В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

АБСАЛАМОВ АКМАЛ ТОЛЛИБОЕВИЧ

ГОНОСОМАЛ ЭВОЛЮЦИОН ОПЕРАТОРДАН ҲОСИЛ ҚИЛИНГАН ТРАЕКТОРИЯЛАРНИНГ АСИМПТОТИК ХАРАКТЕРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ
бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2021

УДК: 517.98

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of thesis abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

АБСАЛАМОВ АКМАЛ ТОЛЛИБОЕВИЧ

ГОНОСОМАЛ ЭВОЛЮЦИОН ОПЕРАТОРДАН ҲОСИЛ ҚИЛИНГАН ТРАЕКТОРИЯЛАРНИНГ АСИМПТОТИК ХАРАКТЕРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ
бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2021

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2020.3.PhD/FM516 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Самарқанд давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, инглиз, рус(резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://kengash.mathinst.uz) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида (http://www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Розиков Уткир Абдуллоевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Жамилов Уйғун Умурович** физика-математика фанлари доктори, катта илмий ходим
	Эшмаматова Дилфуза Бахрамовна физика-математика фанлари номзоди, доцент
Етакчи ташкилот:	Наманган давлат университети

Диссертация ҳимояси В.И.Романовский номидаги Математика институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2021 йил « 10 » сентябр соат 16:00 даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174,Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40, e-mail:uzbmath@umail.uz,Website: www.mathinst.uz).

Диссертация билан В.И.Романовский номидаги Математика институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (_____-рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40.

Диссертация автореферати 2021 йил «___» __________ куни тарқатилди.
(2021 йил «___» ______________даги -рақамли реестр баённомаси).

А. Азамов
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш раис ўринбосари,
ф.-м.ф.д., академик

Ж.К. Адашев
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш илмий котиби,
ф.-м.ф.н., катта илмий ходим

У.У. Жамилов
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш ҳузуридаги
Илмий семинар раиси,
ф.-м.ф.д., катта илмий ходим

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда ночизиқли операторлар динамик системаларини тадқиқ қилиш каби масалаларга келтирилади. Физика ва иқтисодиёт каби турли соҳалардаги тадқиқотларнинг асосий объектларидан бири гоносомал эволюцион операторларининг динамик системалари ҳисобланади. Шунингдек, ген частоталарининг таҳлилини ўз ичига олувчи математик биология ва популяцион генетика масалаларида популяциянинг эволюциясини тадқиқ қилишга гоносомал эволюцион операторларидан ҳосил қилинган динамик системалар билан боғлиқ натижалар асос сифатида хизмат қилади. Шу боис, гоносомал эволюцион операторидан ҳосил қилинган траекторияларнинг асимптотик ҳаракатларини ўрганиш ночизиқли операторлар динамик системалари назариясининг энг муҳим ва долзарб вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда динамик системалар назарияси кўплаб амалий масалаларнинг характерини тушунишда, таҳлил қилишда ҳамда оптимал ечимини топишда асосий восита сифатида қўлланилмоқда. Ҳозирда гоносомал эволюцион оператори динамикасининг тавсифи муҳим муаммо ҳисобланади. Бундай операторлар гемофилия, эркин ва икки жинсли популяциялар ва бошқа турдаги биологик ва физик системаларнинг кўплаб турлари бўйича текширувларда пайдо бўлган. Бу борада, чизиқли бўлмаган операторларнинг қўзғалмас нуқталарини топиш ва уларнинг турғунлигини текшириш, даврий нуқталар тўпламини тавсифлаш ва уларни типини аниқлаш, инвариант тўпламларни топиш ва уларнинг тузилишини тавсифлаш ҳамда траекторияларнинг лимит нуқталари тўпламини тавсифлаш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда сўнгги йилларда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий татбиқига эга бўлган геология, биология, математика ва физика фанларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, механика, бошқарув назарияси ва биологик системаларда кенг татбиқига эга бўлган ночизиқли эволюцион операторларнинг динамик системалари назариясини ривожлантиришга алоҳида аҳамият берилди. Ушбу йўналишни ривожлантириш натижасида икки жинсли популяциянинг гоносомал эволюцион операторлари билан боғлиқ салмоқли натижаларга эришилди. «Функционал анализ, математик физика ва статистик физика» фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалари ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Қарор ижросини таъминлашда гоносомал эволюцион операторлар динамик системалари назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

[1]Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамаси 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича харакатлар стратегияси тўғрисида»ги ПФ-4947-сонли Фармони, 2017 йил 20 апрелдаги «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-2909-сонли Қарори, 2019 йил 9 июлдаги «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4387-сонли Қарори ва 2020 йил 7 майдаги «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4708-сонли Қарори ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Физикавий ёки биологик системаларда математик моделларни тушунишга қаратилган ҳаракатлар дискрет-вақтли динамик системаларнинг усулларини ўрганишга қизиқиш уйғотди. Муайян популяция учун асосий математик муаммо бу популяция эволюциясини, яъни ҳолатларнинг вақтга боғлиқ динамикасини ўрганишдир. Ушбу муаммони ўрганишда фойдаланиладиган математик усуллар эҳтимоллар назарияси, стохастик жараёнлар, динамик системалар назарияси, математик ва функционал таҳлиллар, ҳамда дифференциал тенгламалар назариясига асосланган. 2021 йил июн ойи ҳолатига кўра MathSciNet маълумотлар базасида "популяция" сўзининг қидирув натижасида 42350 дан ортиқ мақолалар топилди. Ушбу маълумотлар базаси бўйича популяция билан боғлиқ биринчи нашр 1924 йилда Е.Б. Вилсон томонидан ёзилган. 2020 йилда фақатгина 1850 та нашр мавжуд эди. Шу боис ҳозирги кунда популяциялар динамикаси назарияси математикада жадал ривожланаётган соҳалардан бири дейиш асослидир.

Популяция динамикаси барча даражадаги тирик популяцияларни тушуниш учун муҳимдир. Математик биология соҳасида популяция динамикаси соҳаси популяцияларнинг сони ва ёш таркибини динамик система сифатида ўрганади. Бундан ташқари, популяция динамикаси ва уларнинг муқобилларига танлов йўқ бўлганда, 1961 йилда О. Реиерсол томонидан жуда самарали алгебраик ёндашув жорий қилинган. Ушбу ёндашув 1971 йилда Ю.И. Любич томонидан умумий эволюция тенгламасининг аниқ ечимларини тавсифлаш учун кенгайтирилди. Популяция динамикасини ўрганиш учун ночизиқли (хусусан, квадратик ва рационал) кўп ўлчовли эволюцион операторлари Х.Кестен томонидан киритилган. У квадратик эволюцион операторларининг умумий шакли учун ягона қўзғалмас нуқтага эга бўладиган етарли шартларни топди.

Гоносомал (рационал) операторлар биринчи бўлиб У.Розиков ва Р.Варро томонидан ўрганилган ва бу тадқиқотлар биологик системали гемофилияга нисбатан қўлланилган. 2020 йилда У.А. Розиков томонидан ёзилган “Популяция динамикаси: алгебраик ва эҳтимолли ёндошув” номли китобда эркин ва икки жинсли популяция назарияси тавсифланган бўлиб, асосан 2010 йилдан кейин олинган натижалар келтирилган. Шунингдек, ушбу китобда популяция динамикаси назариясидаги алгебраик ва эҳтимоллик ёндашувлар ҳам келтирилган. Бундан ташқари, кубик стохастик матрицаларнинг Марков жараёнлари натижасида ҳосил бўлган динамикалар каби биологик моделларнинг бир нечта динамик системалари (Ж.М.Касас, М.Ладра, У.Розиков, Б.Мамуров, С.Худаяровлар томонидан ўрганилган); жинсга боғлиқ популяциянинг динамикаси (Й. Любич, У.Жамилов, У.Розиков томонидан текширилган); чивин популяциясининг динамик системаси ва эволюцион алгебраси (М.Веласко, Р.Варро, У.Розиков, С.Шойимардонов); ва океан экосистемалари (С. Шойимардонов, У.Розиков) берилган. Ҳозирги кунга келиб, Р. Варро, Н.Н. Ганиходжаев, Р.Н. Ганиходжаев, У.У. Жамилов, А. Зада, М. Ладра, Ф.М. Мухамедов, У.А. Розиков, Ж.П. Тиан, О. Хакимов, А.М. Ҳардин, А.Ю. Ҳамраевлар томонидан ночизиқли операторлар динамик системалари бўйича кўплаб илмий изланишлар олиб борилганлигига қарамай, ночизиқли операторлар орқали ҳосил қилинган динамик системалар учун лимит нуқталар тўпламини тўла тавсифини бериш ҳалигача очиқ масала бўлиб қолмоқда. Хусусан, гоносомал эволюцион оператори динамикасини ўрганишда ҳам кўплаб масалалар очиқлигича қолмоқда.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти В.И.Романовский номидаги Математика институтининг ОТ-F4-82 + ОТ-F4-87 «Операторли ва ноассоциатив алгебралар локал дифференциаллашлари ва автоморфизмлари, чизиқли бўлмаган динамик системаларда фазали ўтиш ва тартибсизлик» + «Евклид ва псевдо-Евклид фазоларидаги эгри чизиқлар ва уларнинг механикада қўлланилиши» (2017-2020 йиллар) мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳалари доирасида ҳамда Самарқанд давлат университети илмий-тадқиқот ишлари режалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади гоносомал эволюцион операторидан ҳосил қилинган дискрет вақтли динамик системаларда ихтиёрий бошланғич нуқта учун траекториянинг лимит нуқталари тўпламини тўла тавсифлашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

тегишли биологик системанинг турғун ҳолатини тавсифловчи гоносомал эволюцион операторларининг қўзғалмас нуқталари ва инвариант тўпламларини топиш;

даврий нуқталар тўпламини тавсифлаш ва уларни типини аниқлаш;

икки жинсли популяциянинг гоносомал эволюцион операторларидан ҳосил қилинган траекторияларнинг лимит нуқталарини тадқиқ қилиш;

гоносомал эволюцион операторлари траекторияларининг лимит нуқталарига яқинлашиш тезлиги ёрдамида биологик системада генетик касаллик (гемофилия) ни қанчалик тез ёки секинроқ йўқолишини баҳолаш.

Тадқиқотнинг объекти. Гоносомал эволюцион операторларидан ҳосил қилинган дискрет вақтли динамик системалар.

Тадқиқотнинг предмети. Ночизиқли эволюцион операторлар назарияси, дискрет вақтли динамик системалар назарияси ва стохастик жараёнлар назарияси.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертацияда функционал анализ, эҳтимоллар назарияси, алгебра ва динамик системалар назарияси усуллари қўлланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

нормаланган гоносомал эволюцион оператори ягона қўзғалмас нуқтасининг глобал тортувчанлиги исботланган;

икки жинсли популяциянинг гоносомал эволюцион оператори учун траекторияларнинг яқинлашиш тезлигининг тартиби топилган;

икки жинсли популяциянинг параметрли гоносомал эволюцион оператори координата бошидан бошқа тортувчи қўзғалмас нуқтага эга эмаслиги исботланган;

гоносомал эволюцион операторлар синфи учун унинг чексиз кўп қўзғалмас нуқталарга эгалиги ва ҳар бир қўзғалмас нуқталарга яқинлашадиган ўзаро кесишмайдиган траекториялар мавжудлиги исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари математик биологиядаги популяция жараёнларининг математик моделлари гоносомал эволюция операторлари орқали ифодаланганлиги ва ушбу операторлар ёрдамида ҳосил бўлган динамик системада траектория лимит нуқталари тўпламини аниқлаш усулларини баён қилинганлигидан иборат.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги функционал анализ, эҳтимоллар назарияси, стохастик жараёнлар ва дискрет вақтли динамик системалари назарияси усулларидан фойдаланилгани ҳамда олинган натижалар математик жиҳатдан қатъий исботлангани билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти гоносомал эволюцион операторларидан ҳосил қилинган ночизиқли дискрет динамик системаларнинг характерини аниқлаш ва математик биология муаммоларини ҳал қилишдан иборат.

Диссертациянинг амалий аҳамияти популяция биологиясининг кўплаб моделларида қўзғалмас нуқталар ва траекторияларнинг лимит нуқталари тўпламларининг тавсифидан фойдаланган ҳолда популяция эволюциясини башоратлаш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Гоносомал эволюцион операторидан ҳосил қилинган траекторияларнинг асимптотик характери бўйича олинган натижалар асосида:

нормаланган гоносомал эволюцион оператори ягона қўзғалмас нуқтасининг глобал тортувчанлигидан №ОТ-Ф4-03 рақамли "Узлуксиз ҳамда дискрет вақтли аниқ динамик системалар, қисмий интеграл операторлар спектлари" мавзусидаги фундаментал лойиҳасида стохастик операторлар траекторияларининг лимит нуқталари тўпламини тавсифлашда фойдаланилган (Қарши давлат университетининг 2021 йил 26-июндаги №04/2058-сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши, Вольтерра ҳамда Вольтерра типида бўлмаган квадратик ва кубик стохастик операторларнинг лимит нуқталарини тавсифлаш имконини берган;

гоносомал эволюцион операторлар синфи учун унинг чексиз кўп қўзғалмас нуқталарга эгалигидан №ОТ-Ф4-02 рақамли "Математик физиканинг ҳолатлар тўплами чексиз бўлган моделлари термодинамикаси" мавзусидагифундаментал лойиҳасида физик системанинг трансляцион-инвариант қўзғалмас ва даврий нуқталарга мос Гиббс ўлчовларини тавсифлашда фойдаланилган (Бухоро давлат университетининг 2021 йил 21-июндаги №04-04/01-158-сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши, статистик физиканинг чекли сондаги спин қийматига эга бўлган бир нечта моделлари билан популяция моделлари орасидаги ўхшашликни аниқлаш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 4 та халқаро ва 4 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 13 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 5 та мақола, жумладан, 2 таси хорижий ва 3 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 90 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурияти асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **“Гоносомал эволюцион оператори қўзғалмас нуқтасининг глобал тортувчанлиги”** деб номланган биринчи бобида, популяция динамикаси ва гоносомал эволюцион оператори учун асосий тушунчалар ва таърифлар берилган. Нормаланган гоносомал эволюцион операторидан ҳосил қилинган динамик системаларни тадқиқ қилишда Розиков ва Варронинг гипотезаси исботланган. Бундан ташқари, гоносомал эволюцион операторидан ҳосил қилинган динамик система траекторияларининг характери ўрганилган.

Гемофилия - X гоносома билан боғлиқ рецессив касаллик: X^h орқали гемофилияни сақлайдиган X гоносомани белгиласак у ҳолда фақат иккита урғочи гинотиплар: XX ва XX^h (X^hX^h бу ўлимга олиб келади) ва иккита эркак гинотиплар: XY ва X^hY ларга эгамиз. Бизда тўрт хил мослик мавжуд:

$$\begin{aligned}
&XX\times XY \rightarrowtail \frac{1}{2}XX,\ \frac{1}{2}XY;\\
&XX\times X^hY \rightarrowtail \frac{1}{2}XX^h,\ \frac{1}{2}XY;\\
&XX^h\times XY \rightarrowtail \frac{1}{4}XX, \frac{1}{4}XX^h, \frac{1}{4}XY, \frac{1}{4}X^hY;\\
&XX^h\times X^hY \rightarrowtail \frac{1}{3}XX^h, \frac{1}{3}XY, \frac{1}{3}X^hY.
\end{aligned} \tag{1}$$

$F=\{XX, XX^h\}$ ва $M=\{XY, X^hY\}$ тўпламлар мос ҳолда урғочи ва эркак гинотиплар тўпламлари бўлсин. F тўпламнинг ҳолатини (x, y) ҳақиқий вектор билан, M тўпламнинг ҳолатини эса (u,v) ҳақиқий вектор билан белгилаймиз. У ҳолда $F\cup M$ тўпламнинг ҳолати $s=(x, y, u, v)\in\mathbb{R}^4$ вектор орқали берилади. Агар $s'=(x', y', u', v')$ вектор $F\cup M$ нинг кейинги наслдаги ҳолатини билдирса у ҳолда (1) қоидага асосан қуйидаги формула билан аниқланган $W:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ эволюцион операторга эга бўламиз

$$W:\begin{cases}
x'=\frac{1}{2}xu+\frac{1}{4}yu\\
y'=\frac{1}{2}xv+\frac{1}{4}yu+\frac{1}{3}yv\\
u'=\frac{1}{2}xu+\frac{1}{2}xv+\frac{1}{4}yu+\frac{1}{3}yv\\
v'=\frac{1}{4}yu+\frac{1}{3}yv.
\end{cases} \tag{2}$$

Ушбу мисолни умумлаштириш мумкин: Фараз қилайлик $F=\{1,2,\ldots,\eta\}$ урғочи типлар тўплами ва $M=\{1,2,\ldots,\nu\}$ эркак типлар тўплами, $x=(x_1,\ldots,x_\eta)\in\mathbb{R}^\eta$ вектор F тўпламнинг ҳолати ва $y=(y_1,\ldots,y_\nu)\in\mathbb{R}^\nu$ вектор M тўпламнинг ҳолати бўлсин.

Қуйидаги $W:\mathbb{R}^{\eta+\nu}\to\mathbb{R}^{\eta+\nu}$ эволюцион операторни қараймиз

$$W:\begin{cases} x'_j=\sum\limits_{i,r=1}^{\eta,\nu} p^{(f)}_{ir,j}x_iy_r, & j=1,\ldots,\eta \\ y'_l=\sum\limits_{i,r=1}^{\eta,\nu} p^{(m)}_{ir,l}x_iy_r, & l=1,\ldots,\nu. \end{cases} \tag{3}$$

бу ерда $p^{(f)}_{ir,j}$ ва $p^{(m)}_{ir,l}$ коэффициентлар

$$\sum_{j=1}^{\eta} p^{(f)}_{ir,j}+\sum_{l=1}^{\nu} p^{(m)}_{ir,l}=1.$$

шартни қаноатлантирувчи наслнинг ҳақиқий коэффициентлари. (3)- оператор гоносомал эволюцион оператор деб аталади.

Популяция ривожланиши s ҳолатидан бошланиб, кейинги наслда $s'=W(s)$ ҳолатига ўтади, кейин $s''=W(W(s))$ ҳолатига ўтади ва ҳоказо. Популяциянинг ҳолатлари қўйидаги дискрет вақтли динамик система орқали тавсифланади

$$s,\ s^{(1)}=s'=W(s),\ s^{(2)}=s''=W^2(s),\ s^{(3)}=W^3(s),\ldots$$

Бу ерда $s\in\mathbb{R}^{n+\nu}$ берилган бошланғич нуқта ва $W^n(s)=\underbrace{W(W(...W}_{n}(s))...)$ - W операторнинг s нуқтадаги n марта итерацияси.

Берилган (3)-оператордан ҳосил қилинган динамик система учун ихтиёрий s бошланғич ҳолатда $\{s^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ траекториянинг лимит ҳалатини тавсифлаш асосий муаммодир.

Таъкидлашимиз керакки (3)-эволюцион оператор

$$S^{\eta+\nu-1}=\left\{s=(x_1,\ldots,x_\eta,y_1,\ldots,y_\nu)\in\mathbb{R}^{\eta+\nu}:\ x_i\geq 0,\ y_r\geq 0,\ \sum_{i=1}^{\eta}x_i+\sum_{r=1}^{\nu}y_r=1\right\}$$

симплексни симплексга акслантирмайди, чунки

$$\sum_{i=1}^{\eta}x'_i+\sum_{r=1}^{\nu}y'_r=\left(\sum_{i=1}^{\eta}x_i\right)\left(\sum_{r=1}^{\nu}y_r\right)$$

ифоданинг қиймати умумий ҳолда 1 га тенг эмас.

Қўйидаги белгилашни киритамиз

$$\mathcal{O}=\left\{s\in S^{\eta+\nu-1}:\ (x_1,\ldots,x_\eta)=(0,\ldots,0)\ \textit{ёки}\ (y_1,\ldots,y_\nu)=(0,\ldots,0)\right\}.$$

$$\mathcal{S}^{\eta,\nu}=S^{\eta+\nu-1}\setminus\mathcal{O}.$$

$W(\mathcal{O})=\{(0,\ldots,0)\}$ эканлиги равшан. $\mathcal{O}$ тўпламдан олинган нуқталар W оператордан ҳосил қилинган динамик системага таъсир қилмайди. Шунинг учун коэффициентлари

$$p_{ir,j}^{(f)}\ge 0,\ \ p_{ir,l}^{(m)}\ge 0,$$
$$\sum_{j=1}^{\eta}p_{ir,j}^{(f)}+\sum_{l=1}^{\nu}p_{ir,l}^{(m)}=1,\ \ \textit{барча}\ \ i,r,j,l\quad \textit{учун.}$$

шартларни қаноатлантирадиган V нормаланган гоносомал эволюцион операторни аниқлаймиз

$$V:\begin{cases} x_j'=\dfrac{\sum\limits_{i,r=1}^{\eta,\nu}p_{ir,j}^{(f)}x_iy_r}{\left(\sum\limits_{i=1}^{\eta}x_i\right)\left(\sum\limits_{r=1}^{\nu}y_r\right)}, & j=1,\ldots,\eta\\[2ex] y_l'=\dfrac{\sum\limits_{i,r=1}^{\eta,\nu}p_{ir,l}^{(m)}x_iy_r}{\left(\sum\limits_{i=1}^{\eta}x_i\right)\left(\sum\limits_{r=1}^{\nu}y_r\right)}, & l=1,\ldots,\nu.\end{cases}\tag{4}$$

(3)-оператор ва (4)-операторларнинг нормаланган манфий бўлмаган қўзғалмас нуқталари орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд.

Агар $s=(x_1,\ldots,x_\eta,y_1,\ldots,y_\nu)$ нуқта (3)-операторнинг қўзғалмас нуқтаси бўлса, у ҳолда $\tilde{s}=(x_1/Z,\ldots,x_\eta/Z,y_1/Z,\ldots,y_\nu/Z)$ нуқта (4)-операторнинг қўзғалмас нуқтаси бўлади ва аксинча, бу ерда

$$Z=\left(\sum_{i=1}^{\eta}x_i\right)\left(\sum_{r=1}^{\nu}y_r\right).$$

Нормаланган эволюцион $V:\mathcal{S}^{2,2}\to\mathcal{S}^{2,2}$ оператор

$$V:\begin{cases} x'= \dfrac{2xu+yu}{4(x+y)(u+v)}\\[2ex] y'=\dfrac{6xv+3yu+4yv}{12(x+y)(u+v)}\\[2ex] u'=\dfrac{6xu+6xv+3yu+4yv}{12(x+y)(u+v)}\\[2ex] v'=\dfrac{3yu+4yv}{12(x+y)(u+v)}.\end{cases}\tag{5}$$

(2)-операторнинг нормаланган кўриниши ва бу (5)-оператор учун У.А. Розиков ва Р. Варро томонидан гипотеза сифатида берилган қуйидаги теорема исботланган.

1-теорема. *(5) орқали берилган* $V: S^{2,2} \to S^{2,2}$ *оператор гиперболик бўлмаган ягона* $s_0 = \left(1/2, 0, 1/2, 0\right)$ *қўзғалмас нуқтага эга ва ҳар қандай бошланғич* $s \in S^{2,2}$ *нуқта учун*

$$\lim_{n\to\infty} V^n(s) = s_0 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right). \tag{6}$$

ўринли.

2-теорема. *(5)-операторнинг* $\left(x^{(n)}, y^{(n)}, u^{(n)}, v^{(n)}\right)$ *траекторияси учун қуйидаги баҳолар ўринли:*

$$\left|\frac{1}{2} - x^{(n)}\right| \le \frac{c_1}{n}, \quad \frac{c_2}{n} \le y^{(n)} \le \frac{c_3}{n},$$

$$\left|\frac{1}{2} - u^{(n)}\right| \le \frac{c_4}{n}, \quad \frac{c_5}{n} \le v^{(n)} \le \frac{c_6}{n}.$$

бу ерда $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ *мусбат ўзгармаслардир.*

$s^{(0)} = (x^{(0)}, y^{(0)}, u^{(0)}, v^{(0)}) \in S^{2,2}$ бошланғич ҳолат $\{XX, XX^h; XY, X^hY\}$ генотиплар тўпламидаги эҳтимоллик тақсимоти бўлсин.

1-теорема биологик талқинга эга: Вақт чексизликка интилганда, популяция $s_0 = \left(1/2, 0, 1/2, 0\right)$ ҳолатига интилади, демак, популяциянинг келажаги барқарор: XX ва XY генотиплар ҳар доим омон қолади аммо, XX^h ва X^hY генотиплар асимптотик равишда йўқ бўлиб кетади. Бинобарин, фақат соғлом хромосомалар омон қолади.

(6)-натижанинг биологик талқинидан шуни кўришимиз мумкинки, (5)-оператор траекторияларининг характерини ўрганиш муаммоси гемофилиянинг наслдан наслга ўтишини тушунишда катта аҳамиятга эга.

Диссертациянинг иккинчи боби **“Параметрли гоносомал эволюцион оператори томонидан ҳосил қилинган динамик системалар”** деб номланиб, бу бобда биз параметрларга қараб, гемофилия наслдан наслга ўтишда параметрли гоносомал эволюцион операторидан ҳосил қилинган динамик системаларни кўриб чиқдик ва уларнинг траектория характерини ўргандик. Бундан ташқари, ω -лимит тўплам координаталар бошидан ёки чексизликдан иборат бўладиган хар хил шартларга эга бўлдик.

1-тасдиқ. $s = (0,0,...,0) \in \mathbb{R}^{\eta+\nu}$ *нуқта (3)-операторнинг қўзғалмас нуқтаси. Агар* $\delta \in [0,4)$ *ва (3)-операторнинг коэффициентлари манфий бўлмаган ҳақиқий сонлар бўлса, у ҳолда ҳар қандай бошланғич нуқта* $t = (x_1, ..., x_\eta, y_1, ..., y_\nu) \in Q_\delta$ *учун ушбу лимит ўринли,*

$$\lim_{n\to\infty} W^n(t) = \underbrace{(0,0,...,0)}_{\eta+\nu},$$

бу ерда

$$Q_\delta = \left\{ (x_1,...,x_\eta, y_1,...,y_\nu) \in \mathbb{R}^{\eta+\nu} : \sum_{j=1}^{\eta} x_j + \sum_{l=1}^{\nu} y_l \le \delta,\ x_j \ge 0,\ y_l \ge 0,\ j = \overline{1,\eta},\ l = \overline{1,\nu} \right\}$$

2-тасдиқ. *(3)-оператор коэффициентлари ва бошланғич* $t = (x_1,...,x_\eta, y_1,...,y_\nu)$ *нуқтанинг координаталари манфий бўлмаган ҳақиқий сонлар бўлсин. Агар*

$$\max_{\substack{1\le i,j\le\eta,\\ 1\le r,l\le\nu}} \{p_{ir,j}^{(f)} p_{ir,l}^{(m)} x_i y_r\} > 1,$$

бўлса, у ҳолда $\lim_{n\to\infty} W^n(t) = \infty$ *, яъни* $n\to\infty$ *да* $W^n(t)$ *нинг хеч бўлмаганда битта координатаси чексизликка интилади.*

3-теорема. *(3)-эволюцион операторнинг координата бошидан бошқа ҳар қандай қўзғалмас нуқтаси тортувчи эмас.*

Диссертациянинг **“Саноқсизта қўзғалмас нуқталарга эга регуляр гоносомал эволюцион оператор”** номли учинчи бобида, икки жинсли популяциянинг гоносомал эволюцион операторидан ҳосил қилинган динамик система ўрганилган. Бунда оператор чексиз кўп қўзғалмас нуқтага эга эканлигини кўрсатилган. Ҳар бир қўзғалмас нуқта 1 дан кичик ёки тенг хос қийматга эга эканлиги ҳамда ҳар бир траектория яқинлашувчи, яъни оператор регуляр эканлиги кўрсатилган. Саноқсизта инвариант тўпламлар мавжуд бўлиб уларнинг ҳар бири ягона қўзғалмас нуқтани ўз ичига олади. Шундай қилиб, қўзғалмас нуқталар тўплами ва инвариант тўпламлар ўртасида ўзаро бир қийматли мослик мавжудлиги исботланган. Шунингдек инвариант тўпламдан олинган ихтиёрий нуқтанинг траекторияси унга мос қўзғалмас нуқтага яқинлашиши исботланган.

$\{1,2\}$ турларга ажралувчи урғочилар ва $\{1,2\}$ турларга ажралувчи эркаклардан иборат икки жинсли популяцияни қарайлик. $p_{ir,j}^{(f)}$ ва $p_{ir,l}^{(m)}$ лар ота-она жуфтлиги ir $(i,j=1,\dots,2$; ва $r,l=1,\dots,2)$ бўлганда мос равишда урғочи авлод j ва эркак авлод l бўладиган эҳтимолликлар бўлсин. Ушбу миқдорлар қуйидагича олинади:

$$\begin{array}{llll}
p_{11,1}^{(f)} = a & p_{11,2}^{(f)} = 0 & p_{11,1}^{(m)} = b & p_{11,2}^{(m)} = 0 \\
p_{12,1}^{(f)} = 0 & p_{12,2}^{(f)} = \sigma_1 & p_{12,1}^{(m)} = \sigma_2 & p_{12,2}^{(m)} = 0 \\
p_{21,1}^{(f)} = 0 & p_{21,2}^{(f)} = a & p_{21,1}^{(m)} = b & p_{21,2}^{(m)} = 0 \\
p_{22,1}^{(f)} = 0 & p_{22,2}^{(f)} = a & p_{22,1}^{(m)} = 0 & p_{22,2}^{(m)} = b.
\end{array}$$

У ҳолда бу миқдорларга мос эволюцион оператор $V_1 : S^{2,2} \to S^{2,2}$ ни қуйидагича аниқлаймиз

$$V_1:\begin{cases} x' &= \dfrac{axu}{(x+y)(u+v)} \\ y' &= \dfrac{\sigma_1 xv + ayu + ayv}{(x+y)(u+v)} \\ u' &= \dfrac{\sigma_2 xv + bxu + byu}{(x+y)(u+v)} \\ v' &= \dfrac{byv}{(x+y)(u+v)}, \end{cases} \tag{7}$$

бу ерда оператор коэффициентлари

$$a+b=\sigma_1+\sigma_2=1,\ a>0,\ \ b>0,\ \ \sigma_1\geq 0,\ \ \sigma_2\geq 0.$$

шартларни қаноатлантиради.

Ихтиёрий $s^{(0)}\in S^{2,2}$ бошланғич нуқта учун (7)-оператор $\{s^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ траекториясини ўргандик, бу ерда

$$s^{(n)}=V_1^n(s^{(0)})=\underbrace{V_1(V_1(...V_1}_{n}(s^{(0)}))...)$$

V_1 операторнинг $s^{(0)}$ нуқтадаги n марта итерациясини билдиради.
(7)-операторнинг барча қўзғалмас нуқталари тўплами $Fix(V_1)=F_{11}\cup F_{12}$ бўлиб, бу ерда

$$F_{11}=\{(0,a,u,v):\quad u+v=b,\quad u,v\in[0,b]\}$$

ва

$$F_{12}=\{(x,y,b,0):\quad x+y=a,\quad x,y\in[0,a]\}.$$

$\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=1-\dfrac{v}{b}$ ва $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=1-\dfrac{x}{a}$ қийматлар мос равишда F_{11} ва F_{12} қўзғалмас нуқталарнинг хос қийматларидир.

4-теорема. *Ихтиёрий $(x,y,u,v)\in S^{2,2}$ бошланғич нуқта учун (7) операторнинг траекториялар кетма-кетлиги*

$$V_1^n(x,y,u,v)=(x^{(n)},y^{(n)},u^{(n)},v^{(n)})$$

яқинлашувчи ва

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)}\cdot v^{(n)}=0.$$

ўринли.

1-натижа. *Ихтиёрий $t=(x,y,u,v)\in S^{2,2}$ бошланғич нуқта учун (7)-операторнинг ω-лимит нўқталар тўплами ягона нуқтадан иборат ва*

$$\omega(t) \in \begin{cases} \{(0,a,b,0)\}, & if \quad t=(x,y,u,v) \in T_0, \\ F_{12}\,, & if \quad t=(x,y,u,v) \in T_1, \\ F_{11}\,, & if \quad t=(x,y,u,v) \in T_2. \end{cases}$$

бу ерда

$$T_0 = \{(x,y,u,v) \in S^{2,2}: \quad \lim_{n\to\infty} x^{(n)} = \lim_{n\to\infty} v^{(n)} = 0\},$$

$$T_1 = \{(x,y,u,v) \in S^{2,2}: \quad \lim_{n\to\infty} v^{(n)} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} x^{(n)} \in (0,a]\},$$

$$T_2 = \{(x,y,u,v) \in S^{2,2}: \quad \lim_{n\to\infty} x^{(n)} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} v^{(n)} \in (0,b]\}.$$

1-таъриф. *Агар ихтиёрий бошланғич нуқта учун оператор траекторияси доим яқинлашувчи бўлса бундай оператор регуляр оператор дейилади.*

2-натижа.*(7)- оператор регулярдир.*

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$p_1 = \frac{\sigma_1}{a}, \qquad p_2 = \frac{\sigma_2}{b}.$$

p_1, p_2 параметрлар учун уч хил ҳолатлар мавжуд

1. $p_1 = p_2 = 1,$
2. $p_1 > 1 > p_2 \ge 0,$
3. $p_2 > 1 > p_1 \ge 0.$

(7)-операторнинг инвариант сирти учун қуйидаги теоремага ўринли:

5-теорема. *Қўйидаги тўплам (7)-операторга нисбатан инвариант сиртдир.*

$$\Omega_\theta = \left\{ \begin{array}{l} (x,y,u,v) \in S^{2,2}: \quad xv\left[1+(p_1-1)f\left(\dfrac{x}{x+y}\right)\right] = \\ = \left[\dfrac{x}{x+y} - f\left(\dfrac{x}{x+y}\right)\right](x+y)(u+v) \end{array} \right\}$$

бу ерда $f:[0,1] \to [0,1]$ силлиқ функция

$$\begin{aligned} &f(\alpha)(\alpha - f(\alpha))(1-\alpha)[1+(p_1-1)f(f(\alpha))] = \\ &\alpha(f(\alpha) - f(f(\alpha)))[1+(p_2-1)\alpha + (p_1-p_2)f(\alpha)] \end{aligned} \tag{8}$$

функционал тенгламанинг ечими.

Агар $p_1 = p_2 = 1$ бўлса (8)-функционал тенгламанинг кўриниши

$$f(\alpha)(\alpha - f(\alpha))(1-\alpha) = \alpha(f(\alpha) - f(f(\alpha))) \tag{9}$$

бўлади.

6-теорема. *(9)-функционал тенгламанинг ечимлари*

$$f(\alpha)=0,\ f(\alpha)=\alpha\ \text{ ва }\ f(\alpha)=\theta\alpha-\alpha^2$$

бу ерда θ *-ихтиёрий ўзгармас сон.*

5-теорема кўра, $p_1 = p_2 = 1$ бўлганда яъни $\sigma_1 = a$, $\sigma_2 = b$ учун

$$\Omega_\theta=\left\{(x,y,u,v)\in S^{2,2}:\quad \frac{v}{u+v}=\frac{x}{x+y}+1-\theta\right\}$$

тўплам (7)- операторга нисбатан инвариант сирт бўлади.

1-лемма. *Инвариант сирт* Ω_θ *учун*

$$\bigcup_{\theta\in[0,1)}\Omega_\theta=T_2=\{(x,y,u,v)\in S^{2,2}:yv>xu\},$$

$$\bigcup_{\theta\in(1,2]}\Omega_\theta=T_1=\{(x,y,u,v)\in S^{2,2}:yv<xu\},$$

$$\Omega_1=T_0=\{(x,y,u,v)\in S^{2,2}:yv=xu\}$$

ва

$$\Omega_{\theta_1}\cap\Omega_{\theta_2}=\varnothing\ \text{ ихтиёрий }\ \theta_1\neq\theta_2\ \text{ учун}$$

ўринли.

7-теорема. *Ихтиёрий* $t=(x,y,u,v)\in\Omega_1$ *бошланғич нуқта учун*

$$\lim_{n\to\infty}V_1^{(n)}(x,y,u,v)=\lim_{n\to\infty}(x^{(n)},\,y^{(n)},\,u^{(n)},\,v^{(n)})=(0;\,a;\,b;\,0).$$

Агар $\theta\in(1,2]$ *бўлса, у ҳолда ихтиёрий* $t=(x,y,u,v)\in\Omega_\theta$ *бошланғич нуқта учун*

$$\lim_{n\to\infty}V_1^{(n)}(x,y,u,v)=\lim_{n\to\infty}(x^{(n)},\,y^{(n)},\,u^{(n)},\,v^{(n)})=(a(\theta-1);\,a(2-\theta);\,b;\,0).$$

Агар $\theta\in[0,1)$ *бўлса, у ҳолда ихтиёрий* $t=(x,y,u,v)\in\Omega_\theta$ *бошланғич нуқта учун*

$$\lim_{n\to\infty}V_1^{(n)}(x,y,u,v)=\lim_{n\to\infty}(x^{(n)},\,y^{(n)},\,u^{(n)},\,v^{(n)})=(0;\,a;\,b\theta;\,b(1-\theta))$$

ўринли.

Рақамли анализ шуни кўрсатадики, $p_1>1>p_2\geq 0$ (мос равишда $p_2>1>p_1\geq 0$) ҳол учун ўзаро кесишмайдиган инвариант сиртлар мавжуд бўлиб бу инвариант сиртлардан бошланувчи траектория инвариант сиртларга тегишли қўзғалмас нуқтасига яқинлашади.

$s^{(0)}=(x,y,u,v)\in S^{2,2}$ нуқта бошланғич ҳолат, яъни урғочи ва эркак турлар тўпламида эҳтимоллик тақсимоти бўлсин.

Натижаларнинг биологик талқинлари:

- Барча қўзғалмас нуқталар тўплами $S^{2,2}$ нинг чегараси эканлиги популяцияда камида битта урғочи ёки эркак тур келажакда йўқолиб кетишини англатади.
- Инвариант сиртларнинг мавжудлиги агар популяцияда бошланғич ҳолат бирор муносабатларни (инвариант тўпламларда келтирилган) қаноатлантирса у ҳолда популяция келажаги ҳам шу муносабатларни қаноатлантиришини англатади.
- Операторнинг регулярлиги популяциянинг ҳар бир ҳолати учун унинг лимит (охирги) ҳолатини аниқлашини билдиради.
- Ҳар бир $s^{(0)} \in T_0$ учун вақт чексизга интилганда урғочиларнинг 1 тури ва эркакларнинг 2 тури асимптотик равишда йўқолади.
- Ҳар бир $s^{(0)} \in T_1$ учун вақт чексизга интилганда эркакларнинг 2 тури асимптотик равишда йўқолади.
- Ҳар бир $s^{(0)} \in T_0$ учун вақт чексизга интилганда урғочиларнинг 1 тури асимптотик равишда йўқолади.

ХУЛОСА

Диссертация гоносомал эволюцион операторлардан ҳосил қилинган динамик системаларни ўрганишга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Нормаланган гоносомал эволюцион оператори ягона қўзғалмас нуқтасининг глобал тортувчанлиги ҳақидаги Розиков ва Варронинг гипотезаси исботланди.
2. Икки жинсли популяциянинг гоносомал эволюцион оператори учун траекторияларнинг яқинлашиш тезлиги баҳоланди.
3. Икки жинсли популяциянинг параметрли гоносомал эволюцион оператори координата бошидан бошқа тортувчи қўзғалмас нуқтага эга эмаслиги кўрсатилди.
4. Гоносомал операторлар синфи учун унинг чексиз кўп қўзғалмас нуқталари топилди.
5. Гоносомал операторлар синфида ҳар бир қўзғалмас нуқта учун ўша қўзғалмас нуқталарга яқинлашадиган ўзаро кесишмайдиган траекторияларнинг мавжудлиги, яъни инвариант тўпламнинг нуқтасидан бошланган ҳар қандай траектория унга мос қўзғалмас нуқтага яқинлашиши кўрсатилди.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V.I. ROMANOVSKIY

SAMARKAND STATE UNIVERSITY

ABSALAMOV AKMAL TOLLIBOYEVICH

ASYMPTOTICAL BEHAVIOR OF TRAJECTORIES GENERATED BY GONOSOMAL EVOLUTION OPERATOR

01.01.01-Mathematical analysis

ABSTRACT OF THESIS OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PHD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT-2021

The theme of thesis of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2020.3.PhD/FM516.

Thesis has been prepared at Samarkand State University.

The abstract of the thesis is posted in three languages (Uzbek, English, Russian (summary)) on the website http://kengash.mathinst.uzand in the website of “ZiyoNet” Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific supervisor:	**Rozikov Utkir Abdulloevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Jamilov Uygun Umurovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Senior researcher
	Eshmamatova Dilfuza Baxramovna Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent
Leading organization:	Namangan State University

Defense will take place « 10 » September 2021 at 16:00 at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy. (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

Thesis is possible to review in Information-resource center at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy (is registered №_____). (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871)-207-91-40).

Abstract of the thesis sent out on «____» ____________ 2021 year
(Mailing report № _____ on «____» ____________ 2021 year)

A. Azamov
Deputy Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Academician

J.K. Adashev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees,
C.F.-M.S., Senior researcher

U.U. Jamilov
Chairman of Scientific seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Senior researcher

INTRODUCTION

Actuality and demand of the theme of dissertation. In the world, numerous scientific and applied research works are reduced to the study of dynamical systems of nonlinear operators. Dynamical systems of gonosomal evolution operators are the principle object of the research in the various domains such as physics and economy. Moreover, results on nonlinear dynamical systems generated by gonosomal evolution operators are significant in the investigation of the problems of mathematical biology and population genetics. Hence, the investigation of the asymptotical behavior of the trajectories generated by gonosomal evolution operator remains one of the most important and actual tasks in the theory of dynamical systems.

Nowadays in the world, theory of dynamical systems has been proven to be a powerful tool for analyzing and understanding the behavior of a wide range of problems. This is now, the description of dynamics of a gonosomal evolution operator is an essential problem. Because such operators appear in investigations of hemophilia, free and bisexual populations and many other kind of biological and physical systems with multi-types of spaces. In this regard, the main issues are: to find the fixed points of nonlinear operators and investigation of their stability, to describe a set of periodic points and determine their type, to find invariant sets and describe their structure, description of the set of limit points of trajectories for a given nonlinear operator.

In recent years, our country has paid increasing attention to geology, biology, mathematics and physics, which have a scientific and practical application of fundamental sciences. In particular, special attention was paid to the development of the theory of dynamical systems of nonlinear evolution operators, which are widely used in mechanics, control theory and biological systems. Due to development of this direction it is obtained weighty results related to gonosomal evolution operators of a bisexual population. Investigations on the international level in such important areas as functional analysis, mathematical physics and statistical physics are considered as the main task of fundamental research.[2] At present, the development of investigations on the dynamical systems generated by gonosomal evolution operators plays significant role in the implementation of this decree.

The subject and object of research of this dissertation are in line with tasks identified in the Decrees of the President of the Republic of Uzbekistan UP-4947 of February 7, 2017 “On the strategy of action for the further development Of the Republic of Uzbekistan”, UP-2789 dated April 20, 2017 “On measures to further develop the system of higher education”, PP-4387 from July 9, 2019 “On measures to further development of mathematical education and science, and also root improvement of the activity of the Uzbekistan Academy of Sciences

[2] Decree of Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan at the 2017year 18 May «On measures on the organization of activities of the first created scientific research institutions of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan» № 292 dated May 17, 2017.

V.I.Romanovsky Institute of Mathematics", and PP-4708 of May 7, 2020 "On measures to improve the quality of education and research in the field of mathematics" as well as in other regulations related to basic science.

Connection of research to priority directions of development of science and technologies of the Republic. This study was performed in accordance with the priority areas of development of science and technology of Republic of Uzbekistan IV, "Mathematics, Mechanics and Computer Science".

The degree of scrutiny of the problem. Efforts to understand mathematical models in physical or biological systems have aroused interest in studying the methods of discrete-time dynamical systems. The main mathematical problem for a given population is to examine the evolution, that is, time dependent dynamics of states of the population. The mathematical methods used in the study of this problem are based on probability theory, stochastic process, theory of dynamical systems, mathematical and functional analysis, and theory of differential equations. In June of 2021, MathSciNet found more than 42350 entries for "population" in the entire database. By this database the first publication related to the population is given by E. B. Wilson, which was published in 1924. In just 2020 there were more than 1850 publications. Therefore, in these days theory of populations is very popular and active topic in mathematics.

Population dynamics theory is important to a proper understanding of living populations at all levels. In mathematical biology, the field of population dynamics studies the number and age composition of populations as a dynamical system. When selection is absent a very effective algebraic approach was introduced by O. Reiersol in 1961. This approach was extended by Y. I. Lyubich in 1971 to describe explicit solutions of the general evolution equation. To study population dynamics nonlinear (in particular, quadratic and rational) multidimensional evolution operators were introduced by H.Kesten. He for general form of quadratic evolution operators has found sufficient conditions of uniqueness of fixed point. Gonosomal (rational) operators first were studied by U.Rozikov and R.Varro and these investigations applied to biological system of hemophilia.

In the book entitled "Population dynamics: algebraic and probabilistic approach" which is written by U. A. Rozikov in 2020, systematically describes the recently developed theory of free and bisexual population, and mainly contains results obtained since 2010. It presents algebraic and probabilistic approaches in the theory of population dynamics. In addition, several dynamical systems of biological models such as dynamics generated by Markov processes of cubic stochastic matrices (studied by J.M.Casas, M.Ladra, U.Rozikov, B.Mamurov, S.Xudayarov); dynamics of sex-linked population (investigated by Y. Lyubich, U.Jamilov, U.Rozikov); dynamical system and an evolution algebra of mosquito population (M.Velasco, R.Varro, U.Rozikov, S.Shoyimardonov); and ocean ecosystems (S.Shoyimardonov, U.Rozikov) are given. However, despite of conducting a lot of research results on the dynamical systems of nonlinear operators by U.U. Jamilov, A.M. Hardin, A.Y. Hamrayev, N.N. Ganikhodjaev, R.N. Ganikhodjaev, H. Kesten, O. Khakimov, M. Ladra, F.M. Mukhamedov, U.A.

Rozikov, J.P. Tian, R. Varro, A. Zada, for dynamical systems generated by nonlinear operators it remain many open problems to give a full description of the set of limit points. In particular, there are many open problems in the study of dynamics of gonosomal evolution operators.

Connection of the theme of the dissertation with the research works of higher education, where the dissertation is carried out. The dissertation research is done in accordance with the planned theme of scientific research OT-F4-82 + OT-F4-87 «Local derivations and automorphisms of operator and nonassociative algebras, phase transitions and chaos in nonlinear dynamical systems» + «The theory of global invariants of curves and surfaces in Euclidean and pseudo-Euclidean spaces and its applications in mechanics» (2017-2020) at the Institute of Mathematics after named V.I. Romanovskiy also it is done in accordance with the planned theme of scientific research at Samarkand State University.

The aim of research work is for any initial point to give a full description of the set of limit points for discrete time dynamical systems generated by a gonosomal evolution operator.

Research problems:

to find fixed points and invariant sets of gonosomal evolution operators which describe the equilibrium states of corresponding biological system;

to describe a set of periodic points and determine their type;

to study the limit points of trajectories generated by gonosomal evolution operators of a bisexual population;

to study on the velocity of convergence to limit points of trajectories of gonosomal evolution operators determine how faster or slower genetic disorders (*haemophilia*) disappear in the biological system.

The research object. Discrete time dynamical systems generated by gonosomal evolution operators.

The research subject. Theory of nonlinear evolution operators, theory of discrete time dynamical systems and stochastic process.

Research methods. In the research the methods of functional analysis, probability theory, algebra and theory of dynamical systems are used.

Scientific novelty of the research work consists of the following:

The global attractiveness of a unique fixed point of normalized gonosomal evolution operator of a sex linked inheritance is proved.

For the gonosomal evolution operator of a bisexual population it is obtained the order of convergence of the trajectories.

For a parametric gonosomal evolution operator of a bisexual population it is proved that the oparator has not attracting fixed point except origin.

For a class of gonosomal operators it is proved that such operators have infinitely many fixed points and for each such fixed point there are disjointed trajectories which converge to those fixed points.

Practical results of the research are that mathematical models of population processes in mathematical biology are formulated by gonosomal evolution operators and methods for determining the set of limit points of trajectory in dynamical systems generated by gonosomal evolution operators are studied.

The reliability of the results of the study. The results have been obtained by using the methods of functional analysis, probability theory, stochastic process and theory of discrete time dynamical systems. The obtained results are proved mathematically correct**.**

Scientific and practical significance of the research results. The scientific significance of the research results is to determine the behavior of the dynamical systems generated by gonosomal evolution operators and to solve the problems of mathematical biology.

The practical significance of the thesis is that in the many models of population dynamics using the description of the sets fixed points and using the set of limit points of trajectories it can be predicted the future of population.

Implementation of the research results.

The results related to asymptotical behavior of trajectories generated by a gonosomal evolution operator of bisexual population were used in the following research projects:

The results obtained on the global attractiveness of a unique fixed point of normalized gonosomal evolution operator of a sex linked inheritance have been used for describing the sets of limit points of trajectories of stochastic operators in the research project №OT-Ф4-03 (Reference №04/2058 of Karshi State University dated June 26, 2021). The application of the scientific result allowed to classify the limit points of quadratic and cubic stochastic operators of Volterra and non-Volterra;

The results obtained from the fact that a class of gonosomal operators which has infinitely many fixed points have been used for describing the translational-invariant fixed point and periodic point corresponding Gibbs measures of a physical system in the research project №OT-Ф4-02 (Reference №04-04/01-158 of Buxoro State University dated June 21, 2021). The application of the scientific result made it possible to determine the similarity between several models of statistical physics with a limited number of spin values and population models.

Approbation of the research results. The main results of the research have been discussed at 4 international and 4 national scientific conferences.

Publications of the research results. On the topic of the dissertation 5 research papers have been published in the scientific journals, all of them are included in the list of journals proposed by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for defending the PhD thesis. 2 of them were published in international journals of mathematics, and 3 published in national scientific journals.

The structure and volume of the dissertation. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The general volume of the thesis is 90 pages.

THE MAIN CONTENT OF THE THESIS

The **introduction** of the thesis includes the motivation of the research, the relevance of the research to the priorities of science and technology, the review of foreign research on the topic, the degree of scrutiny of the problem, the aim, research problems, object and subject of research, scientific novelty and practical results, theoretical and practical significance of the results obtained, the statement of research results, published works and information on the structure of the thesis.

In the first chapter of the thesis, entitled **"The global attractiveness of the fixed point of a gonosomal evolution operator"** we give main concepts and definitions for the population dynamics and for gonosomal evolution operator to cover the dissertation and research the subject. We have studied the dynamical systems generated by the normalized gonosomal evolution operator and we give the proof of conjecture of Rozikov and Varro. Moreover, we investigated the behavior of the trajectories of dynamical system generated by gonosomal evolution operator .

Haemophilia is a lethal recessive X -linked disorder: a female carrying two alleles for hemophilia die. Therefore if we denote by X^h the gonosome X carrying the hemophilia, there are only two female genotypes: XX and XX^h (X^hX^h is lethal) and two male genotypes: XY and X^hY. We have four types of crosses:

$$\begin{aligned}
&XX\times XY \rightarrowtail \frac{1}{2}XX,\ \frac{1}{2}XY;\\
&XX\times X^hY \rightarrowtail \frac{1}{2}XX^h,\ \frac{1}{2}XY;\\
&XX^h\times XY \rightarrowtail \frac{1}{4}XX, \frac{1}{4}XX^h, \frac{1}{4}XY, \frac{1}{4}X^hY;\\
&XX^h\times X^hY \rightarrowtail \frac{1}{3}XX^h, \frac{1}{3}XY, \frac{1}{3}X^hY.
\end{aligned} \tag{1}$$

Let $F=\{XX, XX^h\}$ and $M=\{XY, X^hY\}$ be the sets of female and male genotypes respectively. Assume state of the set F is given by a real vector (x,y) and state of the set M is given by a real vector (u,v). Then a state of $F\cup M$ is given by the vector $s=(x,y,u,v)\in\mathbb{R}^4$. If $s'=(x',y',u',v')$ is a state of the system $F\cup M$ in the next generation then by the rule (1) we get the evolution operator $W:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ defined by

$$W:\begin{cases} x' = \frac{1}{2}xu + \frac{1}{4}yu \\ y' = \frac{1}{2}xv + \frac{1}{4}yu + \frac{1}{3}yv \\ u' = \frac{1}{2}xu + \frac{1}{2}xv + \frac{1}{4}yu + \frac{1}{3}yv \\ v' = \frac{1}{4}yu + \frac{1}{3}yv. \end{cases} \tag{2}$$

This example can be generalized: suppose that the set of female types is $F=\{1,2,\dots,\eta\}$ and the set of male types is $M=\{1,2,\dots,\nu\}$. Let $x=(x_1,\dots,x_\eta)\in\mathbb{R}^\eta$ be a state of F and $y=(y_1,\dots,y_\nu)\in\mathbb{R}^\nu$ be a state of M.

Consider $p^{(f)}_{ir,j}$ and $p^{(m)}_{ir,l}$ as some inheritance real coefficients (not necessary probabilities) with

$$\sum_{j=1}^{n} p^{(f)}_{ir,j} + \sum_{l=1}^{\nu} p^{(m)}_{ir,l} = 1.$$

Consider an evolution operator $W:\mathbb{R}^{\eta+\nu}\to\mathbb{R}^{\eta+\nu}$ defined as

$$W:\begin{cases} x'_j = \sum_{i,r=1}^{\eta,\nu} p^{(f)}_{ir,j} x_i y_r, \; j=1,\dots,\eta \\ y'_l = \sum_{i,r=1}^{\eta,\nu} p^{(m)}_{ir,l} x_i y_r, \; l=1,\dots,\nu. \end{cases} \tag{3}$$

This operator is called gonosomal evolution operator. This means that the association $s=(x,y)\in\mathbb{R}^{\eta+\nu}\to s'=(x',y')\in\mathbb{R}^{\eta+\nu}$ defines a map W. The population evolves by starting from an arbitrary state s, then passing to the state $s'=W(s)$ (in the next 'generation'), then to the state $s''=W(W(s))$, and so on. tates of the population described by the following discrete-time dynamical system

$$s^{(0)},\; s^{(1)}=W(s^{(0)}),\; s^{(2)}=W^2(s^{(0)}),\; s^{(3)}=W^3(s^{(0)}),\dots$$

where $s^{(0)}\in\mathbb{R}^{\eta+\nu}$ is a given initial point and $W^n(s)=\underbrace{W(W(...W}_{n}(s))...)$ denotes the n times iteration of W to s.

The main problem for a given dynamical system (4) is to describe the limit points of the trajectory $\{s^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ for arbitrary given $s^{(0)}$.

We note that the gonosomal operator (4) does not map the simplex

$$S^{\eta+\nu-1}=\left\{ s=(x_1,\dots,x_\eta,y_1,\dots,y_\nu)\in\mathbb{R}^{\eta+\nu} : x_i\ge 0,\; y_r\ge 0,\; \sum_{i=1}^{\eta}x_i+\sum_{r=1}^{\nu}y_r=1 \right\}$$

to itself, since

$$\sum_{i=1}^{\eta} x_i' + \sum_{r=1}^{\nu} y_r' = \left(\sum_{i=1}^{\eta} x_i\right)\left(\sum_{r=1}^{\nu} y_r\right)$$

is not equal to 1 in general. We denote

$$\mathcal{O} = \left\{ s \in S^{\eta+\nu-1} : \ (x_1,\ldots,x_\eta) = (0,\ldots,0) \ \ or \ \ (y_1,\ldots,y_\nu) = (0,\ldots,0) \right\}.$$

$$\mathcal{S}^{\eta,\nu} = S^{\eta+\nu-1} \setminus \mathcal{O}.$$

It is easy to see that $W(\mathcal{O}) = \{(0,\ldots,0)\}$. So the points from $\mathcal{O}$ do not give any contribution to the dynamical system generated by W.

Therefore we introduce the normalized gonosomal operator as the following. An normalized evolution operator V which is defined as

$$V : \begin{cases} x_j' = \dfrac{\sum_{i,r=1}^{\eta,\nu} p_{ir,j}^{(f)} x_i y_r}{\left(\sum_{i=1}^{\eta} x_i\right)\left(\sum_{r=1}^{\nu} y_r\right)}, & j = 1,\ldots,\eta \\[2ex] y_l' = \dfrac{\sum_{i,r=1}^{\eta,\nu} p_{ir,l}^{(m)} x_i y_r}{\left(\sum_{i=1}^{\eta} x_i\right)\left(\sum_{r=1}^{\nu} y_r\right)}, & l = 1,\ldots,\nu. \end{cases} \tag{4}$$

with coefficients

$$p_{ir,j}^{(f)} \ge 0, \ \ p_{ir,l}^{(m)} \ge 0,$$
$$\sum_{j=1}^{\eta} p_{ir,j}^{(f)} + \sum_{l=1}^{\nu} p_{ir,l}^{(m)} = 1, \ \ for\ all \ \ i,r,j,l.$$

Note that there is one-to-one correspondence between non-negative and normalizeable fixed points of the operator (3) and all fixed points of the operator (4).

If $s = (x_1,\ldots,x_\eta, y_1,\ldots,y_\nu)$ is a fixed point of the operator (3) then $\tilde{s} = (x_1/Z,\ldots,x_\eta/Z, y_1/Z,\ldots,y_\nu/Z)$ is a fixed point of the operator (4) and vice versa, where

$$Z = \left(\sum_{i=1}^{\eta} x_i\right)\left(\sum_{r=1}^{\nu} y_r\right).$$

We consider the normalized version $V : \mathcal{S}^{2,2} \to \mathcal{S}^{2,2}$ of the evolution operator (2), i.e.,

$$
V:\begin{cases}
x' = \dfrac{2xu + yu}{4(x+y)(u+v)} \\
y' = \dfrac{6xv + 3yu + 4yv}{12(x+y)(u+v)} \\
u' = \dfrac{6xu + 6xv + 3yu + 4yv}{12(x+y)(u+v)} \\
v' = \dfrac{3yu + 4yv}{12(x+y)(u+v)}.
\end{cases} \tag{5}
$$

For the operator (5) we have proved the following theorem which is given as a conjecture by U.A. Rozikov and R. Varro.

Theorem 1. *The operator $V: S^{2,2} \to S^{2,2}$ given by (5) has unique nonhyperbolic fixed point $s_0 = (1/2, 0, 1/2, 0)$ and for any initial point $s \in S^{2,2}$ we have*

$$
\lim_{n\to\infty} V^n(s) = s_0 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right). \tag{6}
$$

Following theorem shows how faster or slower trajectories of the operator (9) tend to its unique fixed point

Theorem 2. For the trajectory $(x^{(n)}, y^{(n)}, u^{(n)}, v^{(n)})$ of the operator (5) the following hold:

$$
\left|\frac{1}{2} - x^{(n)}\right| \le \frac{c_1}{n}, \quad \frac{c_2}{n} \le y^{(n)} \le \frac{c_3}{n},
$$

$$
\left|\frac{1}{2} - u^{(n)}\right| \le \frac{c_4}{n}, \quad \frac{c_5}{n} \le v^{(n)} \le \frac{c_6}{n}.
$$

where c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 are positive constants.

Let $s^{(0)} = (x^{(0)}, y^{(0)}, u^{(0)}, v^{(0)}) \in S^{2,2}$ be an initial state (the probability distribution on the set $\{XX, XX^h; XY, X^hY\}$ of genotypes). Theorem 1. has the following biological interpretations: when time goes to infinity, the population tends to the equilibrium state $s_0 = (1/2, 0, 1/2, 0)$, meaning that the future of the population is stable: genotypes XX and XY are survived always, but the genotypes XX^h and X^hY will asymptotically disappear. Consequently, only healthy chromosomes will survive.

From biological interpretations of the result (6) we can see that problem of investigating the behavior of trajectories of the operator (5) is great importance in understanding of the hemophilia at a sex linked inheritance.

In the second chapter of the thesis, entitled **"Dynamical systems generated by parametric gonosomal evolution operator"** We have considered the dynamical systems of a hemophilia generated by a parametric gonosomal evolution operator of sex linked inheritance depending on parameters and studied their trajectory behavior. Moreover, we obtained various conditions which lead to the ω -limit set being the origin or infinity.

Proposition 1. *The point* $s=(0,0,...,0)\in\mathbb{R}^{\eta+\nu}$ *is a fixed point for the operator (4). If* $\delta\in[0,4)$ *and the coefficients of the operator (3) are nonnegative real numbers, then for any initial point* $t=(x_1,...,x_\eta,y_1,...,y_\nu)\in Q_\delta$*, we have*

$$\lim_{n\to\infty} W^n(t)=\underbrace{(0,0,...,0)}_{\eta+\nu},$$

where

$$Q_\delta=\left\{(x_1,...,x_\eta,y_1,...,y_\nu)\in\mathbb{R}^{\eta+\nu}:\sum_{j=1}^{\eta}x_j+\sum_{l=1}^{\nu}y_l\le\delta,\ x_j\ge0,\ y_l\ge0,\ j=\overline{1,\eta},\ l=\overline{1,\nu}\right\}$$

Proposition 2. *Let the coefficients of the operator (3) and the coordinates of an initial point* $t=(x_1,...,x_\eta,y_1,...,y_\nu)\in\mathbb{R}^{\eta+\nu}$ *be nonnegative real numbers. If*

$$\max_{\substack{1\le i,j\le\eta,\\ 1\le r,l\le\nu}}\{p_{ir,j}^{(f)}p_{ir,l}^{(m)}x_iy_r\}>1,$$

then $\lim_{n\to\infty}W^n(t)=\infty$*, i.e. at least one coordinate of* $W^n(t)$ *tends to* ∞ *as* $n\to\infty$.

Theorem 3. *Any nonzero fixed point of the evolution operator (3) can not be attracting.*

In the third chapter of the thesis, titled **"A regular gonosomal evolution operator with uncountable set of fixed points"** we have studied dynamical systems generated by a gonosomal evolution operator of a bisexual population. We have explicitly described all (uncountable set) of fixed points of the operator. It is shown that each fixed point has eigenvalues less or equal to 1. It is shown that each trajectory converges to a fixed point, i.e. the operator is regular. There are uncountable family of invariant sets each of which containing unique fixed point. Thus there is one-to-one correspondence between such invariant sets and the set of fixed points. We proved that any trajectory started at a point of the invariant set converges to the corresponding fixed point.

We consider a bisexual population which consists females partitioned into types indexed by $\{1,2\}$ and the males partitioned into types indexed by $\{1,2\}$. Let $p_{ir,j}^{(f)}$ and $p_{ir,l}^{(m)}$ be inheritance coefficients defined as the probability that a female offspring is type j and, respectively, that a male offspring is of type l, when the parental pair is ir $(i,j=1,\ldots,2;$ and $r,l=1,\ldots,2)$. These quantities are taking as

$$
\begin{array}{llll}
p_{11,1}^{(f)} = a & p_{11,2}^{(f)} = 0 & p_{11,1}^{(m)} = b & p_{11,2}^{(m)} = 0 \\
p_{12,1}^{(f)} = 0 & p_{12,2}^{(f)} = \sigma_1 & p_{12,1}^{(m)} = \sigma_2 & p_{12,2}^{(m)} = 0 \\
p_{21,1}^{(f)} = 0 & p_{21,2}^{(f)} = a & p_{21,1}^{(m)} = b & p_{21,2}^{(m)} = 0 \\
p_{22,1}^{(f)} = 0 & p_{22,2}^{(f)} = a & p_{22,1}^{(m)} = 0 & p_{22,2}^{(m)} = b.
\end{array}
$$

Then corresponding evolution operator $V_1 : S^{2,2} \to S^{2,2}$ is

$$
V_1 : \begin{cases}
x' = \dfrac{axu}{(x+y)(u+v)} \\
y' = \dfrac{\sigma_1 xv + ayu + ayv}{(x+y)(u+v)} \\
u' = \dfrac{\sigma_2 xv + bxu + byu}{(x+y)(u+v)} \\
v' = \dfrac{byv}{(x+y)(u+v)},
\end{cases} \tag{7}
$$

where coefficients satisfy

$$
a + b = \sigma_1 + \sigma_2 = 1, \; a > 0, \; b > 0, \; \sigma_1 \ge 0, \; \sigma_2 \ge 0.
$$

For this operator (13) and for arbitrarily initial point $s^{(0)} \in S^{2,2}$, we studied the trajectory $\{s^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$, where

$$
s^{(n)} = V_1^n(s^{(0)}) = \underbrace{V_1(V_1(...V_1}_{n}(s^{(0)}))...)
$$

denotes n times iteration of the operator W to $s^{(0)}$.
The set of all fixed points of operator (13) is $\mathrm{Fix}(V_1) = F_{11} \cup F_{12}$, where

$$
F_{11} = \{(0, a, u, v): \quad u + v = b, \quad u, v \in [0, b]\}
$$

and

$$
F_{12} = \{(x, y, b, 0): \quad x + y = a, \quad x, y \in [0, a]\}.
$$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1 - \dfrac{v}{b}$ and $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1 - \dfrac{x}{a}$ are eigenvalues of the fixed points of the forms F_{11} and F_{12} respectively.

Theorem 4. *For any initial point $(x, y, u, v) \in S^{2,2}$ the sequence of the trajectories of the operator (13)*

$$
V_1^n(x, y, u, v) = (x^{(n)}, y^{(n)}, u^{(n)}, v^{(n)})
$$

is convergent and

$$
\lim_{n\to\infty} x^{(n)} \cdot v^{(n)} = 0.
$$

Corollary 1. *For any initial point $t=(x,y,u,v)\in S^{2,2}$ the ω-limit set $\omega(t)$ of the operator (13) consists a single point and*

$$\omega(t)\in\begin{cases}\{(0,a,b,0)\}, & if\ \ t=(x,y,u,v)\in T_0,\\ F_{12}, & if\ \ t=(x,y,u,v)\in T_1,\\ F_{11}, & if\ \ t=(x,y,u,v)\in T_2.\end{cases}$$

where

$$T_0=\{(x,y,u,v)\in S^{2,2}:\quad \lim_{n\to\infty}x^{(n)}=\lim_{n\to\infty}v^{(n)}=0\},$$

$$T_2=\{(x,y,u,v)\in S^{2,2}:\quad \lim_{n\to\infty}x^{(n)}\in(0,a],\ \ \lim_{n\to\infty}v^{(n)}=0\}.$$

$$T_2=\{(x,y,u,v)\in S^{2,2}:\quad \lim_{n\to\infty}x^{(n)}=0,\ \ \lim_{n\to\infty}v^{(n)}\in(0,b]\}.$$

Definition 1. *An operator is called regular if for any initial point trajectory of the operator is always convergent.*

The following is a corollary of theorem 3.

Corollary 2. *The operator (7) is regular.*

Introduce the following notations

$$p_1=\frac{\sigma_1}{a},\qquad p_2=\frac{\sigma_2}{b}.$$

There are three cases for p_1, p_2.

1. $p_1=p_2=1,$
2. $p_1>1>p_2\geq 0,$
3. $p_2>1>p_1\geq 0.$

We have the following general theorem for the invariant surface of the operator (7).

Theorem 5. *The following set is invariant surface respect to the operator (7)*

$$\Omega_\theta=\left\{\begin{array}{l}(x,y,u,v)\in S^{2,2}:\ \ xv\left[1+(p_1-1)f\left(\dfrac{x}{x+y}\right)\right]=\\ =\left[\dfrac{x}{x+y}-f\left(\dfrac{x}{x+y}\right)\right](x+y)(u+v)\end{array}\right\}$$

where $f:[0,1]\to[0,1]$ is a smooth function which is the solution of the following iterative functional equation

$$\begin{gathered}f(\alpha)(\alpha-f(\alpha))(1-\alpha)[1+(p_1-1)f(f(\alpha))]=\\ \alpha(f(\alpha)-f(f(\alpha)))[1+(p_2-1)\alpha+(p_1-p_2)f(\alpha)]\end{gathered}\tag{8}$$

When $p_1 = p_2 = 1$ the face of the iterative functional equation (8) will be

$$f(\alpha)(\alpha - f(\alpha))(1-\alpha) = \alpha(f(\alpha) - f(f(\alpha))) \tag{9}$$

Theorem 6. *The solutions of the functional equation (9) are*

$$f(\alpha)=0,\ f(\alpha)=\alpha \ \ and \ \ f(\alpha)=\theta\alpha-\alpha^2$$

where θ is an arbitrary constant.

Using Theorem 5 when $p_1 = p_2 = 1$ we obtain $\sigma_1 = a$, $\sigma_2 = b$ and

$$\Omega_\theta = \{(x,y,u,v) \in S^{2,2} : \ \frac{v}{u+v} = \frac{x}{x+y} + 1 - \theta\}$$

is an invariant surface respect to the operator (7) and we have the following lemma for this invariant surface.

Lemma 1. *For the Ω_θ invariant surfaceit holds that*

$$\bigcup_{\theta\in[0,1)} \Omega_\theta = T_2 = \{(x,y,u,v) \in S^{2,2} : yv > xu\},$$

$$\bigcup_{\theta\in(1,2]} \Omega_\theta = T_1 = \{(x,y,u,v) \in S^{2,2} : yv < xu\},$$

$$\Omega_1 = T_0 = \{(x,y,u,v) \in S^{2,2} : yv = xu\}$$

and

$$\Omega_{\theta_1} \cap \Omega_{\theta_2} = \varnothing \ \ for\ any \ \ \theta_1 \neq \theta_2.$$

Thus it suffices to study the dynamical system on each invariant surfaces Ω_θ. We have the following

Theorem 7. *The following assertions hold*

• *For any initial point $t = (x,y,u,v) \in \Omega_1$, we have*

$$\lim_{n\to\infty} V_1^{(n)}(x,y,u,v) = \lim_{n\to\infty}(x^{(n)}, y^{(n)}, u^{(n)}, v^{(n)}) = (0; a; b; 0).$$

• *If $\theta \in (1,2]$ then for any initial point $t = (x,y,u,v) \in \Omega_\theta$ the following holds*

$$\lim_{n\to\infty} V_1^{(n)}(x,y,u,v) = \lim_{n\to\infty}(x^{(n)}, y^{(n)}, u^{(n)}, v^{(n)}) = (a(\theta-1); a(2-\theta); b; 0).$$

• *If $\theta \in [0,1)$ then for any initial point $t = (x,y,u,v) \in \Omega_\theta$ the following holds*

$$\lim_{n\to\infty} V_1^{(n)}(x,y,u,v) = \lim_{n\to\infty}(x^{(n)}, y^{(n)}, u^{(n)}, v^{(n)}) = (0; a; b\theta; b(1-\theta)).$$

Numerical analysis shows that in the cases $p_1 > 1 > p_2 \geq 0$ (resp. in the case $p_2 > 1 > p_1 \geq 0$) there are nonintersecting invariant surfaces and the trajectory started on an invariant surface converges to the intersecting point of the invariant surface.

Let $s^{(0)} = (x, y, u, v) \in S^{2,2}$ be an initial state, i.e. the probability distribution on the set of female and male types.

The following are interpretations of our results:

- The set of all fixed points is subset of the boundary of $S^{2,2}$ means that at least one type of female or male in future of population will surely disappear.
- The existence of invariant curves (in particular lines) means that if states of the population initially satisfied a relation (described the invariant set) then the future of the population remains in the same relation.
- Regularity of the operator means that for any initial state of the population we can explicitly determine its limit (final) state.
- For any $s^{(0)} \in T_0$ as time goes to infinity the type 1 of female and type 2 of males will asymptotically disappear (die).
- For any $s^{(0)} \in T_1$ as time goes to infinity the type 2 of males will asymptotically disappear.
- For any $s^{(0)} \in T_2$ as time goes to infinity the type 1 of females will asymptotically disappear.

CONCLUSION

The thesis is devoted to investigation of the dynamical systems generated by gonosomal evolution operators.

Basic results of the research are as follows:

1. The conjecture of Rozikov and Varro about global attractiveness of a unique fixed point of normalized gonosomal evolution operator of a sex linked inheritance is proved.
2. For the gonosomal evolution operator of a bisexual population it is studied the rate of convergence of the trajectories.
3. For a parametric gonosomal evolution operator of a bisexual population it is investigated the behavior of the trajectories and shown that the oparator has not attracting fixed point except origin.
4. For a class of gonosomal evolution operator it is shown that it has infinitely many fixed points.
5. For a class of gonosomal evolution operator it is shown that for each such fixed point there are disjointed trajectories which converge to those fixed points, i.e. any trajectory started at a point of the invariant set converges to the corresponding fixed point.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО
САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

АБСАЛАМОВ АКМАЛ ТОЛЛИБОЕВИЧ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ ГОНОСОМАЛЬНЫМ ЭВОЛЮЦИОННЫМ ОПЕРАТОРОМ

01.01.01 –Математический анализ

**АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (PhD) по
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

ТАШКЕНТ-2021

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2020.3.PhD/FM516.

Диссертация выполнена в Самаркандский государственный университет.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, английский, русский, (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу http://www.ziyonet.uz.

Научный руководитель:	**Розиков Уткир Абдуллоевич** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Жамилов Уйғун Умурович** доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник
	Эшмаматова Дилфуза Бахрамовна кандидат физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	Наманганский государственный университет

Защита диссертации состоится « 10 » сентября 2021 года в 16:00 на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9.Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № ____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9.Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан «__» ___________ 2021 года.
(протокол рассылки № ____ от «__» __________ 2021 года).

А. Азамов
Заместитель председателя Научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., академик

Ж.К. Адашев
Ученый секретарь Научного
совета по присуждению ученых
степеней, к.ф.-м.н., старший
научный сотрудник

У.У. Жамилов
Председатель Научного семинара
при Научном совете по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н. старший
научный сотрудник

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Целью исследования является изучение асимптотического поведения траекторий, порожденных гоносомальным эволюционным оператором.

Объект исследования: Динамические системы с дискретным временем, порожденных гоносомальным эволюционным оператором.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

Доказана глобальной притягиваемости единственной неподвижной точки нормализованного гоносомального оператора двуполой популяции (гемофилия).

Для этого гоносомального эволюционного оператора двуполой популяции найдено скорость сходимости траекторий.

Для параметрического гоносомального эволюционного оператора двуполой популяции доказано, что оператор не имеет никакой притягивающей неподвижной точки кроме начало координат.

Для одного класса гоносомальных эволюционных операторов показано, что они имеют бесконечно много неподвижных точек, и для каждой такой неподвижной точки доказано, что существуют непересекающий траектории которые сходятся к этим неподвижным точкам.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

Результаты, связанные с асимптотическим поведением траекторий, генерируемых гоносомальным эволюционным операторомдвуполой популяции, были использованы в следующих исследовательских проектах:

Результаты, полученные из глобальной притягиваемости единственной неподвижной точки нормализованного гоносомального оператора двуполой популяции, были использованы для описания множества предельных точек траекторий стохастических операторов в исследовательском проекте №ОТ-Ф4-03 (Справка Каршинского государственного университета №04/2058 от 26 июня 2021 г.). Применение научного результата позволило классифицировать предельные точки квадратичных и кубических вольтеровских и не вольтеровских стохастических операторов;

Результаты, отом, что класс гоносомальных эволюционных операторов имеють бесконечно много неподвижных точек были использованы для описания трансляционной инвариантных неподвижной точке и периодических точке соответствующих мер Гиббса физической системы в исследовательском проекте №ОТ-Ф-4-02 (Справка государственного университета Бухара №04-04 / 01-158 от 21 июня 2021 г.). Использование научных результатов позволило определять сходство между несколькими моделями статистической физики с ограниченным числом значений спина и популяционными моделями.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 90 страниц.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
LISTOFPUBLISHEDWORKS
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

I бўлим (part I; I часть)

1. Absalamov A.T. Asymptotical behavior of trajectories for an evolution operator. // Uzbek Mathematical Journal –2019. № 4, –P. 4-11. (01.00.00; №6).
2. Absalamov A.T., Rozikov U.A. The dynamics of gonosomal evolution operators. // Journal of Applied Nonlinear Dynamics –2020. Vol. 9(2), –P. 247-257. (3. Scopus, IF=0.218).
3. Absalamov A.T. On the eigenvalues of a gonosomal evolution operator. // Uzbek Mathematical Journal –2020. № 4, –P. 4-10. (01.00.00; №6).
4. Absalamov A.T. The global attractiveness of the fixed point of a gonosomal evolution operator. // Discontinuity Nonlinearity and Complexity – 2021. Vol. 10(1). –P. 143-149. (3, Scopus, IF=0,165).
5. Absalamov A.T., Rozikov U.A. A regular gonosomal evolution operator with uncountable set of fixed points. // Bulletin of the Institute of Mathematics – 2021, Vol. 4(2), –P. 1-13. (01.00.00; №17).

II бўлим (part II; II часть)

6. Абсаламов А.Т., Розиков У.А. Динамическая система, моделирующая гемофилию. // Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых “Управление, Оптимизация и Динамические Системы”, Андижан, 17-19 октября, –2019 г. –С. 69-70.
7. Absalamov A.T. On Behavior of a Gonosomal Evolution Operator. // International scientific conference on the theme “Modern problems of differential equations and related branches of mathematics”, Fergana, March 12-13, –2020. –P. 360-361.
8. Absalamov A.T. On Eigenvalue of a Gonosomal Evolution Operator. // Uzbekistan-Malaysia international scientific conference on the theme “Computational models and technologies”, Tashkent, August 24-25, –2020. –P. 199-201.
9. Absalamov A.T. Gonosomal evolution operators in discrete time. // Республиканская научная конференция “Современные проблемы стохастического анализа”, посвященная 100-летию со дня рождения академика С.Х. Сираждинова. Ташкент, 21-22 сентября, –2020 г. –С. 17-18.
10. Absalamov A.T., Rozikov U.A. The Dynamical system on the invariant curve of a nonlinear operator. // Математиканинг замонавий масалалари мавзусидаги республика илмий онлайн конференция. Термиз, 21-23 октября, –2020 г. –С. 244-246.
11. Absalamov A.T. Dynamical systems of a gonosomal evolution operator with four parameters in $S^{2,2}$. // Международной научно-практической онлайн-

конференции “Теории функций одного и многих комплексных переменных”. Нукус, 26-28 ноября, –2020 г. –С. 10-14.

12. Absalamov A.T. On the Invariant Surfaces of a Gonosomal Evolution Operator. // Республиканская научная конференция “Актуальные проблемы стохастического анализа”, посвященная 80-летию со дня рождения академика Ш.К. Формонова. Ташкент, 20-21 февраля, –2021 г. –С. 357-359.

13. Absalamov A.T. Dynamical Systems on the Invariant Curve of a Gonosomal Evolution Operator. // 41th International Conference on “Quantum Probability and Related Topics”, UAEU, March 28 – April 1, –2021. –P. 91-92.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида
2021 йил 16 августда таҳрирдан ўтказилди.