

**В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ
ЎЗУРИДАГИ ИЛМЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМЙ КЕНГАШ**

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

БОЛТАЕВ ҲАБИБЖОН ҲАМИТОВИЧ

**ҲАҚИҚИЙ ФАКТОРЛАРНИНГ ҚИСМ ФАКТОРЛАРИ ВА
УЛАРНИНГ ИНДЕКСЛАРИ**

01.01.01 – Математик анализ

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ
БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ
АВТОРЕФЕРАТИ**

Тошкент – 2021

**Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD)
диссертацияси автореферати мундарижаси**

**Оглавление автореферата докторской диссертации
доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам**

**Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on
physical-mathematical sciences**

Болтаев Ҳабибжон Ҳамитович

Ҳақиқий факторларнинг қисм факторлари ва уларнинг индекслари 3

Болтаев Ҳабибжон Ҳамитович

Подфакторы вещественного фактора и их индексы 19

Boltaev Khabibjon Khamitovich

Subfactors of real factors and their indexes 35

Эълон қилинган ишлар рўйхати

Список опубликованных работ

List of published works 38

**В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМий ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМий КЕНГАШ**

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

БОЛТАЕВ ҲАБИБЖОН ҲАМИТОВИЧ

**ҲАҚИҚИЙ ФАКТОРЛАРНИНГ ҚИСМ ФАКТОРЛАРИ ВА
УЛАРНИНГ ИНДЕКСЛАРИ**

01.01.01 – Математик анализ

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD)
ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

Тошкент – 2021

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида В2017.1.PhD/FM6 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (<http://kengash.mathinst.uz>) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида тармоғида (<http://www.ziynet.uz>) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:

Рахимов Абдуғофур Абдумажидович
физика-математика фанлари доктори, профессор

Расмий оппонентлар:

Арзиқулов Фарҳоджон Нематжонович
физика-математика фанлари доктори, профессор

Зайтов Адилбек Атаханович

физика-математика фанлари доктори, профессор

Етакчи ташкилот:

Тошкент давлат транспорт университети

Диссертация ҳимояси В.И.Романовский номидаги Математика институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2021 йил «___» _____ соат _____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 46-уй. Тел.: (+99871) 207-91-40, email: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Диссертация билан В.И.Романовский номидаги Математика институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (_____ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 46-уй. Тел.: (+99871) 207-91-40).

Диссертация автореферати 2021 йил «___» _____ куни тарқатилди.
(2021 йил «___» _____ даги _____ рақамли реестр баённомаси).

У.А.Розиков

Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш раиси,
ф.-м.ф.д., профессор

Ж.К.Адашев

Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш илмий котиби,
ф.-м.ф.н., катта илмий ходим

У.У.Жамилов

Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш ҳузуридаги Илмий семинар
раиси, ф.-м.ф.д., катта илмий ходим

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган математика соҳасидаги кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда физиканинг динамик системалари ва квант механикаси, хусусан, бу назариянинг операторлар алгебралари назарияси билан боғлиқлигини ўрганишга келтирилади. Хусусий ҳолларда, кузатилаётган ҳар бир физик системасига H Гильберт фазосида таъсир қилувчи ўз-ўзига қўшма оператор, шунингдек, қаралаётган системанинг ҳар бир ҳолатига эса, бу операторлар алгебрасининг зичлик матрицаси мос келиши маълум. Шундай қилиб, операторлар алгебралари хусусан, C^* ва фон Нейман алгебралари квант механикаси ва динамик системаларининг математик модели бўлиб, бунда олинган ҳар бир натижа квант механикасида ўз талқинига эга. Шунинг учун, операторлар алгебралари ҳам назарий, ҳам татбиқий жиҳатдан аҳамиятли ва замонавий математиканинг муҳим йўналишларидан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда ҳақиқий C^* ва фон Нейман қисм алгебраларнинг индекслари ва уларга мос графларнинг хоссаларини аниқлаш муҳим аҳамият касб этмоқда. Комплекс фон Нейман қисм алгебраларнинг индекслари, қисм алгебралар учун уларга мос граф мавжудлиги ва улар учун Марков изи мавжудлигининг зарурий ва етарлилик шарти маълум. Таъкидлаш жоизки, ҳақиқий фон Нейман қисм алгебраларининг индекслари, қисм алгебралар учун граф мавжудлиги ва юқоридан 4 га яқин бўлган чекли факторнинг келтирилмайдиган гиперфинит қисмфакторларига доир мисоллар қуриш масаласи ҳалигача очиқ турибди. Бу борада, ҳақиқий факторларнинг қисм факторларини аниқлаш ва уларга мос иккиламчи графларнинг хоссаларини аниқлаш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда, айниқса кейинги йилларда фундаментал фанлар, жумладан квант механикаси ва физикада татбиқига эга бўлган долзарб йўналишларга эътибор кучайтирилди. Жумладан, физик системаларга оид масалаларни математик моделлаштиришда асосий объект ҳисобланган ва квант механикасида кенг татбиқига эга бўлган оператор алгебралари назариясини ривожлантиришга алоҳида эътибор қаратилди. Ҳозирги кунда фон Нейман қисм алгебралар индексларига боғлиқ хоссалари ва уларнинг графлар назариясига қўлланилишига доир салмоқли натижаларга эришилди. «Функционал анализ, математик ва статистик физика» фанларининг устивор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди¹. Илмий натижалардан илм-фаннинг турдош соҳаларида фойдаланиш мақсадида комплекс, ҳамда ҳақиқий C^* ва фон Нейман алгебралари, уларнинг графлар назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

¹ Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони, 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академияси В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги Қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. XX аср охирларида В.Джонс чекли фон Нейман алгебралари учун индекс тушунчасини киритган ва индекснинг мумкин бўлган қийматларини кўрсатган. У қисм алгебранинг индекс қиймати тўртдан катта ёки аниқ тригонометрик формула орқали ҳисобланишини исботлаган. У бу натижанинг исботида Гекке алгебраси деб аталувчи, ўсувчи чекли факторлар кетма-кетликларини қурган ва бу алгебра ажойиб хоссаларга эга эканлигини кўрсатган. Бундан ташқари, агар фон Нейман алгебрасининг автоморфизмларининг санокли дискрет гуруппаси ва қайсидир қисм гуруппасига чалиштира кўпайтмаси чекли фактор бўлса, у ҳолда қисм фактор индекси қисм гуруппа индекси билан устма-уст тушишини исботлаган. В.Джонс Гекке алгебрасининг чексиз бирлашмасида Марков изларини мавжудлигини исботлаган ва кос (кокиллар) гуруҳи асосида, бу Марков изларини уч ўлчовли фазода тугунларни таснифлаш билан комбинациялаб, тугунлар учун янги полиномиал инвариант қурган. Бошқа томондан ҳар бир фон Нейман қисм алгебралари учун иккиламчи графни мос қуйиб, Марков изининг мавжудлигининг зарурий ва етарлилик шартини топган ва шу орқали фон Нейман қисмалгебраларини графлар тилида ўрганиш мумкинлигини кўрсатган. Бу натижалари учун В.Джонс Киото шаҳрида ўтказилган ХХІ-халқаро математиклар конгрессида Филдс медали билан тақдирланган. Фон Нейман алгебрасининг чекли бўлмаган ҳолатлари учун индекс тушунчасини япон математиги Х.Косаки умумлаштирган.

Фон Нейман қисм алгебраларини ўрганишда қизиқарли бўлган ҳолат келтирилмайдиган қисм факторлардир. Маълумки, агар индекс 4 дан кичик бўлса, у ҳолда қисм фактор келтирилмайдигандир. Индекси 4 дан катта бўлган келтирилмайдиган қисм факторларга доир мисоллар қуриш кўп вақтлар давомида очиқ масала бўлиб қолган. Бу ҳолдаги мисолларни қуриш С.Попанинг ишларида кузатилган, аммо унинг мисоллари гиперфинит бўлмаган қисм факторлардан иборат бўлган. Келтирилмайдиган гиперфинит қисм факторларнинг муҳимлигини сезган ҳолда, бу масала билан салгина

олдинроқ В.Джонс ҳам қизиққан. Шунинг учун кейинроқ Ф.Голдман, Д.Харпе ва В.Джонс графлар ёрдамида индекси 4.73205... бўлган чекли факторнинг бир нечта келтирилмайдиган гиперфинит қисм факторларини куришган. Улар юқоридан 4 га яқин бўлган мисолларни куриш жуда қийинлигини айтиб ўтишган. У.Хаагеруп принципиал ва иккиламчи графлар ёрдамида индекси (4; 4,4...) интервалда бўлган чекли факторнинг бир нечта келтирилмайдиган гиперфинит қисм факторларини қурган. Кейинчалик Хаагеруп-Шое ва Окнеану чекли графлар учун би-унитар боғланма тушунчасини қўллаган ҳолда, чекли факторнинг келтирилмайдиган гиперфинит қисм факторларини ўрганишган ва бунинг натижасида индекси 4.026... га тенг бўлган келтирилмайдиган гиперфинит қисм фактор мавжудлигини кўрсатишган. Ҳозирги вақтгача бу натижа янгиланмаган ва индекси (4; 4,026...) интервалда бўлган келтирилмайдиган гиперфинит қисм факторларга доир мисоллар қурилмаган.

Фон Нейман алгебрасини ўрганишда Р.Пауэрс, Ф.Араки, Р.Вудс, М.Томита, М.Такесаки, У.Хаагеруп ва А.Конндек буюк олимлар тадқиқот олиб боришган, бундан ташқари ҳақиқий фон Нейман алгебраларини ўрганишда биринчи навбатда Ш.Аюпов, Э.Штермер, П.Стаси, Ш.Усманов ва А.Рахимовларнинг ҳиссалари жуда каттадир.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Математика институти илмий-тадқиқот ишлари режасидаги ФА-Ф1- Ф03 ТФ067 «Квант динамик кўп заррали системалар, операторлар алгебраларида ноассоциатив ва топологик структурлар» (2007-2011 йиллар) ва Тошкент автомобил йўллари институти илмий-тадқиқот ишлари режасидаги Ф-4-51 «Функционал фазоларда Йордан учли системалари ва структуравий анализдаги тақсимот эҳтимолликлари» (2012-2016 йиллар) фундаментал лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади ҳақиқий S^* ва фон Нейман қисм алгебраларининг индекслари топиш ва уларга мос графларнинг юқоридан тўртга яқин бўлган чекли факторнинг келтирилмайдиган гиперфинит қисм факторларини куриш.

Тадқиқотнинг вазифалари:

ҳақиқий факторлар индекслари тушунчаси билан қамровчи фактор индекси тушунчаси орасидаги боғлиқликни топиш;

чекли ҳақиқий фактор қисм факторларининг индекси қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари тўпламини топиш;

индекснинг ҳақиқий ҳолда ўринли бўлган хоссаларини кўрсатиш ва ҳақиқий қисм факторлар учун ўринли бўлмаган хоссаларини аниқлаш;

ҳақиқий қисм факторлар учун графлар куриш схемасини кўрсатиш ва улар билан қамровчи қисм факторлар графлари орасидаги фарқларни аниқлаш;

юқоридан тўртга яқин индексли, чекли ҳақиқий факторларнинг келтирилмайдиган гиперфинитли ҳақиқий қисм факторлар мавжудлигини кўрсатиш.

Тадқиқотнинг объекти Гильберт фазосида аниқланган чизиқли чегараланган операторлар, ҳақиқий ва комплекс C^* ва фон Нейман алгебраларини ташкил этади.

Тадқиқотнинг предмети операторлар алгебралар ва функционал анализ назарияси, ҳақиқий C^* ва фон Нейман алгебралар ва келтирилмайдиган гиперфинит ҳақиқий қисм факторлар назарияси.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертацияда функционал анализ, математик анализ ва операторлар алгебралари назариясининг қамровчи алгебрага ўтиш усулларидадан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

ҳақиқий факторлар ҳамда қамровчи факторларнинг индекс тушунчалари орасидаги боғланишни ифодаловчи теорема исботланган ва чекли ҳақиқий факторнинг ҳақиқий қисм факторлари индексининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари тўплами топилган;

қамровчи фактор индекси учун ўринли бўлган хоссаларнинг ҳақиқий ҳолда ҳам ўринли бўлиши исботланган ва ҳақиқий қисм факторлар учун ўринли бўлмаган хоссалар кўрсатилган;

ҳақиқий қисм факторлар учун графлар қуриш схемаси кўрсатилган ва бу графлар билан қамровчи қисм факторлар графлари орасидаги фарқлар аниқланган;

юқоридан тўртга яқин индексли, чекли ҳақиқий факторларнинг келтирилмайдиган гиперфинитли ҳақиқий қисм факторлар мавжудлиги кўрсатилган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

ҳақиқий C^* ва фон Нейман алгебраларнинг таснифи квант механикаси ва математик физикада вужудга келадиган квант заррачаларини аниқлаш масалаларини ечишда қўлланилган;

ҳақиқий фон Нейман алгебраларига оид натижалардан Каплан алгебралари учун дифференциаллашларни таснифлашда қўлланилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги функционал анализ ва операторлар алгебралари назарияси усулларида, ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти ҳақиқий факторларнинг қисм факторларини топиш, унга мос индекс қийматларини аниқлаш ва иккиламчи графлар қуриш масалалари операторлар алгебраси назариясини ривожлантиришда қўлланилиши билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти олинган натижалар квант статистик механикаси ва квант динамик системасидаги баъзи муаммоларни ҳал қилишда амалий асос бўлиб хизмат қилиши билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Ҳақиқий фон Нейман факторлар ва уларнинг индекслари бўйича олинган натижалар асосида:

ҳақиқий қисм факторлар учун графлар қуриш схемасини кўрсатиш ва қамровчи қисм факторлар графлари орасидаги мумкин бўлган фарқларидан № 20-01-00173 рақамли “Бир жинсли бўлмаган муҳитни томография қилиш

моделлари ва алгоритми” мавзусидаги хорижий грант лойиҳасида моделлар ва алгоритмлар тузишда фойдаланилган (Амалий математика институти, Узоқ Шарқ филиалининг 2021 йил 30 апрелдаги маълумотномаси, Россия). Илмий натижанинг қўлланилиши графлар ёрдамида компьютер томографияси моделларини қуриш имконини берган;

юқоридан тўртга яқин индексли чекли ҳақиқий факторларнинг келтирилмайдиган гиперфинит ҳақиқий қисм факторларидан ОТ-Ф4-31 рақамли “Нокоммутатив модулар, Лейбниц алгебралари ва симплексада полиномиал каскадлари” мавзусидаги фундаментал илмий лойиҳада симплексада полиномиал каскадларни аниқлашда фойдаланилган (Ўзбекистон Миллий Университети 2021 йил 5 майдаги маълумотномаси). Илмий натижани қўлланилиши комплекс ва ҳақиқий ҳолда олинган натижалар орасидаги боғлиқликлар ва фарқларни аниқлаш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 7 та халқаро ва 13 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Тадқиқот мавзуси бўйича жами 30 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 10 та мақола, жумладан, 2 таси хорижий ва 8 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат. Диссертациянинг ҳажми 100 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг илмий ва амалий аҳамияти очиқ берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг «**Чекли ҳақиқий факторнинг индекси**» деб номланувчи биринчи бобида тадқиқотда фойдаланадиган комплекс ва ҳақиқий W^* -алгебралар ҳақидаги таърифлар ва тушунчалар келтирилган, бундан ташқари комплекс ва ҳақиқий Нейман – Мюррейнинг жуфтлик константалари орасидаги боғлиқлиги ўрганилган, ҳамда чекли ҳақиқий фактор индекси қабул қилувчи қийматлари топилган.

$B(H)$ – H Гильберт фазосида аниқланган чизикли чегараланган операторлар алгебраси бўлсин ва $1 - B(H)$ нинг бирлик элементи ва

$M - B(H)$ нинг $*$ -қисм алгебраси бўлсин. $M' = \{a \in B(H) : ba = ab, \forall b \in M\}$ тўпلام M нинг *коммутант*и дейилади. Агар $M = M''$ ($M'' = (M')'$) бўлса, у ҳолда $M -$ *фон Нейман алгебраси* дейилади. Маълумки, бикоммутант теоремасига кўра, $M -$ фон Нейман алгебраси бўлиши учун $M - W^*$ -алгебра, яъни $M -$ кучсиз ёпиқ ва $1 \in M$ бўлиши зарур ва етарли. M нинг ҳамма элементлари билан ўрин алмашувчи $Z(M)$ тўпلامга M алгебранинг *маркази* дейилади. Таърифга кўра,

$$Z(M) = \{x \in M \mid xy = yx, \forall y \in M\}.$$

M алгебранинг ҳамма марказий элементлари $\lambda \cdot 1$, $\lambda \in \mathbb{C}$ кўринишда бўлса, у ҳолда M *фактор* дейилади. Агар $\alpha : M \rightarrow M$ чизиқли акслантириш ва $\forall x, y \in M$ учун $\alpha(x^*) = \alpha(x)^*$ ва $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$ (мос равишда $\alpha(xy) = \alpha(y)\alpha(x)$) тенгликлар бажарилса, у ҳолда бу акслантириш $*$ -*автоморфизм* (мос равишда $*$ -*анти автоморфизм*) дейилади, шунингдек, агар $\forall x \in M$ учун $\alpha^2(x) = \alpha(\alpha(x)) = x$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда бундай α *инволютив* дейилади. Агар $R \subset B(H) -$ ҳақиқий $*$ -қисм алгебра бўлса, у ҳолда R да коммутант комплекс ҳолдагига ўхшаш аниқланади ва бунинг учун $(R + iR)' = R' + iR'$ тенглик ўринли бўлади. Агар $R = R''$ бўлса, у ҳолда R *ҳақиқий фон Нейман алгебраси* дейилади.

$R -$ ҳақиқий W^* -алгебра бўлсин. R ни ўзида сақловчи энг кичик W^* -алгебра $U(R)$, R нинг *қамровчи W^* -алгебраси* дейилади. У ҳолда, $U(R) = R + iR$. Бундан ташқари, ихтиёрий R ҳақиқий W^* -алгебра қамровчи W^* -алгебранинг α_R инволютив $*$ -антиавтоморфизмини ҳосил қилади, яъни $\alpha_R(x + iy) = x^* + iy^*$, бу ерда $x + iy \in U(R)$, $x, y \in R$ ва аксинча, агар W^* -алгебра U да α -инволютив $*$ -антиавтоморфизм берилган бўлса, у ҳолда $\{x \in U : \alpha(x) = x^*\}$ тўпلام ҳақиқий W^* -алгебра бўлади. Агар $R -$ ҳақиқий W^* -алгебранинг маркази $1 \cdot \mathbb{R} = \{\lambda 1, \lambda \in \mathbb{R}\}$ билан устма-уст тушса, у ҳолда R *ҳақиқий фактор* дейилади; R алгебранинг қамровчи W^* -алгебра $I_n, I_\infty, II_1, II_\infty$ ёки III типли бўлса, у ҳолда мос равишда, бу типлар R нинг ҳам типли бўлади.

Фараз қилайлик, $M -$ чекли фактор, $\alpha - M$ алгебранинг инволютив $*$ -антиавтоморфизми ва $\tau - M$ алгебрада ягона α -инвариантли аниқ нормал чекли из бўлсин. $L^2(M)$ орқали M алгебранинг $\|x\|_2 = \tau(x^*x)^{1/2}$ нормага нисбатан тўлдирувчисини белгилаймиз.

Худди шундай, $L^2(M, \alpha)$ орқали (M, α) ҳақиқий факторнинг тўлдирувчисини белгилаймиз. У ҳолда, $L^2(M)$ Гильберт фазоси бўлади ва бунинг учун $L^2(M) = L^2(M, \alpha) + iL^2(M, \alpha)$ тенглик ўринли. Худди шу каби, $B(L^2(M))$ алгебра $B(L^2(M)) = B_r(L^2(M, \alpha)) + iB_r(L^2(M, \alpha))$ тенгликка эга. Ҳар бир $x \in M$ учун қуйидаги акслантиришни қараймиз: $\lambda(x)y = xy, \forall y \in M$.

$\|\lambda(x)y\|_2 \leq \|x\| \cdot \|y\|_2$ тенгсизликка кўра, λ акслантириш $L^2(M)$ да чизикли чегараланган оператор бўладиган ягона давомга эга ва уни яна $\lambda(x)$ орқали белгилаймиз. У ҳолда, M алгебранинг $(\lambda, L^2(M))$ аниқ W^* -тасвирига эга бўламиз. Худди шундай, λ_r акслантиришни $\lambda_r(x)y = xy$ ($\forall x, y \in (M, \alpha)$) тенглик билан аниқлаб, (M, α) алгебранинг $(\lambda_r, L^2(M, \alpha))$ аниқ W^* -тасвирини ҳосил қиламиз.

1-тасдиқ. $\beta(\lambda_x) = \lambda_{\alpha(x)}$ кўринишида аниқланадиган $\beta: \lambda(M) \rightarrow \lambda(M)$ акслантириш $\lambda(M)$ да инволютив $*$ -антиавтоморфизм бўлади ва бунинг учун $(M, \alpha)_\beta = \lambda_r(M, \alpha)$ тенглик ўринли бўлиб, бу ерда $(M, \alpha)_\beta = \{\lambda_x \in \lambda(M) : \beta(\lambda_x) = \lambda_x^*\}$ — β $*$ -антиавтоморфизм орқали ҳосил қилинган ҳақиқий W^* -алгебрадир, яъни $(M, \alpha)_\beta = (\lambda(M), \beta)$.

1-натижа. W^* -алгебра $\lambda(M)$ ҳақиқий W^* -алгебра $\lambda_r(M, \alpha)$ нинг комплексификациясидир, яъни $\lambda_r(M, \alpha) + i\lambda_r(M, \alpha) = \lambda(M)$. Бундан ташқари, $\{\lambda_r, L^2(M, \alpha)\}$ жуфтлик (M, α) ҳақиқий W^* -алгебранинг ҳақиқий аниқ W^* -тасвири бўлади.

Бу тасвири (M, α) алгебранинг каноник W^* -тасвири деб атаимиз.

Ихтиёрий $x \in M$ учун $\|x\|_2 = \|x^*\|_2$ тенглик ўринли эканлигидан, $J: x \rightarrow x^*$ акслантиришни $L^2(M)$ даги қўшма чизикли изометрияга ягона равишда давом эттириш мумкин ва бу давомни яна J орқали белгилаймиз.

Маълумки, Томита-Такесакининг модуляр назарияси фон Нейман алгебра назариясида, хусусан, III-типли факторларни таснифлашда жуда муҳим роль ўйнайди. Бу назарияга кўра,

$$\lambda(M)' = J\lambda(M)J \text{ ва } \lambda(M) = J\lambda(M)'J.$$

J — модуляр қўшма чизикли изометрияни қўллаган ҳолда, 1-тасдиқ ва 1-натижага ўхаш қуйидаги теоремага эга бўламиз.

2-тасдиқ. $\beta'(\cdot) = J\beta(J \cdot J)J$ кўринишида аниқланувчи $\beta': \lambda(M)' \rightarrow \lambda(M)'$ акслантириш $\lambda(M)'$ алгебранинг инволютив $*$ -антиавтоморфизми бўлади. Бундан ташқари,

$$\lambda_r(M, \alpha)' = \{\lambda_{x'} \in \lambda(M)' : \beta'(\lambda_{x'}) = \lambda_{x'}^*\}$$

тўплам ҳақиқий W^* -алгебра ва W^* -алгебра $\lambda(M)'$ ҳақиқий W^* -алгебра $\lambda_r(M, \alpha)'$ нинг комплексификацияси бўлади, яъни

$$\lambda_r(M, \alpha)' + i\lambda_r(M, \alpha)' = \lambda(M)'.$$

$\lambda_r(M, \alpha)'$ ва $\lambda_r(M, \alpha)$ алгебралар орасида қуйидаги боғлиқлик мавжуд.

3-тасдиқ. $\lambda_r(M, \alpha)'$ – ҳақиқий W^* -алгебра ҳақиқий W^* -алгебра $\lambda_r(M, \alpha)$ нинг $B_r(L^2(M, \alpha))$ алгебрага нисбатан коммутанти бўлади, яъни $\lambda_r(M, \alpha)' = \{ \lambda_x \in B_r(L^2(M, \alpha)) : \lambda_x \lambda_y = \lambda_y \lambda_x, \forall \lambda_y \in \lambda_r(M, \alpha) \}$.

Каноник тасвир ва аниқ, айнимаган W^* -тасвир орасида қуйидаги муносабат ўринли:

1-теорема. $M_1 \subset B(H_1)$ ва $M_2 \subset B(H_2)$ – W^* -алгебралар ва $\alpha_i - M_i$ -алгебранинг инволютив $*$ -антиавтоморфизми, $i=1,2$. Агар $\Phi \circ \alpha_1 = \alpha_2 \circ \Phi$ шартни қаноатлантирувчи $\Phi : M_1 \rightarrow M_2$ – нормаль $*$ -гомоморфизми бўлса, у ҳолда $\Phi = \Phi_3 \circ \Phi_2 \circ \Phi_1$, бу ерда

1) $\Phi_1 : M_1 \rightarrow M_1 \bar{\otimes} \mathbb{C}1_L - \Phi(a) = a \otimes 1_L$ кўринишида аниқланган ва $\Phi_1 \circ \alpha_1 = \tilde{\alpha}_1 \circ \Phi_1$ тенгликни қаноатлантирувчи $*$ -гомоморфизм, бунда $1_L - L$ Гильберт фазосида аниқланган бирлик оператор ва $\tilde{\alpha}_1 = \alpha_1 \otimes id$;

2) $\Phi_2 : M_1 \bar{\otimes} \mathbb{C}1_L \rightarrow (M_1 \bar{\otimes} \mathbb{C}1_L)p' - \Phi_2(a \otimes 1_L) = (a \otimes 1_L)p'$ кўринишида аниқланган ва $\Phi_2 \circ \tilde{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_1 \circ \Phi_2$ тенгликни қаноатлантирувчи $*$ -гомоморфизм бўлади, бунда $p' \in (M_1 \bar{\otimes} \mathbb{C}1_L)'$ – $\tilde{\alpha}_1'(p') = p'$ шартни қаноатлантирувчи проектор ва $\tilde{\alpha}_1' = J_1 \tilde{\alpha}_1 (J_1(\cdot)J_1)J_1 \otimes id$, $\bar{\alpha}_1(\cdot p') = \tilde{\alpha}_1(\cdot)p'$;

3) $\Phi_3 : (M_1 \bar{\otimes} \mathbb{C}1_L)p' \rightarrow M_2 - \Phi_3 \circ \tilde{\alpha}_1 = \alpha_2 \circ \Phi_3$ шартни қаноатлантирувчи $*$ -изоморфизмдир.

2-теорема. M – чекли фактор ва $\alpha - M$ алгебранинг инволютив $*$ -антиавтоморфизми бўлсин. Агар $\{\pi, H\} - M$ алгебранинг аниқ, айнимаган W^* -тасвири ва $\pi \circ \alpha = \tilde{\alpha} \circ \pi$ ўринли бўлса, бу ерда $\tilde{\alpha} - \pi(M)$ алгебранинг инволютив $*$ -антиавтоморфизми, у ҳолда $p' \in (\lambda_r(M, \alpha) \otimes 1_{K_r})'$ проектор ва $u : H_r \rightarrow p'(L^2(M, \alpha) \otimes K_r)$ унитар оператор мавжуд бўлиб, улар учун

$$u\pi(x) = (\lambda(x) \otimes 1_K)u \quad x \in M,$$

яъни, $\pi(M, \alpha) = (\pi(M), \tilde{\alpha})$ ва $(\lambda_r(M, \alpha) \otimes 1_{K_r})p'$ – ҳақиқий W^* -алгебралар фазовий $*$ -изоморфдир; бу ерда K_r – ҳақиқий сепарабель чексиз ўлчамли Гильберт фазосидир ва $K = K_r + iK_r$.

$\{\pi, H\} - M$ нинг аниқ айнимаган W^* - тасвири ва $\pi \circ \alpha = \tilde{\alpha} \circ \pi$, бу ерда $\tilde{\alpha} - \pi(M)$ алгебранинг инволютив $*$ -анитиавтоморфизми бўлсин, у ҳолда $(\pi(M), \tilde{\alpha})' + i(\pi(M), \tilde{\alpha})' = \pi(M)'$. $\pi(M)'$ алгебранинг ярим чекли бўлишидан, $(\pi(M), \tilde{\alpha})'$ ҳақиқий фактор ҳам ярим чеклидир. Шундай қилиб, $\pi(M)'_+$ – алгебрада ягона аниқ нормал ярим чекли $\tilde{\alpha}$ -инвариант из мавжуд. Алгебра $\pi(M)'_+$ да табиий $\tilde{\alpha}$ -инвариант изни қуйидагича аниқлаймиз.

(i). Фараз қилайлик, $\{\pi, H\} = \{ \lambda \otimes 1, L^2(M) \otimes K \}$, бу ерда K – санокли чексиз ўлчамли Гильберт фазо. У ҳолда, $(\lambda(M) \otimes 1_K)' = J \lambda(M) J \bar{\otimes} B(K) -$

W^* -алгебра чексиз ва (M, α) – ҳақиқий фактор учун куйидаги тенгликлар ўринли

$$\begin{aligned} \{\pi|_{(M, \alpha)}, H_r\} &= \{\lambda_r \otimes \mathbf{1}, L^2(M, \alpha) \otimes K_r\}, \\ (\lambda_r(M, \alpha) \otimes \mathbf{1}_{K_r})' &= J \lambda_r(M, \alpha) J \bar{\otimes} B(K_r) \end{aligned}$$

бу ерда K_r – ҳақиқий Гильберт фазоси ва $K_r + iK_r = K$. Кейинчалик, қулайлик учун, $\pi|_{(M, \alpha)}$ ўрнига қисқача π деб ёзамиз. K да $\{e_i\}_{i \in \Lambda}$ – ортогонал нормал базисни танлаб оламиз, бу ерда $|\Lambda| = \dim_{\mathbb{C}} K$. У ҳолда, ҳар бир $t' \in (\lambda(M) \otimes \mathbf{1}_K)'$ элементни ягона равишда куйидаги кўринишда $t' = (J \lambda(x_{ij}) J)$ ифодалаш мумкин, бу ерда $x_{ij} \in M$, $\forall i, j$. Агар $t' \in (\lambda_r(M, \alpha) \otimes \mathbf{1}_{K_r})'$ ва $\tilde{\alpha}'(t') = (t')^*$, у ҳолда $x_{ij} \in (M, \alpha)$, яъни $\alpha(x_{ij}) = x_{ij}^*$, $\forall i, j$ тенглик ўринли эканлигини осон кўрсатиш мумкин. Табиий из куйидаги тенглик билан аниқланади:

$$Tr'_{L^2(M) \otimes K}(t') = \sum_{i \in \Lambda} \tau(x_{ii}), \quad t' = (J \lambda(x_{ii}) J) \in (\lambda(M) \otimes \mathbf{1}_K)'_{+},$$

бу ерда τ – M да аниқланган ягона аниқ нормал α -инвариант из. Осон кўрсатиш мумкинки, $Tr'_{L^2(M, \alpha) \otimes K} \{e_i\}$ изнинг танланишига боғлиқ эмас ва $Tr'_{L^2(M, \alpha) \otimes K} - (\lambda(M) \otimes \mathbf{1}_K)'_{+}$ алгебранинг аниқ ярим чекли нормал изидир. Бундан ташқари,

$$\begin{aligned} (Tr'_{L^2(M) \otimes K} \circ \tilde{\alpha}')(t') &= Tr'_{L^2(M) \otimes K}(\tilde{\alpha}'(t')) = Tr'_{L^2(M) \otimes K}((t')^*) = \sum_i \tau(x_{ii}^*) = \\ &= \sum_i \tau(\alpha(x_{ii})) = \sum_i (\tau \circ \alpha)(x_{ii}) = \sum_i \tau(x_{ii}) = Tr'_{L^2(M) \otimes K}(t'), \end{aligned}$$

у ҳолда $Tr'_{L^2(M) \otimes K}$ – $\tilde{\alpha}'$ -инвариантдир. Энди $Tr'_{L^2(M, \alpha) \otimes K_r}$ (ҳақиқий) изни куйидагича аниқлаймиз:

$$Tr'_{L^2(M, \alpha) \otimes K_r}(t') = \sum_i \tau(x_{ii}), \quad t' = (J \lambda(x_{ii}) J) \in (\lambda_r(M, \alpha) \otimes \mathbf{1}_{K_r})'_{+},$$

изнинг таърифига кўра

$$Tr'_{L^2 M \otimes K}|_{(\lambda_r(M, \alpha) \otimes \mathbf{1}_{K_r})'} = Tr'_{L^2(M, \alpha) \otimes K_r}$$

яъни $Tr'_{L^2 M \otimes K}$ из $Tr'_{L^2(M, \alpha) \otimes K_r}$ изнинг чизиқли давомидир.

(ii). Умумий ҳолда, ихтиёрий аниқ айнамаган $\{\pi, H\}$ W^* -тасвири M алгебрада куйидаги $\pi \circ \alpha = \tilde{\alpha} \circ \pi$ шартни қаноатлантиради, 2-теоремага асосан $p' \in (\lambda_r(M, \alpha) \otimes \mathbf{1}_{K_r})'$ проектор ва $u: H_r \rightarrow p'(L^2(M, \alpha) \otimes K_r)$ унитар оператор мавжудки, улар учун

$$u \pi(x) u^* = (\lambda(x) \otimes \mathbf{1}_K) p', \quad x \in M,$$

тенглик ўринли, бу ерда K_r – ҳақиқий Гильберт фазоси ва $K = K_r + iK_r$.
У ҳолда табиий из қуйидагича аниқланади:

$$Tr'_H(t') = Tr'_{L^2(M) \otimes K}(ut'u^*), \quad t' \in \pi(M)'_+.$$

Бундан ташқари, Tr'_H – акслантириш u ва p' элементларнинг танланишига боғлиқ эмас ва $\pi(M)'_+$ алгебрада аниқ нормал изни ташкил этади. $\tilde{\alpha}'(u) = u^*$ тенгликдан Tr'_H из $\tilde{\alpha}'$ -инвариантдир. Шунга ўхшаш, (ҳақиқий) $Tr'_{L^2(M, \alpha) \otimes K_r}$ из қуйидагича аниқланади

$$Tr'_{L^2(M, \alpha) \otimes K_r}(ut'u^*) = Tr'_{L^2(M) \otimes K}(ut'u^*), \quad t' \in (\pi(M), \tilde{\alpha})'_+$$

ва изларнинг таърифидан қуйидагича эга бўламиз

$$Tr'_H \Big|_{(\pi(M), \tilde{\alpha})'} = Tr'_{L^2(M, \alpha) \otimes K_r}.$$

Агар $Tr'_{L^2(M, \alpha) \otimes K_r}$ изни қуйидагича Tr'_H кўринишида белгиласак, у ҳолда

$$Tr'_H = Tr'_H \Big|_{(\pi(M), \tilde{\alpha})'}$$

тенгликка эга бўламиз. Шунга ўхшаш, $Tr'_H \Big|_{(\pi(M), \tilde{\alpha})'}$ – $(\pi(M), \tilde{\alpha})'$ алгебрада аниқ нормал ярим чекли издир.

1-таъриф. $\dim_{(M, \alpha)}(H_r) = Tr'_{H_r}(\mathbf{1})$ сон H_r га нисбатан $(\pi(M), \tilde{\alpha})$ ва $(\pi(M), \tilde{\alpha})'$ алебралар орасидаги *жуфтлик доимийси* дейилади, бу ерда H_r – ҳақиқий Гильберт фазоси ва қуйидаги тенглик ўринли:

$$H_r + iH_r = H \text{ и } (M, \alpha) \subset B(H_r) \subset B(H_r) + iB(H_r) = B(H).$$

(iii). Энди, $\{\pi, H\} = \{\lambda \otimes \mathbf{1}, L^2(M) \otimes K\}$ тасвирда бошқа базисни қараймиз. Яъни K фазода $\{f_i\}_{i \in \Lambda'}$ ҳақиқий ортогонал нормал базисни қараймиз, бу ерда $|\Lambda'| = \dim_{\mathbb{R}} K$ бўлсин. У ҳолда $t' \in (\lambda(M) \otimes \mathbf{1}_K)'$ ҳар бир элементни ягона равишда қуйидаги кўринишда $t' = (J\lambda(x_{ij})J)$ тасвирлаш мумкин, бу ерда $x_{ij} \in M$, $\forall i, j$ учун. Агар $t' \in (\lambda_r(M, \alpha) \otimes \mathbf{1}_{K_r})'$, яъни $\tilde{\alpha}'(t') = (t')^*$, у ҳолда, $x_{ij} \in (M, \alpha)$ тегишлилигини кўрсатиш қийин эмас, яъни ушбу тенглик $\alpha(x_{ij}) = x_{ij}^*$, $\forall i, j$ учун ўринли. Қуйидагилар ўринлидир:

$$Tr'_{L^2(M) \otimes K}(t') = \sum_{i \in \Lambda'} \tau(x_{ii}), \quad t' = (J\lambda(x_{ij})J) \in (\lambda(M) \otimes \mathbf{1}_K)'_+.$$

Маълумки, $Tr'_{L^2(M) \otimes K} - (\lambda(M) \otimes \mathbf{1}_K)'_+$ алгебрада аниқ нормал ярим чекли из бўлади. Бундан ташқари, бу из $\tilde{\alpha}'$ -инвариандир. Шунга ўхшаш, $Tr'_{L^2(M) \otimes K}$ изнинг $\{f_i\}$ системаларнинг танланишига боғлиқ эмаслигини кўрсатиш мумкин. Қуйидаги тенгликдан $u\pi(x)u^* = (\lambda(x) \otimes \mathbf{1}_K)p'$ ($x \in M$) кейинги тенгликка эга бўламиз:

$$tr'_H(t') = tr'_{L^2(M) \otimes K}(ut'u^*), \quad t' \in \pi(M)'_+.$$

Таърифдан tr'_H из u ва p' ларнинг танланишига боғлиқ эмас ва бу из $\tilde{\alpha}'$ - инвариандир.

$\{\pi, H\}$ – M алгебранинг аниқ хосмас W^* -тасвири бўлсин ва $\pi \circ \alpha = \tilde{\alpha} \circ \pi$, бу ерда $\tilde{\alpha}$ – $\pi(M)$ алгебранинг инволютив $*$ -антиавтоморфизмдир.

2-таъриф. $\dim_{(M, \alpha)} = tr'_H(\mathbf{1})$ сон H га нисбатан $(\pi(M), \tilde{\alpha})$ ва $(\pi(M), \tilde{\alpha})'$ ҳақиқий W^* -алгебралар орасидаги *жуфтлик доимийси* дейилади.

Юқорида келтирилган таърифлардан ушбу $\dim_{(M, \alpha)}(H_r)$, $\dim_{(M, \alpha)}(H)$ ва $\dim_M(H)$ сонлар орасида қуйидаги тенгликлар ўринли

3-теорема. Қуйидаги тенглик ўринли:

$$\dim_M(H) = \dim_{(M, \alpha)}(H_r) = \frac{1}{2} \dim_{(M, \alpha)}(H).$$

$N \subset M$ – қисм фактор бўлсин ва $\alpha(N) \subset N$. Қуйидаги $R = (M, \alpha)$ ва $Q = (N, \alpha)$ ҳақиқий факторларни қараймиз. $\dim_Q(L^2(R))$ сон Q ҳақиқий қисм факторнинг R ҳақиқий фактордаги индекси дейилади ва қуйидагича $[R:Q]$ ёки $[(M, \alpha):(N, \alpha)]$ белгиланади.

Диссертация ишининг асосий натижаларидан бири қуйидаги теоремалардир. Бу теоремаларда ҳақиқий қисм факторларнинг комплекс қисм факторлар орасидаги боғлиқлигини кўрсатади ва ҳақиқий қисм фактор индекснинг мумкин бўлган қийматлари келтирилган.

4-теорема. Қуйидаги тенглик ўринли:

$$[(M, \alpha):(N, \alpha)] = [M:N], \text{ яъни } [R:Q] = [R + iR:Q + iQ].$$

5-теорема. Индекснинг мумкин бўлган қийматлари учун қуйидаги тасдиқ ўринли:

$$[(M, \alpha):(N, \alpha)] = 4 \cos^2(\pi/q) \quad (q \geq 3) \text{ ёки } [(M, \alpha):(N, \alpha)] \geq 4,$$

$$\text{яъни } [R:Q] = 4 \cos^2(\pi/q) \quad (q \geq 3), \text{ ёки } [R:Q] \geq 4.$$

« σ -чекли ҳақиқий факторнинг индекси» деб номланувчи диссертациянинг иккинчи бобида, ихтиёрий ҳақиқий қисм факторлар учун индекс тушунчаси ўрганилган. M^+ – M -алгебранинг кенгайтирилган мусбат қисми ва шунга ўхшаш $R^+ - R = (M, \alpha)$ -алгебранинг кенгайтирилган мусбат қисми бўлсин. Маълумки, $R^+ \subset M^+$. Агар $Q \subset R$ – ҳақиқий W^* -қисм алгебра бўлса, у ҳолда $T(uxu^*) = yT(x)y^*$, $x \in R^+$, $y \in Q$ кўринишида аниқланувчи $T:R^+ \rightarrow Q^+$ чизиқли акслантириш R алгебрада оператор-қийматли вазн

дейилади. T акслантиришнинг ягона равишда $\bar{T}:R^+ \rightarrow Q^+$ акслантиришга давом эттирилишини кўрсатиш мумкин.

Агар $N(\subset M)$ – W^* -қисм алгебра бўлса, у ҳолда M алгебрадаги ҳамма нормал аниқ ярим чекли оператор-қийматли вазни қуйидагича $P(M, N)$ белгилаймиз, $P(R, Q)$ – орқали эса R алгебрадаги ҳамма нормал аниқ ярим чекли оператор-қийматли вазни белгилаймиз.

6-теорема. $P(M, N) = P(R + iR, Q + iQ) \neq \emptyset \Leftrightarrow P(R, Q) \neq \emptyset \Leftrightarrow P(R', Q') \neq \emptyset$

M – σ -чекли (яъни жуфт-жуфти билан ортогонал эквивалент проекторлар сони саноқлидан кўп эмас) фактор, $N \subset M$ – қисм фактор ва $\alpha(N) \subset N$. $E:R \rightarrow Q$ – нормал шартли кутилма бўлсин. $M = R + iR$ W^* -алгебрада E нинг давомини $\bar{E}$ кўринишида белгилаймиз. E акслантириш оператор-қийматли вазн бўлганлигидан, 6-теоремага асосан унга қандайдир бошқа акслантириш $E^{-1} \in P(Q', R')$ мос келади. $\bar{E}^{-1} = \overline{E^{-1}}$ тенгликнинг бажарилишини осон кўрсатиш мумкин. Таърифга асосан, $\bar{E}(1) = E(1) = 1$. Лекин, умумий ҳолда, $\bar{E}^{-1}(1) = E^{-1}(1)$ 1 га скаляр каррали, яъни $E^{-1}(1) = \lambda 1$ ($\lambda = +\infty$ бўлиши ҳам мумкин).

3-таъриф. $E^{-1}(1)$ скаляр сон $Q = (N, \alpha)$ ҳақиқий қисм факторнинг $R = (M, \alpha)$ ҳақиқий фактордаги индекси дейилади ва қуйидагича $[R:Q]$ ёки $[(M, \alpha):(N, \alpha)]$ белгиланади.

Бу бобнинг асосий натижаларидан бири қуйидаги теорема ҳисобланади.

7-теорема. M – σ - чекли фактор ва α – M алгебранинг инволютив *-антиавтоморфизми бўлсин. Агар $N \subset M$ – қисм фактор ва $\alpha(N) \subset N$ бўлса, у ҳолда $(N, \alpha) = Q \subset R = (M, \alpha)$ – ҳақиқий факторлар учун

$$[(M, \alpha):(N, \alpha)] = [M:N], \text{ яъни } [R:Q] = [R + iR:Q + iQ], \text{ ва}$$

$$[(M, \alpha):(N, \alpha)] = 4 \cos^2(\pi/q) (q \geq 3) \text{ ёки } [(M, \alpha):(N, \alpha)] \geq 4 \text{ ўринли.}$$

Қуйидаги қизиқарли хосса ўринлидир.

8-теорема. R – II_1 типли ҳақиқий фактор бўлсин. Агар $Q \subset R$ гиперфинитли қисм фактор ва $[R:Q] < \infty$ ўринли бўлса, у ҳолда R – фактор ҳам гиперфинитли бўлади.

9-теорема. R – II_1 турли ҳақиқий фактор ва $Q \subset R$ – қисм фактор. Агар $[R:Q] < \infty$ бўлса, у ҳолда $Q' \cap R$ – ҳақиқий W^* -алгебра чекли ўлчамлидир. Хусусий ҳолда, агар $[R:Q] < 4$ бўлса, у ҳолда $Q' \cap R = \mathbb{R} \cdot 1$, яъни Q – келтирилмайдиган қисм фактор бўлади.

« **W^* -қисм алгебралар ва уларнинг графлари**» деб номланувчи диссертациянинг учинчи боби C^* -ҳақиқий қисм алгебраларнинг бир бирига жойлаштириш матрицалари ва уларга мос графларини ўрганишга бағишланган. $A \subseteq B$ – чекли ўлчамли ҳақиқий C^* -алгебра бўлсин. У ҳолда

бизга маълумки $A \cong \bigoplus_{i=1}^k M_{n_i}(F)$ ва $B \cong \bigoplus_{j=1}^l M_{m_j}(F)$, бу ерда $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ёки $\mathbb{H}$ (кватернионлар жисми). $\vec{n} = (n_1, \dots, n_k)$ ва $\vec{m} = (m_1, \dots, m_l)$ векторлар мос равишда A ва B алгебраларнинг ўлчовли векторлари бўлсин. $\Lambda_{ij} - k \times l - \Lambda_A^B$ матрицанинг элементларини қуйидагича аниқлаймиз: $\Lambda_{ij} - A$ нинг i -қўшилувчиси билан B нинг j -қўшилувчисининг иккита учини туташтирувчи қирралар сони.

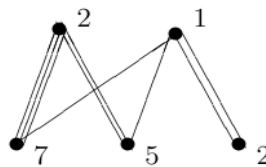
1-мисол. $B = M_7(\mathbb{R}) \oplus M_5(\mathbb{R}) \oplus M_2(\mathbb{R})$ ва $A = M_2(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$ алгебралар берилган бўлсин. $A \subset B$ алгебраларни жойлаштиришни қуйидагича аниқлаймиз:

$$(x, y) \mapsto \left(\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} : x \in M_2(\mathbb{R}), y \in \mathbb{R} \right)$$

A -тасвирнинг $M_2(\mathbb{R})$ ва $\mathbb{R}$ қўшилувчилари B -тасвирнинг 1-қўшилувчисиди мос равишда 3 ва 1 марта иштирок этяпти, у ҳолда $\Lambda_{11} = 3$ ва $\Lambda_{21} = 1$; B -тасвирнинг 2-қўшилувчисиди 2 ва 1 марта иштирок этгани учун мос равишда $\Lambda_{12} = 2$ и $\Lambda_{22} = 1$. Худди шу тарзда, $\Lambda_{13} = 0$ и $\Lambda_{23} = 2$. Шундай келиб чиқиб, бу жойлаштириш орқали қуйидаги матрицага эга бўламиз:

$\Lambda_A^B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Λ_A^B матрица ёрдамида бу жойлаштиришга мос қуйидаги

графни курамиз. Графнинг юқори ва қуйи учлари мос равишда A ва B тасвирларнинг қўшилувчилар сонидан ташкил топган. Улар мос равишда $\vec{n}$ ва $\vec{m}$ векторларнинг координаталари бўйича рақамланади. Иккита учни бирлаштирувчи қирралар сони Λ_{ij} сони билан аниқланади. Масалан $\Lambda_{11} = 3$ бўлган учун 2 рақамли юқори уч ва 7 рақамли қуйи уч орасидаги қирралар сони 3 га тенг. Шундай қилиб матрица Λ_A^B га қуйидаги граф мос келади:



Қуйидаги жойлаштириш ягона эмас.

10-теорема. $P \subset R$ — ҳақиқий W^* -алгебралар учун, умумий ҳолда қуйидаги тенгсизлик ўринли $\Lambda_P^R \neq \Lambda_{P+iP}^{R+iR}$.

Комплекс ҳолда қуйидаги тенглик ўринли: $[M : N] = \|\Lambda_N^M\|^2$. Аммо, ҳақиқий ҳолда қуйидаги теорема ўринли:

11-теорема. Агар $P \subset R$ – ҳақиқий факторлар бўлса, у ҳолда $[R:P] = \|\Lambda_P^R\|^2$, аммо P ва R ҳақиқий W^* -алгебралар ҳеч бўлмаганда биттаси фактор бўлмаса, у ҳолда $[R:P] \neq \|\Lambda_P^R\|^2$ ўринлидир.

Маълумки, $[M:N] < 4$ индексли ҳамма факторлар келтирилмайдиган факторлардир, яъни $N' \cap M = \mathbb{C} \cdot 1$. Индекси $[M:N] > 4$ бўладиган келтирилмайдиган қисм факторларни куриш анча йиллар давомида очик савол бўлиб қолган. Кейинчалик олимлар томонидан шу индексли мисоллар пайдо бўла бошлаган. 1990 йиллар орасида С.Попа, $\forall r > 4$ индекс учун N келтирилмайдиган қисм фактор мавжудлигини, индекси $[M:N] = r$ тенглигини кўрсатган ва қуйидаги саволни олдинга сурган: $[M:N] > 4$ индексли келтирилмайдиган гиперфинит қисм фактор мавжудми? Бу саволнинг жавоби ҳалигача очик ҳолдадир. Хусусий ҳолда бир неча мисоллар қурилган. Шунга ўхшаш, индекси $[R:Q] > 4$ бўлган бир нечта келтирилмайдиган ҳақиқий гиперфинит қисм факторлар қурилган.

12-теорема. Индекси 4 дан катта бўлган II_1 турли ҳақиқий факторнинг келтирилмайдиган ҳақиқий гиперфинит қисм факторлари мавжуд, хусусий ҳолда индекслар қуйидаги ораликқа тегишли

$$(4; 3 + \sqrt{2}), \left(4; (5 + \sqrt{13}) / 2\right) = (4; 4.302...) \text{ и } (6; 6.25).$$

ХУЛОСА

Ушбу диссертация ҳақиқий факторларнинг қисм факторлари ва уларнинг индексларини ўрганишга бағишланган

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Ҳақиқий факторлар ҳамда қамровчи факторларнинг индекс тушунчалари орасидаги боғланишни ифодаловчи теорема исботланган ва чекли ҳақиқий факторнинг ҳақиқий қисм факторлари индексининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари тўплами топилган.

2. Қамровчи фактор индекси учун ўринли бўлган хоссаларнинг баъзилари ҳақиқий ҳолда ҳам ўринли бўлиши исботланган ва ҳақиқий қисм факторлар учун ўринли бўлмаган хоссалар кўрсатилган.

3. Ҳақиқий қисм факторлар учун графлар куриш схемаси кўрсатилган ва бу графлар билан қамровчи қисм факторлар графлари орасидаги фарқлар аниқланган.

4. Юқоридан тўртга яқин индексли, чекли ҳақиқий факторларнинг келтирилмайдиган гиперфинитли ҳақиқий қисм факторлар мавжудлиги кўрсатилган.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО**

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

БОЛТАЕВ ХАБИБЖОН ХАМИТОВИЧ

ПОДФАКТОРЫ ВЕЩЕСТВЕННОГО ФАКТОРА И ИХ ИНДЕКСЫ

01.01.01 –Математический анализ

**АВТОРЕФЕРАТ
ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

Ташкент-2021

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2017.1. PhD/FM6.

Диссертация выполнена в Институте Математики.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу <http://kengash.mathinst.uz> и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу www.ziynet.uz.

Научный руководитель:	Рахимов Абдугофур Абдумаджидович доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	Арзикулов Фарходжон Нематжонович доктор физико-математических наук, профессор Зайтов Адилбек Атаханович доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	Ташкентский государственный транспортный университет

Защита диссертации состоится «__» _____ 2021 года в __ часов на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 46. Тел.: (+99871)207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № ____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 46. Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан «__» _____ 2021 года.
(протокол рассылки № _____ от «__» _____ 2021 года).

У.А.Розиков

Председатель Научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., профессор

Ж.К.Адашев

Ученый секретарь Научного совета
по присуждению ученых степеней,
к.ф.-м.н., старший научный сотрудник

У.У.Жамилов

Председатель Научного семинара
при Научном совете по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Во всем мире многие научные и практические исследования, проводимые в различных областях математики в большинстве случаев, приводят к задачам физических (динамических) систем и задачам квантовой механики, теория которых связана с теорией операторных алгебр. В частности, согласно этой связи, наблюдаемое данной физической системе соответствует линейный самосопряженный оператор, действующий в некотором гильбертовом пространстве H , а всякому состоянию рассматриваемой динамической системы соответствует матрица плотности, действующая в H . Поскольку операторные алгебры, в частности (вещественные и комплексные) C^* -алгебры и алгебры фон Неймана, являются именно такими математическими моделями квантовой механики и динамических систем, то каждый результат, поученный в этом направлении, имеет свою интерпретацию и применение в квантовой механике. Следовательно, теория операторных алгебр очень важна как в теоретическом, так и в практическом смысле и является одним из актуальных направлений современной математике.

В настоящее время во всем мире актуальной является задача индекса вещественных C^* -подалгебр и подалгебр фон Неймана, и свойства их соответствующих графов. Известно, что свойства индекса подалгебр фон Неймана (комплексных), их соответствующие графы и необходимое и достаточное условие существования Марковского следа хорошо изучено. Отметим, что индексы вещественных подалгебр фон Неймана, их соответствующих графов и построение примеров неприводимых гиперфинитных подфакторов конечного фактора с индексами, достаточно близких к 4 сверху, остается открытой. В связи с этим, определение индекса подфакторов вещественного фактора и их соответствующих двудольных графов считается целевым научным исследованием.

В нашей стране, особенно в последние годы особое внимание уделяется фундаментальным дисциплинам, в частности актуальным направлениям, которые имеют приложения к квантовой механике и физике. В частности, особое внимание обращено на развитие теории операторных алгебр, являющихся основным объектом математического моделирования и решения задач квантовой механики и математической физики. Так, значительные результаты были достигнуты в изучении свойств индекса подалгебр фон Неймана с использованием теории графов. Научные исследования на международном уровне по таким важным направлениям, как функциональный анализ, математическая и статистическая физика, в настоящее время являются основной задачей фундаментальных исследований¹. Развитие исследований комплексных и вещественных подалгебр фон Неймана, с использованием теории графов, играет важную

¹ Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года № 292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан»

роль и является основой для успешной реализации целей и задач указанного постановления.

Исследование данной диссертации в определенной степени служит решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан №УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистана», в постановлениях №ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математика имени В.Р. Романовского Академии Наук Республики Узбекистана» и № ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» и в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. В конце XX века В.Джонс ввел понятие индекса для конечных алгебр фон Неймана и показал множества возможных значений индекса. Именно доказал, что индекс подалгебры либо больше 4, либо вычисляется конкретной тригонометрической формулой. При доказательстве этого результата он построил возрастающую последовательность конечных факторов, являющихся алгебрами Гекке и обладающих уникальными свойствами. Кроме того, он доказал, что если скрещенные произведения алгебры фон Неймана на счетную дискретную группу автоморфизмов этой алгебры и на некоторую подгруппу являются конечными факторами, то индекс подфактора совпадает с индексом подгруппы. А также, доказал существование Марковского следа на бесконечном объединении алгебр Гекке и, комбинируя эти Марковские следы с описанием узлов в трехмерном пространстве на основе группы кос, построил новый полиномиальный инвариант для узлов. С другой стороны, для каждой подалгебры фон Неймана сопоставил некоторый двудольный граф, и получил необходимое и достаточное условие существования Марковского следа, и тем самым, открыл возможность изучения подалгебр фон Неймана на языке графов. За все эти работы в Киото на XXI-Международном конгрессе математиков В.Джонс был награжден медалью Филдса. Для не конечных алгебр фон Неймана работы по индексам были обобщены японским математиком Х.Косаки.

При изучении подалгебр фон Неймана, особенно интересными являются неприводимые подфакторы. Оказывается, если индекс меньше 4, то подфактор – неприводим. Примеры неприводимых подфакторов, с индексом, больше чем 4, долгое время оставались открытыми. Такие примеры были построены лишь спустя несколько лет в работах С.Попа. Однако, в его результате, все подфакторы были не гиперфинитными. На самом деле этим вопросом, чуть раньше, не зависимо, также интересовался В.Джонс, видимо

чувствуя важность неприводимых гиперфинитных подфакторов. Поэтому, чуть позже Ф.Голдман, Д.Харпе и В.Джонс, с помощью графов, построили серию неприводимых гиперфинитных подфакторов конечного фактора с индексом 4.73205... Причем они указали трудность построения таких примеров с индексами достаточно близких к 4 сверху. У.Хаагеруп, с помощью принципиальных, дуальных графов, построил серию неприводимых гиперфинитных подфакторов конечного фактора с индексом в интервале (4, 4.4...). Далее Хаагеруп-Шое и Окнеану используя понятия би-унитарных связей на конечных графах, изучили неприводимые гиперфинитные подфакторы конечного фактора, и из полученных результатов которых следует существование таких подфакторов с индексом 4.026... . К настоящему времени, этот результат ещё не улучшен, т.е. пока не найден пример неприводимых гиперфинитных подфакторов с индексом в (4, 4.026...).

Исследования теории алгебр фон Неймана связаны с такими великими именами, как Р.Пауэрс, Ф.Араки, Р.Вуд, М.Томита, М.Такесаки, У.Хаагеруп и А.Конн, а также основные достижения в изучении вещественных алгебр фон Неймана принадлежат в первую очередь Ш.Аюпову, Э.Штермеру, П.Стаси, Ш.Усманову и А.Рахимову.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами, учреждением высшего образования, где выполнялась диссертация.

Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ ФА-Ф1- Ф03 ТФ067 «Квантовая динамика многочастичных систем, неассоциативные и топологические структуры в операторных алгебрах» Институт математики (2007-2011 гг.), Ф-4-51 «Структурный анализ йордановых тройных систем и вероятностных распределений в функциональных пространствах», Ташкентский автомобильно-дорожный институт (2012-2016 гг.).

Целью исследования является найти значения индекса вещественных C^* -подалгебр и подалгебр фон Неймана и их соответствующих графов неприводимых гиперфинитных подфакторов конечного фактора с индексами достаточно близких к 4 сверху.

Задачи исследования:

найти связь понятия индекса вещественных факторов с аналогичным понятием обертывающего (комплексного) фактора;

найти множества возможных значений индекса вещественных подфакторов конечного вещественного фактора;

показать те свойства индекса, которые верны и в вещественном случае, и указать свойства, неверные для вещественных подфакторов;

дать схему построения графов для вещественных подфакторов и найти возможные различия с графами для обертывающих (комплексных) подфакторов;

показать существование неприводимых гиперфинитных вещественных подфакторов конечного вещественного фактора с индексами ближе к 4 сверху.

Объект исследования – ограниченные линейные операторы на гильбертовом пространстве, вещественные и комплексные C^* -алгебры и алгебры фон Неймана.

Предмет исследования – теория операторных алгебр и функционального анализа, вещественные C^* -алгебры и алгебры фон Неймана и неприводимые гиперфинитные вещественные подфакторы.

Методы исследования. В диссертации используются методы функционального анализа, математического анализа и «метод перехода к обертывающей алгебре» теории операторных алгебр.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

доказано теорема о связи понятия индекса вещественных факторов с аналогичным понятием обертывающего (комплексного) фактора и найдено множество возможных значений индекса вещественных подфакторов конечного вещественного фактора;

доказаны те свойства индекса, которые верны и в вещественном случае, и указаны свойства, неверные для вещественных подфакторов;

дана схема построения графов для вещественных подфакторов и найдены возможные различия с графами для обертывающих (комплексных) подфакторов;

показано существование неприводимых гиперфинитных вещественных подфакторов вещественного конечного фактора с индексами ближе к 4 сверху.

Практические результаты исследования состоят в следующем:

структуры вещественных C^* -подалгебр и подалгебр фон Неймана использованы при решении задач по определению состояния квантовых частиц, возникающих в квантовой механике и математической физике;

результаты исследования вещественных подалгебр фон Неймана использованы при описании дифференцирований для алгебр Капланского.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием методов функционального анализа и теории операторных алгебр, а также строгостью математических суждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования заключается в том, что полученные результаты о задаче подфакторов вещественного фактора, их индексы и двухдольные графы основаны на развитии теории операторной алгебры.

Практическое значение результатов исследования заключается в том, что полученные результаты могут служить практической основой при исследовании ряда проблем квантовой статистической механики и теории квантовых динамических систем.

Внедрение результатов исследования. Полученные результаты по исследованию подфакторы вещественного фактора и их индексы внедрены в практику по следующим направлениям:

результат о свойствах индекса, схема построения двухдольных графов вещественных подфакторов и подалгебр фон Неймана и их применение в

теории индексов, а также возможные различия с графами для обертывающих (комплексных) подфакторов были использованы в зарубежном проекте № 20-01-00173 “Модели и алгоритмы томографии рассеивающих неоднородных сред” для исследования построения моделей и алгоритмов компьютерной томографии (Институт прикладной математики Дальневосточного отделения, справка от 30 апреля 2021 г, Россия). Использование научного результата дало возможность построить с помощью графов моделей компьютерной томографии;

неприводимых гиперфинитных вещественных подфакторов конечного вещественного фактора с индексами ближе к 4 сверху было использовано в проекте ОТ-Ф4-31 “Некоммутативные модули, алгебры Лейбница и полиномиальные каскады в симплексе” для определения полиномиальных каскадов в симплексе (справка Национального Университета Узбекистана от 5 мая 2021 года). Применение научного результата дало возможность прозрачно различать результаты, полученные в комплексном и в вещественных случаях.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на 7 международных и 13 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 30 научных работ, из них 10 в научных изданиях, рекомендуемых Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора философии, в том числе 2 статьи опубликованы в зарубежных журналах, 8 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 100 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной «**Индекс конечного вещественного фактора**», приведены необходимые понятия и известные результаты из теории комплексных и вещественных W^* -алгебр, используемые при исследовании; кроме того, изучается связь между

вещественной и комплексной парной константами Неймана – Мюррея и найдены всевозможные значения индекса конечного вещественного фактора.

Пусть $B(H)$ – алгебра всех ограниченных линейных операторов на гильбертовом пространстве H и пусть 1 – единица в $B(H)$. Пусть M – *-подалгебра в $B(H)$. *Коммутантом* M называется подмножество $M' = \{a \in B(H) : ba = ab, \forall b \in M\}$. Если $M = M''$, то M называется *алгеброй фон Неймана*, где $M'' = (M')'$. Известно (теорема о бикоммутанте), что M – алгебра фон Неймана тогда и только тогда, когда M – W^* -алгебра, т.е. M – слабо замкнута и $1 \in M$. Множество $Z(M)$ всех элементов M , коммутирующих со всеми элементами алгебры M , называется *центром* M . Алгебру, у которой центральными элементами являются только элементы вида $\lambda \cdot 1$, $\lambda \in \mathbb{C}$, называют *фактором*. Линейное отображение $\alpha : M \rightarrow M$ называется: **-автоморфизмом* (соответственно **-антиавтоморфизмом*), если $\alpha(x^*) = \alpha(x)^*$ и $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$ (соотв. $\alpha(xy) = \alpha(y)\alpha(x)$); *инволютивным*, если $\alpha^2(x) = \alpha(\alpha(x)) = x$, ($\forall x, y \in M$). Если $R \subset B(H)$ – вещественная *-подалгебра, то аналогично определяется коммутант алгебры R и непосредственно показывается равенство $(R + iR)' = R' + iR'$. При этом, если $R = R''$, то R называется *вещественной алгеброй фон Неймана*.

R – вещественная алгебра фон Неймана тогда и только тогда, когда R – вещественная W^* -алгебра и это эквивалентно тому, что алгебра R – слабо замкнута, $R \cap iR = \{0\}$ и $1 \in R$.

Пусть R – вещественная W^* -алгебра. Наименьшую W^* -алгебру $U(R)$, содержащую R , называем *обертывающей W^* -алгеброй* для алгебры R . Тогда $U(R) = R + iR$. Кроме того, всякая вещественная W^* -алгебра R порождает естественный инволютивный *-антиавтоморфизм α_R обертывающей W^* -алгебры $U(R)$, а именно: $\alpha_R(x + iy) = x^* + iy^*$, где $x + iy \in U(R)$, $x, y \in R$, такой, что $R = \{x \in U(R) : \alpha_R(x) = x^*\}$; и обратно, если на W^* -алгебре U задан некоторый инволютивный *-антиавтоморфизм α , то множество $\{x \in U : \alpha(x) = x^*\}$ является вещественной W^* -алгеброй. Вещественная W^* -алгебра R называется *вещественным фактором*, если её центр совпадает с $1 \cdot \mathbb{R} = \{\lambda 1, \lambda \in \mathbb{R}\}$; R имеет тип $I_n, I_\infty, II_1, II_\infty$ или III , если её обертывающая W^* -алгебра имеет соответствующий тип в смысле обычной классификации W^* -алгебры.

Пусть M – конечный фактор, α – инволютивный *-антиавтоморфизм алгебры M и пусть τ – единственный α -инвариантный точный нормальный конечный след на M . Обозначим через $L^2(M)$ пополнение алгебры M относительно нормы $\|x\|_2 = \tau(x^*x)^{\frac{1}{2}}$. Аналогично, $L^2(M, \alpha)$ – пополнение вещественного фактора (M, α) . Тогда $L^2(M)$ есть гильбертово пространство и $L^2(M) = L^2(M, \alpha) + iL^2(M, \alpha)$. Кроме того, для алгебры $B(L^2(M))$ также

имеем: $B(L^2(M)) = B_r(L^2(M, \alpha)) + iB_r(L^2(M, \alpha))$. Для каждого $x \in M$ определим отображение $\lambda(x)y = xy$ для всех $y \in M$. Так как $\|\lambda(x)y\|_2 \leq \|x\| \|y\|_2$, то λ имеет единственное продолжение на $L^2(M)$, являющееся ограниченным линейным оператором, обозначаемым опять через $\lambda(x)$. Тогда мы получим точное W^* -представление $(\lambda, L^2(M))$ алгебры M . Аналогично, определяя отображение λ_r как $\lambda_r(x)y = xy$ (для $\forall x, y \in (M, \alpha)$), мы получим точное вещественное W^* -представление $(\lambda_r, L^2(M, \alpha))$ алгебры (M, α) .

Предложения 1. Отображение $\beta: \lambda(M) \rightarrow \lambda(M)$, определяемое как $\beta(\lambda_x) = \lambda_{\alpha(x)}$, является инволютивным $*$ -антиавтоморфизмом в $\lambda(M)$ и $(M, \alpha)_\beta = \lambda_r(M, \alpha)$, где $(M, \alpha)_\beta = \{\lambda_x \in \lambda(M) : \beta(\lambda_x) = \lambda_x^*\}$ – вещественная W^* -алгебра, порожденная $*$ -антиавтоморфизмом β , т.е. $(M, \alpha)_\beta = (\lambda(M), \beta)$.

Следствие 1. W^* -алгебра $\lambda(M)$ является комплексификацией вещественной W^* -алгебры $\lambda_r \in (M, \alpha)$, т.е. $\lambda_r(M, \alpha) + i\lambda_r(M, \alpha) = \lambda(M)$. Кроме того, пара $\{\lambda_r, L^2(M, \alpha)\}$ является точным вещественным W^* -представлением вещественной W^* -алгебры (M, α) .

Это представление назовём каноническим W^* -представлением алгебры (M, α) .

Далее, так как $\|x\|_2 = \|x^*\|_2$ для любой $x \in M$, то отображение $J: x \rightarrow x^*$ единственным образом может быть продолжено до сопряженно-линейной изометрии на $L^2(M)$, которая опять обозначается как J . Как известно, модулярная теория Томита-Тakesаки сыграла важную роль в теории алгебр фон Неймана, в частности при классификации факторов типа III. Согласно этой теории, имеем следующие: $\lambda(M)' = J\lambda(M)J$ и $\lambda(M) = J\lambda(M)'J$. Используя модулярную сопряженно-линейную изометрию J , аналогично предложения 1 и следствия 1, можно получить следующую теорему.

Предложения 2. Отображение $\beta': \lambda(M)' \rightarrow \lambda(M)'$ определяемое как $\beta'(\cdot) = J\beta(J \cdot J)J$, является инволютивным $*$ -антиавтоморфизмом алгебры $\lambda(M)'$. Кроме того, множество $\lambda_r(M, \alpha)' = \{\lambda_x \in \lambda(M)' : \beta'(\lambda_x) = \lambda_x^*\}$ является вещественной W^* -алгеброй и W^* -алгебра $\lambda(M)'$ является комплексификацией вещественной W^* -алгебры $\lambda_r(M, \alpha)'$, т.е. $\lambda_r(M, \alpha)' + i\lambda_r(M, \alpha)' = \lambda(M)'$.

Между $\lambda_r(M, \alpha)'$ и $\lambda_r(M, \alpha)$ имеется следующая связь.

Предложения 3. Вещественная W^* -алгебра $\lambda_r(M, \alpha)'$ является коммутантом вещественной W^* -алгебры $\lambda_r(M, \alpha)$ относительно $B_r(L^2(M, \alpha))$, т.е. $\lambda_r(M, \alpha)' = \{\lambda_x \in B_r(L^2(M, \alpha)) : \lambda_x \lambda_y = \lambda_y \lambda_x, \forall \lambda_y \in \lambda_r(M, \alpha)\}$.

Относительно отношений между каноническим представлением и точными невырожденными W^* -представлениями верны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $M_1 \subset B(H_1)$ и $M_2 \subset B(H_2)$ – W^* -алгебры и пусть α_i – инволютивный $*$ -антиавтоморфизм алгебры M_i , $i=1,2$. Если $\Phi: M_1 \rightarrow M_2$ – нормальный $*$ -гомоморфизм с $\Phi \circ \alpha_1 = \alpha_2 \circ \Phi$, то $\Phi = \Phi_3 \circ \Phi_2 \circ \Phi_1$, где

1) $\Phi_1: M_1 \rightarrow M_1 \bar{\otimes} \mathbb{C}1_L$ – $*$ -гомоморфизм с $\Phi_1 \circ \alpha_1 = \tilde{\alpha}_1 \circ \Phi_1$, определяемый как $\Phi_1(a) = a \otimes 1_L$, где 1_L – единичный оператор на подходящем гильбертовом пространстве L и $\tilde{\alpha}_1 = \alpha_1 \otimes id$;

2) $\Phi_2: M_1 \bar{\otimes} \mathbb{C}1_L \rightarrow (M_1 \bar{\otimes} \mathbb{C}1_L)p'$ – $*$ -гомоморфизм с $\Phi_2 \circ \tilde{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_1 \circ \Phi_2$, определяемый как $\Phi_2(a \otimes 1_L) = (a \otimes 1_L)p'$, где $p' \in (M_1 \bar{\otimes} \mathbb{C}1_L)'$ – проектор с $\tilde{\alpha}_1'(p') = p'$ и $\tilde{\alpha}_1' = J_1 \tilde{\alpha}_1 (J_1(\cdot)J_1)J_1 \otimes id$, $\bar{\alpha}_1(\cdot p') = \tilde{\alpha}_1(\cdot)p'$;

3) $\Phi_3: (M_1 \bar{\otimes} \mathbb{C}1_L)p' \rightarrow M_2$ – $*$ -изоморфизм с $\Phi_3 \circ \tilde{\alpha}_1 = \alpha_2 \circ \Phi_3$.

Теорема 2. Пусть M – конечный фактор и пусть α – инволютивный $*$ -антиавтоморфизм алгебры M . Если $\{\pi, H\}$ – точное невырожденное W^* -представление алгебры M и $\pi \circ \alpha = \tilde{\alpha} \circ \pi$, где $\tilde{\alpha}$ – инволютивный $*$ -антиавтоморфизм алгебры $\pi(M)$, то существует проектор $p' \in (\lambda_r(M, \alpha) \otimes 1_{K_r})'$ и унитарный оператор $u: H_r \rightarrow p'(L^2(M, \alpha) \otimes K_r)$ такие, что

$$u\pi(x) = (\lambda(x) \otimes 1_K)u \quad x \in M,$$

т.е. вещественные W^* -алгебры $\pi(M, \alpha) (= (\pi(M), \tilde{\alpha}))$ и $(\lambda_r(M, \alpha) \otimes 1_{K_r})p'$ являются пространственно $*$ -изоморфными, где K_r – сепарабельное бесконечномерное вещественное гильбертово пространство и $K = K_r + iK_r$.

Пусть теперь $\{\pi, H\}$ – точное невырожденное W^* -представление алгебры M и $\pi \circ \alpha = \tilde{\alpha} \circ \pi$, где $\tilde{\alpha}$ – инволютивный $*$ -антиавтоморфизм алгебры $\pi(M)$, тогда $(\pi(M), \tilde{\alpha})' + i(\pi(M), \tilde{\alpha})' = \pi(M)'$. Так как алгебра $\pi(M)'$ полуконечна, то вещественный фактор $(\pi(M), \tilde{\alpha})'$ также полуконечен. Таким образом, на алгебре $\pi(M)'_+$ существует единственный (с точностью кратности положительной константы) точный нормальный полуконечный $\tilde{\alpha}$ -инвариантный след. Естественный $\tilde{\alpha}$ -инвариантный след на алгебре $\pi(M)'_+$ определим следующим образом.

(i). Пусть $\{\pi, H\} = \{\lambda \otimes 1, L^2(M) \otimes K\}$, где K – счетное бесконечномерное гильбертово пространство. Тогда W^* -алгебра $(\lambda(M) \otimes 1_K)' = J\lambda(M)J \bar{\otimes} B(K)$ – бесконечна, и для вещественного фактора (M, α) мы имеем

$$\begin{aligned}\{\pi|_{(M,\alpha)}, H_r\} &= \{\lambda_r \otimes \mathbf{1}, L^2(M, \alpha) \otimes K_r\}, \\ (\lambda_r(M, \alpha) \otimes \mathbf{1}_{K_r})' &= J\lambda_r(M, \alpha)J\overline{\otimes} B(K_r),\end{aligned}$$

где K_r – вещественное гильбертово пространство с $K_r + iK_r = K$. Далее, для удобства, вместо $\pi|_{(M,\alpha)}$ условимся кратно писать π . Выберем ортогональный нормализованный базис $\{e_i\}_{i \in \Lambda}$ в K , где $|\Lambda| = \dim_{\mathbb{C}} K$. Тогда каждый элемент $t' \in (\lambda(M) \otimes \mathbf{1}_K)'$ можно единственным образом представить в виде $t' = (J\lambda(x_{ij})J)$, где $x_{ij} \in M$ для всех i, j . Если $t' \in (\lambda_r(M, \alpha) \otimes \mathbf{1}_{K_r})'$, т.е. $\tilde{\alpha}'(t') = (t')^*$, то не трудно показать, что $x_{ij} \in (M, \alpha)$, т.е. $\alpha(x_{ij}) = x_{ij}^*$ для всех i, j . Определим естественный след как:

$$Tr'_{L^2(M) \otimes K}(t') = \sum_{i \in \Lambda} \tau(x_{ii}), \quad t' = (J\lambda(x_{ii})J) \in (\lambda(M) \otimes \mathbf{1}_K)'_{+},$$

где τ – единственный точный нормальный α -инвариантный след на M . Легко можно показать, что определение $Tr'_{L^2(M, \alpha) \otimes K}$ не зависит от выбора системы $\{e_i\}$, и $Tr'_{L^2(M, \alpha) \otimes K}$ является точным полуконечным нормальным следом алгебры $(\lambda(M) \otimes \mathbf{1}_K)'_{+}$. Кроме того, так как

$$\begin{aligned}(Tr'_{L^2(M) \otimes K} \circ \tilde{\alpha}')(t') &= Tr'_{L^2(M) \otimes K}(\tilde{\alpha}'(t')) = Tr'_{L^2(M) \otimes K}((t')^*) = \sum_i \tau(x_{ii}^*) = \\ &= \sum_i \tau(\alpha(x_{ii})) = \sum_i (\tau \circ \alpha)(x_{ii}) = \sum_i \tau(x_{ii}) = Tr'_{L^2(M) \otimes K}(t')\end{aligned}$$

то $Tr'_{L^2(M) \otimes K}$ является $\tilde{\alpha}'$ -инвариантным. Следовательно, (вещественный) след $Tr'_{L^2(M, \alpha) \otimes K_r}$ определим как

$$Tr'_{L^2(M, \alpha) \otimes K_r}(t') = \sum_i \tau(x_{ii}), \quad t' = (J\lambda(x_{ii})J) \in (\lambda_r(M, \alpha) \otimes \mathbf{1}_{K_r})'_{+}$$

и по определению следов также будем иметь

$$Tr'_{L^2 M \otimes K}|_{(\lambda_r(M, \alpha) \otimes \mathbf{1}_{K_r})'} = Tr'_{L^2(M, \alpha) \otimes K_r}$$

т.е. след $Tr'_{L^2 M \otimes K}$ является линейным продолжением следа $Tr'_{L^2(M, \alpha) \otimes K_r}$ на обертывающую W^* -алгебру.

(ii). В общем случае, для произвольного точного невырожденного W^* -представления $\{\pi, H\}$ алгебры M с $\pi \circ \alpha = \tilde{\alpha} \circ \pi$, по теореме 2, существуют проектор $p' \in (\lambda_r(M, \alpha) \otimes \mathbf{1}_{K_r})'$ и унитарный оператор $u : H_r \rightarrow p'(L^2(M, \alpha) \otimes K_r)$ такие, что

$$u\pi(x)u^* = (\lambda(x) \otimes \mathbf{1}_K)p', \quad x \in M,$$

где K_r – вещественное гильбертово пространство и $K = K_r + iK_r$. Тогда естественный след определяется следующим образом:

$$Tr'_H(t') = Tr'_{L^2(M) \otimes K}(ut'u^*), \quad t' \in \pi(M)'_+.$$

Кроме того, отображение Tr'_H не зависит от выбора элементов u , p' и является точным нормальным следом на $\pi(M)'_+$. Так как $\tilde{\alpha}'(u) = u^*$, то Tr'_H является $\tilde{\alpha}'$ -инвариантным. Следовательно, (вещественный) след $Tr'_{L^2(M, \alpha) \otimes K_r}$ определим как

$$Tr'_{L^2(M, \alpha) \otimes K_r}(ut'u^*) = Tr'_{L^2(M) \otimes K}(ut'u^*), \quad t' \in (\pi(M), \tilde{\alpha})'_+$$

и по определению следов также получим

$$Tr'_H \Big|_{(\pi(M), \tilde{\alpha})'} = Tr'_{L^2(M, \alpha) \otimes K_r}.$$

Если след $Tr'_{L^2(M, \alpha) \otimes K_r}$ переобозначим как Tr'_H , то получим

$$Tr'_H = Tr'_H \Big|_{(\pi(M), \tilde{\alpha})'}.$$

Таким образом, $Tr'_H \Big|_{(\pi(M), \tilde{\alpha})'}$ является точным нормальным полуконечным следом алгебры $(\pi(M), \tilde{\alpha})'$.

Определение 1. Число $\dim_{(M, \alpha)}(H_r) = Tr'_{H_r}(\mathbf{1})$ называется *парной константой* между $(\pi(M), \tilde{\alpha})$ и $(\pi(M), \tilde{\alpha})'$ относительно H_r , где H_r – вещественное гильбертово пространство такое, что

$$H_r + iH_r = H \text{ и } (M, \alpha) \subset B(H_r) \subset B(H_r) + iB(H_r) = B(H).$$

(iii). Теперь, в представлении $\{\pi, H\} = \{\lambda \otimes \mathbf{1}, L^2(M) \otimes K\}$ мы выберем другой базис. Именно, выберем вещественный ортогональный нормализованный базис $\{f_i\}_{i \in \Lambda'}$ пространства K , где $|\Lambda'| = \dim_{\mathbb{R}} K$. Тогда каждый элемент $t' \in (\lambda(M) \otimes \mathbf{1}_K)'$ единственным образом можно представить как $t' = (J\lambda(x_{ij})J)$, где $x_{ij} \in M$ для всех i, j . Если $t' \in (\lambda_r(M, \alpha) \otimes \mathbf{1}_{K_r})'$, т.е. $\tilde{\alpha}'(t') = (t')^*$, то не трудно показать, что $x_{ij} \in (M, \alpha)$, т.е. $\alpha(x_{ij}) = x_{ij}^*$ для всех i, j . Положим

$$Tr'_{L^2(M) \otimes K}(t') = \sum_{i \in \Lambda'} \tau(x_{ii}), \quad t' = (J\lambda(x_{ij})J) \in (\lambda(M) \otimes \mathbf{1}_K)'_+.$$

Очевидно, что $Tr'_{L^2(M) \otimes K}$ также является точным нормальным полуконечным следом на алгебре $(\lambda(M) \otimes \mathbf{1}_K)'_+$. Кроме того, этот след $\tilde{\alpha}'$ -инвариантен. Аналогично, можно показать, что определение следа $Tr'_{L^2(M) \otimes K}$ не зависит от выбора системы $\{f_i\}$.

А в случае, когда $u\pi(x)u^* = (\lambda(x) \otimes \mathbf{1}_K)p'$ ($x \in M$), мы положим

$$tr'_H(t') = tr'_{L^2(M) \otimes K}(ut'u^*), \quad t' \in \pi(M)'_+.$$

По определению следа tr'_H , оно также не зависит от выбора u и p' , и этот след тоже $\tilde{\alpha}'$ инвариантен.

Пусть $\{\pi, H\}$ –точное невырожденное W^* -представление алгебры M такое, что $\pi \circ \alpha = \tilde{\alpha} \circ \pi$, где $\tilde{\alpha}$ – инволютивный $*$ -антиавтоморфизм алгебры $\pi(M)$.

Определение 2. Число $\dim_{(M,\alpha)} = tr'_H(\mathbf{1})$ называется *парной константой* между вещественными W^* -алгебрами $(\pi(M), \tilde{\alpha})$ и $(\pi(M), \tilde{\alpha})'$, относительно H .

Из вышеизложенного легко определяется следующее отношение между числами $\dim_{(M,\alpha)}(H_r)$, $\dim_{(M,\alpha)}(H)$ и $\dim_M(H)$.

Теорема 3. Верны равенства:

$$\dim_M(H) = \dim_{(M,\alpha)}(H_r) = \frac{1}{2} \dim_{(M,\alpha)}(H).$$

Пусть теперь $N \subset M$ – подфактор с $\alpha(N) \subset N$. Рассмотрим вещественные факторы $R = (M, \alpha)$ и $Q = (N, \alpha)$. Число $\dim_Q(L^2(R))$ называется *индексом* вещественного подфактора Q в вещественном факторе R , который обозначим как $[R:Q]$ или $[(M, \alpha):(N, \alpha)]$.

Одними из основных результатов диссертационной работы являются следующие теоремы, в которых найдена связь понятия индекса вещественного подфактора с индексом обертывающего (комплексного) фактора и указано множество возможных значений индекса вещественных подфакторов.

Теорема 4. Имеет место равенство

$$[(M, \alpha):(N, \alpha)] = [M:N] \text{ т.е. } [R:Q] = [R + iR:Q + iQ].$$

Теорема 5. Для множества возможных значений индекса верно следующие утверждение

$$\text{либо } [(M, \alpha):(N, \alpha)] = 4 \cos^2(\pi / q) \ (q \geq 3), \text{ либо } [(M, \alpha):(N, \alpha)] \geq 4,$$

$$\text{т.е. } [R:Q] = 4 \cos^2(\pi / q) \text{ для } q \geq 3, \text{ либо } [R:Q] \geq 4.$$

Во второй главе диссертации, названной «**Индекс σ -конечного вещественного фактора**», изучены понятия индекса произвольных вещественных подфакторов. Пусть M^+ – расширенная положительная часть W^* -алгебры M , аналогично, R^+ – расширенная положительная часть вещественной W^* -алгебры $R = (M, \alpha)$. Известно, что $R^+ \subset M^+$. Если $Q \subset R$ – вещественная W^* -подалгебра, то операторно-значным весом на алгебре R со значением в Q^+ (или коротко Q^+ -значным весом) называется линейное отображение $T: R^+ \rightarrow Q^+$ такое, что $T(uxu^*) = yT(x)y^*$, $x \in R^+$ и $y \in Q$.

Можно показать, что T продолжается единственным образом до отображения $\bar{T}: R^+ \rightarrow Q^+$.

Если $N(\subset M)$ – W^* -подалгебра, то множество всех нормальных точных полуконечных операторно-значных весов на M обозначим как $P(M, N)$, а через $P(R, Q)$ – множество всех нормальных точных полуконечных операторно-значных весов на R .

Теорема 6. $P(M, N) = P(R + iR, Q + iQ) \neq \emptyset \Leftrightarrow P(R, Q) \neq \emptyset \Leftrightarrow P(R', Q') \neq \emptyset$

Пусть M – σ -конечный (т.е. число попарно ортогональных эквивалентных проекторов не более чем счетно) фактор и $N \subset M$ – подфактор с $\alpha(N) \subset N$. Пусть $E: R \rightarrow Q$ – нормальное условное ожидание. Продолжение E на W^* -алгебру $M = R + iR$ мы обозначим как $\bar{E}$. Так как отображение E является операторно-значным весом, то по теореме 6 ему соответствует некоторое отображение $E^{-1} \in P(Q', R')$. Нетрудно показать, что $\bar{E}^{-1} = \overline{E^{-1}}$. По определению, имеем $\bar{E}(\mathbf{1}) = E(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. Но, в общем случае, $\bar{E}^{-1}(\mathbf{1}) = E^{-1}(\mathbf{1})$ скалярно кратен $\mathbf{1}$, т.е. $E^{-1}(\mathbf{1}) = \lambda \mathbf{1}$ (возможно, и $\lambda = +\infty$).

Определение 3. Скалярное число $E^{-1}(\mathbf{1})$ называется индексом вещественного подфактора $Q = (N, \alpha)$ на вещественном факторе $R = (M, \alpha)$ и обозначается как $[R:Q]$ или $[(M, \alpha):(N, \alpha)]$.

Одним из основных результатов главы является следующая теорема.

Теорема 7. Пусть M – σ -конечный фактор и α – инволютивный *-антиавтоморфизм M . Если $N \subset M$ – подфактор с $\alpha(N) \subset N$, то для вещественных $(N, \alpha) = Q \subset R = (M, \alpha)$ – факторов имеют место

$$[(M, \alpha):(N, \alpha)] = [M:N], \text{ т.е. } [R:Q] = [R + iR:Q + iQ], \text{ и}$$

$$[(M, \alpha):(N, \alpha)] = 4 \cos^2 \frac{\pi}{q} (q \geq 3) \text{ или } [(M, \alpha):(N, \alpha)] \geq 4.$$

Верны следующие интересные свойства.

Теорема 8. Пусть R – вещественный фактор типа II_1 . Если подфактор $Q \subset R$ является гиперфинитным (т.е. конечномерен аппроксимативен) и $[R:Q] < \infty$, то фактор R – также гиперфинитен.

Теорема 9. Пусть R – вещественный фактор типа II_1 и $Q \subset R$ – подфактор. Если $[R:Q] < \infty$, то вещественная W^* -алгебра $Q' \cap R$ – конечномерна. В частности, если $[R:Q] < 4$, то $Q' \cap R = \mathbb{R} \cdot \mathbf{1}$, т.е. в этом случае подфактор Q – неприводим.

Третья глава диссертации, названная « **W^* -подалгебры и их графы**», посвящена изучению матриц вложения вещественных C^* -подалгебр и соответствующих графов. Пусть $A \subseteq B$ – конечномерные вещественные C^* -алгебры. Тогда известно, что $A \cong \bigoplus_{i=1}^k M_{n_i}(F)$ и $B \cong \bigoplus_{j=1}^l M_{m_j}(F)$, где

$F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$ (тело кватернионов). Положим $\vec{n} = (n_1, \dots, n_k)$ и $\vec{m} = (m_1, \dots, m_l)$ и назовем их вектор-размерностями A и B , соответственно. Определим элементы Λ_{ij} $k \times l$ -матрицы Λ_A^B следующим образом: Λ_{ij} – число i -го слагаемого в представлении A в j -м слагаемом B . Продемонстрируем это на примере.

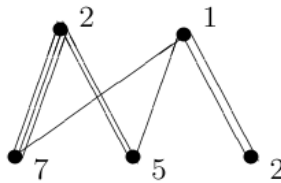
Пример 1. Пусть $B = M_7(\mathbb{R}) \oplus M_5(\mathbb{R}) \oplus M_2(\mathbb{R})$ и $A = M_2(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$. Вложение $Q \subset R$ зададим как:

$$(x, y) \mapsto \left(\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} : x \in M_2(\mathbb{R}), y \in \mathbb{R} \right).$$

Так как слагаемые $M_2(\mathbb{R})$ и $\mathbb{R}$ в представлении A участвуют в первом слагаемом B три и один раз, соответственно, то $\Lambda_{11} = 3$ и $\Lambda_{21} = 1$; а во втором слагаемом алгебры B они участвуют по два и один раз и поэтому $\Lambda_{12} = 2$ и $\Lambda_{22} = 1$. Аналогично, $\Lambda_{13} = 0$ и $\Lambda_{23} = 2$. Таким образом, этому вложению

соответствует следующая матрица: $\Lambda_A^B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. С помощью матрицы Λ_A^B

построим соответствующий граф следующим образом. Верхние и нижние вершины графа состоят из количества слагаемых в представлениях A и B , соответственно. Они соответственно нумеруются по координатам векторов $\vec{n}$ и $\vec{m}$. Число рёбер, соединяющих две вершины, определяется числом Λ_{ij} . Например, так как $\Lambda_{11} = 3$, то число рёбер между верхней вершиной 2 и нижней вершиной 7 равно 3. Таким образом, матрице Λ_A^B соответствует следующий граф:



Указанное вложение не единственно.

Теорема 10. Для пар $P \subset R$ – вещественных W^* -алгебр, в общем случае, имеет место неравенство $\Lambda_P^R \neq \Lambda_{P+iP}^{R+iR}$.

В комплексном случае верно равенство: $[M : N] = \|\Lambda_N^M\|^2$. Однако, в вещественном случае имеем следующую теорему:

Теорема 11. Если $P \subset R$ – вещественные факторы, то $[R : P] = \|\Lambda_P^R\|^2$, а если, по крайне к мере, один из вещественных W^* -алгебр P и R не является фактором, то возможно также неравенство $[R : P] \neq \|\Lambda_P^R\|^2$.

Известно, что все подфакторы с индексом $[M:N] < 4$ являются неприводимыми, т.е. $N' \cap M = \mathbb{C} \cdot 1$. В случае $[M:N] > 4$ построение примеров неприводимых подфакторов долгое время оставалось открытым. Позже появились некоторые примеры с такими индексами. В середине 1990-х годов С.Попа доказал, что для $\forall r > 4$ существует неприводимый подфактор N фактора M с $[M:N] = r$ и сформулировал такой вопрос: *существуют ли неприводимые гиперфинитные подфакторы с $[M:N] > 4$?* Окончательный ответ на этот вопрос до сих пор не найден. Построены некоторые частичные примеры. Аналогично, к этим примерам построена серия неприводимых гиперфинитных вещественных подфакторов с $[R:Q] > 4$, которые изложим в следующей теореме.

Теорема 12. Существует серия неприводимых гиперфинитных вещественных подфакторов вещественного II_1 -фактора с индексом больше 4, в частности, с индексом в интервалах

$$(4; 3 + \sqrt{2}), (4; (5 + \sqrt{13}) / 2) = (4; 4.302...) \text{ и } (6; 6.25).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена исследованию индексов подфакторов вещественного фактора и их соответствующих графов.

Основными результатами исследования являются следующие:

1. Доказано теорема о связи понятия индекса вещественных факторов с аналогичным понятием обертывающего (комплексного) фактора и найдено множество возможных значений индекса вещественных подфакторов конечного вещественного фактора.
2. Доказаны те свойства индекса, которые верны и в вещественном случае, и указаны свойства, неверные для вещественных подфакторов.
3. Дана схема построения графов для вещественных подфакторов и найдены возможные различия с графами для обертывающих (комплексных) подфакторов.
4. Показано существование неприводимых гиперфинитных вещественных подфакторов вещественного конечного фактора с индексами ближе к 4 сверху.

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED
AFTER V.I. ROMANOVSKIY**

INSTITUTE OF MATHEMATICS

BOLTAEV KHABIBJON KHAMITOVICH

SUBFACTORS OF REAL FACTORS AND THEIR INDEXES

01.01.01- Mathematical analysis

**ABSTRACT OF THESIS OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL
AND MATHEMATICAL SCIENCES**

Tashkent-2021

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2017.1.PhD/FM6

Dissertation has been prepared at Institute of Mathematics.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website (<http://kengash.mathinst.uz>) and in the website of “ZiyoNet” Information and educational portal (<http://www.ziynet.uz>).

Scientific supervisor: **Rakhimov Abdugafur Abdumadjidovich**
Doctor of Physical and mathematical Sciences, Professor

Official opponents: **Arziqulovich Farkhodjon Nematjonovich**
Doctor of Physical and mathematical Sciences, Professor

Zaitov Adilbek Ataxanovich
Doctor of Physical and mathematical Sciences, Professor

Leading organization: **Tashkent state transport university**

Defense will take place «___» _____ 2021 at ___ at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at V.I. Romanovsky Institute of Mathematics (Address: University str. 4b, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871)-207-91-40, fax: (+99871), e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at V.I. Romanovsky Institute of Mathematics (registered for №___). (Address: University str. 4b, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871)-207-91-40).

Abstract of dissertation sent out on «___» _____ 2021 year.
(Mailing report №___ on «___» _____ 2021 year).

U.A.Rozikov

Chairman of scientific council
on award of scientific degrees,
D.F-M.S., Professor

J.K.Adashev

Scientific secretary of scientific council
on award of scientific degrees, C.F-M.S.

U.U.Jamilov

Chairman of scientific Seminar under Scientific
Council on award of scientific degrees,
D.F-M.S.

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of research work is to study of the properties of the index of real C^* and von Neumann subalgebras and their corresponding graphs.

The object of the research work is bounded linear operators on a Hilbert space, real and complex C^* and von Neumann algebras.

Scientific novelty of the research work is as follows:

it is proved connection is between the concept of an index of real factors and a similar concept of an enveloping (complex) factor and it is found the set of possible values of the index of real subfactors of a finite real factor;

it is proved some properties of the index which are also true in the real case and it is showed properties that are not true for real subfactors;

it is given a scheme of constructing graphs for real subfactors and it is found possible differences with graphs for enveloping (complex) subfactors;

is shown existence of irreducible hyperfinite real subfactors of a finite real factor of $\mathbb{R}$ with indices closer to 4 from above.

Implementation of the research results. The taken results on studying subfactors of real factors their indexes were used in the following areas:

The result on the properties of the index, a scheme for constructing bipartite graphs of real subfactors and W^* -subalgebras and their application in index theory, as well as possible differences with graphs for enveloping (complex) subfactors were used within the framework of the project № 20-01-00173 “Models and algorithms of tomography scattering inhomogeneous media” (Institute of Applied Mathematics of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences (IAM FEB RAS), reference dated April 30, 2021 year). The results of this study were used to construct models and algorithms for computed tomography;

The result on the irreducible hyperfinite real subfactors of the finite real factor of $\mathbb{R}$ with indices close to 4 from above were used in the framework of grant OT-Φ4-31 “Non-commutative modules, Leibniz algebras and polynomial cascades in a simplex” (reference dated May 5, 2021 year). The application of the scientific result gave opportunity of transparently distinguish the results obtained in complex and in real cases.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and titles of used literature. The full volume of the thesis is 100 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (1 часть; part 1)

1. Рахимов А.А., Болтаев Х.Х. Примеры индексов вещественных W^* -подалгебр комплексного фактора типа I_n // Узбекский математический журнал. – 2011. № 4. – С. 168-170. (01.00.00. № 6)
2. Болтаев Х.Х. Возрастающая последовательность вещественных подфакторов конечного фактора // Узбекский математический журнал. – 2012. № 4, – С. 19-25. (01.00.00. № 6)
3. Рахимов А.А., Болтаев Х.Х. Индекс подфактора произвольного вещественного фактора // Узбекский математический журнал. – 2013. № 2. – С. 82-85. (01.00.00. № 6)
4. Болтаев Х.Х. Вещественные W^* - подалгебры и их графы // Доклады академии наук Республики Узбекистан. – 2013. № 3. – С. 3-5. (01.00.00. № 7)
5. Болтаев Х.Х. Некоторые свойства индекса вещественных W^* -подалгебр // Узбекский математический журнал. – 2013. № 3. – С. 28-32. (01.00.00. № 6)
6. Болтаев Х.Х. Индекс подфакторов вещественного фактора типа II_1 // Доклады академии наук Республики Узбекистан. – 2014. № 2. – С. 5-6. (01.00.00. № 7)
7. Рахимов А.А., Болтаев Х.Х. Вещественные W^* -подалгебры, их индексы и графы // Узбекский математический журнал. – 2015. № 4. – С. 84-89. (01.00.00. № 6)
8. Boltayev Kh.Kh. Index of real subfactors and graphs of real W^* -subalgebras // Uzbek Mathematical Journal. – 2020. № 3. – P. 47-55. (01.00.00. № 6)
9. Рахимов А.А., Болтаев Х.Х. Индекс вещественных подфакторов W^* -алгебр // Дальневосточный математический журнал. – 2020. Т. 20. №2. – С. 234-246. (IF=0.41).
10. Rakhimov A.A., Boltayev Kh.Kh. On irreducible hyperfinite real subfactors with index larger than 4 // AIP Conference Proceedings. Vol. 2365. N.1. 050010. – 2021. doi.org/10.1063/5.0057134 (3. Scopus. IF=0.7)

II бўлим (2 часть; part 2)

11. Болтаев Х.Х. Примеры индексов подфакторов вещественных факторов типа I_n // Материалы Республиканской научной конференции «Проблемы современной математики». Карши. – 2011. – С. 87-89.
12. Болтаев Х.Х. Формула индекса для вещественных подфакторов // Материалы республиканской конференции «Современные

- проблемы комплексного и функционального анализа». Нукус. – 2012. – С. 47-49.
13. Рахимов А.А., Болтаев Х.Х. Понятие индекса для произвольных вещественных подфакторов // Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Операторные алгебры и смежные проблемы». Ташкент. – 2012. – С. 195-197.
 14. Rakhimov A.A., Boltaev Kh.Kh. Index of real subfactor of real finite factors // Тезисы научно-практического семинара «Некорректные неклассические задачи математической физики и анализа». Самарканд. – 2012. – С. 67-68.
 15. Рахимов А.А., Болтаев Х.Х. Индекс и графы вещественных W^* -подалгебр // Тезисы докладов международной научной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования». Владикавказ. – 2013. – С. 77-79.
 16. Болтаев Х.Х. Графы W^* -подалгебр и существование Марковского следа // Тезисы докладов международной конференции «Проблемы современной топологии и её приложения». Ташкент. – 2013. – С. 127-128.
 17. Болтаев Х.Х. Гиперфинитные вещественные подфакторы с конечным индексом // Материалы Республиканской научно-практической конференции «Актуальные вопросы комплексного анализа». Ташкент. – 2013. – С. 54-55.
 18. Болтаев Х.Х. Некоторые свойства индекса вещественных подфакторов // Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием учёных из стран СНГ «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения». Ташкент. – 2013. – С. 309-311.
 19. Boltaev Kh.Kh. Index subfactor real hyperfinite factor of type II_1 // The V Congress of Turkic Mathematicians. Bula-Sogottu. Kyrgyzstan. – 2014. – P. 56.
 20. Болтаев Х.Х. Графы вещественных W^* -подалгебр и их свойства // Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых "Неклассические уравнения математической физики и их приложения". – 2015. – С. 127-129.
 21. Болтаев Х.Х. О некоторых свойствах индекса вещественных W^* -подалгебр // Республиканская научная конференция «Математическая физика и родственные проблемы современного анализа». Бухара. – 2015. – С. 72-74.
 22. Болтаев Х.Х., Рахимов А.А. Индекс подфактора произвольного вещественного фактора // Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых "Алгебра, анализ и квантовая вероятность". – 2015. – С. 63-65.

23. Болтаев Х.Х. Индекс вещественных факторов // «Ал-Хоразмий-2016» Актуальные проблемы прикладной математики республиканской научно-практической конференция. Бухара. – 2016. – С. 253-254.
24. Boltaev Kh.Kh. Index of a subfactor of a real hyperfinite Π_1 - factor // «Ал-Хоразмий-2016» Актуальные проблемы прикладной математики республиканской научно-практической конференция. Бухара. – 2016. – Р. 78-79.
25. Boltaev Kh.Kh., Rakhimov A.A. Index of real finite subfactors // The second Usa-Uzbekistan conference on Analysis and Mathematical physics. – 2017. – Р. 15-17.
26. Болтаев Х.Х. Некоторые свойства графа вещественных W^* -подалгебр // Тезисы докладов научного семинара, посвященного 85-летию со дня рождения Гайбулла Нарзуллаевича Салихова (1932-1979), «Кубатурные формулы и их приложения». Ташент. – 2017. – С. 11.
27. Болтаев Х.Х. Примеры графов для W^* -подалгебр // Новые теоремы математики и их приложения, республиканской научно-практической конференция. Самарканд. – 2018. – С. 132-134.
28. Болтаев Х.Х. Индекс произвольного вещественного подфактора вещественной W^* -алгебры // “Modern problems of geometry and topology and their applications” республиканской научно-практической конференция. Ташкент. – 2019. – С. 103-105.
29. Рахимов А.А., Болтаев Х.Х. Матрица вложение вещественной под-алгебры в W^* -алгебру // Actual problem of applied mathematics and information technologies. Ташкент. – 2019. – С. 140-141.
30. Болтаев Х.Х. Существование изоморфизма для вещественных факторов. // Uzbekistan-Malaysia International online conference on “Computational models and technologies”. Tashkent. – 2020. – С. 133-135.

Автореферат «Ўзбекистон математика журналы» таҳририятидан 2021 йил 16
августда таҳрирдан ўтказилди.

Босишга рухсат этилди: хх.хх.хххх йил. Ҳажми 2,2 босма табоқ.
Бичими 60x45 1/16 «Times New Roman»
гарнитурда рақамли босма усулида босилди.
Адади: 100. Буюртма: №.32

Ўзбекистон Республикаси Фанлар академияси
«Фан» нашриёти давлат корхонаси босмахонасида chop этилди.
100047, Тошкент ш., Яхё Ғуломов кўчаси, 70-уй

