В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

БРАТОВА (КАКАДЖАНОВА) ЛЕЙЛА РЭШИТОВНА

ФУНКЦИЯЛАР СИНФИ БИЛАН ИНДЕКСЛАНГАН ЭМПИРИК ЎЛЧОВЛАРНИНГ АСИМПТОТИК ХОССАЛАРИ

01.01.05 – Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ–2021

УДК: 519.24

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

БРАТОВА (КАКАДЖАНОВА) ЛЕЙЛА РЭШИТОВНА

ФУНКЦИЯЛАР СИНФИ БИЛАН ИНДЕКСЛАНГАН ЭМПИРИК ЎЛЧОВЛАРНИНГ АСИМПТОТИК ХОССАЛАРИ

01.01.05 – Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ–2021

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2021.2.PhD/FM228 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация В.И.Романовский номидаги Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (http:kengash.mathinst.uz) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Абдушукуров Абдурахим Ахмедович** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Рахимов Абдуғофур Абдумажидович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Сагидуллаев Калмурза Сапарбаевич физика-математика фанлари номзоди, доцент
Етакчи ташкилот:	**Наманган Давлат университети**

Диссертация ҳимояси В.И.Романовский номидаги Математика институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2021 йил « 9 » декабр соат 16:00 даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Диссертация билан В.И.Романовский номидаги Математика Институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (126-рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40).

Диссертация автореферати 2021 йил « 24 » ноябр куни тарқатилди.
(2021 йил « 24 » ноябрдаги 2-рақамли реестр баённомаси).

У.А. Розиков
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш раиси,
ф.-м.ф.д., профессор

Ж.К.Адашев
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш илмий котиби,
ф.-м.ф.д.,катта илмий ходим

Я.М.Хусанбаев
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш ҳузуридаги
Илмий семинар раиси муовини,
ф.-м.ф.д., доцент

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий ва амалий тадқиқотлар кўп ҳолларида статистик маълумотларни тиббий-биологик жараёнларда таҳлил қилиш, муҳандисликда объектларнинг бетўхтов ишлаш вақтининг қийматлари қисмий тизимларни ишдан чиқиши ходисасига боғлиқлигини текшириш ва суғурта компанияларининг мижозларига тўловлар миқдори суғурта ҳодисаларини боғлиқлигини тадқиқ қилиш каби масалаларига келтирилади. Замонавий эмпирик жараёнлар назариясининг тадқиқот объектлари ўлчовли функциялар синфи билан индексланган эмпирик ўлчовлардир. Бу назариянинг асосини ўлчовли функциялар барча синфи бўйича текис катта сонлар қонунлари (КСҚ), кучайтирилган катта сонлар қонунлари (ККСҚ), марказий лимит теоремалар (МЛТ) вариантлари ва бошқа лимит теоремалар ҳамда уларни математик статистиканинг асимтотик масалаларига татбиқи ташкил қилади. Фазоларда текис метрика билан яратилган топологияда индексациялар синфи мураккаблик даражасига нисбатан маълум шартлар талаб қилинганда махсус яқинлашиш назарияси ишлаб чиқилган (энтропия шартлари). Эмпирик жараёнларнинг бу турдаги натижалари аслида тўғри чизикнинг бирор ярим интервалида кузатув индикатори билан индексланган эмпирик процесслар учун Гливенко-Кантелли ва Донскер классик теоремаларининг умумлашган аналогларини топиш эҳтимоллар назарияси ва математик статистикада долзарб ва муҳим вазифаларидан бири ҳисобланади.

Ҳозирги вақтда, агар эмпирик жараён ўлчовли функциялар синфи билан индексланган бўлса, унда замонавий энтропия назарияси КСҚ ва МЛТ варианталарини аниқлашга имконини беради, бу эса ўлчовли функцияларнинг маълум бир синфига, шу жумладан Гливенко-Кантелли ва Донскер теоремаларини аналогларини топиш муҳим масалалардан бири бўлиб қолмоқда. Амалиётда шундай экспериментал вазиятлар мавжуд бўлиб, унда тасодифий микдорлар маълум ҳодисалар билан бирга кузатилиши ёки ундан ҳам кийин, тасодифий микдорларнинг ўзи бутунлай кузатилмаслиги мумкин. Бу борада: ўлчовли функциялар синфи бўйича индексланган боғлиқсизликнинг эмпирик процессларни асимптотик хоссаларини таҳлил қилиш, тасодифий миқдор ва ҳодисаларнинг боғлиқсизлигини текшириш критерийларини қуриш ва индекслаш синфи бўйича текис КСҚ ва МЛТ исботлаш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларниниг илмий ва амалий татбиқига эга бўлган эҳтимоллар назарияси ва математик статистиканинг долзарб йўналишларига, жумладан замонавий эмпирик жараёнлар назариясига эътибор қаратилди. «Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика» фанининг устувор йўналишлари бўйича ҳалқаро стандартлар натижасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Мазкур қарор ижросини таъминлашда замонавий эмпирик жараёнлар соҳасида илмий тадқиқот ишларини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга. Бу масалаларнинг асосий ечими бу диссертация ишининг асосини ташкил этади.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича харакатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони, 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-кувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўгрисида»ги ва 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадкикотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўгрисида»ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-хукукий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадкикоти муайян даражада хизмат килади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Ушбу тадқиқот Ўзбекистон Республикасида фан-техника тараккиётининг устувор йўналишларига мувофиқ амалга оширилди IV. «Математика, механика ва информатика».

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Ўлчовли функциялар синфи билан индексланган эмпирик процесслар бир катор муаллифлар ишларида ўрганилган. Хусусан, қуйидаги ишларни таъкидлаш лозим: индексация синфларига нисбатан маълум энтропия шартларида Гливенко-Кантелли ва Донскер классик теоремаларининг умумлашмалари ўринли бўладиган тўпламлар синфи ва функциялар билан индексланган абстракт эмпирик процесслар J. Bae, S. Kim, И.С. Борисова, R.M. Dudley, P. Gaensler, W. Stute, S.B. Harris, S.W. Kim, J. Kuelbs, R.M. Dudley, D.M. Mason, M. Ossiander, D. Polland, A.W. Van der Vaart, J.A. Wellner ва A.W. Varron ларнинг ишларида ўрганилган бўлиб уларда КСҚ ва МЛТ текис вариантлари исботланган.

Замонавий эмпирик жараёнлар назарияси натижаларини математик статистика муаммоларида қўллаш D.M. Mason, A.W. Van der Vaart, J.A. Wellner ишларида акс эттирилган. Бироқ, богликсизликнинг эмпирик процессларини тадкикотларига олиб келадиган тасодифий микдор ва ҳодисанинг богликсизлигини текширишда пайдо бўладиган масалалар ҳали ўрганилмаган. Бундан ташқари, кузатишлар тўлик бўлмаган такдирда, бундай эмпирик процесслар фақат J. Bae ва S. Kim нинг ишларида бутун тўгри чизикда аникланмаган купайтма Каплан-Мейер баҳоси ёрдамида текширилган бўлиб, бу унинг интеграл структурага эга булган эмпирик процессларни ўрганишда фойдаланишни кийинлаштиради.

Мавжуд адабиётларни таҳлили шуни курсатадики ҳозирга қадар ўлчовли функциялар синфи билан аниқланган богликсизликнинг эмпирик

---

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамаси 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори

процессларининг чукур асимптотик таҳлили етарли даражада олиб борилмаган экан.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги.

Диссертация тадқиқоти Мирзо Улугбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети Ф4-01 «Тақсимотларнинг функционал характеристикаларни баҳолаш усулларини ишлаб чиқиш ва статистик баҳоларнинг асимптотик хоссаларини тадқиқ» (2012-2016 йиллар), Мирзо Улугбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети Ф4-40 «Ўлчовли функциялар синфида индексланган интеграл эмпирик процессларнинг асимптоотик хоссаларани тадқик этиш» (2017-2020 йиллар) мавзусидаги фундаментал лойиҳалар доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади боглиқсизликнинг эмпирик ва кетма-кет эмпирик процессларни, тўлиқ бўлмаган кузатувлар асосида тузилган кетма-кет интеграл эмпирик процессларни таҳлил қилиш, ҳамда улар учун индекслаш синфлари бўйича текис катта сонлар қонунлари ва ўсиб бораётган ҳажмда марказий лимит теоремаларни исботлашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

индикаторлар синфи бўйича индексланган боглиқсизликнинг эмпирик процесслари учун кучли аппроксимация натижаларини аниқлаш;

ўлчовли функциялар синфи бўйича индексланган боглиқсизликнинг эмпирик процессларни ўрганиш ва улар учун индекслаш синфида текис КСҚ ва МЛТ вариантларини яъни, тасодифий ҳажмли танламалар бўлган ҳолда;

боглиқсизликнинг эмпирик характеристик процессини таҳлил қилиш;

ўлчовли функциялар синфи бўйича индексланган боглиқсизликнинг кетма-кет эмпирик жараёнларини ўрганиш, улар учун текис КСҚ, ККСҚ ва МЛТ вариантларини исботлаш;

ўлчовли функциялар синфи бўйича индексланган боглиқсизликнинг кетма-кет интеграл эмпирик процессларни ўрганиш, улар учун МЛТ ларни ўрнатиш;

ўнг томондан цензурланган кузатувлар асосида тузилган индексланган боглиқсизликнинг кетма-кет интеграл эмпирик процессларни ўрганиш ва улар учун текис КСҚ ни исботлаш.

Тадқиқотнинг объекти боглиқсизликнинг эмпирик ва кетма-кет эмпирик процесслари, ҳамда тўлиқ бўлмаган кузатишлар асосидаги кетма-кетлик процесслари.

Тадқиқотнинг предмети замонавий эмпирик жараёнлар назарияси, энтропия назарияси, функционал фазоларда эҳтимоллик ўлчовлари якинлашиш назарияси ва статистик гипотезалани текшириш назарияси.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертация ишда функционал фазолардаги эмпирик процесслар учун кучли аппроксимация усуллари, энтропия ва аналитик усуллардан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги куйидагилардан иборат:

мос равишда нормаллаштирилган индикаторлар синфи бўйича индексланган боглиқсизликнинг эмпирик процессларининг Броун кўприклари кетма-кетлиги билан кучли аппроксимация натижаси исботланган;

детерминистик ва тасодифий хажмли танлама учун ўлчовли функциялар синфи билан индексланган боғлиқсизликнинг эмпирик процесслари учун индекслаш синфидаги текис катта сонлар қонуни, кучайтирилган катта сонлар қонуни ва марказий лимит теоремалари вариантлари исботланган;

индексация синфи бўйича боғлиқсизликнинг кетма-кет интеграл эмпирик процесс учун текис марказий лимит теорема исботланган;

ўнг томондан цензурланган кузатишлар асосида тузилган кетма-кет интеграл эмпирик процесслар учун текис кучайтирилган катта сонлар қонуни исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижаси тузилган ва ўрганилган ўлчовли функциялар синфи бўйича индексланган эмпирик ва кетма-кет эмпирик процесслар, тасодифий миқдор ва ҳодисанинг боғлиқсизлиги ҳақида гипотезасини текшириш учун статистикаларнинг кенг синфининг лимит тақсимот қонунларини ва ўнг томондан цензурланиш ҳолатида кузатувлари учун индекслаш функциялари синфи бўйича интегралларни тақрибий ҳисоблашларни баён қилинганлигидан иборат.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги эҳтимоллар назарияси, математик статистиканинг асимптотик назарияси, шунингдек, математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти боғлиқсизликнинг эмпирик ва кетма-кет эмпирик процесслари, ҳамда тўлиқ бўлмаган кузатишлар асосидаги интеграл кетма-кет процессларини тузиш ва улар учун индекслаш синфи бўйича текис КСҚ ва МЛТ исботлаш имконини беган.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти тиббий-биологик, демографик, муҳандислик ва суғурта ишларида олинган статистик маълумотларни таҳлил қилиш, статистик баҳолаш назарияси ва гипотезаларни текширишга имкон бериш билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Функциялар синфи билан индексланган эмпирик ўлчовларнинг асимптотик хоссалари бўйича олинган натижалар асосида:

ўнг томондан цензурланган кузатишлар асосида тузилган кетма-кет интеграл эмпирик процесслар учун текис кучайтирилган катта сонлар қонунидан ЁОТ-ФТЕХ-2018-154 рақамли “Z^d панжараларида ва Γ^k Кэли дарахтларида гамильтонианлар спектрлари ва Гиббс ўлчовлари” мавзусидаги фундаментал лойиҳада Гиббс ўлчовларини аниқлашда фойдаланилган (Ўзбекистон Миллий университетининг 2021 йил 28 октябрдаги №04/11-6835-сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши тўлиқ бўлмаган статистик танланмаларнинг ўнг томондан тасодифий цензурланиш моделида Козиол-Гриннинг пропорционал интенсивликлар хусусий моделининг ўринли бўлишини аниқлаш имконини берган;

детерминистик ва тасодифий хажмли танлама учун ўлчовли функциялар синфи билан индексланган боғлиқсизликнинг эмпирик процесслари учун индекслаш синфидаги марказий лимит теоремаси вариантидан “APEX LIFE” АЖ сугурта компаниясида бахтсиз ҳодисалар ва юқумли касалликлардан сугурталаниш учун тариф ставкалари қийматларини ҳисоблашда фойдаланилган (“APEX LIFE” АЖ Сугурта Компанияси 2021 йил 15 июл №ALI-01/0548-сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши 1-класс бахтсиз ҳодисалардан сугурталаниш, ҳамда 2-класс юқумли касалликлардан сугурталаниш бўйича сугурта маҳсулотлари учун тариф ставкалари қийматларини ҳисоблашда, сугурта маҳсулотлари нархини баҳолашда хавфларни таҳлил қилиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 14 та халкаро ва 15 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 37 та илмий иш чоп этилган, улардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 8 та макола, жумладан, 4 таси хорижий ва 4 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисм, учта боб, хулоса, А приложенияси, фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссетациянинг асосий қисмнинг ҳажми 100 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмда диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

$(\Omega,\mathcal{A},P)$ эҳтимоллар фазосида аниқланган, $(\mathfrak{X},\mathfrak{B})$ ўлчовли фазода ўзининг қийматларини қабул қилувчи X_k тасодифий миқдор (т.м.) берилган бўлиб богликсиз тажрибалар кетма-кетлигида $\{(X_k,A_k),k\geq 1\}$ жуфтлик кузатилаётган бўлсин. Бу ерда $\mathfrak{X}\subseteq\mathbb{R}^1$ ва $\mathfrak{B}=\sigma(\mathfrak{X})$-$\mathfrak{X}$ дан олинган Борел тўпламларининг сигма алгебраси. A_k ҳодиса $p=P(A_k)\in(0,1)$ умумий эҳтимолга эга. $\mathbb{S}^{(n)}=\{(X_k,\delta_k),1\leq k\leq n\}$ танланма кузатилаётган бўлсин, бу ерда $\delta_k=I(A_k)$-индикатор. Хар бир (X_k,δ_k) жуфтлик $(\mathfrak{X}\otimes\{0,1\},\mathcal{U},\mathcal{P})$статистик моделни индуцирлайди, бу ерда $\mathcal{U}$ - сигма-алгебра $\mathbb{D}\subseteq\{0,1\}$ қисм тўпламдаги ва $\mathbb{B}\in\mathfrak{B}$ Борел тўпламларининг $\mathbb{B}\otimes\mathbb{D}$ кўпайтма кўринишидаги тўплам сигма алгебраси. $\mathcal{U}$ сигма-алгебрада берилган $\mathbb{D}=\{0,1\}$ да аниқланган

$$\{\mathcal{P}(\mathbb{B}\otimes\mathbb{D})=P(X_k\in\mathbb{B},\delta_k\in\mathbb{D}),\mathbb{B}\in\mathfrak{B},\mathbb{D}\subset\{0,1\}\}$$

тақсимотни

$$\begin{gathered}\mathbb{Q}(\mathbb{B})=\mathcal{P}(\mathbb{B}\otimes\{0,1\})=\mathcal{P}(\mathbb{B}\otimes\{0\})+\mathcal{P}(\mathbb{B}\otimes\{1\})=\\=\mathbb{Q}_0(\mathbb{B})+\mathbb{Q}_1(\mathbb{B}),\ \mathbb{B}\in\mathfrak{B},\end{gathered}\tag{1}$$

орқали белгилаймиз. Бу ерда $\mathbb{Q}_m(\mathbb{B})=\mathcal{P}(\mathbb{B}\otimes\{m\}),m=0,1$. X_k т.м. ва A_k ҳодисанинг хар бир (X_k,A_k) жуфтликда боглиқсизлиги хақидаги $\mathcal{H}$ гипотезани кўриб чиқамиз. У ҳолда ихтиёрий $\mathbb{B}\in\mathfrak{B}$ учун $\mathcal{H}$ гипотеза ўринлигида $\mathbb{Q}_0(\mathbb{B})=(1-p)\mathbb{Q}(\mathbb{B})$ и $\mathbb{Q}_1(\mathbb{B})=p\mathbb{Q}(\mathbb{B})$. $\Lambda(\mathbb{B})=\mathbb{Q}_1(\mathbb{B})-p\mathbb{Q}(\mathbb{B})$ ишора алмашинувчи ўлчовни киритамиз. У холда (1) ни инобатга олган ҳолда, $\mathcal{H}$ гипотеза ўринлигида, юқорида келтирилган тенгликлар

$$\Lambda(\mathbb{B})=0 \text{ ихтиёрий } \mathbb{B}\in\mathfrak{B} \text{ учун}\tag{2}$$

эквивалент бўлиб колади.

(1) ва (2) формулаларга кирувчи ўлчовларнинг $\mathbb{S}^{(n)}$ танланма бўйича $\mathbb{B}\in\mathfrak{B}$ учун эмпирик аналогларини киритамиз:

$$\begin{gathered}\mathbb{Q}_{mn}(\mathbb{B})=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}I(X_k\in\mathbb{B},\delta_k=m),\ m=0,1,\\ \mathbb{Q}_{0n}(\mathbb{B})+\mathbb{Q}_{1n}(\mathbb{B})=\mathbb{Q}_n(\mathbb{B})=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}I(X_k\in\mathbb{B}),\\ \Lambda_n(\mathbb{B})=\mathbb{Q}_{1n}(\mathbb{B})-p_n\mathbb{Q}_n(\mathbb{B}),\ p_n=\mathbb{Q}_{1n}(\mathfrak{X})=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\delta_k.\end{gathered}\tag{3}$$

Ихтиёрий $\mathbb{B}\in\mathfrak{B}$ учун, $\mathcal{H}$ гипотеза ўринлигида, $\Lambda_n(\mathbb{B})$ баҳо $\Lambda(\mathbb{B})$ нинг силжимаган баҳоси эканлигини кўриш мумкин. Ундан ташқари ККСҚга кўра хар бир $\mathbb{B}\in\mathfrak{B}$ ва $n\to\infty$ да $\Lambda_n(\mathbb{B})\xrightarrow{\partial.x.}\Lambda(\mathbb{B})$ ўринли.

Эмпирик жараёнлар назариясидан маълумки, бундай натижалар $\mathfrak{B}$ сигма-алгебранинг барча элементларида текис ўринли эмас ва $\mathfrak{B}$ тўпламдан олинган $\mathcal{G}$ махсус синфи учун ўринли. Шунинг учун

$$\left\{\mathbb{G}_n(\mathbb{B})=a_n\left(\Lambda_n(\mathbb{B})-\Lambda(\mathbb{B})\right),\ \mathbb{B}\in\mathcal{G}\right\},\tag{4}$$

кўринишдаги $\mathcal{G}$ - индексланган процессни ($n\to\infty$) асимптотик хоссаларни ўрганиш $\mathcal{H}$ гипотезани текшириш критерийлари учун статистика тузиш нуқтаи назаридан қизиқиш уйготади, бу ерда $\{a_n,n\geq1\}$ тасодифий номанфий нормалланган сонлар кетма-кетлиги. Агар (4) кетма-кетлик учун лимит процесс сифатида $\mathbb{Q}-$Броун кўприги олинса, яъни $\{\mathbb{G}(\mathbb{B}),\mathbb{B}\in\mathcal{G}\}$ Гаусс жараёни нол ўртача ва қуйидаги ковариация билан

$$\operatorname{cov}\left(\mathbb{G}(\mathbb{B}_1),\mathbb{G}(\mathbb{B}_2)\right)=\mathbb{Q}(\mathbb{B}_1\cap\mathbb{B}_2)-\mathbb{Q}(\mathbb{B}_1)\mathbb{Q}(\mathbb{B}_2),\ \mathbb{B}_1,\mathbb{B}_2\in\mathcal{G}\tag{5}$$

берилган бўлса, бу масала янада қизиқарли ва фойдали кўринади.

Диссертация ишида $f:\mathfrak{X}\to\mathbb{R}^1$ ўлчовли функциялар синфи билан $\mathcal{F}$ - индексланган эмпирик процесслари

$$\mathbb{G}_n f = \int_{\mathfrak{X}} f\, d\mathbb{G}_n, \quad f \in \mathcal{F}. \tag{6}$$

кетма-кетликларининг янада кенгроқ синфлари ўрганилади. Эътибор бериш керакки, $\mathcal{F} = \{I(B),\, B \in \mathcal{G}\}$ индикаторлар синфи бўлган холда (4) процесс (6) ни махсус холи хисобланади. (6) кўринишдаги ўрганалаётган процесслар тасодифий $a_n = \sqrt{n}\left[p_n(1-p_n)\right]^{-1}$ оптимал нормировкага эга ва $\mathcal{H}$ гипотеза тўгрилигида лимит тақсимоти куйдаги $\mathbb{Q}$ – Броун кўприги бўлади:

$$\mathbb{G} f = \int_{\mathfrak{X}} f\, d\mathbb{G}\,. \tag{7}$$

У ўртачаси нол ва қуйидаги ковариацияга эга

$$\operatorname{cov}(\mathbb{G}f_1, \mathbb{G}f_2) = \mathbb{Q}f_1 f_2 - \mathbb{Q}f_1\mathbb{Q}f_2, \quad f_1, f_2 \in \mathcal{F}, \tag{8}$$

бу ерда

$$\mathbb{Q}f = \int_{\mathfrak{X}} f\, d\mathbb{Q}.$$

Агар $\mathcal{F} = \{I(-\infty; t],\, t \in \mathbb{R}\}$ индикаторлар синфи бўлса, у холда (5) ифода (8) дан келиб чиқади. Ушбу диссертация ишида $\mathcal{H}$ гипотезани текшириш учун қуйидаги (6) боглиқсизликнинг эмпирик процесслар турлари ўрганилган:

а) $\mathcal{F}$-индексланган жараён

$$\Delta_n f = \int_{\mathfrak{X}} f d\Delta_n = \left[\frac{n}{p_n(1-p_n)}\right]^{1/2} (\Lambda_n - \Lambda)\cdot f, \qquad f \in \mathcal{F}, \tag{9}$$

б) $\mathcal{D} = T \otimes \mathcal{F}$ - кетма-кет индексланган процесс

$$\left\{\Delta_n(s; f) = \frac{[ns]}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}\left(\Lambda_{[ns]} - \Lambda\right) f, \quad (s; f) \in \mathcal{D}\right\}, \tag{10}$$

бу ерда $T = [0,1]$ ва $[a]$- a нинг бутун қисми;

в) $\mathcal{N} = \mathbb{R} \otimes \mathcal{F}$ – кетма-кет индексланган процесс

$$\{\nabla_n(t; f) = \Delta_n f_t, \quad (t; f) \in \mathcal{N}\}, \tag{11}$$

бу ерда $f_t(u) = f(u)\cdot I(u \le t)$.

г) ундан ташқари диссертацияда $\mathcal{N}_T = \mathbb{R}_T \otimes \mathcal{F}$ – кетма-кет индексланган интеграл прицесси

$$\left\{\mathcal{U}_n(f_t) = (F_n^{RR} - F) f_t = \int_{\mathfrak{X}} f_t(u)(F_n^{RR} - F)(du), \ (t, f) \in \mathcal{N}_T\right\}, \tag{12}$$

ўрганилган, бу ерда $\mathbb{R}_T = (-\infty, T]$, $T < \inf\{t \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X_k \le t) = 1\}$, $X_k = \min(T_k, C_k)$, $\delta_k = I(T_k \le C_k)$. Бунда F тақсимот функцияси (т.ф.) билан T_k т.м. ўнгдан цензурланади унга боглиқ бўлмаган C_k т.м. ва F_n^{RR} - F т.ф. учун рисклар нисбатининг даражали баҳоси.

Диссертациянинг "**Замонавий эмпирик процесслар назариясининг таърифлари ва баъзи асосий натижалари. Боғлиқсизликнинг классик**

эмпирик процесслари учун кучли аппроксимация натижалари” деб номланувчи биринчи боби асосан ёрдамчи қисм бўлиб, 4 та параграфдан иборат. Биринчи параграфда кузатилмалар индикаторлари орқали аниқланган классик эмпирик процесслар учун маълум натижалар келтирилган ва $\rho = \|\cdot\|_{\infty}$ текис метрикага эга иккинчи турдаги узилишларсиз функциялар $\mathbb{D}(\mathbb{R})$ фазосида суст яқинлашишни кўриб чиқишда юзага келадиган муаммо таъкидланган. $(\mathbb{D}(\mathbb{R}), \rho)$ носепарабел бўлганлиги сабабли, бундан келиб чиқадики эмпирик процесс ўлчовсиз акслантириш бўлади. Ушбу муаммо 1965 йил Д.М. Чибисов томонидан қайд этилган. Замонавий эмпирик процесслар назарияси умумийрок фазоларда суст якинлашишни аниклаш учун бошка ўзининг ёндашувларига эга бўлиб ушбу муаммони четлаб ўтади. Айтайлик ушбу $\left(l^{\infty}(\mathcal{F}), \|Z(f)\|_{\mathcal{F}}\right)$ фазода, буни таъкидлаш лозим, бу ерда $l^{\infty}(\mathcal{F})-$ $\|Z(f)\|_{\mathcal{F}} = \sup\{Z(f), f \in \mathcal{F}\}$ супремум-нормага эга бўлган барча чегараланган $f : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ функциялар фазоси. Ушбу ёндашув ташқи интеграл ва ташқи эҳтимоллик тушунчаларига асосланган. Стохастик якинлашишнинг замонавий назариясининг айрим маълумот ва ёндашувлари иккинчи параграфида келтирилган. $\mathcal{F}-$индексланган эмпирик процессларни ўрганишда, $\mathcal{F}-$ўлчовли функсиялар синфининг мураккаблик даражасига энтропия шартлари деб аталувчи шартларни қўйиш керак бўлади. Шу бобнинг учинчи параграфида замонавий адабиётларда мос энтропия шартларига эга бўлган Гливенко-Кантелли ва Донскер теоремалари деб аталадиган ўлчовли функциялар синфи билан индексланган эмпирик процесслари ва улар учун $\mathcal{F}$ синфи бўйича текис КСҚ ва МЛТ аниқланган. Ушбу шартларга тўгри келган $\mathcal{F}$ синфлар, Гливенко-Кантелли ва Донскернинг синфлари деб ҳам аталади.

Биринчи бобнинг тўртинчи параграфидаги натижаларни тавсифлаш учун (X_k, δ_k) вектор томонидан яратилган $(\mathcal{X} \otimes \{0,1\}, \mathcal{U}, \mathcal{P})$ статистик моделни ва ушбу вектор компоненталарининг боглиқсизлиги ҳақидаги $\mathcal{H}$ гипотезасини кўрилган. Бундан ташқари, $\mathcal{F}$ синфи индикаторлар синфи бўлганида $\mathcal{F} = \{I(-\infty, t], t \in \mathbb{R}\}$, (9) боглиқсизлик эмпирик процессининг хусусий холи кўрилган. $\mathbb{B} = (-\infty, t]$, $\mathbb{Q}_m((-\infty, t]) = H_m(t)$, $\mathbb{Q}_{mn}((-\infty, t]) = H_{mn}(t)$, $m = 0,1$, $\mathbb{Q}((-\infty, t]) = H(t)$, $\mathbb{Q}_n((-\infty, t]) = H_n(t)$, $\Lambda((-\infty, t]) = \Lambda(t)$, $\Lambda_n((-\infty, t]) = \Lambda_n(t)$ бўлсин. У ҳолда, $\Lambda(t) = H_1(t) - pH(t)$ ва $\mathcal{H}$ гипотеза ўринлигида $\Lambda(\mathbb{B}) = 0$ ҳар қандай $t \in \mathbb{R}$ учун. Бу ҳолда процесс (10) қуйидагича аниқланади

$$\left\{\Delta_n(t) = \Delta_n((-\infty, t]) = \left(\frac{n}{p_n(1-p_n)}\right)^{1/2} \left(\Lambda_n(t) - \Lambda(t)\right), \quad t \in \mathbb{R}\right\}, \quad (13)$$

бу ерда, $p_n = \lim_{t\to\infty} H_{1n}(t)$.

Классик Гливенко-Кантелли теоремасига кўра,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{-\infty<t<\infty} \left|\Delta_n(t)\right| \xrightarrow{\partial.x.} 0 \tag{14}$$

эканини осонгина кўриш мумкин.

Аппроксимияцияловчи сифатида (13) жараён учун куйдаги Гаусс процессларининг кетма-кетлигини кўриб чиқамиз

$$\left\{\Delta_n^0(t) = \left[p(1-p)\right]^{-1/2}\left(\mathbb{B}_{1n}(t) - p\mathbb{B}_n(t) - H(t)\mathbb{B}_{1n}(+\infty)\right),\ t\in\mathbb{R}\right\},$$

бу ерда, $\left(\mathbb{B}_n\left(H(t_1)\right), \mathbb{B}_{1n}\left(H(t_2)\right)\right)$ - ўртачаси нол ва $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ бўлганда ковариация структураси

$$\begin{aligned} E\mathbb{B}_n(t_1)\mathbb{B}_n(t_2) &= min(H(t_1), H(t_2)) - H(t_1)H(t_2), \\ E\mathbb{B}_n(t_1)\mathbb{B}_{1n}(t_2) &= min(H_1(t_1), H_1(t_2)) - H(t_1)H_1(t_2), \\ E\mathbb{B}_{1n}(t_1)\mathbb{B}_{1n}(t_2) &= min(H_1(t_1), H_1(t_2)) - H_1(t_1)H_1(t_2), \end{aligned} \tag{15}$$

бўлган вектор-кийматли Гаусс процессларидир.

$\varepsilon > 0$ сони учун қуйидаги шартни кўриб чиқамиз

$$\frac{n}{\log n} \ge 4(1+\varepsilon)\max\left\{p^{-2}, (1-p)^{-2}\right\} \tag{16}$$

1-теорема. (16) шарт бажарилсин. У ҳолда, етарлича бой $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ эҳтимоллик фазосида, куйидаги аппроксимация ўринли

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\Delta_n(t) - \Delta_n^0(t)\right| > \mathbb{C}_0 n^{-1/2}\log n\right) \le \mathbb{K}_0 n^{-(1+\varepsilon)}, \tag{17}$$

бу ерда, $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}_0(\varepsilon, p, H)$ ва $\mathbb{K}_0$ (абсолют) мусбат ўзгармас сонлар. $\left\{\mathbb{B}(y), 0\le y\le 1\right\}$ - Броун коприги. (17) аппроксимациянинг якинлашиш тезлиги оптималдир.

1-хулоса. Борел-Кантелли леммасига асосан (17) дан

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\Delta_n(t) - \Delta_n^0(t)\right| \overset{\partial.x.}{=} \mathbb{O}\left(n^{-1/2}\log n\right). \tag{18}$$

Ҳар $n\ge 1$ да, $\mathcal{H}$ гипотезани ўринлигида

$$\Delta_n^0(t) \overset{D}{=} \mathbb{B}\left(H(t)\right), \qquad t\in\mathbb{R}. \tag{19}$$

Шунингдек, $n\to\infty$ да (18) ва (19) дан Донскер теоремасининг куйдаги аналоги келиб чиқади

$$\mathbb{D}(\mathbb{R}) \ \text{ да } \ \Delta_n(t) \overset{D}{\Rightarrow} \mathbb{B}\left(H(t)\right). \tag{20}$$

(20) якинлашиш муҳим амалий аҳамиятга ега. Уни $\psi(\Delta_n)$ статистика ёрдамида, $\mathcal{H}$ гипотезани текшириш учун критерийларни куришда кўллашимиз мумкин.

2-теорема. $\psi:\mathbb{D}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ функционал Липшиц шартини каноатлантирсин

$$\left|\psi(u_1)-\psi(u_2)\right|\le L\cdot\sup_{0\le y\le 1}\left|u_1(y)-u_2(y)\right|,$$

бу ерда, $L>0$ бирор мусбат ўзгармас сон. Фараз қилайлик, $\psi(\mathbb{B}(y))$ т.м. Лебег ўлчовига нисбатан чегараланган зичликка эга бўлсин. У ҳолда, 1-теорема шартларида ва $\mathcal{H}$ гипотезанинг ўринлигида

$$\sup_{-\infty<x<+\infty}\left|\mathbb{P}\left(\psi\left(\Delta_n(\cdot)\right)\le x\right)-\mathbb{P}\left(\psi\left(\mathbb{B}\left(H(\cdot)\right)\right)\le x\right)\right|=\mathbb{O}\left(n^{-1/2}\log n\right) \qquad (21)$$

яъни $\psi_n(\Delta_n)$ статистиканинг тақсимоти $\psi(\mathbb{B})$ т.м. тақсимотига яқинлашиш тезлигини топиш имконини беради.

Диссертациянинг **“Ўлчовли функциялар синфида аниқланган боғлиқсизликнинг эмпирик процесслари”** деб номланган иккинчи боби учта параграфдан иборат.

Иккинчи бобнинг биринчи параграфда эмпирик процессларнинг замонавий назарияси усулларидан фойдаланган ҳолда $\mathcal{F}$-индексланган жараён (10) ўрганилади. Гливенко-Кантелли ва Донскер теоремаларининг текис вариантларини исботлаш учун биз синф мураккаблигини, яъни $\mathcal{F}$ синфнинг энтропиясини аниқлаймиз. $\mathcal{L}_q(\mathbb{Q})$ - $f:\mathfrak{X}\to\mathbb{R}$ функциялар фазоси қуйидаги нормага эга бўлсин:

$$\|f\|_{\mathbb{Q},q}=\left(\mathbb{Q}|f|^q\right)^{1/q}=\left\{\int_{\mathfrak{X}}|f|^q d\mathbb{Q}\right\}^{1/q}.$$

$\mathcal{F}$ синфи энтропиясини аниқлаш учун $\mathcal{L}_q(\mathbb{Q})$да $\varepsilon-$bracket тушунчасини киритамиз. $\mathcal{L}_q(\mathbb{Q})$ даги $\varepsilon-$bracket - $\varphi,\psi\in\mathcal{L}_q(\mathbb{Q})$ функциялар жуфтлиги бўлиб, улар учун $\mathbb{Q}\left(\varphi(X)\le\psi(X)\right)=1$ ва $\|\psi-\varphi\|_{\mathbb{Q},q}\le\varepsilon$, яъни $\mathbb{Q}(\psi-\varphi)^q\le\varepsilon^q$ бўлса. Агар $\mathbb{Q}\left(\varphi(X)\le f(X)\le\psi(X)\right)=1$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $\varepsilon-$bracket $[\varphi,\psi]$ билан қопланади. Эътибор берайлик, φ ва ψ функциялари $\mathcal{F}$ синфига тегишли бўлмаслиги мумкин, лекин улар чекли $\mathcal{L}_q(\mathbb{Q})$ нормаларга эга бўлиши керак. $\varepsilon-$bracket сони $N_{[\,]}\left(\varepsilon,\mathcal{F},\mathcal{L}_q(\mathbb{Q})\right)$, $\mathcal{F}$ синфини коплаш учун зарур бўлган $\mathcal{L}_q(\mathbb{Q})$ даги $\varepsilon-$bracket ларнинг энг кичик сонидир:

$$N_{[\,]}\left(\varepsilon,\mathcal{F},\mathcal{L}_q(\mathbb{Q})\right)=\min\Big\{k:\text{баъзи } f_1,\ldots,f_k\in\mathcal{L}_q(\mathbb{Q})$$
$$\text{шу каби } \mathcal{F}\subset\bigcup_{i,j}\left[f_i,f_j\right]:\left\|f_j-f_i\right\|_{\mathbb{Q},q}\le\varepsilon\Big\}. \qquad (22)$$

Тушунарлики, $\varepsilon\downarrow 0$да (22) сон $+\infty$ га интилади. $H_q(\varepsilon)=\log N_{[\,]}\left(\varepsilon,\mathcal{F},\mathcal{L}_q(\mathbb{Q})\right)$ сони $\mathcal{L}_q(\mathbb{Q})$да $\mathcal{F}$ синфнинг метрик энтропияси деб номланади.

Метрик энтропиянинг интегралини ҳам аниқлаймиз:

$$J_{[\,]}^{(q)}(\delta)=J_{[\,]}\left(\delta;\mathcal{F};\mathcal{L}_q(\mathbb{Q})\right)=\int_0^{\delta}\left(H_q(\varepsilon)\right)^{1/2}d\varepsilon,\qquad 0<\delta\le 1. \quad (23)$$

(23) интеграл метрик энтропиянинг ўсишини назорат қилиш учун ишлатилади.

$\mathbb{Q}_m,\, m=0,1$ субўлчовларга мос $\varepsilon-$bracket лар сони, метрик энтропиялар ва уларнинг интегралларини $N_{m[\,]}\left(\varepsilon,\mathcal{F},\mathcal{L}_q(\mathbb{Q}_m)\right)$, $H_{mq}(\varepsilon)$ ва $J_{m[\,]}^{(q)}(\delta)$ лар орқали белгилаймиз. $l^{\infty}(\mathcal{F})$ эса $\|\mathcal{Z}(f)\|_{\mathcal{F}}=\sup\left\{|\mathcal{Z}(f)|,\, f\in\mathcal{F}\right\}$ супремум-норма билан $\mathcal{F}$ да чегараланган функциялар фазоси бўлсин.

Қуйидаги Донскер типидаги теорема $\mathcal{F}$ синфга кучлироқ иккинчи тартибли шартларни юклайди.

3-теорема. $\mathcal{F}$ синф $\mathcal{F}\subset\mathcal{L}_2(\mathbb{Q}_m)$ ва $J_{m[\,]}^{(2)}(1)<\infty,\, m=0,1$ бўлсин. У ҳолда $n\to\infty$ да

$$l^{\infty}(\mathcal{F}) \text{ да } \Delta_n f\overset{D}{\Rightarrow}\Delta f$$

Бу ерда $\{\Delta f,\ f\in\mathcal{F}\}$ — ўртачаси нол бўлган Гаусс жараёни $\mathcal{H}$ гипотеза ўринлигида

$$E\mathbb{A}f\cdot\mathbb{A}g=\mathbb{Q}fg-\mathbb{Q}f\,\mathbb{Q}g.\ \ f,g\in\mathcal{F}$$

ковариацияси билан $\{\mathbb{A}f,\ f\in\mathcal{F}\}$ $\mathbb{Q}$- Броун кўприги билан устма-уст тушади.

Эътибор бериш керакки, $\mathcal{F}=\left\{I(-\infty,t],\, t\in\mathbb{R}\right\}$ бўлганда $\mathbb{A}f$ жараёни $H-$ Броун кўприги билан $\mathbb{B}\left(H(t)\right)$устма-уст тушади.

Иккинчи бобнинг иккинчи параграфида эса тасодифий ҳажмли танланмада (9) жараён ўрганилади.

Учинчи параграфда индикаторлар синфи билан индексланган боғлиқсизликнинг эмпирик (13) процесси ўнгдан тасодифий цензурланиш моделида $\mathcal{H}$ гипотезасини текшириш учун Колмогоров критерийсини қуришда ишлатилган. Бу моделда ушбу гипотеза пропорционал интенсивликлар тўғрисидаги гипотезага эквивалентдир. Мисол сифатида $n=97$ ҳажмли танланмада мос критерийларнинг асослилиги кўрсатилган.

Иккинчи бобнинг тўртинчи параграфида эса боғлиқсизликнинг қуйдаги эмпирик характеристик процессларини $\mathcal{F}=\left\{t\mapsto e^{ist}:|s|\le 1/2\right\}$ текис индекслаш синфи бўйича тадқиқ қилишга бағишланган

$$\left\{\mathcal{D}_n(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ist}\,d\Delta_n(t),\ s\in\mathbb{R},\ n\ge 1\right\}.$$

Жумладан, бу жараён тақсимоти $\mathbb{C}\left[-1/2;1/2\right]$ фазода $\mathcal{H}$ гипотеза ўринлигида $\gamma(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ist}\,dB\left(H(t)\right)$ тақсимоти билан мос келадиган марказлашган комплекс қийматли Гаусс процессига суст яқинлашади.

Диссертациянинг **“Ўлчовли функциялари синфи билан индексланган кетма-кет эмпирик процесслар”** деб номланган учинчи боби (10)-(12) процессларини тадқиқ қилишга бағишланган.

Бу бобнинг биринчи параграфида (10) жараён учун текис КСҚ ва МЛТ ўрнатилган. Қуйидаги теорема кетма-кет ККСҚ ни $T=[0,1]$ бўйича текис тасдиқлайди.

4-теорема. Фараз қилайлик, $\mathbb{Q}_m f^2<\infty$, $m=0,1$, $f\in\mathcal{F}$ бўлсин. У ҳолда $n\to\infty$ да

$$\left\|\frac{[ns]}{n}\left(\Lambda_{[ns]}-\Lambda\right)f\right\|_T\xrightarrow{\partial.x}0.$$

Шуни таъкидлаш лозимки, 4-теорема шартидан четлашиш мумкин эмас. Аммо, эҳтимолликк бўйича яқинлашиш учун $\mathbb{Q}_m|f|<\infty$, $m=0,1$, $f\in\mathcal{F}$ шартини бажарилиши кифоя.

$\mathcal{D}=T\otimes\mathcal{F}$ да эмпирик майдонларни киритамиз:

$$\mathbb{Y}_n(s;f)=\mathbb{Y}_{0n}(s;f)+\mathbb{Y}_{1n}(s;f),$$

$$\mathbb{Z}_n(s;f)=\sqrt{n}\mathbb{Y}_n(s;f)=\mathbb{Z}_{0n}(s;f)+\mathbb{Z}_{1n}(s;f),$$

бу ерда

$$\mathbb{Y}_{0n}(s;f)=\frac{[ns]}{n}\sum_{k=1}^{[ns]}\left((1-\delta_k)f(X_k)-\mathbb{Q}_0 f(X_k)\right),$$

$$\mathbb{Y}_{1n}(s;f)=\frac{[ns]}{n}\sum_{k=1}^{[ns]}\left(\delta_k f(X_k)-\mathbb{Q}_1 f(X_k)\right),$$

ва $m=0,1$ бўлганида

$$\mathbb{Z}_{mn}(s;f)=\sqrt{\frac{[ns]}{n}}G_{m[ns]}f,\ \mathbb{Z}_{mn}(1;f)=\mathbb{G}_{mn}f=\sqrt{n}\left(\mathbb{Q}_{mn}-\mathbb{Q}_m\right)f.$$

$l^\infty(\mathcal{D})$ – $\mathcal{D}$ даги $\|.\|_{\mathcal{D}}$ супремум-норма билан барча чегараланган функциялар фазоси бўлсин.

5-теорема. Универсал константа $\mathbb{C}$ мавжуд бўлиб, ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун

$$\mathbb{P}^*\left(\left\|\mathbb{Y}_n(s;f)\right\|_{\mathcal{D}}>4\varepsilon\right)\le 2\mathbb{C}\max_{m=0,1}\mathbb{P}^*\left(\left\|\mathbb{Y}_{mn}(1;f)\right\|_{\mathcal{F}}>\varepsilon\right). \qquad (24)$$

Бу теорема $\mathcal{D}$ бўйича текис КСҚ ни $\mathcal{F}$ бўйича текис КСҚ га алмаштириш имконини беради.

1-таъриф. Агар $\mathcal{F}$ ўлчовли функциялар синфи учун $n\to\infty$ да

$$\left\|\mathbb{Y}_n(s;f)\right\|_{\mathcal{D}}^*\xrightarrow{p}0$$

шарт бажарилса, у ҳолда бу синфга **Гливенко-Кантеллининг кетма-кет суст синфи** дейилади.

2-таъриф. Агар $\mathcal{F}$ ўлчовли функциялар синфи учун $n\to\infty$ да

$$\mathbb{Y}_n(1;\cdot)^*\xrightarrow{p}0$$

шарт бажарилса, у ҳолда бу синфга **Гливенко-Кантеллининг суст синфи** дейилади, бу ерда $\mathbb{Y}_n(1;\cdot)^*$ – $\mathbb{Y}_n(1;\cdot)$ учун минимал ўлчовли мажорантадир.

3-таъриф. Агар $\mathcal{F}$ ўлчовли функциялар синфи учун $n\to\infty$ да

$$\left\|\mathbb{Y}_n(s;f)\right\|_{\mathcal{D}}^{*} \xrightarrow{\partial.x.} 0$$

шарт бажарилса, у ҳолда бу синфга **Гливенко-Кантеллининг кетма-кет кучли синфи** дейилади.

4-таъриф. Агар $\mathcal{F}$ ўлчовли функциялар синфи учун $n\to\infty$ да

$$\mathbb{Y}_n(1;\cdot)^* \xrightarrow{\partial.x.} 0$$

шарт бажарилса, у ҳолда бу синфга **Гливенко-Кантеллининг кучли синфи** дейилади.

2-натижа. (24) ни ҳисобга олиб, ҳар бир $\varepsilon>0$ бўлганида қуйидагига эга бўламиз:

$$\mathbb{P}^*\left(\left\|\mathbb{Y}_n(1;f)\right\|_{\mathcal{F}}>4\varepsilon\right)\le\mathbb{P}^*\left(\left\|\mathbb{Y}_n(s;f)\right\|_{\mathcal{D}}>4\varepsilon\right)\le$$

$$\le 2\mathbb{C}\max_{m=0,1}\mathbb{P}^*\left(\left\|\mathbb{Y}_{mn}(1;f)\right\|_{\mathcal{F}}>\varepsilon\right).$$

У ҳолда $\mathcal{F}$ ўлчовли функциялар синфи Гливенко-Кантеллининг кетма-кет суст (ёки кучли) синфи бўлади фақат ва фақат $\mathcal{F}$ Гливенко-Кантеллининг суст (ёки кучли) синфи бўлса.

6-теорема. $\mathcal{F}$ синфи учун 3-теорема шартлари бажарилсин. У ҳолда $\mathcal{F}$ Гливенко-Кантеллининг кетма-кет кучли синфи бўлади, яъни $n\to\infty$ да

$$\left\|\frac{[ns]}{n}\left(\Lambda_{[ns]}-\Lambda\right)f\right\|_{\mathcal{D}}^{*} \xrightarrow{\partial.x.} 0$$

Куйдаги теорема 3-теоремани умумлаштиради.

7-теорема. $\mathcal{F}$ синфи учун 3-теорема шартлари бажарилсин. У ҳолда $n\to\infty$

$$l^\infty(\mathcal{D}) \text{ да } \Delta_n(s;f)\overset{D}{\Rightarrow}\Delta(s;f),$$

бу ерда $\{\Delta(s;f),(s;f)\in\mathcal{D}\}$ – ўртачаси нол бўлган Гаусс тасодифий майдони ва $\mathcal{H}$ гипотеза ўринлигида

$$\operatorname{cov}\left(\Delta(s;f),\Delta(t;g)\right)=\min(s,t)\{\mathbb{Q}fg-\mathbb{Q}f\mathbb{Q}g\},\ (s;f),(t,g)\in\mathcal{D}$$

ковариация билан Кифер-Мюллер майдони билан устма-уст тушади.

Учинчи бобнинг иккинчи параграфида $\mathcal{N}$ – индексланган (11) эмпирик процесс тадқиқ қилинади. Бу процесс (9) процессларни қамраб олади, чунки барча $f\in\mathcal{F}$ лар учун $\nabla_n(\infty;f)=\Delta_n f$. $\left(l^\infty(\mathcal{N}),\|\cdot\|_{\mathcal{N}}\right)$ Банах фазосида

$$\xi_i(t;f)=\left[p(1-p)\right]^{-1/2}\cdot\left(\eta_i(t;f)-E\eta_i(t;f)\right),(t;f)\in\mathcal{N},$$

процессларини аниқлаймиз, бу ерда $\eta_i(t;f)=f_t(X_i)(\delta_i-p)$. Равшанки, $E\xi_i(t;f)=0$ ва $(t;f),(s;g)\in\mathcal{N}$ бўлганида

$$\operatorname{cov}\left(\xi_i(t;f),\xi_i(s;g)\right)=\left[p(1-p)\right]^{-1}\cdot$$
$$\cdot\left\{\int\limits_{-\infty}^{\min(t,s)} fgd\left(\mathbb{Q}_1-2p\mathbb{Q}_1+p^2\mathbb{Q}\right)-\int\limits_{-\infty}^{t} fd\Lambda\cdot\int\limits_{-\infty}^{s} gd\Lambda\right\} \tag{25}$$

бўлади ва $\mathcal{H}$ гипотеза ўринли эканлигидан

$$\operatorname{cov}\left(\xi_i(t;f),\xi_i(s;g)\right)=\int\limits_{-\infty}^{\min(t,s)} fgd\mathbb{Q},\quad (t;f),(s;g)\in\mathcal{N}. \tag{26}$$

Фараз қилайлик, $\{W(t;f),\,(t;f)\in\mathcal{N}\}$ – ўртачаси нол ва ковариацияси

$$\operatorname{cov}\left(W(t;f),W(s;g)\right)=\operatorname{cov}\left(\xi_i(t;f),\xi_i(s;g)\right)$$

бўлган Гаусс тасодифий майдони бўлсин.

У ҳолда бу майдон $\mathcal{H}$ гипотеза ўринлигида (26) коварациясига эга бўлади ва демак у Винер майдони бўлади.

$$U_n(t;f)=n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}\xi_k(t;f),\;(t;f)\in\mathcal{N},$$

процессларни аниқлайлик, улар учун $\mathcal{N}$ га нисбатан текис МЛТ ўринли бўлади.

8-теорема. $\mathcal{F}$ синфи учун 3-теорема шартлари бажарилсин. У ҳолда $n\to\infty$ да

$$l^{\infty}(\mathcal{N}) \text{ да } U_n(t;f)\overset{D}{\Rightarrow}W(t;f).$$

Айтайлик, $\mu_0(t;f)=\mu_0\mathbb{Q}f_t$ бўлсин, бу ерда $\mu_0=N\left(0,p(1-p)\right)$. Ковариацияси $\operatorname{cov}\left(\mu_0(t;f),\mu_0(s;g)\right)=p(1-p)\mathbb{Q}f_t\mathbb{Q}g_s$ бўлган $\mu_0(t;f)$ Гаусс процессини қараймиз.

9-теорема. $\mathcal{F}$ синфи учун 3-теорема шартлари бажарилсин. У ҳолда $n\to\infty$ да

$$l^{\infty}(\mathcal{N}) \text{ да } \nabla_n(t;f)\overset{D}{\Rightarrow}\nabla(t;f),$$

бу ерда $\left\{\nabla(t;f)=W(t;f)+\mu_0(t;f)\cdot\left[p(1-p)\right]^{-1/2},(t;f)\in\mathcal{N}\right\}$ ўртачаси нол бўлган Гаусс майдонидир. $\mathcal{H}$ гипотеза ўринли бўлганда у

$$\operatorname{cov}\left(\nabla(t;f),\nabla(s;g)\right)=\int\limits_{-\infty}^{\min(t,s)} fgd\mathbb{Q}-\int\limits_{-\infty}^{t} fd\mathbb{Q}\cdot\int\limits_{-\infty}^{s} gd\mathbb{Q},\;(t;f),(s;g)\in\mathcal{N}$$

ковариацияси билан $\mathbb{Q}$- Броун кўприги билан устма-уст тушади.

Учинчи бобнинг учинчи параграфида ўнгдан тасодифий цензураланиш модели кўриб чиқилган. $\mathbb{S}^{(n)}=\left\{(X_k,\delta_k),1\le k\le n\right\}$ танланма кузатилсин, бу ерда $X_k=\min(T_k,C_k)$, $\delta_k=I(T_k\le C_k)$, $\{T_k\}$ ва $\{C_k\}$ – икки боғлиқ бўлмаган т.м.нинг кетма-кетлдиклари, F ва G уларга мос умумий т.ф. лар бўлсин $\mathbb{S}^{(n)}$ танланма бўйича F ни баҳолаш масаласини кўриб чиқамиз. Абдушукуровнинг (1998) $F(t)$ учун $F_n^{RR}(t)$ баҳосини кўриб чиқамиз: $F_n^{RR}(t)=1-\left[1-H_n(t)\right]^{R_n(t)}$, бу ерда $R_n(t)=\left(N_n(t)\right)^{-1}N_{1n}(t)$,

$$N_n(t)=\int_{-\infty}^{t}\left(1-H(u-)\right)^{-1}dH_n(u), \qquad N_{1n}(t)=\int_{-\infty}^{t}\left(1-H(u-)\right)^{-1}dH_{1n}(u).$$

$X_{(1)}\le X_{(2)}\le\ldots\le X_{(n)}-\left\{X_k,\ k=\overline{1,n}\right\}$ кузатишларга мос келган вариацион қатор бўлсин. Кенгаювчан тасодифий интервал $\left(-\infty, X_{(n-k_n)}\right]$ни кўриб чиқамиз. Бу ерда бутун сонларнинг кетма-кетлиги $\{k_n, n\ge1\}$ шундайки $1\le k_n<n$ ва 1 эҳтимоллик билан куйидаги шарт бажарилган бўлсин:

(S1) барча катта n учун $k_n\ge\log n$ ва $\left\{\frac{k_n}{n},\ n\ge1\right\}$ кетма-кетлиги асимптотик ўсмайди.

$f_t(x)=f(x)I(x\le t)$ учун интеграл эмпирик жараён (12) ни тузамиз:

$$\left\{\hat{\mathcal{U}}_n(f_t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_t(x)d\left(F_n^{RR}-F\right)=\left(F_n^{RR}-F\right)f,\ (t;f)\in\mathbb{R}_T\otimes\mathcal{F}=\mathcal{N}\right\},$$

бу ерда $\mathbb{R}_T=(-\infty,T]$, $T<\inf\left\{t\in\mathbb{R}:H(t)=1\right\}$.

ККСҚ нинг куйдаги текис варианти ўринлидир.

10-теорема. (S1) шарти ўринли бўлсин. Агар ўлчовли функциялар $\mathcal{F}$ синфи учун

$$\mathcal{F}\subset\mathcal{L}_1(F),\ N_{[\,]}\left(\varepsilon,\mathcal{F},\mathcal{L}_1(F)\right)<\infty,$$

бўлса, $n\to\infty$ да

$$\left\|\hat{\mathcal{U}}_n(f_t)\right\|_{\mathcal{N}_T}^{*}\xrightarrow{\partial.x.}0.$$

Амалий қўлланилиши учун $t=T_{(n-k_n)}$ деб танлаш мумкин ва $Ef(T_1)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dF(x)$ интегрални $\int_{-\infty}^{X_{(n-k_n)}}f(x)dF_n^{RR}(x)$ статистикаси билан баҳолашимиз мумкин.

ХУЛОСА

Диссертация иши ўлчовли функциялар синфи билан индексланган эмпирик ва кетма-кет эмпирик процессларни тадқиқ қилишга бағишланган.

Тадқиқоднинг асосий натижалари қуйидагилар ҳисобланади:

1. Мос нормаллаштириш орқали боғлиқсизликнинг эмпирик жараёнлари тузилган.
2. Индикаторлар синфи билан индексланган боғлиқсизликнинг эмпирик процесслари учун якинлашиш тезлиги оптимал бўлган кучли аппроксиямация натижалари исботланган.
3. Ўлчовли функциялар синфи билан индексланган боғлиқсизликнинг эмпирик процесслари учун текис КСҚ ва МЛТ исботланган. Бу натижалар Гливенко-Кантелли ва Донскерларнинг классик теоремаларининг аналоги ҳисобланади.
4. Боғлиқсизликнинг эмпирик характеристик процессни марказлашган комплекс қийматли Гаусс процессига суст яқинлашиши хоссаси исботланган.
5. Боғлиқсизликнинг кетма-кет эмпирик процесслари учун Гливенко-Кантелли ва Донскер теоремалари текис вариантлари исботланган.
6. Асосий гипотеза ўринли эканида, Кифер-Мюллернинг икки параметрли процесси ҳосил бўладиган боғлиқсизликнинг кетма-кет эмпирик процесслари учун индексация синфи бўйича МЛТ текис вариантлари исботланган.
7. Ўнг томондан цензураланган кузатилмалар бўйича тузилган кетма-кет интеграл эмпирик процесслари учун текис ККСҚ исботланган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

БРАТОВА (КАКАДЖАНОВА) ЛЕЙЛА РЭШИТОВНА

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЭМПИРИЧЕСКИХ МЕР, ИНДЕКСИРОВАННЫХ КЛАССОМ ФУНКЦИЙ

01.01.05 – Теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ТАШКЕНТ–2021

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2021.2.PhD/FM228.

Диссертация выполнена в Институте Математики имени В.И.Романовского.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http:kengash.mathinst.uz и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу www.ziyonet.uz.

Научный руководитель:	**Абдушукуров Абдурахим Ахмедович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Рахимов Абдугофур Абдумаджидович** доктор физико-математических наук, профессор
	Сагидуллаев Калмурза Сапарбаевич кандидат физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	**Наманганский Государственный университет**

Защита диссертации состоится « 9 » декабря 2021 г. в 16:00 часов на заседании научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского АН РУз.(Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № 126). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871)-207-91-40).

Автореферат диссертации разослан « 24 » ноября 2021 г.
(протокол рассылки № 2 от « 24 » ноября 2021 г.).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

У.А.Розиков
Председатель Научного совета
по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., профессор

Ж.К.Адашев
Ученый секретарь Научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., старший
научный сотрудник

Я.М.Хусанбаев
Заместитель председателя
Научного семинара при Научном
совете по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., доцент

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Проводимые в мировом масштабе многие научно-практические исследования часто приводят к таким задачам, как анализ статистических данных в медико-биологических процессах, изучение зависимости величины наработок объектов от отказов подсистем в испытаниях объектов на продолжительность безотказной работы в инженерии, исследование зависимости величины выплат страховых компаний клиентам от страхового случая в страховом деле. Объектами исследования современной теории эмпирических процессов являются эмпирические меры, индексированные классом измеримых функций. Основу этой теории составляют равномерные по всему классу измеримых функций варианты законов больших чисел (ЗБЧ), усиленных законов больших чисел (УЗБЧ), центральных предельных теорем (ЦПТ) и другие предельные теоремы, а также их применения в асимптотических задачах математической статистики. Разработана специальная теория сходимостей в более общих пространствах с топологией порожденной равномерной метрикой при требовании определенных условий на степень сложности класса индексации (энтропийные условия). Такого рода результаты для эмпирических процессов, индексированных классом измеримых функций по сути являются обобщенными аналогами классических теорем Гливенко-Кантелли и Донскера для эмпирической функции распределения, индексированной индикатором наблюдений на некотором полуинтервале на прямой, нахождение таких обобщенных аналогов классических теорем является одной из актуальных и важных задач современной теории вероятностей и математический статистики.

В настоящее время, если эмпирический процесс индексирован классом измеримых функций, то современная энтропийная теория позволяет установить равномерные по определенному классу измеримых функций варианты УЗБЧ и ЦПТ, включающие в себя теоремы Гливенко-Кантелли и Донскера. На практике могут появляться такие экспериментальные ситуации, в которых интересующие нас случайные величины наблюдаются в сопровождении некоторых событий или еще сложнее, сами случайные величины могут быть не полностью наблюдаемыми. В связи с этим, исследование асимптотических свойств эмпирических процессов независимости, индексированных классом измеримых функций, построение критериев проверки независимости случайных величин и событий и доказательство равномерных ЗБЧ и ЦПТ по классу индексации, являются целевыми научными исследованиями.

В нашей стране особое внимание уделяется фундаментальным наукам, имеющим прикладное значение, таким как современная теория эмпирических процессов. Было постановлено, что проведение научных исследований по главным направлениям «Теории вероятностей и математической статистики» на уровне международных стандартов является основной задачей и активным направлением[1]. Исследования в области современной теории эмпирических процессов играют важную роль в исполнении постановления. Решение этих задач составляет основное содержание данной диссертационной работы.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан №УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в постановлениях №ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В.И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан» и №ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» и в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследований приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетными направлениями развития науки и технологий в республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Эмпирические процессы, индексированные классом измеримых функций, были исследованы в работах многих авторов. В частности, можно выделить работы J. Bae, S. Kim, И.С. Борисова, R.M. Dadley, P. Gaensler, W. Stute, S.B. Harris, S.W. Kim, J. Kuelbs, R.M. Dadley, D.M. Mason, M. Ossiander, D. Polland, A.W. Van der Vaart, J.A. Wellner и A.W. Varron, в которых были исследованы абстрактные эмпирические процессы индексированные классами множеств и функций, и доказаны равномерные варианты ЗБЧ и ЦПТ, являющиеся обобщениями классических теорем Гливенко-Кантелли и Донскера при определенных энтропийных условиях на классы индексации.

Применение результатов современной теории эмпирических процессов в задачах математической статистики хорошо отражены в работах D.M. Mason, A.W. Van der Vaart, J.A. Wellner. Однако, задачи возникающие при проверке зависимости случайной величины и события, и приводящие к исследованию эмпирических процессов независимости до сих пор не были изучены. Кроме того, в случае неполноты наблюдений эмпирические процессы были исследованы лишь в работах J. Bae и S. Kim с использованием множительной оценки Каплана-Мейера, которая не определена на всей прямой, что затрудняет ее использование при исследовании эмпирических процессов интегральной структуры.

Анализ имеющейся литературы показал то, что к настоящему времени не был в достаточной степени глубоко изучен асимптотический анализ

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистана от 18 мая 2017 года № 292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан».

эмпирических процессов независимости индексированных классом измеримых функций.

Связь диссертации с научно-исследовательскими работами учреждения высшего образования, где выполняется диссертация. Исследование выполнено в соответствии с планом научного проекта Ф4-01 «Разработка методов оценивания функциональных характеристик распределений и исследования асимптотических свойств статистических оценок» Национального университета Узбекистана им. Мирзо Улугбека (2012-2016 гг.), Ф4-40 «Исследования асимптотических свойств интегральных эмпирических процессов, индексированных классом измеримых функций» Национального университета Узбекистана им. Мирзо Улугбека (2017-2020 гг.).

Целью исследования являются исследования эмпирических и последовательно-эмпирических процессов независимости, интегральных последовательно-эмпирических процессов, построенных по неполным наблюдениям и доказательства для них равномерных по классам индексации законов больших чисел (ЗБЧ) и центральных предельных теорем (ЦПТ) при растущем объеме выборки.

Задачи исследования:

определение результатов сильной аппроксимации для эмпирических процессов независимости, индексированных классом индикаторов;

исследование эмпирических процессов независимости, индексированных классом измеримых функций и установление для них равномерных по классу индексации вариантов ЗБЧ и ЦПТ, включая и случай случайного объема выборки;

исследование эмпирического характеристического процесса независимости;

исследование последовательных эмпирических процессов независимости, индексированных классом измеримых функций, установление для них равномерных вариантов ЗБЧ, УЗБЧ и ЦПТ;

исследование последовательных интегральных эмпирических процессов независимости, индексированных классом измеримых функций, установлением для них равномерных ЦПТ;

исследование последовательных интегральных эмпирических процессов, построенных по цензурированным справа наблюдениям и доказательство равномерного УЗБЧ для них.

Объект исследования - эмпирические и последовательные эмпирические процессы независимости, а также последовательные эмпирические процессы, построенные по цензурированным наблюдениям.

Предмет исследования - современная теория эмпирических процессов, энтропийная теория, сходимость вероятностных мер в функциональных пространствах и теория проверки статистических гипотез.

Методы исследования. В работе использованы методы сильной аппроксимации, энтропийной теории абстрактных эмпирических процессов в функциональных пространствах, а также аналитические методы.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

доказан результат сильной аппроксимации подходящим образом нормированных эмпирических процессов независимости, индексированных классом индикаторов последовательностью броуновских мостов с оптимальной скоростью сходимости;

установлены равномерные по классу индексации варианты ЗБЧ, УЗБЧ и ЦПТ для эмпирических процессов независимости, индексированных классом измеримых функций при детерминированном и случайном объемах выборок;

доказана равномерная по всему классу индексации ЦПТ для последовательного интегрального эмпирического процесса независимости;

доказан равномерный УЗБЧ для последовательных интегральных эмпирических процессов, построенных по цензурированным справа наблюдениям.

Практические результаты исследования состоят в следующем:

построенные и исследованные эмпирические и последовательно-эмпирические процессы, индексированные классом измеримых функций, позволяют вычисления предельных законов распределений широкого класса статистик для проверки гипотезы о независимости с.в. и события, а также приближенного вычисления интегралов по классу функций индексации в случае цензурированных справа наблюдений.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием методов теории вероятностей, асимптотической теории математической статистики, а также строгостью математических доказательств.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научное значение результатов исследования заключается в том, что построены и исследованы эмпирические и последовательно-эмпирические процессы независимости, а также интегральные последовательные процессы по неполным наблюдениям. Для них доказаны равномерные по классу индексации ЗБЧ и ЦПТ.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что результаты исследования дают возможность анализа статистических данных, полученных в медико-биологических исследованиях, демографии, инженерии и страховом деле, в теории статистического оценивания и проверки гипотез.

Внедрение результатов исследования. На основании полученных результатов по асимптотическим свойствам эмпирчских мер, индексирванных классом функций:

в фундаментальном проекте ЁОТ-ФТЕХ-2018-154 “Спектры гамильтонианов и размерностей Гиббса в Z^d-сетках и G^k-деревьях Кели” для определения размерностей Гиббса, использовалось исследование последовательных интегральных эмпирических процессов, построенных по цензурированным справа наблюдениям и доказательство равномерного УЗБЧ для них (Справка Национального Университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека № 04/11-6835 от 28 октября 2021 г.). Использование научного результата позволило определить уместность частной модели пропорциональных интенсивностей Козиола-Грина в модели случайного цензурирования справа, построенной по неполной статистической выборке;

равномерные по классу индексации варианты ЗБЧ, УЗБЧ и ЦПТ для эмпирических процессов независимости, индексированных классом измеримых функций при детерминированном и случайном объемах выборок использовались в страховой компании АО "APEX LIFE" в расчетах тарифных ставок для страховых продуктов "Страхование от несчастных случаев" и "Страхование на случай инфекционных заболеваний" (Справка страховой компании АО "APEX LIFE" №ALI-01/0548 от 15 июля 2021 года). Использование научного результата помогло в расчетах тарифных ставок для страховых продуктов "Страхование от несчастных случаев" (1 класс) и "Страхование на случай инфекционных заболеваний" (2 класс), а также при оценивании страховой премии продукта в процессе анализа рисков.

Апробация результатов исследования: Основное содержание диссертации обсуждалось на 14 международных и 15 республиканских научных конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 37 научных работ, из них 8 входят в перечень научных изданий, рекомендуемых Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора философии, в том числе 4 статьи опубликованы в зарубежных журналах, 4 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, приложения А и списка использованной литературы. Объем основной части диссертации составляет 100 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и структуре диссертации.

Пусть в последовательности независимых экспериментов наблюдаются пары $\{(X_k, A_k), k \geq 1\}$, где случайные величины (с.в) X_k определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, принимают свои значения в измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$. Здесь $\mathfrak{X} \subseteq \mathbb{R}^1$ и $\mathfrak{B} = \sigma(\mathfrak{X})$- сигма-алгебра борелевских множеств из $\mathfrak{X}$. События A_k имеют общую вероятность $p = P(A_k) \in (0,1)$. Предположим, что наблюдается выборка

$\mathbb{S}^{(n)}=\{(X_k,\delta_k),1\le k\le n\}$, где $\delta_k=I(A_k)$-индикатор. Каждая пара (X_k,δ_k) индуцирует статистическую модель $(\mathfrak{X}\otimes\{0,1\},\mathcal{U},\mathcal{P})$, где $\mathcal{U}$- сигма-алгебра множеств вида произведения $\mathbb{B}\otimes\mathbb{D}$ борелевских множеств $\mathbb{B}\in\mathfrak{B}$ на подмножества $\mathbb{D}\subseteq\{0,1\}$. Распределение

$$\{\mathcal{P}(\mathbb{B}\otimes\mathbb{D})=P(X_k\in\mathbb{B},\delta_k\in\mathbb{D}),\mathbb{B}\in\mathfrak{B},\mathbb{D}\subset\{0,1\}\},$$

заданное на сигма-алгебре $\mathcal{U}$ при $\mathbb{D}=\{0,1\}$ обозначим через

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}(\mathbb{B})&=\mathcal{P}(\mathbb{B}\otimes\{0,1\})=\mathcal{P}(\mathbb{B}\otimes\{0\})+\mathcal{P}(\mathbb{B}\otimes\{1\})=\\&=\mathbb{Q}_0(\mathbb{B})+\mathbb{Q}_1(\mathbb{B}),\ \mathbb{B}\in\mathfrak{B},\end{aligned}\tag{1}$$

где $\mathbb{Q}_m(\mathbb{B})=\mathcal{P}(\mathbb{B}\otimes\{m\}),m=0,1$. Рассмотрим гипотезу $\mathcal{H}$ о независимости с.в. X_k и события A_k в каждой паре (X_k,A_k). Тогда для любого $\mathbb{B}\in\mathfrak{B}$ при справедливости гипотезы $\mathcal{H}$: $\mathbb{Q}_0(\mathbb{B})=(1-p)\mathbb{Q}(\mathbb{B})$ и $\mathbb{Q}_1(\mathbb{B})=p\mathbb{Q}(\mathbb{B})$. Введем знакопеременную меру $\Lambda(\mathbb{B})=\mathbb{Q}_1(\mathbb{B})-p\mathbb{Q}(\mathbb{B})$. Тогда с учетом (1), при справедливости гипотезы $\mathcal{H}$, приведенные два равенства становятся эквивалентными одному

$$\Lambda(\mathbb{B})=0 \text{ для любого } \mathbb{B}\in\mathfrak{B}.\tag{2}$$

Введем эмпирические аналоги мер, входящих в формулы (1) и (2) для $\mathbb{B}\in\mathfrak{B}$ по выборке $S^{(n)}$:

$$\mathbb{Q}_{mn}(\mathbb{B})=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}I(X_k\in\mathbb{B},\delta_k=m),\ m=0,1,$$

$$\mathbb{Q}_{0n}(\mathbb{B})+\mathbb{Q}_{1n}(\mathbb{B})=\mathbb{Q}_n(\mathbb{B})=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}I(X_k\in\mathbb{B}),$$

$$\Lambda_n(\mathbb{B})=\mathbb{Q}_{1n}(\mathbb{B})-p_n\mathbb{Q}_n(\mathbb{B}),\ p_n=\mathbb{Q}_{1n}(\mathfrak{X})=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\delta_k.\tag{3}$$

Заметим, что при справедливости гипотезы $\mathcal{H}$, $\Lambda_n(\mathbb{B})$ является несмещенной оценкой $\Lambda(\mathbb{B})$ для любого $\mathbb{B}\in\mathfrak{B}$. Более того, согласно УЗБЧ, при каждом $\mathbb{B}\in\mathfrak{B}$ и $n\to\infty$, $\Lambda_n(\mathbb{B})\xrightarrow{п.н.}\Lambda(\mathbb{B})$. Из теории эмпирических процессов известно, что такие результаты не имеют место равномерно по всем элементам сигма-алгебры $\mathfrak{B}$, и могут выполняться для определенного класса $\mathcal{G}$ множеств из $\mathfrak{B}$. Следовательно, исследование асимптотических (при $n\to\infty$) свойств $\mathcal{G}$ - индексированных процессов вида

$$\{\mathbb{G}_n(\mathbb{B})=a_n(\Lambda_n(\mathbb{B})-\Lambda(\mathbb{B})),\ \mathbb{B}\in\mathcal{G}\},\tag{4}$$

с возможно случайной последовательностью неотрицательных нормирующих чисел $\{a_n,n\ge1\}$, представляет интерес с точки зрения построения статистик для критериев проверки гипотезы $\mathcal{H}$. Задача становится ещё интереснее и полезнее если предельным процессом для последовательности (4) будет выступать $\mathbb{Q}-$броуновский мост, т.е. гауссовский процесс $\{\mathbb{G}(\mathbb{B}),\mathbb{B}\in\mathcal{G}\}$ с нулевым средним и ковариацией при $\mathbb{B}_1,\mathbb{B}_2\in\mathcal{G}$

$$\operatorname{cov}(\mathbb{G}(\mathbb{B}_1),\mathbb{G}(\mathbb{B}_2))=\mathbb{Q}(\mathbb{B}_1\cap\mathbb{B}_2)-\mathbb{Q}(\mathbb{B}_1)\mathbb{Q}(\mathbb{B}_2).\tag{5}$$

В данной диссертационной работе будут рассмотрены более широкие классы последовательностей эмпирических процессов, индексированных классом $\mathcal{F}$ измеримых функций $f:\mathfrak{X}\to\mathbb{R}^1$:

$$\mathbb{G}_n f=\int_{\mathfrak{X}} f\, d\mathbb{G}_n,\ \ f\in\mathcal{F}. \tag{6}$$

Заметим, что процесс (4) является специальным случаем (6), когда $\mathcal{F}$ является классом индикаторов $\mathcal{F}=\{I(B), B\in\mathcal{G}\}$. Исследуемые нами процессы вида (6) имеют случайную нормировку $a_n=\sqrt{n}\left[p_n(1-p_n)\right]^{-1}$, оптимальную в том смысле, что в пределе при справедливости гипотезы $\mathcal{H}$ получаем $\mathbb{Q}$ – броуновский мост

$$\mathbb{G}f=\int_{\mathfrak{X}} f\, d\mathbb{G} \tag{7}$$

с нулевым средним и ковариацией при $f_1,f_2\in\mathcal{F}$

$$\operatorname{cov}\left(\mathbb{G}f_1,\mathbb{G}f_2\right)=\mathbb{Q}f_1f_2-\mathbb{Q}f_1\mathbb{Q}f_2, \tag{8}$$

где

$$\mathbb{Q}f=\int_{\mathfrak{X}} f\, d\mathbb{Q}.$$

Заметим, что (5) следует из (8), если $\mathcal{F}=\{I(-\infty;t], t\in\mathbb{R}\}$-класс индикаторов. В данной диссертационной работе исследованы следующие разновидности эмпирических процессов независимости (6) для проверки гипотезы $\mathcal{H}$:

а) $\mathcal{F}$-индексированный процесс

$$\Delta_n f=\int_{\mathfrak{X}} fd\Delta_n=\left[\frac{n}{p_n(1-p_n)}\right]^{1/2}\left(\Lambda_n-\Lambda\right)\cdot f,\qquad f\in\mathcal{F}, \tag{9}$$

б) последовательный $\mathcal{D}=T\otimes\mathcal{F}$ - индексированный процесс

$$\left\{\Delta_n(s;f)=\frac{[ns]}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}\left(\Lambda_{[ns]}-\Lambda\right)f,\ \ (s;f)\in\mathcal{D}\right\}, \tag{10}$$

где $T=[0,1]$ и $[a]$- целая часть числа a;

в) последовательный $\mathcal{N}=\mathbb{R}\otimes\mathcal{F}-$ - индексированный процесс

$$\left\{\nabla_n(t;f)=\Delta_n f_t,\ \ (t;f)\in\mathcal{N}\right\}, \tag{11}$$

где $f_t(u)=f(u)\cdot I(u\le t)$.

г) в диссертации исследуется также и следующий последовательный $\mathcal{N}_T=\mathbb{R}_T\otimes\mathcal{F}-$ индексированный интегральный процесс

$$\left\{\mathcal{U}_n(f_t)=\left(F_n^{RR}-F\right)f_t=\int_{\mathfrak{X}} f_t(u)\left(F_n^{RR}-F\right)(du),\ \ (t,f)\in\mathcal{N}_T\right\}, \tag{12}$$

где $\mathbb{R}_T=(-\infty,T]$, $T<\inf\{t\in\mathbb{R}:\ \mathbb{P}(X_k\le t)=1\}$, $X_k=\min(T_k,C_k)$, $\delta_k=I(T_k\le C_k)$. При этом с.в. T_k с функцией распределения (ф.р.) F цензурируется справа независящей от нее с.в. C_k и F_n^{RR} - степенная оценка отношения рисков для ф.р. F.

Первая глава диссертации, названная **«Определения и некоторые основные результаты современной теории эмпирических процессов. результаты сильной аппроксимации классических эмпирических процессов независимости»** по большей части является вспомогательной и состоит из четырех параграфов. В §1.1 приведены известные результаты для классических эмпирических процессов, определяемых через индикаторы наблюдений и подчеркнута проблема, возникающая при рассмотрении слабой сходимости в пространстве функций без разрывов второго рода $\mathbb{D}(\mathbb{R})$ с равномерной метрикой $\rho=\|\cdot\|_\infty$. Так как $(\mathbb{D}(\mathbb{R}),\rho)$ несепарабельно, следовательно эмпирический процесс является не измеримым отображением. Это было отмечено Д.М. Чибисовым в 1965 г. Современная теория эмпирических процессов обходит эту проблему, имея в своём арсенале другие подходы для определения слабой сходимости в более общих пространствах, скажем в $\left(l^\infty(\mathcal{F}),\|z(f)\|_{\mathcal{F}}\right)$, где $l^\infty(\mathcal{F})$ – пространство всех ограниченных функций $f:\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ с супремум нормой $\|z(f)\|_{\mathcal{F}}=\sup\{z(f),f\in\mathcal{F}\}$. Этот подход опирается на понятия внешнего интеграла и внешней вероятности. Некоторые сведения и подходы современной теории стохастических сходимостей приведены в §1.2. При исследовании $\mathcal{F}$ – индексированных эмпирических процессов приходится налагать условия на степень сложности класса измеримых функций $\mathcal{F}$, называемых энтропийными условиями. В §1.3 диссертации определены эмпирические процессы, индексированные классом измеримых функций $\mathcal{F}$ и равномерные по классу $\mathcal{F}$ ЗБЧ и ЦПТ для них, называемые в современной литературе также теоремами Гливенко-Кантелли и Донскера с соответствующими энтропийными условиями. Классы $\mathcal{F}$ для которых справедливы эти условия также называют классами Гливенко-Кантелли и Донскера.

Для описания результатов §1.4 диссертации рассмотрим статистическую модель $(\mathfrak{X}\otimes\{0,1\},\mathcal{U},\mathcal{P})$, порожденную вектором (X_k,δ_k) и гипотезу $\mathcal{H}$ о независимости компонент этого вектора. В §1.4 рассматривается частный случай эмпирического процесса независимости (9), когда $\mathcal{F}$ является классом индикаторов $\mathcal{F}=\{I(-\infty,t],t\in\mathbb{R}\}$. Пусть $\mathbb{B}=(-\infty,t]$, $\mathbb{Q}_m((-\infty,t])=H_m(t)$, $\mathbb{Q}_{mn}((-\infty,t])=H_{mn}(t)$, $m=0,1$, $\mathbb{Q}((-\infty,t])=H(t)$, $\mathbb{Q}_n((-\infty,t])=H_n(t)$, $\Lambda((-\infty,t])=\Lambda(t)$, $\Lambda_n((-\infty,t])=\Lambda_n(t)$. Тогда $\Lambda(t)=H_1(t)-pH(t)$ и при справедливости гипотезы $\mathcal{H}$: $\Lambda(\mathbb{B})=0$ для любого $t\in\mathbb{R}$. В этом случае процесс (10) определяется как

$$\left\{\Delta_n(t)=\Delta_n\left((-\infty,t]\right)=\left(\frac{n}{p_n(1-p_n)}\right)^{1/2}\left(\Lambda_n(t)-\Lambda(t)\right),\quad t\in\mathbb{R}\right\},\tag{13}$$

где $p_n=\lim\limits_{t\to\infty}H_{1n}(t)$.

Согласно классической теореме Гливенко-Кантелли, легко установить, что

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{-\infty<t<\infty}\left|\Delta_n(t)\right|\xrightarrow{п.н.}0.\tag{14}$$

В качестве аппроксимирующей для процесса (13) рассмотрим последовательность гауссовских процессов

$$\left\{\Delta_n^0(t)=\left[p(1-p)\right]^{-1/2}\left(\mathbb{B}_{1n}(t)-p\mathbb{B}_n(t)-H(t)\mathbb{B}_{1n}(+\infty)\right),\ t\in\mathbb{R}\right\},$$

где $\left(\mathbb{B}_n\left(H(t_1)\right),\mathbb{B}_{1n}\left(H(t_2)\right)\right)$-векторзначные гауссовские процессы с нулевыми средними и ковариационной структурой при $t_1,t_2\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}&E\mathbb{B}_n(t_1)\mathbb{B}_n(t_2)=min(H(t_1),H(t_2))-H(t_1)H(t_2),\\&E\mathbb{B}_n(t_1)\mathbb{B}_{1n}(t_2)=min(H_1(t_1),H_1(t_2))-H(t_1)H_1(t_2),\\&E\mathbb{B}_{1n}(t_1)\mathbb{B}_{1n}(t_2)=min(H_1(t_1),H_1(t_2))-H_1(t_1)H_1(t_2).\end{aligned}\tag{15}$$

Для числа $\varepsilon>0$ рассмотрим условие

$$\frac{n}{\log n}\geq 4(1+\varepsilon)\max\left\{p^{-2},(1-p)^{-2}\right\}.\tag{16}$$

Теорема 1. Пусть выполнено условие (16). Тогда на достаточно богатом вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{A},P)$ имеет место аппроксимация

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\Delta_n(t)-\Delta_n^0(t)\right|>\mathbb{C}_0 n^{-1/2}\log n\right)\leq\mathbb{K}_0 n^{-(1+\varepsilon)},\tag{17}$$

где $\mathbb{C}_0=\mathbb{C}_0(\varepsilon,p,H)$ и $\mathbb{K}_0$(-абсолютные) положительные постоянные.

Пусть $\left\{\mathbb{B}(y),\ 0\leq y\leq 1\right\}$-броуновский мост. Аппроксимация (17) оптимальна по скорости сходимости.

Следствие 1. Из (17) по лемме Бореля-Кантелли

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\Delta_n(t)-\Delta_n^0(t)\right|\overset{п.н.}{=}\mathbb{O}\left(n^{-1/2}\log n\right).\tag{18}$$

При справедливости гипотезы $\mathcal{H}$, при каждом $n\geq 1$

$$\Delta_n^0(t)\overset{D}{=}\mathbb{B}\left(H(t)\right),\qquad t\in\mathbb{R}.\tag{19}$$

Следовательно, при $n\to\infty$ из (18) и (19) имеем аналог теоремы Донскера

$$\Delta_n(t)\overset{D}{\Rightarrow}\mathbb{B}\left(H(t)\right)\quad\text{в}\quad\mathbb{D}(\mathbb{R}).\tag{20}$$

Сходимость (20) имеет важное практическое значение. Её можно использовать для построения критериев для проверки гипотезы $\mathcal{H}$, с использованием статистик $\psi(\Delta_n)$.

Теорема 2. Пусть функционал $\psi:\mathbb{D}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица

$$\left|\psi(u_1)-\psi(u_2)\right|\le L\cdot\sup_{0\le y\le 1}\left|u_1(y)-u_2(y)\right|,$$

где $L>0$ некоторая положительная постоянная. Предположим, что с.в. $\psi(\mathbb{B}(y))$ имеет ограниченную плотность относительно меры Лебега. Тогда в условиях теоремы 1 и справедливости гипотезы $\mathcal{H}$

$$\sup_{-\infty<x<+\infty}\left|\mathbb{P}\left(\psi(\Delta_n(\cdot))\le x\right)-\mathbb{P}\left(\psi\left(\mathbb{B}(H(\cdot))\right)\le x\right)\right|=\mathbb{O}\left(n^{-1/2}\log n\right). \qquad (21)$$

Сходимость (21) позволяет находить скорость сходимости распределения статистики $\psi_n(\Delta_n)$ к распределению с.в. $\psi(\mathbb{B})$.

Вторая глава диссертации **«Эмпирические процессы независимости, заданые классом измеримых функций»** состоит из четырех параграфов.

В §2.1 исследуется $\mathcal{F}$-индексированный процесс (10) с использованием методов современной теории эмпирических процессов. Для доказательства $\mathcal{F}$-равномерных вариантов теорем Гливенко-Кантелли и Донскера определим сложность, т.е. энтропию класса $\mathcal{F}$. Пусть $\mathcal{L}_q(\mathbb{Q})$ - пространство функций $f:\mathfrak{X}\to\mathbb{R}$ с нормой

$$\|f\|_{\mathbb{Q},q}=\left(\mathbb{Q}|f|^q\right)^{1/q}=\left\{\int_{\mathfrak{X}}|f|^q d\mathbb{Q}\right\}^{1/q}.$$

Для определения энтропии класса $\mathcal{F}$ введем понятие $\varepsilon-$bracket в $\mathcal{L}_q(\mathbb{Q})$. $\varepsilon-$bracket в $\mathcal{L}_q(\mathbb{Q})$ есть пара функций $\varphi,\psi\in\mathcal{L}_q(\mathbb{Q})$ таких, что $\mathbb{Q}\left(\varphi(X)\le\psi(X)\right)=1$ и $\|\psi-\varphi\|_{\mathbb{Q},q}\le\varepsilon$, т.е. $\mathbb{Q}(\psi-\varphi)^q\le\varepsilon^q$. При этом функция покрывается ε-сетью $[\varphi,\psi]$, если $\mathbb{Q}\left(\varphi(X)\le f(X)\le\psi(X)\right)=1$. Отметим, что функции φ и ψ могут не принадлежать классу $\mathcal{F}$, однако они должны иметь конечные $\mathcal{L}_q(\mathbb{Q})$ нормы. Число ε-bracket $N_{[\,]}\left(\varepsilon,\mathcal{F},\mathcal{L}_q(\mathbb{Q})\right)$ есть наименьшее число ε-bracket в $\mathcal{L}_q(\mathbb{Q})$, необходимых для покрытия $\mathcal{F}$:

$$N_{[\,]}\left(\varepsilon,\mathcal{F},\mathcal{L}_q(\mathbb{Q})\right)=\min\Big\{k:\text{для некоторых } f_1,\dots,f_k\in\mathcal{L}_q(\mathbb{Q})$$

$$\text{таких, что } \mathcal{F}\subset\bigcup_{i,j}\left[f_i,f_j\right]:\left\|f_j-f_i\right\|_{\mathbb{Q},q}\le\varepsilon\Big\}. \qquad (22)$$

Понятно, что число (22) сходится к $+\infty$ при $\varepsilon\downarrow 0$. Число $H_q(\varepsilon)=\log N_{[\,]}\left(\varepsilon,\mathcal{F},\mathcal{L}_q(\mathbb{Q})\right)$ называется метрической энтропией класса $\mathcal{F}$ в $\mathcal{L}_q(\mathbb{Q})$. Определим также интеграл метрической энтропии

$$J^{(q)}_{[\,]}(\delta)=J_{[\,]}\left(\delta;\mathcal{F};\mathcal{L}_q(\mathbb{Q})\right)=\int_0^{\delta}\left(H_q(\varepsilon)\right)^{1/2}d\varepsilon,\qquad 0<\delta\le 1. \quad (23)$$

Интеграл (23) используется для контролирования роста метрической энтропии.

Через $N_{m[\,]}\left(\varepsilon,\mathcal{F},\mathcal{L}_q(\mathbb{Q}_m)\right)$, $H_{mq}(\varepsilon)$ и $J^{(q)}_{m[\,]}(\delta)$ обозначим числа $\varepsilon-$скобок, метрические энтропии и их интегралы, соответствующие субмерам $\mathbb{Q}_m$, $m=0,1$. Пусть $l^{\infty}(\mathcal{F})$ пространство ограниченных функций $\mathcal{Z}(f)$ на $\mathcal{F}$ с супремум-нормой $\left\|\mathcal{Z}(f)\right\|_{\mathcal{F}}=\sup\left\{\left|\mathcal{Z}(f)\right|,\ f\in\mathcal{F}\right\}$.

Следующая теорема типа Донскера налагает более сильные условия второго порядка на класс $\mathcal{F}$.

Теорема 3. Пусть класс $\mathcal{F}$ таков, что $\mathcal{F}\subset\mathcal{L}_2(\mathbb{Q}_m)$ и $J^{(2)}_{m[\,]}(1)<\infty$, $m=0,1$.

Тогда при $n\to\infty$

$$\Delta_n f\overset{D}{\Rightarrow}\Delta f \text{ в } l^{\infty}(\mathcal{F}),$$

где $\{\Delta f,\ f\in\mathcal{F}\}$ - гауссовский процесс с нулевым средним и при справедливости гипотезы $\mathcal{H}$, этот процесс совпадает с $\mathbb{Q}$-броуновским мостом $\{\mathbb{A}f,\ f\in\mathcal{F}\}$ с ковариацией при $f,g\in\mathcal{F}$

$$E\mathbb{A}f\cdot\mathbb{A}g=\mathbb{Q}fg-\mathbb{Q}f\mathbb{Q}g.$$

Заметим, что при $\mathcal{F}=\left\{I(-\infty,t],\ t\in\mathbb{R}\right\}$ процесс $\mathbb{A}f$ совпадает с $H-$броуновским мостом $\mathbb{B}\left(H(t)\right)$.

В §2.2 исследуется процесс (9) при случайном объеме выборки.

В §2.3 эмпирический процесс независимости, индексированный классом индикаторов, исследованный в §1.4 процесс (13), использован для построения критерия Колмогорова для проверки гипотезы $\mathcal{H}$ в модели случайного цензурирования справа. В этой модели эта гипотеза эквивалентна гипотезе о пропорциональности интенсивностей. На примере выборки объема $n=97$ показана состоятельность соответствующего критерия.

§2.4 диссертации посвящен исследованию эмпирических характеристических процессов независимости

$$\left\{\mathcal{D}_n(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ist}\,d\Delta_n(t),\ s\in\mathbb{R},\ n\ge 1\right\}$$

равномерно по классу индексации $\mathcal{F}=\left\{t\mapsto e^{ist}:|s|\le 1/2\right\}$. В частности, установлено, что этот процесс слабо сходится в пространстве $\mathbb{C}\left[-1/2;1/2\right]$ к центрированному комплекснозначному гауссовскому процессу, распределение которого при справедливости гипотезы $\mathcal{H}$ совпадает с распределением процесса

$$\gamma(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ist}\,dB\left(H(t)\right).$$

Третья глава диссертации, названная **«Последовательные эмпирические процессы, индексированные классом измеримых функций»** посвящена исследованию процессов (10)-(12).

В §3.1 установлены равномерные ЗБЧ и ЦПТ для процесса (10). Следующая теорема утверждает последовательный УЗБЧ равномерно по $T=[0,1]$.

Теорема 4. Предположим, что $\mathbb{Q}_m f^2<\infty,\ \ m=0,1,\ f\in\mathcal{F}$. Тогда при $n\to\infty$

$$\left\|\frac{[ns]}{n}\left(\Lambda_{[ns]}-\Lambda\right)f\right\|_T \xrightarrow{п.н} 0.$$

Следует отметить, что условие теоремы 4 не может быть ослаблено. Однако, для сходимости по вероятности достаточно выполнения условия $\mathbb{Q}_m|f|<\infty,\ \ m=0,1,\ f\in\mathcal{F}$.

Введем эмпирические поля на $\mathcal{D}=T\otimes\mathcal{F}$: $\mathbb{Y}_n(s;f)=\mathbb{Y}_{0n}(s;f)+\mathbb{Y}_{1n}(s;f)$, $\mathbb{Z}_n(s;f)=\sqrt{n}\mathbb{Y}_n(s;f)=\mathbb{Z}_{0n}(s;f)+\mathbb{Z}_{1n}(s;f)$, где

$$\mathbb{Y}_{0n}(s;f)=\frac{[ns]}{n}\sum_{k=1}^{[ns]}\left((1-\delta_k)f(X_k)-\mathbb{Q}_0 f(X_k)\right),$$

$$\mathbb{Y}_{1n}(s;f)=\frac{[ns]}{n}\sum_{k=1}^{[ns]}\left(\delta_k f(X_k)-\mathbb{Q}_1 f(X_k)\right),$$

и при $m=0,1,\ \ \mathbb{Z}_{mn}(s;f)=\sqrt{\frac{[ns]}{n}}G_{m[ns]}f,\ \ \mathbb{Z}_{mn}(1;f)=\mathbb{G}_{mn}f=\sqrt{n}\left(\mathbb{Q}_{mn}-\mathbb{Q}_m\right)f$.

Пусть $l^\infty(\mathcal{D})$ - пространство всех ограниченных функций на $\mathcal{D}$ с супремум-нормой $\|.\|_{\mathcal{D}}$.

Теорема 5. Существует универсальная константа $\mathbb{C}$, такая что для каждого $\varepsilon>0$

$$\mathbb{P}^*\left(\left\|\mathbb{Y}_n(s;f)\right\|_{\mathcal{D}}>4\varepsilon\right)\le 2\mathbb{C}\max_{m=0,1}\mathbb{P}^*\left(\left\|\mathbb{Y}_{mn}(1;f)\right\|_{\mathcal{F}}>\varepsilon\right). \tag{24}$$

Эта теорема позволяет свести $\mathcal{D}$-равномерные ЗБЧ к $\mathcal{F}$-равномерным.

Определение 1. Класс измеримых функций $\mathcal{F}$ назовем последовательно слабым классом Гливенко-Кантелли, если при $n\to\infty$

$$\left\|\mathbb{Y}_n(s;f)\right\|_{\mathcal{D}}^* \xrightarrow{p} 0.$$

Определение 2. Класс измеримых функций $\mathcal{F}$ назовем слабым Гливенко-Кантелли классом, если при $n\to\infty$

$$\mathbb{Y}_n(1;\cdot)^* \xrightarrow{p} 0,$$

где $\mathbb{Y}_n(1;\cdot)^*$ - минимальная измеримая мажоранта для $\mathbb{Y}_n(1;\cdot)$.

Определение 3. Класс измеримых функций $\mathcal{F}$ назовем последовательно-сильным Гливенко-Кантелли классом, если при $n\to\infty$

$$\left\|\mathbb{Y}_n(s;f)\right\|_{\mathcal{D}}^* \xrightarrow{п.н.} 0.$$

Определение 4. Класс измеримых функций $\mathcal{F}$ назовем сильным Гливенко-Кантелли классом, если при $n \to \infty$

$$\mathbb{Y}_n(1;\cdot)^* \xrightarrow{п.н.} 0.$$

Следствие 2. С учетом (24), имеем при каждом $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}^*\left(\left\|\mathbb{Y}_n(1;f)\right\|_{\mathcal{F}} > 4\varepsilon\right) \le \mathbb{P}^*\left(\left\|\mathbb{Y}_n(s;f)\right\|_{\mathcal{D}} > 4\varepsilon\right) \le$$
$$\le 2\mathbb{C}\max_{m=0,1}\mathbb{P}^*\left(\left\|\mathbb{Y}_{mn}(1;f)\right\|_{\mathcal{F}} > \varepsilon\right).$$

Тогда класс измеримых функций $\mathcal{F}$ является последовательно-слабым (или сильным) Гливенко-Кантелли классом тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ является слабым (или сильным) Гливенко-Кантелли классом.

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 4 для класса $\mathcal{F}$. Тогда $\mathcal{F}$ является последовательно сильным Гливенко-Кантелли классом, т.е. при $n \to \infty$

$$\left\|\frac{[ns]}{n}\left(\Lambda_{[ns]} - \Lambda\right)f\right\|_{\mathcal{D}}^* \xrightarrow{п.н.} 0.$$

Следующая теорема обобщает теорему 3.

Теорема 7. Пусть выполнены условия теоремы 3 для класса $\mathcal{F}$. Тогда при $n \to \infty$

$$\Delta_n(s;f) \overset{D}{\Rightarrow} \Delta(s;f) \quad \text{в} \quad l^\infty(\mathcal{D}),$$

где $\{\Delta(s;f),(s;f)\in\mathcal{D}\}$- гауссовское случайное поле с нулевым средним и при справедливости гипотезы $\mathcal{H}$ это поле совпадает с полем Кифера-Мюллера с ковариацией при $(s;f),(t,g)\in\mathcal{D}$:

$$\operatorname{cov}\left(\Delta(s;f),\Delta(t;g)\right) = \min(s,t)\left\{\mathbb{Q}fg - \mathbb{Q}f\mathbb{Q}g\right\}.$$

В §3.2 диссертации исследуются $\mathcal{N}$ –индексированные эмпирические процессы (11). Очевидно, эти процессы также содержат (9), так как $\nabla_n(\infty;f) = \Delta_n f$ для всех $f\in\mathcal{F}$. В банаховом пространстве $\left(l^\infty(\mathcal{N}),\|\cdot\|_{\mathcal{N}}\right)$ определим процессы

$$\xi_i(t;f) = \left[p(1-p)\right]^{-1/2}\cdot\left(\eta_i(t;f) - E\eta_i(t;f)\right),(t;f)\in\mathcal{N},$$

где $\eta_i(t;f) = f_t(X_i)(\delta_i - p)$. Тогда , $E\xi_i(t;f) = 0$ и при $(t;f),(s;g)\in\mathcal{N}$

$$\operatorname{cov}\left(\xi_i(t;f),\xi_i(s;g)\right) = \left[p(1-p)\right]^{-1}\cdot$$
$$\cdot\left\{\int_{-\infty}^{\min(t,s)} fgd\left(\mathbb{Q}_1 - 2p\mathbb{Q}_1 + p^2\mathbb{Q}\right) - \int_{-\infty}^{t} fd\Lambda\cdot\int_{-\infty}^{s} gd\Lambda\right\}. \tag{25}$$

При справедливости гипотезы $\mathcal{H}$

$$\operatorname{cov}\left(\xi_i(t;f),\xi_i(s;g)\right) = \int_{-\infty}^{\min(t,s)} fgd\mathbb{Q}, \quad (t;f),(s;g)\in\mathcal{N}. \tag{26}$$

Пусть $\{W(t;f),(t;f)\in\mathcal{N}\}$-гауссовское случайное поле с нулевым средним и ковариацией $\operatorname{cov}\left(W(t;f),W(s;g)\right) = \operatorname{cov}\left(\xi_i(t;f),\xi_i(s;g)\right)$.

Тогда это поле при справедливости гипотезы $\mathcal{H}$ имеет ковариацию (26) и следовательно является винеровским полем. Определим процессы

$$U_n(t;f)=n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}\xi_k(t;f),\ (t;f)\in\mathcal{N},$$

для которых верна $\mathcal{N}$ - равномерная ЦПТ.

Теорема 8. Пусть выполнены условия теоремы 3 для класса $\mathcal{F}$. Тогда при $n\to\infty$

$$U_n(t;f)\overset{D}{\Rightarrow}W(t;f) \text{ в } l^\infty(\mathcal{N}).$$

Пусть $\mu_0(t;f)=\mu_0\mathbb{Q}f_t$, где $\mu_0=N(0,p(1-p))$. Гауссовский процесс с $\operatorname{cov}(\mu_0(t;f),\mu_0(s;g))=p(1-p)\mathbb{Q}f_t\mathbb{Q}g_s$.

Теорема 9. Пусть выполнены условия теоремы 3 для класса $\mathcal{F}$. Тогда при $n\to\infty$

$$\nabla_n(t;f)\overset{D}{\Rightarrow}\nabla(t;f) \text{ в } l^\infty(\mathcal{N}),$$

где $\left\{\nabla(t;f)=W(t;f)+\mu_0(t;f)\cdot\left[p(1-p)\right]^{-1/2},(t;f)\in\mathcal{N}\right\}$ является гауссовским полем с нулевым средним. При справедливости гипотезы $\mathcal{H}$ оно является $\mathbb{Q}-$броуновским мостом с ковариацией при $(t;f),(s;g)\in\mathcal{N}$

$$\operatorname{cov}(\nabla(t;f),\nabla(s;g))=\int_{-\infty}^{\min(t,s)}fgd\mathbb{Q}-\int_{-\infty}^{t}fd\mathbb{Q}\cdot\int_{-\infty}^{s}gd\mathbb{Q}.$$

В последнем §3.3 рассмотрена модель случайного цензурирования справа. Пусть наблюдается выборка $\mathbb{S}^{(n)}=\{(X_k,\delta_k),1\le k\le n\}$, где $X_k=\min(T_k,C_k)$, $\delta_k=I(T_k\le C_k)$, $\{T_k\}$ и $\{C_k\}$-две независимые последовательности независимых с.в. с общими ф.р. F и G соответственно. Рассмотрим задачу оценивания F по выборке $\mathbb{S}^{(n)}$. Рассмотрим оценку $F_n^{RR}(t)$ Абдушукурова (1998) для $F(t)$: $F_n^{RR}(t)=1-\left[1-H_n(t)\right]^{R_n(t)}$, где

$$R_n(t)=(N_n(t))^{-1}N_{1n}(t),\ N_n(t)=\int_{-\infty}^{t}(1-H(u-))^{-1}dH_n(u),$$

$$N_{1n}(t)=\int_{-\infty}^{t}(1-H(u-))^{-1}dH_{1n}(u).$$

Пусть $X_{(1)}\le X_{(2)}\le\ldots\le X_{(n)}$ – вариационный ряд из наблюдений $\left\{X_k,\ k=\overline{1,n}\right\}$. Рассмотрим расширяющийся случайный интервал $\left(-\infty,X_{(n-k_n)}\right]$. Здесь последовательность целых чисел $\{k_n,n\ge1\}$ такова что $1\le k_n<n$ и для утверждений с вероятностью 1 выполнено условие:

(S1) $k_n\ge\log n$ для всех достаточно больших n и последовательность $\left\{\frac{k_n}{n},\ n\ge1\right\}$ асимптотически не возрастает.

Составим интегральный эмпирический процесс (12) при $f_t(x) = f(x)I(x \le t)$

$$\left\{ \hat{\mathcal{U}}_n(f_t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_t(x)\, d\left(F_n^{RR} - F\right) = \left(F_n^{RR} - F\right) f,\ \ (t; f) \in \mathbb{R}_T \otimes \mathcal{F} = \mathcal{N} \right\},$$

где $\mathbb{R}_T = (-\infty, T]$, $T < \inf\{t \in \mathbb{R} : H(t) = 1\}$.

Имеет место равномерный вариант УЗБЧ.

Теорема 10. Пусть справедливо условие (S1). Если класс измеримых функций $\mathcal{F}$ таков, что

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{L}_1(F),\ N_{[\ ]}\left(\varepsilon, \mathcal{F}, \mathcal{L}_1(F)\right) < \infty,$$

то при $n \to \infty$

$$\left\| \hat{\mathcal{U}}_n(f_t) \right\|_{\mathcal{N}_T}^{*} \xrightarrow{п.н.} 0.$$

Для практического использования можно полагать $t = T_{(n-k_n)}$ и оценить интеграл $Ef(T_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dF(x)$ статистикой $\int_{-\infty}^{X_{(n-k_n)}} f(x)\, dF_n^{RR}(x)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена исследованию эмпирических и последовательных эмпирических процессов, индексированных классом измеримых функций.

Основными результатами исследования являются следующие:

1. Построены эмпирические процессы независимости с подходящей случайной нормировкой.
2. Доказаны результаты сильной аппроксимации для эмпирических процессов независимости, индексированных классом индикаторов с оптимальной оценкой скорости сходимости.
3. Доказаны равномерные ЗБЧ и ЦПТ для эмпирических процессов независимости, индексированных классом измеримых функций. Эти результаты являются аналогами классических теорем Гливенко-Кантелли и Донскера. Предельный гауссовский процесс при основной гипотезе является броуновским мостом.
4. Доказано свойство слабой сходимости эмпирического характеристического процесса независимости к комплекснозначному центрированному гауссовскому процессу.
5. Доказаны равномерные варианты теорем типа Гливенко-Кантелли и Донскера для последовательных эмпирических процессов независимости.
6. Доказаны равномерные по всему классу индексации варианты ЦПТ для последовательных эмпирических процессов независимости, где в пределе при справедливости основной гипотезы получается двухпараметрический процесс Кифера-Мюллера.
7. Для последовательных интегральных эмпирических процессов, построенных по цензурированным справа наблюдениям доказан равномерный УЗБЧ.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 AT V.I.ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS

INSTITUTE OF MATHEMATICS

BRATOVA (KAKADJANOVA) LEYLA RESHITOVNA

THE ASYMPTOTIC PROPERTIES OF EMPIRICAL MEASURES INDEXED BY THE CLASS OF FUNCTIONS

01.01.05-Probability theory and mathematical statistics

ABSTRACT OF THESIS OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PHD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT–2021

The theme of thesis of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2021.2.PhD/FM228.

Thesis has been prepared at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy.

The abstract of the thesis is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific supervisor:	**Abdushukurov Abduraxim Axmedovich** Doctor of Physical and mathematical Sciences, professor
Official opponents:	**Rakhimov Abdugafur Abdumadjidovich** Doctor of Physical and mathematical Sciences, professor
	Sagidullayev Kalmurza Saparbayevich Candidate of Physical and mathematical Sciences
Leading organization:	**Namangan State university**

Defense will take place « 9 » December 2021 at 16:00 at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy. (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

Thesis is possible to review in Information-resource center at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy (is registered № 126). (Address: University str. 4b, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871)-207-91-40).

Abstract of the thesis sent out on « 24 » November 2021 year
(Mailing report № 2 on « 24 » November 2021 year)

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

U.A.Rozikov
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
DSc., professor

J.K.Adashev
Scientific secretary of Scientific
Council on award of scientific degrees,
DSc., Senior researcher

Ya.M.Khusanbayev
Deputy Chairman of Scientific seminar under
Scientific Council on award of
scientific degrees, DSc., docent

INTRODUCTION (abstract of (PhD) thesis)

The aim of the research work is investigating of empirical and sequential-empirical processes of independence, integral sequential-empirical processes constructed from incomplete observations and proofs of laws of large numbers (LLN) and central limit theorems (CLT) uniform in the indexing classes for them with an increasing sample size.

Scientific novelty of the research work is as follows:

the result of a strong approximation of appropriately normalized empirical independence processes indexed by a class of indicators by a sequence of Brownian bridges with optimal convergence rate is proved;

for empirical processes of independence, indexed by the class of measurable functions for deterministic and random sample sizes are established the uniform variants of LLN, SLLN and CLT by the indexing class;

Glivenko-Cantelli type theorems (in weak and strong forms) are proved and also for sequential-empirical processes of independence uniformly over the entire indexing class Donsker type theorems are proved;

for sequential integral empirical processes of independence constructed from right-censored observations uniformly SLLN is proved;

in all versions of the CLT, Gaussian processes with zero mean are obtained in the limit and if the hypothesis $\mathcal{H}$ is valid, coincide with the Brownian bridge.

Implementation of the research results. The obtained results were used in the following research projects:

uniform versions of limit theorems for integral empirical processes intended to test the independence of random variables and events were used in the fundamental project ЁОТ-ФТЕХ-2018-154 “Spectra of Hamiltonians and Gibbs dimensions in Z^d-grids and G^k-Keli trees” (Reference of the National University of Uzbekistan named by Mirzo Ulugbek, October 28, 2021, No 04/11-6835). The application of the scientific result made it possible to determine the relevance of the particular model of proportional hazards model (PHM) of Koziol-Green in the model of right random censoring construct by incomplete statistical sample.

the criteria constructed using empirical processes made it possible verify the independence of a random variable and event, also limit theorems for them, were used to verify the dependence of the insurance payment and the insured event in the insurance company JSC “APEX LIFE” (Reference of the insurance company JSC “APEX LIFE”, July 15, 2021, No ALI-01/0548). The application of the scientific result helped in calculation of tariff rates for insurance products “Accident insurance” (class 1) and “Insurance against infectious diseases” (class 2), also estimating the insurance premium of the product in the process of risk analysis.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion, application A and title of used literatures. The full volume of the thesis is 100 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; I part)

1. Абдушукуров А.А., Какаджанова Л.Р. Эмпирические процессы независимости, индексированные классом измеримых функций// Вестник НУУз. – 2014. – 1. – №2/1. – С. 15-20. (01.00.00; №8)
2. Abdushukurov A.A., Kakadjanova L.R. A class of special empirical processes of independence// J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. – 2015. – Vol. 8. – Iss. 2. – P. 125–133. (3. Scopus. IF=0.268)
3. Abdushukurov A.A., Kakadjanova L.R. Sequential empirical process of independence// J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. – 2018. – Vol. 11. – Iss. 5. – P. 634–643. (3. Scopus. IF=0.268)
4. Kakadjanova L.R. Empirical process of independence in presence of estimated parameter// Proceedings of the International Workshop “Applied Methods of Statistical Analysis”, AMSA-2019. – Novosibirsk, 18-19 September, 2019. – P. 96-102.
5. Abdushukurov A.A., Kakadjanova L.R. The Uniform Variants of the Glivenko-Cantelli and Donsker Type Theorems for a Sequential Integral Process of Independence// American Journal of Theoretical and Applied Statistics. – 2020. – Vol. 9. – Iss. 4. – P. 121-126. (35. Cross Ref)
6. Какаджанова Л.Р. Равномерные теоремы типа Гливенко-Кантелли и Донскера для последовательного интеграл процесса независимости// Бюллетень Института Математики. – 2020. – №2. – С. 83-91. (01.00.00; №17)
7. Kakadjanova L.R. Test statistics based on independence processes// Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences. – 2020. – Vol. 3. – Iss. 2. – P. 178-187. (01.00.00; №8)
8. Абдушукуров А.А., Какаджанова Л.Р. Эмпирические характеристические процессы независимости// Бюллетень Института Математики. – 2021. – №1. – С. 20-27. (01.00.00; №17)

II бўлим (II часть; II Part)

9. Какаджанова Л.Р. О некоторых применениях мартингалов образованных считающими процессами// Материалы Научно-практической конференции “Статистика и её применения”. – Ташкент, 17-18 октября 2012. – С. 68-74.
10. Абдушукуров А.А., Какаджанова Л.Р. Об одном классе эмпирических процессов// Тезисы докл. “XVI международная ЭМ-2012 конф. по эвентологической математике и смежным вопросам”. – Красноярск, 7-8 декабря 2012. – С. 30-31.
11. Абдушукуров А.А., Какаджанова Л.Р. Асимптотические свойства одного класса эмпирических процессов// Материалы республиканской

научно-практической конференции "Новые теоремы молодых математиков – 2013". – Наманган, 15-16 апреля 2013. – С. 15-17.

12. Абдушукуров А.А., Какаджанова Л.Р. Асимптотическая гауссовость одного класса эмпирических процессов// Тезисы докл. международной конференции "Проблемы современной топологии и ее приложения". – Ташкент, 20-24 мая 2013. – С. 100-102.
13. Абдушукуров А.А., Какаджанова Л.Р. О некоторых свойствах одного класса эмпирических процессов// "XII международная конференция по финансово-актуарной математике и эвентологии безопасности". – Красноярск, 19-20 апреля 2013. – С. 57-58.
14. Абдушукуров А.А. Какаджанова Л.Р. Эмпирические процессы независимости по классу измеримых функций// Материалы научно-практической конференции "Статистика и её применения". – Ташкент, 17-18 октября 2013. – С. 24-29.
15. Абдушукуров А.А., Какаджанова Л.Р. On special empirical processes of independence with application// "XIII Conference of financial and actuarial mathematics and eventology of multivariate statistics". – Kasnoyarsk, 18-19 апреля 2014. – P. 11-12.
16. Abdushukurov A.A., Kakadjanova L.R. On special empirical processes of independence// XXXII International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models. – Trondheim, Norway, 16 - 21 June, 2014. – P. 3-5.
17. Какаджанова Л.Р. Об одном классе эмпирических процессов независимости// Материалы научной конференции "Актуальные вопросы геометрии и ее приложения". – Ташкент, 27-28 октября 2014. – С. 126-129.
18. Абдушукуров А.А., Какаджанова Л.Р. Sequential empirical process of independence// "The XIV Conference on FAM and Eventology of Multivariate Statistics". – Krasnoyarsk, Siberia, 24-25 April, 2015. – P. 130-132.
19. Abdushukurov A.A., Kakadjanova L.R. On sequential empirical process of independence// Abstracts of the international conference "Algebra, analysis and quantum probability". – Tashkent, 10-12 September, 2015. – P. 130-132.
20. Abdushukurov A.A., Kakadjanova L.R. On sequential empirical process of independence and its applications// III Scientific-applied conference "Statistics and its applications". – Tashkent, 16-17 October, 2015. – P. 111-115.
21. Abdushukurov A.A., Kakadjanova L.R. The uniform law of large numbers for survival functional estimators in competing risks model under random censoring from both sides// Abstracts of the conference "Problems of modern topology and its applications". – Tashkent, 5-6 May, 2016. – P. 25-27.
22. Абдушукуров А.А., Какаджанова Л.Р. О равномерном законе больших чисел для оценок функционалов выживания в модели конкурирующих рисков при двухстороннем цензурировании// Материалы республиканской научно-практической конференции "Актуальные проблемы математики". – Андижан, 17 мая 2016. – С. 316-318.

23.Какаджанова Л.Р. Об основных аналогах теорем типа Гливенко-Кантели и Донскера и о некотором применении эмпирических процессов для копула функций// Труды конференции “Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий–Аль-Хорезми”. Бухара, 9-10 ноября 2016. – С. 192-196.
24.Abdushukurov A.A., Kakadjanova L.R. On M-estimation of unknown parameter in competing risks model from both sides// Abstracts of the conference “Problems of modern topology and its applications”. – Tashkent, 11-12 May, 2017. – P. 17-18.
25.Abdushukurov A.A., Kakadjanova L.R. On M-estimation of unknown parameter in competing risks model under random censoring// Abstracts of The “Second USA-Uzbekistan Conference On Analysis and Mathematical Physics”. – Urgench, 8-12 August 2017. – P. 80-81.
26.Абдушукуров А.А., Какаджанова Л.Р. Об M-оценивании неизвестного параметра в модели конкурирующих рисков при случайном цензурировании// IV научно-практическая конференция “Статистика и её применения”. – Ташкент, 19-20 октября 2017. – С. 130-133.
27.Абдушукуров А.А., Какаджанова Л.Р. Равномерная центральная предельная теорема для специального класса эмпирических процессов// Тез. докл. 3-ей “Международной Конференции по Стохастическим Методам”. – Новороссийск, 3-9 июня 2018. С. 41-44.
28.Kakadjanova L.R. Uniform limit theorems for censored integrals with application in estimation theory// “XXXV International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models”. – Perm, 24-28 September, 2018. – P. 66-68.
29.Какаджанова Л.Р. Равномерная центральная предельная теорема для специального класса эмпирических процессов// Научно-практическая конференция “Место инновационных идей и технологий в исследованиях молодых учёных”. – Ташкент, 27 апреля 2018. – С. 58-61.
30.Какаджанова Л.Р. О некотором применении равномерной предельной теоремы для цензурированного интеграла// Тезисы докладов конференции “Проблемы современной топологии и ее приложения”. – Ташкент, 11-12 сентября, 2018. – С. 57-59.
31.Kakadjanova L.R. Sequential uniform limit theorem// Republican scientific-practical conference with participation of foreign women-scientists “Actual problems of mathematics and mechanics-CAWMA-2018”. – Khiva, 25-26 October, 2018. – P. 40-42.
32.Kakadjanova L.R. On Empirical Process of Independence with Estimated Parameter and its Application to Testing of Proportional Hazards Model. // Proceedings of Scientific-applied conference “Statistics and its applications-V”. – Tashkent, 17-18 October 2019. – P. 296-304.
33.Какаджанова Л.Р. Об эмпирическом процессе независимости с оцениваемым параметром и его применении к модели пропорциональных интенсивностей// Сб. “Статистические методы оценивания и проверки гипотез”. – Пермь, 2019. – Вып. 29 – С. 30-38.

34. Какаджанова Л.Р. “Сильная аппроксимация эмпирического процесса независимости”// Тезисы докладов международной научной конференции на тему: “Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики”. – Фергана, 12-13 марта 2020. – С. 46-48.
35. Абдушукуров А.А., Какаджанова Л.Р. “Интегральные процессы независимости и равномерные предельные теоремы для них”// Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых “Современные методы математической физики и их приложения”. – Ташкент, 17-18 ноября, 2020. – Часть II. – С. 316-318.
36. Абдушукуров А.А., Какаджанова Л.Р. “Асимптотические свойства эмпиричексих процессов независимости”// Материалы научной конференции “Актуальные проблемы стохастического анализа”. – Ташкент, 20-21 февраля 2021. – С. 105-109.
37. Какаджанова Л.Р. “Об аппроксимации степенной оценки отношения рисков в модели случайного цензурирования справа”// Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых “Сарымсаковские чтения”. – Ташкент, 16-18 сентября 2021. – С. 76-77.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали» таҳририятидан 2021 йил 17 ноябрда таҳрирдан ўтказилиб, ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги матнлар ўзаро мувофиқлаштирилди.

Бичими: 84x60 1/16. «Times New Roman» гарнитураси.
Рақамли босма усулда босилди.
Шартли босма табоги: 3,25. Адади 100. Буюртма № 70/21.

Гувоҳнома № 851684.
«Tipograff» МЧЖ босмахонасида чоп этилган.
Босмахона манзили: 100011, Тошкент ш., Беруний кўчаси, 83-уй.