В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

ХАМДАМОВ ИСАКЖАН МАМАСАЛИЕВИЧ

ТАНЛАНМА ЭКСТРЕМАЛ ҚИЙМАТЛАРИНИНГ АСИМПТОТИК ТАҲЛИЛИ ВА ҚАВАРИҚ ҚОПЛАМАЛАР ФУНКЦИОНАЛЛАРИ УЧУН ЛИМИТ ТЕОРЕМАЛАР

01.01.05 – Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ–2021

УДК: 519.218+519.24

Докторлик (DSc) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата докторской (DSc) диссертации

Contents of the Doctoral (DSc) Dissertation Abstract

Хамдамов Исакжан Мамасалиевич
Танланма экстремал қийматларининг асимптотик таҳлили ва қавариқ қопламалар функционаллари учун лимит теоремалар..... 3

Хамдамов Исакжан Мамасалиевич
Асимптотический анализ экстремальных значений выборки и предельные теоремы для функционалов от выпуклых оболочек..... 27

Khamdamov Isakjan Mamasaliyevich
Asymptotic analysis of extreme values of a sample and limit theorems for functionals of convex hulls …..... 51

Эълон қилинган ишлар рўйхати
Список опубликованных работ
List of published works ……....……..... 55

В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

ХАМДАМОВ ИСАКЖАН МАМАСАЛИЕВИЧ

ТАНЛАНМА ЭКСТРЕМАЛ ҚИЙМАТЛАРИНИНГ АСИМПТОТИК ТАҲЛИЛИ ВА ҚАВАРИҚ ҚОПЛАМАЛАР ФУНКЦИОНАЛЛАРИ УЧУН ЛИМИТ ТЕОРЕМАЛАР

01.01.05 – Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ–2021

Фан доктори (DSc) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2021.2.DSc/FM170 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация В.И.Романовский номидаги Математика институтида бажарилган.
Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (http://kengash.mathinst.uz) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида(www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий маслаҳатчи:	**Форманов Шакир Касимович** физика-математика фанлари доктори, академик
Расмий оппонентлар:	**Абдушукуров Абдурахим Ахмедович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Гаджиев Асаф Гаджи оглы физика-математика фанлари доктори, профессор, Озарбайжон Миллий Фанлар Академияси академиги
	Имомов Аъзам Абдурахимович физика-математика фанлари доктори, доцент
Етакчи ташкилот:	**Тбилиси давлат университети (Грузия)**

Диссертация ҳимояси В.И.Романовский номидаги Математика институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2021 йил «30» ноябр соат 16.00 даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz.)

Диссертация билан В.И.Романовский номидаги Математика Институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (125 рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси. Тел.: (+99871)-207-91-40).

Диссертация автореферати 2021 йил «12» ноябр куни тарқатилди.
(2021 йил «12» ноябр даги 2 рақамли реестр баённомаси).

У.А.Розиков
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

Ж.К.Адашев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.н., катта илмий ходим

Я.М.Хусанбоев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш ҳузуридаги илмий семинар раиси муовини, ф.-м.ф.д., доцент

КИРИШ (докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва заруряти. Танланманинг экстремал қийматлари фан ва техника, иқтисодиёт, актуар математика, саноат ва қишлоқ хўжалиги қурилмалари ишининг ишончлилиги, оммавий бошқарув ва бошқа турли соҳаларида ўз татбиғини топган. Номаълум параметрларни баҳолаш ва статистик гипотезаларни текшириш учун критик соҳаларни аниқлашда танланма экстремал қийматларининг асимптотик таҳлили муҳимдир, хусусан, текис тақсимот қонун аниқланиш соҳасининг чегаралари баҳоланаётган параметрлар сифатида қабул қилинса, унинг баҳоси вариацион қаторнинг четки элементлари ёрдамида қурилади ва бу баҳо асосли, асимптотик силжимаган, етарли статистика бўлади. Қаварик қопламалар эса танланма экстремал кузатилмаларининг кўп ўлчовлиликдаги тўлиқ умумлашмаси бўлиб, кўп ўлчовли ҳолатда, қаварик қоплама текис тақсимот қонуни аниқланиш соҳасининг асосли, асимптотик силжимаган баҳоси ва етарли статистика бўлади. Шунинг учун танланманинг экстремал қийматларини ва кўп ўлчовлиликда қаварик қопламани тадқиқ қилиш долзарбдир ва улар танланма тақсимот қонунининг аниқланиш соҳасини баҳолашда ва статистик тасдиқлар чиқаришда фаол қўлланилмоқда.

Ҳозирги кунда экстремал тартибланган статистикаларнинг таҳлили ва уларнинг кўп ўлчовли ҳолатдаги умумлашмаси бўлган қаварик қопламалар функционалларининг лимит тақсимот қонунини аниқлаш бўйича ўтказилаётган кашфиётларга қизиқиш ортиб бормоқда. Айнан татбиқий масалалар, жумладан, иқтисодий системаларни, молиявий жараёнларни ва суғурта компаниялар фаолиятини бошқаруви масалалари экстремал статистиканинг математик моделлаштирилиши билан боғлиқлигидадир. Бунда асосий эътибор йиғинди ёрдамида ифодаланувчи баҳолар тақсимотини маълум чексиз бўлинувчи тақсимот билан аппроксимацияланишга қаратилади. Бу борада: йиғиндидаги экстремал қўшилувчиларни хиссасини анқлаш, қаварик қоплама функционалларининг ўзаро боғликлик даражасини аниқлаш ва уларнинг биргаликдаги тақсимот қонунларини топиш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда молия, иқтисодиёт, бизнес, суғурта, медицина ва оммавий хизматда илмий ва амалий тадбиғига эга бўлган фундаментал фанларнинг долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, охирги йилларда параметрик ва нопараметрик статистик баҳолар назариясининг асимптотик масалаларида экстремал танланма элементлари ва қаварик қоплама функционаллари учун лимит тақсимотларига доир салмоқли натижаларга эришилди. «Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика, функционал анализ ва актуар математика» фанларининг устивор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалари ва фаолият

йўналишлари этиб белгиланди[1]. Қарор ижросини таъминлашда илмий натижалардан илм-фаннинг турдош соҳаларда фойдаланиш мақсадида k–тартибланган статистиканинг қўшилувчилари билан биргаликдаги лимит тақсимот қонунини кўрсатиш, шунингдек, танланма қаварик ва чегараланган бош тўпламидан олинган ҳол учун қаварик қоплама асосий функционалларининг биргаликдаги лимит тақсимотини тадқиқ қилиш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича харакатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони, 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив–ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг асосий устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялари ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи.

Танланма экстремал қийматларининг асимптотик таҳлили ва қаварик қоплама функционалларининг лимит тақсимотини аниқлаш бўйича йўналтирилган илмий изланишлар жаҳоннинг етакчи илмий марказлари ва олий таълим муассасалари, жумладан: Temple University, Philadelphia (USA), Stanford University, California (USA), Katholieke Universiteit Leuven (Belgium), Tilburg University (the Netherlands), Iowa State University (USA), The Ohio State University (USA), University of Technology Delft (the Netherlands), Princeton University (USA), The University of Salzburg (Austria), Purdue University (USA), Mathematical Institute of the University of Bern (Switzerland), М.В.Ломоносов номидаги Москва давлат университети, Россия Фанлар академиясиниг В.А.Стеклов номидаги Математика институти ва унинг Санкт-Петербургдаги бўлими, Санкт-Петербург давлат университети, Озарбайжон Миллий Фанлар академиясининг Системали бошқарув институти, Тбилиси давлат университети, Белоруссия давлат университети қошидаги Математика ва ахборотдаги муаммоларни тадқиқ қилиш илмий

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш чора-тадбирлари тўғрисида»ги 292-сон қарори.

текшириш институти, К.Д.Ушинский номидаги Одесса давлат педагогика институтида олиб борилмоқда.

Охирги йилларда экстремал тартибланган статистиканинг тасодифий миқдорлар (т.м.) йиғиндисидаги ҳиссасини тадқиқ қилиш йўналиши бўйича юқорида келтирилган илмий даргоҳларда қатор илмий-тадқиқот ишлари олиб борилмоқда. Жумладан, агар тақсимот қонун бирдан кичик кўрсаткич билан турғун тақсимотга тортилувчи бўлса, у ҳолда экстремал қўшилувчилар йиғиндининг асимптотик тақсимотига салмоқли таъсир кўрсатиб, модули бўйича максимал бўлган қўшилувчилари олиб ташланган, нормаллаштирилган йиғинди учун лимит тақсимот қонуни аралаш чексиз бўлинувчи тақсимот қонунга интилиши исботланди (К.Д.Ушинский номидаги Одесса давлат педагогика институти). Кейинчалик бу натижалар бирдан иккигача бўлган оралиқ учун ҳам (Katholieke Universiteit Leuven, Belgium) давом эттирилди.

Дунёда бугунги кунда четки элементларнинг кўп ўлчовлиликдаги умумлашмаси сифатида қаварик қоплама тадқиқ этиб келинмоқда ва агар танланма бирлик доира ичида текис тақсимланган бош тўпламдан олинган бўлса (Stanford University, California, USA), қаварик қоплама учларининг сони, юзаси ва периметри математик кутилмаларининг асимптотик қийматлари топилди ва, шунингдек, танланма бирлик доира ичида қутб координаталар системасида берилган нуқталардан иборат бўлиб, бурчак координатаси айланада текис тақсимланган, радиал координатаси тақсимоти эса унга боғлиқ бўлмай, тақсимотининг дум қисми доира чегараси яқинида текис ўзгарувчи функция бўлган ҳолатдан яралган қаварик қоплама асосий функционаллари (Mathematical Institute of the University of Bern, Switzerland) математик кутилмаларининг асимптотик ифодалари аниқланди ва улар орасидаги боғланиш кўрсатилди; бу соҳада биринчи маротаба бир гуруҳ Нидерландиялик олимлар сезиларли силжиш ясовчи катта кашфиёт қилдилар. Улар (University of Technology Delft The Netherlands) дастлабки тақсимот қонуннинг ё квадрат, ё эллипсда текис тақсимланган ҳолати учун, қаварик қоплама учларининг сони, юзаси ва периметри учун марказий лимит теоремаларни исботладилар, шунингдек, текисликда нормал тақсимланган нуқталардан яралган қаварик қопламаларнинг асосий функционаллари учун ҳам марказий лимит теоремалар исботланди (Purdue University USA).

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Биринчи марта тартибланган статистикалар назарияси билан ўтган асрнинг 20-йилларида Von R.Mises, L.H.C.Tippet, M.Frechet, кейинчалик, Б.В.Гнеденко шуғулланган бўлиб, экстремал статистикалар лимит тақсимот қонуни фақат мумкин бўлган учтадан бирига тенг бўлиши исботланди. Д.З.Аров ва А.А.Бобров, De L.A.Haan, J.L.Teugels, А.В.Нагаев ва бошқалар, экстремал тартибланган статистикалар лимит тақсимоти назариясининг ривожланишига сезиларли ҳисса қўшдилар, улар дисперсия чексиз бўлган ҳолида тасодифий миқдорлар йиғиндисидаги экстремал қўшилувчиларнинг ҳиссалари бениҳоя катта

бўлишини кўрсатдилар, хусусан, катта оғишлар эҳтимолида йиғиндидаги асосий ҳисса экстремал қўшилувчининг ҳисобига тўғри келишини исботладилар. Шунингдек, M.G.Kendall, A.Stuart, E.L.Lehmann, S.P.Lloyd, L.H.Y.Chen, J. Pike, H.N. Nagaraja ва A.B.Степанов каби олимлар экстремал тартибланган статистикалар ва рекордларнинг йиғиндидаги ҳиссасини кучли ва кучсиз катта сонлар қонунида, қайта логарифм қонунларида улкан бўлишини аниқладилар.

Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика йўналишининг Санкт-Петербург мактабининг бир гуруҳ олимлари (В.В. Петров, В.Б. Невзоров, В.А Егоров, И.С. Ахундов ва бошқалар) томонидан экстремал статистикалар ва рекордлар назарияси янги натижалар, усуллар ва ёндошувлар билан бойитилди, жумладан, улар рекорд ва экстремал статистикалар тақсимоти характеристикаларини, рекорд қийматларнинг регрессион муносабатларини ва юқори тартибланган статистика ва рекордлар генерациясини ўргандилар.

Ҳозирги вақтда қаварик қоплама функционаллари сонли характеристикаларининг асимптотикаси ва лимит тақсимотининг тадқиқи бўйича B.Efron, A.Reny, R.Sulanke, H.Carnal, P.Groeneboom, I.Hueter, T.Hsing, A.B.Нагаев, A.J.Cabo, Ch.Buchta, J.Pardon катта натижалар олдилар. Улар қаварик кўпбурчакда ёки эллипсда текис тақсимланган биномиал нуқтавий жараённи Пуассон жараёни билан аппроксимациялаш усули ёрдамида, танланма қаварик қопламанинг асосий функционаллари учун турли кўринишдаги лимит теоремаларни исботлаш имкониятига эга бўлдилар. Қаварик кўпбурчак ёки эллипсда текис тақсимланган нуқталардан яралган қаварик қоплама учларининг сони учун P.Groeneboom томонидан исботланган лимит теоремани исботлаш усули A.J.Cabo, P.Groeneboom ва T.Hsing ишларида қаварик кўпбурчакда текис тақсимланган танланмадан яралган қаварик қоплама юзаси учун лимит теоремасини исботлашга татбиқ қилинди, I.Hueter эса бу усулни текисликдаги нормал тақсимланган нуқталардан яралган қаварик қопламалар функционаллари учун лимит теоремаларни исботлашга қўллади.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилаётган илмий текшириш муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академияси В.И.Романовский номидаги Математика институти илмий-тадқиқот ишлари режасидаги **ОТ-Ф4-83** рақамли «Эҳтимоллик тақсимотлари учун лимит теоремалар ва функционал маълумотларни статистик таҳлили» (2017–2020йиллар) мавзусидаги илмий-тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади кесик йиғиндининг максимал ва минимал қўшилувчилари билан биргаликдаги ва қаварик, чегараланган соҳадан олинган танланма қаварик қопламалар асосий функционалларининг биргаликдаги лимит тақсимотларини аниқлашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари қуйидагилардан иборат:

қўшилувчи миқдорлар тақсимот қонуни турғун тақсимот қонунига тортилувчи соҳадан олинган ҳолда, нормаланган кесик йиғиндининг лимит тақсимоти характеристик функциясини аниқлаш;

тақсимот қонунининг дум қисми тўғри ўзгарувчи функция бўлган ҳолда кесик йиғиндидаги четки қўшилувчиларнинг ҳиссасини катта оғишлар эҳтимоллари масаласида аниқлаш учун ва кесик йиғиндидаги экстремал қўшилувчиларнинг ҳиссасини аниқловчи етарли шартларни топиш учун боғлиқсиз т.м. йиғиндиси назарияси усулларини қўллаш;

танланма икки ўлчовли қаварик кўпбурчакда текис тақсимланган бош тўпламдан олинган ҳоли учун, қаварик қоплама асосий функционалларининг биргаликдаги лимит тақсимотини аниқлаш;

парабола ичида бир жинсли бўлмаган Пуассон нуқтавий жараёнидан яралган қаварик қоплама учлари жараёнининг ҳар бир тайин вақти учун тақсимот қонунини аниқлаш;

танланма бирлик доира ичида қутб координаталар системасида берилган нуқталардан иборат бўлиб, бурчак координатаси айланада текис тақсимланган, радиал координатаси тақсимоти эса унга боғлиқ бўлмай, тақсимотининг дум қисми доира чегараси яқинида текис ўзгарувчи функция бўлган ҳолатдан яралган қаварик қопламанинг асосий функционаллари учун лимит теоремаларни исботлаш.

Тадқиқотнинг объекти. Максимал ва минимал қўшилувчилари олиб ташланган (кесик) йиғиндининг асимптотик таҳлили ва қаварик қоплама асосий функционалларининг биргаликдаги тақсимот қонуни.

Тадқиқотнинг предмети. Кесик тақсимотли боғлиқсиз т. м. йиғиндиси назарияси, дум қисми тўғри ўзгарувчи функция кўринишда бўлган турғун ва чексиз бўлинувчи тақсимотлар назарияси; стационар тасодифий жараёнлар назарияси ва вақт қаторлари назарияси масалалари.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертацияда (Леви–Хинчин формуласи кўринишдаги) чексиз бўлинувчи ва турғун тақсимот қонун характеристик функцияларини аналитик ифодалаш усуллари, Розенблат маъносида кучли қоришмали хоссага эга бўлган стационар жараёнларга мартингаллар техникаси ишлатилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

берилган тақсимот қонуни турғун тақсимотга тортилувчи бўлган ҳолда тасодифий миқдорлар йиғиндиси ва унинг экстремал қўшилувчилари орасидаги боғланишни ифодаловчи лимит теоремалари исботланган;

берилган тақсимот қонун қаварик кўпбурчакда текис тақсимланган ҳол учун қаварик қоплама асосий функционалларининг биргаликдаги лимит тақсимот қонуни топилган ва қаварик қоплама периметри қаварик қоплама учларининг сони ва юзасига асимптотик боғлиқ эмаслиги исботланган;

парабола ичида берилган бир жинсли бўлмаган Пуассон нуқтавий жараёнидан яралган қаварик қоплама учлари жараёнининг тайин вақтдаги тақсимот қонуни ва шартли тақсимот қонуни топилган;

танланма бирлик доира ичида қутб координаталар системасида берилган нуқталардан иборат бўлиб, бурчак координатаси айланада текис тақсимланган, радиал координатаси тақсимоти эса унга боғлиқ бўлмай, тақсимотининг дум қисми доира чегараси яқинида текис ўзгарувчи функция бўлган ҳолатдан яралган қаварик қопламанинг учларини сони ва юзаси учун марказий лимит теоремалар исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижаси тасодифий миқдорлар йиғиндисининг катта оғишлар эҳтимолини экстремал тартибланган статистикалар катта оғишлар эҳтимоли билан алмаштириш мумкинлигини ва қаварик қоплама ёрдамида номаълум тақсимот қонунининг аниқланиш соҳасини баҳолаш, соҳа юзаси ва периметрлари учун ишончлилик оралиқларини топишни баён қилинганлигидан иборат.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги турғун ва чексиз бўлинувчи тақсимот қонуни характеристик функцияларининг (Леви–Хинчин формуласининг аналоги бўлган) спектрал ифодасидан фодаланилганлиги, стационар жараёнларнинг кучли қоришмали шарти остида Ибрагимов-Линник лимит теоремасини, мартингаллар техникасига асосланган статистик жараёнларнинг моментлар усулининг қўлланилганлиги, шунингдек, функционал анализ ва математик таҳлилдаги параметрларга боғлиқ махсус функциялар ва интегралларнинг ишлатилганлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти диссертация ишида олинган натижалар кесик йиғиндиларнинг характеристик функцияларига боғлиқ бўлган тартибланган статистикалар назариясининг жадал ривожлантириш босқичларида, тақсимот қонунининг аниқланиш соҳасини баҳолаш назариясида, нуқтавий жараёнларнинг тузилиши билан боғлиқ бўлган изланишлар назариясида қўлланиши мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти, ишда олинган илмий натижаларнинг математик статистиканинг амалий ва нуқтавий жараёнларга боғлиқ бўлган назарий масалаларини ечишга, шунингдек, экстремал кузатилмалар ҳиссасига эътибор қилинадиган физика, техника, медицина ва оммавий хизмат масалаларига татбиқ этишга хизмат қилиши билан белгиланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Танланма экстремал қийматларининг асимптотик таҳлили ва қаварик қопламалар функционаллари учун олинган лимит теоремалар асосида:

йиғиндидаги экстремал қўшилувчиларнинг ролини аниқлаш усуллари ва қаварик қоплама функционалларининг биргаликдаги тақсимоти учун лимит теоремаларидан №20162503 рақамли «Мураккаб структурали компьютер таҳлили, эҳтимоллик-статистика моделлари, усуллари ва алгоритмларини яратиш» мавзусидаги хорижий грант лойиҳасида дастлабки тақсимот қонуни турғун тақсимотга тортилувчи соҳага тегишли бўлган ҳолат учун вариацион қаторнинг четки элементларининг асимтотик хоссаларини аниқлашда

фойдаланилган (Белоруссия давлат университети қошидаги Математика ва информатикадаги амалий муаммолар илмий текшириш институтининг 2021 йил 18 февралдаги №10.4/18-сонли маълумотномаси, Белоруссия). Илмий натижанинг қўлланилиши криптографик тасодифий ва псевдотасодифий кетма-кетликларнинг генерациясини статистик текшириш имконини берган;

қаварик қоплама функционаллари учун олинган лимит теоремаларидан EIF-ETL-2020-2(36)-16/05/1-M-05 рақамли «Яриммарков иновацион авторегрессия жараёнлари билан ифодаланувчи дайдиш жараёнларини тадқиқ қилиш» мавзусидаги хорижий грант лойиҳасида қишлоқ хўжалигида сув захираларини баҳолашда фойдаланилган (Озарбайжон Республикаси Миллий Фанлар академияси Системали бошқарув институтининг 2021 йил 23 апрелдаги № 21-2/85-сонли маълумотномаси, Озарбайжон). Илмий натижанинг қўлланилиши қишлоқ хўжалик туманларидаги ёмғир суви захираларининг майдонини статистик баҳолаш ва захиралар учун ишончлилик оралиғини топиш имконини берган;

экстремал тартибланган статистикалар чиқариб ташланган йиғинди учун лимит теоремасидан № GNSF/ST FR/308/5-104/12 рақамли «Статистик баҳолаш ва стохастик анализнинг баъзи масалалари» мавзусидаги хорижий грант лойиҳасида кузатилма тақсимот қонунининг функционал характеристикаларини нопараметрик баҳолаш масалаларини ҳал этишда фойдаланилган (Тбилиси давлат университетининг 2021 йил 28 апрелдаги 5587/01-16-01-сонли маълумотномаси, Грузия). Илмий натижанинг қўлланилиши эҳтимоллар зичлик функцияси ва унинг ҳосиласига боғлиқ интеграл функционалларнинг нопараметрик ядровий баҳолари учун лимит теоремаларни исботлаш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 20 та илмий-амалий анжуманларда, жумладан 3 та халқаро ва 17 та республика илмий-амалий анжуманларда мухокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилиниши. Диссертация мавзуси бўйича жами 40 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 17 та мақола, жумладан, 7 таси хорижий ва 10 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация таркиби кириш қисми, тўртта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 182 бетни ташкил этади.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устивор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий

илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқотнинг мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертациянинг тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Ушбу диссертация иши танланма четки элементларининг лимит хусусиятларини аниқлашга бағишланган бўлиб, тадқиқот икки йўналишда амалга оширилади. Биринчи йўналиш бўйича тадқиқот «**Экстремал қўшилувчиларнинг боғлиқсиз тасодифий миқдорлар йиғиндисидаги ҳиссаси»** деб номланувчи биринчи бобда амалга оширилиб, вариацион қатор экстремал ҳадларининг йиғиндидаги ҳиссасини аниқлашга бағишланган. Хусусан, дастлабки тақсимот қонуни $\alpha \in (0,1) \cup (1,2)$ кўрсаткич билан турғун тақсимотга тортилувчи бўлганида, кесик йиғиндининг экстремал қўшилувчиларга нисбатан асимптотик хоссалари ўрнатилган. Бу ерда, кесик йиғинди учун лимит тақсимот икки параметрли аралаш чексиз бўлинувчи қонун кўринишда ифодаланади, ҳар бирининг спектрал ўлчови турғун тақсимотнинг лимит спектрал ўлчови каби бўлиб, носимметрик интерваллар торайтирилган ва охири параметрлар аралашмаси кўринишда бўлади. Вазн функция сифатида эса кесик йиғиндидаги максимал ва минимал қўшилувчиларнинг биргаликдаги лимит тақсимотининг зичлик функцияси қатнашади.

Биринчи боб бешта параграфдан ташкил топган. Биринчи параграфда зарур белгилашлар киритилиб, сўнгра шу йўналиш бўйича баъзи умуммаълум маълумотлар ва бобнинг асосий натижаси келтирилган.

Фараз қилайлик, $X_1, X_2, ..., X_n$ бир эҳтимоллик фазосида берилган боғлиқсиз, умумий тақсимот функцияси (т.ф.) $F(x)$ каби бир хил тақсимланган тасодифий миқдорлар (т.м.) кетма-кетлиги бўлсин.

Фараз қилайлик, $X_n^{(1)} \le X_n^{(2)} \le ... \le X_n^{(n)}$ – вариацион қатор $X_1, X_2, ..., X_n$ т.м. кетма-кетлигини ўсиш тартибида жойлаштиришдан ҳосил бўлган бўлсин. Уларнинг модуллари бўйича ўсиш тартибида жойлаштиришдан ҳосил бўлган кетма-кетликни

$$\left|\overline{X}_n^{(1)}\right| \le \left|\overline{X}_n^{(2)}\right| \le ... \le \left|\overline{X}_n^{(n)}\right|$$

кўринишда белгилаймиз. $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ орқали т.м. йиғиндисини ва кесик йиғиндиларни эса

$$\overline{S}_n^{(k)} = \sum_{j=1}^{n-k} \overline{X}_n^{(j)}, \quad S_n^{(m,k)} = \sum_{j=m+1}^{n-k} X_n^{(j)}$$

орқали белгилаймиз. Бу ерда $\overline{S}_n^{(k)}$ йиғиндини S_n дан модул бўйича энг катта k қўшилувчиларни ташлаб юбориш билан, $S_n^{(m,k)}$ ни эса бир вақтнинг ўзида

m та чап ва k та ўнг четки тартибланган статистика элементларини ташлаб юбориш билан изоҳлаш мумкин.

X_1 т.м. қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

$$P\left(X_1 < u\right) = F(u) = \begin{cases} c_1 |u|^{-\alpha} l_1\left(|u|\right), & \text{агар } u < 0 \text{ бўлса,} \\ 1 - c_2 u^{-\alpha} l_2\left(u\right), & \text{агар } u \geq 0 \text{ бўлса,} \end{cases} \tag{1}$$

бу ерда c_1 ва c_2 мусбат коэффициентлар ва $c_1 + c_2 = 1$, $l_i\left(u\right), i = 1,2$, $\lim\limits_{u\to\infty} l_1(u)/l_2(u) = 1$ секин ўзгарувчи функциялар (с.ў.ф.).

Ҳар доим $\alpha \in (0,1) \bigcup (1,2)$ деб фараз қилинади ва, шунингдек, $1 < \alpha < 2$ бўлганида $EX_1 = 0$ деб оламиз. Айтайлик,

$$b_n = \inf\left\{t : nP\left(|X_1| > t\right) \leq 1\right\}$$

бўлсин.

Маълумки, $b_n^{-1} S_n$ т.м. логарифми

$$\log \varphi(t) = \begin{cases} \alpha c_1 \int\limits_{-\infty}^{0} \dfrac{e^{itz} - 1}{|z|^{\alpha+1}} dz + \alpha c_2 \int\limits_{0}^{\infty} \dfrac{e^{itz} - 1}{z^{\alpha+1}} dz, & \text{агар } 0 < \alpha < 1 \text{ бўлса,} \\ \alpha c_1 \int\limits_{-\infty}^{0} \dfrac{e^{itz} - 1 - itz}{|z|^{\alpha+1}} dz + \alpha c_2 \int\limits_{0}^{\infty} \dfrac{e^{itz} - 1 - itz}{z^{\alpha+1}} dz, & \text{агар } 1 < \alpha < 2 \text{ бўлса,} \end{cases} \tag{2}$$

кўринишда ифодаланувчи характеристик функцияси $\varphi(t)$ бўлган тасодифий миқдорга тақсимот бўйича интилади. Энди

$$G_k(x) = \frac{1}{(k-1)!} \int\limits_{x^{-\alpha}}^{\infty} v^{k-1} e^{-v} dv.$$

белгилаймиз.

Экстремал қўшилувчиларнинг йиғиндидаги ҳиссасини аниқлашга доир дастлабки тадқиқотлар Д.З.Аров ва А.А.Бобровга тегишли бўлиб, улар $b_n^{-1} \overline{S}_n^{(k)}$ ва $b_n^{-1} \left|\overline{X}_n^{(n-k+1)}\right|$ т.м $0 < \alpha < 1$ ҳолат учун биргаликдаги лимит тақсимотини, аралаш чексиз бўлинувчи, параметр аралашмаси симметрик равишда кесилган турғун тақсимотнинг Пуассон спектори ва вазн функцияси $G_k(x)$ кўринишда ифодаланишини аниқладилар. Кейинчалик J.L.Teugels уларнинг натижасини $1 < \alpha < 2$ гача давом эттирди.

Бу бобнинг асосий натижаси Д.З.Аров, А.А.Бобров ва J.L.Teugels натижаларини $S_n^{(m,k)}$ йиғиндига кўчиришдан, яъни $S_n^{(m,k)}$ йиғинди билан ундан охирги чиқариб ташланган $X_n^{(m)}$ ва $X_n^{(n-k+1)}$ четки тартибланган статистиканинг биргаликдаги тақсимотини тадқиқ қилишдан иборат.

Фараз қилайлик, $F(z; x, y)$, $x > 0$, $y > 0$, характеристик функциясининг логарифми

$$h(t;x,y)=\begin{cases}\alpha c_1\int\limits_{-x}^{0}\dfrac{e^{itz}-1}{|z|^{\alpha+1}}dz+\alpha c_2\int\limits_{0}^{y}\dfrac{e^{itz}-1}{z^{\alpha+1}}dz, & агар\ \ 0<\alpha<1;\\ it\dfrac{\alpha}{\alpha-1}(c_2y^{-\alpha}-c_1x^{-\alpha})+\alpha c_1\int\limits_{-x}^{0}\dfrac{e^{itz}-1-itz}{|z|^{\alpha+1}}dz+ & \\ +\alpha c_2\int\limits_{0}^{y}\dfrac{e^{itz}-1-itz}{z^{\alpha+1}}dz, & агар\ \ 0<\alpha<1.\end{cases}$$

кўринишда бўлган икки параметрли чексиз бўлинувчи тақсимот функциялар оиласи бўлсин ((2) муносабат билан таққосланг).

1-теорема. (1) шарт ўринли бўлиб, $\min(c_1,c_2)>0$ бўлсин, у ҳолда $n\to\infty$

$$P\left(S_n^{(m,k)}<zb_n,-X_n^{(m)}<ub_n,X_n^{(n-k+1)}<vb_n\right)=\int\limits_0^u\int\limits_0^v F(z,x,y)dG_m^{(1)}(x)dG_k^{(2)}(y)+o(1)$$

$u\ \ (u\ge 0)$ ва $v\ \ (v\ge 0)$ бўйича текис яқинлашади, бу ерда

$$G_m^{(i)}(u)=\frac{1}{(m-1)!}\int\limits_{c_iu^{-\alpha}}^{\infty}x^{m-1}e^{-x}dx,\ \ i=1,2.$$

Бу теоремадан, хусусан, қуйидаги натижа келиб чиқади:

$$P\left(\frac{S_n^{(m,k)}}{\min\left\{\left|X_n^{(m)}\right|,X_n^{(n-k+1)}\right\}}<z\right)\to\iint\limits_{x>y}F(zy;x,y)dG_m^{(1)}(x)dG_k^{(2)}(y)$$

$$+\iint\limits_{x<y}F(zx;x,y)dG_m^{(1)}(x)dG_k^{(2)}(y).$$

Агар берилган тақсимот қонуннинг икки четки дум қисми ҳар хил вазнда бўлса, яъни $1-F(u)=u^{-\alpha}l(u),\ u>0,\ l(u)$, $n\to\infty$ да с.ў.ф. ва $F(-u)=o(1-F(u))$, у ҳолда $S_n^{(m.k)}$ ва $\overline{S}_n^{(k)}$ т.м. лимит тақсимотлари устма-уст тушишини кўриш қийин эмас. Бундан ташқари,

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{S_n^{(m,k)}}{X_n^{(n-k+1)}}<z\right)=P\left(\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_k<z\right).$$

Бу ҳолатда

$$Ee^{it\eta_1}=\frac{1}{1-h(t)},$$

ва

$$h(t)=\begin{cases}\alpha\int\limits_0^1\dfrac{e^{itz}-1}{z^{\alpha+1}}dz, & агар\ 0<\alpha<1,\\ it\dfrac{\alpha}{\alpha-1}+\alpha\int\limits_0^1\dfrac{e^{itz}-1-itz}{z^{\alpha+1}}dz, & агар\ 1<\alpha<2.\end{cases}$$

1-теоремани исботлаш учун иккинчи параграфда иккита ёрдамчи лемма исботланади ва учинчи параграфда 1-теореманинг исботи охирига етказилади.

Тўртинчи параграф тақсимот қонуннинг думи қисми тўғри ўзгарувчили бўлган бир ҳолатга изоҳ беришга бағишланади.

Хусусан, умумий тақсимот қонуни

$$F(u)=\begin{cases}|u|^{-\alpha_1}l_1(|u|), & агар\ \ u<0,\\ 1-u^{-\alpha_2}l_2(u), & агар\ \ u>0,\end{cases}$$

кўринишда, $\min(\alpha_1,\alpha_2)>0$, $l_i(u), i=1,2$ с.ў.ф. ва

$$\beta_{ni}=\inf\left\{u:\ u>0,\ nu^{-\alpha_i}l_i(u)\le 1\right\},\quad i=1,2.$$

белгилаш бажарсак, ва агар $j_1, j_2,..., j_{m-1}$ – номерлар $\left(-\infty, X_n^{(m)}\right)$ оралиққа тушган т.м. номерлари бўлса, яъни

$$j_1=\min\left(j:\ X_j<X_n^{(m)}\right),\quad j_2=\min\left(j:\ j>j_1,\ X_j<X_n^{(m)}\right)$$ ва хоказо

ва $i_1,i_2,...,i_{k-1}$ – номерлар $\left(X_n^{(n-k+1)},\infty\right)$ оралиққа тушган т.м. номерлари бўлса, у ҳолда

$$P\left(\frac{X_{j_1}}{X_n^{(m)}}>z_1,...,\frac{X_{j_{m-1}}}{X_n^{(m)}}>z_{m-1},\frac{X_{i_1}}{X_n^{(n-k+1)}}>w_1,...,\frac{X_{i_{k-1}}}{X_n^{(n-k+1)}}>w_{k-1}\right)\to\prod_{i=1}^{m-1}z_i^{-\alpha_1}\prod_{j=1}^{k-1}w_j^{-\alpha_2}$$

$z_i\ge 1,\ w_j\ge 1,\ i=1,...,m-1,\ j=1,...,\mathrm{k}-1$ учун. Булардан қуйидаги ажойиб маълумотни оламиз: агар $\alpha_1=\alpha_2\in(0,1)\cup(1,2)$ бўлса

$$P\left(\beta_n^{-1}S_n<z\right)\to\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty P\left(\zeta(x,y)-x\xi_m+y\eta_k<z\right)dG_m^{(1)}(x)dG_k^{(2)}(y).$$

Бу ерда $\zeta(x,y)$, ξ_m ва η_k боғлиқсиз т.м. бўлиб $\xi_m\overset{d}{=}1+e_1+\cdots+e_{m-1}$, $\eta_k\overset{d}{=}1+e_1+\cdots+e_{k-1}$, e_j, $j=1,2,...$, эса ўз навбатида α кўрсаткичли умумий Паретто қонуни бўйича тақсимланган.

Бешинчи параграфда $P(x)=P\left(X_1>x\right)\sim x^{-\alpha}l(x)$, $\alpha\in(0,2]$ бўлган ҳолда, катта оғишлар эҳтимоли масаласидаги экстремал қўшилувчилар йиғиндидаги асосий ҳиссани белгилаши кўрсатилади. Бу параграфнинг асосий натижаси қуйидаги теоремадан иборат.

2-теорема. Агар $P(x)\sim x^{-\alpha}l(x),\ x\to\infty,\ F(-x)=O(1-F(x)),\quad x\to\infty$да бўлиб, $\alpha\ge 1$ да $EX_1=0$ бўлса ва шунингдек агар қуйидаги шартлардан бири

1) $nx_n^{-\alpha}l^*(x_n)\to 0$, $n\to\infty$, да агар $\alpha\in(0,1)$;

2) $nx_n^{-\alpha} l^*(x_n)\log^{\alpha-1} x_n \to 0$, $n\to\infty$, да агар $\alpha\in[1,2)$;

3) $nx_n^{-\alpha} l^*(x_n)\log^2 x_n \to 0$, $n\to\infty$, да агар $\alpha=2,\ EX_1^2=\infty$;

4) $nx_n^{-\alpha} l^*(x_n)\log x_n \to 0$, $n\to\infty$, да агар $\alpha=2,\ EX_1^2=1,$

ўринли бўлса, у ҳолда ихтиёрий $x\ge x_n$ учун

$$P_n^{(k)}(x)=P\left(S_n^{(0,k)}>x\right)\sim P\left(X_n^{(n-k)}\ge x\right)\sim\frac{1}{(k+1)!}\left(nP(x)\right)^{k+1},\ n\to\infty.$$

ўринли.

Бу ерда, $l^*(x)=\sup\limits_{1\le u\le x} l(u)$. Бунинг маъноси шуки, агар $x\ge x_n$ ва берилган тақсимотнинг ўнг дум қисми $1-F(x)\sim x^{-\alpha}l(x),\ x\to\infty,$ ва чап дум қисми $O\left(1-F\left(|x|\right)\right),\ |x|\to\infty$ бўлса, ўнг катта оғишлар эҳтимоли масаласида, кесик йиғинди $S_n^{(0,k)}$нинг қиймати унда қатнашаётган энг катта қўшилувчи $X_n^{(n-k)}$ ҳисобига шакилланади. Мос равишда агар чап дум қисми $F(x)\sim|x|^{-\alpha}\ l\left(|x|\right),\ |x|\to\infty,$ ва ўнг дум $O\left(F(-x)\right),\ x\to\infty$ кўринишда ўзгарса, чап катта оғишлар эҳтимоли масаласида, кесик йиғинди $S_n^{(m,0)}$нинг қиймати унда қатнашаётган энг кичик қўшилувчи $X_n^{(m+1)}$ ҳисобига шаклланади.

Иккинчи йўналишдаги тадқиқот навбатдаги учта бобда амалга оширилади, бу ердаги миқдорлар икки ўлчовли соҳада аниқланган бош тўпламдан олинган. Тақсимот қонуннинг аниқланиш соҳаси кўп ўлчовли қаварик соҳа бўлган ҳолатда, эстремал тартибланган статистиканинг энг умумий аналоги қаварик қоплама бўлади. Охирги ҳолат учун қаварик қоплама тақсимот қонун аниқланиш соҳасини баҳолашда етарли ва асосли статистика бўлади.

Қаварик қоплама аналитик нуқтаи назардан жуда мураккаб геометрик объектдир. Шунинг учун, хаттоки, унинг энг содда функционаллари бўлмиш, учларининг сони ва юзасини тадқиқ қилиш оддий масала эмас. Буни шу билан изоҳлаш мумкинки, P.Groeneboom (Limit theorems for convex hulle. Probab. Th. Rel. Fields, 1988, v.79, N3, P. 327-368) иши пайдо бўлгунигача, бу соҳадаги энг буюк кашфиётлар деб асосий функционалларнинг ўрта қийматларини ўрганишнигина ҳисобланар эди.

Диссертациянинг иккинчи боби **«Кўпбурчак ичидаги тасодифий қаварик қоплама функционаллари учун лимит теоремалар»** деб номланган бўлиб, у қаварик кўпбурчак ичида текис тақсимланган тасодифий векторлардан яралган қаварик қопламани тадқиқ қилишга бағишланган.
Биринчи параграфнинг бошланишида мазкур йўналиш бўйича ҳозиргача маълум бўлган баъзи асосий натижалар санаб ўтилган, сўнгра иккинчи бобнинг асосий натижалари келтирилган.

Фараз қилайлик, $P_j, j=1,2,...,n$, r учли қаварик A кўпбурчакда текис тақсимланган векторларнинг боғлиқсиз кузатилмаси бўлсин. $j-$ сатри P_j вектордан иборат $\mathbf{P}_n$ матрицани танланма деб атаймиз. $P_j, j=1,2,...,n$ векторлардан яралган қаварик қопламани $C_n = C_n(\mathbf{P}_n)$ орқали белгилаймиз. Бизни, C_n нинг асосий функционаллари: ν_n – учларининг сони, s_n– майдони ва l_n – периметрларнинг биргаликдаги лимит тақсимотини тадқиқ қилиш масаласи қизиқтиради. Келтирилган функционаллар қаварик қоплама учларнинг тўплами W_n билан бир қийматли аниқланади. Асосий натижани келтиришдан олдин баъзи бир қўшимча белгилашлар киритамиз.

Фараз қилайлик, L_0 ва S_0 – мос равишда A кўпбурчакнинг периметри ва юзаси бўлсин. У ҳолда қуйидаги белгилашларни киритамиз

$$l_n^* = L_0 - l_n,\ s_n^* = S_0 - s_n$$

ва улар ёрдамида

$$a_n = \frac{2r\log n}{3},\ a_n^* = \frac{S_0 a_n}{n},\ b_n = \sqrt{\frac{27}{10r\log n}},\ b_n^* = n\sqrt{\frac{27}{28rS_0^2\log n}} = \frac{\sqrt{5}nb_n}{\sqrt{14}S_0}$$

ни белгилаймиз.

ω икки ўлчовли нормал тақсимланган, математик кутилмаси нол, корреляцион матрицаси

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{5}{14}} \\ \sqrt{\frac{5}{14}} & 1 \end{pmatrix}$$

бўлган тасодифий вектор бўлсин.

Иккинчи бобнинг асосий натижаларини келтирамиз.

3-теорема. Агар C_n қаварик қоплама A кўпбурчакда текис тақсимланган $P_j, j=1,2,...,n$ векторлардан яралган бўлса, у ҳолда C_n нинг функционаллари қатнашган компонентлари $b_n(\nu_n - a_n)$ ва $b_n^*(s_n^* - a_n^*)$ дан иборат вектор $n\to\infty$ да тақсимот бўйича ω тасодифий векторга интилади.

Кейинги теоремада l_n^* функционалнинг лимит тақсимот қонуни ҳақида гап боради.

4-теорема. Агар C_n қаварик қоплама A кўпбурчакда текис тақсимланган $P_j, j=1,2,...,n$ векторлардан яралган бўлса, у ҳолда тасодифий миқдор $\sqrt{\frac{n}{S_0}}l_n^*$, $n\to\infty$ да (ν_n, s_n) га асимптотик боғлиқсиз, бундан ташқари у r та учли A кўпбурчакнинг $i-$учини ифодаловчи боғлиқсиз ς_i т.м. лар йиғиндиси кўринишда ифодаланувчи т.м.га эҳтимол бўйича интилади.

Хусусан, 3- ва 4-теоремалардан периметр учун лимит тақсимот, бошқа икки функционалдан фарқли ўлароқ A– аниқланиш соҳасини кўринишига боғлиқ бўлади. Учларининг сони ва юзасининг лимит тақсимоти эса тақсимот қонун аниқланиш соҳаси кўрилаётган бурчагининг ўлчовига боғлиқ эмас.

Иккинчи бобда келтирилишига кўра, 3- ва 4-теоремаларнинг исботида мартингал ва кучли қоришмали стационар жараёнлардан фойдаланишга ҳеч қандай зарурият йўқ. Бу ерда (Чебишев тенгсизлигининг аналоги бўлган) А.Н.Колмогоровнинг т.м. йиғиндисининг максимуми учун тенгсизлик ва В.В.Петровнинг т.м. йиғиндиси эҳтимоли учун кўрсаткичли тенгсизлигидан фойдаланиб, аналитик ва тўғри эҳтимоллик усуллар ишлатишнинг ўзи етарли бўлади.

Иккинчи бобнинг иккинчи параграфида, A кўпбурчакда берилган биномиал нуқтавий жараён Пуассон нуқтавий жараёни билан аппроксимацияланади. Учинчи параграфда эса K конусда бир жинсли Пуассон нуқтавий жараёнидан яралган $C(K)$ қаварик қопламанинг хоссалари тадқиқ қилинади. Бир жинсли Пуассон нуқтавий жараёнининг орттирмалар боғлиқсизлиги ҳақидаги хоссаси $C(K)$ қаварик қопламанинг асосий функционалларини боғлиқсиз, бир хил тақсимлангпн т.м. йиғиндиси кўринишда ифодалаш имконини беради. Қаварик қопламани ўрганишга асосланган бизнинг ёндашувимиз кўпбурчакдаги бир жинсли Пуассон нуқтавий жараёнининг элементар хоссаларига асосланган. Охиргиси, ўрганилаётган функционалларни т.м. йиғиндиси учун чегаравий масалаларга олиб келади.

Иккинчи бобнинг тўртинчи ва бешинчи параграфларида 3- ва 4-теоремалар исботи учун хизмат қилувчи маълумот, яъни етарлича катта хажмли танланма учун қаварик қопламанинг учлари, асосан, A кўпбурчак учларида йиғилиши исботланади. Шунинг учун, агар $a^{(1)},a^{(2)},...,a^{(r)}$ - A қаварик кўпбурчакнинг учлари ва $S(a,\varepsilon)$ радиуси ε маркази a бўлган доира бўлса, у ҳолда C_n нинг $S(a^{(1)},\varepsilon),S(a^{(2)},\varepsilon),...,S(a^{(r)},\varepsilon)$ доираларга тушган учлари асимптотик боғлиқсиз бўлади.

Биринчи маротаба ушбу диссертация қаварик қоплама учларининг сони, юзаси ва периметри каби функционалларининг биргаликдаги лимит тақсимоти учун лимит теоремани намойиш қилмоқда.

Қаварик соҳада нотекис тақсимланган танланма учун қаварик қопламаларни тадқиқ қилиш кейинги икки бобда давом эттирилади.

Учинчи боб **«Парабола ичидаги Пуассон нуқтавий жараёндан яралган қаварик қоплама учлари жараёнининг хоссалари»** парабола ичида бир жинсли бўлмаган Пуассон тақсимотига эга нуқтавий жараёнидан яралган қаварик қоплама учлари жараёнининг стационарлик ва кучли қоришмали хоссаларини тадқиқ қилишга бағишланган. Бобнинг барча натижалари мустақил маънога эга бўлишига қарамасдан, улар кейинги

тўртинчи бобда қаварик қоплама учларининг сони, юзаси ва периметри учун лимит теоремаларни исботлашга кенг қўлланилади. Учинчи бобнинг биринчи параграфида, мавзунинг долзарблиги асосланади ва қаварик қоплама учлари жараёнининг тайин вақт моментидаги аниқ тақсимоти келтирилади. Бу ерда

$$R_n = \left\{ (x,y) : \frac{x^2}{2b_n} \le y \right\}.$$

деб белгилаб, қуйидаги ўлчовни киритамиз

$$\Lambda_n(A) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi\sqrt{b_n}L(b_n)} \iint\limits_A \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\left(y - \dfrac{x^2}{2b_n} \right)^{\beta} L\left(\dfrac{b_n}{y - \dfrac{x^2}{2b_n}} \right) \right] dxdy, & агар\ A \subset R_n; \\ 0, & агар\ A \not\subset R_n, \end{cases}$$

b_n миқдор эса

$$nx^{-\left(\beta+\frac{1}{2}\right)} L(x) = 1 \qquad (3)$$

тенгламанинг энг кичик ечими,

$$L(u) = \exp\left\{ \int_1^u \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \right\}, \quad \varepsilon(t) \to 0, \quad t \to \infty \qquad (4)$$

дифференцилланувчи Карамата маъносидаги с.ў.ф. интеграл тасвир.

Фараз қилайлик, $\Pi_n(\cdot) - \Lambda_n(\cdot)$ интенсив ўлчовли, бир жинсли бўлмаган Пуассон нуқтавий жараёни (б.б.п.н.ж.) ва $(X_1,Y_1);(X_2,Y_2);...;(X_k,Y_k);...$ R_n да торайтирилган $\Pi_n(\cdot)$ б.б.п.н.ж. реализацияси бўлсин. Бу нуқталарга тортилган қаварик қопламани C_n билан белгилаймиз.

Ҳар бир $a \in R$ учун учлар жараёни $W_n(a) = \left(X_n(a), Y_n(a) \right)$, деб $\Pi_n(\cdot)$ б.б.п.н.ж. реализацияси ичидаги $Y_k - aX_k$ га минимал қиймат берувчи $\left(X_k, Y_k \right)$ нуқтага айтилади.

Тарифга кўра, $W_n(a)$ сакраб ўзгарувчи ностационар Марков жараёни бўлади. Қуйидаги теоремаларда $W_n(a)$ нинг турли ҳолатларига мос тақсимотнинг кўриниши келтирилган.

Диссертацияда фақат $L(x) = 1$ билан чегараланамиз, аслида намойиш қилинадиган усул (4) кўринишдаги ихтиёрий $L(x)$ с.ў.ф. учун ҳам яроқлидир.

5-теорема. Фараз қилайлик $s = y - ax + \dfrac{a^2 b_n}{2}$, $r = x - ab_n$ бўлсин, у ҳолда

$$1)\ P\left(W_n(0) \in (dx,dy) \right) = \frac{\beta}{2\pi\sqrt{b_n}} \exp\left\{ -\frac{y^{\beta+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}\pi} B\left(\beta+1; \frac{1}{2} \right) \right\} \left(y - \frac{x^2}{2b_n} \right)^{\beta-1} dxdy;$$

2) $P\left(W_n(a)\in(dx,dy)\right)=\dfrac{\beta}{2\pi\sqrt{b_n}}\exp\left\{-\dfrac{s^{\beta+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}\pi}B\left(\beta+1;\dfrac{1}{2}\right)\right\}\left(s-\dfrac{r^2}{2b_n}\right)^{\beta-1}dxdy;$

3) $P\left(W_n(a)=W_n(0)/W_n(0)=(x,y)\right)=\exp\left\{-\dfrac{1}{2\pi\sqrt{b_n}}\left[\int\limits_{x-ab_n}^{\sqrt{2b_ns}}\left(s-\dfrac{u^2}{2b_n}\right)^{\beta}du-\right.\right.$

$$\left.\left.-\int\limits_{x}^{\sqrt{2b_ny}}\left(y-\dfrac{u^2}{2b_n}\right)^{\beta}dy\right]\right\}.$$

Стационар бўлмаган $W_n(a)$ жараёндан янги стационар бўлган $T_n(a)$ жараённи қуйидагича қурамиз.

$$R_n(a)=X_n(a)-ab_n,\qquad S_n(a),=Y_n(a)-\frac{X_n^2(a)}{2b_n}+\frac{R_n^2(a)}{2b_n},\qquad T_n(a)=\left(R_n(a),S_n(a)\right).$$

Албатта, $T_n(0)=W_n(0)$ бир эҳтимоллик билан (б.э.б.) эканлиги, ундан эса

$$P\left(T_n(0)\in(dr,ds)\right)=P\left(W_n(0)\in(dr,ds)\right)$$

бўлиб, тақсимотларнинг бир хиллиги келиб чиқади.

6-теорема. $T_n(a)$ сакраб ўзгарувчи Марков стационар жараёни ва

1) $P\left(T_n(a)\in(dr,ds)\right)=\dfrac{\beta}{2\pi\sqrt{b_n}}\exp\left\{-\dfrac{s^{\beta+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}\pi}B\left(\beta+1;\dfrac{1}{2}\right)\right\}\left(s-\dfrac{r^2}{2b_n}\right)^{\beta-1}drds;$

2) $P\left(T_n(a)=(r_1,s_1)/T_n(0)=(r_0,s_0)\right)=\exp\left\{-\dfrac{1}{\sqrt{2}\pi}\left[s_1^{\beta+\frac{1}{2}}\int\limits_{\frac{r_1}{\sqrt{2b_ns_1}}}^{1}\left(1-t^2\right)^{\beta}dt\right.\right.$

$$\left.\left.-s_0^{\beta+\frac{1}{2}}\int\limits_{\frac{r_0}{\sqrt{2b_ns_0}}}^{1}\left(1-t^2\right)^{\beta}dt\right]\right\};$$

бу ерда $r_1=r_0-ab_n,\ s_1=s_0-ar_0+\dfrac{a^2b_n}{2}.$

3) $P\left(T_n(a)\in(dr_1,ds_1)/T_n(0)=(r_0,s_0)\right)=P\left(T_n(a)\in(dr_1,ds_1)\right),$

бу ерда $(r_i,s_i)\in D=\left\{(r,s):s\ge\dfrac{r^2}{2b_n}\right\},\ i=0,1,\ ab_n-\sqrt{2b_ns_1}>\sqrt{2b_ns_0}.$

4) $P\left(T_n(a)\in(dr_2,ds_2)/T_n(0)=(r_1,s_1)\right)=\dfrac{\beta}{2\pi\sqrt{b_n}}\exp\left\{-\dfrac{1}{\sqrt{2}\pi}\left[s_2^{\beta+\frac{1}{2}}\int\limits_{\frac{s_1-s_2}{a\sqrt{2b_ns_2}}+\frac{ab_n}{\sqrt{2b_ns_2}}}^{1}\right.\right.dt$

$$\cdot\left(1-t^2\right)^{\beta}-s_1^{\beta+\frac{1}{2}}\int\limits_{\frac{s_1-s_2}{a\sqrt{2b_ns_1}}+\frac{ab_n}{\sqrt{2b_ns_1}}}^{1}\left(1-t^2\right)^{\beta}dt\Bigg]\Bigg\}\left(s_2-\frac{r_2^2}{2b_n}\right)^{\beta-1}dr_2ds_2.$$

бу ерда

$$(r_i,s_i)\in D=\left\{(r,s):s\geq\frac{r^2}{2b_n}\right\},\ ab_n-\sqrt{2b_ns_2}\leq\sqrt{2b_ns_1},$$

$$s_2+\frac{a^2b_n}{2}+ar_2\geq s_1\geq s_2-\frac{a^2b_n}{2}+ar_1.$$

Учинчи параграфда бу иккита теорема ёрдамида $W_n(a)$ жараённинг кучли қоришмали хоссаси тадқиқ қилинади.

$$\Im_n^0=\sigma\left\{T_n(c):c\leq 0\right\},\ \ \Im_n^{a+}=\sigma\left\{T_n(c):c\geq a\right\}$$

$T_n(a)$ жараёндан яралган $\sigma-$ алгебралар бўлсин.

7-теорема. Ҳар қандай $A\in\Im_n^0$ ва $B\in\Im_n^{a+}$ учун

$$\left|P\left(A\cap B\right)-P(A)P(B)\right|\leq\tau_n(a),$$

бу ерда

$$\tau_n(a)\leq c_1\exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\left(\frac{a^2b_n}{8}\right)^{\beta+\frac{1}{2}}B\left(\beta+1;\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

Хусусан, агар $a>\dfrac{a_n\varepsilon_n^*}{b_n}$,

ва $a_n=\sqrt{2b_n\log n},\ \varepsilon_n^*=\left(\log n\right)^{-\frac{2\beta-\delta-1}{2(2\beta+1)}},\ 0<\delta<1,$

бўлса, у ҳолда $\tau_n(a)\leq c_1\exp\left\{-c_2\left(\log n\right)^{1+\frac{\delta}{3}}\right\}.$

Учинчи бобнинг учинчи парагафида 5-7 теоремалардан фойдаланиб, $W_n(a)$ жараённинг функционаллари тадқиқ қилинади.

Фараз қилайлик, $N_n(0,a)$ – миқдор сакраб ўзарувчи жараён $W_n(c)$ $0\leq c\leq a$ даги сакрашлари сони, $l_n(0,a)$ – эса $\{W_n(c)\ \ 0\leq c\leq a\}$ нуқталар тўпламини кетма-кет туташтиришдан ҳосил бўлган синиқ чизиқ узунлиги бўлсин.

Яна фараз қилайлик, $0=a_0<a_1<\ldots<a_k\leq a$ вақт моментлари $\left\{W_n(c),0\leq c\leq a\right\}$ жараённинг сакраш вақтлари бўлсин. Агар A_0 – $y=Y_n(0),y=\dfrac{x^2}{2b_n}$ чизиқлар билан чегараланган соҳа юзаси, A_i- ихтиёрий $1\leq i\leq k$ учун

$$y = a_{i-1}\left(x - X_n(a_{i-1})\right) + Y_n(a_{i-1}),\ y = a_i\left(x - X_n(a_{i-1})\right) + Y_n(a_{i-1}),\ y = \frac{x^2}{2b_n},$$

чизиқлар билан чегараланган соҳанинг юзаси ва $A[a]$ –

$$y = a_k\left(x - X_n(a_k)\right) + Y_n(a_k),\ \ y = a\left(x - X_n(a_k)\right) + Y_n(a_k),\ y = \frac{x^2}{2b_n}$$

чизиқлар билан чегараланган соҳа юзаси бўлса, у ҳолда $A_n(0,a) = A_0 + A_1 + ... + A_k + A[a]$ т.м. йиғиндиси (Пуассон нуқтавий жараён орттирмаларининг боғлиқсизлиги ҳоссасига кўра) тасодифий сондаги боғлиқсиз т.м. йиғиндиси эканлиги маълум бўлади ва қуйидаги натижалар келиб чиқади.

8-теорема. Қуйидаги

$$N_n(0,a) - \int_0^a M^{(1)}\left(T_n(b); R^2\right)db \ \ ,\ N_n^2(0,a) - \int_0^a \left[2N_n(0,b)+1\right]M^{(1)}\left(T_n(b); R^2\right)db$$

ва $$N_n^3(0,a) - \int_0^a \left[3N_n^2(0,b) + 3N_n(0,b) + 1\right]M^{(1)}\left(T_n(b); R^2\right)db$$

жараёнлар σ–алгебра $\Im_a = \sigma\left\{T_n(c) : 0 \le c \le a\right\}$ нисбатан мартингал бўлади.

9-теорема. Қуйидаги

$$A_n(0,a) - \frac{1}{2}\int_0^a \left(\sqrt{2b_n S_n(b)} - R_n(b)\right)^2 db$$

ва

$$A_n^2(0,a) - \int_0^a A_n(0,b)\left(\sqrt{2b_n S_n(b)} - R_n(b)\right)^2 db$$

жараёнлар σ–алгебра $\Im_a = \sigma\left\{T_n(c) : 0 \le c \le a\right\}$ нисбатан мартингал бўлади.

10-теорема. Қуйидаги

$$l_n(0,a) - \int_0^a \sqrt{1+b^2}\,M^{(2)}\left(T_n(b); R^2\right)db$$

ва

$$l_n^2(0,a) - \int_0^a \left[\left(1+b^2\right)M^{(3)}\left(T_n(b); R^2\right) + 2\sqrt{1+b^2}\,l_n(0,b)M^{(2)}\left(T_n(b); R^2\right)\right]db$$

жараёнлар σ–алгебра $\Im_a = \sigma\left\{T_n(c) : 0 \le c \le a\right\}$ нисбатан мартингал бўлади.

Учинчи бобда олинган ҳамма натижалар тўртинчи бобда қаварик қопламанинг асосий функционаллари учун лимит теоремаларни исботлашда қўлланилади.

Тўртинчи боб **«Бирлик доира ичидаги қаварик қоплама функционаллари учун лимит теоремалар»** деб номланган бўлиб, бирлик доира ичида қутб координаталар системасида берилган (r_i, α_i) нуқталардан

яралган қаварик қоплама тадқиқ қилинади, бу ерда қутб бурчаги α_i, $[-\pi,\pi]$ да текис тақсимланган ва r_i га боғлиқсиз т.м., r_i т.м. эса доира чегараси яқинида тўғри ўзгарувчи функция каби тақсимланган булиб, хусусан, текис тақсимотни ўз ичига олади:

$$P\left(r_i > 1-x\right) = x^{\beta} L\left(\frac{1}{x}\right),\ 0 < x < 1,\ \beta \geq 1, \qquad (5)$$

бу ерда $L(x)$ – с.ў.ф. бўлиб, (4) интеграл шаклга эга.

Тўртинчи бобнинг биринчи параграфида боб учун керакли белгилашлар, асосий ва ёрдамчи тушунчалар киритилганидан сўнг бобнинг асосий натижалари: (5) тақсимот қонунга эга бўлган синифларга тегишли танланмадан яралган қаварик қоплама учларининг сони, юзаси ва периметрлар учун лимит теоремалар келтирилган.

$X_i = r_i \sin\alpha_i,\ Y_i = 1 - r_i \cos\alpha_i$, алмаштириш бажарамиз. Ҳосил бўлган $(X_1,Y_1);(X_2,Y_2);...;(X_n,Y_n)$ тасодифий нуқталардан яралган қаварик қопламани C_n билан белгилаймиз, ν_n, s_n ва l_n – мос равишда C_n нинг учларининг сони, юзаси ва периметри бўлсин.

(5) кўринишдаги тақсимот қонунлар синфи учун H.Carnal (Die konvexe Hulle von n rotations symmetrisch verteilten Punkten. Z.Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 1970. 15, 168-176) юқоридаги функционалларнинг ўрта қийматлари учун асимптотик ифодаларни

$$E\nu_n = \lambda_1 b_n^{\frac{1}{2}}\left(1+o(1)\right), \qquad Es_n = \pi - \lambda_3 b_n^{-1}\left(1+o(1)\right) \text{ ва}$$

$$El_n = 2\pi - \lambda_5 b_n^{-1}\left(1+o(1)\right) \quad \text{агар} \quad n \to \infty,$$

аниқлаган, бу ерда λ_1, λ_3 ва λ_5 абсолют константалар бўлиб (5) тақсимот қонундаги β га боғлиқдир, b_n - эса (3) тенгламанинг илдизи. Бу натижалар H.Carnal гача R^2 да текис тақсимланган ҳолат учун олинган B.Efron натижаларни умумлаштиради.

11-теорема. Агар $n \to \infty$, у ҳолда

$$\frac{\nu_n - \lambda_1 b_n^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi\lambda_2}\, b_n^{\frac{1}{4}}} \overset{d}{\Rightarrow} \mathrm{N}(0,1),$$

ўринли, бу ерда

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}B\left(2\beta+1;\frac{1}{2}\right)}{2\pi}\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{B\left(\beta+1;\frac{1}{2}\right)}\right)^{2-\frac{1}{2\beta+1}} \Gamma\left(3-\frac{1}{2\beta+1}\right),\ \lambda_2 = \lambda_2^{(1)} + \lambda_2^{(2)} - \lambda_2^{(3)}.$$

$\lambda_2^{(1)}$, $\lambda_2^{(2)}$ ва $\lambda_2^{(3)}$ ларнинг аниқ қиймати боб ичида келтирилган, $\overset{d}{\Rightarrow}$ – кучсиз яқинлашиш маъносини беради, $\mathrm{N}(0,1)$ эса стандарт нормал тақсимланган т.м.

Худди шунга ўхшаб, агар $\Delta_n = \pi - s_n$ деб белгиласак, у ҳолда

12-теорема.

$$\sqrt{\frac{\pi b_n^{\frac{5}{2}}}{2\lambda_4}}\left(\frac{\Delta_n}{\pi} - \lambda_3 b_n^{-1}\right) \overset{d}{\Rightarrow} \mathrm{N}(0,1), \quad n \to \infty,$$

бу ерда

$$\lambda_3 = \frac{2\beta+1}{(2\beta+3)}\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{B\left(\beta+1;\frac{1}{2}\right)}\right)^{\frac{2}{2\beta+1}} \Gamma\left(3+\frac{2}{2\beta+1}\right), \quad \lambda_4 = \lambda_4^{(1)} + \lambda_4^{(2)} - \lambda_4^{(3)}.$$

$\lambda_4^{(1)}$, $\lambda_4^{(2)}$ ва $\lambda_4^{(3)}$ ларнинг аниқ қиймати ҳам боб ичида келтирилган.

11 ва 12 теоремаларнинг исботида битта усул ҳар хил ёндашув билан қўлланилган. Дастлаб қаралаётган қаварик қоплама доира ичида Пуассон нуқтавий жараёнидан яралганига аппроксимацияланади, сўнгра бутун доира ўзаро кесишмайдиган m_n ($m_n \to \infty$) та марказий бурчаги $2\pi \log n / \sqrt{b_n}$ бўлган сегментга (катта блок) ва ўзаро кесишмайдиган m_n та марказий бурчаги $2\left(\log^{\delta_0} n + \log^{\delta_0^*} n\right)/\sqrt{b_n}$, $1 > \delta > \delta^* > 2/(2\beta+1)$ бўлган сегментга (кичик блок) бўлинади, ва ҳар бир сегментда қаварик қопламанинг асосий функционаллари учун марказий лимит теоремалар исботланади. Бунда исботлашнинг асосий усули сифатида Ибрагимов-Линникнинг 18.5.3-теоремаси хизмат қилади (И.А.Ибрагимов, Ю.В.Линник., Независимые и стационарно связанные величины, «Наука»,М. 1965, 524С.). Ибрагимов-Линникнинг 18.5.3-теоремаси шартлари 7-теорема (кучли қоришмалилик хақидаги ҳосса) ёрдамида текширилади ва ҳар бир функционал учун (11 ва12 теорема) ҳар бир сегментда алохида исботланади. Тўртинчи бобнинг охирида ҳар бир катта блок E_k даги ва ҳар бир кичик блок E_k^* даги нуктавий жараёнлар шу соҳаларда торайтирилган б.ж.п.н.ж. $\Pi_n(\cdot)$ билан аппроксимацияланади. Сўнгра, Пуассон нуқтавий жараённинг орттирмаларининг боғлиқсизлигидан фойдаланиб, биз ν_n ва s_n тасодифий миқдорларни ўзаро боғлиқсиз нормал тақсимланган m_n та т.м. йиғиндиси кўринишда ифодалаб оламиз.

ХУЛОСА

Диссертация иши тасодифий миқдорлар йиғиндисидаги экстремал қўшилувчиларнинг йиғиндидаги ҳиссасини ўрганишга, тақсимот қонуни қаварик соҳада аниқланган бош тўпламдан олинган танланмага тортилган қаварик қоплама функционалларининг лимит тақсимотини аниқлашга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Минимал ва максимал қўшилувчилари чиқариб ташланган (кесик) йиғиндининг лимит тақсимоти спектрал ўлчови носимметрик интерваллларда торайтирилиб ҳар бири охири аралаш параметрли турғун тақсимотнинг спектори кўринишдаги икки параметрли аралаш чексиз бўлинувчи тақсимот қонун эканлиги кўрсатилган.

2. Кесик йиғиндининг охирги чиқариб юборилаётган экстремал қўшилувчилари билан биргаликдаги лимит тақсимот қонуни ихтиёрий чекли m ва k учун қирқилган чексиз бўлинувчи қонунга эга т.м. билан ҳар бири мос равишда m та ва k та Парето тақсимотига эга т.м. йиғиндиси кўринишда бўлган т.м. ларнинг биргаликдаги лимит тақсимоти ёрдамида ифодаланиши исботланган.

3. Тасодифий миқдорлар йиғиндисининг катта оғишлар эҳтимоли масаласидаги йиғиндини x_n даражадан ошиши эҳтимолида (x_n маълум бир тартибда ўсиб борувчи бўлган ва тақсимотнинг ўнг дум қисми тўғри ўзгарувчи функция, чап дум қисми эса ўнгига нисбатан чегараланган ҳолатда) максимал қўшилувчиларнинг ҳиссаси йиғинди қийматининг асосий шакллантирувчиси эканлиги кўрсатилган.

4. Икки ўлчовли танланма учун четки элементлар деб танланма элементларига тортилган қаварик қоплама қаралган ва у Пуассон нуқтавий жараёнидан яралган қаварик қоплама билан аппроксимацияланган.

5. Қаварик қоплама r та учли қаварик кўпбурчакда текис тақсимланган нуқталардан яралган ҳол учун қаварик қопламанинг учларининг сони, юзаси ва периметрларининг биргаликдаги лимит тақсимот қонуни топилган.

6. Қаварик қоплама r та учли қаварик кўпбурчакда Пуассон нуқтавий жараёндан яралган ҳол учун тақсимот қонун аниқланиш соҳасининг қаварик қопламадан ташқарисидаги тўпламнинг юзаси бир ҳил кўрсаткичли тақсимланган т.м. йиғиндиси кўринишда ифодаланиши исботланган.

7. Қаварик қоплама парабола ичида бир жинсли бўлмаган Пуассон нуқтавий жараёндан яралган ҳолат учун учлар жараёнини тайин вақтлардаги тақсимоти ва шартли тақсимоти топилган

8. Учлар жараёнининг қучли қоришмали ҳоссаси исботланган ва уларнинг функционаллари учун мартингал бўлган жараёнлар қурилган, жумладан, бу мартингаллар ёрдамида учлар жараёнининг функционалларини сонли характеристикаларининг асимптотик қийматлари топилган.

9. Танланма бирлик доира ичида қутб координаталар системасида берилган нуқталардан иборат бўлиб, бурчак координатаси айланада текис тақсимланган, радиал координатаси тақсимоти эса унга боғлиқ бўлмай, тақсимотининг дум қисми доира чегараси яқинида текис ўзгарувчи функция бўлган ҳолатдан яралган қаварик қопламанинг учларини сони ва юзаси учун марказий лимит теоремалар исботланган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И. РОМАНОВСКОГО

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ХАМДАМОВ ИСАКЖАН МАМАСАЛИЕВИЧ

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ВЫБОРКИ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ ВЫПУКЛЫХ ОБОЛОЧЕК

01.01.05 – Теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА (DSc) ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ТАШКЕНТ–2021

Тема докторской (DSc) диссертации зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2021.2.DSc/FM170

Диссертация выполнена в Институте Математики имени В.И. Романовского.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу www.ziyonet.uz.

Научный консультант:	**Форманов Шакир Касимович** доктор физико-математических наук, академик
Официальные оппоненты:	**Абдушукуров Абдурахим Ахмедович** доктор физико-математических наук, профессор
	Гаджиев Асаф Гаджи оглы доктор физико-математических наук, академик Национальная Академия Наук Азербайджана
	Имомов Аъзам Абдурахимович доктор физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	**Тбилисский государственный университет (Грузия)**

Защита диссертации состоится «30» ноября 2021 г. в 16:00 часов на заседании научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И. Романовского (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская. Дом 9, Тел.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz , Website: www.mathinst.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И. Романовского (регистрационный номер 125). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская. Тел.: (+99871)-207-91-40).

Автореферат диссертации разослан «12» ноября 2021 г.

(протокол рассылки № 2 от «12» ноября 2021 г.).

У.А.Розиков
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

Ж.К.Адашев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник

Я.М.Хусанбаев
Заместитель председателя Научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., доцент

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Экстремальные значения выборки имеют многочисленные применения в различных отраслях науки и техники, экономики, актуарной математики, теории надежности (особенно при оценке надежности работы промышленных и сельскохозяйственных объектов), медицине и так далее. Асимптотический анализ порядковых статистик является важным при оценивании неизвестных параметров распределения и при определении критической области в проверке статистических гипотез, в частности, если границы области равномерного распределения зависят от неизвестных оцениваемых параметров, то оценки строятся с помощью крайних членов вариационного ряда, и они являются состоятельными, асимптотически несмещенными оценками и достаточными статистиками. Выпуклая оболочка является наиболее полным многомерным аналогом экстремальных наблюдений выборки, в частности, если носитель равномерной выборки является выпуклой областью, то выпуклая оболочка для оценивания носителя распределения является состоятельной, асимптотически несмещенной оценкой и достаточной статистикой так же, как и в одномерном случае. Поэтому в настоящее время исследование экстремальных порядковых статистик в многомерных случаях и исследование выпуклой оболочки актуальны и часто используются в статистических выводах при оценивании носителя распределения.

В последнее время возрастает интерес к исследованиям по асимптотическому анализу предельного поведения экстремальных порядковых статистик и их многомерных вариантов, особенно к функционалам от выпуклых оболочек, построенных на экстремальных значениях статистической выборки. Это обстоятельство связано с тем, что именно экстремальные статистики служат основой для математических моделей прикладных задач управления экономическими системами, организации деятельности финансовых и актуарных (страховых) компаний. При этом особое внимание уделяется задачам аппроксимации распределений используемых статистических оценок сумматорных видов известными безгранично делимыми распределениями.

В нашей стране большое внимание уделяется исследованиям актуальных задач современной фундаментальной и прикладной науки, возникающих в экономике, бизнесе, деятельности страховых компаний и теории массового обслуживания. В том числе, в последние годы ведутся интенсивные исследования по асимптотическим задачам теории параметрического и непараметрического статистического оценивания, установления явных видов предельного распределения экстремальных статистик и функционалов от выпуклых оболочек, построенных по этим статистикам. Проведение исследований на уровне мировых стандартов по приоритетным направлениям дисциплин «Теория вероятностей и математическая статистика, функциональный анализ и актуарная математика» обозначены как основные

цели и направления деятельности исследователей[1]. В целях использования в смежных областях науки существенный интерес для специалистов представляют результаты, связанные с установлением явного вида предельного совместного распределения суммы и k–ой порядковой статистики и исследования совместного предельного распределения функционалов от выпуклой оболочки, порожденной выборкой из генеральной совокупности с ограниченным выпуклым носителем распределения.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан №УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в постановлениях №ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В. И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан» и №ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», и в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологии республики. Данная диссертация выполнена в соответствии с приоритетными направлениями развития науки и технологий Республики Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации. Научные исследования по теории экстремальных порядковых статистик и по определению предельного распределения функционалов от выпуклой оболочки ведутся в крупных научных центрах и высших учебных заведениях мира, в частности, в Temple University, Philadelphia (USA), Stanford University, California (USA), Katholieke Universiteit Leuven (Belgium), Tilburg University (the Netherlands), Iowa State University (USA), The Ohio State University (USA), University of Technology Delft (the Netherlands), Princeton University (USA), The University of Salzburg (Austria), Purdue University (USA), Mathematical Institute of the University of Bern, Switzerland, Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, Математическом институте им. В.А.Стеклова Российской Академии наук и его отделении в Санкт-Петербурге, Санкт-Петербургском государственном университете, Институте Систем Управления Национальной Академии Наук Азербайджана, Тбилисском государственном университете, НИИ прикладных проблем математики и информатики при Белорусском государственном университете, Одесском государственном педагогическом институте им. К.Д.Ушинского.

[1] Постановление Кабинета Минстров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан»

В последние годы в перечисленных выше научных организациях и университетах интенсивно проводятся научные исследования по задачам влияния экстремальных слагаемых в образовании значений сумм независимых случайных величин (с.в.), в том числе получены следующие научные результаты: если исходное распределение принадлежит области притяжения устойчивого закона с показателем меньше единицы, то доказано, что экстремальные члены вариационного ряда оказывают существенное влияние на асимптотические свойства распределения суммы случайных величин; установлено, что предельное распределение нормированной суммы без экстремальных слагаемых по модулю представляет собой смесь безгранично делимых законов (Одесский государственный педагогический институт им. К.Д.Ушинского); эти результаты перенесены на случай показателей между единицей и двойкой устойчивого закона (Katholieke Universiteit Leuven, Belgium).

В настоящее время, наряду с одномерными, исследуются многомерные аналоги экстремальных наблюдений и функционалы от выпуклой оболочки, при этом найдены асимптотические выражения для основных функционалов выпуклой оболочки, порожденной равномерно распределенными точками в круге (Stanford University, California, USA); найдено асимптотическое поведение и выяснены связи между асимптотическими выражениями математических ожиданий числа вершин, площади и периметра выпуклой оболочки в случае, когда случайные точки заданы в полярной системе координат, причем их компоненты независимы между собой, угловая координата равномерна распределена и хвост распределения радиальной координаты является правильно меняющейся функцией вблизи границы носителя – круга (Mathematical Institute of the University of Bern, Switzerland); впервые удалось получить предельное распределение для числа вершин, площади и периметра выпуклой оболочки в случае, когда носитель исходного равномерного распределения представляет собой выпуклый многоугольник или эллипс (University of Technology, Delft, the Netherlands); также доказана центральная предельная теорема для основных функционалов выпуклой оболочки в случае, когда выборка извлечена из нормальной совокупности на плоскости (Purdue University, USA).

Степень изученности проблемы. Впервые интерес к теории порядковых статистик появился, по-видимому, в 20-е годы прошлого века в работах R.E. vonMises, L.H.C.Tippett, M.Frechet. Позднее Б.В.Гнеденко обнаружил, что предельное распределение экстремальных наблюдений может иметь один из трех типов. Д.З.Аров и А.А.Бобров, L. de Haan, J.L.Teugels, А.В.Нагаев и др. внесли существенный вклад в развитие теории предельных распределений экстремальных наблюдений, в частности, в случае бесконечной дисперсии слагаемых. Они доказали, что вклад экстремальных порядковых статистик в сумму является существенным и в задачах анализа вероятностей больших уклонений для сумм независимых с.в. Далее, ряд ученых, а именно, M.G.Kendall, A.Stuart, E.L.Lehmann, S.P.Lloyd, L.H.Y.Chen,

J.Pike, H.N.Nagaraja и А.В.Степанов определили вклад экстремаль-ных порядковых статистик в суммах, в законе повторного логарифма, в слабых и усиленных законах больших чисел.

Основополагающий вклад в развитие теории экстремальных порядковых статистик и рекордов внесли специалисты Санкт-Петербургской школы по теории вероятностей и математической статистики (В.В.Петров, В.Б.Невзоров, В.А. Егоров, И.С.Ахундов и др.). Представители этой научной школы обогатили теорию экстремальных порядковых статистик и рекордов новыми результатами и методами доказательств, в частности, ими установлены характеристики для распределения рекордов и экстремальных статистик, рассмотрены некоторые регрессионные отношения для рекордных значений, генерирование рекордов и верхних порядковых статистик.

В настоящее время в исследованиях асимптотического выражения числовых характеристик и предельного распределения функционалов от выпуклых оболочек существенные результаты получили B.Efron, A.Reny, R.Sulanke, H.Carnal, P.Groeneboom, I.Hueter, T.Hsing, А.В.Нагаев, A.J.Cabo, Ch.Buchta, J.Pardon. Аппроксимировав биномиальный точечный процесс пуассоновским, они доказали различные варианты центральной предельной теоремы для функционалов от случайной выпуклой оболочки в случае, когда исходное распределение сосредоточено равномерно в выпуклом многоугольнике или эллипсе. Метод доказательства центральной предельной теоремы для числа вершин выпуклой оболочки, предложенный P.Groeneboom, получил развитие в работах A.J.Cabo, P.Groeneboom и T.Hsing для площади выпуклой оболочки в случае, когда выборка извлечена из совокупности, имеющей равномерное распределение в многоугольнике и круге, соответственно, а I.Hueter с помощью метода, предложенного P.Groeneboom, доказала центральную предельную теорему для площади выпуклой оболочки в случае, когда генеральная совокупность имеет нормальное распределение на плоскости.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами научной организации, где выполнена диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой Института Математики имени В.И. Романовского АН РУз, и ее тема отражена в фундаментальном научном проекте ОТ-Ф4-83 «Предельные теоремы для вероятностных распределений и статистический анализ функциональных данных» (2017 – 2020 гг).

Целью исследования является определение совместного предельного распределения усеченной суммы с максимальными и минимальными слагаемыми и совместного распределения основных функционалов выпуклой оболочки, порожденной выборкой из генеральной совокупности с ограниченным выпуклым носителем распределения.

Задачи исследования представленной диссертации заключаются в следующем:

определить вид характеристической функции предельной нормированной усеченной суммы в случае, когда распределения слагаемых принадлежат области притяжения устойчивого закона;

применить методы теории суммирования независимых с.в. для определения вклада крайних слагаемых в усеченную сумму в задаче вероятности больших уклонений в случае правильно меняющихся хвостов распределения и найти достаточные условия для выяснения вклада крайних слагаемых в усеченную сумму;

определить совместное предельное распределение функционалов выпуклой оболочки в случае, когда выборка извлечена из совокупности с равномерным распределением с носителем в виде выпуклого многоугольника;

найти точное распределение вершинных процессов при фиксированном времени, когда выпуклая оболочка порождена неоднородным пуассоновским точечным процессом внутри параболы;

доказать предельные теоремы для основных функционалов выпуклых оболочек в случае, когда случайные точки заданы в полярной системе координат, причем их компоненты независимы между собой, угловая координата равномерна распределена и хвост распределения радиальной координаты является правильно меняющейся функцией вблизи границы носителя – круга.

Объектами исследования диссертации являются асимптотический анализ распределения сумм с исключением максимальных и минимальных слагаемых (усеченные суммы) и совместное распределение функционалов выпуклой оболочки.

Предметом исследования диссертации является теория суммирования независимых случайных величин с усеченными распределениями, теория безгранично делимых и устойчивых законов распределения с хвостами в виде правильно меняющихся функций; задачи теории стационарных случайных процессов и теории временных рядов.

Методы исследования. В диссертации используются методы аналитических представлений характеристических функций безгранично делимых и устойчивых законов распределения (формулы типа Леви–Хинчина), применения мартингальной техники стационарных процессов, обладающих свойством сильного перемешивания по Розенблату.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

доказаны предельные теоремы, устанавливающие связи между экстремальными членами порядковых статистик и суммами независимых случайных величин в случае, когда распределения слагаемых принадлежат к области притяжения устойчивых законов;

найдено совместное предельное распределение основных функционалов выпуклой оболочки в случае, когда исходное распределение равномерно, и носителем является выпуклый многоугольник, а также доказано, что

периметр выпуклой оболочки асимптотически не зависит от числа вершин и площади;

установлены виды распределений и условные распределения вершинных процессов при фиксированном времени в случае, когда выпуклая оболочка порождена неоднородным пуассоновским точечным процессом внутри параболы;

доказаны предельные теоремы для числа вершин и площади выпуклой оболочки в случае, когда случайные точки заданы в полярной системе координат, причем их компоненты независимы между собой, угловая координата равномерна распределена, и хвост распределения радиальной координаты является правильно меняющейся функцией вблизи границы носителя – круга.

Практические результаты исследования состоят в возможности заменить вероятности больших уклонений суммы на вероятность больших уклонений экстремальных порядковых статистик и оценить носитель распределения с помощью выпуклой оболочки методом построения доверительных интервалов для площади и периметра носителя распределения.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием спектрального представления характеристических функций устойчивых и безгранично делимых законов (аналоги формулы Леви–Хинчина), применением предельной теоремы Ибрагимова–Линника для стационарных процессов со свойством сильного перемешивания, методом оценивания моментов случайных процессов, основанных на мартингалах, а также привлечением методов функционального анализа и тонких методов анализа специальных функций и интегралов, зависящих от параметров.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования заключается в том, что полученные в диссертации результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории порядковых статистик, связанной с характеристической функцией усеченной суммы, теорией оценивания носителя распределения, структурной теорией точечных процессов.

Практическая значимость диссертационного исследования определяется применением полученных в работе научных результатов при решении теоретических и практических задач математической статистики, теории, связанной с точечными процессами, теории массового обслуживания, а также физики, техники и медицины, в которых особенно важным является вклад экстремальных наблюдений.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

способы определения роли экстремальных слагаемых в сумме и техника доказательства предельных теорем для совместного распределения функционалов от выпуклых оболочек использованы при выполнении

зарубежного гранта №20162503 «Разработка вероятностно-статистических моделей, методов и алгоритмов компьютерного анализа данных сложной структуры» при определении асимптотических свойств крайних членов вариационного ряда в случае, когда исходное распределение принадлежит области притяжения устойчивого закона (письмо НИИ прикладных проблем математики и информатики при Белорусском государственном университете №10.4/18 от 18.02.2021). Применение результатов дало возможность провести статистическое тестирование криптографических генераторов случайных и псевдослучайных последовательностей;

результаты диссертации были использованы при выполнении зарубежного гранта EIF-ETL-2020-2(36)-16/05/1-M-05 «Исследование процессов блуждания, описываемых полумарковскими процессами и иновационными авторегрессиями» при оценивании запасов воды в с/х районах Азербайджана (письмо Главного директора Института Систем Управления Национальной Академии Наук Азербайджана №21-2/85 от 23.04.2021). Применение научных результатов дало возможность провести статистическую оценку площади, занимаемой дождевой водой, и найти доверительные интервалы для запаса дождевой воды в некоторых с/х районах Азербайджана;

предельные теоремы для сумм случайных величин с исключением экстремальных порядковых статистик использованы при выполнении научного проекта зарубежного гранта GNSF/STFR/308/5-104/12 «Статистическое оценивание и некоторые задачи стохастического анализа» для непараметрического оценивания функциональной характеристики распределения наблюдаемой случайной величины (письмо заместителя ректора по научной части Тбилисского государственного университета № 5587/01-16-01 от 28.04.21021). Применение научных результатов дало возможность доказать центральные предельные теоремы для непараметрических ядерных оценок интегральных функционалов, зависящих от плотности вероятностей и ее производных.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 20 научных и научно-практических конференциях, в том числе, на 3 международных и 17 республиканских.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 40 научных работ, из них 17 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе 7 работ опубликованы в зарубежных журналах и 10 – в республиканских изданиях.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы. Общий объем диссертации составляет 182 страницы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики Узбекистан. Приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степени изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Дисертационная работа посвящена определению предельного поведения крайних членов выборки, причем исследование ведется по двум направлениям. Первое направление исследования представлено в первой главе диссертации, названной **«Вклад экстремальных слагаемых в сумму независимых случайных величин»,** и посвящено выяснению вклада экстре-мальных членов вариационного ряда в поведение суммы независимых случайных величин. В главе, в частности, устанавливаются асимптотические свойства усеченной суммы относительно экстремальных слагаемых в сумме для случая, когда исходное распределение принадлежит области притяжения устойчивого закона с показателем $\alpha \in (0,1) \cup (1,2)$. Доказано, что предельное распределение для усеченной суммы представляет собой двухпараметрическую смесь безгранично делимых законов, спектральная мера каждого из которых является сужением спектральной меры предельного устойчивого распределения на несимметричный интервал, концы которого являются параметрами смеси. В качестве весовой функции при этом служит плотность предельного совместного распределения максимального и минимального слагаемого в усеченной сумме.

В первом параграфе сначала вводятся необходимые обозначения, затем приводятся наиболее интересные результаты по данному направлению и основной результат первой главы.

Пусть $X_1,\ X_2,\ ...,\ X_n$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (с.в.), заданных на одном и том же вероятностном пространстве с общей функцией распределения (ф.р.) $F(x)$.

Далее, пусть $X_n^{(1)} \le X_n^{(2)} \le ... \le X_n^{(n)}$ – вариационный ряд, построенный в порядке возрастания для с.в. $X_1,\ X_2,\ ...,\ X_n$. Результаты упорядочения по абсолютной величине обозначим

$$\left|\overline{X}_n^{(1)}\right| \le \left|\overline{X}_n^{(2)}\right| \le ... \le \left|\overline{X}_n^{(n)}\right|.$$

Обозначим через $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ сумму случайных величин и положим

$$\overline{S}_n^{(k)} = \sum_{j=1}^{n-k} \overline{X}_n^{(j)}, \quad S_n^{(m,k)} = \sum_{j=m+1}^{n-k} X_n^{(j)}.$$

Легко заметить, что $\overline{S}_n^{(k)}$ является результатом удаления k наибольших по абсолютной величине слагаемых из суммы S_n, тогда как $S_n^{(m,k)}$ получается при одновременном удалении m крайних левых и k крайних правых порядковых статистик.

Предположим, что распределение X_1 удовлетворяет условию

$$P\left(X_1 < u\right) = F(u) = \begin{cases} c_1 |u|^{-\alpha} l_1\left(|u|\right), & \text{если } u < 0, \\ 1 - c_2 u^{-\alpha} l_2\left(u\right), & \text{если } u \geq 0, \end{cases} \tag{1}$$

Здесь c_1 и c_2 – положительные постоянные такие, что $c_1 + c_2 = 1$, а $l_i(u)$, $i = 1,2$, – медленно меняющиеся функции, причем $\lim\limits_{u\to\infty} l_1(u)/l_2(u) = 1$.

В дальнейшем будем считать, что $\alpha \in (0,1) \bigcup (1,2)$. Более того, при $1 < \alpha < 2$ мы предполагаем, что $EX_1 = 0$.

Положим

$$b_n = \inf\left\{t : nP\left(|X_1| > t\right) \leq 1\right\}$$

Известно, что случайная величина $b_n^{-1} S_n$ сходится по распределению к случайной величине с характеристической функцией $\varphi(t)$, логарифм которой имеет следующий вид:

$$\log \varphi(t) = \begin{cases} \alpha c_1 \int\limits_{-\infty}^{0} \dfrac{e^{itz} - 1}{|z|^{\alpha+1}} dz + \alpha c_2 \int\limits_{0}^{\infty} \dfrac{e^{itz} - 1}{z^{\alpha+1}} dz, & \text{если } 0 < \alpha < 1, \\ \alpha c_1 \int\limits_{-\infty}^{0} \dfrac{e^{itz} - 1 - itz}{|z|^{\alpha+1}} dz + \alpha c_2 \int\limits_{0}^{\infty} \dfrac{e^{itz} - 1 - itz}{z^{\alpha+1}} dz, & \text{если } 1 < \alpha < 2. \end{cases} \tag{2}$$

Положим

$$G_k(x) = \frac{1}{(k-1)!} \int\limits_{x^{-\alpha}}^{\infty} v^{k-1} e^{-v} dv.$$

Вопрос о роли экстремальных слагаемых интересовал многих авторов, в частности, в работе Д.З.Арова и А.А.Боброва (Аров Д.З., Бобров А.А., О крайних членах вариационного ряда и их роли в сумме независимых величин, Теор. вер.и ее примен., 1960. Т.5, №4, стр.415-435) получено предельное совместное распределение для случайных величин $b_n^{-1}\overline{S}_n^{(k)}$ и $b_n^{-1}\left|\overline{X}_n^{(n-k+1)}\right|$ при $0 < \alpha < 1$, которое представляет собой смесь безгранично делимых законов, причем параметром смеси является уровень, на котором симметричным образом урезается пуассоновский спектр устойчивого закона, а весовой функцией служит $G_k(x)$. В работе J.L.Teugels (Teugels J.L., Limit theorems on order statistics. – Ann. Probab., 1981, v. 9, No 5, p.868-880) результаты Арова и Боброва продолжены для случая $1 < \alpha < 2$.

Основным результатом главы является перенос результатов, полученных Д.З.Аровым и А.А.Бобровым и J.L.Teugels на $S_n^{(m,k)}$, т.е. исследование совместного распределения суммы $S_n^{(m,k)}$ с крайними членами порядковых статистик $X_n^{(m)}$ и $X_n^{(n-k+1)}$.

Пусть $F(z;x,y),\ x>0,\ y>0,$ – двухпараметрическое семейство функций распределения безгранично делимых законов, логарифм характеристических функций которых имеет вид (ср., например, с (2))

$$h(t;x,y)=\begin{cases}\alpha c_1\int\limits_{-x}^{0}\dfrac{e^{itz}-1}{|z|^{\alpha+1}}dz+\alpha c_2\int\limits_{0}^{y}\dfrac{e^{itz}-1}{z^{\alpha+1}}dz, & \text{если } 0<\alpha<1;\\ it\dfrac{\alpha}{\alpha-1}(c_2y^{-\alpha}-c_1x^{-\alpha})+\alpha c_1\int\limits_{-x}^{0}\dfrac{e^{itz}-1-itz}{|z|^{\alpha+1}}dz+ & \\ +\alpha c_2\int\limits_{0}^{y}\dfrac{e^{itz}-1-itz}{z^{\alpha+1}}dz, & \text{если } 0<\alpha<1.\end{cases}$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия (1) при $\alpha\in(0,1)\bigcup(1,2)$ и $\min(c_1,c_2)>0.$ Тогда при $n\to\infty$

$$P\left(S_n^{(m,k)}<zb_n,-X_n^{(m)}<ub_n,X_n^{(n-k+1)}<vb_n\right)=\int\limits_0^u\int\limits_0^v F(z,x,y)dG_m^{(1)}(x)dG_k^{(2)}(y)+o(1)$$

равномерно по u $(u\ge 0)$ и v $(v\ge 0)$, где

$$G_m^{(i)}(u)=\frac{1}{(m-1)!}\int\limits_{c_iu^{-\alpha}}^{\infty}x^{m-1}e^{-x}dx,\ i=1,2.$$

Из теоремы, в частности, следует, что

$$P\left(\frac{S_n^{(m,k)}}{\min\left\{\left|X_n^{(m)}\right|,X_n^{(n-k+1)}\right\}}<z\right)\to\iint\limits_{x>y}F(zy;x,y)dG_m^{(1)}(x)dG_k^{(2)}(y)+$$
$$+\iint\limits_{x<y}F(zx;x,y)dG_m^{(1)}(x)dG_k^{(2)}(y).$$

Нетрудно понять, что происходит, когда хвосты исходного распределения имеют существенно разный вес. Если, например, $1-F(u)=u^{-\alpha}l(u),\ u>0,$ где $l(u)$ – медленно меняющаяся функция при $n\to\infty$, а $F(-u)=o(1-F(u))$, то предельное распределение случайной величины $S_n^{(m.k)}$ совпадает с предельным распределением $\overline{S}_n^{(k)}$. Более того, имеет место:

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{S_n^{(m,k)}}{X_n^{(n-k+1)}}<z\right)=P\left(\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_k<z\right).$$

В этом случае

$$Ee^{it\eta_1} = \frac{1}{1-h(t)},$$

где

$$h(t) = \begin{cases} \alpha \int_0^1 \frac{e^{itz}-1}{z^{\alpha+1}} dz, & \text{если } 0 < \alpha < 1, \\ it\frac{\alpha}{\alpha-1} + \alpha \int_0^1 \frac{e^{itz}-1-itz}{z^{\alpha+1}} dz, & \text{если } 1 < \alpha < 2. \end{cases}$$

Для доказательства теоремы 1 во втором параграфе доказаны две вспомогательные леммы. В третьем параграфе завершено доказательство теоремы 1.

Четвертый параграф посвящен замечанию по поводу распределений с правильно меняющимися хвостами.

В частности, если общие ф.р. имеют вид

$$F(u) = \begin{cases} |u|^{-\alpha_1} l_1(|u|), & \text{если } u < 0, \\ 1 - u^{-\alpha_2} l_2(u), & \text{если } u > 0, \end{cases}$$

где $\min(\alpha_1, \alpha_2) > 0$, а функции $l_i(u), i = 1,2$ – медленно меняющиеся функции при $u \to \infty$,

$$\beta_{ni} = \inf\{u : u > 0,\ nu^{-\alpha_i} l_i(u) \le 1\}, \quad i = 1,2,$$

$j_1, j_2, ..., j_{m-1}$ – номера случайных величин, попавших в интервал $\left(-\infty, X_n^{(m)}\right)$, т.е.

$$j_1 = \min\left(j : X_j < X_n^{(m)}\right), \quad j_2 = \min\left(j : j > j_1,\ X_j < X_n^{(m)}\right)$$

и т.д., а $i_1, i_2, ..., i_{k-1}$ – номера случайных величин, попавших в $\left(X_n^{(n-k+1)}, \infty\right)$, то

$$P\left(\frac{X_{j_1}}{X_n^{(m)}} > z_1, ..., \frac{X_{j_{m-1}}}{X_n^{(m)}} > z_{m-1}, \frac{X_{i_1}}{X_n^{(n-k+1)}} > w_1, ..., \frac{X_{i_{k-1}}}{X_n^{(n-k+1)}} > w_{k-1}\right) \to \prod_{i=1}^{m-1} z_i^{-\alpha_1} \prod_{j=1}^{k-1} w_j^{-\alpha_2}$$

для $z_i \ge 1,\ w_j \ge 1,\ i = 1,...,m-1,\ j = 1,...,k-1$. Отсюда получим следующий любопытный факт о том, что при $\alpha_1 = \alpha_2 \in (0,1) \cup (1,2)$

$$P\left(\beta_n^{-1} S_n < z\right) \to \int_0^\infty \int_0^\infty P\left(\zeta(x,y) - x\xi_m + y\eta_k < z\right) dG_m^{(1)}(x) dG_k^{(2)}(y).$$

Здесь $\zeta(x,y)$, ξ_m и η_k независимы, причем $\xi_m \overset{d}{=} 1 + e_1 + \cdots + e_{m-1}$, $\eta_k \overset{d}{=} 1 + e_1 + \cdots + e_{k-1}$, а e_j, $j = 1,2,...$, в свою очередь, независимы и имеют общее распределение Парето с показателем α.

В параграфе 1.5 в случае, когда $P(x) = P\left(X_1 > x\right) \sim x^{-\alpha} l(x)$, для $\alpha \in (0,2]$ определен вклад экстремальных слагаемых в сумму случайных величин в задачах вероятностей больших уклонений. Основным результатом параграфа является

Теорема 2. Пусть $P(x) \sim x^{-\alpha} l(x)$, $F(-x) = O(1 - F(x))$ при $x \to \infty$, $EX_1 = 0$, если $\alpha \geq 1$.

Если выполнено одно из следующих условий:

1) $nx_n^{-\alpha} l^*(x_n) \to 0$ при $n \to \infty$, если $\alpha \in (0,1)$;

2) $nx_n^{-\alpha} l^*(x_n) \log^{\alpha-1} x_n \to 0$ при $n \to \infty$, если $\alpha \in [1,2)$;

3) $nx_n^{-\alpha} l^*(x_n) \log^2 x_n \to 0$ при $n \to \infty$, если $\alpha = 2$, $EX_1^2 = \infty$;

4) $nx_n^{-\alpha} l^*(x_n) \log x_n \to 0$ при $n \to \infty$, если $\alpha = 2$, $EX_1^2 = 1$,

то для любого $x \geq x_n$ справедливо соотношение

$$P_n^{(k)}(x) = P\left(S_n^{(0,k)} > x\right) \sim P\left(X_n^{(n-k)} \geq x\right) \sim \frac{1}{(k+1)!}\left(nP(x)\right)^{k+1}, \; n \to \infty.$$

Здесь $l^*(x) = \sup\limits_{1 \leq u \leq x} l(u)$. Это означает, что вероятности больших уклонений усеченной суммы $S_n^{(0,k)}$ формируются за счет экстремальных слагаемых $X_n^{(n-k)}$ в усеченной сумме, если $x \geq x_n$ и левый хвост исходного распределения стремится к нулю как $O\left(1 - F(x)\right)$ при $x \to \infty$. Нетрудно понять, что аналогичная ситуация наблюдается с минимальными слагаемыми $X_n^{(m+1)}$, если рассматриваются большие уклонения суммы слева и левый хвост ведет себя как правильно меняющаяся функция, а правый хвост стремится к нулю как $O\left(F(-x)\right)$ при $x \to \infty$.

По второму направлению исследование ведется в следующих трех главах, в которых рассматриваемая величина извлечена из генеральной совокупности с двумерным носителем. В многомерном случае наиболее полным обобщением экстремальных порядковых статистик является выпуклая оболочка, если носитель исходного распределения ограничен выпуклыми множествами. В последнем случае нетрудно убедиться, что выпуклая оболочка является достаточной и состоятельной оценкой для оценивания носителя распределения.

Выпуклые оболочки представляют собой очень сложный с аналитической точки зрения объект. Поэтому изучение свойств даже простейших функционалов от выпуклых оболочек таких, скажем, как число вершин или площадь, является совсем непростой задачей. Этим объясняется тот факт, что до появления работы P.Groeneboom (Groeneboom P., Limit theorems for convex hull. Probab.Th. Rel. Fields, 1988, v.79, No.3, P. 327-368) наиболее интересный результат был получен в изучении асимптотических выражений средних значений подобных функционалов.

Вторая глава диссертации, называемая «**Предельные теоремы для функционалов от случайных выпуклых оболочек в многоугольнике**», посвящена изучению свойств выпуклых оболочек, порожденных независимыми наблюдениями над случайным вектором, имеющим равномерное распределение в выпуклом многоугольнике.

В первом параграфе сначала приводятся некоторые результаты, полученные до настоящей диссертации, а затем приведены основные результаты второй главы.

Пусть $P_j, j=1,2,...,n$, – независимые наблюдения над случайным вектором, имеющим равномерное распределение в выпуклом r–угольнике A. Выборкой будем называть матрицу $\mathbf{P}_n$, j-я строка которой образована компонентами вектора P_j. Обозначим через $C_n = C_n(\mathbf{P}_n)$ выпуклую оболочку, порожденную векторами $P_j, j=1,2,...,n$.

Нас интересует совместное предельное распределение следующих функционалов от C_n: общее число вершин ν_n, площадь s_n и периметр l_n. Ясно, что C_n, а, следовательно, и указанные функционалы однозначно определяются по множеству вершин W_n.

Прежде, чем сформулировать основные результаты, введем некоторые обозначения. Пусть L_0 и S_0 – периметр и площадь многоугольника A, соответственно. Положим

$$l_n^* = L_0 - l_n,\ s_n^* = S_0 - s_n,$$

и пусть

$$a_n = \frac{2r\log n}{3},\ a_n^* = \frac{S_0 a_n}{n},\ b_n = \sqrt{\frac{27}{10r\log n}},\ b_n^* = n\sqrt{\frac{27}{28rS_0^2\log n}} = \frac{\sqrt{5}nb_n}{\sqrt{14}S_0}.$$

Обозначим через ω вектор, имеющий двумерное нормальное распределение с нулевым вектором средних значений и корреляционной матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{5}{14}} \\ \sqrt{\frac{5}{14}} & 1 \end{pmatrix}$$

Сформулируем основные результаты главы II.

Теорема 3. Если C_n – выпуклая оболочка, порожденная случайными векторами $P_j, j=1,2,...,n$, имеющими равномерное распределение в выпуклом r–угольнике A, то случайный вектор, состоящий из функционалов C_n с компонентами $b_n(\nu_n - a_n)$ и $b_n^*(s_n^* - a_n^*)$, сходится по распределению к ω при $n \to \infty$.

В следующей теореме речь идет о предельном распределении функционала l_n^*.

Теорема 4. Если C_n – выпуклая оболочка, порожденная случайными векторами $P_j, j=1,2,...,n$, имеющими равномерное распределение в выпуклом r–угольнике A, то случайная величина $\sqrt{\frac{n}{s_0}}l_n^*$ при $n \to \infty$

асимптотически независима от (ν_n, s_n). Более того, она сходится по вероятности к случайной величине, представимой в виде суммы r независимых случайных величин ς_i, имеющих определенный вид, связанный с величиной i – вершиной выпуклого r –угольника A.

Из теорем 3 и 4 следует, в частности, что предельное распределение для периметра выпуклой оболочки, в отличие от двух других функционалов, зависит от формы многоугольника A – носителя исходного распределения. А предельное распределение числа вершин и площади выпуклой оболочки не зависит от величины углов при вершине многоугольника носителя.

Как показано в главе II, при доказательстве теорем 3 и 4 нет необходимости в использовании мартингалов, сильно перемешивающихся стационарных процессов и т.п. Вполне достаточно совершенно элементарных аналитических и прямых вероятностных приемов, самым сложным из которых является неравенство А.Н.Колмогорова – аналог неравенства Чебышева для максимума последовательных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин и вероятностные неравенства В.В.Петрова для сумм случайных величин.

Во втором параграфе этой главы биномиальный точечный процесс в многоугольнике A аппроксимируется пуассоновским, а в третьем параграфе исследуются свойства выпуклой оболочки $C(K)$, порожденной однородным пуассоновским точечным процессом в конусе K. Свойство независимости приращения однородного пуассоновского точечного процесса позволяет выражать основные функционалы выпуклой оболочки $C(K)$ в виде суммы независимых случайных величин. Используемый нами подход к изучению выпуклых оболочек, порождаемых в многоугольнике однородным пуассоновским точечным процессом, основан на элементарных свойствах этого процесса (см. леммы 2.3.1 и 2.3.2). Последние позволяют свести задачу к простой граничной задаче для сумм независимых случайных величин (см. лемму 2.3.3) и в рамках единого подхода исследовать свойства рассматриваемых функционалов.

В четвертом и пятом параграфах, где доказаны теоремы 3 и 4, устанавливается, что в рассматриваемом случае настоящей главы для достаточно большого объема выборки вершины выпуклой оболочки, в основном, плотно располагаются при всех вершинах носителя A. Поэтому, если обозначим через $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, ..., $a^{(r)}$ все вершины A и через $S(a,\varepsilon)$ – круг радиуса ε с центром в a, то вершины C_n, оказавшиеся в $S\left(a^{(1)},\varepsilon\right)$, $S\left(a^{(2)},\varepsilon\right)$, ..., , $S\left(a^{(r)},\varepsilon\right)$, асимптотически независимы. Следовательно, совместное предельное распределение функционалов выпуклой оболочки легко выражается как распределение суммы r независимых векторов.

Нами впервые получены совместные предельные распределения основных функционалов таких, как число вершин, периметр и площадь

выпуклой оболочки в случае, когда исходное распределение равномерно в выпуклом многоугольнике.

Исследование выпуклой оболочки продолжается в следующих главах, где исходное распределение неравномерно в единичном круге.

Глава III, называемая **«Свойства вершинных процессов выпуклой оболочки, порожденной Пуассоновским точечным процессом внутри параболы»** посвящена исследованию свойствам стационарности и сильного перемешивания вершинного процесса от выпуклых оболочек, порожденных неоднородным пуассоновским точечным процессом внутри параболы. Все полученные результаты настоящей главы имеют самостоятельный интерес. С другой стороны, они широко применяются в главе IV при доказательстве центральной предельной теоремы для таких функционалов, как число вершин и площадь выпуклой оболочки. В первом параграфе излагается актуальность главы и найдено точное распределение вершинного процесса в фиксированные моменты времени.

Положим

$$R_n = \left\{ (x,y) : \frac{x^2}{2b_n} \le y \right\}.$$

Введем следующую меру

$$\Lambda_n(A) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi\sqrt{b_n}L(b_n)} \iint\limits_A \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\left(y - \dfrac{x^2}{2b_n} \right)^{\beta} L\left(\dfrac{b_n}{y - \dfrac{x^2}{2b_n}} \right) \right] dxdy, & \text{при } A \subset R_n; \\ 0, & \text{при } A \not\subset R_n, \end{cases}$$

где b_n – наименьший корень уравнения

$$nx^{-\left(\beta+\frac{1}{2}\right)} L(x) = 1, \tag{3}$$

$L(x)$ – медленно меняющаяся в смысле Карамата функция, которая представима в виде

$$L(u) = \exp\left\{ \int_1^u \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \right\}, \quad \varepsilon(t) \to 0, \quad t \to \infty. \tag{4}$$

Пусть $\Pi_n(R_n)$ – неоднородный пуассоновский точечный процесс (н.п.т.п.) с интенсивностью $\Lambda_n(\cdot)$, и пусть (X_1,Y_1), (X_2,Y_2), ..., (X_k,Y_k), ... – реализации н.п.т.п. $\Pi_n(R_n)$. Через C_n обозначим выпуклые оболочки, порожденные этими случайными точками.

Вершинным процессом $W_n(a) = \left(X_n(a), Y_n(a) \right)$ для любого $a \in R$ назовем такую точку $\left(X_k, Y_k \right)$ реализации н.п.т.п. $\Pi_n(R_n)$, для которой $Y_k - aX_k$ принимает минимальное значение.

Из определения нетрудно понять, что $W_n(a)$ образует скачкообразный нестационарный марковский процесс. В приводимой ниже теореме даны виды распределений $W_n(a)$, соответствующие различным ситуациям.

Ввиду аналогичности рассуждений, мы ограничиваемся случаем, когда $L(x)=1$, так как демонстрируемая техника подходит и для произвольных медленно меняющихся функций $L(x)$ в виде (4).

Теорема 5. Пусть $s=y-ax+\frac{a^2 b_n}{2}$, $r=x-ab_n$. Тогда

1) $P\left(W_n(0)\in(dx,dy)\right)=\frac{\beta}{2\pi\sqrt{b_n}}\exp\left\{-\frac{y^{\beta+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}\pi}B\left(\beta+1;\frac{1}{2}\right)\right\}\left(y-\frac{x^2}{2b_n}\right)^{\beta-1}dxdy;$

2) $P\left(W_n(a)\in(dx,dy)\right)=\frac{\beta}{2\pi\sqrt{b_n}}\exp\left\{-\frac{s^{\beta+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}\pi}B\left(\beta+1;\frac{1}{2}\right)\right\}\left(s-\frac{r^2}{2b_n}\right)^{\beta-1}dxdy;$

3) $P\left(W_n(a)=W_n(0)/W_n(0)=(x,y)\right)=\exp\left\{-\frac{1}{2\pi\sqrt{b_n}}\left[\int\limits_{x-ab_n}^{\sqrt{2b_n s}}\left(s-\frac{u^2}{2b_n}\right)^{\beta}du-\right.\right.$

$$\left.\left.-\int\limits_{x}^{\sqrt{2b_n y}}\left(y-\frac{u^2}{2b_n}\right)^{\beta}dy\right]\right\}.$$

Из нестационарных вершинных процессов $W_n(a)$ строится стационарный процесс $T_n(a)$.

Положим

$$R_n(a)=X_n(a)-ab_n,\qquad S_n(a),=Y_n(a)-\frac{X_n^2(a)}{2b_n}+\frac{R_n^2(a)}{2b_n},\qquad T_n(a)=\left(R_n(a),S_n(a)\right).$$

Очевидно, что $T_n(0)=W_n(0)$ п.н., и следовательно,

$$P\left(T_n(0)\in(dr,ds)\right)=P\left(W_n(0)\in(dr,ds)\right).$$

Теорема 6. $T_n(a)$ образует скачкообразный стационарный марковский процесс и

1) $P\left(T_n(a)\in(dr,ds)\right)=\frac{\beta}{2\pi\sqrt{b_n}}\exp\left\{-\frac{s^{\beta+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}\pi}B\left(\beta+1;\frac{1}{2}\right)\right\}\left(s-\frac{r^2}{2b_n}\right)^{\beta-1}drds;$

2) $P\left(T_n(a)=(r_1,s_1)/T_n(0)=(r_0,s_0)\right)=\exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\left[s_1^{\beta+\frac{1}{2}}\int\limits_{\frac{r_1}{\sqrt{2b_n s_1}}}^{1}\left(1-t^2\right)^{\beta}dt\right.\right.$

$$-s_0^{\beta+\frac{1}{2}}\int\limits_{\frac{r_0}{\sqrt{2b_ns_0}}}^{1}\left(1-t^2\right)^{\beta}dt\Bigg]\Bigg\};$$

где $r_1=r_0-ab_n,\ s_1=s_0-ar_0+\dfrac{a^2b_n}{2}.$

3) $P\left(T_n(a)\in(dr_1,ds_1)/T_n(0)=(r_0,s_0)\right)=P\left(T_n(a)\in(dr_1,ds_1)\right),$

где $(r_i,s_i)\in D=\left\{(r,s):s\geq\dfrac{r^2}{2b_n}\right\},\ i=0,1,\ ab_n-\sqrt{2b_ns_1}>\sqrt{2b_ns_0}.$

4) $P\left(T_n(a)\in(dr_2,ds_2)/T_n(0)=(r_1,s_1)\right)=\dfrac{\beta}{2\pi\sqrt{b_n}}\exp\left\{-\dfrac{1}{\sqrt{2}\pi}\Bigg[s_2^{\beta+\frac{1}{2}}\right.$

$$\left.\int\limits_{\frac{s_1-s_2}{a\sqrt{2b_ns_2}}+\frac{ab_n}{\sqrt{2b_ns_2}}}^{1}dt\left(1-t^2\right)^{\beta}-s_1^{\beta+\frac{1}{2}}\int\limits_{\frac{s_1-s_2}{a\sqrt{2b_ns_1}}+\frac{ab_n}{\sqrt{2b_ns_1}}}^{1}\left(1-t^2\right)^{\beta}dt\Bigg]\right\}\left(s_2-\frac{r_2^2}{2b_n}\right)^{\beta-1}dr_2ds_2.$$

Здесь $(r_i,s_i)\in D=\left\{(r,s):s\geq\dfrac{r^2}{2b_n}\right\},\ ab_n-\sqrt{2b_ns_2}\leq\sqrt{2b_ns_1},$

$$s_2+\frac{a^2b_n}{2}+ar_2\geq s_1\geq s_2-\frac{a^2b_n}{2}+ar_1.$$

С помощью этих двух теорем в третьем параграфе исследуется свойство сильного перемешивания $W_n(a)$.

Рассмотрим следующие σ-алгебры, порожденные процессом $T_n(a)$: $\mathfrak{I}_n^0=\sigma\left\{T_n(c):c\leq 0\right\},\ \mathfrak{I}_n^{a+}=\sigma\left\{T_n(c):c\geq a\right\}.$

Теорема 7. Для любых $A\in\mathfrak{I}_n^0$ и $B\in\mathfrak{I}_n^{a+}$

$$\left|P\left(A\cap B\right)-P(A)P(B)\right|\leq\tau_n(a),$$

где

$$\tau_n(a)\leq c_1\exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\left(\frac{a^2b_n}{8}\right)^{\beta+\frac{1}{2}}B\left(\beta+1;\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

В частности, если $a>\dfrac{a_n\varepsilon_n^*}{b_n}$, где $a_n=\sqrt{2b_n\log n},\ \varepsilon_n^*=\left(\log n\right)^{-\frac{2\beta-\delta-1}{2(2\beta+1)}},\ 0<\delta<1,$ то

$$\tau_n(a)\leq c_1\exp\left\{-c_2\left(\log n\right)^{1+\frac{\delta}{3}}\right\}.$$

В третьем параграфе с помощью теорем 5 – 7 исследуются функционалы от вершинного процесса $W_n(a)$.

Обозначим через $N_n(0,a)$ число скачков скачкообразного процесса $W_n(c)$ в пределах $0 \le c \le a$ и через $l_n(0,a)$ – длины ломаной, соединяющей последовательность состояний процесса $\{W_n(c)\, 0 \le c \le a\}$. Далее, пусть $0 = a_0 < a_1 < ... < a_k \le a$ – времена скачков процесса $\{W_n(c), 0 \le c \le a\}$, а A_0 – площадь области, ограниченной линиями $y = Y_n(0)$, $y = \frac{x^2}{2b_n}$, A_i – площадь области, ограниченной линиями

$$y = a_{i-1}\left(x - X_n(a_{i-1})\right) + Y_n(a_{i-1}),\ y = a_i\left(x - X_n(a_{i-1})\right) + Y_n(a_{i-1}),\ y = \frac{x^2}{2b_n}$$

для всех $1 \le i \le k$, $A[a]$ – площадь области, ограниченной линиями

$$y = a_k\left(x - X_n(a_k)\right) + Y_n(a_k),\ y = a\left(x - X_n(a_k)\right) + Y_n(a_k),\ y = \frac{x^2}{2b_n}.$$

Тогда, если считать $A_n(0,a) = A_0 + A_1 + ... + A_k + A[a]$, то $A_n(0,a)$ (согласно свойствам независимых приращений пуассоновского точечного процесса) ведет себя как сумма случайного числа независимых случайных величин и справедливы следующие результаты.

Теорема 8. Процессы

$$N_n(0,a) - \int_0^a M^{(1)}\left(T_n(b); R^2\right)db \ ,\ N_n^2(0,a) - \int_0^a \left[2N_n(0,b)+1\right]M^{(1)}\left(T_n(b); R^2\right)db$$

и

$$N_n^3(0,a) - \int_0^a \left[3N_n^2(0,b) + 3N_n(0,b) + 1\right]M^{(1)}\left(T_n(b); R^2\right)db$$

образуют мартингал относительно σ-алгебры $\Im_a = \sigma\{T_n(c) : 0 \le c \le a\}$.

Теорема 9. Процессы

$$A_n(0,a) - \frac{1}{2}\int_0^a \left(\sqrt{2b_n S_n(b)} - R_n(b)\right)^2 db$$

и

$$A_n^2(0,a) - \int_0^a A_n(0,b)\left(\sqrt{2b_n S_n(b)} - R_n(b)\right)^2 db$$

образуют мартингалы относительно σ-алгебры $\Im_a = \sigma\{T_n(c) : 0 \le c \le a\}$.

Теорема 10. Процессы

$$l_n(0,a) - \int_0^a \sqrt{1+b^2}\,M^{(2)}\left(T_n(b); R^2\right)db$$

и

$$l_n^2(0,a) - \int_0^a \left[\left(1+b^2\right)M^{(3)}\left(T_n(b); R^2\right) + 2\sqrt{1+b^2}\,l_n(0,b)M^{(2)}\left(T_n(b); R^2\right)\right]db$$

образуют мартингалы относительно σ-алгебры $\Im_{[0,a]} = \sigma\{T_n(c) : 0 \le c \le a\}$.

Все полученные результаты главы III применяются при доказательстве центральной предельной теоремы для основных функционалов выпуклой оболочки в четвертой главе.

В главе IV, называемой **«Предельные теоремы для функционалов от случайных выпуклых оболочек в единичном круге»,** исследуется выпуклая оболочка, порожденная независимыми наблюдениями векторов (r_i, α_i) в единичном круге, где полярный угол α_i равномерно распределен в $[-\pi, \pi]$, и хвост распределения радиальной компоненты r_i вблизи границы носителя ведет себя как правильно меняющаяся функция:

$$P\left(r_i > 1 - x\right) = x^{\beta} L\left(\frac{1}{x}\right),\ 0 < x < 1,\ \beta \geq 1, \tag{5}$$

где $L(x)$ – медленно меняющаяся функция, представимая в виде (4). Заметим, что при $\beta = 1$ и $L(x) = 2 - \frac{1}{x}$ рассматриваемый случай содержит и равномерное распределение.

В первом параграфе главы сначала вводятся основные понятия и обозначения, которое необходимы для изложения главы, а затем приводятся основные результаты главы: предельные теоремы для числа вершин, площади и периметра выпуклой оболочки, порожденной выборкой, взятой из генеральной совокупности с распределением (5).

Положим $X_i = r_i \sin\alpha_i$, $Y_i = 1 - r_i \cos\alpha_i$; через C_n обозначим выпуклые оболочки, порожденные случайными точками (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ..., (X_k, Y_k), а через ν_n, s_n и l_n – число вершин, площадь и периметр C_n, соответственно.

Отметим, что в классе распределений (5) H. Carnal (Carnal H., Die konvexe Hulle von *n* rotations symmetrisch verteilten Punkten. Z.Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 1970, 15, 168-176) установил асимптотику для средних значений указанных выше функционалов

$$E\nu_n = \lambda_1 b_n^{\frac{1}{2}}\left(1 + o(1)\right), \qquad Es_n = \pi - \lambda_3 b_n^{-1}\left(1 + o(1)\right) \text{ и}$$
$$El_n = 2\pi - \lambda_5 b_n^{-1}\left(1 + o(1)\right) \text{ при } n \to \infty,$$

где λ_1, λ_3 и λ_5 – абсолютные константы, зависящие лишь от переменных, указанных в скобках, b_n – корень уравнения (3). Они обобщают соответствующие результаты B. Efron для равномерного распределения в R^2, которые получены до H. Carnal.

Теорема 11. При $n \to \infty$ справедливо соотношение

$$\frac{\nu_n - \lambda_1 b_n^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi\lambda_2}\, b_n^{\frac{1}{4}}} \overset{d}{\Rightarrow} \mathrm{N}(0,1),$$

где

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}B\left(2\beta+1;\frac{1}{2}\right)}{2\pi}\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{B\left(\beta+1;\frac{1}{2}\right)}\right)^{2-\frac{1}{2\beta+1}}\Gamma\left(3-\frac{1}{2\beta+1}\right),$$

$$\lambda_2 = \lambda_2^{(1)} + \lambda_2^{(2)} - \lambda_2^{(3)}.$$

Явные выражения констант $\lambda_2^{(1)}$, $\lambda_2^{(2)}$ и $\lambda_2^{(3)}$ приведены в самой главе, $\overset{d}{\Rightarrow}$ означает слабую сходимость, а $\mathrm{N}(0,1)$ – нормальную с.в. с параметрами (0,1).

Далее. пусть $\Delta_n = \pi - s_n$.

Теорема 12. При $n \to \infty$

$$\sqrt{\frac{\pi b_n^{\frac{5}{2}}}{2\lambda_4}}\left(\frac{\Delta_n}{\pi} - \lambda_3 b_n^{-1}\right) \overset{d}{\Rightarrow} \mathrm{N}(0,1),$$

где

$$\lambda_3 = \frac{2\beta+1}{(2\beta+3)}\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{B\left(\beta+1;\frac{1}{2}\right)}\right)^{\frac{2}{2\beta+1}}\Gamma\left(3+\frac{2}{2\beta+1}\right),\ \lambda_4 = \lambda_4^{(1)} + \lambda_4^{(2)} - \lambda_4^{(3)}.$$

Явные выражения констант $\lambda_4^{(1)}$, $\lambda_4^{(2)}$ и $\lambda_4^{(3)}$ тоже приведены в самой главе.

В доказательствах теорем 11 и 12 используется одна и та же техника. Сначала исходная выпуклая оболочка аппроксимируется выпуклой оболочкой, порожденной пуассоновским точечным процессом в круге. Затем в круге рассматривается m_n непересекающихся сегментов (больших блоков) с центральным углом $2\pi\log n/\sqrt{b_n}$ и аналогично, рассматривается m_n непересекающихся сегментов (маленьких блоков) с центральным углом $2\left(\log^{\delta_0} n + \log^{\delta_0^*} n\right)/\sqrt{b_n}$, при $1 > \delta > \delta^* > 2/(2\beta+1)$, в каждом из которых доказывается центральная предельная теорема для основных функционалов. При этом основным инструментом доказательства является теорема Ибрагимова–Линника (теорема 18.5.3, И.А.Ибрагимов, Ю.В.Линник, Независимые и стационарно связанные величины, М.: «Наука», 1965). Выполнение основного условия в теореме Ибрагимова–Линника – свойства сильного перемешивания вершинных процессов – в каждом сегменте устанавливается с помощью леммы 4.3.1. В конце главы IV аппроксимируем н.п.т.п. $\Pi_n(\cdot)$ в каждом большом блоке E_k и маленьком блоке E_k^* отдельно. Затем, используя свойство независимости приращения пуассоновского точечного процесса, ν_n и s_n представляем как сумму m_n независимых нормально распределенных случайных величин.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе исследован вклад экстремальных порядковых статистик в сумму случайных величин и определено предельное поведение функционалов выпуклой оболочки, порожденной выборками из генеральной совокупности с ограниченными выпуклыми носителями.

В заключение по результатам исследований можно сделать следующие выводы:

1. Получено предельное распределение для суммы с отброшенным фиксированным числом минимальных и максимальных слагаемых (усеченная сумма), которая представляет собой двухпараметрическую смесь безгранично делимых законов, спектральная мера каждого из которых является сужением спектральной меры предельного устойчивого распределения на несимметричный интервал, концы которого являются параметрами смеси.
2. Доказан любопытный факт, что при любых фиксированных m и k предельное устойчивое распределение суммы независимых одинаково распределенных с.в. представляет собой свертку распределения с.в., имеющей урезанное безгранично делимое распределение с некоторыми с.в., каждая из которых выражается как сумма независимых m и k с.в. с распределением Парето.
3. Показано, что вклад максимального слагаемого существенен при формировании вероятности достижения усеченной суммой уровня x_n (когда x_n определенным образом возрастает, правый хвост исходного распределения меняется правильно, а левый хвост ведет себя как ограниченный относительно правого).
4. В двумерном случае в качестве крайних элементов выборки рассматривается выпуклая оболочка, которая аппроксимируется выпуклой оболочкой, порожденной пуассоновским точечным процессом.
5. Найдено совместное предельное распределение числа вершин, площади и периметра выпуклой оболочки в случае, когда носитель исходного равномерного распределения является выпуклым r -угольником.
6. Доказано, что площадь носителя вне выпуклой оболочки выражается суммой независимых экспоненциально распределенных случайных величин в случае, когда носитель исходного распределения является выпуклым r –угольником, а выпуклая оболочка порождена пуассоновским точечным процессом.
7. Найдены распределение и условное распределение вершинных процессов при фиксированном времени в случае, когда выпуклая оболочка порождена неоднородным пуассоновским точечным процессом внутри параболы.
8. Доказаны свойства сильного перемешивания вершинных процессов и для функционалов вершинного процесса, и построены такие процессы,

являющиеся мартингалами, с помощью которых найдено асимптотическое выражение числовых характеристик функционалов вершинного процесса.

9. Доказаны центральные предельные теоремы для функционалов числа вершин и площади выпуклой оболочки в случае, когда случайные точки заданы в полярной системе координат, причем их компоненты независимы между собой, угловая координата равномерна распределена и хвост распределения радиальной координаты является правильно меняющейся функцией вблизи границы носителя – круга.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 AT V.I. ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS

INSTITUTE OF MATHEMATICS

KHAMDAMOV ISAKJAN MAMASALIYEVICH

ASYMPTOTIC ANALYSIS OF EXTREME VALUES OF A SAMPLE AND LIMIT THEOREMS FOR FUNCTIONALS OF CONVEX HULLS

01.01.05 – Probability theory and mathematical statistics

DISSERTATION ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION (DSc) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT–2021

The theme of dissertation of doctor of science (DSc) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2021.2.DSc/FM170

Dissertation has been prepared at Institute of Mathematics

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific consultant:	**Formanov Shakir Kasimovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Academician
Official opponents:	**Abdushukurov Abdurahim Ahmedovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
	Hajiev Asaf Haji ogli Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Azerbaijan National Academy of Sciences
	Imomov Azam Abdurahimovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, docent
Leading organization:	**Tbilisi State University** (Georgia)

Defense will take place «30» November 2021 at 16:00 at the meeting of Scientific council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics (Address: University str., 9, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871)- 207-91-40). E-mail: uzbmath@umail.uz , Website: www.mathinst.uz

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre of V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics (is registered № 125) (Address: University str., Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871)- 207-91-40). E-mail: uzbmath@umail.uz , Website: www.mathinst.uz).

Abstract of dissertation sent out on «12» November 2021.

(mailing report №2 on «12» November 2021).

U.A.Rozikov
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.Sc., Professor

J.K.Adashev
Scientific secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, PhD. senior researcher

Ya.M.Khusanbaev
Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.Sc., docent

INTRODUCTION (abstract of DSc thesis)

The aim of the research work is to determine the joint limiting distribution of the truncated sum with the maximum and minimum terms in the case when the original distribution belongs to the domain of attraction of a stable law, to investigate the joint limiting distribution of the number of vertices, area and perimeter of the convex hull generated by a sample from the general population with a limited convex carrier of the distribution.

The objects of the research are the distributions of sums excluding the maximum and minimum terms (truncated sum) and the joint distribution of the functionals of the convex hull.

Scientific novelty of the research is as follows:

connections are found between the extremal terms of order statistics and the sum of random variables in the case when the terms are from the domain of attraction of stable laws and it is proved that the tail of the distribution of truncated sums behaves like the tail of the distribution of the extremal term in the problem of the probability of large deviations;

joint limit theorems are proved for the main functionals of the convex hull in the case when the initial distribution is uniform and the carrier is a convex polygon, and it is also determined that the perimeter of the convex hull is asymptotically independent of the number of vertices and area;

the distribution and the property of strong mixing of vertex processes are determined when the convex hull is generated by a Poisson point process inside a parabola;

central limit theorems are proved for the number of vertices and area of a convex hull in the case when the original distribution is regularly varying near the boundary of the carrier and the carrier is a unit disc.

Implementation of the research results. The results obtained in the thesis were used in the following research institutions:

methods for determining the role of extremal terms in the sum and the technique of proving limit theorems for the joint distribution of functionals from convex hulls were used by scientists of the Research Institute of Applied Problems of Mathematics and Informatics of the Belarusian State University when performing research work of the Ministry of Education of the Republic of Belarus "Development of probabilistic and statistical models, methods and algorithms for computer data analysis complex structure" (registration number 20162503), in particular, using limit theorems for sums excluding extremal terms and the joint distribution of functionals of convex hulls, they managed to find asymptotic properties for the extreme terms of the variational series in the case when the original distribution belongs to the domain of attraction of a stable law; they applied these results for statistical testing of cryptographic generators of random and pseudo-random sequences. (Certificate of the Research Institute of Applied Problems of Mathematics and Informatics at the Belarusian State University No. 10.4 / 18 of 18.02.2021).

the results of the thesis were used in the implementation of the grant "Probabilistic-statistical approach for assessing water reserves in agricultural regions of Azerbaijan" and are currently used in the implementation of the grant "Research of random-walk processes described by semi-Markov processes and innovative autoregressions" EIF-ETL-2020-2 (36) -16 / 05/1-M-05 at the Institute of Control Systems of the National Academy of Sciences of Azerbaijan. In particular, using limit theorems for the functionals of the convex hull, it was possible to carry out a statistical estimate of the area occupied by rainwater and find confidence intervals for the supply of rainwater in some agricultural regions of Azerbaijan (Certificate of the Chief Director of the Institute of Control Systems of the National Academy of Sciences of Azerbaijan. No. 21-2 / 85 dated 23.04.2021).

the results of the thesis can be used in problems of the theory of nonparametric estimation of some functional characteristic distribution laws of observations. In particular, the staff of the Department of Probability Theory and Mathematical Statistics of TSU used the results of the dissertation on the limit theorem for sums of random distributions with the exclusion of extreme order statistics in the proofs of central limit theorems for nonparametric kernel estimates of integral functionals that depend on the probability density and its derivatives in the implementation of the scientific grant project No. GNSF/STFR/308 / 5-104 / 12 on the topic “Statistical estimation and some tasks of stochastic analysis” in 2013-2016 of the Ministry of Education and Science of the Republic of Georgia (Certificate of the Deputy Rector for Scientific Affairs of Tbilisi State University No. 5587 / 01-16-01 dated 28.04.21021).

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, four chapters, conclusion and a list of references. The total volume of the thesis is 182 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; I part)

1. Formanov Sh.K., Khamdamov I.M. On joint probability distribution of the number of vertices and area of the convex hulls generated by a Poisson point process, Statistics & Probability Letters - Journal – Elsevier, Volume 169, February 2021, 7P., (3. Scopus. IF=0.680)
2. Нагаев А.В, Хамдамов И.М. О роли экстремальных слагаемых в сумме случайных величин., Теория вероятностей и ее применения, 2002г., том 47, выпуск 3, с. 575-583. (англ.вар.: On the Role of Extreme Summands in Sums of Independent Random Variables, Theory of Probability and Its Applications 2003. Volume 47, Issue 3, p.533-541. (3. Scopus. IF=0.6)
3. Khamdamov I.M. On Limit Theorem for the Number of Vertices of the Convex Hulls in a Unit Disk, Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 2020, 13(3), p.275–284. (3. Scopus. IF=0.268)
4. Khamdamov I.M. Properties of convex hull generated by inhomogeneous Poisson point process, Ufimsk. Mat. Zh., 2020, Volume 12, Issue 3, p.83–98. https: (3. Scopus. IF=0.362)
5. Khamdamov I.M., Chay Z.S. Joint distribution of the number of vertices and the area of convex hulls generated by a uniform distribution in a convex polygon, Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 2021, 14(2), p.232-243. (3. Scopus. IF=0.268)
6. Formanov Sh.K., Khamdamov I.M. On some properties of vertex processes of random convex hulls, Cite as: AIP Conference Proceedings 2365, 060012 (2021) 7P; Published Online: 16 July 2021. (3. Scopus. IF=0.6)
7. Khamdamov I.M. On some properties of the area of a convex hull generated by a Poisson point process inside a parabola, Global and Stochastic Analysis Vol. 8 No. 3 (December, 2021) p.123-127. (3. Scopus. IF=0.144)
8. Нагаев А.В., Хамдамов И.М. Предельное распределение функционалов выпуклой оболочки, порожденной равномерно распределенными случайными векторами, Доклады АН УзССР, 1991, №7, с.8 – 9. (01.00.00, № 7).
9. Хамдамов И.М. Предельная теорема для числа вершин выпуклой оболочки, порожденной усеченными распределениями, Доклады АН РУз, 1994, № 11, с.5 – 7. (01.00.00, № 7).
10. Хамдамов И.М. Предельные теоремы для площадей и периметров выпуклой оболочки, образованной усеченными распределениями, Доклады АН РУз,1996, № 5, с.3- 5. (01.00.00, № 7).
11. Хамдамов И.М., Адиров Т.Х. Мартингальные свойства вершинных функционалов, порожденных Пуассоновскими точечными процессами, Доклады АН РУз, 2015, №1, с. 9-10. (01.00.00, № 7).

12. Хамдамов И.М., Адиров Т.Х. Выражение площади выпуклой оболочки суммами независимых случайных величин, Доклады АН РУз, 2017, № 5 с.11-13. (01.00.00, № 7).
13. Khamdamov I.M., Adirov T.Kh. One of the properties of the perimeter of the convex hull generated by a Poisson point process, Uzbek Mathematical Journal, 2019, No.3, p.60-63. (01.00.00, № 6).
14. Khamdamov I.M., Adirov T.Kh. Martingale property of the area of a convex hull generated by a Poisson point process, Uzbek Mathematical Journal, 2020, No.1, p.85-88. (01.00.00, № 6).
15. Khamdamov I.M. Some properties of convex hulls generated by Poisson point process, Uzbek Mathematical Journal, 2020, No 4, p.62-69. (01.00.00, № 6).
16. Хамдамов И.М. О роли экстремальных слагаемых в вероятности больших уклонений в усечённых суммах, Бюллетень Института математики, 2021, Том 4, №1, с.64 – 70. (01.00.00, № 17).
17. Хамдамов И.М. Предельное распределение периметра выпуклой оболочки, порожденной Пуассоновским точечным процессом в конусе, Бюллетень Института математики, 2021, Том 4, №2, с.95-98. (01.00.00, № 17).

II бўлим (II часть; II Part)

18. Нагаев А.В., Хамдамов И.М. Предельные теоремы для функционалов от случайных выпуклых оболочек, Препринт АН Узбекистан, Институт Математики, Ташкент, 1991г., 51С.
19. Гафуров М.У., Хамдамов И.М., Адиров Т.Х. Предельные распределения функционалов от выпуклых оболочек, Материалы V Ферганской конференции «Предельные теоремы теории вероятностей и их приложения» (Ферганский коллоквиум), посвященной памяти академика С.Х.Сираждинова, г.Фергана 10-12 мая 2005г, с. 96-99.
20. Хамдамов И.М., Адиров Т.Х. Некоторые свойства однородного пуассоновского точечного процесса, Материалы VI Ферганской конференции «Предельные теоремы теории вероятностей, г. Фергана, 10-12 мая 2011г, с. 123-125.
21. Хамдамов И.М., Адиров Т.Х., Мартингальность некоторых функционалов Пуассоновского точечного процесса, Материалы Республиканской научно-практической конференции "Статистика и её применения", 17-18 октября 2013 года, Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, с. 49-51.
22. Хамдамов И.М., Адиров Т.Х., Пуассоновская аппроксимация выпуклых оболочок порожденных биномиальным точечным процессом, “Математика ва уни ўкитишнинг инновацион методлари “ назарий ва илмий-услубий мақолалар тўплами(2-қисм) ТМИ,Тошкент, 2014 йил 29 апрель, 26-28.

23. Хамдамов И.М. Свойство слабозависимости вершинных процессов выпуклой оболочки, порожденной однородным Пуассоновским точечным процессом, Материалы Республиканской научно-практической конференции на тему Статистика и ее применения 16-17 октября 2015 года, Национальный Университет Узбекистана. с. 164-166.
24. Хамдамов И.М. Сравнение двух Пуассоновких точечных процессов на одном вероятностном пространстве, “Математика ва уни ўкитишнинг инновацион методлари” назарий ва илмий-услубий мақолалар тўплами (3-китоб). ТМИ, Тошкент, 2015й. с.137-140.
25. Хамдамов И.М., Пуассоновская аппроксимация биномиальных точечных процессов, “Математика ва уни ўкитишнинг инновацион методлари” назарий ва илмий-услубий мақолалар тўплами (3-китоб). ТМИ, Тошкент, 2015й. с.140-142.
26. Хамдамов И.М. Выпуклые оболочки, порождаемые однородным биномиальным точечным процессом в ограниченном выпуклом множестве, «Математика ва уни ўкитишнинг инновацион методлари» назарий ва илмий-услубий мақолалар тўплами (4-китоб). ТМИ, Тошкент, 2016й. с.30-32.
27. Хамдамов И.М. Пуассоновская аппроксимация выпуклой оболочки, порожденной биномиальным точечным процессом, V Международная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий» - Аль-Хорезми 2016, Труды конференции Т.2, г. Бухара с.148-149.
28. Хамдамов И.М. Совместное распределение некоторых граничных функционалов выпуклых оболочек, Математикани ахборот ва коммуникация технологияларига татбиқи ҳамда ўқитишнинг долзарб вазифалари (назарий ва илмий-услубий мақолалар тўплами),(1-китоб), ТАТУ, Тошкент, 2016, с.9-12. 25.
29. Хамдамов И.М.,Адиров Т.Х., Свойство слабозависимости функционалов выпуклой оболочки, Сборник докладов Республиканской научно-методической конференции Ташкентского университета информационных технологий «Роль информационных технологий в улучшении качества подготовки кадров», Ташкент, 2017 год , с.206-207
30. Хамдамов И.М.,Адиров Т.Х., О некоторых свойствах биномиального точечного процесса, Материалы Республиканской научно-практической конференции «Статистика и её применения», 19-20 октября 2017 года, Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, с. 281-283.
31. Хамдамов И.М.,Адиров Т.Х., Некоторые свойства площади выпуклой оболочки порожденной пуассоновским точечным процессом, «Высшая школа» Научно-практический журнал №8, 2017, Россия г. Уфа с 91-93.
32. Хамдамов И.М.,Адиров Т.Х., О некоторых свойствах числа вершин выпуклой оболочки, порожденной Пуассоновским точечным процессом, «Высшая школа» Научно-практический журнал №9, 2017, Россия г. Уфа с. 83-85.

33. Хамдамов И.М.,Адиров Т.Х., О некоторых свойствах периметра выпуклой оболочки, порожденной пуассоновским точечным процессам, «Ахборот коммуникацион технологияларини амалиётга қўлланилиши» мавзусидаги Муҳаммад ал-Хоразмий номидаги ТАТУ Самарқанд филиали илмий ишлар тўплами материаллари II нашри Самарқанд, 2018, 105-108 б.
34. Khamdamov I.M., Adirov T.Kh., Convex hull generated by a poisson point process, Of Uzbek-Israel joint international conference Science-Texnology-Education-Mathematics-Medicine Bukhara-Samarkand-Tashkent MAY 13-17 2019 c.82-84.
35. Хамдамов И.М., О некоторых свойствах функционалов выпуклой оболочки, порожденной Пуассоновским точечным процессом, Материалы научной конференции «Современные проблемы стохастического анализа», посвященной 100-летию академика С.Х.Сираждинова 21-22 сентября, 2020. Ташкент, с.236 – 239.
36. Хамдамов И.М., Асимптотическое выражение для среднего значения и дисперсии периметра выпуклых оболочек в единичном круге, Тезисы докладов конференции «Современные стохастические модели проблемы актуарной математики» 25 сентября, 2020, Карши, Узбекистан, с.129 – 130.
37. Хамдамов И.М., О свойстве сильного перемешивания вершинных процессов выпуклой оболочки, Тезисы Докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Современные методы математической физики и их приложения» 17-18 ноября, Ташкент, 2020. II, с.326-330.
38. Хамдамов И.М. Предельные теоремы для функционалов от случайных выпуклых оболочек, порожденных равномерным распределением в выпуклом многоугольнике, Материалы международной научной онлайн конференции «Системный анализ и моделирование социально-экономических процессов», 17 декабря 2020 г., Ташкент, с.187 – 190.
39. Хамдамов И.М. Центральная предельная теорема для функционалов выпуклых оболочек, порожденных пуассоновским точечным процессом в конусе, Материалы научной конференции «Актуальные проблемы стохастического анализа», посвященной 80-летию со дня рождения академика Ш.К.Форманова, 20- 21 февраля 2021г. Ташкент , с.168 – 170.
40. Хамдамов И.М., Об одном свойстве вершинных процессов выпуклой оболочки порожденной пуассоновским точечным процессом в круге.Тезисы Докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Сарымсаковские чтения» 16-18 сентября 2021 года Ташкент, Узбекистан, с.143 – 145.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали» журнали таҳририятида 2021 йил 27 октябрда таҳрирдан ўтказилиб, ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги матнлар ўзаро мувофиқлаштирилди.

Бичими: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» гарнитураси.
Рақамли босма усулда босилди.
Шартли босма табоғи: 3,25. Адади 100. Буюртма № 18/21.

Гувоҳнома № 851684.
«Tipograff» МЧЖ босмахонасида чоп этилган.
Босмахона манзили: 100011, Тошкент ш., Беруний кўчаси, 83-уй.