

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA‘LIM VAZIRLIGI
MUQIMIY NOMIDAGI QO‘QON DAVLAT PEDAGOGIKA INSTITUTI

“Himoyaga tavsiya etilsin”

Fakultet dekani

_____ t.f.n. dotsent H. Xonboboyev

“ _____ ” _____ 2020-yil

5110100 – matematika o‘qitish metodikasi ta‘lim yo‘nalishi

IV-kurs 403- guruh talabasi

Ergasheva Shahlo Shoabdullo qizining

**“Normalangan fazolarda differensial hisob mavzusini o‘qitish metodikasi”
mavzusida yozilgan**

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Ilmiy rahbar:

_____ f.m.f.n U.Akbarov

MO‘M kafedrasi o‘qituvchisi

Taqrizchilar:

BTM kafedrasi katta o‘qituvchisi

Taqrizchilar:

MO‘M kafedrasi mudiri

_____ f.m.f.n. X.Jumaqulov.

“ _____ ” _____ 2020-yil

QO‘QON -2020

Mundarija.

Kirish	3
I-Bob.Normalangan fazolar modulini o`qitish mazmuni va unga doir asosiy tushunchalar	9
1.1-§. “Matematik analiz” fanining Normalangan fazolar modulining mazmuni haqida	9
1.2-§.Normalangan fazo ta’rifi va uning ba’zi xossalari.....	12
1.3-§.Yevklid va Gilbert fazolar.....	23
1.4-§.Normalangan fazolarda chiziqli funksionallar	30
II-Bob.Normalangan fazolarda differensial hisob elementlari va uni o`qitishga doir didaktik materiallar	38
2.1-§. Kuchli va sust differensiallar.....	38
2.2-§. Yuqori tartibli hosilalar.....	42
2.3-§. Normalangan fazolarda variatsion hisob elementlari.....	48
2.4-§. “Ayrim funksionallarni ekstremimumlari” mavzusidagi dars ishlanmasi.....	51
2.5-§. Mavzuga doir standart va nostandart testlar to`plami.....	63
Xulosa	77
Adabiyotlar ro‘yxati	78

Kirish.

Ta'lim saviyasini va samaradorligini oshirish shu kunning dolzarb muammolari va masalalaridan biri hisoblanadi. "Kadrlar tayyorlash milliy dasturi"da ham o'sib kelayotgan yosh avlodni bilimli, intiluvchan, mustaqil fikrlaydigan va zamona ruhiga mos shaxs sifatida tarbiyalash vazifasi ustuvor masala qilib qo'yilgan. Ushbu masalani hal etish ko'p jihatidan ta'lim sohasiga yangi, zamonaviy texnologiyalarni qo'llashga ham bog'liq.

Bu esa kelajagimizni yaqqol tasavvur etish, jamiyatimizning ijtimoiy-ma'naviy poydevorini mustahkamlash ehtiyojini tug'diradi. Demak, galdagi eng asosiy vazifa: yosh avlodni Vatan ravnaqi, yurt tinchligi, xalq farovonligi kabi olijanob tuyg'ular ruhida tarbiyalash, yuksak fazilatlarga ega, ezgu g'oyalar bilan qurollangan komil insonlarni voyaga yetkazish, jahon andozalariga mos, kuchli bilimli, raqobatbardosh kadrlar tayyorlashdir.

Xususan, O'zbekiston Respublikasi Prezidentining "O'zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo'yicha harakatlar strategiyasi to'g'risida"gi farmonining to'rtinchi ijtimoiy sohani rivojlantirishning ustuvor yo'nalishlari bo'limida ta'lim va fan sohasini rivojlantirish yo'nalishida uzluksiz ta'lim tizimini yanada takomillashtirish, sifatli ta'lim xizmatlari imkoniyatlarini oshirish, mehnat bozorining zamonaviy ehtiyojlariga mos yuqori malakali kadrlar tayyorlash siyosatini davom ettirish; ta'lim muassasalarini qurish, rekonstruktsiya qilish va kapital ta'mirlash, ularni zamonaviy o'quv va laboratoriya asboblari, kompyuter texnikasi va o'quv-metodik qo'llanmalar bilan jihozlash orqali ularning moddiy-texnika bazasini mustahkamlash yuzasidan maqsadli chora-tadbirlarni ko'rish; umumiy o'rta ta'lim sifatini tubdan oshirish, chet tillar, informatika hamda matematika, fizika, kimyo, biologiya kabi boshqa muhim va talab yuqori bo'lgan fanlarni chuqurlashtirilgan tarzda o'rganish; ta'lim va o'qitish sifatini baholashning xalqaro standartlarini joriy etish asosida oliy ta'lim muassasalari faoliyatining sifati hamda samaradorligini oshirish, oliy ta'lim muassasalariga qabul kvotalarini bosqichma-bosqich ko'paytirish; ilmiy-tadqiqot va innovatsiya faoliyatini rag'batlantirish, ilmiy va innovatsiya

yutuqlarini amaliyotga joriy etishning samarali mexanizmlarini yaratish, oliy o'quv yurtlari va ilmiy-tadqiqot institutlari huzurida ixtisoslashtirilgan ilmiy-eksperimental laboratoriyalar, yuqori texnologiya markazlari va texnoparklarni tashkil etish masalalariga alohida to'xtalib o'tilgan.

O'zbekiston Respublikasi Prezidenti tomonidan birinchi marta mamlakatimiz parlamenti – Oliy Majlisga Murojaatnomasida ham ta'limga oid quyidagi fikrlar bildirilgan: "... ta'lim-tarbiya sifati va darajasini yangi bosqichga ko'tarishimiz lozim. Ko'plab ota-onalar, o'qituvchi va o'quvchilar hamda keng jamoatchilik tomonidan bildirilgan takliflar asosida yurtimizda 11 yillik ta'lim qayta tiklandi. Joylardagi o'qituvchilarga bo'lgan ehtiyojni qoplash uchun Toshkent viloyatida Chirchiq davlat pedagogika instituti tashkil etildi. Bundan tashqari, 15 ta oliy ta'lim muassasasida tashkil etilgan maxsus sirtqi bo'limlarda o'rta maxsus ma'lumotga ega bo'lgan 5 mingdan ortiq pedagoglar uchun oliy ma'lumot olish imkoniyati yaratildi. Ta'lim tizimidagi innovatsiya va kreativ yondashuvlar asosida Muhammad Xorazmiy va Mirzo Ulug'bek nomlari bilan ataladigan, aniq fanlar chuqur o'qitiladigan maxsus maktablar tashkil etildi. Oliy ta'lim tizimini yanada takomillashtirish borasida ham ko'plab ishlar amalga oshirilmoqda. Jumladan, 2017-2021 yillarda oliy ta'lim tizimini kompleks rivojlantirish dasturi qabul qilindi. Yangi tashkil etilgan institut va filiallar hisobidan yurtimizdagi oliy ta'lim muassasalari soni 81 taga, hududlardagi filiallar 15 taga, xorijiy universitetlar filiallari 7 taga yetdi. Shular qatorida Olmaliq shahrida Moskva po'lat va qotishmalar institutining, Toshkent shahrida esa Aqshning Vebster universitetining filiallarini tashkil etish bo'yicha kelishuvlarga erishilganini ta'kidlash lozim. Oliy ta'lim muassasalarida iqtisodiyotning real sektoridagi talab va ehtiyojdan kelib chiqib, sirtqi va kechki bo'limlar ochildi. Bularning barchasidan biz yagona bir maqsadni ko'zda tutmoqdamiz. Ya'ni O'zbekiston ilm-fan, intellektual salohiyat sohasida, zamonaviy kadrlar, yuksak texnologiyalar borasida dunyo miqyosida raqobatbardosh bo'lishi shart "

Mavzuning dolzarbligi. Mustaqillik yillarida O'zbekiston Respublikasida ta'lim tizimini isloh qilish davlat siyosatining ustuvor yo'nalishlaridan biri sifatida

e'tirof etildi. O'zbekiston respublikasining birinchi prezidenti I. A. Karimov ta'kidlaganidek, "Mustaqil fikrlaydigan, zamonaviy ilm-fan va kasb-hunarlarni puxta egallagan, o'z yurti, o'z xalqiga fidoyi, biz boshlagan ishlarni davom ettirishga qodir bo'lgan, har tomonlama sog'lom avlodni yengib bo'ladimi?"¹

Ta'lim tizimida yakuniy natija, bevosita ta'lim-tarbiya jarayonini amalga oshiradigan o'qituvchi mehnatining qanday tashkil etilishiga borib taqalaveradi. Ta'lim zimmasiga qo'yilayotgan ulkan vazifalar esa ta'lim berishga munosabatni, yondashuvni o'zgartirishni taqozo etmoqda. Shu munosabat va yondashuvni o'zida mujassam etishi lozim bo'lgan zamonaviy o'qitish va o'rgatish texnologiyalarini o'rganish va ta'lim jarayoniga tadbqiq etish, tadbqiq etish usullarini ishlab chiqish dolzarb vazifalardan biri hisoblanadi.

O'qitish jarayonining samaradorligini oshirishda, asosiy o'rinni ta'lim jarayoniga ijodiy yondoshish, ta'limga interfaol usullarni, innovatsion ta'lim texnologiyalarini kiritish va ulardan mohirona foydalanish muhim o'rinda turadi.

Hozirgi kunda ta'lim, fan va ishlab chiqarishdagi dolzarb vazifalar kadrlarga bo'lgan ehtiyojdan kelib chiqib amalga oshirilayotganiga ishonch hosil qilinadi. Ma'lumki, rivojlangan mamlakatlar taraqqiyoti eng avvalo zamonaviy fan va texnika yutuqlaridan xalq xo'jaligining hamma tarmoqlarida oqilona foydalanish bilan farqlanadi. Davlatning, iqtisodiy va ijtimoiy sohalarning rivojlanishi yetuk kadrlarga hamda fan-texnika yutuqlaridan qanday foydalanishga bog'liqligini bozor iqtisodiyotining shakllanishi ko'rsatmoqda. Bu borada respublikamiz barcha ta'lim muassasalarida ta'lim mazmunini va sifat darajasini yaxshilash, professor-o'qituvchilarning uslubiy saviyasi va malakasini oshirish, ko'rgazmali qurollar va texnik vositalar bilan ta'minlash ishlariga katta e'tibor berilmoqda. Binobarin, "Ta'lim to'g'risida"dagi Qonun va "Kadrlar tayyorlash milliy dasturi"ga muvofiq mamlakatimizda uzluksiz ta'limning mazmuni va tarkibida amalga oshirilayotgan tub islohotlar o'quvchilarning mustaqil ijodiy tafakkurini shakllantirish, ularning oldilarida

paydo bo'lgan muammolarni mustaqil hal qilishga doir ko'nikma va malakalarni rivojlantirishni taqozo qilmoqda.

Mazkur islohotlarning mazmun-mohiyati uzluksiz ta'lim tizimining moddiy texnik bazasini yaratishni, uning asosida ta'limga axborot texnologiyalarini jadal tatbiq etishni, qolaversa o'qituvchilardan dars jarayonida o'ziga xos yangicha uslubni qo'llashni, kasb mahoratini doimiy takomillashtirib borishini talab etadi. Shu ma'noda har bir o'qituvchilar o'zining dars berayotgan soha yo'nalishida yangi pedagogik va axborot texnologiyalarni ajratib olmog'i hamda uni o'quv jarayoniga tadbiq eta bilmog'i, ilg'or o'qitish vositalaridan, jumladan o'quv-uslubiy modullardan unumli foydalanishi, ularni ta'lim jarayonida faol qo'llay olishi kerak.

Mazkur tayyorlangan bitiruv malakaviy ishda normalangan fazolarda differensial hisob mavzusini o'qitish metodikasi mavzusi haqida ma'lumotlar berilgan. Talabalarning matematika analiz faniga bo'lgan qiziqishlarini oshirishda, matematik tafakkurlarini o'stirishda normalangan fazolarda differensial hisob mavzusini o'qitish metodikasi katta ahamiyat kasb etadi. Uni o'rganish, u haqida bilimga ega bo'lish, tasavvur qila olish, uni mohiyat jihatidan tushunish va amalda qo'llay olish katta ahamiyatga ega va shu bilan birga, xususiyatlarini o'rganish va metodikasini ishlab chiqish va uni berish usullarini ko'rsatib berish zaruriy talablardan biri hisoblanadi. Ayni shu ahamiyat va zarurat tayyorlangan bitiruv malakaviy ishni dolzarbligini belgilaydi.

Bitiruv ishining maqsadi: Matematik analiz fani "Funksional analiz asoslari" modulidagi Normalangan fazolarda differensial hisob mavzusini o'qitish metodikasini ishlab chiqish.

Bitiruv ishining vazifalari:

Zamonaviy ta'limda normalangan fazolarda differensial hisob mavzusini o'qitish metodikasiga doir manbalarni nazariy tadbiq etish va didaktik vositalar yaratish.

Buning uchun:

- 1.Zamonaviy ta'limda normalangan fazolarda differensial hisob mavzusini o'qitish metodikasi doir manbalarni nazariy tadbiq etish.
- 2.Normalangan fazolarda differensial hisob mavzusini o'qitish metodikasini bayon qilish.
- 3.Normalangan fazolarda differensial hisob mavzusini o'qitish metodikasi mavzusida dars ishlanmasi tayyorlash.

Bitiruv ishining predmeti:

Zamonaviy ta'limda normalangan fazolarda differensial hisob mavzusini o'qitish metodikasi mazmuni, uning mohiyati.

Bitiruv ishining ob'ekti: Oliy ta'lim muassasalarida normalangan fazolarda differensial hisob mavzusini o'qitish metodikasini o'qitish jarayoni.

Bitiruv ishining amaliy ahamiyati. Oliy ta'limda matematik analiz darslarida o'qitish jarayonida quyidagi natijalar qo'lga kiritiladi: o'qituvchi va talabalar normalangan fazolarda differensial hisob mavzusini o'qitish metodikasi haqida tushunchalar hosil qiladilar. O'quvchilarda mavzu haqidagi bilim, ko'nikma va malakalar shakllanadi.

Bitiruv ishning metodologik asosi: O'zbekiston Respublikasining Konstitutsiyasi, O'zbekiston Respublikasining "Ta'lim to'g'risida"gi Qonuni, "Kadrlar tayyorlash milliy dasturi", Davlatimiz rahbariyati timonidan keltirilgan ta'lim samaradorligini oshirishga doir g'oyalar, O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi tomonidan qabul qilingan uzluksiz ta'lim tizimiga oid me'yoriy hujjatlar, ajdodlarimizning boy ilmiy merosi.

Tadqiqot quyidagicha amalga oshirildi.

Dastlab, birinchidan, ta'lim sohasi standartlarining nazariy ko'lamlari o'rganib chiqildi. Bu esa tadqiqotning ilmiy farazini va uni amalga oshirishning nazariy yo'llarini ishlab chiqish imkoniyatini yaratdi;

ikkinchidan, mavzuga oid ilmiy va o'quv adabiyotlari ko'rib chiqilib, nazariy ma'lumot yig'ildi;

uchinchidan zamonaviy matematik ta'limda normalangan fazolarda differensial hisob mavzusini o'qitish metodikasi tushunchalari va o'qitish uslubiyoti ko'rib chiqildi;

to'rtinchidan, o'rganilgan nazariy va amaliy ma'lumotlar asosida mavzu mazmuni yoritildi, amaliy ishlanma tayyorlandi, mustahkamlash savollari va testlar ishlab chiqildi, amaliy jihatidan o'qitish metodikasi ko'rsatib berildi.

Bitiruv ishining tuzilishi: bitiruv ishi kirish, ikki bob, to'qqizta paragraf, glossariy, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat.

I-Bob. Normalangan fazolar modulini o'qitish mazmuni va unga doir asosiy tushunchalar

1.1-§. “Matematik analiz” fanining Normalangan fazolar modulining mazmuni haqida

Matematik analiz fanini o'qitishdan maqsad – talabalarda maktab, o'rta maxsus ta'lim muassasalaridagi matematika kursini ilmiy asoslash va uni samarali o'qitish uchun yetarli matematik bilim, ko'nikma va malakalar shakllantirishdir.

Matematik analiz fanining vazifasi – maktab, o'rta maxsus ta'lim muassasalari matematikasida kiritilgan Matematik analizga taalluqli tushunchalarni ilmiy asoslash; Matematik analizga kirish, ketma-ketlik va funksiyaning limiti, uzluksiz funksiyalar va ularning xossalarini o'rganish; bir o'zgaruvchili funksiyaning differensial va integral hisobi va uning tatbiqlarini o'rganish; ikki va uch karrali integrallar, egri chiziqli integrallardan keyingi o'qitiladigan fanlar uchun kerakli hajmda bilimlar berish va ularning geometrik va fizik kattaliklarni o'lchashdagi tatbiqini o'rgatish; tatbiqiy va amaliy ahamiyatga ega bo'lgan qatorlar nazariyasi bilan tanishtirish; Teylor qatorining funksiyalarni o'rganishdagi muhim matematik apparat ekanligini uqtirish; talabalarning to'plam haqidagi bilimlarini kengaytirish; sonlar o'qidagi ochiq va yopiq to'plamlar tuzilishini o'rgatish; o'zgarishi chegaralangan funksiyalarni o'rgatish; uzluksiz chiziq, to'g'rilanuvchi chiziq tushunchalarini ilmiy asoslash; chiziqli to'plamning o'lchovli, o'lchovli funksiyalar haqida bilim berish; integral tushunchasini kengaytirishdan, mantiqiy mulohaza va ilmiy adabiy nutqni rivojlantirishdan iborat.

“Matematik analiz” fanini o'zlashtirish jarayonida amalga oshiriladigan masalalar doirasida bakalavr:

- haqiqiy sonlar to'plamining asosiy xossalarini; ketma-ketlik va uning limiti; funksiya, uning limiti va uzluksizligi, tekis uzluksizligi; kesmada uzluksiz funksiyalarning asosiy xossalari; asosiy elementar funksiyalar, ularning uzluksizligi; hosila va differensial, ularning geometrik va fizik ma'nolari; differensial hisobning asosiy teoremlari; aniq integral va uning tatbiqlari; integrallanuvchi funksiyalar sinflari; kvadratlanuvchi figura, to'g'rilanuvchi chiziq tushunchalari; aylanma jism hajmi, aylanma sirt yuzi; xosmas integrallar; ko'p o'zgaruvchili funksiya, uning limiti va uzluksizligi; ko'p o'zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalari, to'la differensial, gradiyent va ularning tatbiqlari; ikki argumentli funksiya ekstremumlari, shartli ekstremumlar; ikki va uch karrali integrallar, egri chiziqli integrallar va ularning tatbiqlari; sonli va funksional qatorlar, darajali qatorlar; Teylor qatori va uning tatbiqlarini, to'plamning quvvati, quvvatlarni solishtirish; sanoqli, sanoqsiz, kontinuum quvvatli to'plamlar; ratsional sonlar to'plamining sanoqliligi, haqiqiy sonlar

to'plamining sanoqsizligi; sonlar o'qidagi ochiq va yopiq to'plamlarning tuzilishi; o'zgarishi chegaralangan funksiyalar; uzluksiz va to'g'rilanuvchi chiziqlar; to'plamlarning Jordan o'lchovi; chiziqli to'plamning Lebeg o'lchovli va uning xossalari; o'lchovli funksiyalar va ularning xossalari; Riman, Stiltjes integrallari; Lebeg integrali va uning xossalari; Lebeg va Riman integrallari orasidagi bog'lanishni bilishi kerak.

- talaba haqiqiy sonlar to'plamining asosiy xossalariga oid sodda misol va masalalarni yechish; biror hodisa yoki jarayonni tavsiflovchi funktsiyani analitik ifodalash va uni tekshirish; ketma-ketlik limitini hisoblash; funktsiyaning limitini hisoblash; ajoyib limitlar yordamida aniqlanishlarni ochish; funktsiyaning uzluksizligiga doir misollar yechish; maktab, o'rta-maxsus matematika ta'limidagi uchraydigan funktsiyalarning uzluksizligini asoslay olish; funktsiyaning hosila va differensialiga oid tatbiqiy masalalarni yechish; hosila yordamida funktsiyani to'la tekshirish va grafigini chizish; aniqlanish va aniq integrallarga doir misollar yechish; aniq integralni geometrik va fizik kattaliklarni hisoblashga tatbiq qila olish; ko'p o'zgaruvchili funktsiyaning differensial va integral hisobiga doir misol va masalalar yechish; ekstremumga doir masalalarni yechish; sonli va funktsional qatorlarni yaqinlashishga tekshirish; elementar funktsiyalarni Teylor qatoriga yoyish ko'nikmasiga ega bo'lishi kerak.

- talaba funktsiyaning xossalariga oid misol va masalalarni yechish; o'rta-maxsus matematika ta'limidagi uchraydigan funktsiyalarning uzluksizligini asoslay olish; ularning hosila va differensiallarini hisoblash; aniqlanish va aniq integrallarga doir sodda misollar yechish malakasiga ega bo'lishi, to'plamlarning quvvatini aniqlay olishi lozim.

Matematik analiz fanining Normalangan fazolar modulining mazmunini tushunib, kerakli bilimlarga ega bo'lish uchun oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan ta'lim muassasalari uchun kerakli dars soatlari ajratilgan. Pedagogika ta'lim sohasi Matematika o'qitish metodikasi bakalavr yo'nalishlariga matematik analiz fanidan ishchi o'quv dasturida Funktsional analiz elementlari moduli mavjud. Bu modul o'z navbatida quyidagi mavzularni o'z ichiga olgan:

1. Metrik fazolar;
2. Seperabel va kompakt metrik fazolar;
3. Normalangan fazolar;
4. Normalangan fazolarda chiziqli funktsionallar va operatorlar;

5. Normalangan fazolarda differensial hisob.

Metrik fazolar mavzusi orqali biz metrik fazo tarifi, unga doir misollar, to'la metric fazolar, to'ldiruvchi fazo haqidagi teorema, qisqaririb akslantirish prinsipi, qisqartirib akslantirish prinsipining tadbirlari, oshkormas funksiyaning mavjudligi va differentsiallanuvchanligi haqidagi teoremaning isboti, hosilaga nisbatan yechiladigan birinchi tartibli differensial tenglama yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremlarning isboti haqida;

Seperabel va kompakt metrik fazolar mavzusi orqali seperabel tushunchasi, R^n , $C[a, b]$, l_1 , l_2 fazolarning seperabelligi, seperabel bo'lmagan fazoga misollar, kompaktlik kriteriyasi, R^n , $C[a, b]$, l_1 , l_2 fazolarda to'plamning kompaktligi haqida;

Normalangan fazolar mavzusi orqali chiziqli fazolar, normalangan fazolar, ularga doir misollar, Banach fazosi, Hilbert fazosi va ularga doir misollar haqida;

Normalangan fazolarda chiziqli funksionallar va operatorlar mavzusi orqali chiziqli funksional tushunchasi, chiziqli funksionalning xossalari, uning normasi, chiziqli operator, xossalari, uning normasi haqida;

Normalangan fazolarda differensial hisob mavzusi orqali funksionalning differensial, differentsiallanuvchi funksionalning ekstremumi, Eiler tenglamasi, Braxistoxron masalasining yechimi haqida ko'pgina ma'lumotlar berilgan.

Talabalarning Matematik analiz fanini o'zlashtirishlari uchun o'qitishning ilg'or va zamonaviy usullaridan foydalanish, yangi informatsion-pedagogik texnologiyalarni tadbiq qilish muhim ahamiyatga egadir. Fanni o'zlashtirishda darslik, o'quv va uslubiy qo'llanmalar, ma'ruza matnlari, tarqatma materiallar, elektron materiallardan foydalaniladi. Ma'ruza, amaliy mashg'ulotlarda mos ravishdagi ilg'or pedagogik texnologiyalardan foydalaniladi.

1.2-§. Normalangan fazo ta'rifi va uning ba'zi xossalari

Ta'rif. V vektor fazo bo'lib, p funksional V ni to'g'ri chiziqqa aks ettirsin. p funksional ushbu shartlarni qanoatlantirsa, u *norma* deyiladi:

- 1) $p(x) \geq 0$; faqat $x = 0$ uchun $p(x) = 0$
- 2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$;
- 3) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, λ — son

Norma kiritilgan vektor fazo *normalangan fazo* deyiladi, x elementning $p(x)$ normasi odatda $\|x\|$ bilan $\|x - y\|$ sonni belgilasak, $p(x, y)$ metrika ekanligi bevosita ko'rinib turibdi. Demak, har qanday normalangan fazo metrik fazodir.

Misollar.

1. λ haqiqiy son uchun $\|\lambda\| = |\lambda|$ deb olsak, u holda R , ya'ni to'g'ri chiziq normalangan fazo bo'ladi.
2. n o'lchamli R^n haqiqiy fazoda $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ element uchun Yevklid normasini quyidagicha kiritamiz:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \quad (1)$$

Bunda normaning 1) va 3) shartlari bajarilishi ravshan.

Shu R^n fazoning o'zida quyidagi normalarni ham kiritish mumkin:

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| \quad (2)$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \quad (3)$$

n o'lchamli C^n kompleks fazoda ham (1),(2),(3) kabi normalarni ko'rish mumkin.

3. $C[a, b]$ fazoda normani quyidagicha aniqlaymiz:

$$\|f\| = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|.$$

Ravshanki, bu norma uchun ham 1) va 3) shartlar bevosita bajariladi. 2) shartning bajarilishini ko'rsatamiz. Har qanday $t \in [a, b]$ nuqta va f, g funksiyalar uchun quyidagi munosabatlar o'rinlidir:

$$|(f + g)(t)| = |f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \leq \max_{a \leq t \leq b} |f(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |g(t)| = \|f\| + \|g\|.$$

t ixtiyoriy bo'lgani uchun

$$\|f + g\| = \max_{a \leq t \leq b} |(f + g)(t)| \leq \|f\| + \|g\|.$$

4. m vektor fazoda $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ elementning normasi deb ushbu

$$\|x\| = \sup_{1 \leq n < \infty} |x_n|$$

songa aytamiz. Normaning aksiomalari bevosita tekshiriladi.

Normalangan V fazoning V_0 vektor qism fazosi yopiq bo'lsa, u holda V_0 ni normalangan V fazoning qism fazosi deyiladi.

Uchinchi misoldagi $C[a, b]$ fazoda $P(x)$ ko'phadlar to'plami yopiq bo'lmagan vektor qism fazodir, demak, normalangan fazo ma'nosida $P(x)$ fazo $C[a, b]$ ning qism fazosi emas.

Misollar.

1. Uzluksiz funksiyalar fazosi $C[a, b]$ dagi barcha ko'phadlar to'plami qism fazo tashkil qiladi, lekin u yopiq emas. Bunga ishonch hosil qilish uchun

$$P_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!}$$

ko'phadlar ketma-ketligini qaraymiz. Ravshanki, $\{P_n\}$ fundamental ketma-ketlik bo'lib, uning limiti $x(t) = e^t$ ga teng. $x(t) = e^t$ funksiya esa ko'phad emas.

Uzluksiz funksiyalar fazosi $C[-1, 1]$ dagi barcha toq funksiyalar to'plami $C^-[-1, 1]$ (5-§ ning 4-chi topshirig'iga qarang) chiziqli ko'pxillilik tashkil qiladi va u yopiq. Haqiqatan ham, $\{x_n\}$ toq funksiyalar ketma-ketligi biror $x \in C[-1, 1]$ elementga yaqinlashsin. U holda

$$x(-t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(-t) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-x_n(t)) = -\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = -x(t).$$

2. $[a, b]$ kesmada aniqlangan va $x(a) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi o'zgarishi chegaralangan funksiyalar to'plamini $V_0[a, b]$ bilan belgilaymiz. Ma'lumki, $V_0[a, b]$ to'plam $V[a, b]$ fazoning qism fazosi, ya'ni yopiq chiziqli ko'pxillilik bo'ladi. Bu fazoda ham x elementning normasi bilan aniqlanadi. $V_0[a, b]$ fazoda quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\|x\| = V_a^b[x]$$

va u norma aksiomalarini qanoatlantiradi. Demak, $V_0[a, b]$ to'plam - chiziqli normalangan fazo bo'ladi.

3. $[a, b]$ kesmada aniqlangan va $x(a)=0$ shartni qanoatlantiruvchi absolyut uzluksiz funksiyalar to'plamini $AC_0[a, b]$ bilan belgilaymiz. Ma'lumki, $AC_0[a, b]$ to'plam $V_0[a, b]$ fazoning qism fazosi bo'ladi. Shuning uchun bu fazoda ham x elementning normasi $\|x\| = V_a^b[x]$ tenglik bilan aniqlanadi va $AC_0[a, b]$ to'plam - chiziqli normalangan fazo hosil qiladi.

Normalangan V fazoda A to'plamning chiziqli qobig'i bo'lgan $L[A]$ vektor qism fazoni olamiz. $L[A]$ ning yopilmasi A to'plamning *chiziqli yopilmasi* deyiladi va $\overline{L[A]}$ bilan belgilanadi. Agar $\{x_n\}$ *to'la sistema* deyiladi.

Yuqorida aytib o'tganimizdek, normalangan fazolar metrik fazolarning xususiy holdir. Demak, bunday fazolarning to'la yoki to'la emasligi haqida gap yuritish mumkin. Norma yordamida fazoning to'laligi quyidagicha ifodalanadi;

Ushbu $\|x_n - x_m\|_{n, m \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy ketma-ketlik uchun shunday $x_0 \in E$ element mavjudki, $x_n \rightarrow x_0$ munosabat bajariladi.

To'la normalangan fazo *Banach fazosi* yoki *B-fazo* deyiladi va normalangan fazolar ichida muhim rol o'ynaydi. Yuqoridagi $R, R^n, C[a, b], m$ fazolarning to'laligi oldingi mazularda ko'rsatilgan, demak, ular Banach fazolardir.

1. $C^2[a, b]$ fazoda normani quyidagicha kiritamiz:

$$\|x\| = \left(\int_b^a x^2(t) dt \right)^{1/2}.$$

Norma aksiomalari bevosita tekshiriladi.

2. l_2 fazoda normani

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2}, \quad x = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$$

ko'rinishda kiritsak, l_2 fazo B fazoga misol bo'ladi.

V normalangan fazo bo`lib,  $\hat{V}$  fazo  $V$  ni o`z ichiga oluvchi B fazo bo`lsin. Agar  $V$  fazo  $\hat{V}$  ning hamma yerida zich bo`lsa, u holda $\hat{V}$ fazo V ning to`ldiruvchisi deyiladi.

1-teorema. *Ixtiyoriy normalangan fazo yagona to`ldiruvchiga ega.*

Isbot. Metrik fazolarning to`ldiruvchi fazosi haqidagi teorema asosan  $V$  ning to`ldiruvchisi bo`lgan  $\hat{V}$  metrik fazo mavjud. Biz shu metrik fazoga  $V$  dagi algebraik amallarni davom ettirishimiz kerak.  $\hat{V}$  ning  $x, y$  elementlariga yaqinlashuvchi bo`lgan va V fazoning elementlaridan iborat $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketlikni olamiz va $z_n = x_n + y_n$ elementlarni tuzamiz, $n=1,2,\dots$. Ushbu

$$\|z_n - z_m\| \leq \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\| \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0$$

munosabatdan $\{z_n\}$ ketma-ketlikning fundamental ekanligi ko`rinib turibdi. Demak,  $z_n$  ketma-ketlik  $\hat{V}$  fazodagi biror  $z$  elementga yaqinlashuvchidir, ya`ni $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$. Bu z elementni x va y elementlarning yig`indisi deymiz, ya`ni $z = x + y$. Aniqlangan z element $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarga bog`liq emas. Darhaqiqat, agar  $\{x'_n\}$ ,  $\{y'_n\}$  mos ravishda  $x$  va  $y$  elementlarga yaqinlashuvchi boshqa ketma-ketliklar bo`lsa, u holda $z'_n = x'_n + y'_n$ uchun

$$\|z_n - z'_n\| \leq \|x_n - x'_n\| + \|y_n - y'_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

Demak, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z'_n$.

Shunga o`xshash  $\hat{V}$  metrik fazoda songa ko`paytirish amalini kiritish mumkin. Bevosita ko`rinib turibdiki,  $\hat{V}$  fazoda kiritilgan algebraik amallar  $V$  fazoda ko`rilsa, undagi berilgan amallar bilan ustma-ust tushadi. Shunday qilib, $\hat{V}$ vektor fazoga aylantirildi. Endi $x \in \hat{V}$ element uchun normani ushbu

$$\|x\| = \rho(x, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \quad (x_n \rightarrow x, x_n \in V)$$

ko`rinishdagi aniqlasak,  $\hat{V}$  normalangan fazo bo`ladi. V fazo $\hat{V}$ ning vektor qism fazosini hosil qiladi.

Kiritilgan norma $\hat{V}$ fazoda metrikani hosil qilgani uchun $\hat{V}$ fazo B -fazodir va V ning hamma yerida zichdir, ya`ni  $\hat{V}$  fazo normalangan  $V$  fazoning to`ldiruvchisi. Nihoyat, to`ldiruvchi fazoning yagonaligini isbotlaymiz.  $\hat{V}$  fazodagi algebraik amallarning yagonaligi amallarning uzluksizligidan kelib chiqadi. Darhaqiqat, yig`indi

$z = x + y_1$ va $z = x + y_2$ ko`rinishlarda aniqlangan bo`lsin. U holda $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y (x_n, y_n \in V)$ munosabatdan $x_n + y_n \rightarrow x + y_1$ va $x_n + y_n \rightarrow x + y_2$. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik yagona limitga ega bo`lgani uchun $x + y_1 = x + y_2$.

Shunga o`xshash, songa ko`paytirish amalining yagonaligi ko`ratiladi.

Banax fazosiga muhim bir misol ko`ramiz.  $X$  kompakt topologik fazo bo`lib, $C(X)$ fazo X da aniqlangan uzluksiz kompleks funksiyalar fazosi bo`lsin. Ravshanki, $C(X)$ vektor fazodir. Bu fazoda normani quyidagicha kiritamiz:

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

2-teorema. $C(X)$ fazo kiritilgan normada Banax fazosidir.

Isbot. $\{f_n(x)\}$ fundamental ketma-ketlik bo`lsin. Ya'ni ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday N natural son topiladiki ixtiyoriy $m, n \geq N$ uchun ushbu

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

tengsizlik hamma x nuqtalarda bajariladi. $x \in X$ nuqta tayinlansa, $\{f_n(x)\}$ sonli ketma-ketlik fundamentaldir, demak, $\{f_n(x)\}$ biror $f(x)$ songa yaqinlashadi. Yuqoridagi tengsizlikda m bo`yicha limitga o`tsak,

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \text{ ya'ni } \|f_n - f\| \leq \varepsilon$$

munosabat hosil bo`ladi. Demak,  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  ketma-ketlik  $f(x)$  ning uzluksizligini isbotlash kifoya. Ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  uchun shunday  $m$  son topiladiki,  $\|f - f_m\| < \frac{\varepsilon}{3}$  tengsizlik o`rinli bo`ladi.  $m$  sonni tayinlab olsak,  $f_m(x)$  funksiya ixtiyoriy  $x_0$  nuqtada uzluksiz bo`ladi. Demak, ixtiyoriy $x \in U_{x_0}$ nuqtada quyidagi munosabat o`rinli bo`ladi:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(x_0)| + |f_m(x) - f(x_0)| \leq \\ &\leq \|f - f_m\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|f - f_m\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

ya'ni $f(x)$ uzluksiz funksiya.

Endi $C(X)$ fazodagi to`plamlarning nisbiy kompaktlik belgisini beramiz.

3-teorema. (Askoli teoremasi). $\Phi \subset C(X)$ funksiyalar to`plami uchun quyidagi shartlar bajarilsin:

- a) ixtiyoriy $x \in X$ uchun $\sup\{f(x): f \in \Phi\} < \infty$;
 b) ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun har bir $x \in X$ nuqtaning shunday V atrofi topiladiki, ushbu $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ tengsizlik istalgan $y \in V$ va $f \in \Phi$ uchun bajariladi, ya'ni Φ tekis darajada uzluksiz.

U holda Φ to'plam $C(X)$ Banach fazosida nisbiy kompakt to'plam bo'ladi.

Isbot. $C(X)$ to'la bo'lganligi uchun Φ ning to'la chegaralanganligi ko'rsatish kifoya.

Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ olamiz. X fazo kompakt bo'lgani uchun shunday $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ nuqtalar mavjudki, ularning bu xossadagi $V_1, V_2, \dots, V_n$ atroflarining yig'indisi X ga teng, ya'ni $X = \bigcup_{i=1}^n V_i$ va $|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon$ ($f \in \Phi, x \in V_i, 1 \leq i \leq n$).

Bu tengsizlikdan va a) shartdan Φ to'plamning tekis chegaralanganligi, ya'ni

$$\sup\{f(x): f \in \Phi\} = M < \infty$$

kelib chiqadi.

D to'plamni quyidagicha aniqlaymiz:

$$D = \{\lambda \in C: |\lambda| \leq M\}.$$

Har bir $f \in \Phi$ funksiyaga $p(x) \in D^n \subset C^n$ nuqtani mos qo'yamiz, bu yerda

$$p(f) = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)).$$

D^n to'plam C^n fazoda chegaralangan, demak, u to'la chegaralangan. Ya'ni shunday $f_1, f_2, \dots, f_m \in \Phi$ funksiyalar topiladiki, har bir $p(f)$ biror $p(f_k)$ nuqtadan ε dan kichik masofada joylashgan. Demak, ixtiyoriy $f \in \Phi$ uchun shunday k topiladiki ($1 \leq k \leq m$)

$$|f(x_i) - f_k(x_i)| < \varepsilon.$$

X fazoning har bir x nuqtasi biror V_i ichida joylashgan, demak, shu i uchun

$$|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon \text{ va } |f_k(x) - f_k(x_i)| < \varepsilon.$$

Bulardan

$$|f(x) - f_k(x)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f_k(x_i)| + |f_k(x_i) - f_k(x)| \leq 3\varepsilon.$$

Demak, ixtiyoriy ε uchun chekli 3ε -to'ra mavjud, ya'ni Φ to'la chegaralangan.

Ta'rif. Biror V_1, V_2 normalangan fazolar orasida $u: V_1 \rightarrow V_2$ chiziqli izomorfizm mavjud bo'lsin. Agar fazolardagi normalarga nisbatan u va u^{-1} uzluksiz bo'lsa, u holda u normalangan fazolarning *izomorfizmi* deyiladi, V_1 va V_2 fazolar esa *izomorf normalangan fazolar* deyiladi.

4-teorema. *Ixtiyoriy haqiqiy (kompleks) n o'lchamli normalangan fazo Yevklid normal $R^n (C^n)$ fazoga izomorfdir.*

Isbot. Teoremani haqiqiy fazolar uchun isbotlaymiz. V normalangan fazo n o'lchamli bo'lib, $x_1, x_2, \dots, x_n$ undagi basis bo'lsin. Bu fazoning ixtiyoriy x elementi ushbu

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n$$

ko'rinishga ega; $\xi_i \in R, i = 1, 2, \dots, n$. Bunday x elementga R^n fazodagi

$$u(x) = \bar{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

elementni mos qo'yamiz. Natijada hosil bo'lgan $u: V \rightarrow R^n$ moslik chiziqli izomorfizm ekanligi ravshan. Demak, u va u^{-1} uzluksiz ekanligini isbotlash kerak.

Ixtiyoriy $x \in V$ uchun

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |\xi_i| \|x_i\| \leq \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right)^{1/2} = \beta \|u(x)\|,$$

bu yerda $\beta = \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \right)^{1/2}$. Xususan, ixtiyoriy $x, y \in V$ uchun

$$\|x - y\| \leq \beta \|u(x) - u(y)\|,$$

ya'ni

$$\|u^{-1}(\bar{x}) - u^{-1}(\bar{y})\| \leq \beta \|\bar{x} - \bar{y}\|.$$

Demak, $u^{-1}: R^n \rightarrow V$ uzluksiz aks ettirish. Endi R^n fazodagi

$$S = \left\{ (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in R^n : \sum_{i=1}^n \xi_i^2 = 1 \right\}$$

birlik sferada ushbu

$$f(\bar{x}) = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \|x\| = \|\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n\|$$

funksiyani ko`ramiz.  $S$  sferada  $\xi_i (i=1,2,\dots,n)$  sonlarning hammasi bir vaqtda nolga teng bo`lmagani va $\{x_i\}$ vektorlar chiziqli erkli bo`lgani sababli ixtiyoriy $\bar{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in S$ uchun

$$f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) > 0.$$

Ushbu

$$|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| = |f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) - f(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)| = \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \leq \beta \|\bar{x} - \bar{y}\|$$

tengsizlikdan f uzluksiz funksiya ekanligi ko`rinib turibdi.  $S$  kompakt bo`lgani uchun bu funksiya S to`plamda o`zining minimumiga erishadi. Ravshanki, $\alpha = \min f(\bar{x}) > 0$. Demak, $x \in S$ uchun

$$f(\bar{x}) = \|x\| \geq \alpha,$$

ya'ni ixtiyoriy $\bar{x} \in R^n$ uchun

$$f(x) = \|x\| = \|\bar{x}\| \left\| \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i x_i}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \xi_k^2}} \right\| \geq \|\bar{x}\| \alpha,$$

ya'ni

$$\|u(x)\| = \|\bar{x}\| \leq \frac{1}{\alpha} \|x\|.$$

Bundan ko`rinib turibdiki,

$$\|u(x) - u(y)\| \leq \frac{1}{\alpha} \|x - y\|,$$

ya'ni u uzluksizdir.

1-natija. Hamma haqiqiy (kompleks) n o`lchamli normalangan fazolar o`zaro izomorfdir.

2-natija. Ixtiyoriy chekli o`lchamli normalangan fazo to`ladir.

Isbot. Teoremada biz aslida ixtiyoriy chekli o'lchamli normalangan fazoning normasi $R^n(C^n)$ dagi normaga ekvivalent ekanligini ko'rsatdik. Bundan va $R^n(C^n)$ fazoning to'laligidan ixtiyoriy chekli o'lchamli fazoning to'laligi kelib chiqadi.

3-natija. Normalangan fazoning har bir chekli o'lchamli vector qism fazosi yopiqdir.

Isbot. V normalangan fazoning chekli o'lchamli V_1 qism fazosida yaqinlashuvchi $x_n \rightarrow x \in V$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Ixtiyoriy yaqinlashuvchi ketma-ketlik fundamental bo'lgani sababli $\{x_n\}$ ketma-ketlik ham V_1 fazoda fundamental. 2-natijaga asosan V_1 to'la, demak, $\{x_n\}$ ketma-ketlik biron $x_0 \in V_1$, ya'ni V yopiq.

Normalangan fazolarda quyidagi xossalar o'rinli bo'ladi.

1. Har qanday fundamental ketma - ketlik chegaralangan bo'ladi.
2. Har qanday yaqinlashuvchi ketma - ketlik fundamental bo'ladi.
3. Agar $\{x_n\}$ fundamental ketma - ketlikning biror qism $\{x_{n_k}\}$ ketma - ketligi a elementga yaqinlashuvchi bo'lsa, $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k - x_{k+1}\|$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma - ketlik fundamental bo'ladi.
4. Agar $\{x_n\}$ ketma - ketlik fundamental bo'lsa, undan shunday $\{x_{n_k}\}$ qisman ketma - ketlik ajratish mumkinki, ushbu $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k - x_{k+1}\|$ qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Misollar.

1. $C_1[-1,1]$ fazoda ushbu $x_n(t) = \begin{cases} 0, & -1 \leq t \leq 0, \\ nt, & 0 \leq t \leq \frac{1}{n}, \\ 1, & \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}$ ketma - ketlikning fundamental

ekanligini ko'rsating.

Yechish. E - ixtiyoriy son bo'lsin. x_{n+p} va x_n funktsiyalar $[-1,0) \cup \left[\frac{1}{n}, 1\right]$ da teng, hamda $|x_n(t)| \leq 1, t \in [-1,1], n = 1, 2,$ bo'lgani uchun

$$\|x_{n+p} - x_n\| = \int_{-1}^1 |x_{n+p}(t) - x_n(t)| dt = \int_0^{1/n} |x_{n+p}(t) - x_n(t)| dt = 2 \int_0^{1/n} dt = 2 \frac{1}{n}$$

bo'ladi. Demak, $\|x_{n+p} - x_n\| \leq \frac{2}{n} < \varepsilon$ tengsizlik barcha $n > \frac{2}{\varepsilon} + 1$ natural sonlar va barcha $p \in \mathbb{N}$ uchun o'rinli. Ya'ni $\{x_n\}$ - fundamental ketma – ketlik bo'ladi.

2. $C[-1,1]$ fazoda $x_n(t) = t^n$, $n = 1, 2, \dots$ ketma – ketlikning fundamental emasligini ko'rsating.

Yechish. Shunday $\varepsilon_0 > 0$ soni mavjud bo'lib, har qanday $n \in \mathbb{N}$ soni uchun undan katta $n_0 \in \mathbb{N}$ va $p_0 \in \mathbb{N}$ sonlari mavjud bo'lib, $\|x_{n_0+p_0} - x_{n_0}\| > \varepsilon_0$ tengsizlik o'rinli ekanligini ko'rsatishimiz kerak. $\varepsilon_0 = \frac{1}{5}$ va har bir $n \in \mathbb{N}$ dan katta biror n_0 natural son uchun $p_0 = n_0$ deb olamiz. U holda, ixtiyoriy

$$t_0 \in [-1,1] \text{ uchun } \|x_{2n_0} - x_{n_0}\| = \max_{-1 \leq t \leq 1} |t_0^{n_0} - t_0^{2n_0}| \text{ va } \|x_{2n_0} - x_{n_0}\| = \max_{-1 \leq t \leq 1} |t^{2n_0} - t^{n_0}| \geq t_0^{n_0} - t_0^{2n_0}$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Bu tengsizlikdan $t_0 = \frac{1}{\sqrt[n_0]{2}}$ bo'lganida ushbu

$\|x_{2n_0} - x_{n_0}\| \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} > \frac{1}{5}$ tengsizlik kelib chiqadi. Bu esa $\{x_n\}$ ketma – ketlikning fundamental emasligini ko'rsatadi.

Yuqorida keltirilgan R^n , $C[a,b]$, m, l_2 fazolarning to'la ekanligini va $C_2[a,b]$ ning to'la emasligi kursatildi.

3. $C_1[-1,1]$ fazoning to'la emasligini ko'rsating.

Yechish. Ushbu uzluksiz funktsiyalar

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{agar } -1 \leq t \leq 0 \\ nt, & \text{agar } 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 1, & \text{agar } \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

ketma – ketligining fundamental ekanligini 1–misolda ko‘rsatilgan edi. Ammo bu ketma - ketlik hech qanday uzluksiz funktsiyaga yaqinlashmaydi. Buni isbotlash uchun quyidagi uzilishga ega bo‘lgan funktsiyani qaraymiz:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{agar } -1 \leq t \leq 0 \\ 1, & \text{agar } 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Bu funktsiya xech qanday uzluksiz funktsiyaga ekvivalent emas. Haqiqatan ham, ixtiyoriy $\varphi(t) \in C_1[-1,1]$ funktsiyani qaraymiz va $\varphi(0) = a$, $I = (a - 1/3; a + 1/3)$ bo‘lsin. φ funktsiya uzluksiz bo‘lganligi sababli shunday $\delta > 0$ soni mavjud bo‘lib, barcha $t \in (-\delta, \delta)$ lar uchun $\varphi(t) \in I$ bo‘ladi. I intervalning uzunligi $2/3$ ga teng bo‘lganligi uchun 0 va 1 sonlarning xech bo‘lmaganda kamida bittasi I da yotmaydi.

Agar $0, 1 \in I$ bo‘lsa, φ va x funktsiyalar ulchovi 2δ dan kam bo‘lmagan to‘plamda har xil qiymatlar kabul qiladi, ya’ni φ va x ekvivalent emas. Mabodo, 0 va 1 sonlarining birortasi I da yotsa, u holda yo $(-\delta, 0)$, e $(0, \delta)$ intervalda φ va x funktsiyalar har xil qiymatlar kabul qiladi, ya’ni φ va x funktsiyalar ekvivalent emas. Shu sababli, ixtiyoriy $\varphi \in C_1[-1,1]$ funktsiya uchun

$$\int_{-1}^1 |\varphi(t) - x(t)| dt > 0,$$

$$0 < \int_{-1}^1 |\varphi(t) - x(t)| dt \leq \int_{-1}^1 |\varphi(t) - x_n(t)| dt + \int_{-1}^1 |x_n(t) - x(t)| dt$$

shu bilan birga

$$\int_{-1}^1 |x_n(t) - x(t)| dt = \int_0^{1/n} (1 - nt) dt = \frac{1}{2n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

shuning uchun $\|\varphi - x_n\| = \int_{-1}^1 |\varphi(t) - x_n(t)| dt$ son xech qanday $\varphi \in C_1[-1,1]$ funktsiya uchun nolga intilmaydi.

1.3-§. Yevklid va Gilbert fazolar.

R – chiziqli fazoda istalgan $x, y \in R$ ular uchun aniqlangan (x, y) haqiqiy funksiya skalyar ko'paytma deyiladi, agar quyidagi shartlar bajarilsa:

1. $(x, y) = (y, x)$
2. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
4. $(x, x) \geq 0, (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Skalyar ko'paytma kiritilgan chiziqli fazo Yevklid fazosi deyiladi.

Har qanday Yevklid fazosi normalangan fazosi bo'ladi. Normani quyidagicha aniqlaymiz:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

Normani barcha shartlari bajariladi. Normaning 1) va 2) shartlarining bajarilishi ravshan. 3) shartning bajarilishi uchun quyidagi

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Koshi- Bunyakovski tengsizligini isbotlashimiz kerak.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2(x, x) + \lambda(x, y) + \lambda(x, y) + (y, y) = \\ &= \|x\|^2 \cdot \lambda^2 + 2\lambda(x, y) + \|y\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$D = 4(x, y)^2 - 4\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0$$

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \sqrt{(x + y, x + y)} = \sqrt{\|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2} = \\ &= \sqrt{\|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2} = \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

Demak, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Yevklid fazosida yig'indi, songa ko'paytirish va skalyar ko'paytma uzluksiz funksiya bo'ladi. Haqiqatan ham,

$$x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y, \lambda_n \rightarrow \lambda$$

bo'lsin.

$$\|x_n + y_n - x - y\| = \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\begin{aligned} \|\lambda_n x_n - \lambda x\| &= \|\lambda_n x_n - \lambda_n x + \lambda_n x - \lambda x\| \leq \|\lambda_n\| \cdot \|x_n - x\| + \\ &+ \|x\| \cdot \|\lambda_n - \lambda\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(x_n, y_n) - (x, y)\| &= \|(x_n, y_n) - (x_n, y) + (x_n, y) - (x, y)\| \leq \\ &\leq \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \cdot \|y\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

R – Yevklid fazosi elementlarini vektorlarini vektorlar deymiz va ular orasida tushunchasini kiritamiz:

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

bunda φ - x va y vektorlar orasidagi burchak.

Agar $(x, y) = 0$ bo'lsa,

$$\cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

bo'ladi.

Ta'rif: x va y vektorlar orthogonal deyiladi, agar $(x, y) = 0$ bo'lsa.

$\{x_\alpha\}$ vektorlar sistemasi ortogonal sistema deyiladi, agar

$$(x_\alpha, x_\beta) = 0, \alpha \neq \beta$$

bo'lsa.

Agar $\{x_\alpha\}$ sistema ortogonal sistema bo'lsa, u chiziqli erkli sistema bo'ladi.

Agar $\{x_\alpha\}$ orthogonal sistemani o'zida saqllovchi minimal chiziqli fazo R dan iborat bo'lsa, $\{x_\alpha\}$ orthogonal sistema to'la bo'lsa, u basis deyiladi.

Agar $\{x_\alpha\}$ orthogonal sistemada $\forall \alpha$ da $\|x_\alpha\| = 1$ bo'lsa, u ortonormal sistema deyiladi.

Yevklid fazosiga misollar.

1. R^n - fazo. Yevklid fazosi bo'ladi.

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n, \quad \forall y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n$$

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

Bu kiritilgan (x, y) funksiya skalyar ko'paytmani barcha shartlarini qanoatlantiradi.

$$\ell_1 = (1, 0, \dots, 0)$$

$$\ell_2 = (0, 1, \dots, 0)$$

...

...

...

$$\ell_n = (0, 0, \dots, 1)$$

Sistema ortonormal sistema bo'ladi.

$$2. \ell_2 = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), \sum_{k=1}^{+\infty} x_k^2 < +\infty\}$$

Skalyar ko'paytmani quyidagicha aniqlaymiz:

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

$$\begin{aligned}
\ell_1 &= (1, 0, 0, \dots) \\
\ell_2 &= (0, 1, 0, \dots) \\
&\dots \\
&\dots \\
&\dots \\
\ell_n &= (0, 0, \dots, 1, 0, \dots) \\
&\dots \\
&\dots
\end{aligned}$$

Elementlar sistemasi ortonormal sistemani tashkil qiladi.

3. $C[a, b] = \{x(t) \mid x(t) \in [a, b]\}$ kesmada uzluksiz funksiyalar sinfi.

Skalyar ko'paytmani quyidagicha kiritamiz:

$$\forall f, g \in C[a, b] \text{ uchun}$$

$$(f, g) = \int_a^b f(t) \cdot g(t) dt$$

$$\frac{1}{2}; \cos n\left(\frac{2\pi t}{b-a}\right); \sin n\left(\frac{2\pi t}{b-a}\right), n = 1, 2, \dots$$

Sistema ortonormal sistema bo'ladi.

E Yevklid fazosini normalangan fazo sifatida fazo sifatida qarasak, E to'la bo'lishi yoki bo'lmasligi mumkin. Agar E to'la bo'lmasa, uning to'ldiruvchisi bo'lgan Banach fazosini CE bilan belgilaymiz.

Teorema. Yevklid fazosining to'ldiruvchisi ham Yevklid fazosi bo'ladi.

Ta'rif. To'la Yevklid fazosi Gilbert fazosi deyiladi.

H.Gilbert fazosida $\{\varphi_n\}$ ortonormal sistema berilgan bo'lsin. Bessel tengsizligiga asosan $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ sonlar biror $f \in H$ elementning Fur'ye koeffitsiyentlari bo'lishi uchun $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ qator yaqinlashuvchi bo'lishi zarur. Gilbert fazosida bus hart shu bilan birga kifoyadir. Boshqacha aytganda, quyidagi teorema o'rinli.

Teorema. (Riss –Fisher teoremasi). H Gilbert fazosida ixtiyoriy $\{\varphi_n\}$ ortonormal sistema va $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$ shartni qanoatlantiruvchi $\{c_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin. U holda shunday $f \in H$ element mavjudki, c_k sonlar f ning Fur'ye koeffitsiyentlari bo'ladi, ya'ni $c_k = (f, \varphi_k)$ va

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (f, f) = \|f\|^2$$

Isbot. H to'la Evklid fazosida $\{f_n\}$ ketma-ketlikni quyidagicha aniqlaymiz:

$$f_n = \sum_{k=1}^n c_k \phi_k.$$

Bu tenglik qator yaqinlashuvchi bo'lgani uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $n(\varepsilon) > 0$ mavjudki, barcha $n > n(\varepsilon)$ va $p \in N$ larda

$$\|f_{n+p} - f_n\|^2 = \|c_{n+1} \phi_{n+1} + \dots + c_{n+p} \phi_{n+p}\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2 < \varepsilon^2$$

tengsizlik o'rinli, ya'ni $\{f_n\}$ - fundamental ketma-ketlik. H ning to'laligiga ko'ra

$\{f_n\}$ ketma-ketlik qandaydir $f \in H$ elementga yaqinlashadi. Istalgan $i \in N$ uchun

$$(f, \phi_i) = (f_n, \phi_i) + (f - f_n, \phi_i),$$

tenglik o'rinli. Tenglikning o'ng tomonidagi birinchi qo'shiluvchi $n \geq i$ da c_i ga teng, ikkinchi qo'shiluvchi esa $n \rightarrow \infty$ da nolga intiladi, chunki

$$\|(f - f_n, \phi_i)\| \leq \|f - f_n\| \cdot \|\phi_i\| = \|f - f_n\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Tenglikning chap tomoni n ga bog'liq emas, shuning uchun $n \rightarrow \infty$ da limitga o'tsak,

$$(f, \phi_i) = c_i.$$

f ning aniqlanishiga ko'ra,

$$\|f - f_n\|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^n c_k \phi_k, f - \sum_{k=1}^n c_k \phi_k \right) = (f, f) - \sum_{k=1}^n c_k^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Shuning uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = (f, f).$$

Teorema. Ixtiyoriy ikkita cheksiz o'lchamli seperabel Gilbert fazosi o'zaro izometrik izomorf bo'ladi.

Teorema. To'la separabel Evklid fazosidagi $\{\phi_n\}$ ortonormal sistema to'la bo'lishi uchun, H da $\{\phi_n\}$ sistemaning barcha elementlariga ortogonal bo'lgan nolmas elementning mavjud bo'lmashligi yetarli va zarurdir.

Isbot. Faraz qilaylik, $\{\phi_n\}$ - to'la sistema bo'lsin, u holda u yopiq ham bo'ladi. Agar f element $\{\phi_n\}$ sistemaning barcha elementlariga ortogonal bo'lsa, u holda uning barcha Fur'e koeffitsiyentlari nolga teng, ya'ni $c_n = 0$ bo'ladi. U holda Parseval tengligiga ko'ra,

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2,$$

ya'ni $f = \theta$.

Teskarisi, $\{\phi_n\}$ to'la bo'lmagan sistema bo'lsin, ya'ni H da shunday $g \neq \theta$ element mavjud bo'lib,

$$(g, g) > \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2, \text{ bu yerda } c_k = (g, \phi_k)$$

tengsizlik bajarilsin. Riss-Fisher teoremasiga asosan, shunday $f \in H$ element mavjudki,

$$(f, \phi_k) = c_k, \quad (f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

tengliklar o'rinli. Bu holda $f - g$ element barcha ϕ_k larga ortogonal bo'ladi.

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < (g, g)$$

tengsizlikdan $f - g \neq \theta$ ekanligi kelib chiqadi.

Misol.

1. $L_2[-\pi, \pi]$ separabel Evklid fazosida $\{\psi_n(t) = \pi^{-1/2} \cos nt\}_{n=1}^{\infty}$

ortonormal sistema to'la bo'ladimi?

Yechish. $\{\psi_n\}$ larning barchasiga ortogonal bo'lgan $f_0(t) = 1$ nolmas element mavjud. Shuning uchun, yuqoridagi teoremaga ko'ra $\{\psi_n\}$ sistema to'la emas.

2. Ushbu $p(x) = |\arctg x|$ funktsiya sonlar o'qida normani aniqlaydimi?

Yechish. Bu funktsiya normani aniqlamaydi, chunki norma ta'rifidagi

$p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ shart bajarilmaydi. Masalan, $x = \sqrt{3}$, $\lambda = \frac{1}{3}$ sonlari uchun

$$p(\lambda x) = |\arctg \lambda x| = \left| \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} \right| = \frac{\pi}{6} \quad \text{va} \quad |\lambda| p(x) = \frac{1}{3} |\arctg \sqrt{3}| = \frac{\pi}{9} \quad \text{bo'lgani sababli}$$

$p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ tenglik o'rinli emas.

3. $[a, b]$ kesmada aniqlangan va o'zgarishi chegaralangan funksiyalardan iborat

$V[a, b]$ fazoda ushbu a) $p: V[a, b] \rightarrow R, p(x) = \overset{b}{V}_a[x]$; b)

$$p: V[a, b] \rightarrow R, p(x) = |x(a)| + \overset{b}{V}_a[x];$$

akslantirishlar normani aniqlaydimi?

Yechish.

a) funksiya to'la o'zgarishining ta'rifiga ko'ra $p(x) = \overset{b}{V}_a[x] \geq 0$, ammo $p: E \rightarrow R$ shartdan $x = \theta$ ekanligi kelib chiqmaydi. Masalan, $x(t) \equiv 1$ funksiya uchun $p(x) = \overset{b}{V}_a[x] = 0$. Demak, $p(x) = \overset{b}{V}_a[x]$ formula normani aniqlamaydi.

b) $p(x) = |x(a)| + \overset{b}{V}_a[x] \geq 0$ va $x = \theta$ bo'lsa, $p(x) = 0$ ekanligi ravshandir. Endi $p(x) = 0$ bo'lsin. U holda $|x(a)| = 0$ va $\overset{b}{V}_a[x] = 0$ bo'ladi. Ixtiyoriy $t_1, t_2 \in [a, b]$ uchun $|x(t_1) - x(t_2)| \leq \overset{b}{V}_a[x] = 0$ ekanligidan $x(t) \equiv \text{const}$ ni hosil qilamiz, $x(a) = 0$ bo'lgani uchun $x(t) \equiv 0$, ya'ni $x = \theta$. Normaning kolgan shartlari o'rinli ekanligi son moduli va $\overset{b}{V}_a[x]$ ning xossaligidan kelib chiqadi:

$$p(\lambda x) = |\lambda x(a)| + \overset{b}{V}_a[\lambda x] = |\lambda| |x(a)| + |\lambda| \overset{b}{V}_a[x] = |\lambda| p(x),$$

$$p(x + y) = |(x + y)(a)| + \overset{b}{V}_a[x + y] \leq |x(a)| + |y(a)| + \overset{b}{V}_a[x] + \overset{b}{V}_a[y] = p(x) + p(y)$$

Demak, $p(x) = |x(a)| + \overset{b}{V}_a[x]$ formula normani aniqlar ekan.

1.4-§. Normalangan fazolarda chiziqli funksionallar

1. Chiziqli funksionallar. E normalangan fazo bo'lib, $f: E \rightarrow K$ chiziqli funksional va $H = \ker f = f^{-1}(0)$ uning yadrosi bo'lsin. Ravshanki, H ga tegishli bo'lmagan ixtiyoriy vektor bolsin, ya'ni $f(a) \neq 0$. U holda ixtiyoriy $x \in E$ element uchun ushbu

$$y = x - \frac{f(x)}{f(a)} a$$

Vektor H ning elementidir, chunki $f(y) = 0$. Demak, ixtiyoriy $x \in E$ vektor ushbu

$$x = \lambda a + y \left(\lambda = \frac{f(x)}{f(a)}, y \in H \right)$$

Ko'rinishda yoziladi. Bunday tasvirlash bir qiymatlidir. Haqiqatan, x boshqa bir

$$x = \mu a + y_1 \quad (\mu \in K, y_1 \in H)$$

Ko`rinishda ham tasvirlansa, u holda

$$f(x) = \mu f(a) = \lambda f(a),$$

bundan $f(a) \neq 0$ bo`lgani uchun $\mu = \lambda$ va demak, $y_1 = y$.

Shuning uchun E fazo quyidagi to`g`ri yig`indi ko`rinishda tasvirlanadi:

$$E = Ka \oplus H.$$

Xususan, $E/H \approx Ka$, ya`ni $\text{codim} H = 1$.

Ta`rif.  $E$  vektor fazoning  $H$  qism fazosi uchun  $\text{codim} H = 1$  bo`lsa, H gipertekislik deyiladi.

Demak, yuqoridagi mulohazalarga binoan noldan farqli ixtiyoriy chiziqli funksional uchun $H = \ker f$ qism fazo E dagi gipertekislikdir.

Aksincha, E fazoda ixtiyoriy H gipertekislik $f^{-1}(0) = H$ shartni qanoatlantiruvchi biror chiziqli funksionalni aniqlaydi.

Darhaqiqat, $\text{codim} H = 1$ bo`lgani tufayli ixtiyoriy $a \notin H$ uchun

$$E = Ka \oplus H.$$

Tenglik o`rinlidir, ya`ni ixtiyoriy $x \in E$ quyidagi ko`rinishda yoyiladi:

$$x = \lambda a + h, h \in H, \lambda \in K.$$

Funksionalni bu elementda quyidagicha aniqlaymiz:

$$f(x) = \lambda.$$

Bevosita ko`rinib turibdiki f chiziqli funksional va $f^{-1}(0) = H$.

Agar boshqa bir g chiziqli funksional uchun ham $H = g^{-1}(0)$ bo`lsa, u holda shunday $\alpha \in K$ mavjudki, $g = \alpha f$. Haqiqatan,

$$g(x) = g(\lambda a + h) = \lambda g(a) = f(x)g(a) = \alpha f(x).$$

Bu yerda $\alpha = g(a)$.

Ushbu $f(a) = 0$ tenglama H gipertekislikning tenglamasi deyiladi.

E topologik vektor fazoda ixtiyoriy H gipertekislik yoki yopiq, yoki E ning hamma yerida zich. Darhaqiqat, topologik vektor fazoda qo'shish va songa ko'paytirish amallari uzluksiz bo'lgani sababli E ning vektor qism fazosining yopilmasi ham vektor qism fazodir. Demak, H ning yopilmasi $\bar{H}$ ham E ning qism fazosi. H gipertekislik bo'lgani sababli uni o'z ichiga oluvchi E dan farqli qism fazo mavjud emas. Bundan

$$\bar{H} = H \quad \text{yoki} \quad \bar{H} = E.$$

1-teorema. E normalangan fazo bo'lsin. $f(x)=0$ tenglama H gipertekislikning tenglamasi bo'lsin. f chiziqli funksional uzluksiz bo'lishi uchun H yopiq bo'lishi zarur va kifoyadir.

Kifoyaligi. H yopiq gipertekislik bo'lib, $f(x)=0$ uning tenglamasi bo'lsin. Ushbu

$$f(a)=1$$

Shartni qanoatlantiruvchi $a \in E$ elementni olsak, ravshanki, $a+H$ ham yopiq to'plamdir va $\theta \in a+H$, chunki ixtiyoriy $z = a+h$ ($h \in H$) element uchun $f(z) = f(a) = 1$. Demak, θ elementning $a+H$ bilan kesishmaydigan $B_\varepsilon = \{x: \|x\| \leq \varepsilon\}$ atrofi mavjud, ya'ni

$$B_\varepsilon \cap (a+H) = \emptyset.$$

Ixtiyoriy $x \in B$, uchun $f(x) \neq 1$, chunki agar $f(x)=1$ bo'lsa edi, u holda $f(x-a) = f(x) - f(a) = 0$, ya'ni $x \in a+H$, bu esa (1) ga oid.

B_0 sharning ixtiyoriy x elementi uchun ushbu $|f(x)| < 1$ tengsilikni isbotlaymiz. Aksincha, biror $x_0 \in B$ element uchun $|f(x_0)| = \alpha > 1$ tengsizlik bajarilsin deb faraz qilaylik. U holda $f\left(\frac{x_0}{\alpha}\right) = 1$ va $\left\|\frac{x_0}{\alpha}\right\| = \frac{\|x_0\|}{\alpha} < \|x_0\| \leq \varepsilon$, ya'ni $\frac{1}{\alpha}x_0 \in B_\varepsilon$, bu esa yuqorida ko'rsatilgan $f(x) \neq 1$ ($x \in B_\varepsilon$) munosabatga zid. Demak, B_ε sharning ixtiyoriy x elementi uchun $|f(x)| < 1$, ya'ni f chegaralangan (ya'ni uzluksiz) funksional.

2. Chiziqli funksional normasining geometrik ma'nosi. Normalangan E fazoda uzluksiz f chiziqli funksional olamiz. $c \in K$ son uchun ushbu

$$H_c = \{x \in E: f(x) = c\} = f^{-1}(c)$$

Belgilash kiritamiz. Bevosita ko`rinib turibdiki, a element $f(a)=c$ tenglikni qanoatlantirsa, u holda $H_c = a + H$, $H = f^{-1}(0)$.

d orqali H_1 to`plam bilan θ nuqta orasidagi masofani belgilaymiz, ya'ni

$$d = \inf_{f(x)=1} \|x\|.$$

Ixtiyoriy $x \in H_1$ element uchun

$$f(x)=1 \leq \|f\| \cdot \|x\|,$$

Ya'ni

$$\|x\| \geq \frac{1}{\|f\|}.$$

Bundan

$$d \geq \frac{1}{\|f\|}.$$

Funksional normasining ta'rifiga asosan ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $x_\varepsilon \in E$ element mavjudki, ushbu

$$|f(x_\varepsilon)| > (\|f\| - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|$$

Tengsizlik bajariladi, ya'ni

$$1 > \frac{1}{|f(x_\varepsilon)|} (\|f\| - \varepsilon)\|x_\varepsilon\| = (\|f\| - \varepsilon) \left\| \frac{x_\varepsilon}{f(x_\varepsilon)} \right\|.$$

Agar $a_\varepsilon = \frac{x_\varepsilon}{f(x_\varepsilon)}$ belgilash kiritsak, u holda $a_\varepsilon \in H_1$ va $1 > (\|f\| - \varepsilon)\|a_\varepsilon\|$, ya'ni $\|a_\varepsilon\| < \frac{1}{\|f\|} - \varepsilon$.

Bundan

$$d = \inf_{a \in H_1} \|a\| < \frac{1}{\|f\| - \varepsilon}.$$

Bu tengsizlikda ε ixtiyoriy bo`lgani uchun

$$d \leq \frac{1}{\|f\|}. \quad (3)$$

Yuqoridagi (2) va (3) tengsizliklardan ushbu

$$d = \frac{1}{\|f\|} \text{ yoki } \|f\| = \frac{1}{d}$$

Tenglik kelib chiqadi. Natijada quyidagi teorema isbotlanadi.

2-teorema. Uzluksiz f chiziqli funksionalning normasi $H_1 = \{x \in E : f(x)=1\}$ to'plam bilan θ nuqta orasidagi masofaning teskari qiymatiga teng.

3-teorema. Normalangan E fazoning ixtiyoriy $x_0 \neq \theta$ elementi uchun quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi uzluksiz f chiziqli funksional mavjud.

$$1. f(x_0) = 1;$$

$$2. \|f\| = \|x_0\|^{-1}.$$

Isbot. E fazoning ushbu

$$L = \{tx_0, t \in K\}$$

Qism fazosini olamiz. L fazoda f_0 funksionalni quyidagicha aniqlaymiz:

$$f_0(tx_0) = t.$$

$$\text{Ravshanki, } f_0(x_0) = 1 \text{ va } \|f_0\| = \sup_{\|tx_0\|=1} |f_0(tx_0)| = \sup_{|t|=\frac{1}{\|x_0\|}} |t| = \|x_0\|^{-1},$$

Xan-Banach teoremasiga asoson f_0 funksionalni E fazoga normasini saqlagan holda davom ettirish mumkin. Hosil bo'lgan funksional 1) va 2) shartlarni qanoatlantiruvchi funksionaldir.

3. Gilbert fazosida chiziqli funksionallar. Endi Gilbert fazosida chiziqli funksionalning umumiy ko'rinishini topamiz. E Gilbert fazosidan biror y elementni tanlab olsak, ushbu

$$f(x) = (x, y) \tag{1}$$

Formula E fazoda uzluksiz chiziqli funksionalni aniqlaydi. Darhaqiqat, f ning chiziqli ekanligi skalyar ko'paytma aksiomalaridan, chegaralanganligi esa ushbu

$$f(x) = |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Koshi- Bunyakovskiy tengsizligidan kelib chiqadi. Xususan,

$$\|f\| \leq \|y\| \tag{2}$$

Munosabat o'rinlidir.

Ammo eng muhimi shundaki, Gilbert fazosida har bir uzluksiz chiziqli funksional (1) ko'rinishga ega. Aniqrog'i, quyidagi teorema o'rinalidir.

4-teorema. (Riss teoremasi). *E* Gilbert fazosida ixtiyoriy uzluksiz f chiziqli funksional uchun (1) tenglikni qanoatlantiruvchi yagona y_f element mavjud va shu y_f element uchun ushbu mynosabat o'rinalidir:

$$\|f\| = \|y_f\|. \quad (3)$$

Isbot. Yuqoridagi 1-teoremaga asosan $H = f^{-1}(0)$ to'plam E ning yopiq qism fazosidir. Agar $f \equiv 0$, ya'ni $H = E$ bo'lsa, $y_f = \theta$ deb olishimiz mumkin. $H \neq E$ holni ko'raylik, ya'ni H to'plam E ning xos qism fazosi bo'lsin. Ixtiyoriy $y_0 \in H$ element ushbu

$$y_0 = y' + y'' \quad (y' \in H, y'' \in H)$$

Ko'rinishda yoziladi.

Ravshanki $y'' \neq \theta$ va $f(y'') \neq 0$. Demak, $f(y'') = 1$ deb hisoblash mumkin. Ixtiyoriy $x \in E$ elementni olib, $f(x)$ sonni α bilan belgilaymiz. U holda $x' = x - \alpha y''$ element H ning elementidir, chunki

$$f(x') = f(x) - \alpha f(y'') = \alpha - \alpha = 0.$$

Demak, $(x', y'') = 0$ va $(x, y'') = (x' + \alpha y'', y'') = \alpha (y'', y'')$

Ya'ni
$$f(x) = \alpha = \left(x, \frac{y''}{(y'', y'')} \right) = (x, y_f),$$

Bu yerda

$$y_f = \frac{y''}{(y'', y'')}.$$

Shunday qilib, (1) tenglikni qanoatlantiruvchi y_f element topiladi. Bu elementning yagonaligi bevosita olib chiqadi. Darhaqiqat, agar ixtiyoriy $x \in E$ element uchun ushbu

$$(x, y_f) = (x, y'_f)$$

Tenglik o'rinali bo'lsa, u holda $(x, y_f - y'_f) = 0$, ya'ni $y_f - y'_f \perp E$, demak, $y_f - y'_f = 0$.

Ushu

$$\|f\| \geq f\left(\frac{y_f}{\|y_f\|}\right) = \frac{(y_f, y_f)}{\|y_f\|} = \|y_f\|$$

Tengsizlikni yuqoridagi (2) tengsizlik bilan solishtirsak, (3) tenglik hosil bo'ladi.

E Gilbert fazosining har bir elementiga ushbu

$$(\tau y)(x) = (x, y)$$

formula bo'yicha τy chiziqli funksionalni mos qo'ysak, hosil bo'lgan

$$\tau : E \rightarrow E' \quad (4)$$

Operator *qo'shma chiziqlidir*, ya'ni

$$\tau(\alpha y_1 + \beta y_2) = \bar{\alpha} \tau y_1 + \bar{\beta} \tau y_2.$$

Haqiqatan,

$$[\tau(\alpha y_1 + \beta y_2)](x) = (x, \alpha y_1 + \beta y_2) = (x, \alpha y_1) + (x, \beta y_2) = \bar{\alpha}(x, y_1) + \bar{\beta}(x, y_2) = (\bar{\alpha} \tau y_1 + \bar{\beta} \tau y_2)(x).$$

Endi $\tau : E \rightarrow E'$ monomorfizm ekanligini isbotlaymiz.

Agar $\tau y = 0$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $x \in E$ element uchun

$$(x, y) = (\tau y)(x) = 0.$$

Ya'ni $y \perp E$. Demak, $y = \theta$.

Yuqorida isbotlangan 4-teoremaga asosan τ epimorfizm va

$$\|\tau(y)\| = \|y\|.$$

Ya'ni $\tau : E \rightarrow E'$ - izotermik izomorfizm (agar E kompleks Gilbert fazosi bo'lsa, τ - qo'shma chiziqli izometrik izomorfizm)

Misollar.

1. $L_2[a, b]$ Gilbert fazosida chiziqli funksionalning umumiy ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$f(x) = (x, y) = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt, x, y \in L_2[a, b]$$

2. l_2 Gilbert fazosida chiziqli funksionalning umumiy ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$f(x) = (x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \bar{\eta}_k,$$

$$x = (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots) \in l_2,$$

$$y = (\eta_1, \dots, \eta_n, \dots) \in l_2.$$

3. $R^n - n$ o'lchamli Yevklid fazosi bo'lib, $a \in R^n$ bo'lsin, $f(x, y) = (x, a)$ skalyar ko'paytma chiziqli uzluksiz funksional bo'ladi.

Koshi – Bunyakovskiy tengsizligiga ko'ra

$$|f(x)| = |(x, a)| \leq \|x\| \cdot \|a\| \quad \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|a\| \Rightarrow \|f\| \leq \|a\|.$$

Ammo

$$|f(a)| = |(a, a)| = \|a\|^2, \quad \frac{|f(a)|}{\|a\|} = \|a\| \Rightarrow \|f\| = \|a\|.$$

4. Istalgan $x \in C[a, b]$ larda $I(x) = \int_a^b x(t) dt$ integral chiziqli funksional bo'ladi.

$$|I(x)| = \left| \int_a^b x(t) dt \right| \leq \max_{t \in [a, b]} |x(t) \cdot (b - a)| = (b - a) \cdot \|x\|.$$

Agar $x = \text{const}$ bo'lsa, tenglik bajariladi. Demak $\|I\| = b - a$.

5. $y_0 \in C[a, b]$ bo'lsin. $Ax = \int_a^b x(t) \cdot y_0(t) dt$ funksiya chiziqli funksional bo'ladi.

II-Bob. Normalangan fazolarda differensial hisob elementlari va uni o`qitishga doir didaktik materiallar

2.1-§. Kuchli va sust differensiallar

Biror normalangan X fazoning U ochiq to`plamida aniqlangan va qiymatlari normalangan  $Y$  fazoga tegishli bo`lgan $F : X \rightarrow Y$ aks ettirish berilgan bo`lsin.

Ta`rif.  $U$  to`plamning biron x nuqtasi uchun quyidagi ikki shartni qanoatlantiruvchi chegaralangan $L_x \in L(X, Y)$ chiziqli operator mavjud bo`lsa, u holda F aks ettirish $x \in U$ nuqtada *differensiallanuvchi* deyiladi:

$$1) F(x+h) - F(x) = L_x h + \alpha(x, h), \quad x, h \in X, \alpha(x, h) \in Y; \quad (1)$$

$$2) \|h\| \rightarrow 0 \text{ da } \frac{\|\alpha(x, h)\|}{\|h\|} \rightarrow 0 \quad (2)$$

Har bir $h \in X$ uchun $L_x h$ element F aks ettirishning x nuqtadagi *kuchli differensial* yoki *Freshe differensial* deyiladi. L_x chiziqli operator esa F aks ettirishning x nuqtadagi *kuchli hosilasi* yoki *Freshe hosilasi* deyiladi va $F'(x)$ bilan belgilanadi.

1-teorema. Agar $F : X \rightarrow Y$ aks ettirish biror x nuqtadagi *kuchli* – *differensiallanuvchi* bo`lsa, u yagona *kuchli hosilaga* egadir.

Isbot. $L_x^{(1)}$ va $L_x^{(2)}$ chiziqli operatorlar F ning x nuqtadagi *kuchli hosilalari* bo`lsin. U holda

$$F(x+h) - F(x) = L_x^{(1)} h + \alpha_1(x, h) = L_x^{(2)} h + \alpha_2(x, h)$$

Ya`ni

$$L_x^{(1)} h - L_x^{(2)} h = \alpha_2(x, h) - \alpha_1(x, h).$$

Ta`rifdagi (2) shartga asosan

$$\|h\| \rightarrow 0 \text{ da } \frac{\|L_x^{(1)} h - L_x^{(2)} h\|}{\|h\|} \rightarrow 0. \quad (3)$$

Agar $L_x^{(1)} h \neq L_x^{(2)} h$ bo`lsa, u holda biron $h_0 \in X$ uchun $\frac{\|L_x^{(1)} h_0 - L_x^{(2)} h_0\|}{\|h_0\|} = \lambda \neq 0$.

Demak, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun

$$\frac{\|L_x^{(1)}(\varepsilon h_0) - L_x^{(2)}(\varepsilon h_0)\|}{\|\varepsilon h_0\|} = \lambda.$$

Olingan ε sonni ixtiyoriy kichik qilish mumkin bo'lgani sababli (3) munosabat o'rinli bo'lmaydi. Demak, $L_x^{(1)} = L_x^{(2)}$.

Hosilaning ta'rifidan uning quyidagi xossalari bevosita kelib chiqadi.

1^o. Agar $F(x) = y_0 = \text{const}$ bo'lsa, u holda $F'(x) \equiv 0$ (nol operator).

2^o. Agar $F(x)$ uzluksiz chiziqli operator bo'lsa, uning hosilasi o'ziga teng.

Darhaqiqat,

$$F(x+h) - F(x) = F(h).$$

2-teorema. (murakkab funksiyaning hosilasi).

X, Y, Z normalangan fazolar bo'lib, $U(x_0)$ to'plam biror $x_0 \in X$ nuqtaning atrofi, $F: U(x_0) \rightarrow Y$ uzluksiz aks ettirish bo'lsin. So'ng $y_0 = F(x_0)$ va $V(y_0)$ to'plam $y_0 \in Y$ nuqtaning atrofi, $G: V(y_0) \rightarrow Z$ ham uzluksiz aks ettirish bo'lsin. Agar F aks ettirish x_0 nuqtada, G aks ettirish y_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda x_0 nuqtaning biror atrofida aniqlangan $H = GF$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchidir va

$$H'(x_0) = G'(y_0)F'(x_0). \quad (4)$$

Isbot. Normalangan Y fazoning elementi bo'lgan $\alpha(h)$ ($h \in H$) ifoda ushbu

$$\lim_{h \rightarrow \theta} \frac{\|\alpha(h)\|}{\|h\|} = 0$$

Shartni qanoatlantirsa, uni $o(h)$ bilan begilaymiz. Shuni nazarda tutgan holda quyidagilarni yozamiz:

$$\begin{aligned} F(x_0 + \xi) &= F(x_0) + F'(x_0)\xi + o(\xi), \quad \xi \in X \\ G(y_0 + \eta) &= G(y_0) + G'(y_0)\eta + o(\eta), \quad \eta \in Y \end{aligned}$$

Endi $F'(x_0)$ va $G'(y_0)$ chegaralangan chiziqli operatorlar ekanligidan foydalansak,

$$\begin{aligned} H(x_0 + \xi) &= G(F(x_0 + \xi)) = G(y_0 + F'(x_0)\xi + o(\xi)) = G(y_0) + G'(y_0)(F'(x_0)\xi + o(\xi)) + (F'(x_0)\xi + o(\xi)) = \\ &= G(y_0) + G'(y_0)F'(x_0)\xi + [G'(y_0)o(\xi) + o(F'(x_0)\xi + o(\xi))] = G(y_0) + G'(y_0)F'(x_0)\xi + o(\xi). \end{aligned}$$

Chunki

$$\frac{\|G'(y_0)(o(\xi)) + o(F'(x_0)\xi + o(\xi))\|}{\|\xi\|} \leq \|G'(y_0)\| \frac{\|o(\xi)\|}{\|\xi\|} + \frac{\|o(F'(x_0)\xi + o(\xi))\|}{\|F'(x_0)\xi + o(\xi)\|} \cdot \frac{\|F'(x_0)\xi + o(\xi)\|}{\|\xi\|} \leq$$

$$\|G'(y_0)\| \frac{\|o(\xi)\|}{\|\xi\|} + \left(\|F'(x_0)\| + \frac{\|o(\xi)\|}{\|\xi\|} \right) \frac{\|o(F'(x_0)\xi + o(\xi))\|}{\|F'(x_0)\xi + o(\xi)\|} \xrightarrow{\|\xi\| \rightarrow 0} 0$$

(bu yerda biz $\|F'(x_0)\xi + o(\xi)\| \leq \|F'(x_0)\|\|\xi\| + \|o(\xi)\| \rightarrow 0$ munosabatdan foydalandik).

Demak, $H'(x_0) = G'(y_0)F'(x_0)$.

3-teorema. *X fazoni Y fazoga akslantiruvchi F va G uzluksiz aks ettirishlar berilgan bo'lsin. Agar F va G biron $x_0 \in X$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda $F+G$ va aF (a-son) aks ettirishlar ham shu nuqtada differensiallanuvchi va*

$$(F + G)'(x_0) = F'(x_0) + G'(x_0),$$

$$(aF)'(x_0) = aF'(x_0).$$

Isbot. Aks ettirishlarning yig'indisi va songa ko'paytmasining ta'rifiga binoan

$$(F + G)(x_0 + h) = F(x_0 + h) + G(x_0 + h) = F(x_0) + G(x_0) + F'(x_0)h + G'(x_0)h + o_1(h) =$$

$$= F(x_0) + G(x_0) + F'(x_0)h + G'(x_0)h + o_1(h)$$

Va

$$aF(x_0 + h) = aF(x_0) + aF'(x_0)h + o_2(h).$$

Endi sust differensial tushunchasiga o'tamiz. X fazoni Y fazoga akslantirish $F : X \rightarrow Y$ aks ettirish berilgan bo'lsin. Norma ma'nosida ushbu

$$aF(x, h) = \frac{d}{dt} F(x + th) \Big|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x + th) - F(x)}{t}$$

Limit mavjud bo'lsa, bu limit F aks ettirishning *sust differensial* yoki *Gamo differensial* deyiladi.

Umumiy holda, $DF(x, h)$ sust differensial h ga nisbatan chiziqli bo'lishi shart emas. Agar u chiziqli bo'lsa, ya'ni biror T chegaralangan chiziqli operator uchun

$$DF(x, h) = Th$$

Tenglik o'rinli bo'lsa, u holda T *sust hosila* yoki *Gamo hosilasi* deyiladi va $F'_c(x)$ bilan belgilanadi. Sust va kuchli hosilalar orasidagi bog'lanishni o'rganadigan bo'lsak, bu tushunchalar hatto chekli o'lchamli fazolarda ham turli tushunchalardir.

4-teorema. Agar F aks ettirish kuchli hosilaga ega bo'lsa, u sust hosilaga ham ega bu hosilalar o'zaro tengdir.

Isbot. F aks ettirish kuchli hosilaga ega bo'lgani sababli

$$F(x+th) - F(x) = F'(x)(th) + o(th) = tF'(x)h + o(th).$$

Demak,

$$\frac{F(x+th) - F(x)}{t} = F'(x)h + \frac{o(th)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} F'(x)h,$$

Ya'ni bu limit mavjud va h ga nisbatan chiziqli. Demak, kuchli hosila bir vaqtda sust hosila hamdir.

Umumiy holda bu teoremaning aksi o'rinli emas, ya'ni sust hosila mavjudligidan kuchli hosilaning mavjudligi kelib chiqmaydi.

Misol. Ikki o'lchamli R^2 fazoni R to'g'ri chiziqqa aks ettiruvchi ushbu

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^3 x_2}{x_1^4 + x_2^2}, & \text{agar } (x_1, x_2) \neq (0,0) = \theta \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } (x_1, x_2) = (0,0) = \theta \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

Funksiyani olamiz. Bu funksiya R^2 fazoning hammayerida uzluksiz. $(0,0) \in R^2$ nuqtada uning sust differensial mavjud va nolga teng. Darhaqiqat, $h = (h_1, h_2)$ uchun

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\theta + th) - f(\theta)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4 h_1^3 h_2}{t^5 h_1^4 + t^3 h_2^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{th_1^3 h_2}{t^2 h_1^4 + h_2^2} = 0.$$

Demak, f aks ettirishning $(0,0)$ nuqtada sust hosilasi nolga teng.

Kuchli hosila esa mavjud emas. Haqiqatan agar $(0,0)$ f - nuqtada kuchli $f'(\theta)$ hosila mavjud bo'lsa, 4-teoremaga asosan $f'(\theta) = 0$, ya'ni

$$f(h) - f(\theta) = f'(\theta)h + \alpha(\theta, h) = \alpha(\theta, h).$$

Bundan

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(h)\|}{\|h\|} = 0$$

Ammo $h = (h_1, h_2)$ vektorni $h = (h_1, h_1^2)$ ko'rinishda olsak,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(h)\|}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h_1^2}{2h_1^4 \sqrt{h_1^2 + h_1^4}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Bu ziddiyat f aks ettirish $(0,0)$ nuqtada kuchli hosilaga ega emasligini ko'rsatadi.

Sust hosila mavjudligidan kuchi hosila mavjudligi kelib chiqishi uchun qo'shimcha shartlar talab qilinadi.

2.2-&.Yuqori tartibli hosilalar.

Normalangan X fazoni normalangan Y fazoga akslantiruvchi $F: X \rightarrow Y$ aks ettirish har xil $x \in X$ nuqtada $F'(x)$ kuchli hosilaga ega bo'lsin. Ma'lumki, $F'(x)$ har bir x uchun X fazoni Y fazoga akslantiruvchi chiziqli chegaralangan operatoridir, ya'ni $F'(x) \in L(X, Y)$. Demak, F' aks ettirish X fazoning x elementiga $L(X, Y)$ fazoning biror $F'(x)$ elementini mos qo'yadi. Natijada $F': X \rightarrow L(X, Y)$ aks ettirish hosil bo'ladi. Agar F' aks ettirish ham differentsillanuvchi bo'lsa, u holda uning hosilasi F aks ettirishning *ikkinchi hosilasi* deyiladi va F'' bilan belgilanadi. Bunda, ravshanki, $F''(x)$ bilan belgilanadi. Bunda, ravshanki, $F''(x)$ operator $L(X, L(X, Y))$ fazoning elementidir.

Ta'rif. X fazoning tartib bilan olingan har bir juft (x, x') elementiga Y fazoning biron $B(x, x')$ elementi mos qo'yilgan bo'lib, quyidagi ikki shart bajarilsa, $B(x, x')$ *bichiziqli aks ettirish* deyiladi:

1) ixtiyoriy $x_1, x_2, x'_1, x'_2 \in X$ va α, β sonlar uchun

$$B(\alpha x'_1 + \beta x'_2, x'_1) = \alpha B(x'_1, x'_1) + \beta B(x'_2, x'_1), \quad B(x_1, \alpha x'_1 + \beta x'_2) = \alpha B(x_1, x'_1) + \beta B(x_1, x'_2);$$

2) shunday M musbat son mavjudki, ixtiyoriy $x, x' \in X$ uchun

$$\|B(x, x')\| \leq M \|x\| \cdot \|x'\| \quad (1)$$

Demak, $B(x, x')$ bichiziqli aks ettirishning normasi quyidagicha kiritiladi:

Xususan, (1) tengsizlikdan, ravshanki, $B: X \times X \rightarrow Y$ aks ettirish ikkala argumentga nisbatan birgalikda uzluksiz. $B(x, x')$ bichiziqli aks ettirishning normasi quyidagicha kiritiladi:

$$\|B\| = \inf \{M : B(x, x') \leq M \|x\| \cdot \|x'\|\}.$$

Bichiziqli aks ettirishlarning yig'indisi va songa ko'paytmasi ham bichiziqli ekanligi bevosita ko'rinib turibdi. Demak, bichiziqli aks ettirishlar normalangan vector fazo hosil qiladi. Bu fazo $B(X^2, Y)$ bilan belgilanadi. Ravshanki, Y Banax fazosi bo'lsa, $B(X^2, Y)$ ham Banax fazosidir.

$L(X, L(X, Y))$ fazoning har bir A elementiga ushbu

$$B(x, x') = (Ax)(x')$$

Tenglik yordamida $B(X^2, Y)$ fazoning biror B elementini mos qo'yamiz. Ravshanki, $A \rightarrow B$ aks ettirish chiziqlidir. Aksincha, $B(X^2, Y)$ fazoning har bir B elementi uchun $B(x, x')$ aks ettirish x element tayinlab olinganda x' ga nisbatan chegaralangan chiziqli operatoridir:

$(Ax)(x') = B(x, x')$. Demak, $A \rightarrow B$ moslik $L(X, L(X, Y))$ va $B(X^2, Y)$ fazolar orasidagi chiziqli izomorfizmdir. Biz uning izometrik izomorfizm ekanligini isbotlaymiz. Ixtiyoriy $x, x' \in X$ uchun

$$\|B(x, x')\| = \|(Ax)(x')\| \leq \|Ax\| \|x'\| \leq \|A\| \|x\| \|x'\|.$$

Demak, $\|B\| \leq \|A\|$. Shu bilan birga

$$\|Ax\| = \sup_{\|x'\| \leq 1} \|(Ax)(x')\| = \sup_{\|x'\| \leq 1} \|B(x, x')\| \leq \|B\| \cdot \|x\|,$$

Ya'ni $\|A\| \leq \|B\|$. Bundan $\|A\| = \|B\|$.

Shunday qilib, $B(X^2, Y)$ va $L(X, L(X, Y))$ o'zaro izometrik izomorf normalangan fazolardir. Demak, $F: X \rightarrow Y$ aks ettirishning ikkinchi hosilasini $B(X^2, Y)$ fazoning elementi deb hisoblash mumkin.

Shunda o'xshash, $F: X \rightarrow Y$ aks ettirishning uchinchi, to'rtinchi va hokazo tartibli hosilalari tushunchasini kiritish mumkin. Bunda n - tartibli hosila $(n-1)$ -tartibli hosilaning hosilasi deb olinadi. Ravshanki, n - hosila

$$L(X, L(X, \dots, L(X, Y) \dots))$$

Fazoning elementi bo'ladi. Bu hosilaga n - chiziqli aks ettirish deb qaralsa bo'ladi.

Ta'rif. X fazoning elementlaridan tuzilgan tartib bilan yozilgan har bir n elementli $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sistemaga Y fazoning $N(x_1, x_2, \dots, x_n)$ elementi mos qo'yilib quyidagi ikki shart bajarilsa, N aks ettirish n -chiziqli deyiladi.

- 1) $N(x_1, x_2, \dots, x_n)$ har bir argumentga nisbatan chiziqli;
- 2) Shunday M musbat son mavjudki, ixtiyoriy $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$ uchun

$$\|N(x_1, x_2, \dots, x_n)\| \leq M \|x_1\| \|x_2\| \dots \|x_n\|.$$

Shunday qilib, F aks ettirishning n -hosilasini n -chiziqli aks ettirishlar $B(X^n, Y)$ fazosining elementi deb olish mumkin.

Misol. $X = R^m, Y = R^n$ chekli o'lchamli Yevklid fazolari uchun har bir chiziqli $T: X \rightarrow Y$ operator $(n \times m)$ matritsadir. Demak, $F: X \rightarrow Y$ aks ettirishning $x \in X$ nuqtadagi $F'(x)$ hosilasi x ga bog'liq bo'lgan T matritsadir. Agar X va Y fazolarda mos ravishda

$$e_1, e_2, \dots, e_m \text{ va } f_1, f_2, \dots, f_n$$

Bazislar bo'lsa, u holda $x \in X, y \in Y$ uchun

$$\begin{aligned}x &= x_1 e_1 + x_2 y_2 + \dots + x_m e_m \\y &= y_1 f_1 + y_2 f_2 + \dots + y_n f_n\end{aligned}$$

Demak, $y = F(x)$ aks ettirishni ushbu

$$\begin{aligned} y_1 &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_m), \\ y_2 &= F_2(x_1, x_2, \dots, x_m), \\ &\vdots \\ y_n &= F_n(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{aligned}$$

Ko`rinishda yozish mumkin. Bunda

$$F'(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_m} \end{vmatrix}$$

$F''(x)$ ikkinchi hosila esa quyidagi $n \times m \times m$ ta son bilan aniqlanadi:

$$a_{k, i, j} = \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j}$$

Bu sonlar yordamida ushbu

$$b_{k,j} = \sum_{i=1}^n a_{k,i} j x_i$$

Formula orqali $X \rightarrow L(X, Y)$ chiziqli aks ettirishni

$$y_k = \sum_{i,j=1}^m a_{k,i,j} x_i x_j$$

Formula orqali esa $X \times X \rightarrow Y$ bichiziqli aks ettirishni aniqlash mumkin.

$F: X \rightarrow Y$ aks ettirishning x nuqtadagi kuchli differensial deb $F'(x)$ chiziqli operatorning $h \in X$ elementdagi $dF = F'(x)h$ qiymatiga teng. F aks ettirishning ikkinchi tartibli differensial deb $F''(x) \in B(X^2, Y)$ bichiziqli aks ettirishning (h, h) elementdagi qiymatiga aytiladi, ya'ni $d^2F = F''(x)(h, h)$. Shunga o'xshash n - tartibli differensial deb ushbu

$$d^n F = F^{(n)}(x)(h, h, \dots, h) \in Y$$

Elementga aytamiz $(F^{(n)}(x) \in B(X^n, Y))$.

1-teorema. X fazoning U ochiq to'plamida aniqlangan $F: U \rightarrow Y$ aks ettirishning n -tartibli $F^{(n)}(x)$ hosilasi ixtiyoriy $x \in U$ uchun mavjud bo'lsin. Agar $F^{(n)}(x)$ aks ettirish U to'plamda x ga nisbatan tekis uzluksiz bo'lsa, u holda quyidagi tenglik o'rinli:

$$F(x+h) - F(x) = F'(x)h + \frac{1}{2!} F''(x)(h, h) + \dots + \frac{1}{n!} F^{(n)}(x)(h, h, \dots, h) + \omega(x, h). \quad (2)$$

Bu yerda $\|\omega(x, h)\| = o(\|h\|^n)$

Isbot. Teoremani induksiya yordamida isbotlaymiz. $n=1$ uchun (2) tenglik 2.1-§ dagi (1) munosabat bilan ustma-ust tushadi. Endi $(n-1)$ uchun (2) tenglik o'rinli deb faraz qilaylik. U holda (2) tenglikni F' aks ettirishga $(n-1)$ uchun qo'llasak, ushbu

$$F'(x+h) = F'(x) + F''(x)(h) + \frac{1}{2!} F'''(x)(h, h) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} F^{(n)}(x)(h, h, \dots, h) + \omega_1(x, h) \quad (3)$$

Tenglik kelib chiqadi, bu yerda $\|\omega_1(x, h)\| = o(\|h\|^{n-1})$.

Hosil bo'lgan (3) munosabatni $[x, x+h]$ kesma bo'yicha integrallab, Nyuton-Leybnits formulasidan foydalansak, u holda

$$F(x+h) - F(x) = \int_0^1 F'(x+th) h dt = \int_0^1 \left\{ F'(x) + t F''(x)(h) + \frac{1}{2!} t^2 F'''(x)(h, h) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} F^{(n)}(x)(h, h, \dots, h) \right\} h dt + R_n$$

Bu yerda $R_n = \int_0^1 \omega_1(x, th) h dt$. Bundan

$$F(x+h) - F(x) = F'(x)(h) + \frac{1}{2!} F''(x)(h, h) + \dots + \frac{1}{(n)!} F^{(n)}(x)(h, h, \dots, h) + R_n$$

Shu bilan birga

$$\|R_n\| \leq \int_0^1 \|\omega_1(x, th)\| \|h\| dt = o(\|h\|^n)$$

Teoremadagi (2) tenglik *Taylor formulasi* deyiladi.

2.3-§. Normalangan fazolarda variatsion hisob elementlari

Variatsion hisobning asosiy masalasi- funkcionallarning ekstremumlarini topishdir. Bu paragrafda variatsion hisobning boshlang'ich masalalariga to'xtalib o'tamiz.

1. Ekstremumning zaruriy shartlari.

F haqiqiy funksional X Banax fazosida aniqlangan bo'lsin. Agar $x_0 \in X$ nuqtaning biror atrofida ixtiyoriy x uchun $F(x) - F(x_0) \geq 0$ (< 0) tengsizlik bajarilsa, F funksional x_0 nuqtada minimumga (maksimumga) ega deyiladi, F funksional x_0 nuqta esa minimum (maksimum) nuqtasi deyiladi. Maksimum va minimum nuqtalari F uchun ekstremum nuqtalari deyiladi.

Matematik analizdan ma'lumki, n o'zgaruvchili f funksiya $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ nuqtada ekstremumga ega bo'lib, differensiallanuvchi bo'lsa, u holda $df = 0$, ya'ni

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

Ekstremumning bu zaruriy sharti ixtiyoriy normalangan fazolar uchun ham o'rinli.

1-teorema. *Differensiallanuvchi F funksional x_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lishi uchun uning x_0 nuqtadagi differensial har bir h da nolga teng bo'lishi zarur, ya'ni*

$$F'(x_0)h \equiv 0.$$

Isbot. F differensiallanuvchi bo'lgani sababli

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = F'(x_0)h - o(h).$$

Agar $F'(x_0)h$ biror $h \in X$ uchun noldan farqli bo'lsa, yetarli darajada kichik λ haqiqiy son uchun $F'(x_0)(\lambda h) + o(\lambda h)$ ifodaning ishorasi $F'(x_0)(\lambda h)$ ning ishorasi bilan bir xil. $F'(x_0)$ chiziqli funksional bo'lgani sababli $F'(x_0)(\lambda h) = \lambda F'(x_0)h$. Demak, agar $F'(x_0)(\lambda h) \neq 0$ bo'lsa, $F(x_0 + h) - F(x_0)$ ayirma h yetarli kichik bo'lganda musbat ham, manfiy ham bo'lishi mumkin, ya'ni x_0 nuqtada F ekstremumga ega emas.

Misollar. 1. $C[a, b]$ fazoda ushbu

$$F(x) = \int_a^b f(t, x(t)) dt$$

Funksionalni ko'ramiz. Agar f funksiya birinchi tartibli uzluksiz hosilalarga ega bo'lsa, F funksional $C[a, b]$ fazoda differensiullanuvchi. Haqiqatan,

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^b [f(t, x+h) - f(t, x)] dt = \int_a^b f_x(t, x)h(t) dt + o(h).$$

Bundan

$$dF = \int_a^b f_x(t, x(t))h(t) dt.$$

Agar ixtiyoriy $h \in C[a, b]$ uchun $dF = 0$ bo'lsa, u holda $f'_x(t, x) = 0$. Haqiqatan, ixtiyoriy $x(t) \in C[a, b]$ uchun $f'_x(t, x)$ funksiya t ga nisbatan uzluksiz. Agar u biror $t_0 \in [a, b]$ uchun noldan farqli bo'lsa, ya'ni masalan, $f'_x(t_0, x(t_0)) > 0$ bo'lsa, u holda t_0 ning biror (α, β) atrofining har bir t nuqtasida ham $f(t, x(t)) > 0$.

Demak, ushbu

$$h(t) = \begin{cases} (t - \alpha)(\beta - t), & \alpha \leq t \leq \beta \\ 0, & \text{qolgan } t \in [a, b] \text{ uchun} \end{cases}$$

Funksiyani olsak, u holda

$$\int_a^b f'_x(t, x(t))h(t) dt > 0.$$

Bu ziddiyat $f'_x(t, x) = 0$ ekanligini ko'rsatadi. Demak, $f'_x(t, x(t)) = 0$ tenglama F funksional ekstremumga ega bo'lishi mumkin bo'lgan $x(t)$ egri chiziqning tenglamasidir.

2. $C[a, b]$ fazoda boshqa funksionalni olamiz:

$$F(x) = \int_a^b K(\xi_1, \xi_2) x(\xi_1) x(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

Bu yerda $K(\xi_1, \xi_2)$ funksiya $K(\xi_1, \xi_2) = K(\xi_2, \xi_1)$ shartni qanoatlantiruvchi uzluksiz funksiya. So`ngra

$$\text{Bundan } dF = 2 \int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2) x(\xi_1) h(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2.$$

Demak, $x \in C[a, b]$ ekstremum nuqtasi bo`lsa, u holda ixtiyoriy $h \in C[a, b]$ uchun

$$\int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2) x(\xi_1) h(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = 0.$$

Bundan 1-misoldagidek, ixtiyoriy $\xi_2 \in C[a, b]$ uchun

$$\int_a^b K(\xi_1, \xi_2) x(\xi_1) d\xi_1 = 0$$

tenglik kelib chiqadi.

x ta nisbatan bu tenglamaning yechimlaridan biri $x=0$. Boshqa yechimlar bor-yo`qligi  $K(\xi_1, \xi_2)$  funksiya bog`liq va u qo`shimcha tekshirishlarni talab qiladi.

2. Ekstremumning yetarli shartlari. Yana n o`zgaruvchili funksiyalarni qaytsak,  $df=0$  shartni qanoatlantiruvchi  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  nuqtada ekstremum mavjudligi ikkinchi differensialga bog`liq. Aniqrog`i, quyidagi iboralar o`rinli:

1. Agar $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiya $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ nuqtada minimumga (maksimumga) ega bo`lsa va  $d^2 f$  mavjud bo`lsa, u holda bu nuqtada

$$d^2 f \geq 0 \quad (d^2 f \leq 0).$$

2. Agar $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ nuqtada ushbu $d^2 f = 0$,

$$d^2 f = \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} dx_i dx_k > 0 (< 0) \quad (\exists^i : dx_i \neq 0)$$

Munosabatlar o`rinli bo`lsa, u holda $f(x)$ funksiya bu nuqtada minimumga (maksimumga) ega.

Boshqacha qilib aytganda, $df = 0$ shartni qanoatlantiruvchi nuqtada minimum (maksimum) bo'lishi uchun $d^2 f \geq 0$ ($d^2 f \leq 0$) bo'lishi zaruriy shart, $d^2 f > 0$ ($d^2 f < 0$) bo'lishi esa yetarli shart.

Endi shu masalalarni ixtiyoriy Banax fazosidagi funksionallar uchun ko'ramiz.

2-teorema. X Banax fazosida aniqlangan F haqiqiy funksional $x_0 \in X$ nuqtaning biron atrofida uzluksiz ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lsin. Agar shu funksional x_0 nuqtada minimumga ega bo'lsa, u holda ixtiyoriy $h \in X$ uchun

$$F''(h, h) \geq 0.$$

Isbot. 2.2-§ dagi Teylor funksiyasiga asosan

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = F'(x_0)h + \frac{1}{2!} F''(x_0)(h, h) + o(\|h\|^2)$$

Funksional x_0 nuqtada minimumga ega bo'lgani sababli 1-teoremaga asosan $F'(x_0)h = 0$.

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \frac{1}{2!} F''(x_0)(h, h) + o(\|h\|^2) \quad (1)$$

Agar biror $h \in X$ uchun $F''(h, h) < 0$ bo'lsa, u holda $F''(x_0)(\varepsilon h, \varepsilon h) = \varepsilon^2 F''(x_0)(h, h)$ tenglikka asosan $F''(x_0)(h, h) < 0$ shartni qanoatlantiruvchi h vektorning normasini ixtiyoriy kichik qilib tanlash mumkin. Ammo $\|h\|$ kichik bo'lganda $\frac{1}{2} F''(x_0)(h, h) + o(\|h\|^2)$ ifodaning ishorasi $F''(x_0)(h, h)$ ning ishorasiga teng, ya'ni

$$F(x_0 + h) - F(x_0) < 0.$$

Bu esa x_0 ning minimum nuqtasi ekanligiga zid.

Maksimum nuqtasi uchun ham shunga o'xshash teorema o'rinli.

Eksteremum mavjudligidan yetarli shartini Banax fazolariga to'g'ridan-to'g'ri o'tkazish mumkin emas. Ya'ni agar $F''(x_0)(h, h) > 0$ ($h \neq 0$) bo'lsa, x_0 nuqtada minimum bo'lishi shart emas.

Misol. l_2 fazoda funksionalni quyidagicha kiramiz:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{n^3} - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^4, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l_2.$$

θ nuqtada birinchi differensial nolga teng, chunki

$$F(\theta + h) - F(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{n^3} - \sum_{n=1}^{\infty} h_n^4$$

va

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\left\| \sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 - \sum_{n=1}^{\infty} h_n^4 \right\|}{\|h\|} \leq \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|h\|^2 + \|h\|^4}{\|h\|} = 0$$

Ikkinchi differensial esa $2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{n^3}$ qatorga teng, ya'ni ixtiyoriy h uchun musbat.

Ammo θ nuqtada funksional minimumga ega emas. Haqiqatan,

$$F(\theta) = 0, \quad F\left(0, 0, \dots, 0, \frac{1}{n}, 0, \dots\right) = \frac{1}{n^5} - \frac{1}{n^4} < 0$$

ya'ni nolning ixtiyoriy atrofida shunday x nuqta mavjudki,

$$F(x) < F(\theta).$$

Keltirilgan misoldan ravshanki, funksional biror nuqtada ekstremumga ega bo'lishi uchun kuchliroq shartlar kerak.

Agar $B(x, y)$ bichiziqli funksional bo'lsa, $B(x, x)$ funksional x ga nisbatan kvadratik funksional deyiladi. Agar shunday $c > 0$ son mavjud bo'lsaki, ixtiyoriy $x \in X$ uchun $B(x, x) \geq c\|x\|^2$ tengsizlik bajarilsa, $B(x, x)$ kvadratik funksional kuchli musbat deyiladi.

3-teorema. X fazodagi F funksional x_0 nuqtada minimumga ega bo'lishi uchun quyidagi shartlar kifoyadir:

- 1) $dF(x_0) = 0$
- 2) $d^2F(x_0)$ - kuchli musbat kvadratik funksional.

Isbot. Haqiqatan, $d^2F(x_0)(h, h) \geq c\|h\|^2$ va $c > 0$ bo'lsin. ε musbat sonni shunday

tanlaymizki, $\|h\| < \varepsilon$ bo'lganda (1) formuladagi $o(\|h\|^2) < \frac{c}{4}\|h\|^2$ tengsizlik bajarilsin. Bu holda (1) formulaga asosan $\|h\| < \varepsilon$ uchun

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \frac{1}{2} F''(x_0)(h, h) + o(\|h\|^2) > \frac{1}{2} c\|h\|^2 - \frac{1}{4} c\|h\|^2 = \frac{1}{4} c\|h\|^2 > 0,$$

ya'ni x_0 minimum nuqtasi.

2.4-§. “Ayrim funksionallarni ekstremimumlari” mavzusidagi dars ishlanmasi.

Amaliy mashg‘ulotning texnologiyasi

Vaqt – 2 soat	Talabalar soni: 20-30 nafar
O‘quv mashg‘ulotining shakli	Amaliy, kichik guruhlar bilan ishlash.
Amaliy mashg‘ulotning rejasi	<i>I.O‘tilgan dars mavzusini takrorlash, uy vazifalarini</i> tekshirish 1.1.O‘tgan amaliy mashg‘ulot mavzusini takrorlash ”Blits-so‘rov” o‘tkazish. <i>II.Yangi mavzuni o‘zlashtirish.</i> 2.1. Ayrim funksionallarni ekstremimumlariga doir nazariy ma’lumotlar. 2.2. Yangi mavzuga doir misollar yechish. (1-ilova) <i>III.Yangi mavzuni mustahkamlash.</i> 3.1.Yangi mavzuni mustahkamlash yuzasidan test topshiriqlari. (2-ilova) 3.2. ”BBB” metodi orqali talabalarning bilimini tekshirish.(3-ilova) 3.2. Uyga vazifa berish.(3-ilova)
O‘quv mashg‘ulotining maqsadi:	Talabalarning ayrim funksionallarni ekstremimumlariga doir misollarni yechish malaka va ko‘nikmalarini rivojlantirish
Pedagogik vazifalar: - Ayrim funksionallarni ekstremimumlarini eslatib o‘tadi;	O‘quv faoliyatining natijalari. - Ayrim funksionallarni ekstremimumlari to‘g‘risida o‘z fikrini ifodalaydi; - Ayrim funksionallarni ekstremimumlariga doir

- Ayrim funksionallarni ekstremimumlariga doir misollarni yechish malakalarini shakllantiradi	misollarni yechish malakalari shakllanadi.
O'qitish uslubi va texnikasi	Savol-javob.
O'qitish vositalari	Tarqatma materiallar, proyektor, doska, bo'r.
O'qitish shakli	kichik guruhlarda ishlash.
O'qitish sharoitlari	Namunadagi auditoriya.

Amaliy mashg'ulotning texnologik xaritasi

Bosqichlar, vaqti	Faoliyat mazmuni	
	O'qituvchi	Talaba
1-bosqich. Kirish (10 min)	1.1. O'quv mashg'ulotining mavzu va rejasini ma'lum qiladi. Erishadigan natijalar bilan tanishtiradi.	1.1. Eshitadilar va yozadilar, javob beradilar.
2-bosqich. Asosiy (60 min)	2.1. O'tilgan dars mavzusini takrorlash, uy vazifalarini tekshirish. 2.2. Ayrim funksionallarni ekstremimumlariga doir guruhlariga savollar kartochkalarini tarqatadilar. 2.3. Yangi mavzuga doir misollar yechiladi. 2.4. Yangi mavzuni mustahkamlash yuzasidan har bir guruhga test topshiriqlari beriladi. 2.5. Har bir guruhga "BBB" jadvalini to'ldirish topshiriq qilib beriladi.	2.1. Eshitadilar, yozadilar. 2.2. Misollar yechadilar. Savollarga javob beradilar. 2.3. Misollar yechadilar. 2.4. Test topshiriqlarini bajaradilar. 2.5. "BBB" jadvali to'ldiradilar.
3-bosqich	3.1. Mavzuga xulosa chiqaradi. Asosiy	3.1. Eshitadilar,

Yakuniy (10 min)	masala ustida to'xtaladi. Faol talabalarni rag'batlantiradi. 3.2 Mustaqil ish uchun topshiriq beriladi	savollarni beradi. 3.2. Yozib oladilar.
-----------------------------	---	--

Darsning maqsadi:

- mazkur mavzu yuzasidan talabalarning oliy va o'rta maxsus ta'lim matematikasidan olgan bilimlarini takrorlash, tartiblash, umumlashtirish asosida ma'ruza
- bilimlar darajasini oliy ta'lim talablari asosida chuqurlashtirish hamda
- talabalarning ayrim funksionallarni ekstremimumlari tushunchalarini kengaytirish;
- Ayrim funksionallarni ekstremimumlariga doir misollarni yechish ko'nikmalarini shakllantirish;
- talabalarning matematik dunyoqarashini kengaytirish.

Mashg'ulotning ta'limiy vazifasi:

- mazkur mavzu yuzasidan talabalar nazariy, amaliy bilimlarini mustahkamlash, yaxshi o'zlashtirish, tartiblash va umumlashtirish, sifat darajasini ko'tarish, tanqidiy, mantiqiy fikrlashni shakllantirish, g'oyalarni, fikrlarni, dalillarni yozma va og'zaki mantiqan to'g'ri tashkil qilingan nutq orqali bayon qilish, mavzuga doir misollarni yecha olish malaka va ko'nikmalarini takomillashtirish uchun
- ayrim funksionallarni ekstremimumlarini amaliy masalalarni yechishga tatbiqlari;
- ayrim funksionallarni ekstremimumlarini nazariy asoslarini amaliy misollarni yechishga tatbiqlari

Mashg'ulotning tarbiyaviy vazifasi:

- ishga ijodiy yondashish, o'z faoliyatining samarali bo'lishiga qiziqish;
- imkoniyatlarini ko'rsatish ehtiyojini his qilish;
- o'z qobiliyati va imkoniyatlarini tekshirish;

- o'z shaxsini takomillashtirishga intilish;
- muammoga diqqatini jamlay olish;
- muammolar va vaziyatlarni turli nuqtai nazardan muhokama qilish;
- murosali qarorlarni topa olish mahorati;
- o'zgalar fikriga hurmat, xushmuomalalik, faollik;
- jamoa bilan ishlash;
- kabi xususiyatlarni talabalarda shakllantirish va rivojlantirish;

Mashg'ulotning rivojlantiruvchilik vazifasi:

- talabalarning mantiqiy fikrlashini rivojlantirish;
- talabalarning absrakt fikrlashini rivojlantirish;

II. Yangi mavzuni o'zlashtirish.

- 2.1. Ayrim funksionallarni ekstremimumlariga doir nazariy ma'lumotlar (1-ilova)
- 2.2. Ayrim funksionallarni ekstremimumlariga doir misollar yechish. (2-ilova)

III. Yangi mavzuni mustahkamlash.

- 3.1. Yangi mavzuni mustahkamlash yuzasidan test topshiriqlari. (3-ilova)
- 3.2. "BBB" jadvali to'ldiriladi. (4-ilova)
- 3.2. O'tilgan dars mavzusini takrorlash uchun quyidagi savollar beriladi:
 1. Variatsional hisobning asosiy masalasi nima ?
 2. Ekstremum nuqtalari deganda nimani tushunasiz ?
 3. Kvadratik funksional tushunchasini ayting?
 4. Kuchli musbat tushunchasiga izoh bering ?
- 3.3. Uyga vazifa berish.

O'tilgan darsni takrorlash uchun guruhlariga o'quv topshiriqlari beriladi (jadval proektor yordamida ekranda ko'rsatiladi)

(1-ilova)

1-topshiriq

1-guruhga 1. Ekstremumni topishning qanday shartlari mavjud? 2. Ekstremumning zaruriy sharti qanday normalangan fazolar uchun o`rinli bo`ladi?	2-guruhga 1. Variatsion hisobning asosiy masalasi qaysi? 2. $f'_x(t, x(t)) = 0$ tenglama qaysi egri chiziqning tenglamasi hisoblanadi?
3-guruhga 1. F funksional x_0 nuqtada ekstremumga ega bo`lishi uchun o`sha nuqtadagi differensial qanday qiymat qabul qilishi lozim? 2. . Ekstremum mavjudligining yetarli shartini Banax fazolariga o`tkazish mumkinmi?	4-guruhga 1. Ekstremumning zaruriy shartini tushuntirib bering. 2. <math>X</math> fazoda <math>F</math> funksional <math>x_0</math> nuqtada minimumga ega bo`lishi uchun qanday shartlarni bajarishi kerak?

Topshiriqni birinchi bajarib bo`lgan guruh a`zolaridan biri doskada izohlab misollarni yechadi. Qolgan guruhlar javob varaqalarini o`qituvchiga taqdim etadilar.

II. Yangi mavzuni o`zlashtirish.

Matematika va mexanikaning turli masalalari

$$F(x(t)) = \int_a^b f(t, x(t), x'(t)) dt \quad (1)$$

Funksionalning $C'[a, b]$ Banax fazosida ekstremumini hisoblashga keltiriladi. Agar integral ostidagi $f(t, x, y)$ funksiyaning xususiy hosilalari $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ mavjud va uzluksiz deb hisoblasak, $F(x(t))$ funksional Freshe ma`nosida differensiallanuvchi bo`ladi. Avvalgi mavzudagi ekstremumning zaruriy shartiga binoan $F(x(t))$ funksionalning ekstremumi (agar u mavjud bo`lsa)

$$F'(x_0(t)) = 0 \quad (2)$$

Tenglamani qanoatlantiradi. Demak, funksionalning ekstremal qiymati beruvchi $x_0(t)$ funksiyani faqat (2) tenglamaning yechimlari orasida izlashimiz kerak. Xususan, agar (2) tenglama yechimga ega bo'lmasa, ekstremum mavjud emas.

$F(x(t))$ funksionalning kuchli differensialini hisoblab, ushbu ifodani qilamiz:

$$F'(x(t))h(t) = \int_a^b [f_x h(t) + f_{x'} h'(t)]$$

bu yerda $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ va $f_{x'} = \frac{\partial f}{\partial x'}$.

Demak, (2) ga ko'ra ixtiyoriy $h(t) \in C^1[a, b]$ uchun

$$\int_a^b [f_x h(t) + f_{x'} h'(t)] dt = 0 \quad (3)$$

Munosabat bajarilishi zarur. Agar $\frac{d}{dt} f_{x'}$ mavjud va uzluksiz deb faraz qilsak, bo'laklab integrallash yordamida ushbu

$$\int_a^b f_{x'} h'(t) dt = f_{x'} h(t) \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt} f_{x'} h(t) dt$$

Tenglikka ega bo'lamiz. Demak, (3) quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\int_a^b \left[f_x - \frac{d}{dt} f_{x'} \right] h(t) dt + f_{x'}(b, x(b), x'(b))h(b) - f_{x'}(a, x(a), x'(a))h(a) = 0$$

Bu yerda $h(t) \in C^1[a, b]$ ixtiyoriy bo'lgani uchun:

$$f_{x'}(a, x(a), x'(a)) = 0; \quad f_{x'}(b, x(b), x'(b)) = 0 \quad (4)$$

$$\int_a^b \left[f_x - \frac{d}{dt} f_{x'} \right] h(t) dt = 0 \quad (5)$$

Shartlarni hosil qilamiz.

Lemma.(Lagranj lemmasi).

Agar $\varphi(t)$ uzluksiz funksiya bo'lib, ixtiyoriy $h(t) \in C^1[a, b]$ funksiya uchun

$$\int_a^b \varphi(t) h(t) dt = 0$$

Tenglik bajarilsa, $\varphi(t) \equiv 0$ bo'ladi.

Demak, lemmaga ko'ra (5) shartni quyidagicha yozish mumkin:

$$f_x - \frac{d}{dt} f_{x'} = 0. \quad (6)$$

Shunday qilib, $x(t)$ funksiya (1) funksionalning ekstremimumini berishi uchun (4) va (6) shartlar bajarilishi zarur. Ravshanki, (6) shart $x(t)$ ga nisbatan ikkinchi tartibli differensial tenglama. Odatda (6) tenglama *Eyler tenglamasi* deyiladi, tenglamaning har qanday yechimi F funksionalning ekstremali deyiladi.

Misol.

$$F(x(t)) = \int_0^1 \{x^2(t) - 2tx(t) + [x'(t)]^2 - 2x'(t) + t\} dt$$

Funksionalni ekstremumga tekshiraylik. Bu yerda

$f(t, x(t), x'(t)) = x^2(t) - 2tx(t) + [x'(t)]^2 - 2x'(t) + t$. Eyler tenglamasi (6) quyidagi ko'rinishga ega:

$$2x(t) - 2t - \frac{d}{dt} [2x'(t) - 2] = 0$$

ya'ni $x''(t) - x(t) + t = 0$.

Bu tenglamaning umumiy yechimi

$$x(t) = t + c_1 e^t + c_2 e^{-t}.$$

O'zgarma c_1 va c_2 larni topish uchun (4) shartlardan foydalanamiz.

$$f_{x'} = 2x'(1) - 2 = 0,$$

Ya'ni

$$2x'(0) - 2 = 2x'(1) - 2 = 0,$$

Demak

$$x'(0) = x'(1) = 0; \quad c_1 = c_2 = 0.$$

Shunday qilib, $F(x(t))$ funksional faqat $x(t) = t$ funksiyadagina ekstremumga erishishi mumkin. Topilgan yechim haqiqatan ham $F(x(t))$ funksionalning minimumini berishi uchun tengsizlikdan kelib chiqadi:

$$F(x(t)) = \int_0^1 \{ [x(t)-t]^2 + [x(t)-1]^2 + t - t^2 - 1 \} dt \geq \int_0^1 (t - t^2 - 1) dt = F(t); \quad \forall x(t) \in C^1[0,1]$$

Yuqorida biz (1) funksionalni $C^1[a,b]$ fazoda hech qanday qo`shimcha shartlar qo`ymagan holda ekstremumini topish masalasini ko`rdik. Lekin ko`pgina amaliy masalalar ekstremumni butun $C^1[a,b]$ fazoda emas, balki ba'zi qo`shimcha shartlarni qanoatlantiruvchi to`plam ostida izlashni taqozo qiladi. Masalan, (1) funksionalning ekstremumini

$$M = \{x(t) \in C^1[a,b]: x(a) = A, x(b) = B\}$$

Funksiyalar sinfida topish masalasi variatsion hisobning asosiy masalasi deyiladi. Bu holda $h(t)$ orttirmani shunday tanlashimiz kerakki, natijada $x(t) \in M$ bo`lsa, $x(t) + h(t) \in M$ bajarilishi zarur. Demak, $h(a) = h(b) = 0$. Bu tenglikni hisobga olsak (3) dan

$$F'(x(t))h(t) = \int_a^b \left[f_x - \frac{d}{dt} f_{x'} \right] h(t) dt$$

ni hosil qilamiz. Ya'ni asosiy masala uchun ekstremumning zaruriy sharti (Eylar tenglamasi) quyidagidan iborat:

$$f_x - \frac{d}{dt} f_{x'} = 0; \quad x(a) = A; \quad x(b) = B. \quad (7)$$

2-topshiriq

Chiziqli normalangan fazoda quyidagi xossalarni o`rinli bo`lishini ko`rsating.

1-guruhga

Agar $x_n \rightarrow x$ bo`lsa, $\{x_n\}$ chegaralangan ketma – ketlik

2-guruhga

Agar $y_n \rightarrow y$ bo'lsa, $\|x_n - y_n\| \rightarrow \|x - y\|$

3-guruhga

Agar $x_n \rightarrow x$ bo'lsa, $\|x_n - y\| \rightarrow \|x - y\|$

4-guruhga

Har qanday x, y elementlar uchun $\|x\| \leq \max\{\|x + y\|, \|x - y\|\}$ o'rinli.

Qaysi guruh a'zolari birinchi savollarga tayyor bo'lsalar javob beradilar. Keyin har bir guruhdan bittadan vakil chiqib doskada savollarga qisqa vaqt ichida javob beradilar.

Yangi mavzuga doir misollar yechish.

Misol.

Tekislikda (a, A) va (b, B) nuqtalarni birlashtiruvchi va uzunligi eng qisqa bo'lgan silliq chiziqni toping. Ravshanki, analitik formada masala quyidagicha yoziladi:

$x(a) = A, x(b) = B, x(t) \in C^1[a, b]$ funksiyalar ichida $\int_a^b \sqrt{1 + [x'(t)]^2} dt$ integralning eng

kichik qiymatini beruvchi funksiyani toping. Bu yerda $f(t, x(t), x'(t)) = \sqrt{1 + [x'(t)]^2}$.

Demak, (7) ga ko'ra:

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{x'(t)}{\sqrt{1 + [x'(t)]^2}} \right) = 0; \quad x(a) = A, \quad x(b) = B,$$

Ya'ni

$$\frac{x'(t)}{\sqrt{1 + [x'(t)]^2}} = c$$
$$x'(t) = c_1 \quad \left(c_1 = \pm \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}} \right).$$

Demak, $x(t) = c_1 t + c_2$. O'zgarmas c_1 va c_2 larni $x(a) = A$ va $x(b) = B$ shartlardan topamiz.

Javob:
$$x(t) = \frac{A - B}{a - b} t + \frac{aB - bA}{a - b}.$$

(3-ilova)

3-topshiriq.

1-guruhga

Haqiqiy sonlar to'plamida λ haqiqiy sonning normasini $\|x\| = |\lambda|$ tenglik bilan aniqlasak, bu to'plam chiziqli normalangan fazo bo'ladimi?

2-guruhga

R_n to'plamda element normasini quyidagicha kiritamiz: $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$ Bu to'plam kiritilgan normaga nisbatan normalangan fazo bo'ladimi?

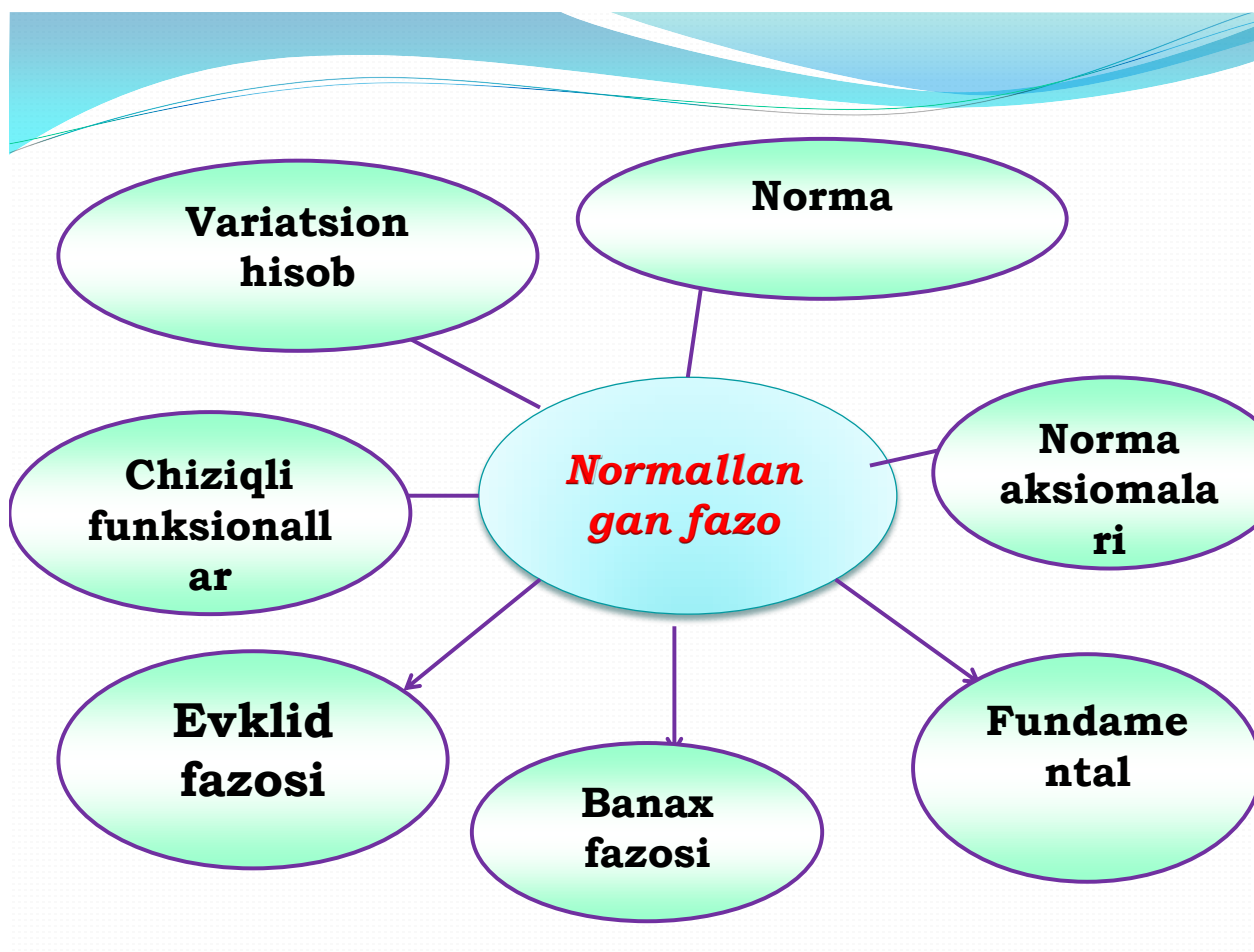
3-guruhga

$\|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ ko'rinishidagi funktsionallar norma shartini qanoatlantiradimi?

4-guruhga

m – vektor fazoda element normasini ushbu $\|x\| = \sup_{1 \leq n < \infty} |x_n|$ son orqali aniqlasak, bu fazo ham Banax fazosi bo'ladimi?

Klaster



”B-B-B” (“Bilaman. Bilishni xoxlayman. Bilib oldim”) metodi

Talabalar guruhlarga bo'linadilar. Yozuv taxtasi uch qismga ajratiladi. Birinchi bandning yuqori qismiga ”Bilaman”, ikkinchi bandning yuqori qismiga ”Bilishni xoxlayman”, uchinchi bandning yuqori qismiga esa ”Bilib oldim” degan so'zlar yoziladi. So'ngra o'qituvchi talabalardan mavzu yuzasidan qanday ma'lumotlarga ega ekanliklarini so'raydi va bildirilgan fikrlarni ”Bilaman” nomli bandiga yozib qo'yadi. Ushbu harakat guruhlar tomonidan fikrlar to'la bayon qilinganga qadar davom etadi. Mazkur jarayonda guruhlarning barcha a'zolari faol ishtirok etishlariga ahamiyat berish zarur. Talabalar tomonidan bildirilayotgan noto'g'ri fikrlar ham inkor etilmasligi zarur. Keyingi bosqichda o'qituvchi talabalarda yangi mavzu bo'yicha qanday ma'lumotlarni o'zlashtirish istagida ekanliklarini so'raydi va talabalarni yana o'ylashga da'vat qiladi. Guruhlardan navbati bilan fikr so'raladi. Talabalar o'z xulosalari asosida fikrlarini bayon etadilar, ushbu fikrlar ”Bilishni xoxlayman” nomli ustunga yozib boriladi. So'nggi bosqichda talabalarga mavzuga oid ma'lumotlar tarqatiladi. Ushbu ma'lumotlar mavzu bo'yicha eng asosiy tushunchalarni o'z ichiga oladi. Talabalar ma'lumotlar bilan tanishib chiqqandan so'ng fikr yuritishlari hamda mavzuga oid yana qanday ma'lumotlarni o'zlashtirganliklarini aniqlashlari lozim. Talabalar tomonidan bildirilgan fikrlar ”Bilib oldim” nomli ustunga yozib boriladi.

”B-B-B” jadvali

Bilaman	Bilishni xoxlayman	Bilib oldim
Variatsion hisobning asosiy masalasi- funkcionallarning ekstremumlarini topishdir.	Ekstremumini topish masalasini qanday?	$f_x - \frac{d}{dt} f_{x'} = 0$ tenglama Eyler tenglamasi deyiladi.

Darsni yakunlashda talabalarga quyidagi krossvord taqdim etiladi.

				E										
				K										
				S										
				T										
				R										
				E										
				M										
				U										
				M										

1. Har qanday fundamental ketma - ketlik bo‘ladi.
2. Skalyar ko‘paytma kiritilgan chiziqli fazo fazosi deyiladi.
3. Normalangan E fazoning E_0 chiziqli qism fazosi yopiq bo‘lsa, u holda E_0 fazo E fazoning fazosi deyiladi.
4. x va y vektorlar ortogonal deyiladi, agar $(x, y) = 0$ bo‘lsa, $\{x_\alpha\}$ vektorlar sistemasi sistema deyiladi
5. hisobning asosiy masalasi- funksionallarning ekstremumlarini topishdir.
6. Har bir $h \in X$ uchun $L_x h$ element F aks ettirishning x nuqtadagi *kuchli* deyiladi.
7. Norma kiritilgan fazo fazo deyiladi.
8. E normalangan fazoda $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ ketma – ketlik berilgan bo‘lsin. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun shunday $n(\varepsilon)$ son mavjud bo‘lib, $\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$ tengsizlik n natural sonning $n(\varepsilon)$ dan katta barcha qiymatlari va barcha $p \in N$ sonlar uchun bajarilsa, u holda $\{x_n\}$ ketma - ketlik ketma-ketlik deyiladi.
9. Bir xil o‘lchamli bo‘lgan barcha chiziqli normalangan fazolar o‘zaro bo‘ladi.

Dars yakunida guruhlar to'plagan ballari hisoblanadi. Guruh a'zolariga taqsimlanadi. Guruh a'zolaridan qatnashmagan talabalar soniga qarab jarima ballari to'plagan ballardan olib tashlanadi. Qolgan ballar guruh a'zolariga taqsimlanadi

III. Yangi mavzu bo'yicha xulosalar yasash va mavzuni mustahkamlash.

Demak, uyga vazifalar quyidagilardan iborat.

Ayrim funksionallarni ekstremumlarini mavzusini o'qib kelish.

2.5-§. Mavzuga doir standart va nostandart testlar to'plami

1. Berilgan natural son uchun hamma n o'lchamli vektorlar to'plami (kiritilgan amallar bilan birgalikda)..... deyiladi.

- A) n o'lchamli vektor fazo
- B) chiziqli fazo
- C) normalangan fazo
- D) R' fazo

2. Quyidagilardan qaysilari chiziqli fazo tashkil etadi?

- A) barchasi tashkil qiladi
- B) Kompleks sonlar to'plami $(C, +, \cdot)$
- C) Bir o'zgaruvchili darajasi birdan oshmaydigan $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$
- D) R^n - no'lchovli vektor fazo

3. Elementlari funksiyalar yoki sonli ketma-ketliklar bo'lgan chiziqli fazolar nima deyiladi?

- A) Funksional fazolar
- B) chiziqli fazolar
- C) normalangan fazo
- D) n o'lchamli vector fazo

4. Quyidagilardan qaysi biri funksional fazo tashkil etadi?

- A) l_2 haqiqiy fazo. Uning elementlari $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ ketma-ketlik.
- B) n o'lchamli chiziqli fazo
- C) R to'g'ri chiziq
- D) barchasi

5. X haqiqiy chiziqli fazo bo'lib, uning har biri x elementiga haqiqiy $\|x\|$ belgilangan sonni mos qo'yuvchi $\|\cdot\| : x \rightarrow R$ akslantirish berilgan bo'lsin. Agar bu akslantirish

- 1) $\|x\| \geq 0$ bo'lib, $x = \theta$ uchun $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- 2) $\forall \lambda$ son uchun $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

shartlarni qanoatlantirsa deyiladi.

- A) Norma
- B) Chiziqli fazo
- C) Funksional fazo
- D) Vektor fazo

6. Norma aksiomalari nechta?

- A) 3
- B) 5
- C) 8
- D) 4

7. Norma kiritilgan fazo fazo deyiladi.

- A) normalangan fazo
- B) metrik fazo
- C) to'la metrik fazo
- D) to'g'ri javob yo'q

8. x elementning normasini toping.

- A) $\|x\|$
- B) $\|x\| \geq 0$
- C) $|x| + |y|$
- D) barchasi to'g'ri

9. Har qanday normalangan fazobo'ladi.

- A) metrik fazo
- B) chiziqli norma
- C) funksional fazo
- D) to'g'ri javob yo'q

10. Norma aksiomalarini toping.

- A) barchasi to'g'ri
- B) $\|x\| \geq 0$ bo'lib, $x = \theta$ uchun $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- C) $\forall \lambda$ son uchun $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- D) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

11. Norma aksiomalarini toping.

A) $\|x\| \geq 0 \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

B) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

C) $x + y = y + x$

D) $1 \cdot x = x \cdot x$

12. Nol, θ elementning ε atrofi to'plamga aytiladi.

A) $U = \{x : \|x\| < \varepsilon\}$

B) $U = \{x : \theta \leq \|x\| \leq \varepsilon\}$

C) $U = \{x : \|x - \theta\| \leq \varepsilon\}$

D) $U = \{x : \|x_n - x\| < \varepsilon\}$

13. X normalangan fazoning birlik sharini toping.

A) $X_1 = \{x : \|x\| \leq 1\}$

B) $X_1 = \{x : \|x\| \leq 0\}$

C) $X_1 = \{x : \|x\| \leq r\}$

D) $X_1 = \left\{x : \|x\| \leq \frac{r}{2}\right\}$

14. To'la normalangan fazo nima deyiladi?

A) Banach fazosi

B) fundamental fazo

C) chiziqli fazo

D) to'la chiziqli fazo

15. n o'lchamli R^n haqiqiy fazoda $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ element uchun normani toping.

A) barchasi to'g'ri

B) $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \rightarrow R_2^n$

C) $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| \rightarrow R_1^n$

D) $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \rightarrow R_\infty^n$

16. $C[a, b]$ fazodagi normani toping.

A) $\|f\| = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|$

B) $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$

C) $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$

D) To'g'ri javob yo'q

17. m chiziqli fazoda $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ elementning normasini toping.

$$A) \|x\| = \sup_{1 \leq n \leq \infty} |x_n|$$

$$B) \|f\| = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|$$

$$C) \|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

D) Mavjud emas

18. $C_2[a, b]$ kvadrati bilan integrallovchi uzluksiz funksiyalar fazosida normani toping.

$$A) \|x\| = \sqrt{\int_a^b x^2(t) dx}$$

$$B) \|f\| = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|$$

$$C) \|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

D) Mavjud emas

19. $C_1[a, b]$ $[a, b]$ da uzluksiz funksiyalar normasini toping

$$A) \|f\| = \int_a^b |f(x)| dx$$

$$B) \|x\| = \sqrt{\int_a^b x^2(t) dx}$$

$$C) \|f\| = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|$$

$$D) \|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

20. $C_1[a, b]$ $[a, b]$ da uzluksiz funksiyalar normasini toping

$$A) \|f\| = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|$$

$$B) \|x\| = \sqrt{\int_a^b x^2(t) dx}$$

$$C) \|f\| = \int_a^b |f(x)| dx$$

$$D) \|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

21. $D^n[a, b]$ $[a, b]$ da barcha n -tartibli xosilalargacha uzluksiz bo'lgan funksiyalar norasini toping

$$A) \|f\| = \max_{a \leq t \leq b} |f^k(x)| \quad k = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$B) \|x\| = \sqrt{\int_a^b x^2(t) dx}$$

$$C) \|f\| = \int_a^b |f(x)| dx$$

$$D) \|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

22. Evklid fazo deb qanday fazoga aytiladi.

A) Skalyar ko'paytma kiritilgan fazo

B) normalangan fazo

C) to'la vektor fazo

D) to'la normalangan fazo

23. Skalyar ko'paytma yordami bilan Evklid fazosida ikki element orasidagi burchakni toping.

A) $\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$

B) $\cos \varphi = \frac{(x, y)}{x^2 y^2} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$

C) $\cos \varphi = \frac{\|x\| \|y\|}{(x, y)} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$

D) $\cos \varphi = \sqrt{x^2 + y^2} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$

24. Agar x element A to'plamning har bir elementiga ortogonal bo'lsa, u holda deyiladi.

A) x element A to'plamga ortogonal

B) x element A to'plamda mavjud

C) x element A to'plamda mavjud emas

D) A chiziqli to'plam

25. A_1 to'plamning har bir elementi A_2 to'plamning ixtiyoriy elementiga ortogonal bo'lsa A_1 va A_2 to'plamlar deyiladi.

A) ortogonal

B) normalangan

C) chiziqli

D) fundamental

26. Agar $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ norma ma'nosida yaqinlashsa, u holda skalyar ko'paytmaning uzluksizligini ko'rsating.

A) $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$

B) $(x_n, y_n) \rightarrow (\lambda x, \lambda y)$

C) $(x_n, y_n) \rightarrow |x - y|$

D) $(x_n, y_n) \rightarrow |x + y|$

27. Evklid fazosida $\forall x, y$ elementlari uchun parallelogram formulasini ko'rsating.

A) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

B) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

C) $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

D) Evklid fazosida mavjud emas

28. Evklid fazosining to'ldiruvchisi qanday fazo bo'ladi?

- A) Evklid fazo
- B) Banax fazo
- C) har qanday chiziqli fazo
- D) barchasi to'g'ri

29. Gilbert fazosi deb ... aytiladi.

- A) cheksiz o'lchamli to'la Evklid fazoga
- B) normalangan fazoga
- C) chiziqli vektor fazoga
- D) har qanday R^n fazoga

30. Cheksiz o'lchamli to'la Evklid fazosi deyiladi.

- A) Gilbert fazosi
- B) Banax fazosi
- C) normalangan fazo
- D) chiziqli vektor fazo

31. l_2 fazoning elementlari $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ shartni qanoatlantiruvchi $x = (x_1 \ x_2 \ \dots x_n \ \dots)$ ketma-ketliklardan iborat bo'lsa, bu fazoda skalyar o'paytma qanday aniqlanadi?

- A) $(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$
- B) $(f, g) = \int_a^b f(t) \cdot g(t) dt$
- C) $(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i \cdot y_i|$
- D) $(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|$

32. $L_2[a, b]$ - fazo $[a, b]$ oraliqda kvadrati bilan integrallovchi funksiyalar fazosida skalyar ko'paytmani toping.

- A) $(f, g) = \int_a^b f(t) \cdot g(t) dt$
- B) $(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$
- C) $(f, g) = \sqrt{\int_a^b f(t) g(t) dt}$
- D) $(f, g) = \sqrt{\int_a^b f(t) dg(t)}$

33. $\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ norma qaysi fazo elementlari normasi bo'ladi.

A) $C[a, b]$ $[a, b]$ da uzluksiz funksiya

B) R_1^n fazo

C) l_2 fazo

D) l_1 fazo

34. . Quyidagilardan qaysi biri funksional fazo tashkil etadi?

A) l_2 haqiqiy fazo. Uning elementlari $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ ketma-ketlik.

B) n o'lchamli chiziqli fazo

C) R to'g'ri chiziq

D) barchasi

35. . Har qanday normalangan fazobo'ladi.

A) metrik fazo

B) chiziqli norma

C) funksional fazo

D) to'g'ri javob yo'q

36. Evklid fazo deb qanday fazoga aytiladi.

A) Skalyar ko'paytma kiritilgan fazo

B) normalangan fazo

C) to'la vektor fazo

D) to'la normalangan fazo

37. A_1 to'plamning har bir elementi A_2 to'plamning ixtiyoriy elementiga ortogonal bo'lsa A_1 va A_2 to'plamlar deyiladi.

A) ortogonal

B) normalangan

C) chiziqli

D) fundamental

38. Evklid fazosining to'ldiruvchisi qanday fazo bo'ladi?

A) Evklid fazo

B) Banach fazo

C) har qanday chiziqli fazo

D) barchasi to'g'ri

39. . Evklid fazo deb qanday fazoga aytiladi.

A) Skalyar ko'paytma kiritilgan fazo

B) normalangan fazo

C) to'la vektor fazo

D) to'la normalangan fazo

40. . Ava B nuqtalarni tutashtiruvchi uzluksiz egri chiziqlar to'plamida aniqlangan funksionalning minimumini topish ... haqidagi masaladir .

A) Braxistoxron

- B Eyler
- C Enshteyn
- D Evklid

41. Funksional analiz metodlari bilan yechiladigan masalalarni ko'rsating ?

- A Barcha javoblar to'g'ri
- B Ikki nuqta orasidagi tortilgan og'irlik ipining muvozanati haqidagi masala
- C Tortishish kuchi tasiridagi haqidagi masalalar
- D Sirtida geodezik chiziqlarni topish

42 Agar U funksionalning x_0 nuqtaning $O_\delta(x_0)$ atrofida $\Delta Ux = Ux - Ux_0 = U(x_0 + h) - Ux_0$ orttirmasini ko'rsating ?

- A $\Delta Ux = L(x_0, h) + r(x_0, h)$
- B $Ux = \int_a^b f(z, x(t)) dt$
- C $Uy = \int_a^b F(x, y, y^1) dx$
- D $F - y^1 F y^1 = c$

43. Variatsion hisob cheksiz o'lchamli fazolardadeyiladi .

- A Differensial hisob
- B O'lchovli hisob
- C Funksional hisob
- D Integral hisob

44. Agar $O_\delta(x_0) = \left\{ \begin{array}{l} x \in E, \|x - x_0\| < \delta \text{ atrofida mavjud bo'lib bu atrofda olingan } \forall x \\ \text{uchun } F(x_0) < F(x) \text{ bo'lsa } F \text{ funksional } x_0 \text{ nuntada ... ega} \\ \text{bo'ladi.} \end{array} \right\}$

- A Maksimumga
- B O'lchovga
- C Uzilishga
- D Minimumga

45. Agar x_0 nuqtaning $O_\delta(x_0)$ atrofida mavjud bo'lib bu $\forall x$ uchun $F(x_0) < F(x)$ bo'lsa F funksional x_0 nuqtada ega deyiladi.

- A Minimumga
- B O'lchovga
- C Maksimumga
- D Uzilishga

46 Funksional variatsiyani ko'rsating .

- A $\delta F(y, h) = \int_a^b \left(\frac{\delta f}{\delta y} h(x) + \frac{\delta f}{\delta y^1} h(x) \right) dx$
- B $\int_a^b \left(\frac{\delta f}{\delta y} h(x) + \frac{\delta f}{\delta y^1} h(x) \right) dx = 0$
- C $f_y^1 - f_{yy^1} y^1 - f_{y^1 y^1} y^{11} = 0$

D $Uy = \int_a^b F(x, y, y^1)$

47. Agar differensiallanuvchi $F(x)$ funksionalning x_0 nuqtadaega bo'lsa, u holda uning $\delta F(x_0, h)$ variatsiyasi x_0 nuqtadagi normasi yetarlicha kichik bo'lgan h lardateng boladi .

A eksterimumga , nolga

B minimumga birga

C eksterimumga birga

D maksimumga nolga

48. Izlanayotgan egri chiziqni I .Bernullideb atagan .

A braxistoxron

B uzluksiz

C funksional

D variatsiya

49. Variatsion hisobning differensial tenglamaga keltirilmasdan yechiladigan qanday usuli bor?

A Bunda izlanayotgan funksiyaga ketma- ket yaqinlashish metodidan.

B Bunda izlanayotgan funksiyaga yaqinlashish metodidan.

C Bunda izlanayotgan funksiyaga yaqinlashish qatoridan .

D Bunda izlanayotgan funksiyaga ekvivalent funksiya topish.

50. Variatsion hisobning funksiyaga ketma-ket yaqinlashish metodidan foydalanib ketma- ketlik tuzish nimaga bo'g'liq bo'ladi?

A Qaralayotgan funksional ko'rinishga.

B Qaralayotgan funksiyaga.

C Qaralayotgan funksiya yaqinlashishiga.

D Qaralayotgan funksiya hadlariga.

To'g'ri tenglikni toping.

1.	Norma kiritilgan L chiziqli fazo chiziqlifazo deyiladi	a	Banax
2.	Agar X chiziqli normalangan fazodagi ixtiyoriy $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda X to'la normalangan fazo yokifazosi deyiladi.	b	Differensiallanuvchi
3.	ℓ_2 fazoda x elementning normasi:	c	Gipertekislik
4.	Chekli o'lchamli normalangan fazolarda har qanday qism fazodir.	d	Normalangan
5.	$B(x, x')$ bichiziqli aks ettirishning	e	$f(a) = 0$

	normasi:		
6.	E vektor fazoning H qism fazosi uchun $\text{codim } H = 1$ bo'lsa, H deyiladi.	F	Freshe
7.	 tenglama H gipertekislikning tenglamasi deyiladi.	G	Yopiq
8.	L_x chiziqli operator esa F aks ettirishning x nuqtadagi kuchli hosilasi yokihosilasi deyiladi	H	Gilbert
9.	To'la Yevklid fazosifazosi deyiladi.	I	$\ B\ = \inf \{M : B(x, x') \leq M\ x\ \cdot \ x'\ \}.$
10.	U to'plamning biron x nuqtasi uchun quyidagi ikki shartni qanoatlantiruvchi chegaralangan $L_x \in L(X, Y)$ chiziqli operator mavjud bo'lsa, u holda F aks ettirish $x \in U$ nuqtada..... deyiladi	J	$\ x\ = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2}$

Kalitlar:

Savol: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
 Javob: d a j g i c e f h b

1.	X normalangan fazodagi f - funksional uchun, shu funksionalning normasini toping.	$\ f\ = \sup_{\ x\ \leq 1} f(x) $	$\ f\ = \sup_{\ x\ \leq 1} \alpha x $	$\ f\ = \alpha \sup_{\ x\ \leq 1} x = \alpha $	$\ f\ = \sup_{\ x\ \leq 1} \sum_{k=1}^n a_k \ x_k\ $
2.	$f : R \rightarrow R$ da $f(x) = \alpha x$ ning normasini toping.	$\ f\ = \alpha \sup_{\ x\ \leq 1} x = \alpha $	$\ f\ = \sup_{\ x\ \leq 1} f(x) $	$\ f\ = \sup_{\ x\ \leq 1} \alpha x $	$\ f\ = \sup_{\ x\ \leq 1} \sum_{k=1}^n a_k \ x_k\ $
3.	$f : R^n \rightarrow R$ da $f(x) = \alpha x = \sum_{k=1}^n a_k x_k$ ning normasini toping.	$\ f\ = \sup_{\ x\ \leq 1} \sum_{k=1}^n a_k \ x_k\ = \sum_{k=1}^n a_k $	$\sum_{k=1}^n a_k \sup_{\ x\ \leq 1} x = \alpha $	$\ f\ = \sup_{\ x\ \leq 1} f(x) $	$\ f\ = \sup_{\ x\ \leq 1} \alpha x $

4.	$\{x_n\}$ sust yaqinlashuvchi ketma-ketlik normalangan fazoda chegaralangan bo'lishi shartini ko'rsating.	$\exists C = \text{const}$ $\ x_n\ \leq C$	$\exists C = \text{const}$ $\ x_n\ > C$	$\exists C = \text{const}$ $x \leq C$	$\forall C = \text{const}$ $\ x\ \leq C$
5.	Agar f chiziqli funksional bo'lsa, u holda $\ f\ = \sup_{x \neq 0} \frac{ f(x) }{\ x\ }$ son deyiladi.	f funksionalni normasi	f funksionalni chegarasi	f funksiyani normasi	f funksiyani chegarasi
6.	$f : x \rightarrow R$ funksional bo'lishi uchun x qanday bo'lishi kerak?	Ixtiyoriy normalangan fazo	Ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan fazo	Ixtiyoriy fazo	Sanoqli cheksiz to'plam
7.	Jumlani to'ldiring: fazodagi chiziqli funksionalning uzluksiz bo'lishi uchun birlik shardagi qiymatlar chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli.	Normalangan	Chiziqli	Metrik	Ixtiyoriy
8.	Defferensiallanuvchi funksionalga misol sifatida $C_{[a,b]}$ fazoda aniqlangan qaysi funksionalni olish mumkin?	$U_x = \int_a^b f(t, x(t))dt$	$U_x = \int_a^b f(x(t))dt$	$U_x = \int_a^b f(t)dt$	$U_x = \int_a^b f(x_0)dt$

9.	Normanlangan fazodagi amallarning uzluksiz ekanligi qanday bo'lishini aks ettiradi?	Ikki uzluksiz operatorning yig'indisi, uzluksiz operatorning songa ko'paytmasi, uzluksiz operator bo'lishi	Uzluksiz bo'lmasligi	Operator bo'lmasligi	To'g'ri javob yo'q
10.	X normanlangan fazoni Y normanlangan fazoga aks etiruvchi barcha chiziqli operatorlar to'plamini qanday belgilaymiz?	$L(X, Y)$	$L(X, X)$	$L(X, L)$	$L(L, Y)$

Quyidagi fazolar normalangan fazo ekanligini ko'rsating.

№	Fazoning belgilanishi	Fazoning elementlari	Norma uchun formula.
1	R^n	$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_n \in R$	$\ x\ = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$
2	C^n	$z = (z_1, z_2, \dots, z_n), \quad z_n \in C$	$\ z\ = \left(\sum_{k=1}^n z_k ^2 \right)^{\frac{1}{2}}$
3	m	Chegaralangan ketma-ketlik $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), \quad \exists M, \quad x_n \leq M \quad n = 1, 2, \dots$	$\ x\ = \sup_n x_n $

4	C_0	$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$	$\ x\ = \sup_n x_n $
5	C	$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ mavjud}$	$\ x\ = \sup_n x_n $
6	ℓ_1	$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), \sum_{k=1}^{\infty} x_k < +\infty$	$\ x\ = \sum_{k=1}^{\infty} x_k $
7	ℓ_p	$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k ^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, p \geq 1$	$\ x\ = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} x_k ^p}$
8	$C[a, b]$	$[a, b]$ da aniqlangan uzluksiz funksiyalar sinfi	$\ x\ = \max_{t \in [a, b]} x(t) $
9	$C_1[a, b]$	$[a, b]$ da aniqlangan uzluksiz funksiyalar sinfi	$\ x\ _1 = \int_a^b x(t) dt$
10	$C_2[a, b]$	$[a, b]$ da aniqlangan uzluksiz funksiyalar sinfi	$\ x\ _2 = \sqrt{\int_a^b x^2(t) dt}$
11	$V[a, b]$	$[a, b]$ da aniqlangan o'zgarishi chegaralangan funksiyalar sinfi	$\ x\ = x(a) + V_a^b[x]$
12	$L_p[a, b]$	$[a, b]$ da aniqlangan va modulinig p chi darajasi integrallanuvchi funksiyalar sinfi, $p \geq 1$	$\ x\ = \left(\int_a^b x(t) ^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$

13	$C^{(n)}[a,b]$	$[a,b]$ da aniqlangan va n chi tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lgan funksiyalar sinfi	$\ x\ = \max_{t \in [a,b]} x_n(t) + \sum_{k=1}^n \max_{t \in [a,b]} x^k(t) $
----	----------------	---	--

Glossariy

№	O`zbekcha	English	Русский
1	Norma	Norm	Норма
2	Normalangan fazo	Normalized space	Нормализованное пространство
3	Skalyar ko`paytma	Scalar multiplication	Скалярное произведение
4	Qism fazo	Section space	Под пространство
5	Ortogonal	Orthogonal	Ортогональный
6	Variatsion hisob	Variational calculation	Вариационный расчет
7	Differensial	Differential	Дифференциал
8	Ektremum	Extremum	Экстремум
9	Funksional	Functional	Функционал
10	Kuchli va sust	Strong and weak	Сильный и слабый

Xulosa.

Men ushbu bitiruv malakaviy ishini tayyorlash jarayonida dastlab shu mavzuga oid adabiyotlar, manbalar tayyorladim. Normalangan fazolarda differensial hisob mavzusini o`qitish metodikasiga doir ma`lumotlar bilan tanishib chiqdim, oldin bilmagan, mavzuga doir ma`lumotlarni o`rgandim va bilimlarimni mustahkamladim. Tayyorlagan BMI “Normalangan fazolarda differensial hisob mavzusini o`qitish metodikasi ” mavzusida bo`lib, u kirish, 9 ta paragrafni o`z ichiga olgan 2 ta bob, xulosa, adabiyotlar ro`yxatidan iborat. Kirish qismida o`quvchilarning matematika analiz faniga bo`lgan qiziqishlarini oshirishda, matematik tafakkurlarini o`stirishda normalangan fazolarda differensial hisob mavzusini o`qitish metodikasi katta ahamiyat kasb etadi. Uni o`rganish, u haqida bilimga ega bo`lish, tasavvur qila olish, uni mohiyat jihatidan tushunish va amalda qo`llay olish katta ahamiyatga ega va shu bilan birga, xususiyatlarini o`rganish va metodikasini ishlab chiqish va uni berish usullarini ko`rsatib berish zaruriy talablardan biri hisoblanadi. Ayni shu ahamiyat va zarurat tayyorlangan bitiruv malakaviy ishni dolzarbligini belgilaydi.

1-bob “Normalangan fazolar modulini o`qitish mazmuni va unga doir asosiy tushunchalar” deb nomlanib, unda 1.1-paragrafda “Matematik analiz” fanining normalangan fazolar modulining mazmuni haqida, 1.2- paragrafda normalangan fazo ta`rifi va uning ba`zi xossalari, 1.3-paragrafda Yevklid va Gilbert fazolar haqida ma`lumotlar berildi.

2-bob “Normalangan fazolarda differensial hisob elementlari va uni o`qitishga doir didaktik materiallar” deb nomlanib, unda 2.1-paragrafda Kuchli va sust differensiallar, 2.2-paragrafda yuqori tartibli hosilalar, 2.3-paragrafda normalangan fazolarda variatsion hisob elementlari, 2.4- paragrafda “Ayrim funkcionallarni ekstremimumlari” mavzusidagi dars ishlanmasi, 2.5- paragrafda mavzuga doir standart va nostandart testlar to`plami keltirildi.

Foydalanilgan adabiyotlar..

1. O‘zbekiston Respublikasining Kadrlar tayyorlash milliy dasturi//O‘zbekiston Respublikasi Oliy Majlisining Axborotnomasi. -1997, -9-son, 225-modda; 2013, -41-son, 543-modda
2. Karimov I.A. «Yuksak ma’naviyat – yengilmas kuch». - T.: «Ma’naviyat». 2008.- 63 b5. Karimov I.A. “Barkamol avlod - O‘zbekiston taraqqiyotining poydevori”. - Toshkent: Sharq, 1997.
3. Sh. Mirziyoyev “Milliy taraqqiyot yo‘limizni qat’iyat bilan davom ettirib, yangi bosqichga ko‘taramiz”, T. “O‘zbekiston”, 2017 y.
- 4.T.A. Sarimsoqov. “Funksional analiz kursi”. Toshkent . “O‘qituvchi” 1986.
- 5.Sh.A.Ayubov, M.A.Berdiqulov, R.M.Turg’unboyev. Funksiyalar nazariyasi. Toshkent. 2009
6. G.G’oyibnazarov. Funksional analiz kursidan misol va masalalar yechish.
7. J.I.Abdullayev, R.N.G’anixo‘jayev va boshqalar. “Funksional analiz”. SamDU. 2013
8. J.I.Abdullayev, R.N.G’anixo‘jayev va boshqalar. “Funksional analiz va integral tenglamalar”. Toshkent El Press-2013
9. N.D.Kopochevskiy “Funksional analiz” .Uchibnoe posobie. Simferenol. 2008.
10. Trenogin V.A.Funksionalny analiz. 1980.
11. Kolmogolov A.N. Fomin S.V. Elementi teorii funktsiy I funktsionalnogo analiza. Moskva: Nauka. 1989.
12. <http://www.nsu.ru/education>
13. www.pedagog.uz.
14. www.ziyonet.uz.
15. www.google.uz.
16. www.rambl.ru.