(K)f)(k_\alpha, k_\beta) = E_{\alpha\beta}(K; k_\alpha, k_\beta) f(k_\alpha, k_\beta), \quad f \in L^2((\mathbb{T}^3)^2),$$

and

$$(V_\alpha f)(k_\alpha, k_\beta) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{T}^3} v_\alpha(k_\beta - k'_\beta) f(k_\alpha, k'_\beta) dk'_\beta, \quad f \in L^2((\mathbb{T}^3)^2).$$

Here

$$E_{\alpha\beta}(K; k_\alpha, k_\beta) = \varepsilon_\alpha(k_\alpha) + \varepsilon_\beta(k_\beta) + \varepsilon_\gamma(K - k_\alpha - k_\beta),$$

with a real-valued continuous functions $\varepsilon_\alpha(p)$ ($\alpha=1,2,3$) functions on \mathbb{T}^3 and $v(p)$ is a continuous function on \mathbb{T}^3 .

In order to formulate the main result, we assume the following technical hypotheses that guarantee some smoothness of the dispersion relation $\varepsilon_\alpha(p)$ ($\alpha=1,2,3$) and the bounded function $v_\alpha(p)$ ($\alpha=1,2,3$) such that

$$v_\alpha(p) = \overline{v_\alpha(-p)}, \quad p \in \mathbb{T}^3.$$

Hypothesis 2. *Assume that the dispersion relation $\varepsilon_\alpha(p)$ ($\alpha=1,2,3$) is a continuous (periodic) real-valued twice differentiable function on \mathbb{T}^3 with a unique (non-degenerate) minimum at the origin such that*

$$\liminf_{|p| \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_\alpha(p) - \varepsilon_\alpha(0)}{|p|^2} > 0.$$

Assume, in addition, that $v_\alpha(p)$ ($\alpha=1,2,3$) is a continuous function on \mathbb{T}^3 and defines a positive operator.

We remark that if the function $E_{\alpha\beta}(K; p, q)$ has a minimum at the point (k_α, k_β) then the function $E_{\beta\gamma}(K; p, q)$ has the same minimum at the point $(k_\beta, K - k_\alpha - k_\beta)$. Therefore for each $K \in \mathbb{T}^3$ the minimum and maximum taken over (p, q) of the function $E_{\alpha\beta}(K; p, q)$ are independent of $\alpha, \beta=1,2,3$.

We set:

$$E_{\min}(K) \equiv \min_{p, q \in \mathbb{T}^3} E_{\alpha\beta}(K, p, q), \quad E_{\max}(K) \equiv \max_{p, q \in \mathbb{T}^3} E_{\alpha\beta}(K, p, q).$$

The two particle discrete Schrödinger operator $h_\alpha(k)$, $k \in \mathbb{T}^3$, $\alpha = 1, 2, 3$ associated with the two-particle subsystem of the three-particle system acts on the Hilbert space $L_2(\mathbb{T}^3)$ as

$$h_\alpha(k) = h_\alpha^0(k) - v_\alpha.$$

Here the operators $h_\alpha^0(k)$ and v_α are defined on the Hilbert space $L^2(\mathbb{T}^3)$

$$(h_\alpha^0(k)f)(p) = E_k^{(\alpha)}(p)f(p), \quad f \in L^2(\mathbb{T}^3),$$

where

$$E_k^{(\alpha)}(p) = \varepsilon_\beta(p) + \varepsilon_\gamma(k - p), \quad \{\alpha, \beta, \gamma\} = \{1, 2, 3\}, \quad p \in \mathbb{T}^3,$$

and

$$(v_\alpha f)(p) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{T}^3} v_\alpha(p - q') f(q') dq', \quad f \in L^2(\mathbb{T}^3).$$

Our main result is that the essential spectrum of the three-particle discrete Schrödinger operator $H(K)$, $K \in \mathbb{T}^3$ consists of only finitely many bounded closed intervals, although in fact the two-particle operators $h_\alpha(k)$, $k \in \mathbb{T}^3$, $\alpha = 1, 2, 3$ might possess infinitely many eigenvalues for some $k \in \mathbb{T}^3$. In our proof the crucial fact is that the operators $h_\alpha(k)$, $\alpha = 1, 2, 3$ have finitely many eigenvalues below the bottom of the continuous spectrum for some $k \in \mathbb{T}^3$.

Theorem 5. *Assume Hypothesis 2 is fulfilled. Then for any $\alpha = 1, 2, 3$ and for all $k \in U_\delta(0)$, $\delta > 0$ sufficiently small, the operator $h_\alpha(k)$ has a finite number of eigenvalues outside of the essential spectrum $\sigma_{\text{ess}}(h_\alpha(k))$.*

Theorem 6. *Assume Hypothesis 2 is fulfilled. For the essential spectrum $\sigma_{\text{ess}}(H(K))$ of $H(K)$ the following equality*

$$\sigma_{\text{ess}}(H(K)) = \bigcup_{\alpha=1}^3 \bigcup_{p \in \mathbb{T}^3} \{\sigma_d(h_\alpha(K - p)) + \varepsilon_\alpha(p)\} \cup [E_{\min}(K), E_{\max}(K)]$$

holds, where $\sigma_d(h_\alpha(k))$ is the discrete spectrum of the operator $h_\alpha(k)$, $k \in \mathbb{T}^3$.

Theorem 7. *Assume Hypothesis 2 is fulfilled. The essential spectrum $\sigma_{\text{ess}}(H(K))$ of $H(K)$ consists of a union of a finite number of bounded closed intervals (segments).*

In the fourth chapter, titled “**Existence of bound states of N -body problem in a lattice**” we first consider the discrete Schrödinger operator $H(K)$, $K \in \mathbb{T}^d$, associated with the Hamiltonian of a system of N -particles moving on d -dimensional lattice \mathbb{Z}^d and interacting via short-range pair potentials (not necessarily purely attractive or purely repulsive). We prove the analogue of the HVZ theorem using the diagrammatic method for a large class of potentials and dispersion relations that are not necessarily of compact support. More precisely, we show that *the essential spectrum of $H(K)$ is the union of spectra of all two-cluster operators and it consists of an at most countable union of disjoint closed segments; only*

accumulation points (if any) of eigenvalues of $H(K)$ outside the essential spectrum are the edges of those segments.

We provide sufficient conditions to have at least one N -particle bound state for the system of attractive particles. Our results can be easily extended to a repulsive system.

In the physical literature, the parameter $K \in \mathbb{T}^d$ is called the N -particle quasi-momentum and the corresponding operators $H(K)$, $K \in \mathbb{T}^d$, are called the N -particle discrete Schrödinger operator (the fiber operators).

For $K \in \mathbb{T}^d$, we define

$$\mathbb{F}_K^N := \{q = (q_1, \dots, q_N) \in (\mathbb{T}^d)^N : q_1 + \dots + q_N = K\}$$

which is homeomorphic to $(\mathbb{T}^d)^{N-1}$.

For any $K \in \mathbb{T}^d$, the fiber operator $H(K)$ acts in $L^2(\mathbb{F}_K^N)$ as follows:

$$H(K) = H_0(K) - V,$$

where

$$H_0(K)f(p) = \left(\frac{1}{m_1} \varepsilon_1(p_1) + \dots + \frac{1}{m_N} \varepsilon_N(p_N) \right) f(p), \quad p \in \mathbb{F}_K^N,$$

and

$$V = \sum_{1 \leq i < j \leq N} V_{ij}$$

with

$$(V_{ij}f)(p) = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{T}^d} v_{ij}(t) f(p_1, \dots, p_i - t, \dots, p_j + t, \dots, p_N) dt,$$

Here the dispersion relation $\varepsilon_\alpha(\cdot)$ ($\alpha = 1, \dots, N$) and $v_{ij}(\cdot)$ ($1 \leq i < j \leq N$) are real-valued continuous functions on \mathbb{T}^d and

$$v_{ij}(p) = \overline{v_{ij}(-p)}, \quad p \in \mathbb{T}^d.$$

To get finer results, we need an auxiliary scale of the Banach spaces $\mathcal{B}(\mu)$, $0 < \mu \leq 1$, of Hölder continuous functions on \mathbb{T}^d obtained by the closure of the space of smooth (periodic) functions f on \mathbb{T}^d with respect to the norm

$$\|f\|_\mu = \sup_{t, \ell \in \mathbb{T}^d} [|f(t)| + |\ell|^{-\mu} |f(t + \ell) - f(t)|].$$

We assume the following technical hypotheses

Hypothesis 3. Assume that the dispersion relation $\varepsilon_\alpha(p)$ ($\alpha = 1, \dots, N$) belongs to the Banach space $\mathcal{B}(\mu)$ ($0 < \mu \leq 1$).

Assume, in addition, that $v_{ij}(\cdot)$ ($1 \leq i < j \leq N$) is a continuous function on \mathbb{T}^d .

In what follows any operator, unitarily equivalent to $H(K)$, will be called the N -particle discrete Schrödinger operator. We use its various representations according to the convenience in the applications.

Definition 3. A partition C of the set $\{1, \dots, N\}$ into nonintersecting subsets C_1, C_2, \dots, C_ℓ is called a cluster decomposition. Each C_k is called a cluster.

Given a cluster decomposition $C = \{C_1, C_2, \dots, C_\ell\}$; we write $|C_k|$ to denote the number of elements in C_k ; the symbol $ij \in C$ means $i, j \in C_k$ for some $1 \leq k \leq \ell$; analogously, the symbol $ij \notin C$ denotes the situation in which particles i and j are in different clusters (i.e. $i \in C_\alpha$ and $j \in C_\beta$ with $\alpha \neq \beta$) and $\#C$ denotes the number of elements in C , i.e. $\#C = \ell$; besides, set $V^C := \sum_{ij \in C} V_{ij}$, $I^C := \sum_{ij \notin C} V_{ij} = V - V^C$.

Definition 4. The operator

$$H^C(K) = H(K) + I^C, \quad K \in \mathbb{T}^d$$

is called the “cluster operator” corresponding to cluster decomposition C .

Let C_κ , $1 \leq \kappa \leq l$ be a cluster in a decomposition $C = \{C_1, \dots, C_l\}$ and $n_\kappa = |C_\kappa|$.

Suppose $C_\kappa = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n_\kappa}\} \subseteq \{1, \dots, N\}$. For $k \in \mathbb{T}^d$ set

$$\mathbb{F}_k^{n_\kappa} := \{q = (q_{\alpha_1}, \dots, q_{\alpha_{n_\kappa}}) \in (\mathbb{T}^d)^{n_\kappa} : q_{\alpha_1} + \dots + q_{\alpha_{n_\kappa}} = k\}.$$

Recall that $\mathbb{F}_k^{n_\kappa}$ is homeomorphic to $(\mathbb{T}^d)^{n_\kappa-1}$. The discrete Schrödinger operator $h^{C_\kappa}(k) : L^2(\mathbb{F}_k^{n_\kappa}) \rightarrow L^2(\mathbb{F}_k^{n_\kappa})$ associated with the Hamiltonian of the system of particles corresponding to the cluster C_κ defined as

$$h^{C_\kappa}(k) = h_0^{C_\kappa}(k) - v^{C_\kappa},$$

where

$$(h_0^{C_\kappa}(k)f)(p) = \sum_{\alpha_i \in C_\kappa} \frac{1}{m_{\alpha_i}} \varepsilon_{\alpha_i}(p_i) f(p), \quad p \in \mathbb{F}_k^{n_\kappa}$$

and

$$v^{C_\kappa} = \sum_{\alpha_i, \alpha_j \in C_\kappa, \alpha_i < \alpha_j} v_{\alpha_i \alpha_j}$$

with

$$(v_{\alpha_i \alpha_j} f)(p) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{T}^d} v_{\alpha_i \alpha_j}(t) f(p_{\alpha_1}, \dots, p_{\alpha_i} - t, \dots, p_{\alpha_j} + t, \dots, p_{\alpha_{n_\kappa}}) dt.$$

For the cluster operator $H^C(K) = H(K) + I^C$, $K \in \mathbb{T}^d$ corresponding to cluster decomposition C .

Theorem 8. The operator $H^C(K)$ has only the essential spectrum, i.e.

$$\sigma(H^C(K)) = \sigma \text{ess}(H^C(K)) = \bigcup_{\substack{k_1, \dots, k_l \in \mathbb{T}^d, \\ k_1 + \dots + k_l = K}} \sigma(h^C(k_1, \dots, k_l)).$$

Given cluster decompositions $\{C_1, \dots, C_m\}$ and $D = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$, we say C to be a refinement of D , if each D_j is a union of some C_i 's.

Theorem 9. *Let C be a refinement of D , $C \neq D$. Then $\sigma(H^C(K)) \subseteq \sigma_{\text{ess}}(H^D(K))$. In particular $\sigma(H^C(K)) \subseteq \sigma_{\text{ess}}(H(K))$ for any cluster decomposition C , $\#C \geq 2$.*

The main result of this section is the following analogue of HVZ theorem.

Theorem 10. *For any $K \in \mathbb{T}^d$ the essential spectrum of $H(K)$ is an at most countable union of disjoint closed segments; more precisely, it consists of the union of the spectra of all two-cluster operators:*

$$\sigma_{\text{ess}}(H(K)) = \bigcup_{D \in \Xi, \#D=2} \sigma(H^D(K)),$$

where Ξ is the set of all cluster decompositions. Moreover, $\sigma_{\text{disc}}(H(K))$ can accumulate only at the edges of the constituent segments.

In this section we always suppose that particles are purely attractive, i.e. the potential operators satisfy $V_{ij} \geq 0$, $1 \leq i < j \leq N$. Our aim is to provide some sufficient conditions to have at least one N -particle bound state below the lowest edge of the essential spectrum $\Sigma := \Sigma(K) = \inf \sigma_{\text{ess}}(H(K))$, $K \in \mathbb{T}^d$. Recall that by Theorems 8 and 10 there exists a cluster decomposition $D = (D_1, D_2)$ such that $\Sigma = \min_{k \in \mathbb{T}^d} \inf \sigma(h^D(k))$, where

$$h^D(k) = h^{D_1}(k) \otimes I^{D_2}(K-k) + I^{D_1}(k) \otimes h^{D_2}(K-k), \quad k \in \mathbb{T}^d.$$

Without loss of generality assume that $D_1 = \{1, \dots, n\}$ and $D_2 = \{n+1, \dots, N\}$. The following abstract result is an essential tool in the proof of the existence of bound states.

Theorem 11. *Assume that $z_1(k_0)$ and $z_2(K-k_0)$ are isolated eigenvalues of $h^{D_1}(k_0)$ and $h^{D_2}(K-k_0)$. Then $\sigma_{\text{disc}}(H(K)) \cap (-\infty, \Sigma(K))$ is nonempty.*

CONCLUSION

The dissertation work is devoted to the study of spectral properties of one-particle, two-particle, three-particle and N -particle discrete Schrödinger operators defined over the cubic lattice.

The main results of the research are as follows:

The exact number of isolated eigenvalues is found for a single-particle Schrödinger operator defined on d -dimensional lattice with $d+1$ delta potentials;

The appearance of the lower threshold eigenvalue, lower threshold resonance and super-threshold resonance is shown for the single-particle Schrödinger operator;

A sufficient condition for the existence of the discrete spectrum below the bottom of the essential spectrum of the two-particle Schrödinger operator for all non-zero values of the quasi-momentum is found;

It was found that the essential spectrum of the three-particle discrete Schrödinger operator consisting of a finitely many bounded closed intervals;

The analogue of the HVZ theorem for N -particle discrete Schrödinger operators is proved;

The sufficient conditions to have at least one N -particle eigenvalue below the essential spectrum of a large class of N -particle discrete Schrödinger operators are provided.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ
УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
УЗБЕКИСТАНА**

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

МУМИНОВ ЗАХРИДДИН ЭШКОБИЛОВИЧ

**О СПЕКТРЕ МНОГОЧАСТИЦНЫХ ОПЕРАТОРОВ ШРЁДИНГЕРА
НА РЕШЕТКАХ**

01.01.02- Дифференциальные уравнения и математическая физика

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА (DSc) ФИЗИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК**

ТАШКЕНТ -2021

Тема докторской диссертации зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2020.4.DSc/FM168.

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, английский, русский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.ik-fizmat.nuu.uz) и на Информационнообразовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный консультант: **Лакаев Саидахмат Норджигитович**
доктор физико-математических наук, академик

Официальные оппоненты: **Алимов Шавкат Арифджанович**
доктор физико-математических наук, академик

Ганиходжаев Расул Набиевич
доктор физико-математических наук, профессор

Халхўжаев Ахмад Мияссарович
доктор физико-математических наук, доцент

Ведущая организация: **Международный Казахско-Турецкий университет имени Ходжа Ахмета Ясави**

Защита диссертации состоится 26 августа 2020 года в 10.00 часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана, института Математики. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99878)227-12-24, факс: (+99878) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за № _____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99878) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан « ____ » _____ 2020 года.
(протокол рассылки № _____ от « ____ » _____ 2020 года).

А.Садуллаев

Председатель Научного совета по
присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., профессор, академик

Н.Мамадалиев

Ученый секретарь Научного совета по
присуждению ученых степеней, PhD

Ш.А.Алимов

Председатель научного семинара при Научном
совете по присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Объект исследования: Одночастичные, двухчастичные, трехчастичные и двухчастичные дискретные операторы Шрёдингера.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

Научная новизна исследования состоит в следующем:

Появление нижнего порогового собственного значения, нижнего порогового резонанса и супер-порогового резонанса показано для одночастичного оператора Шрёдингера;

Найдено достаточное условие существования дискретного спектра ниже дна существенного спектра двухчастичного оператора Шрёдингера для всех ненулевых значений квазиимпульса;

Было обнаружено, что существенный спектр трехчастичного дискретного оператора Шрёдингера, состоит из конечного числа ограниченных отрезков;

Доказан аналог теоремы ХВЖ для N -частичных дискретных операторов Шрёдингера;

Приведены достаточные условия существования хотя бы одного N -частичного собственного значения ниже существенного спектра большого класса N -частичных дискретных операторов Шрёдингера.

Внедрение результатов исследования.

На основании полученных результатов о спектральных свойствах дискретных операторов:

Полученные в работе научные результаты служил теоретической базой для экспериментальных наблюдений, проводимых в рамках исследовательского проекта FRGS19-039-0647 (Динамика возбужденных состояний обогащенные нейтронами деформированные ядра лантаноидов), одобренном Министерством высшего образования Малайзии (справка Международного исламского университета Малайзии, 5 март 2020).

Методы, которые использовались в диссертации, были использованы в исследовательском проекте LRGS/TD/2011/UKM/ICT/03/02 (Математические инструменты для прогнозирования нескольких финансовых проблем с учетом среды Малайзии), одобренном Министерством высшего образования Малайзии (справка Национального университета Малайзии, 5 март 2021).

Полученные результаты, касающиеся спектральных свойств дискретных операторов Шрёдингера, докторской диссертации, были использованы в исследовательском проекте «Эффективный гибридный метод для сингулярного типа Коши. Двойные интегралы», FRGS/1/2018/STG06/USIM/02/1 одобренном Министерством высшего образования Малайзии (справка от Исламского университета Малайзии, 10 феврал 2021).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 153 страницы (название, оглавление и библиография не входят в объем работы).

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
LIST OF PUBLISHED WORKS
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

I бўлим (I часть; part I)

- [1]. Albeverio S., Lakaev S.N., Makarov K.A., Muminov Z.I. The Threshold Effects for the Two-particle Hamiltonians on Lattices// Communications in Mathematical Physics, **262**, 91–115 (2006). (Scopus. Impact Factor: 2.303)
- [2]. Albeverio, S., Lakaev, S., Muminov, Z.: On the structure of the essential spectrum for the three-particle Schrödinger operators on lattices. *Mathematische Nachrichten*. **280**, 699–716 (2007). (Scopus. Impact Factor: 0.91)
- [3]. Hiroshima F., Muminov Z., Kuljanov U., Threshold of discrete Schrödinger operators with delta potentials on N-dimensional lattice// *Linear and Multilinear Algebra*. ISSN: 0308-1087 (Print), 1563-5139 (Online), (2020). <https://doi.org/10.1080/03081087.2020.1750547>. (Scopus. Impact Factor: 1.112)
- [4]. Kholmatov Sh.Yu., Muminov Z., The essential spectrum and bound states of N-body problem in an optical lattice// *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. **51**, 265202 (2018). (Scopus. Impact Factor: 1.996)
- [5]. Muminov Z., Kuljanov U., Lakaev Sh., On the Spectrum of the Two-particle Shrodinger Operator with Point Interaction// *Lobachevskii Journal of Mathematics*. **42** (3), 598-605 (2021). (Scopus. Impact Factor: 0.53)
- [6]. Muminov Z., Alladustov Sh., Lakaev Sh., Spectral and threshold analysis of a small rank perturbation of the discrete Laplacian// *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. **496** (2), 124827 (2021). 124827 (Online). <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124827>. (Scopus. Impact Factor: 1.220)
- [7]. Muminov Z., U. Kuljanov, Alladustov Sh., On the number of the discrete spectrum of two-particle discrete Schrödinger operators// *Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences*. **3** (1) 33-46 (2020). https://uzjournals.edu.uz/mns_nuu/vol3/iss1/3.
- [8]. Muminov Z., Alladustov Sh., Lakaev Sh., Threshold Analysis of the three dimensional Lattice Schrödinger Operator with Non-local Potential// *Lobachevskii Journal of Mathematics*. **41** (6), 1094-1102 (2020). (Scopus. Impact Factor: 0.53)
- [9]. Muminov Z., Lakaev Sh., On negative eigenvalues of the discrete Schrödinger operator with non-local potential// *Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences*. **3** (1), 47–58 (2020).
- [10]. Lakaev Sh.S., Muminov Z.E., On negative eigenvalues of the discrete Schrödinger operator with nonlocal potential, *Scientific Journal of Samarkand State University*, **5** (111), 39–43 (2018).
- [11]. Muminov Z.I., Manaf N., Kuljanov U., The spectral properties of the discrete Schrödinger operator with non-local potential// *Innovations Through*

- Mathematical and Statistical Research. AIP Conf. Proc. **1739**, 020013 (2016). doi: 10.1063/1.4952493 (Scopus. Impact Factor: 0.40)
- [12]. Muminov Z., Bozorov I., Rasulov J., The essential spectrum of a model operator in fermionic Fock space// Uzbek Mathematical Journal. **2**, 1-15 (2015).
- [13]. G. Yodgorov, Ismail F., Muminov Z., Investigations of the location and structure of the essential Spectrum of a Hamiltonian in the Fermionic Fock Space// Sbornik: Mathematics. **205** (12), 85-98 (2014). (Scopus. Impact Factor: 0.8)
- [14]. Muminov Z., Ismail F., Rasulov J., The Faddeev equation and the essential spectrum of a model operator associated with the hamiltonian of a nonconserved number of particles// Advances in Mathematical Physics. (**2014**), 1-10 (2014). <http://dx.doi.org/10.1155/2014/943868>. (Scopus. Impact Factor: 1.130)
- [15]. Muminov Z., Ismail F. and Z.Eshkuvatov., On the structure of the essential spectrum of four-particle Schrödinger operators on a lattice// ICMSS 2013: International Conference on Mathematical Sciences and Statistics. Springer-Verlag Proceeding Series. 187-194 (2014). (Scopus. Impact Factor: 0.36)
- [16]. Muminov Z., Ismail F., Eshkuvatov Z., Rasulov J. On the discrete spectrum of a model operator in fermionic Fock space// Abstract and Applied Analysis. **2013** (875194), 1-12, (2013). <http://dx.doi.org/10.1155/2013/875194>. (Scopus. 2013-Impact Factor: 1.46)
- [17]. Muminov Z., Ismail F., Eshkuvatov Z., On the number of eigenvalues of a model operator in fermionic Fock space// 2012 iCAST: Contemporary Mathematics, Mathematical Physics and their Applications. IOP Publishing. Journal of Physics: Conference Series. **435** (012036), 1-5 (2013). doi:10.1088/1742-6596/435/1/012036. (Scopus. 2013-Impact Factor: 0.54).
- [18]. G.Dell'Antonio, Muminov Z., Shermatova Y.M., On the number of eigenvalues of a model operator related to a system of three-particles on lattices// Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. **44** (31), 1-27 (2011). doi: 10.1088/1751-8113/44/31/315302. (Scopus. Impact Factor: 1.996)
- [19]. Albeverio S., Lakaev S.N., Muminov Z., On the Number of Eigenvalues of a Model Operator Associated to a System of Three-Particles on Lattices (Russian)// Russian Journal of Mathematical Physics. **14** (4), 377-387 (2007). (Scopus. Impact Factor: 1.292)
- [20]. Albeverio S., Lakaev S.N., Muminov Z., The threshold effects for a family of Friedrichs models under rank one perturbations// Journal of Mathematical Analysis and Applications. **330** (2), 1152-1168 (2007). (Scopus. Impact Factor: 1.220)
- [21]. Abdullaev J.I., Muminov Z., Infinite number of the eigenvalues of two-particle Schrödinger operator on the lattice (Russian)//Doklady Academy nauk Respubliki Uzbekistana. **2**, 9-13 (2007).

- [22]. Muminov Z., On the number of eigenvalues of the two-particle Schrödinger operator (Russian)// Doklady Academy nauk Respubliki Uzbekistana. **1**, 7-10 (2003).
- [23]. Abdullaev J.I., Muminov Z., The essential spectrum of the three-particle operator (Russian)// Mathematical Journal of Uzbekistan. **3-4**, 3-8 (2002).
- [24]. Muminov Z, Aliev N, Qazibekov M. On the structure of the essential spectrum for three-particle discrete Schrödinger operators on the four dimensional lattices. Uzbek Mathematical Journal. **4**, 82-101 (2020).

II бўлим (II часть; part II)

- [1]. S. Albeverio, S.N. Lakaev, Z.I. Muminov. Schrödinger Operators on Lattices. The Efimov Effect and Discrete Spectrum Asymptotics. Annales Henri Poincaré. **5**, 743-772 (2004). (Scopus. Impact Factor: 1.489)
- [2]. Lakaev S.N., Muminov Z. The asymptotics for the number of eigenvalues of Schrödinger operators on lattice (Russian)// Funkcionalnii analiz i ego prilozh. **37** (3), 85–88, (2003). (Scopus. Impact Factor: 0.487)
- [3]. Albeverio S., Lakaev S.N., Muminov Z.I., Discrete Spectrum Asymptotics for Schrödinger Operators on Lattice // Preprint. Bonn SFB 611. **25**, 1-40 (2002).
- [4]. Albeverio S., Lakaev S.N., Muminov Z.I., On the structure of the Essential spectrum of the Three-particle Schrödinger Operators on Lattice// Preprint. Bonn SFB 611. **125**, 1-19 (2004).
- [5]. Albeverio S., Lakaev S.N., Makarov K.A., Muminov Z.I., Low-energy effects for the two-particle operators on a lattice// Preprint. Bonn SFB 611. **126**, 1-16 (2004).
- [6]. Muminov Z., Kuljanov U., CLR-estimates for two-particle discrete Schrödinger operator on \mathbb{Z}^d ($d \geq 3$)// (Russian) Uzbek Mathematical Journal. **1**, 46-56 (2014).
- [7]. Muminov Z., Kuljanov U., Lower bound-states of the one particle discrete Hamiltonian (Russian)// Mathematical journal of Uzbekistan. **4**, 47-59 (2013).
- [8]. Muminov Z., Kuljanov U., Lower bound states of one-particle Hamiltonians on integer lattices// Siberian Advances in Mathematic. **15** (1), 129-140 (2012).

Авторефератнинг ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги нусхалари “ЎзМУ хабарлари” илмий журнали таҳририясида таҳрир қилинди.

Босишга рухсат этилди: 02.08.2021 йил. Ҳажми 3,5 босма табоқ,
Бичими 60×84 1/16. Адади: 60 нусха. Буюртма
М.Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий Университети
босмахонасида чоп этилди.