В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

ШАРИПОВ САЪДИЛЛО ОЛИМЖОНОВИЧ

СТОХАСТИК РЕКУРРЕНТ ЖАРАЁНЛАРНИНГ АСИМПТОТИК ТАҲЛИЛИ

01.01.05 – Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ
бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент–2021

УДК: 519.21

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of thesis abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

Шарипов Саъдилло Олимжонович
Стохастик рекуррент жараёнларнинг асимптотик таҳлили 3

Шарипов Саъдилло Олимжонович
Асимптотический анализ стохастических рекуррентных процессов. . . . 19

Sharipov Sadillo Olimjonovich
Asymptotic analysis of stochastic recurrent processes. 35

Эълон қилинган ишлар рўйхати
Список опубликованных работ
List of published works 39

В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

ШАРИПОВ САЪДИЛЛО ОЛИМЖОНОВИЧ

СТОХАСТИК РЕКУРРЕНТ ЖАРАЁНЛАРНИНГ АСИМПТОТИК ТАҲЛИЛИ

01.01.05 – Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ
бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент–2021

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2019.1.PhD/FM313 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация В.И.Романовский номидаги Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://kengash.mathinst.uz) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида (http://www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Хусанбаев Якубджан Мухамаджанович** физика-математика фанлари доктори, доцент
Расмий оппонентлар:	**Форманов Шокир Косимович** физика-математика фанлари доктори, академик
	Ходжибаев Вали Рахимджанович физика-математика фанлари доктори, профессор
Етакчи ташкилот:	**Тошкент давлат транспорт университети**

Диссертация ҳимояси В.И.Романовский номидаги Математика институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2021 йил «22» октябр соат 16:00 даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Диссертация билан В.И.Романовский номидаги Математика институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (121-рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4б-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40.

Диссертация автореферати 2021 йил «9» октябр куни тарқатилди.
(2021 йил «9» октябр даги 2-рақамли реестр баённомаси).

У.А.Розиков
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш раиси,
ф.-м.ф.д., профессор

Ж.К.Адашев
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш илмий котиби,
ф.-м.ф.н., катта илмий ходим

Ш.К.Форманов
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш ҳузуридаги
Илмий семинар раиси,
ф.-м.ф.д., академик

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида тиббиёт, кимё, биологияда олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда иммиграцияли тармоқланувчи тасодифий жараёнларни тадқиқ қилишга келтирилади. Иммиграцияли тармоқланувчи тасодифий жараёнлар назарияси бу бирор тасодифий репродуктив механизм асосида ривожланиб борувчи заррачалар популяциясидан ташқари популяцияга хар бир вақт моментида тасодифий сондаги заррачаларнинг қўшилишидан ташкил топган тасодифий жараённинг эволюцион қонунларини ўрганувчи назария ҳисобланади. Иммиграцияли тармоқланувчи жараёнлар демография, тиббиёт, кимё, биология, ҳамда генетик кодлаш ва популяцияни бошқаришда муҳим аҳамиятга эга. Шунинг учун, иммиграцияли тармоқланувчи жараёнларларни тадқиқ этиш замонавий эҳтимоллар назариясида долзарб ва муҳим вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда иммиграция оқими ўзаро боғлиқ тасодифий миқдорлардан ташкил топган тармоқланувчи жараёнларнинг асимптотикасини аниқлаш замонавий эҳтимоллар назариясидаги асосий масалалардан бири бўлиб қолмоқда. Иммиграцияли критик тармоқланувчи жараёнлар учун функционал лимит теоремалар олинган. Иммиграция оқими боғлиқ тасодифий миқдорлардан ташкил топган тармоқланувчи жараёнларнинг асипмтотикасини топиш масаласи тўлиқ ҳал этилмаган. Бу борада, иммиграция оқими ўзаро боғлиқ тасодифий миқдорлардан ташкил топган тармоқланувчи жараёнлар асимптотикаси топиш, ўсувчи ва ўзаро боғлиқ тасодифий миқдорлардан ташкил топган иммиграцияли тармоқланувчи жараёнлар учун лимит теоремалар исботлаш, тармоқланувчи жараёнлар флуктуацияси учун марказий лимит теоремада қолдиқ ҳаднинг баҳолаш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларниниг илмий ва амалий татбиқига эга бўлган эҳтимоллар назарияси ва математик статистиканинг долзарб йўналишларига, жумладан иммиграцияли тармоқланувчи жараёнларнинг асимптотикасини таҳлил қилишга алоҳида эътибор қаратилди. Бунинг натижасида иммиграция оқими ўзаро боғлиқ бўлган тасодифий миқдорлардан ташкил топган тармоқланувчи жараёнларнинг асимптотикасини тадқиқ қилиш бўйича салмоқли натижаларга эришилди. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика фанининг устувор йўналишлари бўйича ҳалқаро стандартлар натижасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Мазкур қарор ижросини таъминлашда тармоқланувчи тасодифий жараёнлар назарияси соҳасида илмий тадқиқот ишларини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамаси 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони, 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги Қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Иммиграция оқими боғлиқсиз тасодифий миқдорлардан ташкил топган тармоқланувчи жараёнларнинг асимптотикасини ўрганиш бўйича дастабки ишлар Б.Севастьянов, С.Р.Хиткот, Е.Сенета, А.Пэйкс, Г.Чистьяков, Ж.Фостер, Ж.Фостер ва Ж.Виллиамсон, А.Зубков, В.Ватутин, И.Бадалбоев, И.Рахимов, К.Митов томонидан тадқиқ қилинган. Иммиграция оқими боғлиқ тасодифий миқдорлардан ташкил топган критик ва деярли критик тармоқланувчи жараёнлар учун функционал лимит теоремалар С.Вэи ва Ж.Винники, Т. Срирам, Х.Ли, М.Испани ва Г.Пап ва М.Зужлен, М.Испани, И.Рахимов, Я.Хусанбоев ишларида исботланган. Иммиграция оқими боғлиқ тасодифий миқдорлардан ташкил топган тармоқланувчи жараёнлар учун лимит теоремалар С.Нагаев, М.Асадуллин ва С.Нагаев, И.Бадалбоев ва А.Зубков томонидан исботланган.

Иммиграция оқими бир хил тақсимланмаган тасодифий миқдорлардан ташкил топган тармоқланувчи жараённинг асимптотикасини ўрганиш янги масалаларни қўйилишига ва бу жараёнлар учун лимит теоремаларнинг спектрини кенгайишига олиб келди. Дастлаб, Ж.Фостер ва Ж.Виллиамсон ва А.Пэйкс томонидан иммиграция оқими бир хил тақсимланмаган тасодифий миқдорлардан ташкил топган хол тадқиқ қилинган. Иммиграция оқими бир хил тақсимланмаган ва ўсувчи бўлган тасодифий жараёнларни тадқиқ қилиш муаммоси И.Бадалбоев ва И.Рахимовга тегишли. Бу борада, И.Бадалбоев ва И.Рахимов илмий ишларидан бошланган ва И.Рахимов томонидан давом эттирилган тадқиқотлар сермазмун бўлиб, ўсувчи иммиграцияли тармоқланувчи жараёнларнинг асимптотик тақсимоти чуқур ўрганилди. Х.Гуо ва М.Занг томонидан иммиграция оқими ўсувчи ва m-боғлиқлик шартида тармоқланувчи жараёнлар флуктуацияси учун функционал лимит теорема исботланган.

Иммиграцияли тармоқланувчи жараёнлар учун лимит теоремаларга багишланган кўпгина тадқиқотларда иммиграция оқими боғлиқсиз, бир хил тақсимланган ёки боғлиқсиз, бир хил тақсимланмаган тасодифий миқдорлардан ташкил топган холлар ўрганилган. Иммиграция оқими боғлиқ тасодифий миқдорлардан ташкил топган тармоқланувчи жараённинг асимптотик тақсимотини ўрганиш мухим бўлиб, бу йуналишда нисбатан кам тадқиқотлар олиб борилган. Шу нуқтаи назардан, бу сохадаги тадқиқотлар долзарбдир.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Математика институти илмий-тадқиқот ишлари режасидаги ОТ-Ф4-83 “Эҳтимолликлар тақсимоти учун лимит теоремалар ва функционал маълумотларнинг статистик таҳлили” (2017-2020 йиллар) мавзусидаги фундаментал лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади иммиграция оқими боғлиқ тасодифий миқдорлардан ташкил топган иммиграцияли тармоқланувчи жараёнларнинг лимит тақсимотларини тавсифлашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

Иммиграция оқими ўсувчи ва боғлиқлик шартида критик тармоқланувчи жараёнлар флуктуацияси учун функционал лимит теоремаларнинг ўринли бўлиш шартларини топиш;

Иммиграция оқими кенг маънодаги стационар жараёнлардан ташкил топган тармоқланувчи жараёнларнинг ўсиш тезлиги ва асимптотикасини аниқлаш;

Деярли критик иммиграцияли тармоқланувчи жараёнлар флуктуацияси учун марказий лимит теоремада яқинлашиш тезлигининг баҳолаш;

Иммиграция оқими ўсувчи ва боғлиқлик шартида докрититик хамда надкритик тармоқланувчи жараёнлар флуктуациясининг асимптотик нормал бўлишлик шартларини топиш.

Тадқиқотнинг объекти иммиграцияли тармоқланувчи жараёнлар, деярли критик иммиграцияли тармоқланувчи жараёнлар.

Тадқиқотнинг предмети характеристик функциялар, регуляр ўзгарувчи кетма-кетликлар, мартингаллар назарияси, суст боғлиқлик шартлари, функционал фазоларда эҳтимоллик ўлчовларининг яқинлашиш назарияси.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертация ишида эҳтимолликлар, характеристик функцияларнинг аналитик ва мартингаллар усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

Иммиграция оқими ўсувчи ва боғлиқлик шартини қаноатлантирувчи критик тармоқланувчи жараёнлар флуктуацияси учун функционал лимит теоремалар исботланган;

Иммиграция окими кенг маьнодаги стационар жараёнлардан ташкил топган деярли критик тармокланувчи жараёнларнинг ўсиш тезлиги ва асимптотикаси топилган;

Деярли критик иммиграцияли тармоқланувчи жараёнлар флуктуацияси учун марказий лимит теоремада яқинлашиш тезлигининг баҳоси олинган;

Иммиграция оқими ўсувчи ва боғлиқлик шартларини қаноатлантирувчи докрититик хамда надкритик тармоқланувчи жараёнлар флуктуациясининг асимптотик нормаллиги исботланган;

Тадқиқотнинг амалий натижаси маълум популяция эволюциясининг кўпайиши ёки тарқалишининг математик моделларини иммиграция оқими боғлик тасодифий микдорлардан ташкил топган тармоқланувчи жараёнлар орқали ифодалашни таклиф этилганлиги ва бу тасодифий жараёнлар учун лимит тақсимотларни аниқлаш усулларини баён қилинганлигидан иборат.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги эҳтимоллар назарияси, тасодифий жараёнлар назарияси ва регуляр ўзгарувчи функциялар назарияси хамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти иммиграцияли тармоқланувчи жараёнлар назариясини ривожлантиришда қўлланилиши билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти популяцион жараёнларда иштирок этувчи индивидуумлар эволюцияси ҳақида статистик хулосалар олиш, демография, биология, рақамли таҳлил ва криптография, шунингдек, телекомуникациянинг баъзи масалаларини ечиш имконини берганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Иммиграция оқими боғлик тасодифий микдорлардан ташкил топган тармоқланувчи жараёнлар учун лимит теоремалар бўйича олинган натижалар асосида:

иммиграцияли тармоқланувчи жараёнлар учун олинган функционал лимит теоремаларидан ФА-Атех-2018-4 рақамли «Янги дори воситаларини ишлаб чикишда молекуляр оптималлаштиришнинг виртуал усулларини ишлаб чиқиш: машинани ўрганишни чуқурлаштириш ва биологик жараёнларнинг прогнозлаш моделларини тушуниш» мавзусидаги амалий лойиҳада биологик ва кимёвий жараёнларни прогнозлашда фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг 2021 йил 26 мартдаги № 2/1255-902-сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши молекуляр генетикада юзага келадиган вазиятларни моделлаштириш имконини берган;

иммиграция оқими боғлик тасодифий миқдорлардан ташкил топган тармоқланувчи жараёнларнинг характеристик функцияси учун асимптотик ёйилмасидан ОТ-Ф-4-03 рақамли «Узлуксиз ҳамда дискрет вақтли аниқ динамик системалар, қисмий интеграл операторлар спектрлари» мавзусидаги фундаментал илмий лойиҳада тармоқланувчи жараён тақсимотининг асимптотик хоссаларини тавсифлашда фойдаланилган (Қарши давлат университетининг 2021 йил 23 августдаги № 04/2809-сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши дискрет вақтли динамик системаларнинг лимит тақсимотини тавсифлаш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 5 та халқаро ва 6 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Тадқиқот мавзуси бўйича жами 19 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 8 та мақола, жумладан, 3 таси хорижий ва 5 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисм, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссетациянинг умумий ҳажми 110 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмда диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **“Иммиграцияли тармоқланувчи жараёнлар”** деб номланувчи биринчи бобида диссертация ишини ёритиш ва мавзуни тадқиқ этиш учун зарур бўлган муҳим тушунчалар келтирилган. Шунингдек, диссертация мавзуси доирасидаги тадқиқотлар бошлангунга қадар шу соҳада тадқиқ этилган ишлар ва олинган натижалар шарҳи батафсил келтириб ўтилган. Биринчи бобнинг биринчи параграфи иммиграцияли тармоқланувчи жараённинг таърифи, сонли характеристикалари, характеристик функцияси ва асимптотик тақсимотларига бағишланган. Биринчи бобнинг иккинчи параграфида иммиграцияли тармоқланувчи жараёнлар учун функционал лимит теоермалар келтирилган. Биринчи бобнинг учинчи параграфида эса иммиграция оқими турли боғлиқлилик шартларида тармоқланувчи жараёнлар учун лимит теоремалар келтирилган. Биринчи бобнинг тўртинчи параграфи ўсувчи иммиграцияли тармоқланувчи жараёнларнинг асимптотикасига бағишланган.

Айтайлик, $\left\{\xi_{n,j}, n, j \geq 1\right\}$ ва $\left\{\varepsilon_n, n \geq 1\right\}$ – иккита боғлиқсиз ва хар бири ўзаро боғлиқсиз ва бир ҳил тақсимланган, номанфий, бутун қийматларни қабул қилувчи тасодифий миқдорлардан ташкил топган кетма-кетликлар бўлсин.

1-таъриф. Иммиграцияли тармоқланувчи жараён деб қуйидаги

$$X_0 = 0, \quad X_n = \sum_{j=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,j} + \varepsilon_n, \ n \geq 1. \tag{1}$$

рекуррент ифода билан аниқланувчи тасодифий жараёнга айтилади.

Айтайлик $a = \mathrm{E}\xi_{1,1} < \infty$ бўлсин. Агар $a < 1$, $a = 1$, $a > 1$ бўлса, у ҳолда (1) ифода билан аниқланган тасодифий жараён мос равишда докритик, критик, надкритик дейилади.

Энди хар бир $n \in \mathbb{N}$ да $\left\{\xi_{k,j}^{(n)}, n, j \in \mathbb{N}\right\}$ ва $\left\{\varepsilon_k^{(n)}, n, k \in \mathbb{N}\right\}$ – иккита боғлиқсиз ва хар бири боғлиқсиз ва бир ҳил тақсимланган, номанфий, бутун қийматларни қабул қилувчи тасодифий миқдорлардан ташкил топган кетма-кетликлар берилган бўлсин.

2-таъриф. Қуйидаги рекуррент ифода билан аниқланган

$$X_0^{(n)} = 0, \ X_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{X_{k-1}^{(n)}} \xi_{k,j}^{(n)} + \varepsilon_k^{(n)}, \quad n, k \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

тасодифий жараёнга сериялар схемасидаги иммиграцияли тармоқланувчи жараён дейилади.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$a_n = \mathrm{E}\xi_{1,1}^{(n)}, \quad \sigma_n^2 = D\xi_{1,1}^{(n)}, \quad \lambda_n = \mathrm{E}\varepsilon_1^{(n)}, \quad b_n^2 = D\varepsilon_1^{(n)}.$$

3-таъриф. Агар $n \to \infty$ да $a_n \to 1$ бўлса, у ҳолда (2) ифода билан аниқланган тасодифий жараён деярли критик дейилади.

Диссертациянинг **“Боғлиқ иммиграцияли тармоқланувчи жараёнларнинг асимптотикаси”** деб номланувчи иккинчи боби иммиграцияли тармокланувчи жараёнлар ва деярли критик тармоқланувчи жараёнларнинг асимптотик таҳлилига ва бу жараёнлар флуктуацияси учун марказий лимит теоремада яқинлашиш баҳосини ўрганишга бағишланган. Иккинчи бобнинг биринчи параграфида иммиграция оқими кенг маънодаги стационар кетма-кетликлардан ташкил топган тармоқланувчи жараёнларнинг асимптотикаси ўрганилган. Иммиграцияли деярли критик тармоқланувчи жараёнларнинг ўсиш тезлиги популяцияга келиб қўшиладиган заррачаларнинг ўртачаси авлодлар сони ортиши билан чексиз ўсиши шартида топилган. Бундан ташқари, σ_n^2 дисперсия нолга интилганда, иммиграцияли тармоқланувчи жараёнлар флуктуацияси учун асимптотик ифода топилган. Олинган ифода иммиграцияли тармокланувчи жараёнлар флуктуациясининг марказий лимит теоремага бўйсиниши учун етарли шартларни олиш имконини беради.

Фараз қилайлик, хар бир $n \in \mathbb{N}$ да $\left\{\varepsilon_k^{(n)}, k \in \mathbb{N}\right\}$ кетма-кетлик кенг маънодаги стационар жараён бўлсин ва популяцияга кирадиган заррачалар бошқа заррачалардан боғлиқсиз бўлиб, уларнинг тақсимот қонунлари популяциядаги заррачалар тақсимот конунлари билан бир ҳил бўлсин. $\left\{Z_{n,i}^{j}(k), k \geq i\right\}$ орқали $n-$чи сериядаги, $i-$чи вақт моментида популяцияга

$j-$нчи келиб тушган заррачадан ташкил топган Гальтон-Ватсон жараёнини белгилаймиз. Қилинган фаразга кўра тармоқланувчи жараёнлар $\left\{Z_{n,i}^{j}(k), k=i,i+1,...\right\}$, $j,i\geq 1$ кетма-кетлиги иҳтиёрий $n\in\mathbb{N}$ да боғлиқсиз бўлиб, тасодифий миқдор $Z_{n,i}^{j}(k+i), k=0,1,...$нинг тақсимоти $Z_{n,1}^{1}(k), k=1,2,...$ тасодифий миқдорнинг тақсимоти билан устма-уст тушади.

Белгилаш киритамиз:

$$\rho_n(k)=\operatorname{cov}\left(\varepsilon_1^{(n)},\varepsilon_{k+1}^{(n)}\right),\quad f_{n,k}(s)=\mathrm{E}e^{isZ_{n,1}^{1}(k)}.$$

Фараз қилайлик $f_{n,k}(s)$ нинг кўринши қуйидагича бўлсин:

$$f_{n,k}(s)=1+is\mathrm{E}Z_{n,1}^{1}(k)-\frac{s^2}{2}\mathrm{E}\left[Z_{n,1}^{1}(k)\right]^2+\frac{s^2}{2}\tau_{n,k}(s),\quad k,n\in\mathbb{N},\qquad (3)$$

бу ерда $\tau_{n,k}(s)-$қолдиқ ҳад бўлиб, унинг учун $\left|\tau_{n,k}(s)\right|\leq 3\mathrm{E}\left[Z_{n,1}^{1}(k)\right]^2$ ва $\tau_{n,k}(s)\to 0$, $s\to 0$ ўринли.

1-теорема. Қуйидаги шартлар бажарилсин:

1) $a_n=1+\alpha d_n^{-1}+o\left(d_n^{-1}\right)$, $n\to\infty$ бирор $\alpha\in\mathbb{R}$ ва $\{d_n,n\geq 1\}-$мусбат сонли кетма-кетлик бўлиб, $\beta_n:=\dfrac{n}{d_n}\to\beta<\infty$, $n\to\infty$;

2) $\sigma_n^2\to\sigma^2\geq 0$, $n\to\infty$;

3) $n^{1-\gamma}\lambda_n\to\lambda$, $n^{1-2\gamma}b_n^2\to 0$, $n\to\infty$;

4) $\dfrac{1}{n^{2\gamma-1}}\sum\limits_{k=1}^{n}\left|\rho_n(k)\right|\to 0, n\to\infty$.

У ҳолда қуйидаги $D[0,T]$ фазодаги суст яқинлашиш ўринли:

$$\frac{X_n(t)}{n^{\gamma}}\Rightarrow\mu(t),\ n\to\infty$$

бунда $\mu(t)=\lambda t$, агар $\alpha=0$ ёки $\beta=0$ бўлса; $\mu(t)=(\alpha\beta)^{-1}\lambda\left(e^{\alpha\beta t}-1\right)$, агар $\alpha\neq 0,\beta\neq 0$ бўлса.

2-теорема. Фараз қилайлик, 1-теореманинг 1), 3) ва 4) шартлари бажарилсин. Бундан ташқари, қуйидаги шартлар хам бажарилсин:

5) $d_n\sigma_n^2\to\sigma^2\geq 0$;

6) $\dfrac{1}{n^{\gamma}}\sum\limits_{k=1}^{n}\left|\tau_{n,k}\left(\dfrac{s}{n^{\gamma/2}}\right)\right|\to 0$, $n\to\infty$ барча $s>0$.

У холда

$$\mathrm{E}e^{is\frac{X_k^{(n)}-\mathrm{E}X_k^{(n)}}{n^{\gamma/2}}}-e^{-\frac{s^2}{2}\frac{\lambda\sigma^2\left(e^{\alpha\beta}-1\right)^2}{2\alpha^2\beta}}\mathrm{E}e^{is\frac{1}{n^{\gamma/2}}\sum\limits_{k=1}^{n}a_n^{n-k}\left(\varepsilon_k^{(n)}-\lambda_n\right)}\xrightarrow{P}0,\ n\to\infty.$$

Иккинчи бобнинг иккинчи параграфида иммиграция оқими боғлиқсиз ва бир хил тақсимланган тасодифий миқдорлардан ташкил топган деярли критик тармоқланувчи жараёнлар учун функционал лимит теорема исботланган.

Хар бир $n\in\mathbb{N}$ учун $\Im_k^{(n)}$ билан $X_0^{(n)}, X_1^{(n)},..., X_k^{(n)}$ тасодифий микдорлардан хосил килинган $\sigma-$алгебрани белгилаймиз. Кўриш қийин эмаски, $\left\{M_k^{(n)}, k\ge 1\right\}$ кетма-кетлик

$$M_k^{(n)} := X_k^{(n)} - \mathrm{E}\left(X_{k-1}^{(n)} \middle| \Im_{k-1}^{(n)} \right) = X_k^{(n)} - a_n X_{k-1}^{(n)} - \lambda_n,\ n\ge 1$$

$\Im_k^{(n)}$ $\sigma-$алгебрага нисбатан мартингал –айирма бўлади.

3-теорема. Айтайлик, қуйидаги шартлар бажарилсин:

(a) $a_n = 1+\alpha d_n^{-1} + o\left(d_n^{-1}\right)$, $n\to\infty$, бунда $\alpha>0$, $\{d_n, n\ge 1\}-$мусбат хадли сонли кетма-кетлик бўлиб, $d_n = o(n)$, $n\to\infty$ бўлсин;

(b) $\sigma_n^2 = d_n{}^{-1}\sigma^2 + o\left(d_n{}^{-1}\right)$, $n\to\infty$, бирор $\sigma^2>0$ учун;

(c) $\lambda_n\to\lambda>0$, $b_n^2\to b^2>0$, $n\to\infty$;

(d) $\mathrm{E}\left(\left|\xi_{1,1}^{(n)} - a_n\right|^2 I\left\{ \left|\xi_{1,1}^{(n)} - a_n\right| > \theta\sqrt{d_n a_n^{[nt]}} \right\} \right) = o\left(\sigma_n^{-2}\right)$, $n\to\infty$ барча $t\in\mathbb{R}$ ва $\theta>0$;

(e) $\mathrm{E}\left(\left|\varepsilon_1^{(n)} - \lambda_n\right|^2 I\left\{ \left|\varepsilon_1^{(n)} - \lambda_n\right| > \theta\sqrt{d_n a_n^{[nt]}} \right\} \right) = o\left(n^{-1}\right)$, $n\to\infty$ барча $t\in\mathbb{R}$ ва $\theta>0$.

У ҳолда қуйидаги суст яқинлашиш Скороход $D[0,\infty)$ фазосида ўринли:

$$\frac{1}{\left(d_n a_n^{[nt]}\right)^{1/2}} \sum_{j=1}^{[nt]} M_j^{(n)} \Rightarrow W\left(C(t)\right),\ n\to\infty$$

бу ерда $C(t) = \dfrac{\lambda}{\alpha^2}\sigma^2$, $\{W(t), t\ge 0\}-$стандарт винер жараёни.

Иккинчи бобнинг учинчи параграфида деярли критик тармоқланувчи жараёнлар флуктуацияси учун марказий лимит теоремада яқинлашиш тезлиги баҳоси олинган.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\gamma_n = \mathrm{E}\xi_{1,1}^{(n)}\left(\xi_{1,1}^{(n)} - 1\right)\left(\xi_{1,1}^{(n)} - 2\right),\ \tau_n = \mathrm{E}\varepsilon_1^{(n)}\left(\varepsilon_1^{(n)} - 1\right)\left(\varepsilon_1^{(n)} - 2\right).$$

$$h_n(s) = \mathrm{E}s^{\varepsilon_1^{(n)}},\ \varphi_n(s) = \mathrm{E}s^{X_n^{(n)}},\qquad |s|\le 1.$$

$$\beta_n^2 = \frac{DX_n^{(n)}}{n} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_n \sigma_n^2 (n-1)}{2} + b_n^2,\ a_n = 1 \\ \dfrac{\lambda_n \sigma_n^2 \left(a_n^{n-1} - 1\right)\left(a_n^n - 1\right)}{n\left(a_n - 1\right)\left(a_n^2 - 1\right)} + \dfrac{b_n^2 \left(a_n^{2n} - 1\right)}{n\left(a_n^2 - 1\right)},\ a_n \neq 1 \end{cases}$$

$$\chi_n = \begin{cases} n\gamma_n + \dfrac{3}{2}\sigma_n^4 (n-1)n + 3n\sigma_n^2 + 1,\ a_n = 1 \\ \dfrac{\gamma_n}{a_n \left|a_n^2 - 1\right|} + \dfrac{3\left(\sigma_n^2 + a_n^2 - a_n\right)^2}{a_n \left|a_n - 1\right| \left|a_n^2 - 1\right|} + \dfrac{3\left|\sigma_n^2 + a_n^2 - a_n\right|}{a_n \left|a_n - 1\right|},\ a_n \neq 1 \end{cases}$$

$$L_n = A_n B_n,$$

бу ерда

$$A_n = \max\left\{(1+\lambda_n)^3,\ b_n^2 + \lambda_n^2, \tau_n\right\}, \quad B_n = A_n \chi_n \max\left\{1, a_n^n\right\}.$$

Белгилаш киритайлик:

$$F_n(x) = \mathrm{P}\left(\left(nb_n^2\right)^{-1/2}\left(X_n^{(n)} - \mathrm{E}X_n^{(n)}\right) < x\right),\ -\infty < x < \infty.$$

4-теорема. Фараз қилайлик, барча $n \in \mathbb{N}$ учун $b_n^2 > 0$ ва $nb_n^2 \to \infty$, $n \to \infty$ бўлиб, $\min\left(\dfrac{\beta_n^2}{b_n^2}, \beta^2\right) > 0$ бўлсин. Бундан ташқари, қуйидаги шартлар бажарилсин:

1. $a_n = 1 + \alpha n^{-1} + o\left(n^{-1}\right)$, $n \to \infty$ бирор $\alpha \in \mathbb{R}$ учун;
2. $\sigma_n^2 = \sigma^2 n^{-1} + o\left(n^{-1}\right)$, $n \to \infty$ бирор $\sigma^2 > 0$ учун;
3. $\lambda_n = \lambda b_n^2 + o\left(b_n^2\right)$, $n \to \infty$ бирор $\lambda > 0$ учун;
4. $\tau = \limsup\limits_{n\to\infty} \tau_n$;
5. $\gamma_n = \gamma n^{-1} + o\left(n^{-1}\right)$, $n \to \infty$ бирор $\gamma > 0$ учун.

У холда

$$\sup_x \left|F_n(x) - \Phi_\beta(x)\right| = O\left(\frac{L_n}{\sqrt{nb_n^2}} + \frac{\left|\dfrac{\beta_n^2}{b_n^2} - \beta^2\right|}{\min\left(\dfrac{\beta_n^2}{b_n^2}, \beta^2\right)}\right).$$

Диссертациянинг **“Ўсувчи ва боғлиқ иммиграцияли тармоқланувчи жараёнларнинг асимптотикаси”** деб номланувчи учинчи боби иммиграция оқими $m-$боғлиқлик ва $\phi-$қоришмалилик шартини қаноатлантирганда ўсувчи иммиграцияли критик ва деярли критик тармоқланувчи жараёнларнинг асимптотикаси ўрганилган. Учинчи бобнинг биринчи параграфида иммиграция оқими $m-$боғлиқ тасодифий миқдорлардан ташкил

топган ўсувчи иммиграцияли докритик ва надкритик тармоқланувчи жараёнлар учун марказий лимит теоремалар исботланган. Бундан ташқари, мос равишда нормаллаштирилган иммиграция оқими $m-$боғлиқ бўлган ўсувчи тармоқланувчи жараёнларнинг ўртача квадратик яқинлашиши исботланган.

4-таъриф. Агар қуйидаги $(\varepsilon_1,...,\varepsilon_k)$ ва $(\varepsilon_{k+m+1},...,)$ тасодифий векторлар барча $k\geq 1$ учун боғлиқсиз бўлса, у холда $\{\varepsilon_n, n\geq 1\}$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги $m-$боғлиқ дейилади (бу ерда $m-$номанфий бутун сон).

Фараз қилайлик, барча $n\in\mathbb{N}$ учун $\alpha(n)=\mathrm{E}\varepsilon_n<\infty$ ва $\beta(n)=D\varepsilon_n<\infty$ бўлиб, $\alpha(n)$ ва $\beta(n)$ лар n бўйича монотон ўсувчи бўлсин яъни $\alpha(n)=n^{\alpha}l_{\alpha}(n), \beta(n)=n^{\beta}l_{\beta}(n)$ кўринишда бўлсин, бунда $\alpha,\beta\geq 0$, $l_{\alpha}(n)$ ва $l_{\beta}(n)$ лар чексизликда суст ўзгарувчи функциялар. Қуйидаги белгилашларни киритамиз: $\gamma=\mathrm{E}\xi_{1,1}(\xi_{1,1}-1)(\xi_{1,1}-2)$, $A(a,n)=\mathrm{E}X_n$, $B^2(a,n)=D(X_n)$.

5-теорема. Айтайлик $a<1$, $\gamma\in(0,\infty)$ бўлиб, $\{\varepsilon_k, k\geq 1\}$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги $m-$боғлиқ бўлсин. Агар $n\to\infty$ да $\alpha(n)\to\infty$ ва $\max\limits_{1\leq k\leq n}\beta(k)=o(A(a,n))$ бўлса, у ҳолда, ихтиёрий $x\in\mathbb{R}$ учун

$$\mathrm{P}\left(\frac{X_n-A(a,n)}{B(a,n)}<x\right)\to\Phi(x),\ n\to\infty.$$

6-теорема. Айтайлик $a>1$, $\gamma\in(0,\infty)$ бўлиб, $\{\varepsilon_k, k\geq 1\}$ кетма-кетлик $m-$боғлиқ бўлсин. Агар $n\to\infty$ да $\chi(a,n)=\sum\limits_{k=1}^{n}a^{-2k}\alpha(k)\to\infty$ ва $\beta(n)=o(\chi(a,n))$ бўлса, у ҳолда ихтиёрий $x\in\mathbb{R}$ учун

$$\mathrm{P}\left(\frac{X_n-A(a,n)}{B(a,n)}<x\right)\to\Phi(x),\ \ n\to\infty.$$

7-теорема. Айтайлик $a>1$, $b^2\in(0,\infty)$ бўлсин. Фараз қилайлик, $\{\varepsilon_k, k\geq 1\}$ кетма-кетлик $m-$боғлиқ бўлиб, қуйидаги қаторлар яқинлашувчи бўлсин:

$$\sum_{k=1}^{\infty}a^{-k}\alpha(k)<\infty,\ \ \sum_{k=1}^{\infty}a^{-k}\beta(k)<\infty.$$

У ҳолда шундай тасодифий миқдор V мавжудки, унинг учун

$$V(n):=\frac{X_n}{a^n}\xrightarrow{L^2}V,\ n\to\infty,$$

ўринли, бунда $DV<\infty$.

Учинчи бобнинг иккинчи параграфида иммиграция оқими $\phi-$қоришмалилик шартини қаноатлантирганда ўсувчи иммиграцияли критик тармоқланувчи жараёнларнинг детерминистик функцияга $D[0,\infty)$ фазода яқинлашиши исботланган. Бундан ташқари, иммиграция оқими $\phi-$қоришмалилик шартини бажарганда ўсувчи иммиграцияли критик тармоқланувчи жараёнларнинг флуктуацияси учун фунционал лимит теорема исботланган.

Битта эхтимоллик фазосида аниқланган F ва Q $\sigma-$алгебралар берилган бўлиб, ушбу муносабатни аниқлаймиз:

$$\phi(F,Q)=\sup_{A\in F,B\in Q}\left|P(B|A)-P(B)\right|.$$

Ξ_a^b орқали $\varepsilon_i, a\le i\le b$ тасодифий миқдорлардан ташкил топган $\sigma-$алгебрани белгилаймиз. Қоришмалилик коэффициентини аниқлаймиз:

$$\phi(n)=\sup_{1\le k<\infty}\phi\left(\Xi_1^k,\Xi_{k+n}^{\infty}\right).$$

5-таъриф. Агар $n\to\infty$ да $\phi(n)\to 0$ бўлса, у холда $\{\varepsilon_n, n\ge 1\}$ тасодифий микдорлар кетма-кетлиги $\phi-$қоришмалилик шартини қаноатлантирганда дейилади.

Фараз қилайлик, $a=1$, $\sigma^2=D\xi_{1,1}<\infty$, $\alpha(n)=\mathrm{E}\varepsilon_n<\infty$, $\beta(n)=D(\varepsilon_n)<\infty$, бўлиб, $\alpha(n)=n^{\alpha}\ell_{\alpha}(n), \beta(n)=n^{\beta}\ell_{\beta}(n)$ кўринишида бўлсин, бу ерда $\alpha,\beta\ge 0$, $\ell_{\alpha}(x)$, $\ell_{\beta}(x)$ - чексизликда суст ўзгарувчи функциялар. Белгилашлар киритамиз: $A(n)=\mathrm{E}X_n$ ва $B^2(n)=D(X_n)$. Содда хисоблар шуни кўрсатадики,

$$A(n)=\sum_{k=1}^{n}\alpha(k),\quad B^2(n)=\Delta^2(n)+\sigma^2(n)+2\omega(n),$$

бунда

$$\Delta^2(n)=\sigma^2\sum_{k=1}^{n-1}A(k),\quad \sigma^2(n)=\sum_{k=1}^{n}\beta(k),\quad \omega(n)=\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=1}^{k-1}\mathrm{cov}(\varepsilon_i,\varepsilon_k).$$

Қуйидаги теорема ўринли.

8-теорема. Қуйидаги шартлар бажарилсин:

А. Иммиграция оқими $\{\varepsilon_n, n\ge 1\}$ $\phi-$қоришмалилик шартини қаноатлантирсин ва $\sum_{n=1}^{\infty}\phi^{1/2}(n)<\infty$ бўлсин;

В. $\alpha(n)\to\infty$, $\beta(n)=o\left(n\alpha^2(n)\right)$, $n\to\infty$.

У ҳолда ихтиёрий $T>0$ учун $\left\{\dfrac{X_n(t)}{n^{1+\alpha}\ell_{\alpha}(n)}, t\in[0,T]\right\}$ тасодифий жараён $\{\mu(t), t\in[0,T]\}$ жараёнга $D[0,T]$ фазода суст яқинлашади, бунда $\mu(t)=\dfrac{t^{1+\alpha}}{1+\alpha}$, $t\in[0,T]$.

9-теорема. Фараз қилайлик, 8-теореманинг А шарти бажарилиб, $\alpha(n)\to\infty$, $\beta(n)=o\left(\alpha(n)\right)$, $n\to\infty$ булсин. У ҳолда $D[0,\infty)$ фазода қуйидаги суст яқинлашиш

$$\frac{X_n(t)-A([nt])}{B(n)} \Rightarrow W\left(t^{\alpha+2}\right),\ n\to\infty$$

ўринли, бу ерда $\{W(t), t\ge 0\}-$ стандарт винер жараёни.

Учинчи бобнинг учинчи параграфида иммиграция оқими $\phi-$қоришмалилик шартини бажарувчи деярли критик тармоқланувчи жараёнларнинг $D[0,\infty)$ фазода детерминистик жараёнга яқинлашиши исботланган.

$\mathcal{F}_a^b(n)$ оркали $\varepsilon_i^{(n)}, a\le i\le b$ тасодифий микдорлардан ташкил топган $\sigma-$алгебрани белгилаймиз. Қуйидаги қоришмалилик коэффициентини аниқлаймиз:

$$\phi_n(k)\equiv \max_{1\le s\le n}\ \sup_{\substack{A\in\mathcal{F}_1^s(n),P(A)>0\\ B\in\mathcal{F}_{s+k}^{\infty}(n)}} \left|\mathrm{P}(B|A)-\mathrm{P}(B)\right|, k=1,2,\dots,$$

$$\phi^*(k)=\sup_n \phi_n(k).$$

5-таъриф. Агар $\phi^*(k)\to 0,\ k\to\infty$ бўлса, у холда сериялар схемасида берилган $\varepsilon_i^{(n)}, a\le i\le b$ тасодифий миқдорлар оиласи $\phi-$қоришмалилик шартини қаноатлантиради дейилади.

10-теорема. Фараз қилайлик, иммиграция оқими $\left\{\varepsilon_i^{(n)}, i\in\mathbb{N}\right\}$ $\phi-$қоришмалилик шартини қаноатлантирсин, бунда $\sum_{n=1}^{\infty}\phi^{*1/2}(n)<\infty$ ва (3) шарт бажарилсин. Бундан ташкари, қуйидаги шартлар бажарилсин:

(A) $a_n=1+an^{-1}+o\left(n^{-1}\right),\ n\to\infty$ бирор $a\in\mathbb{R}$ учун;

(B) шундай $\{\alpha_n, n\in\mathbb{N}\}\in R_\alpha,\ \alpha\ge 0$ ва $\{\beta_n, n\in\mathbb{N}\}\in R_\beta,\ \beta\ge 0$ регуляр ўзгарувчи функциялар кетма-кетлиги мавжуд бўлиб, барча $t\ge 0$ учун

$$\max_{1\le i\le nt}\left|\lambda_{ni}-\alpha_i\right|=o(\alpha_n),\ n\to\infty;$$

$$\max_{1\le i\le nt}\left|b_{ni}^2-\beta_i\right|=o(\beta_n),\ n\to\infty;$$

(C) $\alpha_n\to\infty,\ \beta_n=o\left(n\alpha_n^2\right),\ n\to\infty;$

(D) $\sigma_n^2=o(\alpha_n),\ n\to\infty.$

У ҳолда қуйидаги суст яқинлашиш

$$\frac{X_n(t)}{n\alpha_n}\Rightarrow\eta(t),\ n\to\infty$$

$D[0,\infty)$ фазода ўринли, бунда $\eta(t)=\int_0^t u^{\alpha}e^{a(t-u)}du$, $t\geq 0$.

Учинчи бобнинг тўртинчи параграфида иммиграция оқими $\phi-$қоришмалилик шартини бажарувчи деярли критик тармоқланувчи жараёнлар учун марказий лимит теорема исботланган.

11-теорема. Фараз қилайлик, иммиграция оқими $\left\{\varepsilon_i^{(n)}, i\in\mathbb{N}\right\}$ $\phi-$қоришмалилик шартини бажарсин, бунда $\sum_{n=1}^{\infty}\phi^{*1/2}(n)<\infty$ бўлиб, (3) шарт хам ўринли бўлсин. Қуйидаги шартлар бажарилсин:

(A) $a_n=1+an^{-1}+o\left(n^{-1}\right)$, $n\to\infty$ бирор $a\in\mathbb{R}$ учун;

(B) шундай $\{\alpha_n, n\in\mathbb{N}\}\in R_{\alpha}$, $\alpha\geq 0$ ва $\{\beta_n, n\in\mathbb{N}\}\in R_{\beta}$, $\beta\geq 0$, регуляр ўзгарувчи функциялар кетма-кетлиги мавжуд бўлиб, барча $t\geq 0$ учун

$$\max_{1\leq i\leq nt}\left|\lambda_{ni}-\alpha_i\right|=o(\alpha_n),\ n\to\infty;$$

$$\max_{1\leq i\leq nt}\left|b_{ni}^2-\beta_i\right|=o(\beta_n),\ n\to\infty;$$

(C) $\alpha_n\to\infty$, $\beta_n=o\left(n\alpha_n\sigma_n^2\right)$, $n\to\infty$;

(D) $\sigma_n^2=o(\alpha_n)$, $n\to\infty$;

(F) $\frac{1}{n^2\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{n}\left|\tau_{n,n-k}\left(\frac{z}{B_{nn}}\right)\right|\to 0$, $n\to\infty$.

У холда барча $x\in\mathbb{R}$ учун

$$\mathrm{P}\left(\frac{X_n^{(n)}-A_{nn}}{B_{nn}}<x\right)\to\Phi_{\gamma}(x),\quad n\to\infty,$$

бу ерда $\gamma=\frac{1}{a}\int_0^1 u^{\alpha}e^{a(1-u)}\left(e^{a(1-u)}-1\right)du$.

ХУЛОСА

Диссертация иши иммиграция оқими ўзаро боғлиқ бўлган тармоқланувчи жараёнларнинг асимптотик холатини тадқиқ этишга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Иммиграция оқими кенг маънода стационарлик шартида деярли критик тармоқланувчи жараёнлар учун функционал лимит теорема исботланган ва бу жараённинг флуктуациясининг характеристик функцияси учун асимптотик ифода топилган.
2. Деярли критик тармоқланувчи жараёнлар флуктуацияси учун марказий лимит теоремада яқинлашиш тезлиги баҳоси олинган.
3. Иммиграция оқими m-боғлиқлик шартида ўсувчи иммиграцияли докритик ва надкритик тармоқланувчи жараёнлар учун марказий лимит теоремалар исботланган. Иммиграция оқими m-боғлиқлик шартида ўсувчи надкритик тармоқланувчи жараёнларнинг мос нормировкада ўрта квадратик маънода яқинлашиши исботланган.
4. Иммиграция оқими $\phi-$қоришмалилик шартида ўсувчи иммиграцияли критик тармоқланувчи жараёнларнинг детерминистик жараёнга суст яқинлашиши ва бу жараёнларнинг флуктуацияси учун функционал лимит теоерма исботланган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ШАРИПОВ САЪДИЛЛО ОЛИМЖОНОВИЧ

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СТОХАСТИЧЕСКИХ РЕКУРРЕНТНЫХ ПРОЦЕССОВ

01.01.05 –Теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (PhD) по
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент–2021

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2019.1.PhD/FM313.

Диссертация выполнена в Институте Математики имени В.И.Романовкого.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу http://www.ziyonet.uz.

Научный руководитель:	**Хусанбаев Якубджан Мухамаджанович** доктор физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	**Форманов Шакир Косимович** доктор физико-математических наук, академик
	Ходжибаев Вали Рахимджанович доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	**Ташкентский государственный транспортный университет**

Защита диссертации состоится «22» Октября 2021 года в 16:00 на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № 121). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 46.Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан « 9 » Октября 2021 года.
(протокол рассылки № 2 от « 9 » Октября 2021 года).

У.А.Розиков
Заместитель председателя Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

Ж.К.Адашев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник

Ш.К.Форманов
Председатель Научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научно-практические исследования по медицине, химии, биологии, проводимые в мировом масштабе, в большинстве случаев сводятся к задачам изучения ветвящихся случайных процессов с иммиграцией. Теория ветвящихся случайных процессов с иммиграцией исследует законы эволюции популяции частиц, в котором, кроме размножающихся частиц, согласно какому – то случайному механизму в системе возникают новые частицы, которые эволюционируют как частицы основного процесса. Ветвящиеся процессы с иммиграцией имеют важное значение в различных областях, таких как демография, медицина, химия, биология, а также генетическое кодирование и управление популяцией. Поэтому изучение ветвящихся случайных процессов с иммиграцией является одной из актуальных и важных задач современной теории вероятностей.

В настоящее время исследование асимптотики ветвящихся процессов с иммиграцией, в которых поток иммиграции состоит из зависимых случайных величин, является одним из актуальных задач современной теории ветвящихся случайных процессов. Доказаны функциональные предельные теоремы для критических ветвящихся процессов с иммиграцией. Проблема нахождения асимптотики ветвящихся процессов с зависимой иммиграции полностью не решена. В связи с этим, целевом научном исследовании основными являются следующие направления: нахождение предельных распределений для флуктуаций ветвящихся случайных процессов с иммиграцией, в которых поток иммиграции состоит из растущих и зависимых случайных величин; изучение асимптотики почти критических ветвящихся процессов с иммиграцией в случае, когда поток иммиграции состоит из стационарных процессов, получение оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме для ветвящихся процессов с иммиграцией нахождение условий выполнения центральной предельной теоремы для флуктуации ветвящихся процессов с растущей и зависимой иммиграцией.

В годы независимости в нашей стране особое внимание уделяется фундаментальным наукам, имеющим прикладное применение, таким как теория вероятностей и математическая статистика, в частности, асимптотическому анализу ветвящихся процессов с зависимой иммиграцией. Вследствие этого актуальным становится достигнуть значимых результатов в исследовании асимптотики ветвящихся процессов с зависимой иммиграцией. Было постановлено, что проведение научных исследований по главным направлениям «Теории вероятностей и математической статистики» на уровне международных стандартов является основной задачей и активным направлением[1]. Исследования по асимптотическому анализу ветвящихся

[2] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистана от 18 мая 2017 года № 292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан».

случайных процессов с иммиграцией играют важную роль в исполнении постановления.

Исследования данной диссертации в определенной степени служит решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан №УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в постановлениях №ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан» и №ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», и в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования с приоритетными направлениями развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствие с приоритетным направлением развития науки и технологий IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Первые результаты по асимптотическому анализу ветвящихся процессов с независимим потоком иммиграции были получены в работах Б.Севастьянова, С.Хиткота, Е.Сенеты, А.Пейкса, Г.Чистьякова, Дж.Фостера, Дж.Фостера и Дж.Виллиамсона, А.Зубкова, В.Ватутина, И.Бадалбаева, И.Рахимова, К.Митова. В случае, когда иммиграция состоит из независимых случайных величин, функциональные предельные теоремы как для критических, так и почти критических ветвящихся процессов с иммиграцией доказаны в работах С.Вэи и Дж.Винники, Т.Срирама, Х.Ли, Г.Папа, М.Испани и М.Зужлена, М.Испани, И.Рахимова, Я.Хусанбаева. Предельные теоремы для ветвящихся процессов с зависимой иммиграцией доказаны в работах С.Нагаева, М.Асадуллина и С.Нагаева, А.Зубкова и И.Бадалбаева.

Переход к необязательно одинаково распределенному потоку иммиграции привел к новым постановкам задач и к существенному расширению спектра предельных теорем. Впервые, Дж.Фостер и Дж.Виллиамсон и А.Пейкс изучали случай, когда поток иммиграции состоит из разно-распределенных случайных величин. Постановка задачи изучения ветвящихся процессов с неоднородной (разнораспределенной) и растущей иммиграцией принадлежит И.Бадалбаеву и И.Рахимову. В этом плане весьма содержательными оказались исследования, начатые в работах И.Бадалбаева, И. Рахимова и продолженные И. Рахимовым где впервые были исследованы ветвящиеся процессы с растущей иммиграцией. Наиболее общие результаты получены в работах И.Рахимова. Х.Гуо и М.Занг доказали функциональную предельную теорему для флуктуаций критических ветвящихся процессов с иммиграцией.

В основном работы по предельным теоремам для ветвящихся процессов с иммиграцией посвящено случаю, когда иммиграция состоит из

независимых одинаково распределенных или независимых разнораспределенных случайных величин. Значительный интерес представляет исследование асимптотики ветвящихся процессов с зависимой иммиграцией. Асимптотическое поведение ветвящихся процессов с иммиграцией, когда иммиграция состоит из зависимых величин, исследованы сравнительно мало. В связи с этим исследования по этому направлению являются актуальными.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждения высшего образования, где выполнялась диссертация. Диссертация работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательской работы ОТ-Ф4-83 «Предельные теоремы для вероятностных распределений и статистический анализ функциональных данных» Института Математики АН Узбекистана (2017-2020).

Целью исследования является нахождение предельного распределения ветвящихся случайных процессов с иммиграцией, когда поток иммиграции состоит из зависимых величин.

Задачи исследования:

Нахождение условий справедливости функциональных предельных теорем для критических ветвящихся случайных процессов с растущей и зависимой иммиграцией;

исследование скорости роста и асимптотики почти критических ветвящихся случайных процессов с иммиграцией, когда иммиграция образует стационарный процесс в широком смысле;

оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме для флуктуаций почти критических ветвящихся процессов с иммиграцией.

исследование условия асимптотической нормальности докритических и надкритических ветвящихся случайных процессов с растущей и зависимой иммиграцией.

Объект исследования - ветвящиеся случайные процессы с иммиграцией, почти критические ветвящиеся процессы с иммиграцией.

Предмет исследования - асимптотическое поведение ветвящихся процессов с зависимой иммиграцией, оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме для ветвящихся процессов с иммиграцией.

Методы исследования. В диссертации использованы вероятностные и аналитические методы такие, как метод характеристических функций, мартингальный метод.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

доказаны функциональные предельные теоремы для критических ветвящихся процессов с растущей и зависимой иммиграцией;

найдена скорость роста и асимптотика почти критических ветвящихся случайных процессов с иммиграцией, когда иммиграция образует стационарный процесс в широком смысле;

получена оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме для флуктуаций почти критических ветвящихся процессов с иммиграцией;

доказана асимптотическая нормальность докритических и надкритических ветвящихся случайных процессов с растущей и зависимой иммиграцией.

Практические результаты исследования заключаются в предложении выразить математические модели распространения определенной популяции через ветвящиеся процессы с зависимой иммиграцией и описании методов установления предельных распределений этих случайных процессов.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений и доказательств, использованием методов теории вероятностей, методов теории случайных процессов и методов теории правильно меняющихся функций.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научное значение результатов исследования заключается в том, что полученные в работе научные результаты могут быть использованы при дальнейших исследованиях асимптотических свойств ветвящихся процессов с иммиграцией, а также могут быть использованы при изучении статистических оценок числовых параметров процесса, что составляет практическую значимость полученных результатов.

Кроме того, полученные научные результаты могут быть применены при изучении различных прикладных процессов естествознания (физические, химические, демографические и т.д.), для которых математической моделью служит ветвящиеся процессы с иммиграцией.

Внедрение результатов исследования. Результаты, связанные с предельными теоремами для ветвящихся процессов с зависимой иммиграцией были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

результаты об функциональных предельных теорем для ветвящихся процессов с иммиграцией были использованы при прогнозировании биологических и химических процессов в практическом проекте ФА-Атех-2018-4 «Разработка виртуальных методов молекулярной оптимизации при разработке новых лекарств: углубление машинного обучения. и понимание прогнозных моделей биологических процессов» (Справка Академии наук Республики Узбекистан № 2/1255-902 от 26 марта 2021 г.). Применение научного результата позволило моделировать ситуации, возникающие в молекулярной генетике;

асимптотическое разложение для характеристической функции ветвящегося процесса с зависимой иммиграцией было использовано для описания асимптотических свойств ветвящихся процессов в фундаментальном научном проекте № ОТ-Ф-4-03 «Непрерывные и дискретные точные динамические системы, спектры частных интегральных операторов» (Справка Каршинского государственного университета №

04/2809 от 23 августа 2021 г.). Применение научного результата позволило описать предельное распределение динамических систем с дискретным временем.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на 6 международных и 5 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 19 научных работ, из них 8 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей Аттестационной Комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора философии, в том числе 3 опубликована в зарубежных журналах и 5 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 110 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной «**Ветвящиеся процессы с иммиграцией»** определяются ветвящиеся процессы с иммиграцией и приведены некоторые их свойства. Далее приводятся классические результаты по предельным теоремам для ветвящихся процессов с иммиграцией (ВПИ). В первом параграфе первой главы даётся определение ВПИ и приведены числовые характеристики, производящая функция ВПИ, а также некоторые ее свойства. Далее приводится классические результаты по предельным теоремам для ВПИ. Во втором параграфе первой главы приведены некоторые функциональные предельные теоремы для флуктуации как критических, так и почти критических ветвящихся процессов с иммиграцией. В третьем параграфе первой главы приведены известные результаты по предельным теоремам для ветвящихся процессов с зависимой иммиграцией. В четвертом параграфе первой главы приведены некоторые предельные теоремы для ветвящихся процессов с растущей иммиграцией.

Пусть $\left\{\xi_{n,j}, n, j \geq 1\right\}$ и $\left\{\varepsilon_n, n \geq 1\right\}$-две независимые совокупности независимых и одинаково распределенных случайных величин, принимающих неотрицательные целые значения.

Определение 1. Ветвящимся процессом с иммиграцией называется случайный процесс $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ определенный следующим рекуррентным соотношением:

$$X_0 = 0, \quad X_n = \sum_{j=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,j} + \varepsilon_n, \; n \geq 1. \tag{1}$$

Обычно величину X_n интерпретируют как общее число частиц в $n-$ом поколении некоторой популяции, причем считается, что величина $\xi_{n,j}$ представляет собой число потомков $j-$той частицы $(n-1)-$го поколения популяции частиц, а величина ε_n число иммигрантов, поступивших извне в популяцию в $n-$ом поколении.

Пусть $a = \mathrm{E}\xi_{1,1} < \infty$. Процесс (1) называется докритическим, критическим, надкритическим, если $a<1$, $a=1$, $a>1$, соответственно.

Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$, $\left\{\xi_{k,j}^{(n)}, n, j \in \mathbb{N}\right\}$ и $\left\{\varepsilon_k^{(n)}, n, k \in \mathbb{N}\right\}$-две независимые совокупности независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих неотрицательные целые значения.

Определение 2. Ветвящимся процессом с иммиграцией заданной в схеме серий называется процесс $X_k^{(n)}, k \geq 0, n \in \mathbb{N}$ определенный следующим рекуррентным соотношением

$$X_0^{(n)} = 0, \; X_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{X_{k-1}^{(n)}} \xi_{k,j}^{(n)} + \varepsilon_k^{(n)}, \quad n, k \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Предположим, что для всех $n \in \mathbb{N}$ величины

$$a_n = \mathrm{E}\xi_{1,1}^{(n)}, \; \sigma_n^2 = D\xi_{1,1}^{(n)}, \; \lambda_n = \mathrm{E}\varepsilon_1^{(n)}, \; b_n^2 = D\varepsilon_1^{(n)}$$

конечны.

Определение 3. Если $a_n \to 1$ при $n \to \infty$, то процесс вида (2) называется почти критическим.

Вторая глава диссертации, названная **«Асимптотика ветвящихся процессов с зависимой иммиграцией»**, посвящена асимптотическому анализу ветвящихся процессов с иммиграцией и почти критических ветвящихся процессов с иммиграцией, а также получению оценки скорости сходимости в одной предельной теореме для ветвящихся процессов с иммиграцией с независимым потоком иммиграции. В первом параграфе второй главы рассмотрен случай, когда поток иммиграции состоит из стационарных в широком смысле случайных величин. Найдена скорость роста почти критических ветвящихся процессов с иммиграцией в случае, когда среднее число иммигрирующих в популяцию частиц неограниченно растет с ростом номера поколении. Кроме этого, в этом параграфе найдено

асимптотическое представление для флуктуации почти критических ветвящихся процессов с иммиграцией в случае, когда дисперсия σ_n^2 стремится к нулю. Полученное представление дает возможность получить достаточные условия, при которых флуктуация ветвящихся процессов с иммиграцией подчиняется центральной предельной теореме.

Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ последовательность $\left\{\varepsilon_k^{(n)}, k \in \mathbb{N}\right\}$ является стационарным в широком смысле процессом, причем предположим, что частицы, поступившие в популяцию, развиваются независимо от остальных частиц и по тому же закону, как частицы популяции.

Обозначим через $Z_{n,i}^j(k), k = i, i+1, \ldots$ – ветвящийся процесс, порожденный j – той из поступивших в момент i частиц в n – ой серии. Из сделанных предположений следует, что ветвящиеся процессы $\left\{Z_{n,i}^j(k), k = i, i+1, \ldots\right\}$, $j, i \geq 1$ независимы для любого $n \in \mathbb{N}$ и, более того, распределение величин $Z_{n,i}^j(k+i), k = 0,1,\ldots$ совпадает с распределением $Z_{n,1}^1(k), k = 1,2,\ldots$

Положим

$$\rho_n(k) = \operatorname{cov}\left(\varepsilon_1^{(n)}, \varepsilon_{k+1}^{(n)}\right), \quad f_{n,k}(s) = \mathrm{E} e^{isZ_{n,1}^1(k)}$$

Пусть характеристическая функция $f_{n,k}(s)$ имеет вид

$$f_{n,k}(s) = 1 + is\mathrm{E}Z_{n,1}^1(k) - \frac{s^2}{2}\mathrm{E}\left[Z_{n,1}^1(k)\right]^2 + \frac{s^2}{2}\tau_{n,k}(s), \quad k, n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

где $\tau_{n,k}(s)$ – остаточный член, для которого $\left|\tau_{n,k}(s)\right| \leq 3\mathrm{E}\left[Z_{n,1}^1(k)\right]^2$ и $\tau_{n,k}(s) \to 0$ при $s \to 0$.

Определим случайный ступенчатый процесс $X_n(t), t \geq 0$, положив $X_n(t) = X_{[nt]}^{(n)}$, $t \geq 0$, где знак $[x]$ означает целую часть числа x. $T > 0$ – произвольное число, $\gamma \geq 1$ – некоторое фиксированное число.

Теорема 1. Пусть выполняются следующие условия:

1) $a_n = 1 + \alpha d_n^{-1} + o\left(d_n^{-1}\right)$ при $n \to \infty$ для некоторого фиксированного $\alpha \in \mathbb{R}$, где $\{d_n, n \geq 1\}$ – последовательность положительных чисел такая, что $\beta_n := \dfrac{n}{d_n} \to \beta < \infty$, $n \to \infty$;

2) $\sigma_n^2 \to \sigma^2 \geq 0$ при $n \to \infty$;

3) $n^{1-\gamma}\lambda_n \to \lambda$, $n^{1-2\gamma}b_n^2 \to 0$ при $n \to \infty$;

4) $\dfrac{1}{n^{2\gamma-1}}\sum\limits_{k=1}^{n}\left|\rho_n(k)\right| \to 0$ при $n \to \infty$.

Тогда имеет место слабая сходимость

$$\frac{X_n(t)}{n^{\gamma}} \Rightarrow \mu(t),\ n\to\infty \text{ в пространстве Скорохода } D[0,T],$$

где $\mu(t)=\lambda t$ если $\alpha=0$ или $\beta=0$; $\mu(t)=(\alpha\beta)^{-1}\lambda\left(e^{\alpha\beta t}-1\right)$ если $\alpha\neq 0,\beta\neq 0$.

Следующая теорема дает представление об асимптотике флуктуации $X_k^{(n)}$ в случае, когда $\sigma_n^2\to 0$ при $n\to\infty$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1), 3), 4) теоремы 1. Кроме того, предположим, что выполнены следующие условия:

5) $d_n\sigma_n^2\to\sigma^2\geq 0$;

6) $\frac{1}{n^{\gamma}}\sum_{k=1}^{n}\left|\tau_{n,k}\left(\frac{s}{n^{\gamma/2}}\right)\right|\to 0$ при $n\to\infty$ для любого $s>0$.

Тогда имеет место

$$\mathrm{E}e^{is\frac{X_k^{(n)}-\mathrm{E}X_k^{(n)}}{n^{\gamma/2}}}-e^{-\frac{s^2}{2}\frac{\lambda\sigma^2\left(e^{\alpha\beta}-1\right)^2}{2\alpha^2\beta}}\mathrm{E}e^{is\frac{1}{n^{\gamma/2}}\sum_{k=1}^{n}a_n^{n-k}\left(\varepsilon_k^{(n)}-\lambda_n\right)}\xrightarrow{P}0,\ n\to\infty.$$

Во втором параграфе второй главы установлена функциональная предельная теорема для почти критических ветвящихся процессов с иммиграцией в предположении, что поток иммиграции в каждой серии состоит из независимых и одинаково распределенных случайных величин.

Пусть для каждого $n\in\mathbb{N}$ $\Im_k^{(n)}-\sigma-$алгебра, порожденная случайными величинами $X_0^{(n)},X_1^{(n)},...,X_k^{(n)}$. Нетрудно видеть, что последовательность $\left\{M_k^{(n)},k\geq 1\right\}$, определенная соотношением

$$M_k^{(n)}=X_k^{(n)}-\mathrm{E}\left(X_{k-1}^{(n)}\middle|\Im_{k-1}^{(n)}\right)=X_k^{(n)}-a_nX_{k-1}^{(n)}-\lambda_n,\ n\geq 1$$

образует мартингал – разность относительно $\sigma-$алгебры $\Im_k^{(n)}$.

Теорема 3. Пусть выполняются следующие условия:

(a) $a_n=1+\alpha d_n^{-1}+o\left(d_n^{-1}\right)$, $n\to\infty$ для некоторого $\alpha>0$, где $\{d_n,n\geq 1\}-$последовательность положительных чисел такая, что $d_n=o(n)$ при $n\to\infty$.

(b) $\sigma_n^2=d_n{}^{-1}\sigma^2+o\left(d_n{}^{-1}\right)$ при $n\to\infty$ для некоторого $\sigma^2>0$.

(c) $\lambda_n\to\lambda>0$, $b_n^2\to b^2>0$ при $n\to\infty$.

(d) $\mathrm{E}\left(\left|\xi_{1,1}^{(n)}-a_n\right|^2 I\left\{\left|\xi_{1,1}^{(n)}-a_n\right|>\theta\sqrt{d_na_n^{[nt]}}\right\}\right)=o\left(\sigma_n^{-2}\right)$ при $n\to\infty$ для всех $t\in\mathbb{R}$ и $\theta>0$.

(e) $\mathrm{E}\left(\left|\varepsilon_1^{(n)}-\lambda_n\right|^2 I\left\{\left|\varepsilon_1^{(n)}-\lambda_n\right|>\theta\sqrt{d_n a_n^{[nt]}}\right\}\right)=o\left(n^{-1}\right)$ при $n\to\infty$ для всех $t\in\mathbb{R}$ и $\theta>0$.

Тогда

$$\frac{1}{\left(d_n a_n^{[nt]}\right)^{1/2}}\sum_{j=1}^{[nt]}M_j^{(n)}\Rightarrow W\left(C(t)\right),\ n\to\infty$$

в пространстве $D[0,\infty)$, где $C(t)=\dfrac{\lambda}{\alpha^2}\sigma^2$, $\{W(t),t\ge 0\}$ – стандартный винеровский процесс.

В третьей параграфе второй главы установлена оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме для флуктуации ветвящихся процессов с иммиграцией в случае, когда среднее число потомков одной частицы близко к единице, и дисперсия близка к нулю, а среднее число и дисперсия числа иммигрантов асимптотически одинаковы.

Положим

$$\gamma_n=\mathrm{E}\xi_{1,1}^{(n)}\left(\xi_{1,1}^{(n)}-1\right)\left(\xi_{1,1}^{(n)}-2\right),\ \tau_n=\mathrm{E}\varepsilon_1^{(n)}\left(\varepsilon_1^{(n)}-1\right)\left(\varepsilon_1^{(n)}-2\right).$$

$$h_n(s)=\mathrm{E}s^{\varepsilon_1^{(n)}},\ \varphi_n(s)=\mathrm{E}s^{X_n^{(n)}},\qquad |s|\le 1.$$

$$\beta_n^2=\frac{DX_n^{(n)}}{n}=\begin{cases}\dfrac{\lambda_n\sigma_n^2(n-1)}{2}+b_n^2,\ a_n=1\\ \dfrac{\lambda_n\sigma_n^2\left(a_n^{n-1}-1\right)\left(a_n^n-1\right)}{n\left(a_n-1\right)\left(a_n^2-1\right)}+\dfrac{b_n^2\left(a_n^{2n}-1\right)}{n\left(a_n^2-1\right)},\ a_n\ne 1\end{cases}$$

$$\chi_n=\begin{cases}n\gamma_n+\dfrac{3}{2}\sigma_n^4(n-1)n+3n\sigma_n^2+1,\ a_n=1\\ \dfrac{\gamma_n}{a_n\left|a_n^2-1\right|}+\dfrac{3\left(\sigma_n^2+a_n^2-a_n\right)^2}{a_n\left|a_n-1\right|\left|a_n^2-1\right|}+\dfrac{3\left|\sigma_n^2+a_n^2-a_n\right|}{a_n\left|a_n-1\right|},\ a_n\ne 1\end{cases}$$

$$L_n=A_nB_n,$$

где

$$A_n=\max\left\{(1+\lambda_n)^3,\ b_n^2+\lambda_n^2,\tau_n\right\},\qquad B_n=A_n\chi_n\max\left\{1,a_n^n\right\}.$$

Обозначим

$$F_n(x)=\mathrm{P}\left(\left(nb_n^2\right)^{-1/2}\left(X_n-\mathrm{E}(X_n)\right)<x\right).$$

Теорема 4. Предположим что $b_n^2>0$, $n\in\mathbb{N}$ и $nb_n^2\to\infty$ при $n\to\infty$. Пусть $\min\left(\dfrac{\beta_n^2}{b_n^2},\beta^2\right)>0$ и выполнены следующие условия:

1. $a_n=1+\alpha n^{-1}+o\left(n^{-1}\right)$ при $n\to\infty$ для некоторого $\alpha\in\mathbb{R}$;

2. $\sigma_n^2 = \sigma^2 n^{-1} + o\left(n^{-1}\right)$ при $n \to \infty$ для некоторого $\sigma^2 > 0$;

3. $\lambda_n = \lambda b_n^2 + o\left(b_n^2\right)$ при $n \to \infty$ для некоторого $\lambda > 0$;

4. $\tau = \limsup_{n\to\infty} \tau_n$;

5. $\gamma_n = \gamma n^{-1} + o\left(n^{-1}\right)$ при $n \to \infty$ для некоторого $\gamma > 0$.

Тогда

$$\sup_x \left|F_n(x) - \Phi_\beta(x)\right| = O\left(\frac{L_n}{\sqrt{nb_n^2}} + \frac{\left|\frac{\beta_n^2}{b_n^2} - \beta^2\right|}{\min\left(\frac{\beta_n^2}{b_n^2}, \beta^2\right)}\right).$$

Третья глава диссертации, названная **«Асимптотика ветвящихся процессов с растущей и зависимой иммиграцией»** посвящена асимптотическому анализу ветвящихся процессов с иммиграцией и почти критических ветвящихся процессов с иммиграцией в случае, когда потоки иммиграции удовлетворяет условию m-зависимости или условию $\phi-$перемешивания. Доказана ЦПТ, сходимость к детерминированному процессу и функциональная центральная предельная теорема. В первом параграфе третьей главы доказана ЦПТ для флуктуации как докритических, так и надкритических ветвящихся процессов с иммиграцией в случае, когда поток иммиграции является растущим и состоит из m-зависимых случайных величин. Также доказана среднеквадратическая сходимость надлежащим образом нормированных ветвящихся процессов с иммиграцией к некоторой случайной величине.

Определение 3. Последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ удовлетворяет условие $m-$зависимости для некоторого целого $m \geq 0$, если случайные векторы $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k)$ и $(\xi_{k+m+1}, ...,)$ независимы при любом $k \geq 1$.

Пусть $\alpha(n) = \mathrm{E}\varepsilon_n < \infty$ и $\beta(n) = D\varepsilon_n < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что величины $\alpha(n)$ и $\beta(n)$ монотонно возрастают по n, причем $\alpha(n) = n^\alpha l_\alpha(n), \beta(n) = n^\beta l_\beta(n)$, где $\alpha, \beta-$некоторые неотрицательные фиксированные числа, $l_\alpha(n)$ и $l_\beta(n)$ - медленно меняющиеся на бесконечности функции. Обозначим $\gamma = \mathrm{E}\xi_{1,1}\left(\xi_{1,1} - 1\right)\left(\xi_{1,1} - 2\right)$, $A(a,n) = \mathrm{E}X_n$, $B^2(a,n) = DX_n$.

Сформулируем теорему об асимптотической нормальности флуктуации докритического ветвящегося процесса с зависимой иммиграцией.

Теорема 5. Пусть $a < 1$, $\gamma \in (0, \infty)$ и последовательность $\{\varepsilon_k, k \geq 1\}$ является $m-$зависимой. Если $\alpha(n) \to \infty$ и $\max_{1 \leq k \leq n} \beta(k) = o\left(A(a,n)\right)$ при $n \to \infty$, то

$$\mathrm{P}\left(\frac{X_n - A(a,n)}{B(a,n)} < x\right) \to \Phi(x), \; n \to \infty.$$

Теорема 6. Пусть $a>1$, $\gamma<\infty$ и последовательность $\{\varepsilon_k, k\geq 1\}$ является $m-$зависимой. Если $\chi(a,n)=\sum_{k=1}^{n} a^{-2k}\alpha(k)\to\infty$ и $\beta(n)=o\big(\chi(a,n)\big)$ при $n\to\infty$, то

$$\mathrm{P}\left(\frac{X_n - A(a,n)}{B(a,n)} < x\right) \to \Phi(x), \quad n\to\infty.$$

Теперь переходим к рассмотрению случая, когда условие $\chi(a,n)\to\infty$, $n\to\infty$ нарушено. Это соответствует «не очень быстрому» стремлению среднего числа иммигрирующих частиц к бесконечности.

Теорема 7. Пусть $a>1$, $b^2\in(0,\infty)$. Предположим, что последовательность $\{\varepsilon_k, k\geq 1\}$ является $m-$зависимой, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^{-k}\alpha(k)<\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a^{-k}\beta(k)<\infty.$$

Тогда существует случайная величина V такая, что

$$V(n) := \frac{X_n}{a^n} \xrightarrow{L^2} V \text{ при } n\to\infty$$

причем $DV<\infty$.

Во втором параграфе третьей главы установлены функциональные предельные теоремы для флуктуации критического ветвящегося процесса с иммиграцией в случае, когда поток иммиграции удовлетворяет условию $\phi-$ перемешивания. Получены достаточные условия для слабой сходимости критических ветвящихся процессов с иммиграцией к детерминированному процессу, что дает информацию о скорости роста процесса, а также установлена функциональная предельная теорема для флуктуации ветвящихся процессов с иммиграцией.

Для любых двух $\sigma-$алгебр F и Q, заданных на одном вероятностном пространстве положим

$$\phi(F,Q) = \sup_{A\in F, B\in Q} \big|P(B|A) - P(B)\big|.$$

Через Ξ_a^b будем обозначать $\sigma-$алгебру, порожденную случайными величинами $\varepsilon_i, a\leq i\leq b$. Положим

$$\phi(n) = \sup_{1\leq k<\infty} \phi\left(\Xi_1^k, \Xi_{k+n}^{\infty}\right).$$

Определение 4. Говорят, что последовательность случайных величин $\{\varepsilon_k, k\in\mathbb{N}\}$ удовлетворяет условию $\phi-$перемешивания, если $\phi(n)\to 0$ при $n\to\infty$.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $a=1$, $\sigma^2 = D\xi_{1,1} < \infty$, $\alpha(n) = \mathrm{E}\varepsilon_n < \infty$, $\beta(n) = D(\varepsilon_n) < \infty$, причем $\alpha(n) = n^{\alpha}\ell_{\alpha}(n), \beta(n) = n^{\beta}\ell_{\beta}(n)$ где $\alpha, \beta \geq 0$ - некоторые фиксированные числа, $\ell_{\alpha}(x)$, $\ell_{\beta}(x)$ - медленно меняющиеся на бесконечности функциии. Положим $A(n) = \mathrm{E}X_n$ и $B^2(n) = D(X_n)$. Нетрудно вычислить, что

$$A(n) = \sum_{k=1}^{n} \alpha(k), \quad B^2(n) = \Delta^2(n) + \sigma^2(n) + 2\omega(n),$$

где

$$\Delta^2(n) = \sigma^2 \sum_{k=1}^{n-1} A(k), \quad \sigma^2(n) = \sum_{k=1}^{n} \beta(k), \quad \omega(n) = \sum_{k=2}^{n} \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_k).$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 8. Пусть выполнены следующие условия:

А. Поток иммиграции $\{\varepsilon_n, n \geq 1\}$ удовлетворяет условию $\phi-$перемешивания, причем $\sum_{n=1}^{\infty} \phi^{1/2}(n) < \infty$;

В. $\alpha(n) \to \infty$, $\beta(n) = o\left(n\alpha^2(n)\right)$ при $n \to \infty$.

Тогда для любого $T > 0$ случайный процесс $\dfrac{X_n(t)}{n^{1+\alpha}\ell_{\alpha}(n)}$, $t \in [0,T]$ слабо сходится к процессу $\mu(t)$, $t \in [0,T]$ в пространстве $D[0,T]$, где $\mu(t) = \dfrac{t^{1+\alpha}}{1+\alpha}$, $t \in [0,T]$.

Теорема 9. Пусть выполняется условие А теоремы 8. Предположим, что $\alpha(n) \to \infty$, $\beta(n) = o\left(\alpha(n)\right)$ при $n \to \infty$. Тогда имеет место слабая сходимость

$$\frac{X_n(t) - A([nt])}{B(n)} \Rightarrow W\left(t^{\alpha+2}\right), \quad n \to \infty$$

в пространстве $D[0,\infty)$, где $\{W(t), t \geq 0\}-$винеровский процесс.

В третьем параграфе третьей главы доказана слабая сходимость распределений почти критических ветвящихся процессов с иммиграцией к детерминированному процессу в пространстве Скорохода $D[0,\infty)$ в случае, когда поток иммиграции удовлетворяют условию $\phi-$перемешивания и их можно аппроксимировать одним и тем же потоком (не зависящим от номера серии), среднее значение и дисперсия которого регулярно меняется. При этом предполагается, что дисперсия числа потомков одной частицы бесконечно мала относительно среднего значения поступающего потока.

Через $\mathcal{F}_a^b(n)$ обозначим $\sigma-$алгебру, порожденную случайными величинами $\varepsilon_i^{(n)}, a \leq i \leq b$. Положим

$$\phi_n(k) \equiv \max_{1\le s\le n} \sup_{\substack{A\in\mathcal{F}_1^s(n),P(A)>0\\ B\in\mathcal{F}_{s+k}^{\infty}(n)}} \left|\mathrm{P}(B|A)-\mathrm{P}(B)\right|, k=1,2,\ldots,$$

$$\phi^*(k)=\sup_n \phi_n(k).$$

Определение 5. Будем говорит, что совокупность случайных величин $\varepsilon_k^{(n)}, k,n\in\mathbb{N}$ подчиняется условию $\phi-$перемешивания, если $\phi^*(k)\to 0$ при $k\to\infty$.

В четвертом параграфе третьей главы доказана центральная предельная теорема для флуктуации почти критических ветвящихся процессов с иммиграцией.

Теорема 10. Пусть последовательность случайных величин $\left\{\varepsilon_i^{(n)}, i\in\mathbb{N}\right\}$ удовлетворяет условию $\phi-$перемешивания, причем $\sum_{n=1}^{\infty}\phi^{*1/2}(n)<\infty$. Предположим, что выполнено условие (3) и выполняются следующие условия:

(A) $a_n=1+an^{-1}+o\left(n^{-1}\right)$ при $n\to\infty$ для некоторого $a\in\mathbb{R}$;

(B) существуют последовательности регулярно меняющихся функций $\{\alpha_n,n\in\mathbb{N}\}\in R_\alpha$, $\alpha\ge 0$ и $\{\beta_n,n\in\mathbb{N}\}\in R_\beta$, $\beta\ge 0$ такие, что для любого $t\ge 0$

$$\max_{1\le i\le nt}\left|\lambda_{ni}-\alpha_i\right|=o(\alpha_n),\ n\to\infty$$
$$\max_{1\le i\le nt}\left|b_{ni}^2-\beta_i\right|=o(\beta_n),\ n\to\infty.$$

(C) $\alpha_n\to\infty$, $\beta_n=o\left(n\alpha_n^2\right)$ при $n\to\infty$.

(D) $\sigma_n^2=o(\alpha_n)$ при $n\to\infty$.

Тогда имеет место слабая сходимость

$$\frac{X_n(t)}{n\alpha_n}\Rightarrow\eta(t) \text{ при } n\to\infty$$

в пространстве Скорохода $D[0,\infty)$, где $\eta(t)=\int_0^t u^\alpha e^{a(t-u)}du$, $t\ge 0$.

Теорема 11. Пусть последовательность случайных величин $\left\{\varepsilon_i^{(n)}, i\in\mathbb{N}\right\}$ удовлетворяет условию $\phi-$перемешивания, причем $\sum_{n=1}^{\infty}\phi^{*1/2}(n)<\infty$. Предположим, что выполнено условие (3) и выполняются следующие условия:

(A) $a_n=1+an^{-1}+o\left(n^{-1}\right)$ при $n\to\infty$ для некоторого $a\in\mathbb{R}$;

(B) существуют последовательности регулярно меняющихся функций $\{\alpha_n, n\in\mathbb{N}\}\in R_\alpha$, $\alpha\geq 0$ и $\{\beta_n, n\in\mathbb{N}\}\in R_\beta$, $\beta\geq 0$ такие, что для любого $t\geq 0$

$$\max_{1\leq i\leq nt}\left|\lambda_{ni}-\alpha_i\right| = o(\alpha_n),\ n\to\infty$$

$$\max_{1\leq i\leq nt}\left|b_{ni}^2-\beta_i\right| = o(\beta_n),\ n\to\infty.$$

(C) $\alpha_n\to\infty$, $\beta_n = o\left(n\alpha_n\sigma_n^2\right)$ при $n\to\infty$.

(D) $\sigma_n^2 = o(\alpha_n)$ при $n\to\infty$.

(F) $\frac{1}{n^2\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{n}\left|\tau_{n,n-k}\left(\frac{z}{B_{nn}}\right)\right|\to 0$ при $n\to\infty$.

Тогда для всех $x\in\mathbb{R}$

$$\mathrm{P}\left(\frac{X_n^{(n)}-A_{nn}}{B_{nn}}<x\right)\to\Phi_\gamma(x) \text{ при } n\to\infty,$$

где $\gamma = \frac{1}{a}\int_0^1 u^\alpha e^{a(1-u)}\left(e^{a(1-u)}-1\right)du$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена исследованию и асимптотическому анализу ветвящихся процессов с зависимой иммиграцией.

В заключение можно сделать следующие выводы по результатам исследований:

1. Доказана функциональная предельная теорема для почти критических ветвящихся процессов с иммиграцией в случае, когда иммиграция состоит из стационарных процессов в широком смысле и найдено асимптотическое представление для флуктуации почти критических ветвящихся процессов с иммиграцией.
2. Установлена оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме для флуктуаций почти критических ветвящихся процессов с иммиграцией.
3. Доказаны функциональные пределные теоремы для критического ветвящегося процесса с иммиграцией в случае, когда иммиграция является растущей и удовлетворяющей условию $\phi-$перемешивания.
4. Доказаны центральные предельные теоремы для флуктуаций докритических и надкритических ветвящихся процессов с иммиграцией в случае, когда иммиграция является растущей и $m-$зависимой.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V.I. ROMANOVSKIY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

SHARIPOV SADILLO OLIMJONOVICH

ASYMPTOTIC ANALYSIS OF STOCHASTIC RECURRENT PROCESSES

01.01.05-Probability theory and mathematical statistics

ABSTRACT OF THESIS OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PHD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent-2021

The theme of thesis of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2019.1.PhD/FM313.

Thesis has been prepared at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy.

The abstract of the thesis is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific supervisor:	**Khusanbaev Yakubdjan Mukhamadjanovich** Doctor of Physical and mathematical Sciences,associate professor
Official opponents:	**Formanov Shakir Kasimovich** Doctor of Physical and mathematical Sciences, academician
	Xodjibaev Vali Rakhimdjanovich Doctor of Physical and mathematical Sciences, Professor
Leading organization:	**Tashkent state transport university**

Defense will take place "22" October 2021 at 16:00 at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy. (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

Thesis is possible to review in Information-resource center at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy (is registered №121). (Address: University str. 4b, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871)-207-91-40).

Abstract of the thesis sent out on «9» October 2021 year
(Mailing report № 2 on «9» October 2021 year)

U.A.Rozikov
Deputy Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., professor

J.K.Adashev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees,
C.F.-M.S., Senior researcher

Sh.K.Formanov
Chairman of Scientific seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., academician

INTRODUCTION (abstract of (PhD) thesis)

The aim of the research work is to find the asymptotic of the distribution of branching random processes with immigration in the case when the immigration flow consists of dependent random variables.

The tasks of the research work.

Finding conditions for the validity of functional limit theorems for critical branching stochastic processes with increasing and dependent immigration;

Investigation of the growth rate and asymptotics of nearly critical branching random processes with immigration, when immigration forms a stationary process in the wide sense;

An estimate for the rate of convergence in the central limit theorem for fluctuations of nearly critical branching processes with immigration.

Investigation of the condition of asymptotic normality of subcritical and supercritical branching random processes with increasing and dependent immigration.

The object of the research work is branching stochastic processes with immigration, nearly critical branching processes with immigration.

The scientific novelty of the research work is as follows:

Functional limit theorems for critical branching processes with increasing and dependent immigration are proved;

The growth rate and asymptotics of nearly critical branching random processes with immigration, when immigration forms a stationary process in the wide sense, are investigated;

An estimate is obtained for the rate of convergence in the central limit theorem for fluctuations of nearly critical branching processes with immigration;

The asymptotic normality of subcritical and supercritical branching random processes with increasing and dependent immigration is proved.

Implementation of the research results. The results obtained in the dissertation were used in the following research projects:

the results on functional limit theorems for branching processes with immigration were used to predict biological and chemical processes in the practical project FA-Atech-2018-4 (Reference No. 2/1255-902 of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan dated March 26, 2021). The application of the scientific result made it possible to simulate situations arising in molecular genetics;

the asymptotic expansion for the characteristic function of branching process with dependent immigration was used to describe the asymptotic properties of the distribution of branching processes in the fundamental project No. OT-F-4-03 “Continuous and discrete exact dynamic systems, spectra of multiple integral operators” (Reference from Karshi State University No. 04/2809 dated August 23, 2021). The application of the scientific result made it possible to describe the limiting distribution of dynamical systems with discrete time.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 110 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (Часть I; Part I)

1. Хусанбаев Я.М., Шарипов С.О. Функциональная предельная теорема для критических ветвящихся процессов с зависимой иммиграцией // Узбекский математический журнал. 2017. № 3. – С. 142-148. (01.00.00; №6).
2. Khusanbaev Y.M., Sharipov S.O. On convergence of branching processes with weakly dependent immigration // Uzbek Mathematical Journal. 2018. № 1. –P. 108-114. (01.00.00; №6).
3. Sharipov S.O. Determinisitc approximation for nearly critical branching processes with dependent immigration // Uzbek Mathematical Journal. 2018. № 3. –P. 156-165. (01.00.00; №6).
4. Khusanbaev Y.M., Sharipov S.O. On the asymptotic behavior of branching processes with stationary immigration // Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences. 2020. Vol. 3, Iss. 1. –P. 59-73. (01.00.00; № 18).
5. Khusanbaev Y.M., Sharipov S.O., Golomoziy V. Berry-Esseen bound for nearly critical branching process with immigration // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series: Physics & Mathematics. 2019. № 4. –P. 42-49. (35. CrossRef).
6. Golomoziy V., Sharipov S.O. On central limit theorems for branching processes with dependent immigration // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series: Physics & Mathematics. 2020. № 1-2. –P. 7-15. (35. CrossRef).
7. Khusanbaev Y.M., Sharipov S.O. A functional limit theorem for nearly critical branching process with immigration // Uzbek Mathematical Journal. 2020. № 2. –P. 115-125. (01.00.00; №6).
8. Sharipov S.O. Central limit theorem for branching process with immigration // AIP Conference Proceedings. 2021. 2365. № 1. 060020. doi.org/10.1063/5.0057214 (3. Scopus IF= 0.177).

II бўлим (Часть II; Part II)

9. Шарипов С.О. Предельная теорема для последовательностей ветвящихся процессов со слабо зависимой иммиграцией // Тезисы докладов Международного научного форума «Математические модели гуманитарных, естественнонаучных процессов: проблемы, решения, перспективы». Москва.– 2018. – С. 95-96.
10. Хусанбаев Я.М., Шарипов С.О. Функциональная предельная теорема для последовательностей ветвящихся процессов с иммиграцией //

Республиканской научной конференции «Новые результаты математики и их приложения». Самарканд. – 2018. 14-15 мая. – С. 147-148.
11. Khusanbaev Y.M., Sharakhmetov Sh., Sharipov S.O. On moment inequalities for branching processes with immigration // Abstracts of the International Scientific Conference «Modern problems of applied mathematics and information technologies- al- Khorezmiy 2018». Tashkent. – 2018. September 13-15. –P. 172-173.
12. Khusanbaev Y.M., Sharipov S.O. On the fluctuation of the nearly critical branching processes with immigration // International conference scientific conference “Mathematical analysis and its application to mathematical physics”. Samarkand. – 2018. September 17-20. –P. 80-81.
13. Khusanboev Y.M.,Sharipov S.O., On asymptotic normality of branching processes with increasing and dependent immigration // STEMM: Science – Technology – Education – Mathematics –Medicine. Abstracts of the Joint International Conference. Tashkent. – 2019. May 16–17. –P. 97-98.
14. Sharipov S.O. On the Rate of Convergence in Central Limit Theorem for Nearly Critical Branching Processes with Immigration // Abs. SPAS-2019, Sweden. – 2019. –P.88.
15. Хусанбаев Я.М., Шарипов С.О. Оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме для почти критических ветвящихся процессов с иммиграцией // Материалы республиканской научной конференции «Современные проблемы теории вероятностей и математической статистики». Ташкент. –2019. –С. 70-71.
16. Khusanbaev Y.M., Sharipov S.O., Qudratov H.E. On central limit theorem for subcritical branching processes with dependent immigration // Abstracts of the International scientific conference on the theme Modern problems of differential equations and related branches of mathematics. Fergana. – 2020. –P. 154-155.
17. Khusanbaev Y.M., Sharipov S.O., Toshqulov X. Deterministic approximation for nearly critical branching processes with dependent immigration // Материалы Республиканской научной онлайн Конференции молодых ученых «Современные проблемы математики и прикладной математики» посвященной 100 летию академика С.Х.Сираждинова. Ташкент. – 2020. –С. 250-251.
18. Khusanboev Y.M., Sharipov S.O., Golomoziy V. Berry-Esseen bound for nearly critical branching processes with immigration // «Современные проблемы стохастического анализа». Ташкент. – 2020. – С. 52-53.
19. Sharipov S.O., Golomoziy V. On limit theorems for branching processes with dependent immigration // Тезисы докладов конференции «Современные стохастические модели и проблемы актуарной математики». Карши– 2020. –С. 54-56.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали» журнали таҳририятида таҳрирдан ўтказилиб, ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги матнлар ўзаро мувофиқлаштирилди. (2021 йил 22 сентябр.)

Бичими: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» гарнитураси.
Рақамли босма усулда босилди.
Шартли босма табоғи: 3,25. Адади 100. Буюртма № 53/21.

Гувоҳнома № 851684.
«Tipograff» МЧЖ босмахонасида чоп этилган.
Босмахона манзили: 100011, Тошкент ш., Беруний кўчаси, 83-уй.