

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
MUQIMIY NOMIDAGI QO'QON DAVLAT PEDAGOGIKA INSTITUTI
FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI
“Himoyaga tavsiya etilsin”

Fakultet dekani
_____ t.f.n., dotsent. H.I. Xonboboyev
“ _____ ” _____ 2020-yil

5110100-matematika o'qitish metodikasi ta'lim yo'nalishi
IV-kurs 403-guruh talabasi

KARIMOVA YULDUZXON XAYRULLO QIZIning
5110100 – matematika o'qitish metodikasi
ta'lim yo'nalishi bo'yicha bakalavr darajasini olish uchun

“BIR VA IKKI O'ZGARUVCHILI FUNSIYANING UZLUKSIZLIGI
HAQIDA”
mavzusida yozgan

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Ilmiy rahbar:
_____ B.Mamadaliyev
fizika-matematika fanlari nomzodi
Qo'qonDPI matematika o'qitish
metodikasi kafedrası katta o'qituvchisi

Taqrizchilar:
_____ X.Jumaqulov
fizika-matematika fanlari nomzodi
Qo'qonDPI matematika o'qitish
metodikasi kafedrası dosenti

_____ Sh.O'rinov
Farg'ona viloyati Buvayda tumani
39-umumiy o'rta talim maktabi oliy
toifali matematika fani o'qituvchisi

"Himoyaga tavsiya etilsin"
MO'M kafedrası mudiri
_____ f.m.f.n. X. Jumaqulov
“ _____ ” _____ 2020-yil

Qo'qon-2020

Mundarija

Kirish.....	3
--------------------	----------

I bob. Bir o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi va uzilish nuqtalari

1-§. Bir o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi ta'riflari.....	5
2-§. Bir o'zgaruvchili monoton va murakkab funksiyalarning uzluksizligi.....	9
3-§. Bir o'zgaruvchili uzluksiz funksiyalar ustida amallar.....	11
4-§. Limitlarni hisoblashda funksiyaning uzluksizligidan foydalanish.....	14
5-§. Bir o'zgaruvchili uzluksiz funksiyalarning xossalari.....	17
6-§. Funksiyaning uzilish nuqtalari. Uzilishning turlari.....	22
7-§. Bir o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi va uzilishga doir misollar.....	25

II bob. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi va uzilish nuqtalari

1-§. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi ta'riflari.....	30
2-§. Ikki o'zgaruvchili uzluksiz funksiyalar ustida arifmetik amallar. Murakkab funksiyaning uzluksizligi.....	32
3-§. Ikki o'zgaruvchili uzluksiz funksiyalarning xossalari.....	35

Xulosa	39
---------------------	-----------

Foydalanilgan adabiyotlar

Glossary

“Agar mendan sizni nima qiynaydi?
deb so'rasangiz, farzandlarimizning
ta'lim va tarbiyasi deb javob beraman.”

Shavkat Mirziyoyev

Kirish

Ta'lim tizimining asosiy maqsadi, barcha sohalarda kasbiy yetuk shaxsni shakllantirish, uning bilim, ko'nikma va malakalarini shakllantirish hamda raqobatbardosh mutaxassisni tayyorlashdan iborat.

O'zbekiston Respublikasi Prezidenti Shavkat Mirziyoyevning "O'zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo'yicha harakatlar strategiyasi to'g'risidagi" farmonining to'rtinchi ijtimoiy sohani rivojlantirishning ustuvor yo'nalishlari bo'limida ta'lim va fan sohasini rivojlantirish yo'nalishida uzluksiz ta'lim tizimini yanada takomillashtirish, sifatli ta'lim xizmatlari imkoniyatlarini oshirish, mehnat bozorining zamonaviy ehtiyojlariga mos yuqori malakali kadrlar tayyorlash siyosatini davom ettirish, ta'lim muassasalarini qurish, rekonstruksiya qilish va kapital ta'mirlash, ularni zamonaviy o'quv va laboratoriya asboblari, kompyuter texnikasi va o'quv-metodik qo'llanmalar bilan jihozlash orqali ularning moddiy-texnik bazasini mustahkamlash yuzasidan maqsadli chora-tadbirlarni ko'rish, umumiy o'rta ta'lim sifatini tubdan oshirish, chet tillar, informatika hamda matematika, fizika, kimyo, biologiya kabi boshqa muhim va talab yuqori bo'lgan fanlarni chuqurlashtirilgan tarzda o'rganish, ta'lim va o'qitish sifatini baholashning xalqaro standartlarini joriy etish asosida oliy ta'lim muassasalari faoliyatining sifati hamda samaradorligini oshirish, oliy ta'lim muassasalariga qabul kvotalarini bosqichma-bosqich ko'paytirish, ilmiy-tadqiqot va innovatsiya faoliyatini rag'batlantirish, ilmiy va innovatsiya yutuqlarini amaliyotga joriy etishning samarali mexanizmlarini yaratish, oliy o'quv yurtlari va ilmiy-tadqiqot institutlari huzurida ixtisoslashtirilgan ilmiy-eksperimental laboratoriyalar, yuqori texnologiya markazlari va texnoparklarni tashkil etish masalalariga alohida to'xtalib o'tilgan.

1. Bitiruv malakaviy ish mavzuning dolzarbligi:

Funksiyalarning uzluksizligi tushunchasi matematik analizning muhim tushunchalaridan biri hisoblanadi.

Matematik analizning fundamental tushunchalaridan: funksiya hosilasi, funksiya differensial, funksiya integrali, va boshqa tushunchalarni kiritilishi, o'rganilishida bu tushunchalarning ahamiyati o'ziga hos muhimdir. Shuning uchun ham funksiyaning uzluksizligi va uzilish nuqtalari mavzusini bilish, ayniqsa bir va ikki o'zgaruvchili funksiyalar uchun uzluksizlik tushunchasini keng ma'noda, to'liq, mukammal bilish, qiyoslay olish kelgusida ixtiyoriy ko'p o'zgaruvchili

funksiyalarning uzluksizligi mavzusini o'rganishda, keyinga esa ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning hosilasi, differensial, integrali va boshqa tushunchalarni kiritish va o'rganishda katta ahamiyat kasb etadi. Bu esa mavzuga oid bilimlarni puxta, keng mazmunda va to'liq bilishni har doim, har vaqt, har bir mutaxassis uchun dolzarb va zarurligini ko'rsatadi.

Shuning uchun ham bitiruv malakaviy ish mavzusini bu mavzuda olish maqsadga muvofiqdir.

2. Bitiruv malakaviy ish mavzusining o'rganilganlik darajasi.

Bir va ikki o'zgaruvchili funksiyalar uzluksizligi va uzilishi mavzusi mavjud amaldagi darslik, o'quv va uslubiy adabiyotlarda turlicha mazmunda, turlicha hajmda va turlicha ko'rinishda amaliy misol va masalalar bilan bog'lab keltirilgan.

3. Bitiruv malakaviy ishning maqsadi

Bitiruv malakaviy ishning maqsadi, mavzuga oid bilimlarni keng mazmunda, to'liq, nazariy ma'lumotlarni amaliy masala va misollar bilan bog'lagan, ko'rsatgan holda bayon etishdan iboratdir.

4. Bitiruv malakaviy ishning ilmiy yoki uslubiy yangiligi

Bitiruv malakaviy ishning uslubiy yangiligi: bunda mavzuga oid bilimlar to'liq, mazmunan keng, bayon etish ketma-ketligi va nazariy ma'lumotlar amaliy masala va misollar bilan bog'langan, tahlil etilgan holda bayon etishga harakat qilingan.

5. Bitiruv malakaviy ishning ahamiyati.

Bitiruv malakaviy ishdan kelgusida ta'lim muassasalari talabalari va yosh pedagoglar mavzuga oid bilimlarni o'rganishda va o'rgatishda foydalanishlari mumkin.

6. Bitiruv malakaviy ishning obyekti.

Mavzuga oid darslik, o'quv, uslubiy adabiyotlar va internet ma'lumotlari.

7. Bitiruv malakaviy ishning predmeti.

Darslik, o'quv, uslubiy adabiyotlar va internet saytlaridagi funksiyaning uzluksizligi va uzilishiga oid ma'lumotlar.

8. Bitiruv malakaviy ishning tuzilishi va hajmi.

Bitiruv malakaviy ishi kirish, 2 ta bob, 10 ta paragraf, xulosa qismi va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat bo'lib, 45 betdan iboratdir.

I bob. Bir o'zgaruvchili funktsiyaning uzluksizligi va uzilish nuqtalari

1-§. Bir o'zgaruvchili funktsiyaning uzluksizligi ta'riflari

Funktsiyaning uzluksizligi matematik analiz kursining muhim tushunchalaridan bo'lib, u funktsiya limiti tushunchasi bilan bevosita bog'langan.

$X \subset R$ to'plamda $f(x)$ funktsiya aniqlangan, $a \in X$ esa X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin. $x \rightarrow a$ da $f(x)$ funktsiyaning limiti to'g'risida quyidagilardan birini aytish mumkin:

1° $x \rightarrow a$ da $f(x)$ funktsiyaning limiti mavjud, chekli va

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

2° $x \rightarrow a$ da $f(x)$ funktsiyaning limiti mavjud, chekli va

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq f(a)$$

3° $x \rightarrow a$ da $f(x)$ funktsiyaning limiti mavjud va

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty (+\infty, -\infty)$$

4° $x \rightarrow a$ da $f(x)$ funktsiyaning limiti mavjud emas.

Agar biror $f(x)$ funktsiya uchun 1°-hol o'rinli bo'lsa, bu funktsiya muhim funktsiyalardan hisoblanadi va qator xossalarga ega bo'ladi. Quyida bunday funktsiyalar uzluksiz funktsiya deb atalgan.

1°. Funktsiyaning nuqtada uzluksizligi. $X \subset R$ to'plamda $f(x)$ aniqlangan bo'lib, $a \in X$ esa X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

1-ta'rif. Agar $x \rightarrow a$ da $f(x)$ funktsiya limiti mavjud va

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

bo'lsa, $f(x)$ funktsiya a nuqtada uzluksiz deb ataladi.

Misollar. 1. $f(x) = x^2 + x + 1$ funktsiya $\forall a \in R$ nuqtada uzluksiz, chunki $x \rightarrow a$ da

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + x + 1) = a^2 + a + 1 = f(a)$$

2. $f(x) = (\operatorname{sign} x)^2$ funktsiyani qaraylik. Ravshanki, bu funktsiya

$$f(x) = (\operatorname{sign} x)^2 = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \neq 0, \\ 0, & \text{agar } x = 0 \end{cases}$$

ko'rinishda bo'lib, $\forall a \in R$ uchun

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$$

bo'ladi. Ammo $f(0) = 0$ bo'lgani uchun

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$$

Demak, $f(x) = (\operatorname{sign} x)^2$ funktsiya $a = 0$ nuqtada uzluksiz emas, boshqa hamma $a \neq 0$ nuqtalarda esa uzluksizdir. Funktsiya limitining bir-biriga ekvivalent bo'lgan Geyne va Koshi ta'riflaridan foydalanib, funktsiyaning a nuqtada uzluksizligini

quyidagicha ham ta'riflash mumkin.

2-ta'rif (Geyne). Agar $X = \{x\}$ to'plamning elementlaridan tuzilgan va a ga intiluvchi har qanday $\{x_n\}$ ketma-ketlik olinganda ham funksiya qiymatlaridan tuzilgan mos $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik hamma vaqt $f(a)$ ga intilsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz deb ataladi.

3-ta'rif (Koshi). Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki, funksiya argumenti x ning $|x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz deb ataladi.

Misol. Ushbu $f(x) = \sqrt{x+4}$ funksiyaning $x = 5$ nuqtada uzluksiz bo'lishini ko'rsating.

$\forall \varepsilon > 0$ son olib, bu ε songa ko'ra $\delta > 0$ sonni $\delta = 3\varepsilon$ deb qaralsa, u holda $|x - 5| < \delta$ bo'lganda

$$|f(x) - f(5)| = |\sqrt{x+4} - 3| = \frac{|x-5|}{\sqrt{x+4}+3} < \frac{|x-5|}{3} < \frac{\delta}{3} = \varepsilon$$

bo'ladi. Bu esa yuqoridagi ta'rifga ko'ra, $f(x) = \sqrt{x+4}$ funksiyaning $x = 5$ nuqtada uzluksiz bo'lishini bildiradi.

Koshi ta'rifidagi $|x - a| < \delta$ va $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ tengsizliklar mos ravishda

$$x \in U_\delta(a) \text{ va } f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$$

ko'rinishda ham yozilishi mumkin ekanligini hisobga olsak, atrof tushunchasi yordamida funksiyaning uzluksizligini quyidagicha ham ta'riflash mumkin.

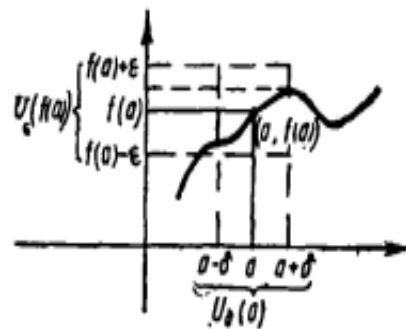
4-ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki, argument x ning barcha $x \in U_\delta(a)$ qiymatlarida funksiyaning mos qiymatlari uchun $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz deb ataladi (1-chizma).

Misol. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{agar } x \text{ — ratsional son bo'lsa,} \\ -x, & \text{agar } x \text{ — irratsional son bo'lsa} \end{cases}$$

funksiya $x = 0$ nuqtada uzluksiz. Haqiqatan, $\forall \varepsilon > 0$ son uchun $\delta > 0$ sonni $\delta = \varepsilon$ deb olinsa, u holda $\forall x \in U_\delta(0)$ lar uchun $f(x) \in U_\varepsilon(0)$ kelib chiqadi.

Ravshanki, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ o'rinli bo'lsa, ushbu $\lim_{x \rightarrow a \rightarrow 0} [f(x) - f(a)]$ limit ham o'rinli bo'ladi. Odatda $x - a$ ayirma argument orttirmasi, $f(x) - f(a)$ ayirma esa a nuqtadagi funksiyaning orttirmasi deyiladi. Ular mos ravishda Δx va Δy (yoki Δf) kabi belgilanadi:



$$\Delta x = x - a, \Delta y = \Delta f = f(x) - f(a).$$

Bu tengliklardan foydalanib yozamiz:

$$x = a + \Delta x, \Delta y = \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a).$$

Natijada $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ munosabat

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Demak, $f(x)$ funksiyaning a nuqtada uzluksizligi, bu nuqtada argumentning cheksiz kichik orttirmasiga funksiyaning ham cheksiz kichik orttirmasi mos kelishi sifatida ham ta'riflanishi mumkin.

Misol. $y = \sin x$ va $y = \cos x$ funksiyalarning $\forall a \in R$ nuqtada uzluksiz bo'lishini ko'rsatamiz. $\forall a \in R$ nuqta olib, unga Δx orttirma beraylik. Natijada $y = \sin x$ funksiya ham ushbu

$$\Delta y = \sin(a + \Delta x) - \sin a$$

orttirmaga ega bo'lib, $-\pi < \Delta x < \pi$ bo'lganda

$$\begin{aligned} |\Delta y| &= |\sin(a + \Delta x) - \sin a| = \left| 2 \cdot \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(a + \frac{\Delta x}{2} \right) \right| \leq \\ &\leq 2 \cdot \frac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x| \end{aligned}$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Bundan $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $y = \sin x$ funksiya $a \in R$ nuqtada uzluksiz. Huddi shunga o'xshash $y = \cos x$ funksiyaning ham $a \in R$ da uzluksiz bo'lishi ko'rsatiladi.

2°. Funksiyaning bir tomonli uzluksizligi. Endi funksiyaning a nuqtada bir tomondan (o'ngdan yoki chapdan) uzluksiz bo'lishi ta'riflarini keltiramiz. $X \subset R$ to'plamda $f(x)$ funksiya aniqlangan bo'lib, $a \in X$ esa X to'plamning o'ng (chap) limit nuqtasi bo'lsin.

5-ta'rif. Agar $x \rightarrow a + 0$ ($x \rightarrow a - 0$) da $f(x)$ funksiyaning o'ng (chap) limiti mavjud va

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a) \quad \left(\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a) \right). \quad (2)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada o'ngdan (chapdan) uzluksiz deyiladi.

Misol. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}, & \text{agar } x \neq 0 \\ 0, & \text{agar } x = 0 \end{cases}$$

funksiyani qaraylik. Bu funksiya uchun

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = 0 = f(0),$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = 1 \neq f(0)$$

bo'lganligi sababli, berilgan funksiya $x = 0$ nuqtada o'ngdan uzluksiz bo'lib, chapdan esa uzluksiz emas. Funksiyaning o'ng (chap) limitlarining Geyne va Koshi ta'riflaridan foydalanib, uning a nuqtada o'ngdan (chapdan) uzluksizligining Geyne va Koshi ta'riflarini keltirish qiyin emas.

Yuqorida keltirilgan ta'riflardan ko'rinadiki, agar $f(x)$ funksiya a nuqtada ham o'ngdan, ham chapdan bir vaqtda uzluksiz bo'lsa, funksiya shu *nuqtada uzluksiz* bo'ladi.

6-ta'rif . Agar $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, funksiya X to'plamda *uzluksiz* deb ataladi.

Masalan, $f(x)$ funksiya (a, b) intervalning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, funksiya shu *intervalda uzluksiz* deb ataladi.

$f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda berilgan bo'lsin. Agar bu funksiya (a, b) da uzluksiz bo'lsa hamda a nuqtada o'ngdan, nuqtada chapdan uzluksiz bo'lsa, funksiya $[a, b]$ *segmentda uzluksiz* deb ataladi.

Misol. Ushbu $f(x) = \sqrt[3]{x}$ funksiyaning R to'plamda uzluksiz bo'lishini ko'rsating.

Avval $\forall a \in R \setminus \{0\}$ nuqtada berilgan funksiyaning uzluksizligini ko'rsatamiz.
 $\forall \varepsilon > 0$ son olib, bu songa ko'ra $\delta > 0$ sonni $\delta = \frac{3}{4} \sqrt[3]{a} / \varepsilon$ deb qaraylik. Natijada $|x - a| < \delta$ bo'lganda

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a} = \frac{|x - a|}{\left| \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{a^2} \right|} = \\ &= \frac{|x - a|}{\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{a} \right)^2 + \frac{3}{4} \sqrt[3]{a^3}} \leq \frac{|x - a|}{\frac{3}{4} \sqrt[3]{a^3}} < \varepsilon \end{aligned}$$

tengsizlik kelib chiqadi. Demak, funksiya $\forall a \in R (a \neq 0)$ nuqtada uzluksiz.

Endi $a = 0$ bo'lgan holda $\forall \varepsilon > 0$ songa ko'ra $\delta > 0$ sonni $\delta = \varepsilon^3$ deb olib,

$$|f(x) - f(0)| = |\sqrt[3]{x}| < \sqrt[3]{\delta} = \varepsilon$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Bu esa berilgan funksiyaning $a = 0$ nuqtada uzluksiz bo'lishini ifodalaydi. Demak, berilgan funksiya R to'plamda uzluksiz.

2-§. Bir o'zgaruvchili monoton va murakkab funksiyalarning uzluksizligi

1°. Monoton funksiyaning uzluksizligi va uzilishi. Biz yuqorida X to'plamda berilgan ixtiyoriy $f(x)$ funksiyaning $a \in X$ nuqtadagi limiti uchun 4 ta holdan biri bo'lishi mumkinligini ko'rdik. Quyidagi teorema monoton funksiyalar uchun bu hollarning faqat ikkitasi bo'lishi mumkinligini ko'rsatadi.

$f(x)$ funksiya X oraliqda aniqlangan bo'lsin.

1-teorema. Agar $f(x)$ funksiya X oraliqda monoton funksiya bo'lsa, u shu oraliqning istalgan nuqtasida yo uzluksiz bo'ladi, yoki faqat birinchi tur uzilishga ega bo'ladi.

Isbot. $f(x)$ funksiya X oraliqda o'suvchi bo'lsin. X ning shunday a nuqtasini olaylikki, biror $\delta > 0$ uchun $(a - \delta, a + \delta) \subset X$ bo'lsin. Shartga ko'ra $\forall x \in (a - \delta, a)$ uchun $f(x) \leq f(a)$ va $\forall x \in (a, a + \delta)$ uchun $f(x) \geq f(a)$ bo'ladi. Demak, $f(x)$ funksiya $(a - \delta, a)$ da yuqoridan, $(a, a + \delta)$ da quyidan chegaralangandir.

Monoton funksiya limiti haqidagi teoremaga asosan

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = (a - 0) \leq f(a), \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = (a + 0) \geq f(a) \quad (2)$$

bo'ladi. Agar $f(a - 0) = f(a) = f(a + 0)$ bo'lsa, funksiya a nuqtada uzluksiz bo'ladi. Agar $f(a - 0) < f(a + 0)$ bo'lsa, shu nuqtada funksiya birinchi tur uzilishga ega bo'ladi.

Agar a nuqta X oraliqning chetki nuqtasi bo'lsa, yuqoridagi kelishuvimizga ko'ra, bu nuqtadagi bir tomonli limitning mavjudligini ko'rsatish kifoya.

Ravshanki, $f(x)$ funksiya X oraliqda kamayuvchi bo'lgan holda ham mulohazalarimiz xuddi yuqoridagidek bo'ladi. Teorema isbotlandi.

Endi monoton funksiyaning uzluksiz bo'lishi haqidagi teoremani keltiramiz.

2-teorema. Agar $f(x)$ funksiya X oraliqda monoton bo'lib, uning qiymatlari to'plami $Y_f = \{f(x) : x \in X\}$ biror oraliqdan iborat bo'lsa, u holda bu funksiya X da uzluksiz bo'ladi.

Isbot. Aniqlik uchun $f(x)$ funksiya X da o'suvchi bo'lsin. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya teoremaning shartlarini qanoatlantirsa ham, u biror $a \in X$ nuqtada uzluksiz bo'lmasin. U holda 1-teoremaga ko'ra u birinchi tur uzilishga ega bo'ladi. Ya'ni

$$f(a - 0) < f(a + 0)$$

bo'ladi (agar a nuqta X oraliqning chetki nuqtasi bo'lsa, (1) yoki (2) tengsizlik o'rinli bo'ladi). Natijada

$$x < a \text{ bo'lsa, } f(x) \leq f(a - 0)$$

$$x > a \text{ bo'lsa, } f(x) \geq f(a + 0)$$

bo'lib, $f(x)$ funksiya ($f(a - 0)$, $f(a + 0)$) intervaldagi $f(a)$ dan boshqa qiymatlar-ni hech bir $x \in X$ da qabul qila olmaydi. Bu esa $f(x)$ ning qiymatlari to'plami Y_f biror oraliqdan iborat ekanligiga ziddir. Demak, funksiya a nuqtada birinchi tur uzilishga ega bo'la olmaydi. Teorema isbot bo'ldi.

2°. Murakkab funksiyaning uzluksizligi. $y = f(x)$ funksiya X to'plamda, $z = \varphi(y)$ funksiya esa Y to'plamda aniqlangan bo'lib, ular yordamida $z = \varphi(f(x))$ murakkab funksiya tuzilgan bo'lsin).

3-teorema Agar $y = f(x)$ funksiya $a \in X$ nuqtada, $z = \varphi(y)$ funksiya esa a nuqtada mos kelgan $y_a = f(a)$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, $z = \varphi(f(x))$ murakkab funksiya a nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Isbot. $y = f(x)$ funksiya $a \in X$ nuqtada, $z = \varphi(y)$ funksiya esa $y_a = f(a)$ nuqtada uzluksiz bo'lsin. Funksiya uzluksizligi ta'rifiga ko'ra $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\sigma > 0$ son topiladiki, $|y - y_a| < \sigma$ tengsizlik bajarilsa, $|\varphi(y) - \varphi(y_a)| < \varepsilon$ tengsizlik ham bajariladi. Shuningdek, olingan $\sigma > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $|x - a| < \delta$ tengsizlik bajarilganda $|f(x) - f(a)| < \sigma$ tengsizlik ham bajariladi. Demak, $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $|x - a| < \delta$ tengsizlik bajarilganda

$$|\varphi(f(x)) - \varphi(f(a))| < \varepsilon$$

tengsizlik ham bajariladi. Bu esa $z = \varphi(f(x))$ funksiyaning a nuqtada uzluksiz bo'lishini bildiradi. Teorema isbot bo'ldi.

Misollar. 1. $y = a^x$ ($a > 1$) R to'plamda o'suvchi funksiya. Har bir $y > 0$ da $x = \log_a y$ ning mavjud bo'lishidan berilgan funksiyaning qiymatlari $y = \{a^x: x \in R\} = (0, +\infty)$ oraliqni tashkil etishi kelib chiqadi. Demak, $y = a^x$ funksiya R da uzluksiz.

2. $y = \log_a x$ ($a > 1$). Bu funksiya $X = (0, +\infty)$ oraliqda o'suvchi. Uning qiymatlari $Y = \{\log_a x: x \in (0, +\infty)\} = R$ ni to'ldiradi, chunki har bir $y \in R$ uchun $x = a^y$ mavjud. Demak, $y = \log_a x$ ($a > 1$) funksiya, $(0, +\infty)$ da uzluksiz.

Yuqorida keltirilgan ko'rsatkichli va logarifmik funksiylarning $0 < a < 1$ bo'l-ganda uzluksiz ekanligi ham 2-teoremadan kelib chiqadi.

3. $y = x^\mu$ ($x > 0$) darajali funksiyaning qaraylik. Bu funksiyaning

$$y = x^\mu = a^{\mu \log_a x} \quad (a > 0, a \neq 1)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin. Agar $\mu \log_a x$ funksiya $(0, +\infty)$ da, a^x funksiya esa R da uzluksiz ekanini e'tiborga olsak, u holda murakkab funksiyaning uzluksizligi haqidagi teoremaga asoslanib $y = x^\mu$ funksiyaning $(0, +\infty)$ oraliqda uzluksiz bo'lishini topamiz.

3-§. Bir o'zgaruvchili uzluksiz funksiyalar ustida amallar

Endi uzluksiz funksiyalarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbatini uzluksizlikka tekshiramiz.

1-teorema. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $X \subset R$ to'plamda aniqlangan bo'lib, ularning har biri $a \in X$ nuqtada uzluksiz bo'lsa,

$$f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)} (g(x) \neq 0, \forall x \in X)$$

funksiyalar ham shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Isbot. Bu teoremaning isboti limitga ega bo'lgan funksiyalar ustida arifmetik amallar haqidagi teoremlardan bevosita kelib chiqadi. Masalan, ikkita uzluksiz funksiya ko'paytmasi yana uzluksiz funksiya bo'lishini ko'rsataylik. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar a nuqtada uzluksiz bo'lsin:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a).$$

U holda

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a) \cdot g(a)$$

bo'lib, undan $f(x) \cdot g(x)$ funksiyaning a nuqtada uzluksiz bo'lishi kelib chiqadi.

Eslatma. Ikkita funksiya yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbati uzluksiz bo'lishidan bu funksiyalarning har birining uzluksiz bo'lishi kelib chiqavermaydi.

Misol. Quyidagi $f(x) = x$ va

$$g(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiyalar ko'paytmasidan tuzilgan $\varphi(x) = x \cdot \cos \frac{1}{x}$ funksiya R da uzluksiz bo'lgan holda $g(x)$ funksiya $x = 0$ nuqtada uzluksiz emas.

Yuqorida keltirilgan teorema qo'shiluvchilar hamda ko'paytuvchilar soni ixtiyoriy chekli bo'lgan holda ham o'rinli bo'lishini ko'rsatish qiyin emas. Endi teoremaning qo'llanilishiga misollar keltiraylik.

Misollar.

1. $y = ax^n$, $a = \text{const}$, $n \in N$ funksiya R da uzluksiz.

Ravshanki, $f(x) = x$ funksiya R da uzluksiz. Agar berilgan funksiyaning

$$y = a \cdot x^n = a \cdot \underbrace{x \cdot x \dots x}_{n \text{ ta}}$$

ko'rinishda ifodalash mumkinligini e'tiborga olsak, 1-teoremaga ko'ra $y = ax^n$ funksiyaning R da uzluksizligi kelib chiqadi.

Keltirilgan misol va 3-teoremadan butun va kasr ratsional funksiyalar

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

$$Q(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m}$$

$(a_0, a_1, \dots, a_n; b_0, b_1, \dots, b_m)$ – o'zgarmas sonlar, $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$) o'z aniqlanish to'plamlarida uzluksiz bo'lishi kelib chiqadi.

2. $y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x, y = \sec x, y = \operatorname{cosec} x$ funksiyalar o'z aniqlanish sohalarida uzluksiz. Haqiqatan, ular uzluksiz bo'lgan $\sin x$ va $\cos x$ funksiyalarning nisbati orqali ifodalanadi.

3. Ushbu

$$f(x) = \sqrt{x + 11}$$

funksiyaning $x_0 = 5$ nuqtada uzluksiz ekanini ko'rsating.

$\forall \varepsilon > 0$ son olib, bu ε songa ko'ra $\delta > 0$ sonni $\delta - 4\varepsilon$ bo'lsin deb qaralsa, u holda $|x - 5| < \delta$ bo'lganda

$$|f(x) - f(5)| = |\sqrt{x + 11} - 4| =$$

$$\frac{|x - 5|}{\sqrt{x + 11} + 4} < \frac{|x - 5|}{4} < \frac{\delta}{4} = \varepsilon$$

bo'ladi.

Bu esa qaralayotgan funksiyaning $x_0 = 5$ nuqtada uzluksiz ekanini bildiradi.

4. Ushbu

$$f(x) = x \cdot D(x)$$

funksiyaning $x_0 = 5$ nuqtadagi uzluksiz ekanini ko'rsating.

Bu yerda $D(x)$ – Dirixle funksiyasi.

Ixtiyoriy nolga intiluvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlik olamiz. U xolda mos $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik

$$f(x_n) = x_n \cdot D(x_n)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Ma'lumki, Dirixle funksiyasi chegaralangan. $\{x_n\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik bo'lgani uchun $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik ham cheksiz kichik bo'ladi. Demak, $n \rightarrow \infty$ da $f(x_n) \rightarrow 0$ bo'ladi. Bu esa qaralayotgan funksiyaning $x_0 = 0$ nuqtada uzluksiz ekanini bildiradi.

$$\text{Agar } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

munosabat o'rinli bo'lsa, ushbu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

munosabat ham o'rinli bo'ladi. Odatda $x - x_0$ ayirma **argument orttirmasi**, $f(x) - f(x_0)$ esa **funksiyaning** x_0 nuqtadagi **orttirmasi** deyiladi.

Ular mos ravishda Δx va Δy ($\Delta f(x_0)$) kabi belgilanali.

$$\Delta x = x - x_0, \Delta y = \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0).$$

Demak, $x = x_0 + \Delta x$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.
 Natijada, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ munosabat

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = 0$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Shunday qilib, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligi, bu nuqtada argumentning cheksiz kichik orttirmasiga funksiyaning ham cheksiz kichik orttirmasi mos kelishi sifatida ham ta'riflanishi mumkin.

5. Ushbu

$$f(x) = \cos x$$

funksiyaning $\forall x_0 \in R$ nuqtada uzluksiz bo'lishini ko'rsating.

$\forall x_0 \in R$ nuqtani olib, unga Δx orttirma beraylik. Natijada $f(x) = \cos x$ funksiya ham ushbu

$$\Delta y = \cos(x_0 + \Delta x) - \cos x_0$$

orttirmaga ega bo'lib, $-\pi < \Delta x < \pi$ bo'lganda

$$\begin{aligned} |\Delta y| &= |\cos(x_0 + \Delta x) - \cos x_0| = \\ &= \left| 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \sin \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) \right| \leq 2 \cdot \frac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x| \end{aligned}$$

munosabatga ega bo'lamiz. Bundan esa $\Delta x \rightarrow 0$ da $\Delta y \rightarrow 0$ bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, $f(x) = \cos x$ funksiya $x_0 \in R$ nuqtada uzluksiz.

4-§. Limitlarni hisoblashda funksiyaning uzluksizligidan foydalanish

Ma'lumki, funksiyalarning limitlarini hisoblash muhim, shu bilan birga anchagina mashaqqatli ishdur.

Funksiyalarning uzluksiz bo'lishi esa, ularning limitini topishda qo'l keladi. $y = f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda aniqlangan bo'lib, a nuqta X ning limit nuqtasi bo'lsin. $z = \varphi(y)$ funksiya esa $Y \subset R$ to'plamda aniqlangan. Bu funksiyalar yordamida $z = \varphi(f(x))$ murakkab funksiya tuzilgan bo'lsin.

Agar $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = y_a$ mavjud bo'lib, $z = \varphi(y)$ funksiya y_a nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(f(x))$ mavjud va

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(f(x)) = \varphi(y_a)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Haqiqatan, $x \rightarrow a$ da $f(x) \rightarrow y_a$ va $f(y)$ funksiya y_a nuqtada uzluksiz, ya'ni $y \rightarrow y_a$, da $\varphi(y) \rightarrow \varphi(y_a)$. U holda murakkab funksiyaning limiti xaqidagi teorema asosan $x \rightarrow a$ da $\varphi(f(x))$ funksiya limitga ega va

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_a} \varphi(y) = \varphi(y_a)$$

tengliklar o'rinli. Bu tengliklardan uzluksiz funksiyalar uchun funksiya ishorasi ostida limitga o'tish qoidasi kelib chiqadi:

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(f(x)) = \varphi(\lim_{x \rightarrow a} f(x)).$$

Xususan, $f(x) = x$ bo'lsa,

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \varphi(\lim_{x \rightarrow a} x) = \varphi(a).$$

Misol. 1. Quyidagi

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \mu x)^{\frac{1}{x}}, \quad 0 \neq \mu \in R$$

limitni xisoblang. Biz buni $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \mu x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + \mu x)^{\frac{1}{\mu x}} \right]^\mu$ ko'rinishda yozib olamiz. Ravshanki, $x \rightarrow 0$ da $y = \mu x \rightarrow 0$ bo'ladi. Bundan quyidagini topamiz:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + \mu x)^{\frac{1}{\mu x}} \right]^\mu = \lim_{y \rightarrow 0} \left[(1 + y)^{\frac{1}{y}} \right]^\mu = e^\mu.$$

Shu misoldan foydalanib $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n$ limitni ham hisoblash mumkin. Unda $0 \neq x \in R$. Ravsanki, $\frac{x}{n} \in R$ da va $n \rightarrow \infty$ da $\frac{x}{n} = y \rightarrow 0$.

Shuning uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = \lim_{y \rightarrow 0} \left[(1 + y)^{\frac{1}{y}} \right]^x = \left[\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} \right]^x = e^x$$

Quyidagi limitlarni hisoblang.

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$ (birinchi muhim limit, $a > 0, a \neq 1$);
 b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ (ikkinchi muhim limit, $a > 0, a \neq 1$);
 v) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ (uchinchi muhim limit)

Bu munosabatlarni isbotlashda logarifmik, ko'rsatkichli va darajali funksiyalar-ning uzluksizligidan foydalanamiz. Darxaqiqat,

a) holda

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right] = \log_a e;$$

b) holda esa $a^x - 1 = t$ deb, $x \rightarrow 0$ da $t \rightarrow 0$ bo'lishini e'tiborga olib topamiz:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \frac{1}{\log_a \left[\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} \right]} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a;$$

Nihoyat, v) holda $(1+x)^\alpha - 1 = t$ deb, so'ngra $\alpha = \frac{\ln(1+t)}{\ln(1+x)}$ va $x \rightarrow 0$ da $t \rightarrow 0$

bo'lishini hisobga olsak,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{t}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{t}{\ln(1+t)} \cdot \frac{\ln(1+t)}{\ln(1+x)} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} \right] = \alpha$$

kelib chiqadi. Ikkita $f(x)$ va $g(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda aniqlangan, a nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

Agar

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \ (b > 0), \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$$

limitlar o'rinli bo'lsa, ushbu

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = b^c$$

limit ham o'rinli bo'ladi.

Haqiqatan, $[f(x)]^{g(x)}$ funksiyani

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

ko'rinishda ifodalab, so'ngra ko'rsatkichli hamda logarifmik funksiyalarning uzluksizligidan foydalanib, quyidagini topamiz:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} [g(x) \cdot \ln f(x)]} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot \ln \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]} = \\ &= e^{c \ln b} = e^{\ln b^c} = b^c \end{aligned}$$

Odatda $[f(x)]^{g(x)}$ funksiya *darajali-ko'rsatkichli* funksiya deb ataladi.

Darajali-ko'rsatkichli $[f(x)]^{g(x)}$ funksiya quyidagi

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.

hollarda avval qarab o'tganimizga o'xshash, aniqmasliklarni ifodalaydi. $x \rightarrow a$ da

$[f(x)]^{g(x)}$ funksiya 1) holda 1^∞ , 2) holda 0^0 , 3) holda ∞^0 ko'rinishdagi aniqmasliklar deyiladi.

Misol. Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a > 0, b > 0)$$

limitni hisoblang.

$\left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$ ifoda $x \rightarrow 0$ da 1^∞ ko'rinishdagi aniqmaslikdan iborat. Uni ochish uchun limit ishorasi ostidagi funksiyaning qulay, ko'rinishda yozib, limitga o'tamiz:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow +0} \left[\frac{(a^x - 1) + (b^x - 1)}{2} \right]^{\frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \left\{ \left[1 + \frac{(a^x - 1) + (b^x - 1)}{2} \right]^{\frac{2}{(a^x - 1) + (b^x - 1)}} \right\}^{\frac{a^x - 1 + b^x - 1}{2x}} = \\ &= \left\{ \lim_{x \rightarrow +0} \left[1 + \frac{(a^x - 1) + (b^x - 1)}{2} \right]^{\frac{2}{a^x - 1 + b^x - 1}} \right\}^{\lim_{x \rightarrow +0} \frac{a^x - 1 + b^x - 1}{2x}} = \\ &= e^{\frac{1}{2}(\ln a + \ln b)} = \sqrt{ab} \end{aligned}$$

Demak, $x \rightarrow 0$ da berilgan funksiyaning limiti $\sqrt{ab}$ ga teng.

5-§. Bir o'zgaruvchili uzluksiz funksiyalarning xossalari

Biz ushbu paragrafda nuqtada hamda oraliqda uzluksiz bo'lgan funksiyalarning xossalari o'rganamiz.

1. Nuqtada uzluksiz bo'lgan funksiyaning xossalari (lokal xossalar).

$f(x)$ funksiya X to'plamda aniqlangan bo'lsin. X dan biror x_0 nuqta olib, bu nuqtaning shu to'plamga tegishli bo'lgan yetarli kichik atrofni qaraylik.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya qaralayotgan x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsin. Bu holda ta'rifga ko'ra $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(x_0)$ o'rinli, ya'ni $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chekli limitga ega bo'ladi. Chekli limitga ega bo'lgan funksiyalarning xossalariidan foydalanib, x_0 nuqtada uzluksiz bo'lgan funksiyalarning ham quyidagi xossalariini ayta olamiz.

1° Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda x_0 nuqtaning yetarli kichik atrofida funksiya chegaralangan bo'ladi.

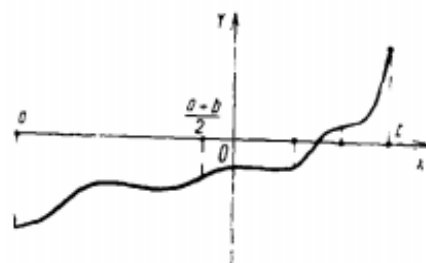
2° Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz va $f(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda x_0 nuqtaning yetarli kichik atrofida olingan barcha x nuqtalarda funksiya qiymatlarining ishorasi $f(x_0)$ ning ishorasi kabi bo'ladi.

1- natija. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lib, bu nuqtaning yetarli kichik atrofida olingan x nuqtalarda uning qiymatlari musbat ham manfiy ishorali bo'laversa, funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymati nolga teng bo'ladi.

3° Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $\forall \varepsilon > 0$ uchun x_0 nuqtaning shunday yetarli kichik atrofi topiladiki, bu atrofdan olingan ixtiyoriy x', x'' nuqtalar uchun $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ bo'ladi.

Haqiqatan, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lganligidan $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham, $\frac{\varepsilon}{2}$ ga ko'ra shunday $\delta > 0$

topiladiki, $|x - x_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik bajariladi. x_0 nuqtaning yetarli kichik atrofida olingan x', x'' nuqtalar uchun ham



$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(x'') - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizliklar o'rinli bo'lib, undan $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ tengsizlik kelib chiqadi.

Funksiyaning nuqta atrofida xossalari uning *lokal xossalari* deyiladi.

2. Segmentda uzluksiz bo'lgan funksiyalarning xossalari (global xossalar).

Endi X to'plam sifatida $[a, b]$ segmentni, ya'ni

$$X = \{x: x \in R, a \leq x \leq b\} = [a, b]$$

to'plamni olib, bu to'plamda aniqlangan va uzluksiz bo'lgan, funksiyalarning xossalari o'rganamiz.

1- teorema. (Bolsano – Koshining birinchi teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lib segmentning chetki nuqtalarida har xil ishorali qiymatlarga ega bo'lsa, u holda shunday c ($a < c < b$) nuqta topiladiki, u nuqtada funksiya nolga aylanadi: $f(c) = 0$.

Bu teorema geometrik nuqtai nazardan, uzluksiz egri chiziqli OX o'qining bir tomonidan ikkinchi tomoniga o'tishda uni albatta kezib o'tishini ifodalaydi.

Isbot. $f(x)$ funksiya yopiq $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'lib, $f(x) < 0$, $f(x) > 0$ bo'lsin ($f(a) > 0$, $f(b) < 0$ bo'lgan hol ham shunga o'xshash qaralishi mumkin). $[a, b]$ segmentning $\frac{a+b}{2}$ nuqtasini olib, bu nuqtada $f(x)$ funksiyaning qiymatini qaraymiz. Agar $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ bo'lsa, $c = \frac{a+b}{2}$ deb olinib, unda $f(c) = 0$ va demak, teorema isbot etilgan bo'ladi. Agar $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$ bo'lsa, $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ segmentlardan chetki nuqtalarida $f(x)$ funksiya turli ishorali qiymatga ega bo'ladiganini olib, uni $[a_1, b_1]$ orqali belgilaymiz. Demak, $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$

bo'lib, $[a_1, b_1]$ segmentning uzunligi esa $a_1 - b_1 = \frac{a-b}{2}$ bo'ladi. So'ng $[a_1, b_1]$ segmentning $\frac{a_1+b_1}{2}$ nuqtasini olib, bu nuqtada $f(x)$ ning qiymatini qaraymiz. Agar $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$ bo'lsa, $c = \frac{a_1+b_1}{2}$ deb olinib, unda $f(c) = 0$ va bu holda teorema isbot bo'ladi. Agar $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) \neq 0$ bo'lsa, $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$, $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ segmentlardan chetki nuqtalarida $f(x)$ funksiya turli ishorali qiymatga ega bo'ladiganini olib, uni $[a_2, b_2]$ deymiz. Bu holda $f(a_2) < 0$, $f(b_2) > 0$ va $[a_2, b_2]$ segmentning uzunligi $a_2 - b_2 = \frac{b-a}{2^2}$ bo'ladi. Bu jarayonni davom ettiraveramiz. Natijada yo chekli sondagi qadamdan keyin segmentlarning o'rtalarini ifodalovchi nuqta sifatida shunday c nuqtaga kelamizki, u nuqtada funksiya nolga aylanadi, demak teorema isbot bo'ladi, yoki jarayon cheksiz davom etib, ichma-ich joylashgan

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$$

segmentlar ketma-ketligi hosil bo'ladi. Bu ketma-ketlikning umumiy hadi $[a_n, b_n]$ da $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$ bo'lib, $[a_n, b_n]$ ning uzunligi $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$ da) bo'ladi.

Ichma-ich joylashgan segmentlar prinsipiga asosan shunday c nuqta mavjudki

$$\lim a_n = \lim b_n = c \quad (c \in (a, b)).$$

$f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ da uzluksiz bo'lishidan foydalanib, topamiz:

$$a_n \rightarrow c \Rightarrow f(a_n) \rightarrow f(c) \text{ va } f(a_n) < 0 \Rightarrow f(c) \leq 0,$$

$$b_n \rightarrow c \Rightarrow f(b_n) \rightarrow f(c) \text{ va } f(b_n) > 0 \Rightarrow f(c) \geq 0.$$

Keyingi tengsizliklarda esa $f(c) = 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

Isbot etilgan teorema ko'pgina tadbirlarga ega, jumladan u ayrim tenglamalar yechimining mavjudligini ko'rsatish va ularni takroriy yechish imkonini beradi. Masalan,

$$f(x) = \sin x - x + 1 = 0$$

tenglamani qaraylik. Ravshanki, $f(x) = \sin x - x + 1$ R da uzluksiz. Jumladan, bu funksiya $[0, \pi]$ segmentda ham uzluksiz bo'lib, segmentning chetki nuqtalarida: $f(0) = 1 > 0$, $f(\pi) = -\pi + 1 < 0$.

1-teoremaga asosan $f(x)$ funksiya $[0, \pi]$ oraliqning hech bo'lmaganda bitta nuqtasida nolga aylanadi, ya'ni berilgan $\sin x - x + 1 = 0$ tenglamaning $[0, \pi]$ oraliqda yechimi mavjud. $[0, \pi]$ segmentni $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ va $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ segmentlarga ajratib, $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ ning chetki nuqtalarida $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - \frac{\pi}{2} > 0$, $f(\pi) < 0$ bo'lishini topamiz.

Demak, $\sin x - x + 1 = 0$ tenglamaning yechimi $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ oraliqda yotadi. Bu jarayonni davom ettiraverish natijasida $\sin x - x + 1 = 0$ tenglamaning taqribiy yechimi kerakli aniqlikda topilishi mumkin.

2- teorema (Bolsano – Koshining ikkinchi teoremasi). *Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lib, uning chetki nuqtalarida $f(a) = A$, $f(b) = B$ qiymatlarga ega va $A \neq B$ bo'lsa A va B orasida har qanday C son olinganda ham a bilan b orasida shunday c nuqta topiladiki,*

$$f(c) = C$$

bo'ladi.

Isbot. Aniqlik uchun $A < B$ bo'lsin, ixtiyoriy $C \in (A, B)$ olaylik. Yordamchi $\varphi(x) = f(x) - C$ funksiya tuzamiz. Ravshanki, bu funksiya segmentda uzluksiz va bu segmentning chetki nuqtalarida $\varphi(a) = A - C < 0$, $\varphi(b) = B - C > 0$ qiymatlarini qabul qiladi. U holda Bolsano – Koshining birinchi teoremasiga ko'ra a bilan b orasida shunday c nuqta topiladiki, $\varphi(c) = 0$, ya'ni $f(c) - C$ bo'ladi. Bu esa teoremani isbotlaydi.

2- natija. Agar $f(x)$ funksiya biror X oraliqda (yopiq yoki ochiq, chekli yoki cheksiz) aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, u holda funksiyaning barcha qiymatlari to'plami biror Y oraliqdan iborat bo'ladi.

Isbot. $Y = \{f(x): x \in X\}$ to'plamning aniq quyi chegarasi m , aniq yuqori chegarasi M bo'lsin:

$$m = \inf_{x \in X} Y, \quad M = \sup_{x \in X} Y$$

Bunda m va M lar chekli son yoki ∞ bo'lishi mumkin. Aniq chegaralarning ta'rifiga binoan, $\forall x \in X$ uchun $m \leq f(x) \leq M$ bo'ladi. Endi $f(x)$ funksiya qiymatlari

to'plami (m, M) intervalni tashkil etishini ko'rsatamiz. Bu intervalda ixtiyoriy C sonni olaylik: $m < C < M$. U holda shunday A va B sonlar topiladiki,

$$m \leq A < C < B \leq M$$

bo'ladi. Bu A va B sonlarni $A = f(a)$, $B = f(b)$ deb qarash mumkin ($a \in X$, $b \in X$). Isbotlangan teorema asosan a bilan b orasida shunday c son mavjudki, $f(c) = C$ bo'ladi. Olingan C son (m, M) intervaldagi ixtiyoriy son bo'lganidan, bu intervaldagi barcha qiymatlarni $f(x)$ funksiya qabul qilishi kelib chiqadi.

3-natija Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, funksiya shu segmentda chegaralangan bo'ladi.

Isbot. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni $[a, b]$ da uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiya unda chegaralanmagan bo'lsin. U holda $[a, b]$ da shunday x_n nuqta topiladiki, shu nuqta uchun $|f(x_n)| > n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) tengsizlik o'rinli bo'ladi. $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan. Bolsano – Veyershtrass teoremasiga asosan yaqinlashuvchi qismaniy $\{x_{n_k}\}$ ketma-ketlik ajratish mumkin: $x_{n_k} \rightarrow x_0$; $x_0 \in [a, b]$. Endi $f(x)$ funksiya

$[a, b]$ da uzluksiz bo'lganidan $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$ bo'ladi. Bu esa $|f(x_n)| > n$ ya'ni $f(x_n) \rightarrow \infty$ deb qilgan farazimizga ziddir. Demak, funksiya $[a, b]$ da chegaralangan. Teorema isbot bo'ldi.

1-eslatma. Keltirilgin teorema shartidagi oraliqning segment bo'lishi muhimdir. Bu shart bajarilmasa, teorema o'rinli bo'lmasdan qolishi mumkin. Masalan, $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiya $(0, 1)$ oraliqda aniqlangan va uzluksiz bo'lsa ham, u shu oraliqda chegaralanmagan.

2-eslatma. Funksiyaning biror oraliqda chegaralangan bo'lishidan, uning shu oraliqda uzluksiz bo'lishi har doim ham kelib chiqavermaydi. Masalan, Dirixle funksiyasi $\chi(x)$ chegaralangan bo'lsa ham u uzluksiz emas.

3-teorema (Veyershtrassning ikkinchi teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, funksiya shu segmentda o'zining aniq yuqori hamda aniq quyi chegaralariga erishadi, ya'ni $[a, b]$ da shunday x_1 va x_2 nuqtalar topiladiki,

$$f(x_1) = \sup_{x \in [a, b]} \{f(x)\}, \quad f(x_2) = \inf_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

Isbot. Veyershtrassning birinchi teoremasiga ko'ra $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da chegaralangan. Modomiki, $\{f(x): x \in [a, b]\}$ to'plam chegaralangan ekan, unda bu to'plamning aniq yuqori hamda aniq quyi chegaralari mavjud. Biz ularni

$$\sup_{x \in [a, b]} \{f(x)\} = M, \quad \inf_{x \in [a, b]} \{f(x)\} = m$$

orqali belgilaylik.

Endi $[a, b]$ segmentda $f(x)$ funksiya M va m qiymatlarni qabul qiladigan

nuqtalar mavjudligini ko'rsatamiz. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda o'zinichg aniq yuqori chegarasi M ga erishmasin. U holda $\forall x \in [a, b]$ lar uchun $f(x) < M$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Quyidagi

$$\varphi(x) = \frac{1}{M-f(x)}$$

funksiyani qaraylik. Ravshanki, bu funksiya $[a, b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz. Veyershtrassning birinchi teoremasiga ko'ra $\varphi(x)$ funksiya $[a, b]$ da chegaralangan. Demak, $\forall x \in [a, b]$ lar uchun ushbu

$$\varphi(x) = \frac{1}{M-f(x)} \leq \alpha \quad (\alpha = \text{const}, \alpha > 0)$$

tengsizlik o'rinli. Bundan

$$f(x) \leq M - \frac{1}{\alpha}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa $M = \sup \{f(x)\}$ ekaniga zid. Demak, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda o'zining aniq yuqori chegarasiga erishadi, ya'ni $[a, b]$ da shunday x_1 nuqta mavjudki,

$$f(x_1) = \sup_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$$

bo'ladi. Xuddi shunga o'xshash $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda o'zining aniq quyi chegarasiga erishishi ko'rsatiladi. Teorema isbot bo'ldi.

3-eslatma. Agar $f(x)$ funksiya ochiq (a, b) oraliqda (intervalda) aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, funksiya shu oraliqda o'zining aniq chegaralariga erishmasligi mumkin. Masalan, $f(x) = x^2$ funksiya $(0, 1)$ intervalda uzluksiz. Bu funksiya uchun $\sup x^2 = 1$, $\inf x^2 = 0$ bo'ladi. Ammo funksiya o'zining $\sup$ va $\inf$ qiymatlariga $(0, 1)$ intervalda erishmaydi.

Odatda funksiyaning biror oraliqdagi xossalari uning *global xossalari* deb ataladi.

4-teorema (teskari funksiyaning mavjudligi). *Agar $f(x)$ funksiya X oraliqda aniqlangan, uzluksiz va qat'iy o'suvchi (qat'iy kamayuvchi) bo'lsa, bu funksiya qiymatlaridan iborat $Y = \{f(x): x \in X\}$ oraliqda teskari $f^{-1}(y)$ funksiya mavjud bo'lib, u uzluksiz va qat'iy o'suvchi (qat'iy kamayuvchi) bo'ladi.*

Isbot. $f(x)$ funksiya X oraliqda uzluksiz bo'lgani uchun uning qiymatlari Y oraliqni tutash to'ldiradi. Demak, har bir $y_0 \in Y$ uchun X da shunday x_0 topiladiki, $f(x_0) = y_0$ bo'ladi. Bunday $y_0 \in Y$ ga mos keladigan x_0 nuqta X da yagona bo'ladi. Haqiqatan ham, agar X oraliqda x_0 dan katta yoki kichik bo'lgan x' nuqta olinadigan bo'lsa, $f(x)$ funksiya o'suvchi bo'lgani uchun $f(x') = y'$ ham y_0 dan katta yoki kichik bo'ladi. Shunday qilib Y oraliqdan olingan har bir y ga X da unga mos keladigan yagona shunday x topiladiki $f(x) = y$ bo'ladi. Demak, Y oraliqda teskari $x = f^{-1}(y)$ funksiya mavjud. Endi $x = f^{-1}(y)$ funksiya-ning Y da qat'iy o'suvchi

bo'lishini, ya'ni $y_1 \in Y, y_2 \in Y, y_1 < y_2$ bo'lganda $x_1 < x_2$ tengsizlik o'rinli ($x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2)$), bo'lishini ko'rsatamiz.

Teskarisini faraz qilaylik: $y_1 < y_2$ bo'lganda $x_1 > x_2$ bo'lsin. U holda $y = f(x)$ funksiya X da qat'iy o'suvchiligidan $f(x_1) > f(x_2)$, ya'ni $y_1 > y_2$ bo'ladi. Bu esa $y_1 < y_2$ deb olinishiga ziddir. Demak, $x = f^{-1}(y)$ funksiya Y da qat'iy o'suvchi.

Nihoyat, monoton funksiyaning uzluksizligi haqidagi teorema ko'ra, $x = f^{-1}(y)$ funksiya Y oraliqda uzluksiz bo'ladi.

$y = f(x)$ funksiya X da kamayuvchi bo'lganda ham teorema yuqoridagidek isbotlanadi. Teorema isbot bo'ldi.

6-§. Funksiyaning uzilish nuqtalari. Uzilishning turlari

Dastlab $x \rightarrow a$ da $f(x)$ funksiyaning limiti uchun 4°- hol yuz berishini ta'kidlab, 1°-holni o'rgandik. Bunda biz uzluksiz funksiyalarga ega bo'ldik. Endi 2°–4°– hollarni ham o'rganamiz.

$f(a)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda aniqlangan bo'lib, $a \in X$ nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

1-ta'rif. Agar $x \rightarrow a$ da $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud, chekli bo'lib, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq f(a)$ yoki $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty (+\infty, -\infty)$ bo'lsa yoki funksiyaning limiti mavjud bo'lmasa, unda $f(x)$ funksiya a nuqtada *uzilishga ega* deyiladi.

Funksiyaning a nuqtada uzilishga ega bo'ladigan hollarini alohida qarab o'tamiz.

1° $x \rightarrow a$ da $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud, chekli bo'lib, u $f(a)$ ga teng bo'lmasin:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq f(a) \quad (b - \text{chekli son}).$$

Bu holda, ravshanki, X da aniqlangan ushbu

$$f^*(x) = \begin{cases} f(a), & x \neq a \\ b, & x = a \end{cases}$$

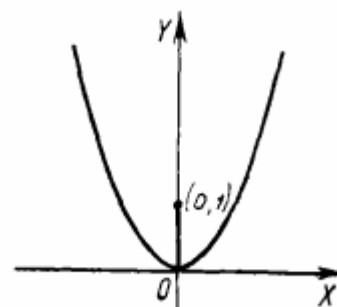
Funksiya a nuqtada uzluksiz bo'ladi:

$$\lim_{x \rightarrow a} f^*(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b = f^*(a).$$

Shunday qilib, berilgan funksiya a nuqtadagi qiymatini o'zgartirib ($f(a)$ o'rniga b olib) a nuqtada uzluksiz funksiyaga ega bo'lamiz. Shuning uchun, bu xolda $f(x)$ funksiya *bartaraf qilish mumkin bo'lgan uzilishga ega* deyiladi.

Masalan, ushbu

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa} \\ 1, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$



funksiya uchun $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \neq f(0)^*$ munosabat o'rinli. Demak, bu funksiya $x = 0$ nuqtada bartaraf qilish mumkin bo'lgan uzilishga ega.

Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \cos \frac{1}{x}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiya uchun $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cos \frac{1}{x} = 0$. Agar bu funksiyaning $x = 0$ nuqtadagi qiymati $f(0) = 0$ deb olinsa, funksiya bu nuqtada uzluksiz bo'lib qoladi.

2° Endi $x \rightarrow a$ da $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud emas deylik.

Bu holat, avvalo, $x \rightarrow a$ da $f(x)$ funksiyaning o'ng va chap limitlari mavjud va chekli bo'lib, $f(a - 0) \neq f(a + 0)$ bo'lganda ro'y beradi. Shu holda funksiya a nuqtada *birinchi tur uzilishga ega* deyiladi va $f(a + 0) - f(a - 0)$ ayirma uning a nuqtadagi *sakrashi* deyiladi.

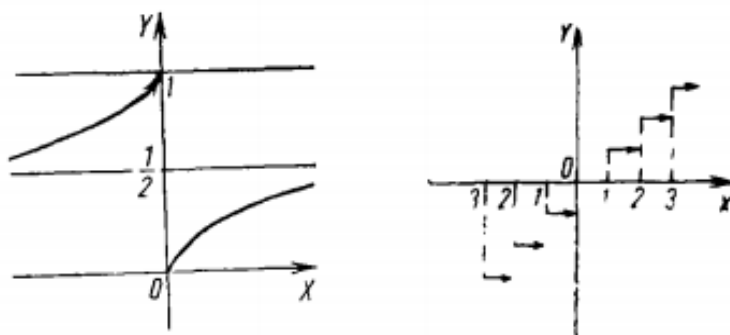
$x \rightarrow a$ da $f(x)$ ning limiti mavjud bo'lmaydigan boshqa hamma hollarda funksiya a nuqtada *ikkinchi tur uzilishga ega* deyiladi.

Masalan, 1) ushbu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+2^x}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiya uchun

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 1.$$



Demak, berilgan funksiya $x = 0$ nuqtada birinchi tur uzilishga ega. Uning 0 nuqtadagi sakrashi -1 ga teng.

2) Quyidagi

$$f(x) = [x]$$

funksiya $x = p$ (p — butun son) nuqtada birinchi tur uzilishga ega, chunki:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow p-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow p-0} [x] &= p - 1, \\ \lim_{x \rightarrow p+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow p+0} [x] &= p. \end{aligned}$$

3) Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{agar } x > 0 \\ -x, & \text{agar } x \leq 0 \end{cases}$$

funksiya $x = 0$ nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega, chunki $x \rightarrow +0$ da $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ funksiyaning limiti mavjud emas.

4) Dirixle funksiyasi

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x - \text{irratsional son bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x - \text{ratsional bo'lsa} \end{cases}$$

R to'plamning har bir a nuqtasida ikkinchi tur uzilishga ega, chunki $\chi_1^1 \rightarrow a$ da $\chi(x)$ funksiyaning o'ng limiti ham, chap limiti ham mavjud emas.

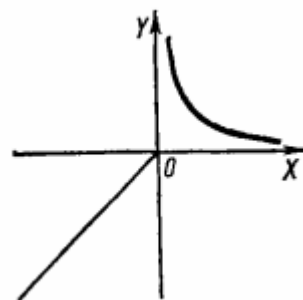
5) Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{agar } x > 0 \text{ bo'lsa} \\ 0, & \text{agar } x \leq 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiya uchun

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 0$$

bo'lib, bu funksiya $x = 0$ nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega bo'ladi.



6) Ushbu $f(x) = \operatorname{tg} x$ funksiyaning $x = \frac{\pi}{2}$ nuqtadagi o'ng va chap limitlari

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} (x) = +\infty$$

bo'ladi. Demak, $f(x) = \operatorname{tg} x$ funksiya $x = \frac{\pi}{2}$ nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega.

3° Endi $x \rightarrow a$ da

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty (+\infty, -\infty)$$

bo'lsin. Unda funksiyaning o'ng va chap limitlari ham $\infty (+\infty, -\infty)$ bo'ladi. Bu holda ham $f(x)$ funksiya a nuqtada *ikkinchi tur uzilishga* ega deyiladi.

Masalan, ushbu

$$f(x) = \frac{1}{x^2} (x \neq 0), \quad f(0) = 0$$

funksiyaning $x \rightarrow 0$ dagi limiti $+\infty$ dir

$$\text{bu holda } \left(\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x^2} = +\infty \right).$$

Demak, berilgan funksiya $x = 0$ nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega.

Shunday qilib, $f(x)$ funksiya $a \in X$ nuqtada

- 1) uzluksiz bo'ladi yoki
- 2) bartaraf kilish mumkin bulgan uzilishga ega bo'ladi, yoki
- 3) birinchi tur uzilishga ega bo'ladi, yoki
- 4) ikkinchi tur uzilishga ega bo'ladi.

1-eslatma. Agar $a \in X$ nuqta X to'plamning bir tomonli (ya'ni o'ng yoki chap) limit nuqtasi bo'lsa, yuqoridagidek funksiyaning bu nuqtada uzilishi (o'ngdan yoki chapdan uzilishi) ta'rifi keltiriladi.

2-eslatma. $F(x)$ funksiya X to'plamda aniqlangan, uzluksiz bo'lib, $a \in X$ nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin. Bu holda funksiyaning a nuqtadagi qiymati aniqlanmagan bo'lsa ham $x \rightarrow a$ da $f(x)$ ning limiti mavjud va chekli, ya'ni $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ (b — chekli son) bo'lishi mumkin. Bu limit munosabatdan foydalanib $X \cup \{a\}$ to'plamda uzluksiz bo'lgan funksiya tuzish mumkin. Haqiqatan, agar

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{agar } x \in X \text{ bo'lsa,} \\ b, & \text{agar } x = a \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

deb olinsa, natijada $X \cup \{a\}$ to'plamda uzluksiz $f^*(x)$ funksiya hosil bo'ladi.

Masalan, $y = \frac{\sin x}{x}$ funksiya $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ da aniqlangan va uzluksiz.

Ma'lumki,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Bu munosabatdan foydalanib tuzilgan ushbu

$$f^*(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{agar } x \neq 0, \\ 1, & \text{agar } x = 0 \end{cases}$$

funksiya R da uzluksiz bo'ladi.

7-§. Bir o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi va uzilishga doir misollar

1-misol. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa} \\ 1, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiya uchun $x_0 = 0$ bartaraf qilish mumkin bo'lgan uzilish nuqtasi ekanini ko'rsataylik. Ma'lumki,

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \text{ bo'lib, } x \rightarrow 0 \text{ da}$$

$x \sin \frac{1}{x}$ funksiya 0 ga intiladi.

Demak, $x \rightarrow 0$ da $f(x)$ funksiya chekli limitga ega, lekin bu limit $f(0) = 1$ bilan teng emas, ya'ni $x_0 = 0$ qaralayotgan funksiya uchun bartaraf qilish mumkin bo'lgan uzilish nuqtasidir. Bunda $f(0) = 0$ deb olish bilan, funksiya uzilishidan qutulindi.)

2-misol. Ushbu

$$f(x) = [x]$$

funksiyaning $x_0 = 2$ nuqtada birinchi tur uzilishga ega ekanini ko'rsating.

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} [x] = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} [x] = 2.$$

Demak, funksiya $x_0 = 2$ nuqtada birinchi tur uzilishga ega.

Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{agar } x - \text{ratsional bo'lsa,} \\ -1, & \text{agar } x - \text{irratsional bo'lsa.} \end{cases}$$

funksiyaning $\forall x_0 \in R$ nuqtadagi limiti mavjud emas, demak, bu funksiya x_0 nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega.

$f(x) = \text{ctg } x$ funksiyaning $x_0 = \pi$ nuqtadagi o'ng va chap limitlari

$$\lim_{x \rightarrow \pi+0} \text{ctg } x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pi-0} \text{ctg } x = +\infty,$$

bo'ladi. Demak, $f(x) = \text{ctg } x$ funksiya $x_0 = \pi$ nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega.

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar X to'plamda aniqlangan bo'lib, $x_0 \in R$ nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin. Agar $f(x)$ va $g(x)$ x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda

$$\begin{aligned} &f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x), \\ &\frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0, \forall x \in X) \end{aligned}$$

funksiyalar ham x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

3-misol. Ushbu

$$f(x) = 3x^3 + \sin^2 x$$

funksiyaning $X = R$ da uzluksizligini ko'rsating.

$\varphi(x) = x$, $g(x) = \sin x$ funksiyalar R da uzluksiz. $f(x)$ funksiyaning

$$f(x) = 3 \cdot x \cdot x \cdot x + \sin x \cdot \sin x$$

ko'rinishda yozamiz. U holda uzluksiz funksiyalar ustida arifmetik amallarga ko'ra $f(x)$ funksiyaning R da uzluksizligi kelib chiqadi.

4-misol. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{1+x}, & \text{agar } x \neq -1 \text{ bo'lsa,} \\ 2, & \text{agar } x = -1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

$$f(-1-0) = \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{|x|}{1+x} = -\infty;$$

$$f(-1+0) = \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{|x|}{1+x} = +\infty;$$

Demak, funksiya $x = -1$ nuqtada 2-tur uzilishga ega.

5-misol. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 5, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Agar $x \neq 0$ bo'lsa, $f(x) = \frac{1}{|x|}$ bo'lib, funksiya uzluksiz.

Bu funksiya uchun $x = 0$ da o'ng va chap limitlarni tekshiramiz:

$$f(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{|x|} = +\infty;$$

$$f(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{|x|} = +\infty;$$

funksiya ikkinchi tur uzilishga ega.

6-misol. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{|x|}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 5, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Agar $x \neq 0$ bo'lsa, $f(x) = -\frac{1}{|x|}$ bo'lib, funksiya uzluksiz.

$$f(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} \left(-\frac{1}{|x|}\right) = -\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{|x|} = -\infty;$$

$$f(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \left(-\frac{1}{|x|}\right) = -\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{|x|} = +\infty;$$

Bu funksiya ham $x = 0$ ikkinchi tur uzilishga ega.

7-misol.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{agar } x \neq 2 \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } x = 2 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Bu funksiya $x = 2$ nuqtada bartaraf qilish mumkin bo'lgan uzilish nuqtaga ega, chunki

$$f(2-0) = 5; f(2) = 1; f(2+0) = 5;$$

8-misol.

$$f(x) = \frac{x}{(2+x)^2}.$$

Bu funksiya $x = -2$ nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega, chunki

$$f(-2-0) = -\infty; f(-2+0) = -\infty; \text{ ya'ni } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$$

9-misol.

$$f(x) = \frac{1}{(2+x)^2}.$$

Bu funksiya ham $x = -2$ nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega, chunki

$$f(-2-0) = \infty; f(-2+0) = \infty; \text{ ya'ni } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \infty$$

10-misol.

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 7, & \text{agar } x \leq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } x > 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Bu funksiya ham $x = 0$ nuqtada birinchi tur uzilishga ega, chunki

$$f(0-0) = 7; f(0+0) = 1; \text{ ya'ni } f(0-0) \neq f(0+0)$$

11-misol.

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & \text{agar } x \leq -3 \text{ bo'lsa,} \\ -\frac{1}{3+x}, & \text{agar } x > -3 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Bu misolda $f(-3-0) = 10$; $f(-3+0) = -\infty$; demak, $x = -3$ nuqta ikkinchi tur uzilish nuqtasi.

12-misol.

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{agar } x \leq 0 \text{ bo'lsa,} \\ e^{\frac{1}{x}}, & \text{agar } x > 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Bu misolda $f(0-0) = 2$; $f(0+0) = \infty$; demak, $x = 0$ nuqta ikkinchi tur uzilish nuqtasi.

13-misol.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2+x}{x-1}, & \text{agar } x < 1 \text{ bo'lsa,} \\ 1+x, & \text{agar } x \geq 1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Bu misolda $f(1-0) = -\infty$; $f(1+0) = 2$; demak, $x = 1$ nuqta ikkinchi tur uzilish nuqtasi.

14-misol.

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{1-x}}, & \text{agar } x < 1 \text{ bo'lsa,} \\ e^{x^2}, & \text{agar } x \geq 1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Bunda $f(1-0) = +\infty$; $f(1+0) = e$; demak, $x = 1$ nuqta ikkinchi tur uzilishga ega.

Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidegi funksiyalarning uzluksizligini ko'rsating:

1. $f(x) = \sin x$.

2. $f(x) = x^4$.

3. $f(x) = \sqrt{x}$.

4. $f(x) = |x|$.

5. $f(x) = \operatorname{sh} x$.

6. $f(x) = xe^{\frac{\sin x}{x}}$

7. $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada bir tomondan (o'ngdan va chapdan) uzluksiz bo'lishi ta'riflarini keltiring.

8. $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi zaruriy va yetarli shartlarini ifodalang.

9. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $|f(x)|$ funksiyaning ham shu nuqtada uzluksiz bo'lishini isbotlang.

10. $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksizligining geometrik talqinini ifodalang.
11. Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz bo'lsa, $\varphi(x) = f(bx + c)$ ($b \neq 0$) funksiya $\frac{a-c}{b}$ nuqtada uzluksiz bo'lishini isbotlang.

Quyidagi funksiyalarning uzilish nuqtalarini aniqlang:

$$12. f(x) = \frac{|x+2|}{x+2}.$$

$$13. f(x) = \operatorname{sgn}(e^x - 1).$$

$$14. f(x) = x - [x].$$

$$15. f(x) = \frac{1}{x-[x]}.$$

$$16. f(x) = \left[\frac{1}{x} \right].$$

$$17. f(x) = \frac{|x-1|}{x^2-x^3}.$$

$$18. f(x) = \operatorname{sgn} \sin x.$$

$$19. f(x) = \frac{x}{\sin x}.$$

$$20. f(x) = \frac{1}{\cos x}$$

$$21. f(x) = e$$

$$22. f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{agar } x > 0 \text{ bo'lsa,} \\ x^2, & \text{agar } x \leq 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

23. Faqat birgina $x_0 \in R$ nuqtada uzluksiz, boshqa nuqtalarda uzluksiz bo'lmagan funksiyalarga misol keltiring.

24. $f(x)+g(x)$ funksiya birinchi tur uzilishga ega bo'lsa, u holda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning kamida bittasi birinchi tur uzilishga ega bo'lishi shartmi ?

II bob. Ikki o'zgaruvchili funktsiyaning uzluksizligi va uzilish nuqtalari

1-§. Ikki o'zgaruvchili funktsiyaning uzluksizligi ta'riflari

1°. Funktsiya uzluksizligi ta'rif. $M \subset R^2$ to'plamda $f(x) = f(x_1, x_2)$ funktsiya berilgan bo'lib, $a \in M$ ($a = (a_1, a_2)$) nuqta esa M to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

1-ta'rif. Agar $x \rightarrow a$ da $f(x)$ funktsiyaning limiti mavjud bo'lib,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$
$$\left(\lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ x_2 \rightarrow a_2}} f(x_1, x_2) = f(a_1, a_2) \right) \quad (1)$$

bo'lsa, $f(x)$ funktsiya a nuqtada uzluksiz deb ataladi.

2- ta'rif. (Geyne ta'rif). Agar $M \subset R^2$ to'plamning nuqtalaridan tuzilgan, a ($a \in M$) ga intiluvchi har qanday $\{x^{(n)}\}$ ketma-ketlik olinganda ham, mos $\{f(x^{(n)})\}$ ketma-ketlik hamma vaqt $f(a)$ ga intilsa, $f(x)$ funktsiya a nuqtada uzluksiz deb ataladi.

3- ta'rif. (Koshi ta'rif). Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ topilsaki, ushbu $\rho(x, a) < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x \in M$ nuqtalarda

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funktsiya a nuqtada uzluksiz deb ataladi.

Atrof tushunchasi yordamida funktsiyaning uzluksizligini quyidagicha ham ta'riflash mumkin.

4-ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ topilsaki, barcha $x \in U_\delta(a) \cap M$ nuqtalarda $f(x)$ funktsiyaning qiymatlari $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$, ya'ni

$$x \in U_\delta(a) \cap M \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$$

bo'lsa, $f(x)$ funktsiya a nuqtada uzluksiz deb ataladi.

$f(x) = f(x_1, x_2)$ funktsiyaning $a = (a_1, a_2)$ nuqtada uzluksizligini funktsiya orttirmasi yordamida ham ta'riflash mumkin.

Funktsiya argumentlarining orttirmalari

$$\Delta x_1 = x_1 - a_1, \Delta x_2 = x_2 - a_2$$

ga mos ushbu

$$f(x) - f(a) = f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2)$$

ayirma $f(x)$ funktsiyaning a nuqtadagi to'liq orttirmasi deb ataladi va Δf yoki $\Delta f(a)$ kabi belgilanadi:

$$\Delta f(a) = f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2) - f(a_1, a_2).$$

Quyidagi

$$f(a_1 + \Delta x_1, a_2) - f(a_1, a_2).$$

$$f(a_1, a_2 + \Delta x_2) - f(a_1, a_2).$$

ayirmalar $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi xususiy orttirmalari deyiladi va ular mos ravishda $\Delta_{x_1} f, \Delta_{x_2} f$ kabi belgilanadi.

Yuqoridagi (1) limit munosabatdan topamiz:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = 0$$

Natijada (1) tenglik quyidagi

$$\lim_{x \rightarrow a} \Delta f(a) = 0 \text{ yani } \lim_{\substack{\Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \Delta x_2 \rightarrow 0}} \Delta f(a) = 0$$

ko'rinishga keladi. Demak, $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi uzluksizligi

$$\lim_{x \rightarrow a} \Delta f(a) = 0 \quad \left(\lim_{\substack{\Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \Delta x_2 \rightarrow 0}} \Delta f(a) = 0 \right)$$

kabi ham ta'riflanishi mumkin ekan.

5-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya M ($M \subset R^m$) to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, funksiya shu M to'plamda uzluksiz deb ataladi.

1-misol. Ushbu

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 \cdot x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \text{agar } x_1^2 + x_2^2 \neq 0 \\ 0 & , \text{ agar } x_1^2 + x_2^2 = 0 \end{cases}$$

funksiya uzluksizlikka tekshirilsin

Ravshanki. bu funksiya R^2 da aniqlangan. Aytaylik $(x_1^0, x_2^0) \neq (0,0)$ bo'lsin. Limit xossalardan foydalanib topamiz:

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_1^0 \\ x_2 \rightarrow x_2^0}} f(x_1, x_2) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_1^0 \\ x_2 \rightarrow x_2^0}} \frac{x_1 \cdot x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} x_1 \cdot \lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} x_2}{\lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_1^0 \\ x_2 \rightarrow x_2^0}} \sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{x_1^0 \cdot x_2^0}{\sqrt{x_1^{0^2} + x_2^{0^2}}} = f(x_1^0, x_2^0).$$

$(x_1^0, x_2^0) = (0,0)$ bo'lgan holda

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} f(x_1, x_2) = 0 = f(0,0)$$

bo'ladi

Demak, berilgan funksiya R^2 da uzluksiz.

6-ta'rif. Agar $x \rightarrow a$ da $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud bo'lmasa, yoki

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

yoki funksiyaning limiti mavjud, chekli bo'lib,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a \neq f(a)$$

bo'lsa, funksiya a nuqtada uzilishga ega deb ataladi.

2-misol. Ushbu

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1^2 + x_2^2, & \text{agar } (x_1, x_2) \neq (0,0) \text{ bo'lsa} \\ 1, & \text{agar } (x_1, x_2) = (0,0) \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiya uzluksizlikka tekshirilsin.

Bu funksiya R^2 to'plamda berilgan bo'lib, uning $(0,0)$ nuqtadagi limiti

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} f(x_1, x_2) = 0 \neq f(0,0) = 1$$

bo'ladi. Demak, berilgan funksiya $(0, 0)$ nuqtada uzilishga ega, qolgan barcha nuqtalarda uzluksiz.

3-misol. Quyidagi

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 - 1}, & \text{agar } x_1^2 + x_2^2 \neq 1 \text{ bo'lsa} \\ 0, & \text{agar } x_1^2 + x_2^2 = 1 \text{ bo'sa} \end{cases}$$

funksiya uzluksizlikka tekshirilsin.

Bu funksiya $\{(x_1, x_2) \in R^2, x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ to'plamning har bir nuqtasida uzilishga ega bo'ladi, chunki $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^0, x_2^0) (x_1^{0^2} + x_2^{0^2} = 1)$ da $f(x_1, x_2)$ funksiyaning chekli limiti mavjud emas.

2-§. Ikki o'zgaruvchili uzluksiz funksiyalar ustida arifmetik amallar. Murakkab funksiyaning uzluksizligi

Endi uzluksiz funksiyalarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbatining uzluksizligi masalasini o'rganamiz.

1-teorema. Agar $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalarning har biri $M \subset R^m$ to'plamda berilgan bo'lib, ular $x \in M$ nuqtada uzluksiz bo'lsa,

$$f_1(x) + f_2(x), f_1(x) - f_2(x), f_1(x) \cdot f_2(x), \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \text{ hamda } (f_2(a) \neq 0).$$

funksiyalar ham shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Isbot. Bu teoremaning isboti, aslida limitga ega bo'lgan funksiyalar ustida arifmetik amallar haqidagi ma'lumotlardan bevosita kelib chiqadi. Uni limitga ega bo'lgan funksiyaning xossalari hamda berilgan funksiyaning nuqtada uzluksizligidan ham isbotlash mumkin. Biz quyida ikki funksiya nisbatining uzluksiz bo'lishini ko'rsatamiz. $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyaning xar biri a nuqtada uzluksiz bo'lib, $f_2(a) \neq 0$ bo'lsin. Ravshanki, $x \rightarrow a$ da $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalar mos ravishda $f_1(a), f_2(a)$ limitlarga ega:

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = f_1(a), \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = f_2(a) \quad (f_2(a) \neq 0)$$

U holda a nuqtaning yetarlicha kichik atrofi $U_{\delta_1}(a) = \{x \in R^2: \rho(x, a) < \delta_1\}$ da $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalar chegaralangan bo'ladi:

$$m_1 < f_1(x) < M_1, m_2 < f_2(x) < M_2, x \in U_{\delta_1}(a)$$

Bunda m_1, M_1, m_2, M_2 – o'zgarmas sonlar. Ikkinchi tomondan $f_2(a) \neq 0$ bo'lganligi sababli shu a nuqtaning yetarli kichik atrofi $U_{\delta_2}(a) = \{x \in R^2: \rho(x, a) < \delta_2\}$ bo'ladi.

Endi ushbu

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{f_1(a)}{f_2(a)} (x \in U_{\delta_2}(a))$$

ayirmani qaraylik. Uni quyidagicha yozib olamiz:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{f_1(a)}{f_2(a)} = \frac{f_1(x)}{f_2(a)f_2(x)} [f_2(a) - f_2(x)] + \frac{1}{f_2(a)} [f_1(x) - f_1(a)]$$

Agar $\delta' = \min \{\delta_1, \delta_2\}$ deb olsak, unda $\forall x \in U_{\delta'}(a)$ uchun

$$\left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{f_1(a)}{f_2(a)} \right| \leq \left| \frac{M_1}{m_2 \cdot f_2(a)} \right| \cdot |f_2(a) - f_2(x)| + \frac{1}{|f_2(a)|} |f_1(x) - f_1(a)| \quad (1)$$

funksiyalarning a nuqtada uzluksizligiga asosan, $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham $\frac{|f_2(a)|}{2} \cdot \varepsilon$

ε ga ko'ra shunday $\delta'' > 0$ topiladiki, $\forall x \in U_{\delta''}(a)$ uchun

$$|f_1(x) - f_1(a)| < \frac{|f_2(a)|}{2} \cdot \varepsilon \quad (2)$$

shuningdek, o'sha $\varepsilon > 0$ olinganda ham, $\left| \frac{m_2 \cdot f_2(a)}{M_1} \right| \cdot \frac{\varepsilon}{2}$ ga ko'ra shunday $\delta''' > 0$

topiladiki, $\forall x \in U_{\delta'''}(a)$ uchun

$$|f_2(x) - f_2(a)| < \left| \frac{m_2 \cdot f_2(a)}{M_1} \right| \cdot \frac{\varepsilon}{2} \quad (3)$$

bo'ladi. Agar $\delta = \min (\delta', \delta'', \delta''')$ deb olinsa, unda $\forall x \in U_{\delta}(a)$ uchun yuqoridagi (1), (2) va (3) munosabatlar bir yo'la o'rinli bo'lib, natijada ushbu

$$\left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{f_1(a)}{f_2(a)} \right| < \varepsilon$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Bu esa $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ funksiyaning a nuqtada uzluksiz ekanligini bildiradi.

Xuddi shu yo'l bilan teoremaning qolgan qismlari ham isbotlanadi.

Eslatma. Ikkita funksiya yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbati uzluksiz bo'lishidan bu funksiyalarning xar birining uzluksiz bo'lishi kelib chiqavermaydi.

Misol. Ushbu $D = \{(x_1, x_2) \in R^2: |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\} \subset R^2$ kvadratni olib, ratsional nuqtalari (ya'ni har ikkala koordinatalari ratsional son bo'lgan nuqtalari) to'plamini D_p bilan belgilaymiz. Bu D to'plamda quyidagi

$$f_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{agar } (x_1, x_2) \in D_p \text{ bo'lsa} \\ 0, & \text{agar } (x_1, x_2) \in D \setminus D_p \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

$$f_2(x_1, x_2) = \begin{cases} -1, & \text{agar } (x_1, x_2) \in D_p \text{ bo'lsa} \\ 0, & \text{agar } (x_1, x_2) \in D \setminus D_p \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiyalarni qaraylik. Bu funksiyalar yig'indisi $f_1(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2) = 0$

$(\forall (x_1, x_2) \in D)$ bo'lib, u shu to'plamda uzluksiz bo'lsada, $f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)$ funksiyalarning har biri D da uzluksiz emas.

Yuqorida keltirilgan teorema qo'shiluvchilar hamda ko'paytuvchilar soni ixtiyoriy chekli bo'lgan holda ham o'rinli bo'lishini ko'rsatish qiyin emas.

Endi ikki o'zgaruvchili funksiya uchun murakkab funksiyaning uzluksizligi haqidagi teoremani keltiramiz.

Faraz qilaylik, $M \subset R^2$ to'plamda $y=f(x)=f(x_1, x_2)$ funksiya berilgan bo'lib, x_1, x_2 larning har biri $T \subset R^2$ to'plamda berilgan funksiyalar bo'lsin:

$$x_1 = \varphi_1(t)$$

$$x_2 = \varphi_2(t)$$

Biz $t = (t_1, t_2) \in T$ bo'lganda unga mos $x = (x_1, x_2) \in M$ deb qaraymiz. Bu funksiyalar yordamida

$$y = f(\varphi_1(t_1, t_2), \varphi_2(t_1, t_2)) = \Phi(t_1, t_2) = \Phi(t)$$

murakkab funksiyaning tuzamiz.

2-teorema. Agar $\varphi_i(t) = \varphi_i(t_1, t_2)$ ($i=1,2$) funksiyalarning har biri $t^0 = (t_1^0, t_2^0)$ nuqtada uzluksiz bo'lib, $f(x) = f(x_1, x_2)$ funksiya esa $t^0 = (t_1^0, t_2^0)$ nuqtaga mos

$$x^0 = (x_1^0, x_2^0) \quad (x_1^0 = \varphi_1(t_1^0, t_2^0), x_2^0 = \varphi_2(t_1^0, t_2^0)),$$

nuqtada uzluksiz bo'lsa, $y = \Phi(t) = \Phi(t_1, t_2)$ murakkab funksiya $t^0 = (t_1^0, t_2^0)$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Isbot. $x_i = \varphi_i(t) = \varphi_i(t_1, t_2)$ ($i=1,2$) funksiya $t^0 = (t_1^0, t_2^0)$ nuqtada uzluksiz bo'lsin.

$T \subset R^2$ to'plamda $t^0 = (t_1^0, t_2^0)$ nuqtaga intiluvchi ixtiyoriy

$$\{t^{(n)}\} = \{(t_1^{(n)}, t_2^{(n)})\} \quad n = (1, 2)$$

ketma-ketlik olaylik. U holda uzluksizlikning Geyne ta'rifiga ko'ra

$$\left. \begin{matrix} t_1^{(n)} \rightarrow t_1^0 \\ t_2^{(n)} \rightarrow t_2^0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} x_1^{(n)} = \varphi_1(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}) \rightarrow \varphi_1(t_1^0, t_2^0) = x_1^0 \\ x_2^{(n)} = \varphi_2(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}) \rightarrow \varphi_2(t_1^0, t_2^0) = x_2^0 \end{matrix}$$

bo'ladi.

$y = f(x_1, x_2)$ funksiya (x_1^0, x_2^0) nuqtada uzluksiz. U holda yana Geyne ta'rifiga ko'ra

$$\left. \begin{array}{l} x_1^{(n)} \rightarrow x_1^0 \\ x_2^{(n)} \rightarrow x_2^0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \rightarrow f(x_1^0, x_2^0)$$

bo'ladi. Demak, $t_1^{(n)} \rightarrow t_1^0, t_2^{(n)} \rightarrow t_2^0$ da

$$f\left(\varphi_1\left(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}\right), \varphi_2\left(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}\right)\right) \rightarrow f\left(\varphi_1\left(t_1^0, t_2^0\right), \varphi_2\left(t_1^0, t_2^0\right)\right)$$

Bu esa $y = f(\varphi_1(t_1, t_2), \varphi_2(t_1, t_2)) = \Phi(t_1, t_2)$ funksiyaning $t^0 = (t_1^0, t_2^0)$ nuqtada uzluksiz ekanligini bildiradi.

3-§. Ikki o'zgaruvchili uzluksiz funksiylarning xossalari

Biz quyida ko'p o'zgaruvchili uzluksiz funksiylarning xossalarini keltiramiz. Bunda bir o'zgaruvchili uzluksiz funksiylarning xossalari to'g'risida ma'lumotlardan to'la foydalana boramiz.

Ko'p o'zgaruvchili uzluksiz funksiylar ham bir o'zgaruvchili uzluksiz funksiylarning xossalari kabi xossalarga ega.

1°. Nuqtada uzluksiz bo'lgan funksiylarning xassalari (lokal xossalari).
 $f(x)$ funksiya $M (M \subset R^2)$ to'plamda berilgan bo'lib, $x^0 \in M$ nuqtada uzluksiz bo'lsin. Bunday $f(x)$ funksiyaning x^0 nuqtaning yetarli kichik atrofi $U_\delta(x^0) \subset M$ dagi xossalarini (lokal xossalarini) o'rganamiz.

1) Agar $f(x)$ funksiya $x^0 \in M$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda x^0 nuqtaning yetarli kichik atrofida funksiya chegaralangan bo'ladi.

Funksiya uzluksizligi ta'rifiga ko'ra

$$\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = f(x^0)$$

bo'lib, undan $f(x)$ funksiyaning x^0 nuqtada chekli limitga ega ekanligi kelib chiqadi. Chekli limitga ega bo'lgan funksiyaning xossalaridan esa, $f(x)$ funksiyaning x^0 nuqtaning yetarli kichik atrofida chegaralanganligini topamiz.

2) Agar $f(x)$ funksiya x^0 nuqtada uzluksiz bo'lib, $f(x^0) > 0$ ($f(x^0) < 0$) bo'lsa, x^0 nuqtaning yetarli kichik atrofidagi x nuqtalarda $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) bo'ladi.

Funksiya x^0 nuqtada uzluksizligi ta'rifiga ko'ra, $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $\delta > 0$ topiladiki, barcha $x \in U_\delta(x^0) \cap M$ nuqtalar uchun

$$f(x^0) - \varepsilon < f(x) < f(x^0) + \varepsilon$$

bo'ladi.

Bu yerda $\varepsilon = f(x^0) > 0$ (agar $f(x^0) < 0$ bo'lsa, $\varepsilon = -f(x^0)$) deb olsak, fikrimizning tasdig'iga ega bo'lamiz.

Demak, $f(x)$ funksiya x^0 nuqtada uzluksiz va $f(x^0) \neq 0$ bo'lsa, x^0 nuqtaning yetarli kichik atrofidagi x nuqtalarda funksiya qiymatlarining ishorasi $f(x^0)$ ning ishorasi bilan bir xil bo'lar ekan:

$$\operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} f(x^0).$$

3) Agar $f(x)$ funksiya x^0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, x^0 nuqtaning yetarli kichik atrofidagi $x' \in M$, $x'' \in M$ nuqtalar uchun

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi

$f(x)$ funksiyaning x^0 nuqtada uzluksizligiga asosan, $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham $\frac{\varepsilon}{2}$ ga ko'ra shunday $\delta > 0$ topiladiki, barcha $x \in U_\delta(x^0)$ nuqtalar uchun

$$|f(x) - f(x^0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

bo'ladi. Jumladan, $x' \in U_\delta(x^0)$, $x'' \in U_\delta(x^0)$ nuqtalar uchun ham

$$|f(x') - f(x^0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(x'') - f(x^0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Keyingi tengsizliklardan esa $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ bo'lishi kelib chiqadi.

2°. *To'plamda uzluksiz bo'lgan funksiyalarning xossalari (global xossalari).*
Endi $M \subset R^2$ to'plamda uzluksiz bo'lgan funksiyalarning xossalari (global xossalar), aniqrog'i $f(x)$ funksiya qiymatlaridan iborat $\{f(x'); x' \in M\}$ to'plamning xossalari o'rganamiz.

1-teorema (Bolsano-Koshining birinchi teoremasi).

$f(x) = f(x_1, x_2)$ funksiya bog'lamli $M \subset R^2$ to'plamda uzluksiz bo'lsin. Agar bu funksiya to'plamning ikkita $a = (a_1, a_2)$ va $b = (b_1, b_2)$ nuqtasida har xil ishorali qiymatlarga ega bo'lsa, u holda shunday $c = (c_1, c_2) \in M$ nuqta topiladiki, bu nuqtada funksiya nolga aylanadi:

$$f(c) = f(c_1, c_2) = 0$$

Aniqlik uchun $f(a) = f(a_1, a_2) < 0$, $f(b) = f(b_1, b_2) > 0$ bo'lsin. $M \subset R^2$ bog'lamli to'plam bo'lgani uchun bu a va b nuqtalarni birlashtiravchi va M to'plamda yotuvchi sinq chiziq topiladi. Bu sinq chiziq uchlari bo'lgan nuqtalarda $f(x)$ funksiyaning qiymatlarini hisoblab boramiz. Bunda ikki xol yuz beradi:

1) Sinq chiziq uchlarining birida $f(x)$ funksiya nolga aylanadi. Bu holda sinq chiziqning shu uchini teoremadagi c nuqta deb olinsa, $f(c) = 0$ bo'lib, teorema isbotlanadi.

2) Sinq chiziq uchlarida $f(x)$ funksiya nolga aylanmaydi. Bu holda sinq chiziqning shunday kesmasi topiladiki, uning uchlarida $f(x)$ funksiyaning qiymatlari har xil ishorali bo'ladi. Sinq chiziqning xuddi shu uchlarining birini $a' = (a'_1, a'_2)$ bilan, ikkinchi uchini esa $b' = (b'_1, b'_2)$ bilan belgilasak, unda

$$f(a') = f(a'_1, a'_2) < 0,$$

$$f(b') = f(b'_1, b'_2) > 0$$

bo'ladi. Sinq chiziqning bu kesmasining tenglamasi ushbu

$$\begin{aligned}x_1 &= a'_1 + t(b'_1 - a'_1), \\x_2 &= a'_2 + t(b'_2 - a'_2),\end{aligned}$$

($0 \leq t < 1$) ko'rinishda yoziladi.

Agar o'zgaruvchi $x = (x_1, x_2) \in M$ nuqtani siniq chiziqning shu kesmasi bo'yichagina o'zgaradi deb olinadigan bo'lsa, u holda $f(x) = f(x_1, x_2)$ ko'p o'zgaruvchili funksiya quyidagicha

$$F(t) = f(a'_1 + t(b'_1 - a'_1), a'_2 + t(b'_2 - a'_2))$$

bitta t o'zgaruvchining murakkab funksiyasi bo'lib qoladi. Murakkab funksiyaning uzluksizligi haqidagi teorema ko'ra $F(t)$ funksiya $[0, 1]$ segmentda uzluksizdir.

Ikkinchi tomondan $t = 0$ va $t = 1$ da bu funksiya turli ishorali qiymatlarga ega:

$$\begin{aligned}F(0) &= f(a'_1, a'_2) < 0, \\F(1) &= f(b'_1, b'_2) > 0.\end{aligned}$$

Shunday qilib, $F(t)$ funksiya $[0, 1]$ segmentda uzluksiz va shu segmentning chetki nuqtalarida har xil ishorali qiymatlarga ega U holda $(0, 1)$ intervalda shunday t_0 nuqta topiladiki,

$$F(t_0) = 0$$

bo'ladi. Demak,

$$F(t_0) = f(a'_1 + t_0(b'_1 - a'_1), a'_2 + t_0(b'_2 - a'_2)) = 0$$

Agar

$$\begin{aligned}c_1 &= a'_1 + t_0(b'_1 - a'_1), \\c_2 &= a'_2 + t_0(b'_2 - a'_2),\end{aligned}$$

deb olsak, ravshanki, $c = (c_1, c_2) \in M$ va $f(c) = f(c_1, c_2) = 0$ bo'ladi.

Quyidagi teorema ham shunga o'xshash isbotlanadi.

2-teorema (Bolsano-Koshining ikkinchi teoremasi). $f(x) = f(x_1, x_2)$ funksiya bog'lamli $M \subset R^2$ to'plamda uzluksiz bo'lib, M to'plamning ikkita $a = (a_1, a_2)$ va $b = (b_1, b_2)$ nuqtasida $f(a) = A$, $f(b) = B$, ($A \neq B$) qiymatlarga ega bo'lsin. A va B orasida har qanday C son olinsa ham M to'plamda shunday $c = (c_1, c_2)$ nuqta topiladiki.

$$f(c) = f(c_1, c_2) = C$$

bo'ladi.

3- teorema (Veyershtrassning birinchi teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya chegaralangan yopiq $M \subset R^2$ to'plamda uzluksiz bo'lsa, funksiya shu M to'plamda chegaralangan bo'ladi.

Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni $f(x)$ funksiya chegaralangan yopiq M to'plamda uzluksiz bo'lsa ham, u shu to'plamda chegaralanmagan bo'lsin. U holda $\forall n \in N$ uchun shunday $x^{(n)} \in M$ nuqta topiladiki,

$$|f(x^{(n)})| > n \quad (2)$$

bo'ladi. Bunday nuqtalardan $\{x^{(n_k)}\} \rightarrow (x^{(n)} \in M, n = 1, 2, \dots)$ ketma-ketlik tuzamiz. Modomiki, M to'plam chegaralangan ekan, unda $\{x^{(n)}\}$ ketma-ketlik ham chegaralangandir. Boltsano-Veyershtrass teoremasiga ko'ra $\{x^{(n)}\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi bo'lgan $\{x^{(n_k)}\}$ qisman ketma-ketlik ajratish mumkin: $\{x^{(n_k)}\} \rightarrow x^0 (k \rightarrow \infty)$. M yopiq to'plam bo'lgani uchun $x^0 \in M$ bo'ladi. $f(x)$ funksiyaning M to'plamda uzluksiz ekanligidan esa

$$f(x^{(n_k)}) \rightarrow f(x^0)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Natijada bir tomondan (2) munosabatga ko'ra

$$|f(x^{(n_k)})| > n_k$$

ya'ni $f(x^{(n_k)}) \rightarrow \infty (k \rightarrow \infty)$ bo'lsa, ikkinchi tomondan $f(x^{(n_k)}) \rightarrow f(x^0)$ bo'lib qoldi. Bunday ziddiyat $f(x)$ funksiyaning M to'plamda chegaralanmagan deb olinishi oqibatida kelib chiqadi. Demak, $f(x)$ funksiya M to'plamda chegaralangan.

4-teorema (Veyershtrassning ikkinchi teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya chegaralangan yopiq $M \subset R^2$ to'plamda uzluksiz bo'lsa, u shu to'plamda o'zining aniq yuqori hamda aniq quyi chegaralariga erishadi.

Xulosa

Men ushbu bitiruv malakaviy ishim davomida bir va ikki o'zgaruvchili funksiyalar haqida ish olib bordim. Ushbu malakaviy ishimni yozish davomida funksiya uzluksizligi mavzusi bo'yicha juda ko'p o'quv, uslubiy adabiyotlar, internet saytlariga murojaat qildim. Har bir ko'rib chiqqan adabiyotlardagi mavzularni o'rganish jarayonida ularda berilgan ma'lumotlarning mazmuni va hajmi jihatidan hilma-xil bo'lishiga amin bo'ldim. Shundan kelib chiqqan holda mavzuga oid bilimlar to'liq, mazmunan keng, bayon etish ketma-ketligi qulay bo'lgan tarzda bayon etishga harakat qildim. O'z ustimda ham ishladim, matematik bilimlarimni mustahkamlab oldim.

Ushbu bitiruv malakaviy ishimni yoritish uchun 2 bob va 10 ta paragrafdan iborat reja tuzib oldim. Birinchi bobda bevosita bir o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi ta'riflari, xossalari, monoton va murakkab funksiyalarning uzluksizligi, limitlarni hisoblashda funksiya uzluksizligidan foydalanish va shunga doir misollar keltirilgan. Shu bilan birgalikda funksiyaning uzilish nuqtalari va uning turlari haqida ham tushuncha berilgan. Ikkinchi bobda esa, birinchi bobdagidek ya'ni bir o'zgaruvchili funksiya o'ldirishga oid keltirilgan tushunchalarni ikki o'zgaruvchili funksiyalar uchun o'rganib chiqdim.

Bir va ikki o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi haqida chuqur o'zlashtirilsa bundan ko'p o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligini o'rganish muqamo keltirmasligiga amin bo'ldim.

Ushbu malakaviy ishimni yozish davomida bir va ikki o'zgaruvchili funksiyalar uzluksizlikka tekshirishning oson usullarini o'rganishga va ularni misollar ishlash jarayoniga tadbiq etishga, talabalarga sodda usullar bilan matematik jarayonni yoritib berishga harakat qildim va bu usulni o'z ish faoliyatim davomida qo'llab ko'rib, o'z faoliyatim davomida yanada mustahkamlab olishga harakat qildim.

Bu mavzu bo'yicha ish olib borgan olimlar ishlari, ularni faoliyatlari, yaratgan teorema va ta'riflari bilan tanishib oldim va o'z bilimlarimni yanada mustahkamlab oldim.

Malakaviy ishimdan o'zimga kerakli bo'lgan ilmiy va amaliy bilimlarga ega bo'ldim va albatta ularni pedagogik faoliyatim davomida tadbiq qilaman. Agar mavzuda berilgan barcha misollarni o'rganib, tahlil qilib chiqilsa, maqsadga muvofiq bo'lar edi. Men ularning ba'zilarini tahlil qilib o'rganib chiqdim, sababi bu keltirilgan misollarni o'rganib chiqish uchun matematikaning ko'pgina bo'limlaridan yaxshigina bazaviy bilimga ega bo'lish kerakligini tushunib yetdim.

Kelajakda mana shu bitiruv malakaviy ishdagi keltirilgan teorema, ta'riflar va unga o'xshash isbotlashga doir misollarni o'rganishni davom ettirmoqchiman.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Sh. Mirziyoyev "Milliy taraqqiyot yo'limizni qat'iyat bilan davom ettirib, yangi bosqichga ko'taramiz" Toshkent "O'zbekiston" 2017
2. Sh. Mirziyoyev "Tanqidiy tahlil, qat'iy tartib-intizom va shaxsiy javobgarlik-har bir rahbar faoliyatining kundalik qoidasi bo'lishi kerak" Toshkent "O'zbekiston" 2017
3. Sh. Mirziyoyev "Erkin va farovon, demokratik O'zbekiston davlatini birgalikda barpo etamiz." Toshkent "O'zbekiston" 2016
4. Turgunbayev Riskeldi Musamatovich. Matematik analiz I qism 5110100-matematika o'qitish metodikasi darslik. Toshkent "Turon-Iqbol" 2018
5. O'. Toshmetov, R. M. Turgunbayev, E. M. Saydamatov, M. Madirimov. Matematik analiz I qism O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi Pedagogika oliy o'quv yurtlari talabalari uchun darslik sifatida tavsiya etgan. Toshkent «Extremum-Press» 2015
6. B.A. Shoimqulov T.T. Tuychiyev D.H. Djumaboyev. Matematik analizdan mustaqil ishlar. Oliy o'quv yurtlarining bakalavriat ta'lim yo'nalishi talabalari uchun o'quv qo'llanma. Toshkent "O'zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti" 2008
7. M. Xushvaqto'v. Matematik analiz O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi Oliy o'quv yurtlari talabalari uchun o'quv qo'llanma sifatida tavsiya etgan. Toshkent «Yangiyo'l Poligraph Service» 2008
8. T. Azlarov, H. Mansurov Matematik analiz asoslari 2-qism. Bakalavrlar uchun darslik Ixchamlashtirilgan va takomillashtirilgan 3-nashri. Toshkent. "Universitet" 2007. 28-35 s
9. T. Azlarov, H. Mansurov Matematik analiz asoslari 1-qism. Qayta ishlangan va to'ldirilgan 2-nashri. Toshkent. "O'qituvchi" 1994. 151-164 s
10. Matematik analiz kursidan misol va masalalar to'plami. Birinchi tom. Toshkent «O'zbekiston» 1993
11. Differensial va integral hisob. Birinchi tom. Ruscha to'qqizinchi nashriga muvofiqlashtirilgan ikkinchi nashri. Toshkent "O'qituvchi nashriyoti" 1972
12. M.A. Evgrafov, Yu.V. Sidorov, M.V. Fedoryuk, M.I. Shabunin, K.A. Bejanov Sbornik zadach po teorii analiticheskix funktsiy. Moskva. "Nauka" 1972.

13. Internet resurslari:

www.TDPU.uz (Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi)

www.Edu.uz (Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi)

www.Ziyonet.uz (Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi)

www.Pedagog.uz (Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi)

https://function-x.ru/two_and_three_variable_function.html

Glossary

ENGLISH	UZBEK
problem solving	masalalar yechish
evaluate	hisoblab chiqmoq, qiymatni topmoq
formulate	formula shaklida ifoda qilmoq
generalization	umumlashtirish
conclusion	xulosa
explain	tushuntirmoq
explore	tadqiq qilmoq
general case	umumiy holat
justify	asoslab bermoq
specific result	aniq natija
theorem	teorema
accuracy	aniqlik
appropriate	tegishli
formula	formula
function	funksiya
mathematical representation	matematik taqdimot
rationale	asoslash
compare	taqqoslammoq
compositions of functions	funksiyalar kompozitsiyalari
inverse function	teskari funksiya
knowledge	bilim
the state education system	Davlat Ta'lim Standarti
Education	ta'lim
method to teach	o'rganish metodi
Experience	malaka
to value	baholash
the program preparation national personnel	Kadrlar tayyorlash Milliy dasturi
Investigation	tadqiqot
Problem	muammo
to learn	o'rganmoq
foundation secondary special education	O'rta maxsus ta'lim muassasasi
to determine	aniqlamoq
to analys	tahlil qilmoq
the education program	ta'lim dasturi

the result	natija
to use	foydalanmoq
used literature	foydalanilgan adabiyotlar
Postscript	ilovalar
had analyzed	tahlil qilingan
the theme of intensity	mavzuning dolzarbligi
the object of investigation	tadqiqot ishining ob'yekti
the subject of investigation	tadqiqot ishining predmeti
the aim of investigation	tadqiqot ishining maqsadi
functions in preparing investigation	tadqiqot ishining tayyorlashdagi vazifalar
used methods in preparing investigation	tadqiqot ishining tayyorlashdagi foydalanilgan metodlar
the practical value of the investigation	tadqiqot ishining amaliy ahamiyati
the place of investigation practice - test	tadqiqot ishining tajriba - sinov maydonchasi
practice – test	tajriba – sinov
the hypothesis of investigation	tadqiqotning ilmiy farazi
the news scientific news of investigation	tadqiqot ishining ilmiy yangiligi
backwards connection	teskari aloqa
selflessly value	xolisona baholash
the modern pedagogical technology	zamonaviy pedogagik texnologiya
logical mathematics	matematik mantiq
the independent education	mustaqil ta'lim
to proof	isbotlamoq