ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ
ТЕРМИЗ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ХУРРАМОВ НОСИР ХАМИДОВИЧ

СИНГУЛЯР КОЭФФИЦИЕНТЛИ АРАЛАШ ТУРДАГИ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН БУЗИЛИШ ЧИЗИҒИДА УМУМИЙ УЛАНИШ ШАРТЛИ НОЛОКАЛ МАСАЛАЛАР

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика
(физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА
ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ
АВТОРЕФЕРАТИ

Фарғона – 2021

УДК: 517.956

Физика – математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико – математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophi (PhD) on physical – mathematical sciences

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ТЕРМИЗ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ХУРРАМОВ НОСИР ХАМИДОВИЧ

СИНГУЛЯР КОЭФФИЦИЕНТЛИ АРАЛАШ ТУРДАГИ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН БУЗИЛИШ ЧИЗИҒИДА УМУМИЙ УЛАНИШ ШАРТЛИ НОЛОКАЛ МАСАЛАЛАР

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика
(физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Фарғона– 2021 йил

Физика – математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosofy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2019.3.PhD/FM398 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Термиз давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (www.fdu.uz) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида (http://www.ziyonet.uz/) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Мирсабуров Мирахмат** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Исломов Бозор** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Каримов Эркинжон Тўлқинович физика-математика фанлари доктори, катта илмий ходим
Етакчи ташкилот:	**Самарқанд давлат университети**

Диссертация ҳимояси Фарғона давлат университети ҳузуридаги PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 рақамли Илмий кенгашнинг 2021 йил «20» 11 соат 10.00 даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 150100, Фарғона шаҳар, Мураббийлар кўчаси, 19-уй. Тел.: (99873) 244-44-02, факс: (0573) 244-44-93, e-mail: fardu_info@umail.uz)

Диссертация билан Фарғона давлат университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (134 рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 150100, Фарғона шаҳар, Мураббийлар кўчаси, 19-уй. Тел.: (0573) 244-44-94).

Диссертация автореферати 2021 йил «09» 11 куни тарқатилди.

(2021 йил «____» _______________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

А. К. Уринов
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

И.У. Хайдаров
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.н.

Ш. Т. Каримов
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш ҳузуридаги илмий семинар раиси, ф.-м.ф.д., доцент

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳонда амалий хусусиятга эга бўлган айрим математик моделларни ўрганиш кўп ҳолларда аралаш турдаги дифференциал тенгламаларни тадқиқ этишни тақоза этади. Аралаш турдаги тенгламалар учун қўйилган классик масалаларни сингуляр коэффициентли аралаш турдаги тенгламалар учун умумлаштирган ҳолда таърифлаш ва уларни ўрганиш муҳим ҳисобланади. Ҳозирги вақтда аралаш турдаги дифференциал тенгламалар учун бузилиш чизиғида умумий уланиш шартли нолокал чегаравий масалаларни ўрганиш замонавий математиканинг долзарб йўналишларидан бири бўлиб қолмоқда. Нолокал чегаравий масалалар назарияси техника ва табиатда, жумладан, газлар динамикаси, нефт ҳавзалари ҳолати, ер ости сувларини фильтрлаш, мураккаб тузилишга эга объектларда иссиқлик ва масса алмашиниши, ўтказгичда электр тебранишлари, ғовак муҳит билан ўралган каналларда суюқлик ҳаракати, аэродинамик ва бошқа ҳодисаларни математик моделлаштиришда алоҳида муҳим аҳамиятга эга.

Ҳозирги кунда жаҳон миқёсида сингуляр коэффициентли аралаш турдаги тенгламалар учун нолокал ҳамда махсус умумий уланиш шартли чегаравий масалаларни тадқиқ этиш муҳим аҳамият касб этмоқда. Бу каби масалалар ядронинг носингуляр қисмида нокарлеман типидаги силжиши бўлган ва ўнг қисми нофредгольм операторидан иборат бўлган Трикомининг сингуляр интеграл тенгламаларига олиб келиб ўрганилади. Бу тенгламалар янги типдаги сингуляр интеграл тенгламалар бўлиб, улар жуда кам ўрганилган. Бу борада мақсадли илмий тадқиқотларни, жумладан, қуйидаги йўналишлардаги илмий изланишларни амалга ошириш муҳим вазифалардан бири ҳисобланади: сингуляр коэффициентли бузиладиган ва аралаш турдаги тенгламалар учун нолокал чегаравий масалаларни тадқиқ этиш; тенгламанинг типи ўзгарадиган чизиғи атрофида тенглама ечими ва унинг ҳосиласи чегараланган ёки чегараланмаган бўлишини аниқлаш; махсус умумий уланиш шартли чегаравий масалаларни ўрганиш; тенгламаларнинг кичик ҳадлар олдидаги коэффициентлар қабул қиладиган қийматларга қараб коррект масалаларни қўйиш ва уларни тадқиқ этиш. Юқорида келтирилган илмий-тадқиқот йўналишларида бажарилаётган илмий изланишлар мазкур диссертация мавзусининг долзарблигини белгилайди.

Республикамизда илмий ва амалий тадбиқларга эга бўлган фундаментал фанларга алоҳида эътибор қаратилмоқда. Кўпгина амалий ва назарий муаммоларни ҳал қилиш жараёнида сингуляр коэффициентли аралаш турдаги тенгламалар учун чегаравий масалаларни тадқиқ этиш, уларни ечишнинг самарали усулларини топиш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади. Математика фанларининг устувор йўналишлари бўйича айниқса, алгебра ва функционал анализ, дифференциал тенгламалар ва математик физика, ҳамда амалий математика ва математик моделлаштириш бўйича халқаро стандартлар даражасидаги илмий тадқиқот ишларини олиб бориш мамлакатимиздаги математик тадқиқотчиларнинг асосий фаолиятидаги вазифалари этиб белгиланган[1]. Ушбу вазифалар ижросини таъминлаш мақсадида, жумладан, аралаш турдаги тенгламалар назариясини ривожлантириш ҳамда улар учун умумий уланиш шартли нолокал масалаларни тадқиқ этиш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича харакатлар стратегияси тўғрисида”ги Фармони, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон “Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги, 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909-сон “Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги, 2018 йил 27 апрелдаги ПҚ-3682-сон “Инновацион ғоялар, технологиялар ва лойиҳаларни амалиётга жорий қилиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги, 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон “Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”, 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон “Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа меъёрий–ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация иши муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур диссертация республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Аралаш турдаги тенгламалар учун дастлабки фундаментал тадқиқотлар Ф.Трикоми томонидан бажарилган. Ф.Трикомининг ишларидан кейин Трикомининг умумлашган тенгламаси учун С.Геллерстедт қаралаётган соҳанинг гиперболик қисмида изланаётган ечимнинг қийматлари тенгламанинг турли оилаларга мансуб ички характеристикаларида ва чегаравий характеристикаларнинг бир қисмида берилган шартлар билан қўйилган масалани тадқиқ қилган.

Бу ишлардан кейин аралаш турдаги тенгламалар учун чегаравий масалалар назарияси асосан учта йўналиш бўйича ривожлана бошлади.

Биринчи йўналиш - Трикоми масаласини иккинчи тартибли аралаш турдаги умумийроқ тенгламалар учун ўрганиш бўлиб, бунга С.Геллерстедт, А.В.Бицадзе, К.И.Бабенко, Л.И.Карол, С.П.Пулькин, К.Б.Сабитов ва бошқаларнинг ишлари бағишланган.

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги №292 «Ўзбекистон республикаси фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарори.

Иккинчи йўналиш - Трикоми масаласининг ҳар хил модификацияларига бағишланган. Жумладан бу йўналишда Ф.И.Франкль томонидан ўрганилган масаланинг моҳияти шундан иборатки, изланаётган функциянинг қиймати қаралаётган соҳанинг эллиптик қисми чегарасида ва нохарактеристик чизиқда берилган. Бу масала Трикомининг умумлашган масаласи дея ном олди. Ушбу йўналишда А.В.Бицадзе, К.И.Бабенко, А.П.Солдатов, К.Б.Сабитов, М.А.Садыбеков ва бошқалар салмоқли илмий натижалар олди.

Аралаш турдаги гиперболик-параболик тенглама учун Трикомининг умумлашган масаласи эса Т.Д.Жураев томонидан тадқиқ этилди. Г.Каратопраклиев аралаш турдаги тенглама учун Трикоми масаласини номаълум функция ва унинг ҳосиласи параболик бузилиш чизиғидан ўтишда биринчи тур узилишга эга бўлган ҳолда умумлаштирди. Юқори тартибли дифференциал тенгламалар учун Трикоми масаласининг турли хил модификацияларини тадқиқ этишда А.В.Бицадзе ва М.С.Салахитдинов, Т.Д.Жураев, С.А.Абдиназаровларнинг ишлари муҳим туртки бўлди. Бундай масалалар ҳақидаги тўла маълумот М.С.Салаҳитдинов ва Т.Д.Жураев монографияларида баён қилинган.

Учинчи йўналиш - бу спектрал параметрли аралаш турдаги тенгламалар учун масалалар бўлиб, улар Ш.А.Алимов, Е.И.Моисеев, Т.Ш.Кальменов, С.М.Пономарёв, К.Б.Сабитов, М.С.Салахитдинов, А.К.Уринов каби етук олимларнинг ишларида ўз аксини топган.

Аралаш турдаги тенгламалар учун жуда муҳим натижалар қуйида номлари келтирилган муаллифлар томонидан олинган: Е.Хольмгрен содда бузилувчан эллиптик тенглама учун нормал соҳада Дирихле ва Хольмгрен масалалари ечимини берувчи формулаларни ошкор кўринишда топган; С.Геллерстедт содда бузилувчан эллиптик турдаги тенглама учун потенциаллар назариясини яратиб, у асосида Дирихле ва Хольмгрен масалаларининг Грин функциясини қурган ва бу масалалар ечимининг интеграл ифодасини топган; С.Г.Михлин Карлеманнинг сингуляр интеграл тенгламасини ечиш усулидан ва Лиувиллнинг аналитик функцияларни давом эттириш ҳақидаги теоремасидан фойдаланиб, Ф.Трикомининг сингуляр интеграл тенгламасини ечиш методини яратган; А.В.Бицадзе аралаш турдаги содда тенглама учун экстремум принципини таърифлаган.

Ўтган асрнинг 70-йилларига келиб аралаш турдаги тенгламалар учун чегаравий масалалар назариясининг барча муаммолари ҳал этилгандек туюлди ва бу соҳанинг кейинги ривожи учун тубдан янги қўйилган масалаларга зарурият туғилди. Бу янги масала А.В.Бицадзе ва А.А.Самарскийлар томонидан ҳамкорликда таърифлаган ва ўрганилган масала бўлиб, у аралаш турдаги тенгламалар учун чегаравий масалаларнинг кейинги ривожида муҳим туртки бўлди. Шунинг учун ҳозирги кунда Бицадзе-Самарский шартли масалалар кўплаб илмий марказларда олиб борилаётган тадқиқотларнинг доимий объекти сифатида қаралмоқда.

Мазкур диссертация сингуляр коэффициентли Геллерстедт тенгламаси учун нолокал масалаларни тадқиқ этишга бағишланган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги.

Диссертация тадқиқоти Термиз давлат университети илмий-тадқиқот ишлари режасидаги Ф-4-32: (2012-2016) «Сингуляр коэффициентли Геллерстедт тенгламаси учун Трикоми, силжишли масалалар ва Бицадзе-Самарский шартларини бир таърифда бирлаштирган масалаларнинг корректлигини ўрганиш» фундаментал лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади сингуляр коэффициентли аралаш турдаги тенгламалар учун коррект қўйилган чегаравий масалаларни топиш ва уларнинг бир қийматли ечилишини исботлашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

аралаш турдаги сингуляр коэффициентли тенглама учун бир оилага мансуб характеристикаларда Геллерстедт шартли масала ечимининг мавжудлиги ва ягоналигини исботлаш;

аралаш турдаги тенгламаларнинг бир синфи учун Трикоми шарти характеристикада тўлиқ берилмаган ҳамда параллел характеристикаларда Бицадзе – Самарский шарти ва бузилиш чизиғида эса умумий уланиш шарти берилган масаланинг бир қийматли ечилишини текшириш;

сингуляр коэффициентли Геллерстедт тенгламаси учун координата ўқларининг кесмалари ва берилган тенгламанинг нормал чизиғи ҳамда иккита характеристика билан чегараланган соҳада, бузилиш чизиғи ва соҳа чегарасининг эллиптик қисмида Бицадзе-Самарский шарти берилган масала ечимининг мавжудлиги ва ягоналигини исботлаш;

Трикомининг ностандарт сингуляр интеграл тенгламаси ечимини С.Г.Михлиннинг регулярлаштириш усули ёрдамида қуриш;

Тадқиқотнинг объекти аралаш турдаги сингуляр коэффициентли тенгламалар ҳисобланади.

Тадқиқотнинг предмети аралаш турдаги сингуляр коэффициентли тенгламалар учун нолокал масалалар.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертацияда экстремум принципи усули ҳамда регуляр ва сингуляр интеграл тенгламалар назарияси усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

сингуляр коэффициентли аралаш турдаги тенглама учун бир оилага мансуб характеристикаларда Геллерстедт шарти берилган масаланинг бир қийматли ечилиши исботланган;

сингуляр коэффициентли Геллерстедт тенгламаси учун параллел характеристикаларда Бицадзе-Самарский шарти, бузилиш чизиғида умумий уланиш шарти берилган масаланинг корректлиги асослаб берилган;

аралаш турдаги сингуляр коэффициентли тенглама параметрининг чегаравий қийматида нолокал масалалар ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган;

эллиптик қисми тенгламанинг нормал чизиғи ва координата ўқларининг кесмаларидан иборат ностандарт соҳада аралаш турдаги тенглама учун локал ва нолокал чегаравий масалаларнинг бир қийматли ечилиши асосланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

сингуляр коэффициентли аралаш турдаги тенгламалар учун Бицадзе-Самарский шартли масалаларнинг бир қийматли ечилишидан фойдаланиб, суюқлик ва газлар оқимига оид математик моделлар қуриш ва ўрганиш мумкинлиги исботланган;

характеристик бўлмаган қисмида битта яккаланган нуқтада биринчи тартибли махсусликка эга бўлган нофредгольм оператор иштирок этган ҳамда ядросининг носингуляр қисмида силжишга эга бўлган Трикоми сингуляр интеграл тенгламасини регуляризация қилиш алгоритми ишлаб чиқилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар, аналитик функциялар ва интеграл тенгламалар назарияси усулларидан фойдаланиб, дедуктив хулосалар қабул қилинганлиги ҳамда теоремаларнинг қатъий ва тўлиқ исботланганлиги билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти ушбу ишда олинган илмий натижалардан сингуляр коэффициентли аралаш турдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назариясида фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Диссертация ишида олинган натижаларнинг амалий аҳамияти илмий натижаларни аралаш турдаги тенгламалар орқали ифодаланадиган физик, техник ва биологик жараёнларни ўрганишда татбиқ этилиши мумкинлиги билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Сингуляр коэффициентли аралаш турдаги тенгламалар учун бузилиш чизиғида умумий уланиш шартли нолокал масалаларига оид олинган илмий натижалар асосида:

нoстандарт сингуляр интеграл тенгламаларни регулярлаштириш усули №AP05132680 рақамли «Оқимларнинг кўп ўлчовли ғовакли муҳитлардаги нолокал моделлари» мавзусидаги халқаро грант лойиҳасида сингуляр коэффициентли Геллерстедт тенгламалари учун нолокал чегаравий масалалар ечимларини топишда фойдаланилган (Қозоғистон Республикаси ахборот ва ҳисоблаш технологиялари институтининг 2021 йил 18 майдаги 01-07/269-сон маълумотномаси). Натижада, кўп ўлчовли ғовакли муҳитнинг гиперболик қисми чегарасида оқимни тавсифловчи ечимлар қийматларининг нолокал муносабатларини ҳисобга олган ҳолда, қатламлар ҳолатини моделлаштиришда ҳосил бўладиган айирмали масалани тўғри шакллантиришни имконини берган;

сингуляр коэффициентли аралаш турдаги тенглама учун нолокал чегаравий масалаларнинг корректлигини асословчи теоремалар 2017-2019 йиллар учун мўлжалланган №17-41-020516 рақамли «Суюқлик ва газлар оқимининг транстовушли математик моделлари ва уларнинг татбиқлари» мавзусидаги ва №19-31-60016 рақамли халқаро грант лойиҳаларида аралаш турдаги тенгламалар учун қўйилган Бицадзе-Самарский типидаги масалаларини ечишда фойдаланилган (Бошқирдистон Республикаси стратегик тадқиқотлар институти Стерлитамак филиалининг 2021 йил

23 июлдаги №42-сон маълумотнома). Натижада, Трикоми типидаги ностандарт сингуляр интеграл тенгламаларнинг ечимини ошкор кўринишда ёзиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 13 та илмий-амалий анжуманларда, жумладан 8 та халқаро ва 5 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 18 та илмий иш чоп этилган, улардан 5 таси Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг фалсафа доктори (PhD) диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этишга тавсия қилинган нашрларда, шулардан 2 таси хорижий ва 3 таси Республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат. Диссертациянинг умумий ҳажми 119 бетдан иборат.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида ўтказилган тадқиқотларнинг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **“Сингуляр коэффициентли аралаш турдаги тенглама учун бир оилага мансуб характеристикаларда Геллерстедт шартли масала”** деб номланувчи биринчи бобида сингуляр коэффициентли аралаш турдаги тенгламалар учун, қаралаётган аралаш соҳада чегаравий характеристиканинг бир қисмида ва унга параллел характеристикада берилган Геллерстедт шартли масала қаралган.

1.1 параграфда Γ_0 масаланинг қўйилиши келтирилган.

$D-xOy$ текислигининг чекли ва бир боғламли соҳаси бўлиб, бу соҳа $y>0$ ярим текисликда учлари $A(-1,0)$ ва $B(1,0)$ нуқталарда бўлган $\sigma_0 : x^2+4(m+2)^{-2}y^{m+2}=1$ нормал чизиқ билан, $y<0$ ярим текисликда эса

$$(sign y)|y|^m u_{xx}+u_{yy}+(\beta_0/y)u_y=0, \qquad (1)$$

тенгламанинг AC ва BC характеристикалари билан чегараланган бўлсин. (1) тенгламада m, β_0 ҳақиқий сонлар учун $m>0$, $-m/2<\beta_0<1$ шартлар ўринли. D^+ ва D^- билан D соҳанинг $y>0$ ва $y<0$ ярим текисликлардаги қисмларини, C_0 ва C_1 орқали эса (1) тенгламанинг $E(c,0)$ нуқтадан чиқувчи характеристикасининг AC ва BC характеристикалар билан кесишиш нуқталарини белгилаймиз. Бунда $c \in I = \{x : -1 < x < 1\}$.

Γ_0 **масала.** D соҳада қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $u(x,y) \in C(\overline{D})$ функция топилсин:

1) $u(x,y)$ функция $C^2(D^+)$ синфга тегишли ва D^+ соҳада (1) тенгламани қаноатлантиради;
2) $u(x,y)$ функция D^- соҳада (1) тенгламанинг R_1 синфга тегишли умумлашган ечими;
3) AB бузилиш чизиғида ушбу уланиш шарти бажарилади:

$$\lim_{y \to -0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y \to +0} y^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad x \in I \setminus \{c\}, \tag{2}$$

бу лимитлар $x \to \pm 1$, $x \to c$ да $1 - 2\beta$ дан кичик тартибдаги махсусликка эга бўлиши мумкин, бу ерда $\beta = \left(m + 2\beta_0\right) / 2\left(m + 2\right) \in (0, 1/2)$;

4) ушбу шартлар бажарилади:

$$u(x,y)\big|_{\sigma_0} = \varphi(x), \quad x \in [-1,1]; \tag{3}$$

$$u(x,y)\big|_{AC_0} = \psi_0(x), \quad x \in [-1, (c-1)/2]; \tag{4}$$

$$u(x,y)\big|_{EC_1} = \psi_1(x), \quad x \in [c, (c+1)/2]. \tag{5}$$

Бу ерда $\varphi(x)$, $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$ – берилган функциялар бўлиб,

$$\varphi(x) \in C[-1,1] \cap C^{0,\alpha_0}(-1,1), \ \psi_0(x) \in C[-1,(c-1)/2] \cap C^{1,\alpha_0}(-1,(c-1)/2),$$

$$\psi_1(x) \in C[(c+1)/2, 1] \cap C^{1,\alpha_0}((c+1)/2, 1), \alpha_0 \in (0,1), \ \varphi(x) = (1 - x^2)\widetilde{\varphi}(x),$$

$$\widetilde{\varphi}(x) \in C^{0,\alpha_0}[-1,1] \cap C^{0,\alpha_0}(-1,1), \ \psi_0(-1) = 0, \ \psi_1(c) = 0$$

муносабатлар ўринли.

Қайд қиламизки, (3) - σ_0 чизиқда берилган Дирихле шарти. (4) ва (5) лар эса мос ҳолда AC_0 чегаравий характеристикада ва EC_1 ички характеристикада берилган Геллерстедт шартларидир. $c = -1$ ёки $c = 1$ ҳолларда Γ_0 масаладан Трикоми масаласи келиб чиқади.

1.2 параграфда Γ_0 масала ечимининг ягоналиги ўрганилган.

Бу параграфнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1.1-теорема. Ушбу $\psi_0(x) \equiv 0$, $\psi_1(x) \equiv 0$ шартлар бажарилса, Γ_0 масала ечими $\overline{D}^+$ соҳадаги ўзининг мусбат максимуми ва манфий минимумига $\overline{\sigma}_0$ чизиғидаги нуқталарда эришади.

1.1 теоремадан қуйидаги хулоса келиб чиқади

Хулоса. Γ_0 масаласи биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.

1.3 параграфда Γ_0 масала ечимининг мавжудлиги тадқиқ этилган.

1.2-теорема. Γ_0 масала бир қийматли ечилади.

Бу теорема Γ_0 масалани эквивалент равишда ядросининг жамланмаган қисмида силжишга ва ўнг томони нофредгольмли операторга эга бўлган қуйидаги ностандарт сингуляр интеграл тенгламалар системасига келтириш билан исботланган:

$$\nu_0(x)+\lambda\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{a}{1-(ax-b)(at-b)}\right)\nu_0(t)dt=g_0(x),\ \ x\in I, \qquad (6)$$

$$\nu_1(x)+\lambda\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{b}{1-(bx+a)(bt+a)}\right)\nu_1(t)dt=g_1(x),\ \ x\in I, \qquad (7)$$

бунда $a=(1+c)/2,\ b=(1-c)/2,\ a+b=1,\ a-b=c,$

$$g_0(x)=-\lambda\int_{-1}^{1}\frac{b\nu_1(t)dt}{bt-ax+1}+T_0[\nu_1]+F_0(x), \qquad (8)$$

$$g_1(x)=\lambda\int_{-1}^{1}\left(\frac{a(1-t}{b(1+x)}\right)^{1-2\beta}\frac{a\nu_0(t)dt}{at-bx-1}+G_0[\nu_0]+S_0[\nu_1]+F_1(x). \qquad (9)$$

Қуйидаги теоремаларнинг ўринли эканлиги исботланган:

1.3-теорема. Агар $g_0(x)$ функция Гёльдер шартини қаноатлантирса ва $g_0(x)\in L_p(-1,1),\ p>1$ бўлса, у ҳолда (6) тенгламанинг ечими $h(-1)$ функциялар синфида, яъни $(1+x)^{1-2\beta}\nu_0(x)$ функция $(-1,1)$ интервалнинг чап четки нуқтасида чегараланган, интервалнинг ўнг четки нуқтасида чегараланмаган функциялар синфида қуйидагича аниқланади:

$$\nu_0(x)=\frac{1+sin(\beta\pi)}{2}g_0(x)-\frac{cos(\beta\pi)}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{2\alpha}\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{\alpha}\times$$

$$\times\left(\frac{1-c(at-b)}{1-c(ax-b)}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{a}{1-(ax-b)(at-b)}\right)g_0(t)dt, \qquad (10)$$

бу ерда $\alpha=(1-2\beta)/4$.

1.4-теорема. Агар $g_1(x)$ функция Гёльдер шартини қаноатлантирса ва $g_1(x)\in L_p(-1,1),\ \ p>1$ бўлса, у ҳолда (7) тенгламанинг ечими $h(-1)$ функциялар синфида, яъни $(1+x)^{1-2\beta}\nu_1(x)$ функция $(-1,1)$ интервалнинг чап четки нуқтасида чегараланган, интервалнинг ўнг четки нуқтасида эса чегараланмаган функциялар синфида қуйидагича аниқланади:

$$\nu_1(x)=\frac{1+sin(\beta\pi)}{2}g_1(x)-\frac{cos(\beta\pi)}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{3\alpha}\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{2\alpha}\times$$

$$\times\left(\frac{1-c(bx+a)}{1-c(bt+a)}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{b}{1-(bx+a)(bt+a)}\right)g_1(t)dt. \qquad (11)$$

1.3 ва 1.4 теоремаларнинг исботи С.Г.Михлин томонидан такомиллаштирилган Карлеман методи орқали амалга оширилади.

(8) ва (9) муносабатлардаги $g_0(x)$ ва $g_1(x)$ функциялар қийматларини мос ҳолда (10) ва (11) тенгликларга қўйсак, унча мураккаб бўлмаган ҳисоблашлардан кейин, қуйидаги кўринишдаги Винер-Хопф интеграл тенгламаси ҳосил бўлади:

$$\rho(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty K_0(y-s)\rho(s)ds+R_4[\rho],\qquad (12)$$

бу ерда $R_4[\rho]$ – регуляр оператор.

(12) тенгламанинг $K_0(x)$ ядроси узлуксиз дифференциалланувчи ва чексизликда кўрсаткичли тартибда нолга айланади, шунингдек, $R_4[\rho]$ оператор ҳам чексизликда кўрсаткичли тартибда нолга айланади.

Маълумки, ўрама типидаги интеграл тенгламалар учун Фредгольм теоремалари фақат битта ҳолда, яъни бу тенгламалар индекслари нолга тенг бўлган ҳолдагина ўринли бўлади. Шунинг учун (12) тенгламанинг индекси нолга тенглиги исботланган, сўнгра эса (12) тенглама Фурье алмаштириши ёрдамида Фредгольм интеграл тенгламасига бир қийматли келтирилган. Охирги интеграл тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги Γ_0 масала ечимининг ягоналигидан келиб чиқади.

Ушбу бобнинг **1.4 параграфида** Γ_0 масала ечимининг ягоналиги ва мавжудлиги (1) тенглама учун β_0 параметрнинг $\beta_0=-m/2$ қийматида, яъни

$$(signy)|y|^m u_{xx}+u_{yy}-(m/2y)u_y=0\,,m>0\qquad (13)$$

тенглама учун ўрганилган.

Диссертациянинг **“Сингуляр коэффициентли Геллерстедт тенгламаси учун параллел характеристикаларда Бицадзе - Самарский ва бузилиш чизиғида умумий уланиш шартли масала”** номли иккинчи бобида сингуляр коэффициентли Геллерстедт тенгламаси учун чегаравий характеристикада локал ва нолокал ҳамда бузилиш чизиғида узлукли уланиш шартли масала ечимининг ягоналиги ва мавжудлиги исботланган.

2.1 параграфда ТН масала қўйилган.

$\Omega-xOy$ текислигининг чекли ва бир боғламли соҳаси бўлиб, у $y>0$ ярим текисликда ётувчи ва учлари $A(-1,0)$ ва $B(1,0)$ нуқталарда бўлган $\sigma_0: x^2+4(m+2)^{-2}y^{m+2}=1$ нормал чизиқ билан, $y<0$ да эса (1) тенгламанинг AC ва BC характеристикалари билан чегараланган.

Ω^+ ва Ω^- орқали Ω соҳанинг мос равишда $y>0$ ва $y<0$ ярим текисликлардаги қисмларини белгилаймиз. C_0 ва C_1 орқали эса (1) тенгламанинг AC ва BC характеристикаларининг $E(c,0)$ нуқтадан чиқувчи характеристикалар билан кесишиш нуқтасини белгилаймиз, бу ерда $c\in I=\{x:-1<x<1\}$.

ТН **масаласи**. Ω соҳада қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $u(x,y)$ функция топилсин:

1) $u(x,y)$ функция $\overline{\Omega}^+$ ва $\overline{\Omega}^-$ ёпиқ соҳаларда узлуксиз;
2) $u(x,y)\in C^2(\Omega^+)$ ва Ω^+ соҳада (1) тенгламани қаноатлантиради;
3) $u(x,y)$ функция Ω^- соҳада (1) тенгламанинг R_1 синфга тегишли умумлашган ечимдан иборат;
4) AB бузилиш чизиғида ушбу умумий уланиш шартилари бажарилади:

$$u(x,-0)=a_1u(x,+0)+a_0(x),\ x\in \overline{I}, \tag{14}$$

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=f(x)\lim_{y\to +0}y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}+b_0(x),\quad x\in I\setminus\{c\}, \tag{15}$$

бу лимитлар $x\to\pm 1,\ x\to c$ да $1-2\beta$ дан кичик тартибдаги махсусликка эга бўлиши мумкин, бу ерда $\beta=\left(m+2\beta_0\right)/2\left(m+2\right),\ \beta\in(0,1/2)$;

5) қуйидаги шартлар бажарилади:

$$u(x,y)=\varphi(x),\ (x,y)\in\overline{\sigma}_0; \tag{16}$$

$$u(x,y)\ |_{AC_0}=\psi(x),\ x\in[-1,(c-1)/2]; \tag{17}$$

$$u[\theta(x)]=\mu u[\theta^*(x)]+\rho(x),\ x\in[c,1], \tag{18}$$

бу ерда $\theta(x_0)$ ва $\theta^*(x_0)$ - мос ҳолда $C_0C\subset AC$ ва EC_1 характеристикаларнинг, $(x_0,0)$ нуқтадан чиқувчи характеристика билан кесишиш нуқталари аффикслари, бунда $x_0\in[c,1]$. $(14)-(18)$ шартлардаги $a_0(x),\ f(x),\ b_0(x),\ \varphi(x),\ \psi(x),\ \rho(x)-$ берилган етарлича силлиқ функциялар, a_1 ва μ- ўзгармас сонлар, шу билан бирга $\psi(-1)=0,\ \ \varphi(-1)=\varphi(1)=0$ ва $x\in(-1,c)$ да $f(x)=a_1$ тенгликлар ўринли бўлади.

Қайд этамизки, $\mu=0,\ \left[(\psi((c-1)/2)=\rho(c))\right]$ тенглик бажарилганда ТН масаласи (14) ва (15) кўринишдаги узлукли уланиш шартли Трикоми масаласига келади.

2.2 параграфда ТН масаласи ечимининг ягоналиги исботланган. Бу параграфнинг асосий натижаси қуйидаги теоремадан иборат.

2.1- теорема. Ушбу $a_0(x)\equiv 0,\ b_0(x)\equiv 0,\ \varphi(x)\equiv 0,\ \psi(x)\equiv 0,\ \rho(x)\equiv 0,$

$$\mu<0,\ a_1>0,\ f(x)>0\ , \tag{19}$$

шартлар бажарилганда, ТН масаланинг ечими $\overline{\Omega}^+$ ёпиқ соҳада айнан нолга тенг.

Бу теоремадан ТН масала ечимининг ягоналиги келиб чиқади.

2.3 параграфда ТН масаласи ечимининг мавжудлиги исботланган.

2.2-теорема. (19) шарт ва ушбу тенгсизликлар бажарилганда

$$\alpha_0=\pi^{-1}arctg(\pi(C(-1)))<\frac{1}{4},\qquad |3\alpha-\alpha_0|<\frac{1}{2},$$

ТН масала бир қийматли ечилади, бу ерда

$$C(-1)=\frac{a_1\cos(\beta\pi)}{\pi(f(c)+a_1\sin(\beta\pi))},\ \ \alpha=\frac{1-2\beta}{4}<\frac{1}{4}.$$

Бу теоремани исботлашда ТН масала эквивалент равишда қуйидаги сингуляр интеграл тенгламалар системасини тадқиқ қилишга келтирилган.

$$\nu_0(x)+\lambda\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+s}{1+x}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{s-x}-\frac{a}{1-(ax-b)(as-b)}\right)\nu_0(s)ds=g_0(x), \tag{20}$$

$$\nu_1(x)+C(x)\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+s}{1+x}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{s-x}-\frac{b}{1-(bx+a)(bs+a)}\right)\nu_1(s)ds=g_1(x), \tag{21}$$

бунда

$$g_0(x)=-\lambda\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+a+bs}{a(1+x)}\right)^{1-2\beta}\frac{b\nu_1(s)ds}{bs-ax+1}+\int_{-1}^{1}\widetilde{T}_0(x,s)\nu_1(s)ds+F_0(x),\ x\in I,$$

$$g_1(x)=-A(-1)\int_{-1}^{1}\left(\frac{a(1-s)}{b(1+x)}\right)^{1-2\beta}\frac{a\nu_0(s)ds}{as-bx-1}+\int_{-1}^{1}\widetilde{H}_0(x,s)\nu_0(s)ds+$$

$$+\int_{-1}^{1}\widetilde{H}_1(x,s)\nu_1(s)ds+F_1(x),\qquad x\in I,$$

$\tilde{T}_0(x,s),\ \tilde{H}_0(x,s),\ \tilde{H}_1(x,s)$ – регуляр ядролар.

$$A(-1)=-a_1cos(\beta\pi)/\pi(f(c)+a_1sin(\beta\pi)),\ C(-1)=-A(-1).$$

2.3-теорема. Агар $g_0(x)$, $x\in(-1,1)$ функция Гёльдер шартини қаноатлантирса ва $g_0(x)\in L_p(-1,1),\ p>1$ бўлса, у ҳолда (20) тенгламанинг ечими $h(-1)$ функциялар синфида, яъни $(1+x)^{1-2\beta}\nu_0(x)$ функция $(-1,1)$ интервалнинг $x=-1$ чап четки нуқтасида чегараланган, кесманинг $x=1$ ўнг четки нуқтасида эса чегараланмаган функциялар синфида

$$\nu_0(x)=\frac{1+sin(\beta\pi)}{2}g_0(x)-\frac{cos(\beta\pi)}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{2\alpha}\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-c(at-b)}{1-c(ax-b)}\right)^{\alpha}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{t-x}-\frac{a}{1-(ax-b)(at-b)}\right)g_0(t)dt,$$

формула орқали ифодаланади, бунда $\alpha=(1-2\beta)/4$.

2.4-теорема. Агар $g_1(x)$, $x\in(-1,1)$ функция Гёльдер шартини қаноатлантирса ва $g_1(x)\in L_p(-1,1),\ p>1$ бўлса, у ҳолда (21) тенгламанинг ечими $h(-1)$ функциялар синфида, яъни $(1+x)^{1-2\beta}\nu_1(x)$ функция $(-1,1)$ интервалнинг $x=-1$ чап четки нуқтасида чегараланган, кесманинг $x=1$ ўнг четки нуқтасида эса чегараланмаган функциялар синфида

$$\nu_1(x)=\frac{g_1(x)}{1+\pi^2C^2(x)}-\frac{\pi C(x)}{1+\pi^2C^2(x)}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{4\alpha-\alpha_0}\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{2\alpha_1}\times$$

$$\times\left(\frac{1-c(bx+a)}{1-c(bt+a)}\right)^{\alpha_0}\frac{\delta(x)}{\delta(t)}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{b}{1-(bx+a)(bt+a)}\right)g_1(t)dt.$$

формула орқали ифодаланади.

2.3 ва 2.4 теоремалардан фойдаланиб, {(20), (21)} тенгламалар системаси Ф.Трикомининг ўнг томони норегуляр оператордан иборат сингуляр интеграл тенгламаларга келтирилган. Ушбу тенгламаларни Карлеман методи орқали регулярлаштирилиб, Винер –Хопф интеграл тенгламаси олинган ҳамда бу тенглама Фредгольм интеграл тенгламасига бир қийматли келтирилган. Охирги интеграл тенгламанинг бир қийматли ечилиши ТН масала ечимининг ягоналигидан келиб чиқади.

2.4 параграфда (13) тенглама учун ТН масала ечилган бўлиб, бу масала ечимининг ягоналиги ва мавжудлиги 2 бобнинг 2.2 ва 2.3 параграфларидаги каби тадқиқ этилган.

Диссертациянинг **“Аралаш турдаги тенглама учун соҳанинг эллиптик қисми чегарасида локал ва нолокал масалалар”** номли учинчи бобида сингуляр коэффициентли (1) тенглама учун аралаш соҳанинг эллиптик қисми чегараси Oy ўқининг кесмаси ва тенгламанинг нормал чизиғидан иборат бўлган ҳолда Бицадзе – Самарский шартли масала ўрганилган.

(1) тенглама $O(0,0)$, $A(a,0)$ нуқталардан чиқувчи OC ва AC характеристикалари ва Oy ўқнинг OB кесмаси ҳамда $\sigma_a : x^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} = a^2, \quad x \ge 0, y > 0$ нормал чизиқнинг AB ёйи билан чегараланган D_a соҳада қаралган, бу ерда $B = B(0,b)$, $b = const > 0$.

D_a^+ ва D_a^- белгилашлар билан D_a соҳанинг мос равишда юқори ва пастки ярим текисликларини белгиланган.

Фараз қилайлик $y = -k(x - x_0)$ $(x \le x_0, 0 \le x_0 \le a)$ тўғри чизиқ координата ўқлари билан $(x_0, 0)$ ва $(0, kx_0)$ нуқталарда кесишсин, бу ерда $k = b / a, b = ((m+2)a / 2)^{2/(m+2)}$.

3.1 параграфда қуйидаги БС масаласи қўйилган.

БС **(Бицадзе-Самарский) масаласи.** D_a соҳада (1) тенгламанинг ушбу шартларни қаноатлантирувчи $u(x,y) \in C(\overline{D_a})$ ечими топилсин:

1) $u(x,y)$ функция $C^2(D_a^+)$ синфга тегишли ва D_a^+ соҳада (1) тенгламани қаноатлантиради;
2) $u(x,y)$ функция D_a^- соҳада (1) тенгламанинг R_1 синфга тегишли умумлашган ечими;
3) қуйидаги тенгликлар бажарилади:

$$u(x,y)\big|_{\sigma_a} = \varphi_1(x), \;\; 0 \le x \le a; \tag{22}$$

$$u(0,kx) = \mu(x)u(x,0) + \varphi_2(x), \;\; 0 \le x \le a; \tag{23}$$

$$u(x,y)\big|_{OC} = \psi(x), \;\; 0 \le x \le a/2, \tag{24}$$

бунда $\varphi_1(x)$, $\mu(x)$, $\varphi_2(x) \in C[0,a]$, $\psi(x) \in C[0,a/2] \cap C^{1,\delta}(0,a/2)$ – берилган функциялар бўлиб, қуйидаги муносабатлар ўринли: $\psi(0) = 0$, $\varphi_2(0) = 0$, $\varphi_1(0) = \mu(a)\varphi_1(a) + \varphi_2(a)$, $\mu(x) = x^{\delta_1}\tilde{\mu}(x), \varphi_2(x) = x^{\delta_1 - m}\tilde{\varphi}_2(x)$, $\delta_1 > (m+2)(1+\beta) - 1$, $\tilde{\mu}(x)$, $\tilde{\varphi}_2(x) \in C[0,a]$, $\varphi_1(x) = (a-x)^{\delta_2}\tilde{\varphi}_1(x)$, $\delta_2 > 1/2$, $\tilde{\varphi}_1(x) \in C[0,a]$.

4) $y = 0, 0 \le x \le a$ бузилиш чизиғида ушбу

$$\lim_{y \to -0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y \to +0} y^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad 0 < x < a, \tag{25}$$

уланиш шартлари бажарилиб, бу лимитлар $x \to 0$, $x \to a$ да $1-2\beta$ дан кичик тартибдаги махсусликка эга бўлиши мумкин, бу ерда $\beta = (m+2\beta_0)/2(m+2) \in (0,1/2)$.

3.2 параграфда БС масала ечимининг ягоналиги исботланган.

БС масаланинг ечими учун А.В.Бицадзенинг экстремум принципига ўхшаш қуйидаги принципи ўринли эканлиги кўрсатилган:

3.1- теорема. Ушбу $\varphi_2(x) \equiv 0, \psi(x) \equiv 0$,

$$0 < \mu(x) < 1, \tag{26}$$

шартлар бажарилса, *БС* масаласининг ечими $\overline{D}_a^+$ соҳадаги ўзининг энг катта мусбат қийматини ва энг кичик манфий қийматини фақат σ_a нормал чизиқ нуқталарида қабул қилади.

Хулоса. (26) шарт бажарилса, БС масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.

3.3 параграфда БС масаласи ечимининг мавжудлиги исботланган.

3.2-теорема. (26) шарт бажарилганда БС масала бир қийматли ечилади

Бу теоремани исботлашда БС масала номаълум $\tau(x) = u(x,0)$ функцияга нисбатан қуйидаги сингуляр интеграл тенгламани тадқиқ этишга келтирилган

$$\tau(x) + \lambda \int_0^a \left(\frac{a-x}{a-t}\right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{a}{a^2-xt}\right)\tau(t)dt = \lambda \int_0^a \frac{\tau(t)dt}{t+x} + R_2[\tau] + F(x), x \in (0,a), \tag{27}$$

бунда $R_2[\tau]$ - регуляр оператор, $F(x)$ - берилган функция.

(27) тенгламанинг ўнг томонидаги биринчи интеграл остидаги ифода $x=0$, $t=0$ нуқталарда биринчи тартибли яккаланган махсусликка эга, шунинг учун бу интеграл оператор норегуляр бўлиб, у алоҳида ифодаланган.

(27) тенгламанинг ўнг томонини маълум функция деб, уни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\tau(x) + \lambda \int_0^a \left(\frac{a-x}{a-t}\right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{a}{a^2-xt}\right)\tau(t)dt = g_0(x), \tag{28}$$

бунда
$$g_0(x) = \lambda \int_0^a \frac{\tau(t)dt}{t+x} + R_2[\tau] + F(x). \tag{29}$$

(28) тенгламанинг ечими $h(a)$ синфда, яъни $(a-x)^{2\beta-1}\tau(x)$ функция $x=a$ нуқтада чегараланган ва $x=0$ нуқтада $1-2\beta$ дан кичик тартибли чексизликка айланиши мумкин бўлган функциялар синфида қуйидаги формула

$$\begin{gathered}\tau(x) = \frac{1+\sin(\beta\pi)}{2}\int_0^a \frac{\tau(t)dt}{t+x} - \frac{\cos(\beta\pi)}{2\pi}\int_0^a \tau(s)ds \int_0^a \left(\frac{a-x}{a-t}\right)^{2\alpha}\left(\frac{x}{t}\right)^{\alpha} \times \\ \times \left(\frac{1}{t-x} - \frac{a}{a^2-xt}\right)\frac{dt}{t+s} + R_3[\tau] + F_1(x)\end{gathered} \tag{30}$$

орқали ифодаланади, бунда $R_3[\tau]$ – регуляр оператор.

$g_0(x)$ нинг (29) ифодасини (30) муносабатга қўйиб , ушбу

$$\rho(y) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int_0^\infty K(y-t)\rho(t)dt + R_5[\rho] + F_2(y), \quad y \in (0,\infty) \qquad (31)$$

Винер-Хопф тенгламасига эга бўламиз. Бу ерда $R_5[\rho] = e^{(\alpha-1/2)y}R_4[\tau] -$ регуляр оператор, $F_2(y) = e^{(\alpha-1/2)y}F_1(ae^{-y}) -$ берилган функция.

$K(x)$ функция узлуксиз ва чексизликда экспоненциал тартибда камаяди. $\alpha \in (0,1/4)$ бўлганда $\alpha - 1/2$ ифода манфий бўлгани сабабли, $R_5[\rho]$ оператор ва $F_2(y)$ функция чексизликда кўрсаткичли тартибда камаювчи бўлади.

(31) интеграл тенглама Фурье алмаштириши орқали Риманнинг чегаравий масаласига келтирилиб, квадратураларда ечилган.

ХУЛОСА

Диссертация турли аралаш соҳаларда сингуляр коэффициентли аралаш турдаги тенгламалар учун локал ва нолокал чегаравий ҳамда бузилиш чизиғида умумий уланиш шартли масалаларни ечишга бағишланган.

Диссертация ишида олинган натижалар бўйича қуйидагича хулоса қилиш мумкин:

1. Сингуляр коэффициентли аралаш турдаги тенглама учун Геллерстедт шартлари бир оилага мансуб характеристикаларда берилган чегаравий масала ўрганилган.
2. Сингуляр коэффициентли Геллерстедт тенгламаси учун чегаравий характеристиканинг бир қисмида етишмайдиган Трикоми шарти ва чегаравий характеристикада ва унга параллел ички характеристикада Бицадзе - Самарский ҳамда бузилиш чизиғида умумий уланиш шарти берилган масала ўрганилган.
3. Сингуляр коэффициентли Геллерстедт тенгламаси учун масала ўрганилаётган соҳанинг гиперболик чегараси характеристикалардан, эллиптик қисми тенгламанинг нормал чизиғи ва Oy ўқининг кесмасидан иборат бўлган соҳада Бицадзе – Самарский шартлари Ox ва Oy ўқининг кесмаларида берилган масаланинг корректлиги ўрганилган.
4. Ядросининг “носингуляр” қисмида силжишга эга булган Трикомининг сингуляр интеграл тенгламаси учун ечимни берувчи формула ошкор кўринишда топилган.
5. Ядросининг нохарактеристик қисми яккаланган нуқтада биринчи тартибли махсусликка эга бўлган нофредгольм операторли сингуляр интеграл тенгламани ечиш алгоритми баён қилинган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ФЕРГАНСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

ТЕРМЕЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ХУРРАМОВ НОСИР ХАМИДОВИЧ

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ С ОБЩИМИ УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ НА ЛИНИИ ВЫРОЖДЕНИЯ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Фергана-2021

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико–математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2019.3.PhD/FM398.

Диссертация выполнена в Термезском государственном университете.

Автореферат диссертации на трёх языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещён на веб-странице Научного совета (www.fdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу (http://www.ziyonet.uz/).

Научный руководитель:	**Мирсабуров Мирахмат** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Исломов Бозор** доктор физико-математических наук, профессор
	Каримов Эркинжон Тулкинович доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник
Ведущая организация:	**Самаркандский государственный университет**

Защита диссертации состоится «20» __11__ 2021 г. в 10.00 часов на заседании научного совета PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 при Ферганском государственном университете. (Адрес: 150100, г. Фергана, ул. Мураббийлар, дом 19.Тел.: (0573) 244-44-02, факс: (0573) 244-44-93,e-mail: fardu_info@umail.uz.)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Ферганского государственного университета (зарегистрирована за №134). (Адрес: 150100, г. Фергана, ул. Мураббийлар, дом 19. Тел.: (99873)244-44-94).

Автореферат диссертации разослан «09» __11__ 2021 г.
(протокол рассылки № ___ от «___» _________ 2021 г.).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI FARG'ONA DAVLAT UNIVERSITETI

А.К.Уринов
Председатель научного совета по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н., профессор

И.У.Хайдаров
Ученый секретарь научного совета по присуждению научных степеней, к.ф.-м.н.

Ш.Т.Каримов
Председатель научного семинара при научном совете по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н., доцент

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Во всем мире многие математические модели, научных и практический исследований часто приводятся к исследованию уравнений смешанного типа. Актуальным является исследовании нестандартно поставленных задач для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами которые обобщают классические задачи для уравнений смешанного типа. В настоящее время во многих мировых научных школах исследование нелокальных краевых задач с общими условиями склеивания является одним из основных научных направлений. Теория нелокальных краевых задач играет важную рол при технике и природе в частности, математическом моделировании газовой динамике, состояния и разработки нефтяных пластов, фильтрации грунтовых вод, переноса тепла и массы в объекте, имеющем сложное строение, электрических колебаний в проводах, движения жидкости в канале, окруженной пористой средой и аэродинамике, в других явлениях.

В настоящее время во всем мире актуальным является изучения нелокальных краевых задач со специальными общими условиями сопряжения. Исследование этих задач сводяться к нестандартным сингулярным интегральным уравнениям Трикоми с некарламановским сдвигами в несингулярной части ядра и нефредгольмовым оператором в правой части уравнения. Это новый тип сингулярных интегральных уравнений, которые мало исследованы. Одной из важных задач в этой связи является выполнение целевых научных исследований, в том числе по следующим направлениям: изучать теорию краевых задач для вырождающихся уравнений с сингулярными коэффициентами и уравнений смешанного типа; опредилить свойства ограниченности или неограниченности значений решения уравнения и его производных в окрестности линии изменения типа уравнения; исследовать краевых задач со специальными условиями сопряжения; ставить и изучат корректных задач в зависимости от значений коэффициентов при младших членах уравнения. Научные исследования в вышеуказанных направлениях исследований определяют актуальность диссертации.

В нашей Республике особое внимание уделяется фундаментальным наукам, имеющим научное и практическое применение. В решении стоящих проблем исследование краевых задач для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами и нахождение эффективных методов их решения – одно из целенаправленных научных исследований. Проведение научных исследований по приоритетным направлениям математических наук, а именно в области алгебры и функциональный анализ, дифференциальных уравнений и математической физике а также по прикладной математике и математическому моделированию на уровне международных стандартов является одной из основных задач исследователей – математиков[1]. В целях выполнения этих задач важными считаются, в частности, развивать теорию уравнений смешанного типа и исследовать для них нелокальные задачи с общими условиями сопряжения.

Тема и объект исследования настоящей диссертации находятся в русле задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», ПП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», в Постановлениях ПП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», ПП-3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», ПП-4387 от 09 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан», ПП-4708 от 07 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Первые фундаментальные исследования для уравнений смешанного типа были выполнены Ф.Трикоми. После работ Трикоми для обобщенного уравнения Трикоми С.Геллерстедт исследовал краевые задачи, при постановке которых в гиперболической части рассматриваемой области значения искомого решения задаются на двух внутренних характеристиках или на частях граничных характеристик уравнения. После этой работы теория краевых задач для уравнений смешанного типа стала развиваться в основном в трех направлениях.

Первое направление - это исследование задачи Трикоми для более общих уравнений второго порядка, среди которых следует отметить работы С.Геллерстедта, А.В.Бицадзе, К.И.Бабенко, С.П. Пулькина, К.Б. Сабитова.

Второе направление-это различные модификации задачи Трикоми, среди которых отметим работы Геллерстедта для уравнения смешанного типа. В работе Ф.И.Франкля изучена задача, когда граничные значения искомой функции задаются на границе эллиптичности рассматриваемой области и на

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан»

нехарактеристической кривой, которая сначала совпадает с характеристикой и затем отходит вовнутрь характеристического треугольника. Эта задача названа обобщенной задачей Трикоми. В этом направлении отметим работы А.В.Бицадзе, К.И.Бабенко, А.П.Солдатова, К.Б.Сабитова, М.А.Садыбекова и др. Обобщенную задачу Трикоми для уравнения гиперболо - параболического типа исследовал Т.Д.Джураев. Г.Каратопраклиев обобщил задачу Трикоми для уравнения смешанного типа на случай, когда при переходе через линию параболического вырождения решение и его производная могут иметь разрыв первого рода. Исследованию различных модификаций задачи Трикоми для уравнений высокого порядка посвящены работы А.В.Бицадзе и М.С.Салахитдинова, Т.Д.Джураева, С.А.Абдиназарова. Весьма исчерпывающая библиография по таким задачам содержится в монографиях М.С.Салахитдинова и Т.Д.Джураева.

Третье направление - это задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. Основополагающие результаты по этому направлению отражены в работах Ш.А.Алимова, Е.И.Моисеева, Т.Ш.Кальменова, С.М.Пономарева, К.Б.Сабитова, М.С.Салахитдинова, А.К.Уринова и др.

Наиболее существенные результаты по уравнениям смешанного типа были получены следующими учеными: Е.Хольмгреном в нормальной области для модельного вырождающегося эллиптического уравнения найдены формулы, дающие решения задачи Дирихле и Хольмгрена; С.Геллерстедтом разработана теория потенциала для модельного вырождающегося эллиптического уравнения, с помощью её построена функции Грина для задач Дирихле и Хольмгрена, найдены интегральные представления указанных задач; С.Г.Михлин, используя метод Карлемана решения сингулярного интегрального уравнения и теорему Лиувилля об аналитическом продолжении, разработал метод регуляризации сингулярного интегрального уравнения Ф.Трикоми; А.В.Бицадзе для модельного уравнения смешанного типа сформулировал принцип экстремума.

К началу 70-х годов прошлого столетия, казалось, все вопросы теории краевых задач для уравнений смешанного типа были решены и для дальнейшего развития этой теории нужны были в корне новые постановки задач. Новой задачей, дающей новый импульс развития теории краевых задач для уравнений смешанного типа, стала совместная работа А.В. Бицадзе и А.Самарского.

В последнее время задачи с условиями Бицадзе-Самарского являются объектом постоянного рассмотрения во многих научных центрах.

Настоящая диссертация посвящена исследованию нелокальных краевых задач для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего образовательного учреждения, где выполнена диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с планом научных исследований по фундаментальному проекту Ф–4–32: (2012-2016) «Изучение корректности задач, объединивших в одной формулировке условия задачи Трикоми, задач со смещением и Бицадзе - Самарского для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом» Термезского государственного университета.

Целью исследования является нахождение корректно поставленных краевых задач для уравнений смешанного типа с сингулярным коэффициентом и доказательство их однозначной разрешимости.

Задачи исследования, решаемые в данной работе, следующие:

доказательство существования и единственности решения задачи с условием Геллерстедта на характеристиках одного семейства для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом;

исследование однозначной разрешимости краевой задачи с недостающим условием Трикоми на характеристике и условием Бицадзе-Самарского на параллельных характеристиках, а также с общими условиями сопряжения на линии вырождения для одного класса уравнений смешанного типа;

доказательство существования и единственности решения задачи с условием Бицадзе-Самарского на границе эллиптичности и на линии вырождения, когда, область ограничена отрезком оси ординат, нормальной кривой и двумя характеристиками уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом;

построение решения нестандартного интегрального уравнения Трикоми методом регуляризации С. Г. Михлина.

Объектом исследования являются уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом и сингулярные интегральные уравнения с некарлемановским сдвигом в несуммируемой части ядра и нефредгольмовым оператором в правой части уравнения.

Предметом исследования являются нелокальные задачи для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом.

Методы исследования. В диссертации использованы методы принципа экстремума А.В.Бицадзе, а также методы теории регулярных и сингулярных интегральных уравнений.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

доказана однозначная разрешимость задачи с условиями Геллерстедта на характеристиках одного семейства для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом;

обоснована корректность задачи с условием Бицадзе - Самарского на параллельных характеристиках и общими условиями сопряжения на линии вырождения для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом;

доказаны существование и единственность решения задач для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом при предельном значении параметра;

обоснована однозначную разрешимость локальных и нелокальных краевых задач для уравнений смешанного типа в нестандартной области, когда эллиптическая часть границы области совпадает с отрезком оси ординат и нормальной кривой уравнения.

Практические результаты исследования состоят в следующем:

доказано, что, используя однозначную разрешимость задач с условиями Бицадзе-Самарского для уравнений смешанного типа с сингулярным коэффициентом, можно построить и исследовать математические модели, связанные с течением газов и жидкостей.

предложен алгоритм регуляризации сингулярного интегрального уравнения Трикоми со сдвигом в несингулярной части ядра с нефредгольмовым оператором в нехарактеристической части уравнения, имеющий изолированную особенность первого порядка в одной точке.

Достоверность результатов исследования: обоснована принятыми математическими дедуктивными выводами, с использованием методов теории дифференциальных уравнений в частных производных, теории аналитических функций и интегральных уравнений, а также строгими и полными доказательствами теорем.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научное значение результатов исследования заключается в том, что полученные в работе научные результаты могут быть использованы в теории дифференциальных уравнений с частными производными смешанного типа с сингулярными особенностями при младшей производной.

Практическое значение результатов, полученных в диссертационной работе, определяется применением их в изучении физических, технических, биологических процессов, описываемых при помощи уравнений смешанного типа.

Внедрение результатов исследования. На основе научных результатов, проведённых исследований по нелокальным задачам для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами с общими условиями сопряжения на линии вырождения:

разработанные методы регуляризации нестандартных сингулярных интегральных уравнений использованы при решении нелокальных краевых задач для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом в международном проекте №AP05132680 на тему “Нелокальные модели течений в многомасштабных пористых средах” за 2018-2020 гг. (Институт информационных и вычислительных технологий Республики Казахстан, справка о внедрении № 01-07/269 от 18.05. 2021 г.). Применение научного результата позволило правильно составить соответствующую разностную задачу при моделировании состояния пластов с учетом нелокальных соотношений значений решения, описывающего течения в гиперболических частях границы в многомасштабных пористых средах;

теоремы по обоснованию корректности новых нелокальных краевых задач типа Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом использованы при решении интегрального уравнения типа Трикоми в международном проекте РФФИ №17-41-020516

«Математические модели трансзвуковых течений жидкостей и газов и их приложения» за 2017-2019 гг. и РФФИ №19-31-60016 (Стерлитамакский филиал государственного автономного научного учреждения института стратегических исследований Республики Башкортостан, справка о внедрении № 42 от 23.07.2021г.). Применение результатов дало возможность построения решения сингулярных интегральных уравнений типа Трикоми в явном виде.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации доложено на 8 международных и 5 республиканских научно-практических конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 18 научных работ, из них 5 статей опубликованы в журналах, входящих в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций на соискания ученой степени доктора философии (PhD), в том числе, 2 статьи опубликованы в зарубежных журналах, 3– в республиканских научных изданиях.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы, содержащего 74 наименований. Объем диссертации составляет 119 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведена степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объекты и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **“Задача с условием Геллерстедта на характеристиках одного семейства для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом”**, для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом, рассматриваемого в некоторой смешанной области, доказаны теоремы единственности и существования решения задачи с условиями Геллерстедта на части граничной характеристики и на параллельной ей внутренней характеристике.

В первом параграфе этой главы приводится постановка задачи Γ_0.

Пусть $D-$конечная односвязная область плоскости xOy, ограниченная при $y>0$ нормальной кривой $\sigma_0 : x^2+4(m+2)^{-2}y^{m+2}=1$, с концами в точках $A(-1,0)$ и $B(1,0)$, а при $y<0-$ характеристиками AC и BC уравнения

$$(signy)|y|^m u_{xx}+u_{yy}+(\beta_0/y)u_y=0, \qquad (1)$$

где $m-$ положительная постоянная, $\beta_0 \in (-m/2,\ 1)$.

Обозначим через D^+ и D^- части области D, лежащие соответственно в полуплоскостях $y>0$ и $y<0$, а через C_0 и C_1-точку пересечения характеристик AC и BC соответственно с характеристиками уравнения (1), выходящих из точки $E(c,0)$, где $c-$некоторое число, принадлежащее интервалу $I=\{x:-1<x<1\}$ оси $y=0$.

Задача Γ_0. Требуется найти в области D функцию $u(x,y)\in C\left(\bar{D}\right)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $u(x,y)$ принадлежит классу $C^2\left(D^+\right)$ и в области D^+ удовлетворяет уравнению (1);

2) $u(x,y)$ в области D^- является обобщённым решением уравнения (1) класса R_1;

3) на интервале вырождения AB имеет место условие сопряжения

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{y\to+0}y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad x\in I\setminus\{c\}, \tag{2}$$

причём эти пределы при $x\to\pm 1$, $x\to c$ могут иметь особенность порядка ниже $1-2\beta$, где $\beta=m+2\beta_0/\left(2(m+2)\right)\in(0,1/2)$;

4) выполняются условия

$$u(x,y)\big|_{\sigma_0}=\varphi(x),\ x\in[-1,1]; \tag{3}$$

$$u(x,y)\big|_{AC_0}=\psi_0(x),\ x\in[-1,(c-1)/2]; \tag{4}$$

$$u(x,y)\big|_{EC_1}=\psi_1(x),\ x\in[c,(c+1)/2], \tag{5}$$

где $\varphi(x)$, $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$ - заданные функции, причём

$$\varphi(x)\in C[-1,1]\cap C^{0,\alpha_0}(-1,1),\ \ \psi_0(x)\in C[-1,(c-1)/2]\cap C^{1,\alpha_0}(-1,(c-1)/2),$$

$$\psi_1(x)\in C[(c+1)/2,1]\cap C^{1,\alpha_0}((c+1)/2,1),\ \alpha_0\in(0,1),$$

$\varphi(x)=(1-x^2)\tilde{\varphi}(x)$, где $\tilde{\varphi}(x)\in C^{0,\alpha_0}[-1,1]\cap C^{0,\alpha_0}(-1,1)$, $\psi_0(-1)=0$, $\psi_1(c)=0$.

Заметим, что (3) является условием Дирихле, заданным на кривой σ_0, а (4) и (5)- условием Геллерстедта, заданным на граничной характеристике AC_0 и на внутренней характеристике EC_1 соответственно. При $c=-1$ или $c=1$ из задачи Γ_0 следует задача Трикоми.

Во втором параграфе с помощью принципа экстремума доказывается единственность решения задачи Γ_0.

Основным результатом этого параграфа является

Теорема 1.1 Решение задачи Γ_0 при выполнении условий $\psi_0(x)\equiv 0$, $\psi_1(x)\equiv 0$ своего наибольшего положительного значения и наименьшего отрицательного значения в замкнутой области $\bar{D}^+$ принимает только в точках нормальной кривой σ_0.

Из теоремы 1.1 следует

Следствие. Задача Γ_0 может иметь не более одного решения.

В третьем параграфе исследуется существование решения задачи Γ_0. Доказано, что имеет место следующая

Теорема 1.2 Задача Γ_0 однозначно разрешима.

Эта теорема доказывается эквивалентным сведением задачи Γ_0 к решению следующей нестандартной системы сингулярных интегральных уравнений со сдвигом в несуммируемой части ядра и нефредгольмовым оператором в правой части уравнения:

$$\nu_0(x)+\lambda\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{a}{1-(ax-b)(at-b)}\right)\nu_0(t)dt=g_0(x),\ x\in I, \tag{6}$$

$$\nu_1(x)+\lambda\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{b}{1-(bx+a)(bt+a)}\right)\nu_1(t)dt=g_1(x),\ x\in I, \tag{7}$$

где $a=(1+c)/2,\ b=(1-c)/2,\ a+b=1,\ a-b=c,$

$$g_0(x)=-\lambda\int_{-1}^{1}\frac{b\nu_1(t)dt}{bt-ax+1}+T_0[\nu_1]+F_0(x), \tag{8}$$

$$g_1(x)=\lambda\int_{-1}^{1}\left(\frac{a(1-t}{b(1+x)}\right)^{1-2\beta}\frac{a\nu_0(t)dt}{at-bx-1}+G_0[\nu_0]+S_0[\nu_1]+F_1(x). \tag{9}$$

Доказано, что справедливы следующие теоремы.

Теорема 1.3. Если $g_0(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера при $x\in(-1,1)$ и $g_0(x)\in L_p(-1,1)$ $p>1$, то решение уравнения (6) в классе функций $h(-1)$, в котором $(1+x)^{1-2\beta}\nu_0(x)$ ограничена на левом конце и может быть неограниченной на правом конце интервала $(-1,1)$, выражается формулой

$$\nu_0(x)=\frac{1+sin(\beta\pi)}{2}g_0(x)-\frac{cos(\beta\pi)}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{2\alpha}\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{\alpha}\times$$
$$\times\left(\frac{1-c(at-b)}{1-c(ax-b)}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{a}{1-(ax-b)(at-b)}\right)g_0(t)dt, \tag{10}$$

где $\alpha=(1-2\beta)/4$.

Теорема 1.4. Если $g_1(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера при $x\in(-1,1)$ и $g_1(x)\in L_p(-1,1)$, $p>1$, то решение уравнения (7) в классе функций $h(-1)$, в котором $(1+x)^{1-2\beta}\nu_1(x)$ ограничена при $x=-1$ и может быть неограниченной при $x=1$, выражается формулой

$$\nu_1(x)=\frac{1+sin(\beta\pi)}{2}g_1(x)-\frac{cos(\beta\pi)}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{3\alpha}\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{2\alpha}\times$$
$$\times\left(\frac{1-(bx+a)c}{1-(bt+a)c}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{b}{1-(bx+a)(bt+a)}\right)g_1(t)dt. \tag{11}$$

Доказательство теорем 1.3 и 1.4 приводится методом Карлемана, развитого С. Г. Михлиным.

Подставляя $g_0(x)$ и $g_1(x)$ из (8) в (9) в (10) и (11), соответственно, после несложных преобразований, получим уравнение Винера-Хопфа вида

$$\rho(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}K_0(y-s)\rho(s)ds+R_4[\rho], \tag{12}$$

где $R_4[\rho]-$ регулярный оператор.

Ядро $K_0(x)$ уравнения (12) непрерывно дифференцируемо и имеет показательный порядок убывания на бесконечности, оператор $R_4[\rho]$ также имеет показательный порядок убывания на бесконечности.

Известно, что теоремы Фредгольма для интегральных уравнений типа свёртки справедливы лишь в одном частном случае, когда индекс этих уравнений равен нулю. Поэтому сначала доказано, что индекс уравнения (12) равен нулю, а затем, уравнение (12) с помощью преобразования Фурье однозначно редуцировано к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, однозначная разрешимость которого следует из единственности решения задачи Γ_0.

В четвёртом параграфе доказаны единственность и существование решения задачи Γ_0 для уравнения

$$(signy)|y|^m u_{xx}+u_{yy}-(m/2y)u_y=0\,,m>0\,. \tag{13}$$

Во второй главе диссертации, названной «**Задача с условием Бицадзе-Самарского на параллельных характеристиках и общими условиями сопряжения на линии вырождения для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом**», доказаны теоремы единственности и существования решения задачи для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом с локальными и нелокальными условиями на частях граничной характеристики и с разрывными условиями склеивания на линии вырождения.

В §2.1 дается постановка задачи TH.

Пусть $\Omega-$ конечная односвязная область плоскости xOy, ограниченная при $y>0$ нормальной кривой $\sigma_0: x^2+4(m+2)^{-2}y^{m+2}=1$, с концами в точках $A(-1,0)$ и $B(1,0)$, а при $y<0-$характеристиками AC и BC уравнения (1).

Обозначим через Ω^+ и Ω^- части области Ω, лежащие соответственно в полуплоскостях $y>0$ и $y<0$, а через C_0 и C_1- соответственно точки пересечения характеристик AC и BC с характеристиками, исходящими из точки $E(c,0)$, где $c\in I=AB=(-1,1)-$ интервал оси $y=0$.

Задача TH. Требуется найти в области Ω функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $u(x,y)$ непрерывна в каждой из замкнутых областей $\bar{\Omega}^+$ и $\bar{\Omega}^-$;

2) $u(x,y)$ принадлежит классу $C^2\left(\Omega^+\right)$ и в области Ω^+ удовлетворяет уравнению (1);

3) $u(x,y)$ в области Ω^- является обобщённым решением класса R_1;

4) на интервале вырождения AB выполняется общее условие сопряжения

$$u(x,-0) = a_1 u(x,+0) + a_0(x), \ \ x \in \overline{I}; \tag{14}$$

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y} = f(x)\lim_{y\to +0} y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y} + b_0(x), \quad x \in I \setminus \{c\}, \tag{15}$$

причём пределы в (15) при $x \to \pm 1$, $x \to c$ могут иметь особенность порядка ниже $1-2\beta$, где $\beta = (m+2\beta_0)/2(m+2) \in (0,1/2)$;

5) выполняются условия

$$u(x,y) = \varphi(x), \ \ (x,y) \in \overline{\sigma}_0; \tag{16}$$

$$u(x,y)\big|_{AC_0} = \psi(x), \ \ x \in [-1,(c-1)/2]; \tag{17}$$

$$u[\theta(x)] = \mu u[\theta^*(x)] + \rho(x), \ \ x \in [c,1], \tag{18}$$

здесь $\theta(x_0)$ и $\theta^*(x_0)$ – соответственно аффиксы точек пересечения характеристик $C_0C \subset AC$ и EC_1 с характеристикой, исходящей из точки $(x_0,0)$, где $x_0 \in [c,1]$. В условиях (14)–(18) $a_0(x)$, $f(x)$, $b_0(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\rho(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, a_1 и μ – некоторые постоянные, причём $\psi(-1)=0$, $\varphi(-1)=\varphi(1)=0$, $f(x)=a_1$ при $x \in (-1,c)$.

Заметим, что (16) является условием Дирихле, заданным на кривой σ_0, а (18) представляет собой условие Бицадзе-Самарского на параллельных характеристиках $C_0C \subset AC$ и EC_1.

Отметим, что задача ТН при $\mu = 0$ $\left[\psi((c-1)/2) = \rho(c)\right]$ переходит в задачу Трикоми с разрывными условиями сопряжения на линии вырождения вида (14) и (15).

В §2.2 доказана единственность решения задачи ТН.

Имеет место следующая

Теорема 2.1. Решение задачи ТН при выполнении условий

$$\begin{aligned} &a_0(x)\equiv 0, \quad b_0(x)\equiv 0, \quad \varphi(x)\equiv 0, \quad \psi(x)\equiv 0, \quad \rho(x)\equiv 0, \\ &\mu<0, \quad a_1>0, \quad f(x)>0 \end{aligned} \tag{19}$$

тождественно равно нулю в замкнутой области $\overline{\Omega}^+$.

Из этой теоремы следует единственность решения задачи ТН.

В §2.3 доказано существование решения задачи ТН.

Теорема 2.2. Задача ТН при выполнении условий (19) и неравенств

$$\alpha_0 = \pi^{-1}arctg(\pi(C(-1))) < \frac{1}{4}, \qquad |3\alpha - \alpha_0| < \frac{1}{2},$$

однозначно разрешима, здесь

$$C(-1) = \frac{a_1\cos(\beta\pi)}{\pi(f(c)+a_1\sin(\beta\pi))}, \quad \alpha = \frac{1-2\beta}{4} < \frac{1}{4}.$$

При доказательстве этой теоремы задача ТН эквивалентно сведена к исследованию следующей системы сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных функций $\nu_0(x)$ и $\nu_1(x)$:

$$\nu_0(x)+\lambda\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+s}{1+x}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{s-x}-\frac{a}{1-(ax-b)(as-b)}\right)\nu_0(s)ds=g_0(x), \quad (20)$$

$$\nu_1(x)+C(x)\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+s}{1+x}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{s-x}-\frac{b}{1-(bx+a)(bs+a)}\right)\nu_1(s)ds=g_1(x), \quad (21)$$

где $g_0(x)=-\lambda\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+a+bs}{a(1+x)}\right)^{1-2\beta}\frac{b\nu_1(s)ds}{bs-ax+1}+\int_{-1}^{1}\widetilde{T}_0(x,s)\nu_1(s)ds+F_0(x),\ x\in I$

$$g_1(x)=-A(-1)\int_{-1}^{1}\left(\frac{a(1-s)}{b(1+x)}\right)^{1-2\beta}\frac{a\nu_0(s)ds}{as-bx-1}+\int_{-1}^{1}\widetilde{H}_0(x,s)\nu_0(s)ds+$$

$$+\int_{-1}^{1}\widetilde{H}_1(x,s)\nu_1(s)ds+F_1(x), \qquad x\in I,$$

$\tilde{T}_0(x,s),\ \tilde{H}_0(x,s),\ \tilde{H}_1(x,s)$ – регулярные ядра,

$$A(-1)=-a_1cos(\beta\pi)/\pi(f(c)+a_1sin(\beta\pi)),\ C(-1)=-A(-1).$$

Доказано, что справедливы следующие теоремы.

Теорема 2.3. Если функция $g_0(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера при $x\in(-1,1)$ и принадлежит классу $g_0(x)\in L_p(-1,1),\ p>1,$ то решение уравнения (20) в классе $h(-1),$ в котором функция $(1+x)^{1-2\beta}\nu_0(x)$ ограничена на левом конце $x=-1$ интервала $(-1,1)$ и может быть неограниченной на его правом конце $x=1,$ выражается формулой

$$\nu_0(x)=\frac{1+sin(\beta\pi)}{2}g_0(x)-\frac{cos(\beta\pi)}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{2\alpha}\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-c(at-b)}{1-c(ax-b)}\right)^{\alpha}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{t-x}-\frac{a}{1-(ax-b)(at-b)}\right)g_0(t)dt,$$

где $\alpha=(1-2\beta)/4.$

Теорема 2.4. Если функция $g_1(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера при $x\in(-1,1)$ и принадлежит классу $g_1(x)\in L_p(-1,1),\ p>1,$ то решение уравнения (21) в классе $h(-1),$ в котором функция $(1+x)^{1-2\beta}\nu_1(x)$ ограничена на левом конце $x=-1$ интервала $(-1,1)$ и может быть неограниченной на его правом конце $x=1,$ выражается формулой

$$\nu_1(x)=\frac{g_1(x)}{1+\pi^2C^2(x)}-\frac{\pi C(x)}{1+\pi^2C^2(x)}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{4\alpha-\alpha_0}\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{2\alpha_1}\times$$

$$\times\left(\frac{1-c(bx+a)}{1-c(bt+a)}\right)^{\alpha_0}\frac{\delta(x)}{\delta(t)}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{b}{1-(bx+a)(bt+a)}\right)g_1(t)dt.$$

Посредством теорем 2.3 и 2.4 система уравнений $\{(20),(21)\}$ сведена к сингулярному интегральному уравнению Трикоми с нерегулярным оператором в правой части уравнения. Регуляризируя эти уравнения с помощью метода Карлемана, получено интегральное уравнение Винера-

Хопфа, которое редуцируется к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, разрешимость которого следует из единственности решения задачи ТН.

В §2.4 решается задача ТН для уравнения (13). Здесь также единственность и существование решения задачи ТН исследуется как в параграфах 2.2 и 2.3.

Третья глава диссертации, названная **«Задача с локальными и нелокальными условиями на границе области эллиптичности для уравнения смешанного типа»**, посвящена исследованию одной нелокальной задачи с условиями Бицадзе-Самарского для уравнения Геллерстедта (1) с сингулярным коэффициентом в некоторой смешанной области, когда граница эллиптичности совпадает с отрезком оси Oy и нормальной кривой уравнения.

В §3.1 дается постановка задачи БС. Рассмотрим уравнение (1) в области D_a, ограниченной при $y>0$ отрезком OB оси Oy, дугой AB нормальной кривой $\sigma_a: x^2+4y^{m+2}/(m+2)^2=a^2, x\geq 0$ и при $y<0$ характеристиками OC и AC уравнения (1), здесь $O=O(0,0)$, $A=A(a,0)$, $B=B(0,b)$. Через D_a^+ и D_a^-, соответственно обозначим части области D_a, лежащие в верхней и в нижней полуплоскостях.

Пусть прямая $y=-k(x-x_0)$ $(x\leq x_0, 0\leq x_0\leq a)$ пересекает оси координат в точках $(x_0,0)$, $(0,kx_0)$, где $k=b/a, b=((m+2)a/2)^{2/(m+2)}$.

Задача БС **(Бицадзе-Самарского).** Требуется найти в области D_a функцию $u(x,y)\in C(\overline{D_a})$ удовлетворяющую следующим условиям:

1) $u(x,y)$ принадлежит классу $C^2(D_a^+)$ и в области D_a^+ удовлетворяет уравнению (1);

2) $u(x,y)$ в области D_a^- является обобщённым решением из класса R_1;

3) выполняются условия

$$u(x,y)\big|_{\sigma_a}=\varphi_1(x),\ 0\leq x\leq a; \tag{22}$$

$$u(0,kx)=\mu(x)u(x,0)+\varphi_2(x),\ 0\leq x\leq a; \tag{23}$$

$$u(x,y)\big|_{OC}=\psi(x),\ 0\leq x\leq a/2, \tag{24}$$

где $\varphi_1(x)$, $\mu(x)$, $\varphi_2(x)\in C[0,a]$, $\psi(x)\in C[0,a/2]\cap C^{1,\delta}(0,a/2)$ – заданные функции, причём $\psi(0)=0$, $\varphi_2(0)=0$, $\mu(x)=x^{\delta_1}\tilde{\mu}(x)$, $\varphi_2(x)=x^{\delta_1-m}\tilde{\varphi}_2(x)$, $\delta_1>(m+2)(1+\beta)-1$, $\tilde{\mu}(x)$, $\tilde{\varphi}_2(x)\in C[0,a]$, $\varphi_1(x)=(a-x)^{\delta_2}\tilde{\varphi}_1(x)$, $\delta_2>1/2$, $\tilde{\varphi}_1(x)\in C[0,a]$.

4) на отрезке вырождения имеет место условие сопряжения

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{y\to +0}y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y},\qquad 0<x<a, \tag{25}$$

причём эти пределы при $x \to 0,\ x \to a$ могут иметь особенность порядка меньше $1-2\beta$, где $\beta = (m+2\beta_0)/2(m+2) \in (0,1/2)$.

В §3.2 доказана единственность решения задачи БС.

Для задачи БС аналогом принципа экстремума А.В.Бицадзе является

Теорема 3.1. Решение задачи БС при выполнении условий $\varphi_2(x) \equiv 0,\ \psi(x) \equiv 0$,

$$0 < \mu(x) < 1 \tag{26}$$

своего наибольшего положительного значения и наименьшего отрицательного значения в замкнутой области $\bar{D}_a^+$ принимает только в точках кривой σ_a.

Следствие. Задача БС при выполнении условия (26) может иметь не более одного решения.

В §3.3 доказано существование решения задачи БС.

Теорема 3.2. Задача БС при выполнении условия (26) однозначно разрешима.

При доказательстве этой теоремы задача БС эквивалентно сведена к исследованию следующего сингулярного интегрального уравнения относительно неизвестной функции $\tau(x) = u(x,0)$:

$$\tau(x) + \lambda \int_0^a \left(\frac{a-x}{a-t} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{a}{a^2-xt} \right) \tau(t)dt =$$

$$= \lambda \int_0^a \frac{\tau(t)dt}{t+x} + R_2[\tau] + F(x), \qquad x \in (0,a), \tag{27}$$

где $R_2[\tau]$ - регулярный оператор. $F(x)$ – известная функция.

Первый интегральный оператор правой части уравнения (27) не является регулярным, так как подынтегральное выражение при $x=0,\ t=0$ имеет изолированную особенность первого порядка, и поэтому это слагаемое в (27) выделено отдельно.

Временно считая правую часть уравнения (27) известной функцией, запишем его в виде

$$\tau(x) + \lambda \int_0^a \left(\frac{a-x}{a-t} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{a}{a^2-xt} \right) \tau(t)dt = g_0(x), \tag{28}$$

где

$$g_0(x) = \lambda \int_0^a \frac{\tau(t)dt}{t+x} + R_2[\tau] + F(x). \tag{29}$$

Решение уравнения (28) будем искать в классе функций Гёльдера H, в котором $(a-x)^{2\beta-1}\tau(x)$ ограничена при $x=0$ и может обращаться в бесконечность порядка ниже $1-2\beta$ при $x=a$, т.е. в классе $h(a)$. Решение уравнения (28) в классе $h(a)$ выражается формулой

$$\tau(x)=\frac{1+\sin(\beta\pi)}{2}\int_0^a\frac{\tau(t)dt}{t+x}-\frac{\cos(\beta\pi)}{2\pi}\int_0^a\tau(s)ds\int_0^a\left(\frac{a-x}{a-t}\right)^{2\alpha}\left(\frac{x}{t}\right)^{\alpha}\times$$
$$\times\left(\frac{1}{t-x}-\frac{a}{a^2-xt}\right)\frac{dt}{t+s}+R_3[\tau]+F_1(x), \tag{30}$$

где $R_3[\tau]$ – регулярный оператор.

Подставляя $g_0(x)$ из (29) в (30) получим уравнение Винера-Хопфа вида

$$\rho(y)=\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int_0^\infty K(y-t)\rho(t)dt+R_5[\rho]+F_2(y),\quad y\in(0,\infty), \tag{31}$$

где $R_5[\rho]=e^{(\alpha-1/2)y}R_4[\tau]$ – регулярный оператор, $F_2(y)=e^{(\alpha-1/2)y}F_1(ae^{-y})$ – известная функция.

Функция $K(x)$ непрерывна и имеет экспоненциальный порядок убывания на бесконечности. В силу $\alpha\in(0,1/4)$ значение $\alpha-1/2$ отрицательно, следовательно, оператор $R_5[\rho]$ и функция $F_2(y)$ также имеют показательный порядок убывания на бесконечности.

Уравнение (31) с помощью преобразования Фурье приводится к краевой задаче Римана и тем самым решается в квадратурах.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена исследованию разрешимости локальных и нелокальных краевых задач для уравнений смешанного типа с сингулярным коэффициентом и с общими условиями сопряжения на линии вырождения в некоторых смешанных областях.

В заключение можно сделать следующие выводы по результатам исследований:

1. Для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом исследована задача Геллерстедта с данными на характеристиках одного семейства.
2. Для уравнения смешанного типа исследована задача с недостающим условием Трикоми на части граничной характеристики и условием Бицадзе - Самарского на части граничной, параллельной ей внутренней характеристике и общими условиями сопряжения на линии вырождения.
3. Для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом, когда границы гиперболической части области - есть характеристики, а эллиптическая границы области - есть половина нормальной кривой уравнения и отрезок оси Oy, исследована задача, когда условие Бицадзе- Самарского задается на отрезках осей координат.
4. Найдены формулы обращения сингулярных интегральных уравнений Трикоми со сдвигом в «несингулярной» части ядра.
5. Изложен алгоритм решения сингулярного интегрального уравнения с нефредгольмовым оператором в нехарактеристической части уравнения, имеющего изолированную особенность первого порядка.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 FERGANA STATE UNIVERSITY

TERMEZ STATE UNIVERSITY

KHURRAMOV NOSIR KHAMIDOVICH

NONLOCAL PROBLEMS FOR A MIXED TYPE EQUATIONS WITH SINGULAR COEFFICIENTS WITH COMMON CONJUGATION CONDITIONS ON THE DEGENERATION LINE

01.01.02 – Differential equations and mathematical physics
(Physical and mathematical sciences)

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Fergana – 2021

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2019.3.PhD/FM398.

Dissertation has been prepared at Termez State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific supervisor:	**Mirsaburov Mirakhmat** doctor of physical and mathematical sciences, professor
Official opponents:	**Islomov Bozor** doctor of physical and mathematical sciences, professor
	Karimov Erkinjon Tulkinovich doctor of physical and mathematical sciences, senior researcher
Leading organization:	**Samarkand State University**

Defense will take place «20» 11 2021 at 10.00 at the meeting of Scientific council number PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 at Fergana State University. (Address: 150100, Uzbekistan, Fergana, Murabbiylar str.,19, Ph.: (+99873) 244-44-02, fax: (+99873) 244-44-93, e-mail: fardu_info@umail.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre of Fergana State University (is registered № 134) (Address: 150100, Uzbekistan, Fergana, Murabbiylar str., 19, Ph.: (+99873) 244-44-94).

Abstract of dissertation sent out on « 09 » 11 2021.
(Mailing report №__ on «___» ___________ 2021).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI FARG'ONA DAVLAT UNIVERSITETI

A.K.Urinov
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.F-M.S., Professor

I.U.Khaydarov
Scientific secretary of Scientific Council on award of scientific degrees,C.F.-M.S.

Sh.T.Karimov
Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.F-M.S., Docent

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the work is to find the correct boundary problems for mixed type equations with singular coefficients and o prove their unique solvability.

The object of the work is the mixed type equations with singular coefficient and singular integral equation with nocarleman shifts in the uncollected part of the kernel and a nofredholm operator on the right hand side of the equation.

The scientific novelty of the research are:

the uniquely solvability of the problems with Gellerstedt condition on the characteristics of a family for mixed type equations has been proved;

the correctness of the problem with Bitsadze-Samarsky conditions on the parallel characteristics and with general conjugation conditions on the line of degeneration for the Gellerstedt equation with a singular coefficient was showed;

the existence and uniqueness of the solution of the problems for mixe type equation with singular coefficients for limit values of parameters was proved;

the uniquely solvability of local and nonlocal boundary problems for mixed type equations were substantiated in nonstandard domains, when elliptic part of the domain coincides with segment of oradinate axes and normal curve of equation.

Implementation of research results The scientific results obtained in the dissertation on nonlocal problems for equations of mixed type with singular coefficients and general conjugation conditions on the degeneration line were used in the following research projects:

the developed methods of regularization of non-standard singular integral equations were used to solve nonlocal boundary value problems for the Gellerstedt equation with a singular coefficient in the international project No. AP05132680 on the topic "Nonlocal flow models in multiscale porous media" for 2018-2020 years. (Institute of Information and Computing Technologies of the Republic of Kazakhstan, certificate of implementation No. 01-07/269 dated May 18,2021). The application of the scientific result made it possible to correctly formulate the corresponding difference problem when modeling the state of the reservoirs, taking into account the nonlocal relationships of the values of the solution describing the flows in the hyperbolic parts of the boundary in multiscale porous media;

theorems to substantiate the correctness of new nonlocal boundary value problems of the Bitsadze-Samarskii type for a mixed type equations with a singular coefficient were used to solve the Tricomi-type integral equation in the international project RFBR No. 17-41-020516 "Mathematical models of transonic flows of liquids and gases and their applications" for 2017-2019 years and RFBR No. 19-31-60016 (Sterlitamak branch of the State Autonomous Scientific Institution of the Institute for Strategic Research of the Republic of Bashkortostan, certificate of implementation No. 42 of 23.07.2021). Application of the results makes it possible to construct the solution of singular integral equations of the Tricomi type in explicit form.

The structure and scope of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, three chapters, the conclusion and the list of references. The volume of the dissertation is 119 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; I part)

1. Мирсабуров М., Бегалиев О., Хуррамов Н.Х. Об одном обобщении задачи Трикоми //Дифференциальные уравнения. 2019, том 55 №8, С.1117-1126.
   M. Mirsaburov, O. Begaliev, N.Kh. Khurramov. Generalization of the Tricomi Problem. // Differential Equations, 2019, Vol., 55, №8, pp.1118-1127.
DOI: 10.1134/S0012266119080093 (Web of Science. IF= 0.677)
2. Мирсабуров М., Хуррамов Н. Задача с условием Бицадзе- Самарского на характеристиках одного семейства и общими условиями сопряжения на линии вырождения для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом // Дифференциальные уравнения. 2020, том 56, №8, С.1073-1094.
   M. Mirsaburov, N. Khurramov. A Problem with the Bitsadze– Samarskii Condition on the Characteristics of One Family and with General Transmission Conditionson the Degeneration Line for the Gellerstedt Equation with a Singular Coefficient. // Differential Equations, 2020, Vol. 56, №8, pp. 1050–1071. **DOI**: 10.1134/S001226612008008X (Web of Science. IF 0.837)
3. Хуррамов Н.Х. Об одном обобщении задачи Трикоми для одного класса уравнений смешанного типа // Бюллетень Института математики 2020, №3, С.183-198. (01.00.00; № 17).
4. Хуррамов Н.Х. Задача с условием Бицадзе- Самарского на параллельных характеристиках одного семейства и общими условиями сопряжения на линии вырождения для одного класса уравнений смешанного типа //Бюллетень Института математики 2020, №4, стр.128-146. (01.00.00; № 17).
5. Khurramov N.Kh. On a problem with the Tricomi condition on part of the boundary characteristic and the Gellerstedt condition on an internal characteristic parallel to it // Uzbek Mathematical Journal, 2020. №3, pp.98-106. (01.00.00; № 6).

II бўлим (II часть; II Part)

6. Мирсабуров М., Хуррамов Н. Х. Задача для уравнения смешанного типа с условием Бицадзе- Самарского на характеристиках одного семейства // IV Международная научная конференция “Актуальные проблемы прикладной математике” г.Нальчик-Эльбрус Кабардино-Балгарская республика, Россия; 22-26 мая 2018 г. С. 187.
7. Мирсабуров М., Хуррамов Н.Х. Задача для уравнения смешанного типа с условием Бицадзе-Самарского на характеристиках одного семейства // Международная научная конференция. “Дифференциальные уравнения и смежные проблемы” г. Стерлитамак . 25-29 июня 2018 г. Том 1. С. 116-118 .

8. Мирсабуров М., Хуррамов Н.Х. О единственности решение задачи с условием Бицадзе-Самарского на характеристиках одного семейства и общими условиями сопряжения на линии вырождения для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом // Современная математика и ее приложения: материалы Международной научно- практической конференции (Грозный 21-23 октября 2018г.). – Махачкала: АЛЕФ, ЧГПУ, 2018. – 144 с. С. 22-23.
9. Мирсабуров М., Хуррамов Н.Х. Задачи с условием Бицадзе-Самарского на характеристиках одного семейства и общими условиями сопряжения на линии вырождения для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом // V Международной научной конференции. Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики.Нальчик, Кабардино- Балкарская Республика. 4-7 декабря 2018 г. С. 147.
10. Мирсабуров М., Хуррамов Н.Х. Об одном интегральном уравнение Трикоми с некарлемановским сдвигом в несингулярной части ядра // Международная научная конференция «Теоретические и прикладные вопросы математики, механики и информатики». 12-14 июня 2019 года, г. Караганда, Казахстан. **С.** 93-94.
11. Мирсабуров М., Хуррамов Н.Х. Задача для уравнения смешанного типа с условием Бицадзе- Самарского на характеристиках одного семейства // Республика илмий - амалий анжуман. Фарғона давлат университети ЎзР ФА В. И. Романовский номидаги математика институти 22-23 май. 2019 йил. 10-11 бетлар.
12. Мирсабуров М., Хуррамов Н.Х. О существовании решения задачи с условием Бицадзе- Самарского на характеристиках одного семейства и общими условиями сопряжения на линии вырождения для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом//«Неклассические уравнения математической физики и их приложения» Узбекско- Российская научная конференция Ташкент. Узбекистан ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ 24-26 октября 2019 г. С.121-123.
13. Мирсабуров М., Хуррамов Н.Х. О единственности решения задачи с условиями Трикоми на части граничной характеристики и Геллерстедта на параллельной ей внутренней характеристике // “Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами.” // Материалы межд. конф. Таджикистан. Душанбе 30-31 январ 2020 г. С. 185-187.
14. Хуррамов Н. Х. О существования решения задачи с условиями Трикоми на части граничной характеристики и Геллерстедта на параллельной ей внутренней характеристике // “Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики” Тезисы докладов межд. научной конф. Фергана 12-13 март 2020 г. С. 180-184.

15. Хуррамов Н. Х. Об одном обобщении задачи Трикоми // Сборник тезисов научной онлайн- конференции «Современные проблемы математики» 20 мая 2020 года. Нукус. 180-183 стр.
16. Хуррамов Н. Х., Аманов Б.Б. О единственности решения задачи с локальными и нелокальными условиями на граничной характеристике для одного класса уравнений смешанного типа // «Математиканинг замонавий масалалари: муаммолар ва ечимлар» мавзусидаги республика миқёсидаги илмий онлайн конференция материаллари тўплами 21-23 октябр 2020 йил. Термиз ш. 198-200 бетлар.
17. Мирсабуров М., Хуррамов Н. Х. Задача с условием Бицадзе-Самарского на характеристиках одного семейства и общими условиями сопряжения на линии вырождения для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом // "Современные методы математической физики и их приложения" республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых. 17-18 ноябрь 2020 г. г. Ташкент. 250-254 стр.
18. Мирсабуров М., Хуррамов Н. Х. Задача с локальными и нелокальными условиями на границе области эллиптичности для уравнения смешанного типа // "Современные методы математической физики и их приложения" республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых. 17-18 ноябрь 2020 г. г. Ташкент. 392-397 стр.