

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
MUQIMIY NOMIDAGI QO'QON DAVLAT
PEDAGOGIKA INSTITUTI**

MAGISTRATURA BO'LIMI

AZAMOV SHERZODJON XUSANBOY O'G'LI

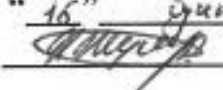
**POTTS MODEL UCHUN KELI DARAXTIDA k_0 – TRANSLYATSION
INVARIANT VA k_0 – DAVRIY GIBBS O'LCHOVLARI**

5A110101-Aniq va tabiiy fanlarni o'qitish metodikasi (matematika)

Magistr akademik darajasini olish uchun taqdim etilgan

DISSERTATSIYA

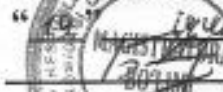
Ilmiy rahbar: f.-m.f.d.(DSc), prof. M.M. Rahmatullayev

“16” iyun 2020-yil
 imzo

Kafedra mudiri: f.-m.f.n. X.Q. Jumaqulov

“Himoyaga tavsiya etildi”
“17” iyun 2020-yil
 imzo

Magistratura bo'limi boshlig'i: O.O. Bozorov

“Himoyaga ruxsat berildi”
“18” iyun 2020-yil
 imzo



Qo'qon – 2020

M U N D A R I J A

	Kirish	3
I BOB.	ASOSIY TUSHUNCHA VA FAKTLAR.....	9
1.1.	Graflar nazariyasi va Gibbs o‘lchovi tushunchasi	9
1.2.	Keli daraxti va uning gruppaviy tasviri	19
1.3.	Konfiguratsiyalar fazosi va Gamil’tonianlar.....	24
II BOB.	KELI DARAXTIDA POTTS MODELİ UCHUN ANIQLANGAN ART LIMIT GIBBS O‘LCHOVLARI.....	42
2.1.	Potts modeli uchun translatsion invariant Gibbs o‘lchovlari.....	42
2.2.	Potts modeli uchun davriy Gibbs o‘lchovlari.....	46
2.2.1.	Keli daraxti tartibi $k=2$ bo‘lgan hol.....	51
2.2.2.	Keli daraxtining tartibi k ixtiyoriy bo‘lgan hol.....	57
2.3.	Potts modeli uchun Keli daraxtida ART Gibbs va (k_0) – translyatsion invariant Gibbs o‘lchovlari	61
III BOB.	KELI DARAXTIDA POTTS MODELİ UCHUN (k_0) – TRANSLYATSION INVARIANT GIBBS O‘LCHOVLARI	64
3.1.	Beshinchi tartibli Keli daraxtida Potts modeli uchun (k_0) – translyatsion invariant Gibbs o‘lchovlari	64
3.2.	Keli daraxtining tartibi $k=a+b+2$ bo‘lganda (k_0) – translyatsion invariant Gibbs o‘lchovlari mavjudligi.....	67
	XULOSA	72
	ADABIYOTLAR RO‘YXATI	74

Magistrlik dissertatsiya ishining asoslanishi va dolzarbligi. Magistrlik dissertatsiya ishida Keli daraxtida aniqlangan Potts modeli uchun turli hil Gibbs o'lchovlarini topish masalasi qaralgan.

Gibbs o'lchovlari statistik fizika va kvant mehanikasining asosiy ob'ekti bo'lishi bilan bir qatorda Gibbs o'lchovlari nazariyasi o'lchovlar nazariyasining yangi sohalaridan biridir.

Kristal panjarasi daraxt tipida bo'lgan moddalarning faza almashishlarini topish statistik fizikaning asosiy masalalaridan biridir. Gibbs o'lchovlari soni kristal panjarasi daraxt tipida bo'lgan moddalarning faza almashishlar soniga tengligi U.A. Rozikovlarning ishlarida isbotlangan. Biz MDIda Gibbs o'lchovlarini topishda oldindan ma'lum bo'lgan Gibbs o'lchovlaridan foydalandik.

Respublikamizda so'ngi yillarda amalga oshirilayotgan ijtimoiy - iqtisodiy islohotlar jaxonning yuksak rivojlangan mamlakatlari qatoridan o'rin egallashimizda muhim ahamiyat kasb etmoqda. O'zbekiston Respublikasining Prezidenti Sh.M.Mirziyoyevning 2017-2021 yillarda O'zbekiston Respublikasini rivojlantirishning beshta ustuvor yo'nalishlari bo'yicha harakatlar strategiyasini amalga oshirishga doir tashkiliy chora-tadbirlar to'g'risidagi farmoyishida dolzarb hamda aholi va tadbirkorlarni tashvishga solayotgan masalalarni kompleks o'rganish, qonunchilik, huquqni muhofaza qilish amaliyot va xorijiy tajribalarni tahlil qilish yakunlari bo'yicha ishlab chiqildi. [3,7-bet]

Ilm-fan jadal taraqqiy etayotgan, zamonaviy axborot-kommunikatsiya texnologiyalari keng joriy etilgan jamiyatimizda turli fan sohalarida bilimlarning tez yangilanib borishi, ta'lim oluvchilar oldiga ularni jadal egallash bilan bir qatorda, muntazam va mustaqil ravishda bilim olish vazifasini qo'yimoqda. Ta'limning barcha bosqichlariga oid umumiy pedagogik va didaktik talab ta'lim oluvchining dasturiy bilim, tasavvur va ko'nikmalari asosida mustaqil ishlash samaradorligini takomillashtirish, ilmiy fikrlashga, o'quv faniga qiziqishini

kuchaytirish, kasbiy bilimlarini chuqurlashtirish, nazariy va amaliy mashg'ulot mobaynida ularning faolligini oshirishdan iboratdir. [2,55-bet]

Kelajagimiz bo'lgan yoshlarni birinchi prezidentimiz tomonlaridan yaratilib berilgan o'zbek modeli asosida har tomonlama jahon hamjamiyatidagi raqobatlarida bardosh bera oladigan, barkamol shaxs etib tayyorlashda ularga o'qitiladigan har bir fandan mukammal saboq berish, ta'lim samaradorligini oshirib borish talab etiladi.

Ta'lim jarayoni samaradorligini oshirish, ta'lim oluvchilarning mustahkam nazariy bilim, faoliyat, ko'nikma va malakalarini shakllantirish, ularni kasbiy mahoratga aylanishini ta'minlash maqsadida o'quv-tarbiya jarayonida zamonaviy pedagogik texnologiyadan foydalanish davr taqozosi hamda ijtimoiy zaruriyat sifatida kun tartibiga qo'yilmoqda.

Ta'lim-tarbiya jarayoniga zamonaviy pedagogik texnologiyani tadbqiq etish kadrlar tayyorlashga yo'naltirilgan umumiy jarayon mazmunining sifat jihatdan o'zgarishini ta'minlaydi. [4,304-bet]

Magistrlik dissertatsiya ishining ob'ekti Potts modeli uchun Keli daraxtida aniqlangan limit Gibbs o'lchovlari.

Magistrlik dissertatsiya ishining predmeti Keli daraxtida Potts modeli uchun aniqlangan (k_0) – translyatsion invariant va (k_0) – davriy Gibbs o'lchovlari.

Magistrlik dissertatsiya ishining maqsadi. Ushbu ishda Potts modeli uchun davriy Gibbs o'lchovlari tushunchalarini o'rganish. Magistrlik Dissertatsiya Ishida Potts modeli uchun (k_0) – translyatsion invariant va ART Gibbs o'lchovlari mavjudligini asoslash. Keli daraxtining tartibi qanday bo'lganda Gibbs o'lchovlari mavjudligi isbotlash.

Magistrlik dissertatsiya ishining vazifalari quyidagilardan iborat:

- Mavzuni yoritish uchun kiritilgan asosiy tushuncha va faktlar berildi.

- Keli daraxti uchlari to'plami V va G_k gruppalar o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjudligi o'rganildi.
- Konfiguratsiyalar fazosi va Gamil'tonian tushunchalari o'rganildi..
- Potts modeli uchun translyatsion invariant va (k_0) – translyatsion invariant Gibbs o'lchovlari o'rganildi.
- Potts modeli uchun davriy va ART Gibbs o'lchovlari o'rganildi.
- Keli daraxtining tartibi $k = a + b + 2$ bo'lganda translyatsion invariant Gibbs o'lchovlari mavjudligi o'rganiladi.

Magistrlik dissertatsiya ishining ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat.

1. Potts modeli uchun translyatsion invariant va (k_0) – translyatsion invariant Gibbs o'lchovlari o'rganildi.
2. Potts modeli uchun davriy va (k_0) – davriy Gibbs o'lchovlari asoslandi.
3. Keli daraxtining tartibi $k = a + b + 2$ bo'lganda translyatsion invariant Gibbs o'lchovlari mavjudligi isbotlandi.

Magistrlik dissertatsiya ishining asosiy masalalari va ilmiy farazi. Keli daraxtida Potts modeli uchun aniqlangan limit Gibbs o'lchovlari o'rganildi. Beshinchi tartibli Keli daraxtida (k_0) – translyatsion invariant Gibbs o'lchovlari mavjudligi isbotlandi. Magistrlik dissertatsiya ishi ilmiy xarakterga ega. Magistrlik dissertatsiya ishining usullari va natijalari kelgusida Keli daraxtida boshqa modellarning Gibbs o'lchovlarini hamda asosiy holatlarini aniqlashda va maxsus kurslar o'qishda qo'llanishi mumkin.

Tadqiqot mavzusi bo'yicha adabiyotlar sharhi. Markov tasodifiy maydonlar nazariyasi va bu nazariyaning rekurrent tenglamalari usullaridan foydalanib, xususan P.M.Blexer, N.G'anixo'jaev, S.Zaxari, F.Spitser, Yu.Suxov, U.Roziqov va boshqalar tomonidan Keli daraxtida statistik mexanikaning modellari o'rganilgan, davriy Gibbs o'lchovlar to'plami bayon etilgan. Bunday o'lchovlar

faqat yoki translyasion-invariant, yoki davri ikkiga teng bo'lgan davriy o'lchovlar bo'lishi isbotlangan.

Shuning uchun davriylikni umumiyroq ta'rifini keltirish va yangi Gibbs o'lchovlari olish zarur bo'ldi. U.A.Rozikov, M.M.Rahmatullayevlar tomonidan ilk bor kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlari va asosiy holatlar tushunchasi kiritilgan [18,507-516-betlar],[19,477-493-betlar],[20,95-97-betlar].

Har bir asosiy holatga bitta Gibbs o'lchovi qo'yiladi, har bir Gibbs o'lchoviga esa bitta fizik sistemaning fazasi mos qo'yiladi. Agar bittadan ko'p asosiy holat mavjud bo'lsa u holda fazoviy o'tish bor deb ataladi. Asosiy fazoviy o'tishlar nazariyasi S.A.Pirogov va Ya.G.Sinai ishlarida mujassamlashgan. Zamonaviy asosiy holatlar nazariyasi, Gibbs o'lchovlari nazariyasi va fazoviy o'tishlar nazariyasi quyidagi kitoblarda yoritilgan «Baus M., Nejero C.F. Equilibrium Statistical Physics. – Springer. 2008. 364p.», «Benik C. Ising type Antiferromagnetics. – Springer. 2003. 120p.», «Gallavotti G., Bonetto F., Gentile G. Aspects of Ergodic, Qualitative and Statistical Theory of Motion. – Springer. 2004. 435p.», «Jean Zinn-Justin. Phase Transitions and Renormalization Group. – OXFORD University press. 2007. 452p.», «Palmer J. Planar Ising Correlations. – Prog. Math. Phys. Birkhuser.2007.363p.», «Pierre Brymaud. Markov chains, Gibbs fields, Monte Carlo simulation, and queues. –Springer.1999, 445p.».

Ba'zi modellar (Izing, Potts, SOS, Hard-Core, λ – model va x.k.) uchun translyasionn-invariant va davriy Gibbs o'lchovlari N.N.G'anixo'jaev, U.A.Roziqov, F.Muxammedov, Dj.Libovits, Prezutti, Yu.M.Suxov va boshqalar tomonidan, Markov tasodifiy maydonlar nazariyasi va bu nazariyaning rekurrent tenglamalari usullaridan foydalanib o'rganilgan. Shuningdek ba'zi bir davriy bo'lmagan Gibbs o'lchovlari sinfi ham o'rganilgan.

G.I.Botirov, U.A.Roziqov, F.M.Muxammedov, N.M.Xatamovlar tomonidan Keli daraxtida kontur usul (Pirogov Sinay nazariyasi) rivojlantirilgan. Bu usul yordamida Keli daraxtidagi yetarlicha katta gamil'tonianlar sinfi uchun turli Gibbs

o'lchovlari mavjudligi isbotlangan. Shuningdek Keli daraxtida bu modellar uchun asosiy holatlar to'plami o'rganilgan.

Keli daraxtida p -adik Gibbs o'lchovlari nazariyasi U.A.Roziqov va F.M.Muxammedovlar tomonidan rivojlantirilgan.

Asosan Izing, Potts, λ – model va bu modellarning ba'zi bir umumlashmalari uchun fazoviy o'tish mavjud emasligi (p -adik Gibbs o'lchovi yagonaligi) isbotlangan. Shuningdek, parametrlarning fazoviy o'tish mavjud bo'ladigan qiymatlari ko'rsatilgan. Masalan, spin qiymatlari $\{1,2,\dots,q\}$ to'plamga tegishli bo'lgan p -adik Potts modeli uchun faqat va faqat q son p ga karrali bo'lganda fazoviy o'tish mavjud bo'lishi isbotlangan. U.A.Roziqov tomonidan Keli daraxtida sanoqli davriy Gibbs o'lchovlari tushunchasi kiritilgan va bunday o'lchovlar to'plami bir jinsli bo'lmagan Izing modeli uchun ko'rsatilgan.

U.A.Roziqov va M.M.Rahmatullayevlar tomonidan ilk bor kuchsiz davriy asosiy holatlar tushunchasi kiritilganligini yana bir bor eslatib o'tamiz, hamda ular tomonidan Izing modeli uchun ma'lum shartlar asosida kuchsiz davriy asosiy holatlar mavjudligi aniqlanadi.

Modellar gamil'tonianlariga bog'liq masalalarga bag'ishlangan ilmiy ishlar ko'pligiga qaramasdan, haligacha yechilmagan (ochiq) masalalar qolmoqda. Masalan, asosiy holatlar to'plami va Gibbs limit o'lchovlari to'plamini to'la tasniflash masalasi hal bo'lishiga (yakunlanishiga) hali ancha bor.

Tadqiqotda qo'llaniladigan metodikaning tavsifi. Magistrlik dissertatsiya ishida taqqoslash, induksiya va deduksiya, analiz va sintez, Pirogov-Sinay nazariyasi, algebra va sonlar nazariyasi va qisqartirib akslantirish usullaridan foydalanilgan. Mazkur ilmiy tadqiqot ishi Keli daraxtida aniqlangan limit Gibbs o'lchovlari orqali tahlil qilindi. Taqqoslash metodi orqali limit Gibbs o'lchovlari mavjudligi isbotlandi. Ushbu Magistrlik dissertatsiya ishida Potts modeli uchun aniqlangan Gibbs o'lchovlari yoritilgan.

Magistrlik dissertatsiya ishining nazariy va amaliy ahamiyati. Gibbs o'lvholari to'plamini topishda, shuningdek asosiy holatlarini hisoblashda Matematik analiz hamda Ehtimollar nazariyasi fanlarining maxsus kurslarini o'qitishda muhim ahamiyatga ega. Hama sohada bo'lgani kabi, matematika fanini o'qitishda ham tub o'zgarishlar kiritish, uni amalga oshirish uchun yetuk mutaxassis pedagoglarni tayyorlash bo'yicha yangi Davlat ta'lim standartlari, o'quv rejasi, namunaviy o'quv dasturlari, o'quv qo'llanma va darsliklar yaratilib, barcha joylarda tajriba - sinov ishlari olib borilmoqda.

Ish tuzilmasining tavsifi. Magistrlik dissertatsiya ishi kirish, 3 ta bob, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro'yhatidan iborat. Magistrlik dissertatsiya ishi 75 sahifadan iborat.

I BOB. ASOSIY TUSHUNCHA VA FAKTLAR

1.1. Graflar nazariyasi va Gibbs o'ldhovi tushunchasi

Dastlab graflar haqida qisqacha tarixiy malumotlar, grafning abstrakt matematik tushuncha sifatidagi ta'rifi va u bilan bog'liq boshlang'ich tushunchalar, graflarning geometrik ravishda, maxsus turdagi ko'phad yordamida, qo'shnilik va insidentlik matritsalarini vositasida berilishi yoritiladi. So'ngra grafning elementlari ustida sodda amallar, graflarni birlashtirish, biriktirish va ko'paytirish amallari, mar-shrutlar va zanjirlar, grafning bog'lamliligi tushunchasi, Eyler va Gamilton graflari, graflarda masofa tushunchasi, minimal masofali yo'l haqidagi masala, daraxt va unga ekvivalent tushunchalar, grafning siklomatik soni bayon qilinadi. Tarmoq tushunchasi, tarmoqdagi oqimlar, maksimal oqim haqidagi masala va bu masalalani hal qilish uchun Ford algoritmi ham ushbu bobda keltiriladi.

Graflarning berilish usullariga ko'ra: Graf, orgraf, uch, qirra, yoy, sirtmoq, karrali qirralar, uchning lokal darajasi, multigraf, ko'phad, grafning uchlari qo'shniligi matritsasi, oriyentirlanmagan multigrafning uchlari qo'shniligi matritsasi, oriyentirlangan grafning uchlari qo'shniligi matritsasi, sirtmoqsiz orgraf uchlari qo'shniligi matritsasi, grafning qirralari qo'shniligi matritsasi, insidentlik matritsasi tushunchalari o'rganiladi.

Grafning geometrik ifodalanishi.

Graflarning turlicha berilish usullari mavjud. Grafning abstrakt matematik ta'rifi uning berilish usullaridan biridir. Grafning abstrakt matematik ta'rifi uni tasavvur qilish, anglash, uning xossalari o'rganish va bu xossalarni amalda qo'llash jarayonida ba'zi qiyinchiliklar tug'dirishi tabiiydir. Shuning uchun grafning boshqa berilish usullaridan ham foydalaniladi. Masalan, grafning elementlarini, ya'ni uchlari va qirralarini (yoylarini) yozish yoki aytish grafning berilish usuli sifatida qaralishi mumkin. Albatta, grafning yana boshqa berilish usullari ham mavjud. Quyida bu usullarning bir nechasi bilan tanishamiz.

Grafning uchlarini tekislikda yoki fazoda nuqtalar bilan, qirralarini (yoylarini) esa mos uchlarni tutashtiruvchi uzluksiz chiziqlar bilan ifodalab, qandaydir diagrammaga – *grafning ko‘rgazmali tasviriga* ega bo‘lamiz. Agar uchlar to‘plami va bu uchlarning tutashishlarini ko‘rgazmali qilib taqdim qilish kerak bo‘lsa, grafning geometrik tasvirlanishiga mos shaklni qog‘ozda chizib grafni tasvirlash mumkin. [23,197-224 b].

Shuni ta’kidlaymizki, ba’zi hollarda diagrammada graf uchlarini doirachalar yordamida yoki qandaydir boshqa usulda ifodalanadi. Grafning qirralariga (yoylariga) mos chiziqlarning to‘g‘ri yoki egri bo‘lishi va ularning uzunligi ahamiyatga ega emas. Muhimi, bu chiziqlar uzluksiz bo‘lib, grafning qandaydir ikkita uchlarini tutashtirishi lozim. Agar qirra yo‘nalishga ega bo‘lsa (ya’ni u yoy bo‘lsa), u holda bunday qirrani ifodalovchi chiziqda yo‘nalish biror usul bilan, masalan, strelka bilan ko‘rsatiladi.

Ixtiyoriy graf uchun bunday diagrammalarni istalgancha tuzish mumkinligi ravshan. Agar biror diagrammada grafning uchlariga mos keluvchi nuqtalar ustma-ust tushmasa, qirralarga mos keluvchi chiziqlar, chetki nuqtalarni hisobga olmaganida, umumiy nuqtalarga ega bo‘lmasa, bunday diagramma *grafning geometrik ifodalanishi* deyiladi. Shuni ta’kidlash kerakki, bitta graf turlicha geometrik ifodalanishi mumkin.

Graflar izomorfligining ta’rifi va grafni geometrik ifodalashning mohiyatidan kelib chiqadiki, abstrakt ta’rif yordamida ifodalangan graf va uning geometrik ifodalanishi o‘zaro izomorf bo‘ladi. Tabiiyki, izomorf graflar turlicha geometrik ifodalanishlari mumkin.

1.1.1- teorema. Har qanday chekli grafni 3 o‘lchovli Evklid fazosida geometrik ifodalash mumkin.

Isboti. Teoremaning quyidagi konstruktiv isbotini keltiramiz. Grafning abstrakt ta’rifiga binoan uning hech bo‘lmasa bitta uchi mavjud. Agar grafda faqat bitta uch bo‘lsa, u holda uni 3 o‘lchovli Evklid fazosining biror nuqtasi sifatida

ifodalaymiz. Agar grafda uchlar bittadan ko'p bo'lsa, u holda ularni uch o'lchovli Evklid fazosidagi biror to'g'ri chiziqlarning (hech qaysi ikkitasi ustma-ust tushmaydigan) nuqtalariga mos keladi deb hisoblaymiz. Shu to'g'ri chiziqdan qirralarning (yoylarning) har biriga mos keluvchi turli yarim tekisliklarni o'tkazamiz (graf chekli bo'lgani uchun buning imkoniyati bor).

Graflar nazariyasi haqida umumiy malumotlar. 1736-yilda L. Eyler tomonidan o'sha davrda qiziqarli amaliy masalalardan biri hisoblangan Kyosingsberg ko'priklari haqidagi masalaning qo'yilishi va yechilishi **graflar nazariyasining** paydo bo'lishiga asos bo'ldi.

Kyosingsberg shahridagi Pregel daryosi ustida qurilgan yetti ko'prikning joylashuvi qadimiy xaritada tasvirlangan Kyosingsberg — bu shahar 1255-yilda asoslangan bo'lib, Sharqiy Prussiyadagi Pregel daryosi qirg'oqlarida joylashgan. 1946-yildan boshlab, Ka-liningrad, hozir Rossiya Federatsiyasi tarkibida.

XIX asrning o'rtalarida graflar nazariyasi bilan bog'liq tadqiqotlar G.Kirxgof va A.Keli ishlarida paydo bo'ldi. "Graflar" iborasi D.Kyonig tomonidan 1936- yilda graflar nazariyasiga bag'ishlangan dastlabki darslikda uchraydi.

Graflar nazariyasi bo'yicha tadqiqotlar natijalari inson faoliyatining turli sohalarida qo'llaniladi. Ulardan ba'zilari quyidagilardir: boshqotirmalarni hal qilish; qiziqarli o'yinlar; yo'llar, elektr zanjirlari, integral sxemalari va boshqarish sistemalarini loyihalashtirish; avtomatlar, blok-sxemalar va kompyuter uchun programmalarni tadqiq qilish va hokazo. [24,194-215-b].

Bog'liq boshlang'ich tushunchalar.

Avvalo, grafning abstrakt matematik tushuncha sifatidagi ta'rifini va boshqa ba'zi sodda tushunchalarni keltiramiz. V qandaydir bo'shmas to'plam bo'lsin ($V \neq \emptyset$). Uning $v_1 \in V$ va $v_2 \in V$ elementlaridan tuzilgan $\langle v_1, v_2 \rangle$ ko'rinishdagi barcha juftliklar (kortejlar) to'plamini (V to'plamning o'z-o'ziga Dekart ko'paytmasini) $V \times V$ bilan belgilaymiz. Graf deb shunday $\langle V, U \rangle$, juftlikka

aytiladiki, bu yerda $V \neq \emptyset$ va $U < v_1, v_2 > (v_1 \in V, v_2 \in V)$ ko'rinishdagi juftliklar korteji bo'lib, $V \times V$ to'plamning elementlaridan tuzilgandir.

$G=(V, U)$ graf berilgan bo'lsin. V to'plamning elementlariga G grafning uchlari, V to'plamning o'ziga esa, graf uchlari to'plami deyiladi.

Graflar nazariyasida «uch» iborasi o'rniga, ba'zan, tugun yoki nuqta iborasi ham qo'llaniladi. Umuman olganda, hanuzgacha graflar nazariyasining ba'zi iboralari bo'yicha umumiy kelishuv qaror topmagan. Shuning uchun, bundan keyingi ta'riflarda, imkoniyat boricha, muqobil (alternativ) iboralarni ham keltirishga harakat qilamiz.

Gruppalar nazariyasi.

Bir amalli algebraik sistemalarning eng muhimi gruppalaridir. Bu tushuncha juda ham keng tadbqiq sohalariga ega bo'lib, katta mustaqil fan-gruppalar nazariyasining mavzui bo'lib xizmat qiladi. Ushbu mavzu gruppalar nazariyasida kirish sifatida qaralishi mumkin, unda gruppalar haqida, ular bilan har bir matematik tanishib chiqish shart bo'lgan elementar ma'lumotlar bayon qilinadi.

Gruppa deb assotsiativ bo'lgan (ammo kommutativ bo'lishi shart bo'lmagan) bitta algebraik ammalli G to'plamga aytiladi. Shu bilan birga bu amal uchun teskari amal ham mavjud bo'lishi shart. Gruppaviy amal nokommutativ bo'lishi mumkinligi sababli teskari amalning bajarilishi quyidagini bildiradi: G dan olingan ixtiyoriy ikkita a va b elementlar uchun G da bir qiymatli aniqlangan shunday x element va bir qiymatli aniqlangan shunday y element mavjud $ax=b, ay=b$ bo'ladi.

Agar G gruppa chekli sondagi elementlardan tashkil topgan bo'lsa, u holda u chekli gruppa, undagi elementlarning soni esa gruppaning tartibi deyiladi. Agar G gruppada aniqlangan amal kommutativ bo'lsa, u holda G kommutativ yoki Abel gruppasi deyiladi. Gruppa ta'rifidan kelib chiqadigan eng sodda natijalarni ko'rsatamiz. Teskari amalning mavjudligidan kelib chiqib natijalarga o'tamiz. G gruppada ixtiyoriy a element berilgan bo'lsin. Gruppa ta'rifidan G da bir qiymatli

aniqlangan shunday la elementning mavjudligi kelib chiqadiki, $ala = a$ bo'ladi, demak, bu element uni a elementga o'ngdan ko'paytirganda bir vazifasini bajaradi. Agar b element G gruppaning ixtiyoriy elementi bo'lsa uning mavjudligi gruppaning ta'rifidan kelib chiqadi, u holda

$$b = ya = y(ala) = (ya)la = bla$$

ni hosil qilamiz. Shunday qilib la element faqat avvalgi a elementga nisbatan emas, balki G gruppaning barcha elementlariga nisbatan ham o'nggi bir vazifasini o'taydi, shuning uchun uni biz e' orqali belgilaymiz. Teskari amalning ta'rifidagi 1 qiymatliligidan bu elementning yagonaligi kelib chiqadi. Xuddi shu yo'l bilan G gruppada G dan olingan barcha a lar uchun $e'' = a$ shartni qanoatlantiruvchi e'' elementning mavjudligi va yagonaligini isbotlash mumkin. Gruppaning ta'rifidan berilgan a element uchun shunday a' va e'' elementlarning mavjudligi va yagonaligi kelib chiqadiki, $aa' = 1, a''a = 1$ bo'ladi. Aslida a'' va a' elementlar ustma-ust tushadi:

$$a''aa' = a''(aa') = a'' \cdot 1 = a'', a''aa' = (a''a)a' = 1 \cdot a' = a'$$

tengliklardan $a'' = a$ kelib chiqadi. Bu element a elementga teskari deyiladi va $a'' = a'$ kelib chiqadi. Bu element a elementga teskari deyiladi va a^{-1} bilan belgilanadi, ya'ni :

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1$$

shunday qilib, gruppaning har qanday elementi bir qiymatli aniqlangan teskari elementga ega.

So'ngi tengliklardan a^{-1} uchun teskari element vazifasini a elementning o'zi bajarishi kelib chiqadi. So'ngra osongina ko'rish mumkinki, ko'paytuvchilarga teskari bo'lgan elementlarning teskari tartibda olingan ko'paytmasi bir nechta element ko'paytmasi uchun teskari element bo'ladi:

$$(a^1 a^2 \dots a^{m-1} a^m) = a^{m-1} a^{(m-1)^{-1}} \dots a^{2^{-1}} a^{1^{-1}}$$

Nihoyat, bir uchun assotsiativ amalga ega bo'lgan G ning barcha a lari uchun $al = a$ xossaga ega bo'lgan kamida bitta e element mavjud bo'lsa va agar bu o'nggi birlar ichiga kamida bitta shunday e^0 element mavjud bo'lsaki, unga nisbatan G ning har qanday a elementi kamida 1 ta o'ng teskari a^{-1} elementga ega ya'ni, $aa^{-1} = l^0$ bo'lsa, u holda, G gruppaga bo'ladi. a^{-1} element a uchun o'ng teskari elementlardan biri bo'lsin. U holda:

$$aa^{-1} = e^0 = e^0 e^0 = e^0 aa^{-1} \quad \text{ya'ni} \quad aa^{-1} = e^0 aa^{-1}.$$

Bu tenglikning ikkala tomoni a^{-1} uchun o'ng teskari elementlardan biriga o'ngdan ko'paytirib, $al^0 al^0$ ni hosil qilamiz, bu yerdan $a = e^0 a$ chunki e^0 element G uchun o'nggi birdir. Shunday qilib, e^0 element G uchun chapi ham e ekan.

Agar endi a element uchun a^{-1} ixtiyoriy o'ng teskari a_2^{-1} element esa ixtiyoriy chap teskari element bo'lsa, u holda,

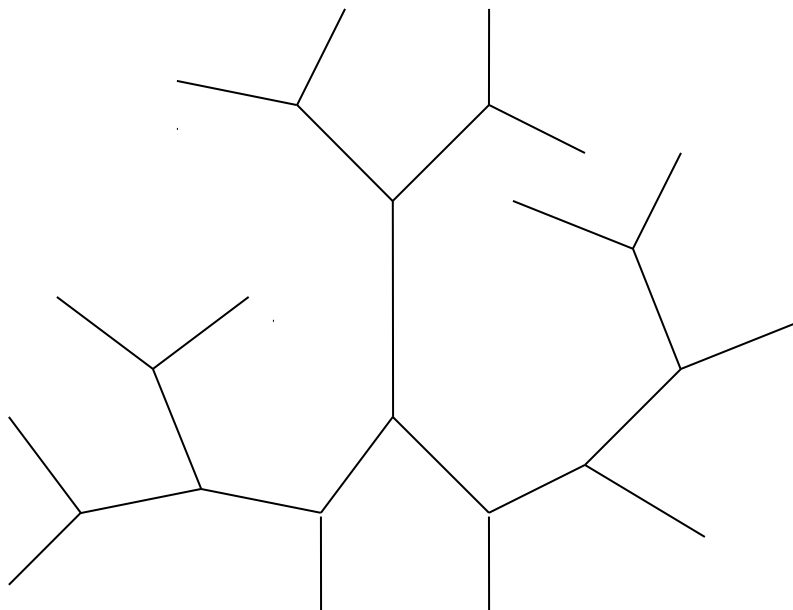
$$a^{-1}aa = (a_2^{-1}a)a^{-1} = a_1^{-1},$$

$$a_2^{-1}aa_1^{-1} = a_2^{-1}(aa_1^{-1}) = a_2^{-1}$$

tengliklardan $a_1^{-1} = a_2^{-1}$ kelib chiqadi. Ya'ni G ning har qanday a elementi uchun a^{-1} teskari elementning mavjudligini osongina ko'rsatish mumkinki, $ax = b, ya = b$ tenglamalarni $x = a^{-1}b, y = ba^{-1}$ elementlar qanoatlantiradi. Bu yechimlarning yagonaligi quyidagidan kelib chiqadi. Agar, masalan, $ax_1 = ax_2$ bo'lsa, u holda bu tenglikning ikkala tomonini chapdan a^{-1} ga ko'paytirib, $x_1 = x_2$ hosil qilamiz.

Gibbs o'Ichovi tushunchasi.

Endi Keli daraxti uchun kerakli bo'ladigan faktlarni ko'ramiz. $T^k = (V, L), k \geq 1$ k -tartibli Keli daraxti bo'lsin, ya'ni har bir uchidan $k+1$ dona qirra chiquvchi, siklik bo'lmagan cheksiz graf bo'lsin. Bu yerda V -uchlar to'plami, L esa bu daraxtning qirralari to'plamidir. Masalan $k = 2$ bo'lganda T^k -daraxtning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:



1.1.1-rasm

Yuqorida ko'rsatildiki, T^k daraxtning G_k - $k+1$ ta hosil qiluvchilari mos ravishda $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ bo'lgan ikkinchi tartibli siklik gruppalarining ozod ko'paytmasi ko'rinishida tasvirlash mumkin edi [21,148-154 b].

Quyidagicha belgilashlar qilib olamiz, ixtiyoriy fiksirlangan $x^0 \in V$ nuqta uchun

$$W_n = \{x \in V \mid d(x^0, x) = n\},$$

$$V_n = \bigcup_{m=0}^n W_m,$$

$$L_n = \{\langle x, y \rangle \in L \mid x, y \in V_n\},$$

Bu yerda $d(x, y) - T^k$ daraxtning x va y uchlari orasidagi masofa, ya'ni x va y uchlarni tutashtiruvchi yo'ldagi (eng qisqa yo'ldagi) qirralar sonidir.

Faraz qilaylik, $\Phi = \{1, 2, 3, \dots, q\}$ va $\sigma \in \Omega = \Phi^V$ – konfiguratsiya, ya'ni $\sigma = \{\sigma(x) \in \Phi : x \in V\}$ hamda $A \subset V$ bo'lsin. Ω_A bilan A to'plamda aniqlangan va $\Phi = \{1, 2, 3, \dots, q\}$ to'plamdan qiymat qabul qiluvchi barcha konfiguratsiyalar fazasini belgilaymiz.

Potts modeli Gamil'tonianini qaraymiz, u quyidagicha bo'lishi bizga ma'lum edi:

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \quad (1.1.1)$$

bu yerda, $J \in R$, $\langle x, y \rangle$ -eng yaqin qo'shnilar, hamda

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Faraz qilaylik, $h_x = (h_{1,x}, h_{2,x}, \dots, h_{q,x}) \in R^q$, $x \in V$ bo'lsin. Har bir n uchun μ_n o'lchovni Ω_{V_n} da quyidagicha aniqlaymiz :

$$\mu_n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp\{-\beta H_n(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\sigma(x), x}\}, \quad (1.1.2)$$

bu yerda $\beta = \frac{1}{T}$ ($T > 0$ - temperatura), $\sigma_n = \{\sigma(x), x \in V_n\} \in \Omega_{V_n}$, Z_n^{-1} - esa normallashtiruvchi ko'paytma (ba'zan statistik ko'paytma deb ham yuritiladi).

$$H_n(\sigma_n) = -J \sum_{\langle x, y \rangle \in L_n} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}.$$

$\mu_n(\sigma_n)$, $n \geq 1$, o'lchov uchun muvofiqlik sharti quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$\sum_{\sigma^{(n)}} \mu_n(\sigma_{n-1}, \sigma^{(n)}) = \mu_{n-1}(\sigma_{n-1}), \quad (1.1.3)$$

bu yerda $\sigma^{(n)} = \{\sigma(x), x \in W_n\}$.

Faraz qilaylik, $\mu_n, n \geq 1$ -lar Ω_{V_n} dagi o'lchovlar ketma-ketligi bo'lsin, hamda bu ketma-ketlik (1.1.3) muvofiqlik shartini bajarsin. U holda, Kolmogorov teoremasiga ko'ra $\Omega_V = \Omega$ da aniqlangan limit o'lchov mavjud va u yagona bo'ladi, **(bu o'lchov limit Gibbs o'lchovi deb ataladi)** bu o'lchov, har bir $n = 1, 2, \dots$ uchun quyidagi tenglikni qanoatlantiradi:

$$\mu(\sigma_n) = \mu_n(\sigma_n).$$

Gibbs o'lchovlariga oid ilmiy maqolalar va risolalardan bizga ma'lumki, (1.1.2) o'lchov (1.1.3) shartni faqat va faqatgina bajaradiki, bunda quyidagi $h = \{h_x, x \in G_k\}$ vektorlar ushbu tenglikni bajaradi

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} F(h_y, \theta), \quad (1.1.4)$$

bu yerda $S(x)$ -to'plam $x \in V$ nuqtaning «to'g'ri ajdodlari» to'plami va

$$F : h = (h_1, h_2, \dots, h_{q-1}) \in R^{q-1} \rightarrow F(h, \theta) = (F_1, F_2, \dots, F_{q-1}) \in R^{q-1},$$

$$F_i = \ln \left(\frac{(\theta - 1)e^{h_i} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j}} \right), \quad \theta = \exp(J\beta), \quad \beta = \frac{1}{T}, \quad T > 0$$

temperatura [14,4-7 b], [18,507-516 b],[19,477-493 b].

$G_k / G_k^* = \{H_1, \dots, H_r\}$ –faktor grupp bo'lsin.

Ta’rif 1.1.1: Agar $h_x = h_i, x \in H_i$ bo’lsa u holda $h = \{h_x, x \in G_k\}$ vektorlar majmuasi G_k^* –davriy deyiladi. G_k –davriy vektorlar majmuasi translyatsion-invariant deyiladi.

Ta’rif 1.1.2: G_k^* –davriy (translyatsion-invariant) vektorlar majmuasiga mos keluvchi μ Gibbs o’lchovi G_k^* –davriy (translyatsion-invariant) Gibbs o’lchovi deyiladi.

1.2. Keli daraxti va uning guruppaviy tasviri.

Oxirgi yillarda daraxtlarning avtomorfizmlar gruppasini o'rganishga doir juda ko'p ilmiy maqolalar vujudga kela boshladi, ayniqsa Keli daraxti T^k da (Keli daraxti ba'zi bir terminalogiyada Bete panjarasi ham deyiladi). Keli daraxti T^k , bu $\kappa \geq 1$ tartibli cheksiz daraxt bo'lib, ya'ni har bir uchidan roppa-rosa $\kappa + 1$ dona qirra chiquvchi, siklsiz cheksiz grafdir.

Faraz qilaylik, $T^k = (V, L, i)$, bu yerda $V - T^k$ -ni uchlar to'plami, L -uning qirralar to'plami va i – insidentlik funksiyasi, har bir $l \in L$ qirraga uning oxirgi nuqtalari $x, y \in V$ ni mos qo'yadi.

Agar $i(e) = \{x, y\}$ bo'lsa, u xolda x, y yaqin qo'shnilar deyiladi va bunda $l = \langle x, y \rangle$ ko'rinishda yozamiz.

Keli daraxtida $d(x, y)$, $x, y \in V$ masofa

$$d(x, y) = \min \{d : \exists x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y \in V\}, \text{ bu yerda}$$

$\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle$ yaqin qo'shnilar formula yordamida kiritiladi.

Yuqoridagi minimumni aniqlovchi $\pi = \{x = x_0, x_1 \dots \dots, x_{d-1}, x_d = y \in V\}$ ketma-ketlik x dan y ga yo'l deyiladi.

Bizga N.N.G'anixo'jaev va Blexerlarning birgalikdagi ishlaridan va U.A.Roziqov ilmiy maqolalaridan ma'lumki, Keli daraxtini, tashkil etuvchilari $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ bo'lgan ikkinchi tartibli $(k+1)$ ta siklik gruppalarni erkin ko'paytmasidan iborat bo'lgan G_k gruppasi orqali tasvirlash mumkin. Buning uchun asosiy tushuncha va tasdiqlarni beramiz.

Ta'rif 1.2.1. G gruppasi A_α qism gruppalarni erkin ko'paytmasi deyiladi, agar A_α qism gruppasi birgalikda butun G gruppani hosil qilsa, ya'ni G ning har bir g elementi A_α dan olingan chekli elementlar ko'paytmasidan iborat bo'lsa:

$$g = a_1 a_2 \dots a_n, a_i \in A_\alpha, \overline{i=1, n} \quad (1.2.1)$$

va agar G ning har bir elementi quyidagi shartlar ostida yagona (1.2.1) ko'rinishda bo'lsa

- 1) barcha a_i elementlar birdan farqli
- 2) (1.2.1) da A_α qism gruppadan ikkita element yonma-yon turmaydi, umuman olganda (1.2.1) ko'paytmada bitta qism gruppaga kirgan bir necha ko'paytuvchini o'z ichiga olgan bo'lsa ham.

Faraz qilaylik, G_K – tashkil etuvchilari $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ bo'lgan, $(k+1)$ ta ikkinchi tartibli siklik gruppalarni erkin ko'paytmasi bo'lsin.

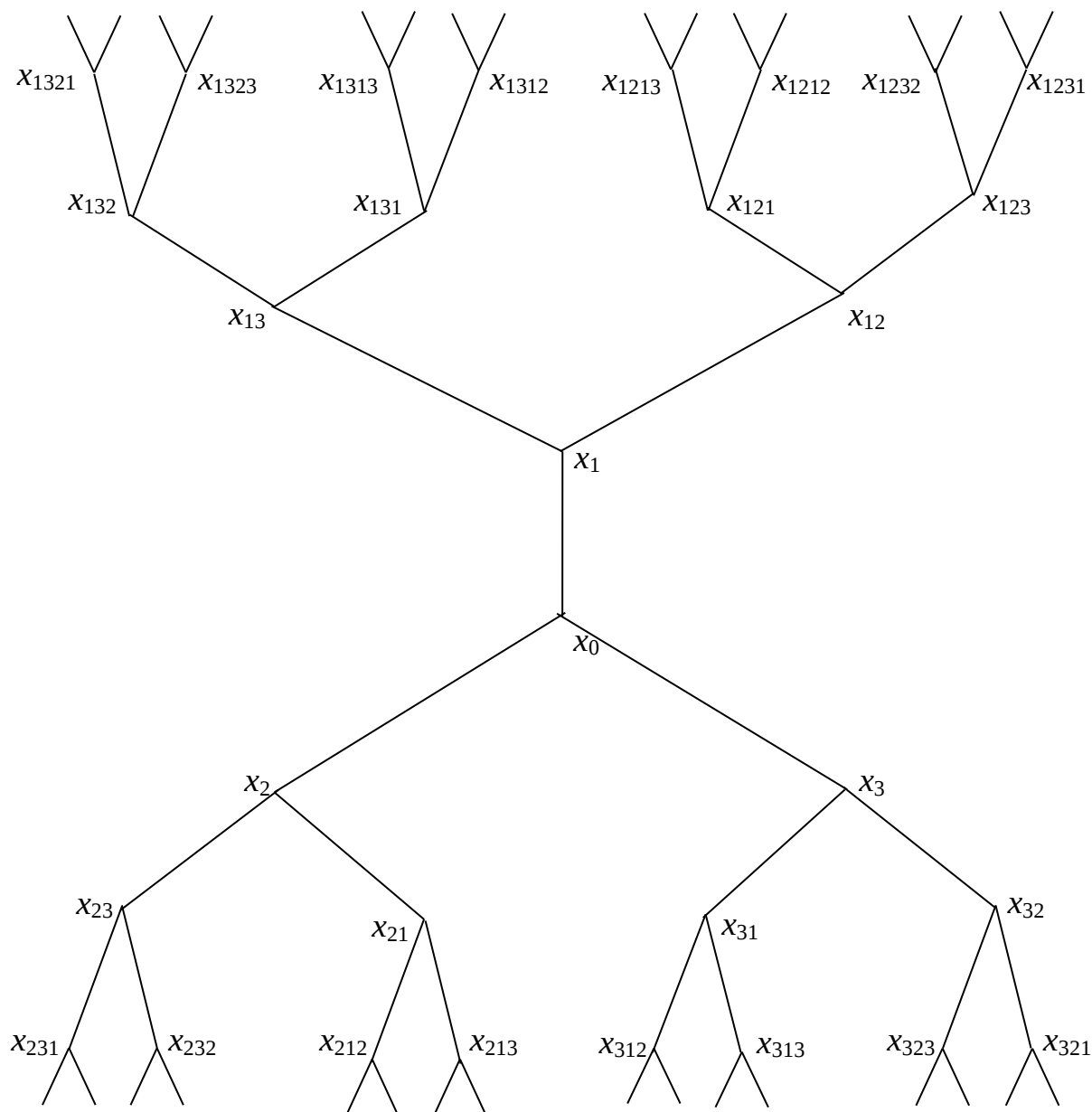
Tasdiq 1.2.1. Keli daraxtining V uchlar to'plami bilan G_K gruppasi orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud. [12,155-165 b].

Isboti: Bu moslik quyidagicha quriladi. Fiksrlangan ixtiyoriy $x_0 \in V$ uchga G_K gruppaning e birlik elementini mos qo'yamiz. Umumiylikka zid bo'lmagan holda ko'rilyotgan grafni tekislikda deb qarashimiz mumkin. Keyin x_0 uchga qo'shni bo'lgan uchlarni soat strelkasi yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalish bilan $x_i \in V$ lar bilan nomerlab chiqamiz.

Har bir $x_i \in V$ uch uchun gruppaning $a_i, i = 1, k+1$ tashkil etuvchilarini mos qo'yamiz. Endi har bir $x_i \in V$ uchlar uchun ikkilik x_{ij} nomerlashni aniqlaymiz, bular x_i — ni qo'shnilar bo'ladi. x_i — ni bitta qo'shnilaridan biri x_0 bo'lib, unga $x_{ii} = x_0$ mos qo'yamiz va u holda qolgan $x_i \in V$ qo'shnilarini nomerlash yuqoridagi nomerlash qoidasi bo'yicha bo'ladi. Har bir x_{ij} uch uchun $a_i a_j, i, j = \overline{1, k+1}$ so'zni mos qo'yamiz, $x_{ii} = x_0$ va $a_i^2 = e$ bo'lgani uchun, u holda bu akslantirish keyingi qadamlarda ham saqlanadi.

$x_{i,j}$ uchlarning qo'shnilar uchun uchta nomerlashni quyidagicha kiritamiz. $x_{i,j}$ - ni bitta qo'shnisi x_i bo'lgani uchun, unga $x_{ijj} = x_i$ mos qo'yamiz va u holda

qolgan qo'shnilarni nomerlash yuqoridagi kabi bir qiymatli aniqlanadi. Har bir x_{ijk} uch uchun $a_j a_j a_k$ so'zni mos qo'yamiz. Bu akslantirish oldingi qadam bilan mos keladi, chunki $x_{ijj} = x_i$ va $a_j a_j a_j = a_j a_j^2 = a_i$. Shunday qilib, T^k -Keli daraxtida uchlar to'plami V bilan G_k grupp orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin. Tasdiq isbot bo'ldi. Uni quyidagi rasmdan ham ko'rish mumkin.



Rasm 1.2.1

Yuqoridagi ko‘rinishni o‘ng ko‘rinish deyiladi, chunki bu holda x va y - yon qo‘shnilar va ularga mos keluvchi g va l G_k - grupp elementlari yoki $g = ha_i$ yoki $h = ga_j$ ba’zi bir i, j uchun bo‘lishi mumkin. Chap ko‘rinishi ham xuddi yuqoridagiday aniqlanadi.

Faraz qilaylik, $G_k - T^k$, $k \geq 1$ Keli daraxtining o‘ng ko‘rinishi bo‘lsin. Ixtiyoriy $x \in G_k$ element quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$x = a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} \dots a_{i_n}, \text{ bu yerda } 1 \leq i_m \leq k+1, \quad m = \overline{1, n}$$

n -soni x so‘zining uzunligi deyiladi va $l(x)$ ko‘rinishda belgilanadi.

x so‘zning qisqarmaydigan yozilishda a_i , $i = 1, 2, \dots, k+1$ harflar sonini $w_x(a_i)$ bilan belgilaymiz. Masalan, $x = a_3 a_5 a_4 a_5 a_2$, u holda

$$w_x(a_2) = w_x(a_3) = w_x(a_4) = 1, \quad w_x(a_5) = 2$$

Ravshanki, x so‘zning uzunligi $l(x) = \sum_{i=1}^{k+1} w_x(a_i)$ bo‘ladi, yuqoridagi

misolda

$$l(x) = l(a_3 a_5 a_4 a_5 a_2) = 1 + 1 + 1 + 2 = 5.$$

N.N.G‘anixov, U.A.Roziqov ishlarida quyidagicha ta’riflar vateorema bor.

Ta’rif 1.2.2. Faraz qilaylik, $M_1, M_2, \dots, M_m$ biror bir to‘plamlar va $M_i \neq M_j$, $i \neq j$ ($i, j = \overline{1, m}$)

bo‘lsin. $\bigcap_{i=1}^m M_i$ kesishma qisqaruvchi deyiladi, agar shunday i_0 ($1 \leq i_0 \leq m$) mavjud bo‘lib,

$$\bigcap_{i=1}^m M_i = \left(\bigcap_{i=1}^{i_0-1} M_i \right) \cap \left(\bigcap_{i=i_0+1}^m M_i \right)$$

o‘rinli bo‘lsa.

$N_k = \{1, 2, \dots, k+1\}$ belgilash kiritaylik.

Teorema 1.2.1. Ixtiyoriy $\emptyset \neq A \subset N_k = \{1, 2, \dots, k+1\}$ uchun quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $H_A \subset G_k$ qism gruppasi mavjud:

- a) H_A – indeks 2 ga teng normal bo‘luvchi;
- b) $H_A \neq H_B$ ixtiyoriy $A \neq B \subset N_k$ uchun;
- s) $|H_A \cap H_B| = \infty$ va $H_A \cap H_B \subset H_{A \Delta B}, A, B \subset N_k$
- d) Agar $A_1, A_2, \dots, A_m \subset N_k$ va $A_i \cap A_j = \emptyset$ bo‘lsin, ixtiyoriy $i \neq j, i, j = \overline{1, m}$, u holda

$$\bigcap_{i=1}^m H_{A_i} \subset H_{\bigcup_{i=1}^m A_i}$$

- e) Faraz qilaylik, $A_1, A_2, \dots, A_m \subset N_k$, agar $\bigcap_{i=1}^m H_{A_i}$ -qisqarmaydigan bo‘lsa, u holda u indeksi 2^m -ga teng normal bo‘luvchi bo‘ladi.

- f) Har bir $m = \overline{1, 2k}$ uchun qisqarmaydigan

$$H_m = \bigcap_{i=1}^m H_{A_i}$$

kesishma qurish mumkin.

1.3. Konfiguratsiyalar fazosi va Gamil'tonianlar.

Diskret vaqtli tasodifiy maydonni ko'raylik. Quyidagi d – o'lchovli panjarada aniqlangan $\varphi = \varphi(x)$ funksiyalardan tuzilgan Ω – fazoni ko'ramiz. Kelgusi savollarda panjara ko'rinishi ta'sir etarli darajada bo'lmaydi. Shuning uchun, qoidaga ko'ra $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ nuqta, z^d - butun sonlar panjarasida

$$|x' - x''| = \max_{\substack{1 \leq i \leq d \\ x', x'' \in Z^d}} |x'_i - x''_i|$$

metrika bilan yuradi deb o'ylaymiz. Aksincha, fazo ko'rinishi $\varphi(x)$ ning mumkin bo'lgan qiymatlari nazariyasini sezilarli darajada osonlashtirish yoki qiyinlashtirish mumkin.

Ω – fazo σ – o'lchovli qism to'plamlarni σ algebrasili o'lchovli fazo bo'ladi. $\varphi = \{\varphi(x)\}$ funksiya sistemaning konfiguratsiyasi deb ataladi, ya'ni $\varphi: Z^d \rightarrow \Phi$, $\varphi \in \Omega$. $V \subset Z^d$ qism to'plamdagi chegaralangan φ ni $\varphi(V)$ kabi belgilaymiz, ya'ni $\varphi(V) = \{\varphi(x); x \in V\}$. Barcha bu kabi $\varphi(V)$ fazoni $\Omega(V)$ bilan belgilaymiz.

Endi faraz qilaylik, $V \subset Z^d$ bo'sh bo'lmagan, chekli qism to'plamlar uchun $\varphi(V)$ konfiguratsiyada aniqlangan $T(\varphi(V))$ funksiya berilgan bo'lsin. Bu funksiya qiymati $\varphi(x)$ o'zgaruvchining V to'plamdagi mos ta'sir etuvchi energiyasi deymiz. $T(\varphi(V))$ funksiyalar naborini potensial deb aytamiz. Ixtiyoriy $x_0 \in Z^d$ nuqta quyidagi yig'indini hosil qilamiz. [10,128-b].

$$\cup (\varphi(x_0); \varphi(x), x \neq x_0) = \sum \frac{1}{|V|} T(\varphi(V))$$

Bu yerda yig'indi x_0 ni o'ziga oluvchi barcha V chekli qism to'plamlar bo'yicha olinadi. $\cup (\varphi(x_0), \varphi(x), x \neq x_0)$ miqdor $\varphi(x_0)$ o'zgaruvchini barcha $\varphi(x), x \in Z^d$ o'zgaruvchilar bilan o'zaro ta'sir energiyasi yoki potensialini hosil qiladi.

Umuman aytganda, V ni aniqlovchi qator uzoqlashuvchi bo'lishi ham mumkin. Φ kompakt bo'lgan holda biz qatorni absolyut yaqinlashuvchi bo'lgan potentsiallar bilan ish ko'ramiz.

Buning uchun har bir V ga

$$\sup_{\varphi(V)} |T(\varphi(V))| \leq \frac{\text{const} \cdot k}{p^{\alpha d} c_{p^\alpha}^{k-2}}$$

deb olish yetarlidir, bu yerda p – V ning diametri, $k = |V|$, $\alpha > 1$ – o'zgarmas.

1.3.1-Misol: Binar ta'sir.

Agar T $|V| = 2$ dagina noldan farqli bo'lsa, u holda T potentsialini binar ta'sir deb aytamiz.

$V(S', S'')$ uchun yuqoridagi shart quydagicha bo'ladi:

$$|T(\varphi(S'), \varphi(S''))| \leq \frac{\text{const}}{\|S' - S''\|^{\alpha d}}; \quad \alpha > 1.$$

1.3.2-Misol: *Radius ta'sirli.

Agar $\text{diam } V > R$ tengsizlik bajariladigan R son topish mumkin bo'lsinki, unda T potentsial uchun $T(\varphi(V)) = 0$ bo'lsin. Yuqoridagi shartli eng kichik songa ta'sir radiusi deb ataladi. Bu holda U ni aniqlovchi yig'indi chekli va barcha φ larda ma'noga ega bo'lib qoladi.

Agar bunday R mavjud bo'lmasa u holda T ni cheksiz radiusli o'zaro raqobatlashuvchi potentsial deb ataladi. O'zaro ta'sir radiusi cheksiz bo'lganda, U uchun qator $\varphi(x)$ o'zgaruvchining cheksiz o'sishi hisobiga uzoqlashishi mumkin.

Ixtiyoriy chekli to'plam W uchun

$$H(\varphi(W)) = \sum_{V \subseteq W} T(\varphi(V))$$

deb olamiz va $H(\varphi(W))$ ni φ konfiguratsiyaning energiyasi deb ataymiz.

$$H(\varphi(W) \varphi(Z^d - W)) = \sum_{\substack{V \cap W \neq \emptyset \\ V \cap (Z^d - W) \neq \emptyset}} T(\varphi(V))$$

yig'indini $\varphi(W)$ bilan $\varphi(Z^d - W)$ konfiguratsiyalarning o'zaro ta'sir energiyasi deb ataymiz, bunda chegaraviy shartlarni qoniqtiradi deymiz. Yuqorida qilingan farazga ko'ra Φ kompakt bo'lgan holda bu qiymat doim chekli bo'ladi. Agar ta'sir radiusi R chekli bo'lsa, u holda oxirgi yig'indida W dan R masofadan uzoqlashmaydigan qism to'plamlar qatnashadi.

$$H(\varphi(W) \parallel \varphi(Z^d - W))$$

qiymatga mos qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lsa, umumiy holda bu qiymat aniqlangan deb o'ylaymiz.

$$H(\varphi(W)) + H(\varphi(W) \parallel \varphi(Z^d - W))$$

qiymatga $\varphi(W)$ konfiguratsiyaning $\varphi(Z^d - W)$ chegaraviy shart asosidagi to'liq energiyasi deb ataymiz.

Quyidagi formal qatorni ko'ramiz.

$$H(\varphi) = \sum_{V \subset Z^d} T(\varphi(V)) = \sum_{x \in Z^d} U(\varphi(x); \varphi(y), y \neq x)$$

Bu yerda yig'indi V ning barcha bo'sh bo'lmagan qism to'plamlari bo'yicha olinadi.

Bu qator ***gamil'tonian*** deb ataladi. Uni hech qanday ma'noda Ω ga berilgan funksiya deb qarash mumkin emas, baxtga yarasha bu biz uchun kerak ham emas. Bizga ahamiyatlisi shuki, H yordamida $H(\varphi(W))$ va

$$H(\varphi(W) \parallel \varphi(Z^d - W))$$

larni topishimiz mumkin.

Hususan, $H(\varphi') - H(\varphi'')$ ayirma ham φ' va φ'' konfiguratsiyalar deyarli ustma-ust tushgan holda, ya'ni ustma-ust tushmaydiganlar to'plami chekli bo'lganda ma'noga ega bo'ladi.

Bu asosiy misol bo'ladi.

Gamil'tonian simmetriyasi gruppasi nazariyasining ko'p masalalari va tadbirlarida asosiy tushunchalardan biri gamil'tonian simmetriyasi gruppasidir.

$(T^y, y \in Z^d)$ – Ω fazoni fazoviy siljitish gruppasi bo'lsin, ya'ni $(T^y \varphi)(x) = \varphi(x - y)$ bo'lsin.

Gamil'tonian $H(\varphi)$ translyatsion invariant deyiladi, agar $H(\varphi) = H(T^y \varphi)$ shart barcha $y \in Z^d$ lar uchun bajarilsa, ya'ni agar $T(\varphi(V)) = T((T^y \varphi)(V + y))$ boshqacha qilib tushuntiradigan bo'lsak, $T(\varphi(V))$ funksiya panjara bo'yicha V qism to'plamni siltilgan to'plamlari uchun bir xil bo'lsa. Binar ta'sir bo'lgan holda translyatsion invariantlik $T(\varphi(x'), \varphi(x''))$ funksiya ko'rinishi faqat $x'' - x'$ ayirmaga bog'liq ekanini anglatadi.

Umumiy holda $Z_0^d - Z^d$ ning chekli indeksli qism gruppasi bo'lsin va $\{T^y, y \in Z_0^d\}$ – unga mos gruppasi fazoviy siljish gruppasi bo'lsin. Gamil'tonian H davriy (aniqrog'i $Z_0^d -$ davriy) deyiladi, agar $H(\varphi) = H(T^y \varphi)$ tenglik barcha $y \in Z_0^d$ uchun bajarilsa. Bu fiksirlangan V ga $T(\varphi(V + y))$ funksiya ko'rinishi $Z_0^d -$ qism gruppasi bo'yicha y qo'shni sinflarga bog'liq ekanini bildiradi.

Endi Φ qiymatli fazoda G gruppasi ta'sir qilsin deylik. Bu ta'sirni barcha Ω ga davom ettiramiz, bunda $(g\varphi)(x) = g\varphi(x) \quad \forall g \in G$ deb olamiz. [9,325-b].

H gamil'tonianni $G -$ invariant deymiz, agar $H(g\varphi) = H(\varphi) \quad \forall g \in G$ uchun bajarilsa, ya'ni

$$T(\varphi(V)) = T((g\varphi)(V))$$

bo'lsa.

Asosiy holatlar.

Biz bir parametrli P_β oila haqida quyidagilarni aytishimiz mumkin. βH gamil'tonian uchun limit Gibbs o'lchovi fiksirlangan $\psi \in \Omega$ konfiguratsiyadan biroz og'gan bo'ladi. Bunda $\forall s > 0, \beta \rightarrow \infty$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \sup_{x \in Z^d} P_\beta(\varphi(W_s(x)) \neq \psi(W_s(x))) = 0$$

Formal limitga o'tish shuni ko'rsatadiki katta β larda shartli Gibbs taqsimotiga javob beruvchi tipik konfiguratsiya berilgan hajmdagi minimal energiyalar konfiguratsiyasiga yaqin bo'lishi kerak.

Ta'rif 1.3.1: ψ konfiguratsiya H gamil'tonianni asosiy holati deyiladi, agar ixtiyoriy $\varphi = \psi(g, h)$ konfiguratsiya uchun $H(\varphi/\psi) \geq 0$ bo'lsa. Asosiy holat ψ o'ralgan deyiladi, agar $\varphi \neq \psi, \varphi = \psi(g, \chi)$ uchun $H(\varphi/\psi) \geq 0$ bo'lsa H gamil'tonining asosiy holatlar to'plami $g(H)$ orqali belgilaymiz.

Davriy asosiy holatlar ta'rifini boshqacharoq berish mumkin. Buning uchun ixtiyoriy davrli barcha davriy konfiguratsiyalar to'plamini $\hat{\Omega}$ orqali belgilaymiz va $\varphi \in \hat{\Omega}$ ga

$$h(\varphi) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{|W_s(0)|} \sum_{x \in W_s(0)} U_x(\varphi)$$

ni mos qo'yamiz. Boshqacha qilib aytganda $h(\varphi)$ φ ni ajratilgan energiyasi Γ davriy bo'lgani uchun, u holda $h(\varphi)$ $\hat{\Omega}$ da aniqlangan va chekli bo'ladi.

Quyidagini kiritamiz:

$$h = \inf_{\varphi \in \hat{\Omega}} h(\varphi)$$

tushunarliki $h > -\infty$ bo'ladi.

Lemma 1.3.1: H gamil'tonianning davriy asosiy holatlar to'plami

$$g_1(H) = \{ \psi : \psi \in \hat{\Omega}, h(\psi) = h \}$$

bo'ladi.

Isbot. Avval, $g(H) \subseteq g_1(H)$ ni ko'rsatamiz. Agar $\varphi \in \hat{\Omega}, h(\varphi) > h, \psi \in g_1(h)$ bo'lsa, u holda $w_s(0)$ ni ichida ψ bilan va $w_s(0)$ tashqarisida φ bilan ustma – ust tushadi. $\psi^{(s)}$ konfiguratsiya uchun yetarlicha katta s da

$$H(\psi^{(s)}(\varphi)) = (h - h(\varphi)) \langle w_s(0) \rangle + D(\langle \partial w_s(0) \rangle) < 0$$

ga ega bo'lamiz. Bundan φ asosiy holat bo'la olmaydi.

$g(H) \supseteq g_1(H)$ ya'ni teskarisini isbotlash uchun $\psi \in g_1(H)$ ni olamiz va faraz qilaylik, shunday $\psi' \subset \Omega, \psi' = \psi(d, h)$ konfiguratsiya topiladiki, buning uchun $H(\psi' / \psi) < 0$ ψ' yordamida $h(\varphi) < h(\psi)$ ni qanoatlantiruvchi $\varphi \in \hat{\Omega}$ konfiguratsiya quramiz. Buning uchun $\psi'(w_s(0))$ ni olib butun r^d panjaraga davriy davom ettiramiz. Hosil qilingan konfiguratsiya $\varphi \in \hat{\Omega}$ va yetarlicha katta s larda

$$h(\varphi) = h(\psi) + \frac{1}{\langle w_s(0) \rangle} H(\psi' / \psi)$$

bo'ladi bu esa h ta'rifga zid lemma isbotlandi.

Ta'rif 1.3.2: O'zaro ta'sir radiusi R bo'lgan H gamil'tonianni ko'ramiz va $0 < |g(h)| < \infty$. H va uning davriy asosiy holatlarini umumiy davrini N orqali belgilaymiz va $s \leq \max\{N, R\}$ bo'lsin. $\varphi \in \Omega$ konfiguratsiya chegarasi $\partial\varphi$ deb

$$\partial\varphi = \bigcup_{x \in \mathbb{Z}^d} \{w_s(x) : \varphi(w_s(x)) \neq \psi(w_s(x)), \psi \in g(H)\}$$

to'plamga aytiladi. [14,4-7-b].

Chegaraviy chekli bo'lishi shart emas $\partial\varphi$ ta'rifi s va $g(H)$ ga bog'liq, lekin uni s ga bog'liqligi uncha ahamiyatli emas chunki

$$\partial\varphi \subset \partial'\varphi \subset \bigcup_{x \in \partial\varphi} W_{s'}(x) \quad (1.3.1)$$

Agar $\partial'\varphi$ -chegara $s' > s$ yordamida aniqlangan, ya'ni

$$|\partial\varphi| \leq |\partial'\varphi| \leq [4s'+1]^d |\partial\varphi| \quad (1.3.2)$$

agar $\psi \in g(H)$ bo'lsa, u holda taxminan $H(\varphi/\psi)$ $|\partial\varphi|$ proporsional bo'lishini kuzatamiz chunki $g(H)$ ga $h(\psi) = h_-$ bo'ladi. Yuqoridan baholash

$$H(\varphi|\psi) \leq C|\partial\varphi|, \quad \varphi \in \Omega, \quad \psi \in g(H), \quad \varphi = \psi(a.s.)$$

oson kelib chiqadi, lekin bizga quyidan baholash muhim.

Ta'rif 1.3.3: H gamil'tonian Payerls shartini qanoatlantiradi deyiladi, agar shunday $p > 0$ mavjud bo'lib ixtiyoriy $\varphi \leq \psi(d, h)$ $\psi \in g(H)$ konfiguratsiya uchun $H(\varphi/\psi) \geq \rho|\partial\varphi|$ bajarilsa.

Gamil'tonianning asosiy holatlari.

O'zaro ta'sir radiusi chekli bo'lgan davriy H_0 gamil'tonianni qaraylik. Faraz qilaylik, uning davriy asosiy holatlari soni chekli va musbat va H_0 Payerls shartini qanoatlantirsin

$$g(H_0) = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}.$$

Bu bo'limda katta β larda $r-1$ parametrli gamil'tonianlar oilasi haqida gap ketadi.

$$H_\mu = H_0 + \mu_1 H_1 + \dots + \mu_{r-1} H_{r-1} \quad (1.3.3)$$

Bu yerda $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{r-1})$, $|\mu| = \max |\mu_i|$ va har bir H_i gamil'tonian $i = 1, \dots, r-1$ davriy va o'zaro tasir radiusi chekli H_i gamil'tonian tashqi maydonda rol o'ynaydi.

$\bar{N}$ va $\bar{R}$ lar H_i - xning umumiy davr va maksimal o'zaro ta'sir radiusi bo'lsin. Har qanday davriy φ konfiguratsiya ajratilgan energiyasi $h_\mu(\varphi)$ bo'lsin, $h_\mu(\varphi) = \min_{1 \leq q < r} h_\mu(\psi_q)$ va konfiguratsiya chegarasini $s > \max\{\bar{N}, \bar{R}\}$ yordamida aniqlaymiz.

Lemma 1.3.2: $H_0, H_1, \dots, H_{r-1}$ larga bog'liq shunday $\varepsilon_0 > 0$ mavjudki $|\mu| < \varepsilon_0$ uchun

$$\Phi = g(H_\mu) \subset g(H_0)$$

$$g(H_\mu) = \left\{ \psi : \psi \subset g(H_0), h_\mu(\psi) = h_\mu \right\}$$

va H_μ Payerls shartini qanoatlantiradi. Agar $|\mu| < \varepsilon_0$ bo'lsa $H_\mu(\varphi/\psi) \geq \rho_0 |\partial \varphi|$ bo'ladi. bunda $\varphi = H(g, h), \varphi \subset g(H_\mu) \partial \varphi$ esa $g(H_0)$ va $\rho_0 > 0$ lar yordamida aniqlanadi, bunda bu bog'liq emas. Undan tashqari

$$H_\mu(\varphi/\psi) \geq \rho_\mu |\partial_\mu \varphi|; \quad \varphi = \psi(a, s), \quad \psi \in g(H_\mu)$$

Bu yerda $\partial_\mu \varphi$ chegarani bildiradiki u $g(H_\mu)$, $|\mu| < \varepsilon_0$ yordamida aniqlangan. O'zgarmas $\rho_\mu > 0$ μ ning funksiyasi μ bo'yicha Lipshit shartini qanoatlantiradi bu yerda $g(H_\mu)$ o'zgarmaydi.

Isbot. H_i munosabat bo'yicha $\varphi \in \hat{\Omega}$ dagi ajratilgan energiyani $h_i(\varphi)$ bilan belgilaymiz. $i = 1, \dots, r-1$ isbotning birinchi qismida $\varphi \in \hat{\Omega}$ konfiguratsiyani chegarasi $g(H_0)$ munosabat bilan va $s = 1 + \max\{\bar{N}, \bar{R}\}$ lar yordamida aniqlanadi.

Har qanday $\varphi \in \Omega$ konfiguratsiya uchun quyidagi komponentalar ni ko‘rishimiz mumkin

$$v_q(\varphi) = \{x : x \notin \partial\varphi, \varphi(W_s(x)) = \psi_q(W_s(x))\}, \quad q = 1, \dots, r$$

H_i uchun quyidagi tengsizlik o‘rinli bo‘ladigan c_i mavjudki u $H_i, \bar{N}, \bar{R}, d$ ga bog‘liq

$$\left| H_i(\varphi|\psi) - \sum_{q=1}^r |g_q(\varphi)| (h_i(\psi_q) - h_i(\psi)) \right| \leq C_i |\partial\varphi| \quad (1.3.4)$$

Agar $\varphi = \psi(a, s)$, $\psi \in g(H_0)$ va $i > 0$ bo‘lsa H_0 uchun Payerls shartidan

$$H_0(\varphi|\psi) \geq \rho |\partial\varphi| \quad (1.3.5)$$

shunga o‘hshash agar $\varphi \in \hat{\Omega}$ va

$$\tilde{\varphi}_L \begin{cases} \varphi(x), \text{ agar } \|x\| \leq L \\ \psi(x), \text{ agar } \|x\| > L \end{cases}$$

bo‘lsa (2.1.1) va (2.1.2) dan $\lim L = \infty$ bo‘yicha quyidagini hosil qilamiz

$$\left| h_i(\varphi) - \sum_{q=1}^r \pi_q(\varphi) h_i(\psi_q) \right| \leq 2C_i \pi_0(\varphi) \quad (1.3.6)$$

$i > 0$ uchun

$$h_0(\varphi) \geq h_0(\psi) + \rho \pi_0(\varphi) \quad (1.3.7)$$

Bu yerda

$$\sum_{q=1}^r \pi_q(\varphi) = 1, \quad \pi_q(\varphi) \geq 0, \quad q = 0, \dots, r, \quad (1.3.8)$$

$$\pi_0(\varphi) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{|\partial \tilde{\varphi}_L \cap W_L(0)|}{|W_L(0)|} \quad (1.3.9)$$

$$\pi_q(\varphi) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{|\mathcal{G}_q(\tilde{\varphi}_L) \cap W_L(0)|}{|W_L(0)|}, \quad q > 0 \quad (1.3.10)$$

$\varphi \in \hat{\Omega}$, $\psi \in g(H_0)$ bo'lsin. U holda

$$h_\mu(\varphi) = h_0(\varphi) + \sum_{q=1}^r \mu_i h_i(\varphi)$$

yuqoridagi tengliklardan kelib chiqadiki,

$$\begin{aligned} h_\mu(\varphi) &\geq h_0(\psi) + \pi_0(\varphi) \left[\rho - 2 \sum_{i=1}^{r-1} |\mu_i| \cdot C_i \right] + \\ &+ \sum_{i=1}^{r-1} |\mu_i| \sum_{q=1}^r \pi_q(\varphi) h_i(\psi_q) = h_\mu(\psi) - \pi_0(\varphi) \sum_{i=1}^{r-1} \mu_i h_i(\psi) - \\ &- \sum_{q=1}^r \pi_q(\varphi) [h_\mu(\psi) - h_0(\psi)] + \sum_{q=1}^r \pi_q(\varphi) [h_\mu(\psi_q) - h_0(\psi_q)] \geq \\ &\geq h_\mu(\psi) + \pi_0(\varphi) [\rho - 3C|\mu|] + \sum_{q=1}^r \pi_q(\varphi) [h_\mu(\psi_q) - h_\mu(\psi)] \end{aligned}$$

Bu yerda $c = \sum_{i=1}^{r-1} c_i$ ya'ni

$$h_\mu(\varphi) \geq h_\mu(\psi) + \frac{1}{4} \rho \pi_0(\varphi) + \sum_{q=1}^r \pi_q(\varphi) [h_\mu(\psi_q) - h_\mu(\psi)] \quad (1.3.11)$$

Agar $\varphi \in \hat{\Omega}$, $\psi \in g(H_0)$ $|\mu| < \varepsilon_0 = p/4c$ bo'lsa shunga o'xshash $h_\mu(\varphi) \geq h_\mu(\psi)$, agar $\psi \in g(H_0)$ bo'lsa $h_\mu(\psi) = h_\mu$ va tengsizlik qat'iy bo'ladi. Agarda $\varphi \notin g(H_0)$ yoki $\varphi \in g(H_0)$, ammo $h_\mu(\varphi) > h_{-\mu}$.

Birinchi va ikkinchi tasdiqdan lemma isbotlandi. $|\mu| < \varepsilon_0$ da Payerls shartini isbotlash (bunda chegara $g(H_0)$ yordamida aniqlanadi). Bu holatda Payerls

sharti (1.3.1) va (1.3.2) dan kelib chiqadi. Haqiqatan agar $|\mu| < \varepsilon_0$ va $\varphi = \psi(a, s)$, $\psi \in \rho(H_\mu)$ bo'lsa

$$\begin{aligned} H_\mu(\varphi|\psi) &\geq H_0(\varphi|\psi) + \sum_{i=1}^{r-1} \mu_i \sum_{q=1}^r |\mathcal{G}_q(\varphi)| (h_i(\psi_q) - h_i(\psi)) - |\mu| C |\partial\varphi| \geq \\ &\geq \frac{3}{4} \rho |\partial\varphi| + \sum_{q=1}^r |\mathcal{G}_q(\varphi)| (h_\mu(\psi_q) - h_\mu(\psi)) \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

bo'ladi bunda ohirgi yig'indi nomanfiy. Endi quyidagilarni belgilaylik

$$\partial_\mu \varphi = \partial\varphi \cup \bigcup_{q: \psi_q \in g(\Pi_\mu)} \mathcal{G}_q(\varphi)$$

u holda

$$H(\varphi|\psi) \geq \rho_\mu |\partial_\mu \varphi|$$

bu yerda

$$\rho_\mu = \min \left\{ \frac{3}{4} \rho, \min_{\psi_q \in g(H)} (h_\mu(\psi_q) - h_\mu) \right\}$$

isbot tugadi.

Ta'rif 1.3.4: $t_\mu = (t_\mu(\psi_1), \dots, t_\mu(\psi_r))$ bo'lsin bunda $t_\mu(\psi_q) = h_\mu(\psi_q) - H_0$ hosil qiluvchi asosiy holatlarni to'la egallaydi, agar t_μ μ parametrli fazoni r -o'chovli musbat chorak barcha qirralariga ya'ni

$$\theta_r = \left\{ a : a = (a_1, a_2, \dots, a_r), \min_{1 \leq q \leq r} a_q = 0 \right\},$$

ga akslantirsa.

Bu shartlarga asoslanib katta β va kichik μ larda H_μ gamil'tonianlar oilasi uchun davriy limit o'lchovlari yuqoridagidek strukturada bo'ladi.

Ixtiyoriy **indeksi 2 ga teng** bo'lgan hol normal bo'luvchi quyidagicha bo'ladi:

$$H_A = \{x \in G_k : \sum_{i \in A} w_x(a_i) - \text{juft}\},$$

bu yerda $\phi \neq A \subseteq N_k = \{1, 2, \dots, k+1\}$, va $w_x(a_j) - x \in G_k$ so'zidagi a_j harflar soni va $|A|=i$ bo'lsin. Hamda $G_k / H_A = \{H_A, G_k \setminus H_A\}$ faktor gruppaga bo'lsin.

Quyidagicha belgilashlar kiritamiz.

$$H_0 = H_A, H_1 = G_k \setminus H_A.$$

Uholda H_A – kuchsiz davriy konfiguratsiya quyidagicha bo'ladi:

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_{00}, x_\downarrow \in H_0, x \in H_0 \\ a_{01}, x_\downarrow \in H_0, x \in H_1 \\ a_{10}, x_\downarrow \in H_1, x \in H_0 \\ a_{11}, x_\downarrow \in H_1, x \in H_1. \end{cases}$$

bu erda $a_{ij} \in \Phi$.

H_A – kuchsiz davriy konfiguratsiyalar barchasi quyidagicha ko'rinishlarda bo'lishi mumkin.

$$(1) \varphi_1(x) = \pm \begin{cases} +1, x_\downarrow \in H_0, x \in H_0 \\ +1, x_\downarrow \in H_0, x \in H_1 \\ +1, x_\downarrow \in H_1, x \in H_0 \\ +1, x_\downarrow \in H_1, x \in H_1, \end{cases}$$

$$(2) \varphi_2(x) = \pm \begin{cases} -1, x_\downarrow \in H_0, x \in H_0 \\ +1, x_\downarrow \in H_0, x \in H_1 \\ +1, x_\downarrow \in H_1, x \in H_0 \\ +1, x_\downarrow \in H_1, x \in H_1 \end{cases}$$

$$(3) \varphi_3(x) = \pm \begin{cases} +1, x_\downarrow \in H_0, x \in H_0 \\ -1, x_\downarrow \in H_0, x \in H_1 \\ +1, x_\downarrow \in H_1, x \in H_0 \\ +1, x_\downarrow \in H_1, x \in H_1, \end{cases}$$

$$(4) \varphi_4(x) = \pm \begin{cases} +1, x_\downarrow \in H_0, x \in H_0 \\ +1, x_\downarrow \in H_0, x \in H_1 \\ -1, x_\downarrow \in H_1, x \in H_0 \\ +1, x_\downarrow \in H_1, x \in H_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
(5) \varphi_5(x) &= \pm \begin{cases} +1, x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_0 \\ +1, x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_1 \\ +1, x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_0 \\ -1, x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_1, \end{cases} & (6) \varphi_6(x) &= \pm \begin{cases} -1, x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_0 \\ -1, x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_1 \\ +1, x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_0 \\ +1, x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_1 \end{cases} \\
(7) \varphi_7(x) &= \pm \begin{cases} -1, x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_0 \\ +1, x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_1 \\ -1, x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_0 \\ +1, x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_1, \end{cases} & (8) \varphi_8(x) &= \pm \begin{cases} +1, x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_0 \\ -1, x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_1 \\ -1, x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_0 \\ +1, x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Bunda yuqorida berilgan kuchsiz davriy konfiguratsiyalardan shunday konfiguratsiyani ajratib olishimiz kerakki, u asosiy holat bo'lsin. Quyidagi teorema shu kabi konfiguratsiyalarni ajratib beradi.

Teorema 1.3.1: $|A|=i, i \in \{1,2,\dots,k+1\}$ bo'ladi,

1) Agar $i \neq \frac{k+1}{2}$ bo'lsa, har qanday H_A – kuchsiz davriy asosiy holat H_A – davriy

ya'ni translyatsion invariant bo'ladi.

2) $i = \frac{k+1}{2}$ va $J_1 = 2J_2, J_2 \geq 0$ bo'lganda kami bilan 2 ta H_A – kuchsiz davriy

(davriy bo'lmagan) asosiy holatlar mavjud va ular $\pm \varphi_8$. bilan ustma-ust tushadi.

$$\text{Isboti: } 1) \varphi_1(x) = \pm \begin{cases} +1, x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_0 \\ +1, x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_1 \\ +1, x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_0 \\ +1, x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_1. \end{cases} \quad \text{ni ko'ramiz.}$$

$\varphi_1(x) \equiv +1$ bo'lgani uchun H_A – kuchsiz davriy asosiy holat $\varphi_1(x)$ translyatsion invariant bo'ladi.

$$2) \varphi_2(x) = \begin{cases} -1, x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_0 \\ +1, x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_1 \\ +1, x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_0 \\ +1, x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_1. \end{cases} \quad \text{bo'lsin.}$$

$\forall b \in M$ uchun $|\{x \in S_1(c_b): x \in H_0\}| = i, |\{x \in S_1(c_b): x \in H_1\}| = k+1-i$. ni olamiz.

Quyidagicha belgilashlar qilamiz.

$$A_- = \{x \in S_1(x) : \varphi_b(x) = -1\}, A_+ = \{x \in S_1(x) : \varphi_b(x) = +1\} \quad \text{va}$$

$$\varphi_{i,b} = (\varphi_i)_b, i = 1, 2, \dots, 8.$$

Faraz qilaylik $c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi holatlar bo'lishi mumkin.

a) Agar $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_{2,b}(c_{b\downarrow}) = +1$ bo'lsa, u holda $\varphi_{2,b}(c_b) = -1, |A_-| = i-1, |A_+| = k+2-i$, ya'ni $\varphi_{2,b} \in C_{k+2-i}$, ga ekvivalent.

b) Agar $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_{2,b}(c_{b\downarrow}) = -1$ bo'lsa, u holda $\varphi_{2,b}(c_b) = -1, |A_-| = i, |A_+| = k+1-i$, ya'ni $\varphi_{2,b} \in C_{k+1-i}$, ga ekvivalent.

c) Agar $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_{2,b}(c_{b\downarrow}) = +1$ bo'lsa, u holda $\varphi_{2,b}(c_b) = +1, |A_-| = i, |A_+| = k+1-i$, ya'ni $\varphi_{2,b} \in C_i$, ga ekvivalent.

Faraz qilaylik $c_b \in H_1$ bo'lsin. Quyidagi holatlar bo'lishi mumkin.

d) Agar $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_{2,b}(c_{b\downarrow}) = -1$ bo'lsa, u holda $\varphi_{2,b}(c_b) = +1, |A_-| = 1, |A_+| = k$, ya'ni $\varphi_{2,b} \in C_1$, ga ekvivalent.

e) Agar $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_{2,b}(c_{b\downarrow}) = +1$ bo'lsa, u holda $\varphi_{2,b}(c_b) = +1, |A_-| = 0, |A_+| = k+1$, ya'ni $\varphi_{2,b} \in C_0$, ga ekvivalent.

(1.3.8) ga ko'ra konfiguratsiya asosiy bo'ladi, faqat va faqat shundaki, agar $j \in \{0, 1, \dots, k\}$ mavjud bo'lib, konfiguratsiyani birlik sharga soyasi yoki C_j yoki C_{j+1} ga tushsa.

Shuning uchun isbotda bu xossani tekshirish yetarli.

Agar $i \neq \frac{k+1}{2}, \frac{k+2}{2}$ bo'lsa, u holda $C_{k+2-i} \cap C_{k+1-i} \cap C_i = \emptyset$ bo'ladi.

Endi $i = \frac{k+1}{2}$. bo'lgan holni aloxida ko'ramiz. d) va e) dan $i = 0, k = -1$, ni

olamiz, ammo bu mumkin emas.

$i = \frac{k+2}{2}$ bo'lgan holda $i = 1, k = 0$, ni olamiz, bu ham bo'lishi mumkin emas.

Demak, $\varphi_2(x)$ ham asosiy holat bo'lmaydi.

$$3) \quad \varphi_3(x) = \begin{cases} +1, & x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_0 \\ -1, & x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_1 \\ +1, & x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_0 \\ +1, & x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_1. \end{cases} \quad \text{bo'lsin.}$$

Faraz qilaylik $c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi holatlar bo'lishi mumkin.

a) Agar $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_{3,b}(c_{b\downarrow}) = +1$ bo'lsa, u holda

$\varphi_{3,b}(c_b) = +1, |A_-| = k+1-i, |A_+| = i$, ya'ni $\varphi_{3,b} \in C_{k+1-i}$, ga ekvivalent.

b) Agar $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_{3,b}(c_{b\downarrow}) = +1$ bo'lsa, u holda $\varphi_{3,b}(c_b) = +1, |A_-| = k-i, |A_+| = i+1$, ya'ni $\varphi_{3,b} \in C_{k-i}$, ga ekvivalent.

c) Agar $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_{3,b}(c_{b\downarrow}) = -1$ bo'lsa, u holda $\varphi_{3,b}(c_b) = +1, |A_-| = k+1-i, |A_+| = i$, ya'ni $\varphi_{3,b} \in C_{k+1-i}$, ga ekvivalent.

d) Agar $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_{3,b}(c_{b\downarrow}) = +1$ bo'lsa, u holda $\varphi_{3,b}(c_b) = -1, |A_-| = 0, |A_+| = k+1$, ya'ni $\varphi_{3,b} \in C_{k+1}$, ga ekvivalent.

e) Agar $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_{3,b}(c_{b\downarrow}) = -1$ bo'lsa, u holda $\varphi_{3,b}(c_b) = +1, |A_-| = 1, |A_+| = k$, ya'ni $\varphi_{3,b} \in C_1$, ga ekvivalent.

f) Agar $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_{3,b}(c_{b\downarrow}) = +1$ bo'lsa, u holda $\varphi_{3,b}(c_b) = +1, |A_-| = 0, |A_+| = k+1$, ya'ni $\varphi_{3,b} \in C_0$, ga ekvivalent.

(1.3.8) ga ko'ra $C_0 \cap C_1 \cap C_{k+1} = \emptyset$, agar $k \neq 0$ bo'lsa, u holda $\varphi_3(x)$ asosiy holat bo'lmaydi.

$$4) \quad \varphi_4(x) = \begin{cases} +1, & x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_0 \\ +1, & x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_1 \\ -1, & x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_0 \\ +1, & x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_1. \end{cases} \quad \text{bo'lsin.}$$

Faraz qilaylik $c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi holatlar bo'lishi mumkin.

a) Agar $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_{4,b}(c_{b\downarrow}) = +1$ bo'lsa, u holda $\varphi_{4,b}(c_b) = +1, |A_-| = 0, |A_+| = k+1$,

ya'ni $\varphi_{4,b} \in C_0$, ga ekvivalent.

b) Agar $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_{4,b}(c_{b\downarrow}) = -1$ bo'lsa, u holda $\varphi_{4,b}(c_b) = +1, |A_-| = 1, |A_+| = k$, ya'ni $\varphi_{4,b} \in C_1$, ga ekvivalent.

c) Agar $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_{4,b}(c_{b\downarrow}) = +1$ bo'lsa, u holda $\varphi_{4,b}(c_b) = -1, |A_-| = 0, |A_+| = k+1$, ya'ni $\varphi_{4,b} \in C_{k+1}$, ga ekvivalent.

Bu natijalar yordamida va (1.3.8) ga ko'ra $C_0 \cap C_1 \cap C_{k+1} = \emptyset$ bo'ladi. Bundan esa $\varphi_4(x)$ asosiy holat bo'lmashligini tasdiqlash mumkin.

$$5) \quad \varphi_5(x) = \begin{cases} +1, & x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_0 \\ +1, & x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_1 \\ +1, & x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_0 \\ -1, & x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_1. \end{cases}$$

bo'lsin.

Faraz qilaylik $c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi holatlar bo'lishi mumkin.

a) Agar $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_{5,b}(c_{b\downarrow}) = +1$ bo'lsa, u holda $\varphi_{5,b}(c_b) = +1, |A_-| = 0, |A_+| = k+1$, ya'ni $\varphi_{5,b} \in C_0$, ga ekvivalent.

b) Agar $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_{5,b}(c_{b\downarrow}) = +1$ bo'lsa, u holda $\varphi_{5,b}(c_b) = +1, |A_-| = 0, |A_+| = k+1$, ya'ni $\varphi_{5,b} \in C_0$, ga ekvivalent.

c) Agar $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_{5,b}(c_{b\downarrow}) = -1$ bo'lsa, u holda $\varphi_{5,b}(c_b) = +1, |A_-| = 1, |A_+| = k$, ya'ni $\varphi_{5,b} \in C_1$, ga ekvivalent.

Faraz qilaylik $c_b \in H_1$ bo'lsin. Quyidagi holatlar bo'lishi mumkin.

d) Agar $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_{5,b}(c_{b\downarrow}) = +1$ bo'lsa, u holda $\varphi_{5,b}(c_b) = +1, |A_-| = k+1-i, |A_+| = i$, ya'ni $\varphi_{5,b} \in C_{k+1-i}$, ga ekvivalent.

e) Agar $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_{5,b}(c_{b\downarrow}) = +1$ bo'lsa, u holda $\varphi_{5,b}(c_b) = -1, |A_-| = k-i, |A_+| = i+1$, ya'ni $\varphi_{5,b} \in C_{i+1}$, ga ekvivalent.

f) Agar $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_{5,b}(c_{b\downarrow}) = -1$ bo'lsa, u holda $\varphi_{5,b}(c_b) = -1, |A_-| = k+1-i, |A_+| = i$, ya'ni $\varphi_{5,b} \in C_i$, ga ekvivalent.

(3.1.8)ga ko'ra $C_i \cap C_{i+1} \cap C_{k+1-i} = \emptyset$ bo'ladi, agar $i \neq \frac{k+1}{2}, \frac{k}{2}$ bo'lsa. Endi $i = \frac{k+1}{2}$, holatni ko'ramiz, u holda b) va c) dan $i = 0, k = -1$, ekanini olamiz, bu mumkin emas, $i = \frac{k}{2}$ holatda $i = 0, k = 0$, ekanini olamiz, bu ham mumkin emas. U holda $\varphi_5(x)$ asosiy holat bo'lmaydi.

$$6) \varphi_6(x) = \begin{cases} -1, x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_0 \\ -1, x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_1 \\ +1, x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_0 \\ +1, x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_1. \end{cases} \text{ bo'lsin.}$$

Faraz qilaylik $c_b \in H_0$ bo'lsin. Quyidagi holatlar bo'lishi mumkin.

a) Agar $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_{6,b}(c_{b\downarrow}) = +1$ bo'lsa, u holda $\varphi_{6,b}(c_b) = -1, |A_-| = k, |A_+| = 1$, ya'ni $\varphi_{6,b} \in C_1$, ga ekvivalent.

b) Agar $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_{6,b}(c_{b\downarrow}) = -1$ bo'lsa, u holda $\varphi_{6,b}(c_b) = -1, |A_-| = k+1, |A_+| = 0$, ya'ni $\varphi_{6,b} \in C_0$, ga ekvivalent.

c) Agar $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_{6,b}(c_{b\downarrow}) = +1$ bo'lsa, u holda $\varphi_{6,b}(c_b) = +1, |A_-| = k, |A_+| = 1$, ya'ni $\varphi_{6,b} \in C_k$, ga ekvivalent.

d) Agar $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_{6,b}(c_{b\downarrow}) = -1$ bo'lsa, u holda $\varphi_{6,b}(c_b) = +1, |A_-| = k+1, |A_+| = 0$, ya'ni $\varphi_{6,b} \in C_{k+1}$. ga ekvivalent.

(1.3.8) ga ko'ra $C_0 \cap C_1 \cap C_k \cap C_{k+1} = \emptyset$, agar $k \neq 0$ bo'lsa, u holda $\varphi_6(x)$ asosiy holat bo'lmaydi.

7) Ko'ramizki,

$$\varphi_7(x) = \pm \begin{cases} -1, x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_0 \\ +1, x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_1 \\ -1, x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_0 \\ +1, x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_1, \end{cases} = \pm \begin{cases} -1, x \in H_0 \\ +1, x \in H_1. \end{cases}$$

bo'lsin.

$\varphi_7(x)$ – davriy konfiguratsiya bo‘ladi.

8) Ko‘ramizki,

$$\varphi_8(x) = \begin{cases} +1, & x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_0 \\ -1, & x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_1 \\ -1, & x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_0 \\ +1, & x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_1. \end{cases}$$

bo‘lsin.

Faraz qilaylik $c_b \in H_0$ bo‘lsin. Quyidagi holatlar bo‘lishi mumkin.

a) Agar $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_{8,b}(c_{b\downarrow}) = +1$ bo‘lsa, u holda

$\varphi_{8,b}(c_b) = +1, |A_-| = k+1-i, |A_+| = i$, ya’ni $\varphi_{8,b} \in C_{k+1-i}$, ga ekvivalent.

b) Agar $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_{8,b}(c_{b\downarrow}) = -1$ bo‘lsa, u holda

$\varphi_{8,b}(c_b) = +1, |A_-| = k+2-i, |A_+| = i-1$, ya’ni $\varphi_{8,b} \in C_{k+2-i}$, ga ekvivalent.

c) Agar $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_{8,b}(c_{b\downarrow}) = -1$ bo‘lsa, u holda

$\varphi_{8,b}(c_b) = -1, |A_-| = k+1-i, |A_+| = i$, ya’ni $\varphi_{8,b} \in C_i$, ga ekvivalent.

d) Agar $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_{8,b}(c_{b\downarrow}) = +1$ bo‘lsa, u holda

$\varphi_{8,b}(c_b) = -1, |A_-| = k-i, |A_+| = i+1$, ya’ni $\varphi_{8,b} = C_{i+1}$ ga ekvivalent.

Faraz qilaylik $c_b \in H_1$ bo‘lsin. Quyidagi holatlar bo‘lishi mumkin.

e) Agar $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_{8,b}(c_{b\downarrow}) = +1$ bo‘lsa, u holda

$\varphi_{8,b}(c_b) = -1, |A_-| = k-i, |A_+| = i+1$, ya’ni $\varphi_{8,b} \in C_{i+1}$, ga ekvivalent.

f) Agar $c_{b\downarrow} \in H_0$ va $\varphi_{8,b}(c_{b\downarrow}) = -1$ bo‘lsa, u holda

$\varphi_{8,b}(c_b) = -1, |A_-| = k+1-i, |A_+| = i$, ya’ni $\varphi_{8,b} \in C_i$, ga ekvivalent.

g) Agar $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_{8,b}(c_{b\downarrow}) = -1$ bo‘lsa, u holda

$\varphi_{8,b}(c_b) = +1, |A_-| = k+2-i, |A_+| = i-1$, ya’ni $\varphi_{8,b} \in C_{k+2-i}$, ga ekvivalent.

h) Agar $c_{b\downarrow} \in H_1$ va $\varphi_{8,b}(c_{b\downarrow}) = +1$ bo‘lsa, u holda

$\varphi_{8,b}(c_b) = +1, |A_-| = k+1-i, |A_+| = i$, ya’ni $\varphi_{8,b} \in C_{k+1-i}$ ga

ekvivalent.

II BOB. KELI DARAXTIDA POTTS MODEL I UCHUN ANIQLANGAN ART LIMIT GIBBS O'LCHOVLARI

2.1. Potts modeli uchun translyatsion invariant Gibbs o'lchovlari

Biz quyida avvaldan ma'lum bo'lgan translyatsion invariant Gibbs o'lchovlari bilan tanishib chiqamiz va bu o'lchov orqali (k_0) -translyatsion invariant Gibbs o'lchovlarini quramiz.

$\tau^k = (V, L)$, $k \geq 1$, Keli daraxti bo'lsin, bu yerda V – τ^k daraxtning uchlari to'plami, L – esa qirralari to'plami. Ma'lumki, τ^k Keli daraxtini quyidagi G_k – $k+1$ ta ikkinchi tartibli siklik gruppalarining ozod ko'paytmasi shaklida tasvirlash mumkin edi ([21] ishga qarang).

Fiksrlangan $x^0 \in V$ uchun quyidagicha belgilashlar qilamiz $W_n = \{x \in V : d(x, x^0) = n\}$, $V_n = \{x \in V : d(x, x^0) \leq n\}$, $L_n = \{l = \langle x, y \rangle \in L : x, y \in V_n\}$, (2.1.1)

bu yerda $d(x, y)$ – $x, y \in V$ uchlari orasidagi masofa.

$x \in W_n$ uchun $S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}$ to'plam x ning to'g'ri avlodlari to'plami deyiladi.

Spin qiymatlari $\Phi = \{1, 2, 3, \dots, q\}$ bo'lgan modelni qaraymiz. Konfiguratsiya σ V uchlari to'plamida quyidagi funksiya ko'rinishida aniqlanadi $x \in V \rightarrow \sigma(x) \in \Phi$;

[17] Potts modeli Gamil'toniani quyidagicha aniqlanadi

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \quad (2.1.2)$$

bu yerda $J \in R$, δ_{ij} –Kroneker simvoli:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{agar } i \neq j \\ 1, & \text{agar } i = j \end{cases}$$

V_n hajmda chekli o'lchamli o'lchovni quyidagicha aniqlaymiz

$$\mu_n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp \left\{ -\beta H_n(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\sigma(x), x} \right\}, \quad (2.1.3)$$

bu yerda $\beta = 1/T$, $T > 0$ – temperatura, Z_n^{-1} – normallovchi ko‘paytuvchi.

(2.1.3) muvofiq deyiladi, agar barcha $n \geq 1$ va $\sigma_{n-1} \in \Phi^{V_{n-1}}$ uchun

$$\sum_{\omega_n \in \Phi^{V_n}} \mu_n(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) = \mu_{n-1}(\sigma_{n-1}), \quad (2.1.4)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa.

Bu yerda $\sigma_{n-1} \vee \omega_n$ konfiguratsiyalar birlashmasi. Bu holda Φ^V da barcha n va $\sigma_n \in \Phi^{V_n}$ lar uchun

$$\mu\left(\left\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\right\}\right) = \mu_n(\sigma_n)$$

Tenglik o‘rinli bo‘ladigan μ o‘lchov mavjud bo‘ladi. (2.1.2) gamil’tonian va vektor qiymatli $h_x, x \in V$ funksiyaga mos bunday o‘lchov limit Gibbs o‘lchovi deyiladi.

Teorema 2.1.1 [21,148-154 b]. (2.1.3) bilan aniqlangan $\mu_n(\sigma_n)$, $n = 1, 2, \dots$, lar muvofiq bo‘lishi uchu ixtiyoriy $x \in V$ da:

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} F(h_y, \theta), \quad (2.1.5)$$

Munosabat o‘rinli bo‘lishi zarur va yetarli, bu yerda $F : h = (h_1, \dots, h_{q-1}) \in R^{q-1} \rightarrow F(h, \theta) = (F_1, \dots, F_{q-1}) \in R^{q-1}$ quyidagicha aniqlanadi

$$F_i = \ln \left(\frac{(\theta - 1)e^{h_i} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j}} \right),$$

va $\theta = e^{J\beta}$, $S(x)$ – esa x ning to‘g‘ri avlodlari to‘plami. Demak (2.1.5) ni qanoatlantiruvchi $h_x, x \in V$ vektorlar to‘plamiga bitta limit Gibbs o‘lchovi mos kelar ekan.

$G_k / G_k^* = \{H_1, \dots, H_r\}$ – faktor grupp bo‘lsin.

Ta’rif 2.1.1: Agar $h_x = h_i, x \in H_i$ bo‘lsa u holda $h = \{h_x, x \in G_k\}$ vektorlar majmuasi G_k^* – davriy deyiladi. G_k – davriy vektorlar majmuasi translyatsion-invariant deyiladi.

Ta’rif 2.1.2: G_k^* –davriy (translyatsion-invariant) vektorlar majmuasiga mos keluvchi μ Gibbs o‘lchovi G_k^* – davriy (translyatsion-invariant) Gibbs o‘lchovi deyiladi.

[18,507-516 bet] ishda Potts modeli uchun *translyatsion-invariant* Gibbs o‘lchovlari tasniflangan. [22, 314-321-bet] maqolada mualliflar Izing modeli uchun konstruktiv usulda ART Gibbs o‘lchovlari mavjudligini ko‘rsatishgan va bunday o‘lchovlarni tasniflashgan. [19,477-493-bet] maqolada esa Izing modeli uchun (κ_0) *translyatsion-invariant* o‘lchovlar o‘rganilgan.

[20,95 – 97 – bet] ishda mualliflar [17,62 – 70 – bet] ishdagidek Potts modeli uchun ART Gibbs o‘lchovlari va beshinchi tartibli Keli daraxtida parametrning ma’lum shartlarida (κ_0) - *translyatsion-invariant* o‘lchovlar mavjudligini ko‘rsatishgan.

(2.1.5) ning translyatsion-invariant yechimlari quyidagi tenglamaning yechimlariga mos keladi

$$h_i = k \ln \left(\frac{(\theta - 1)e^{h_i} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j}} \right), \quad i = 1, \dots, q - 1. \quad (2.1.6)$$

[18,507-516-bet] maqolada (2.1.6) tenglamaning barcha yechimlari topilgan. Bu yechimlar yordamida Potts modelining barcha translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovlari tasniflangan. Hususan u yerda ixtiyoriy translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovlari quyidagi tenglamaning yechimiga qandaydir $m = 1, \dots, q - 1$ da mos keladi

$$h = f_m(h) \equiv k \ln \left(\frac{(\theta + m - 1)e^h + q - m}{me^h + q - m - 1 + \theta} \right). \quad (2.1.7)$$

Belgilash qilamiz

$$\theta_m = 1 + 2\sqrt{m(q - m)}, \quad m = 1, \dots, q - 1. \quad (2.1.8)$$

Tekshirish osonki

$$\theta_m = \theta_{q-m} \quad \text{va} \quad \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor - 1} < \theta_{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} \leq q+1. \quad (2.1.9)$$

Teorema 2.1.2.(qarang. [18, 507-516-bet]) $k = 2$, $J > 0$ bo'lsin.

1) Agar $\theta < \theta_1$, yagona translyatsoin-invariant Gibbs o'lchovi mavjud;

2) Agar $\theta_m < \theta < \theta_{m+1}$ qandaydir $m = 1, \dots, \lfloor \frac{q}{2} \rfloor - 1$ uchun o'rinli bulsa

$1 + 2 \sum_{s=1}^m C_q^s$ ta translyatsoin-invariant Gibbs o'lchovlari mavjud;

3) Agar $\theta_{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} < \theta \neq q+1$, bo'lsa $2^q - 1$ ta translyatsoin-invariant Gibbs

o'lchovi mavjud;

4) Agar $\theta = q+1$, u holda translyatsoin-invariant Gibbs o'lchovi soni quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$\begin{cases} 2^{q-1}, & \text{agar } q - \text{toq bo'lsa} \\ 2^{q-1} - C_{q-1}^{\frac{q}{2}}, & \text{agar } q - \text{juft bo'lsa;} \end{cases}$$

5) Agar $\theta = \theta_m, m = 1, \dots, \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$, ($\theta_{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} \neq q+1$) bo'lsa, u holda translyatsoin-invariant

Gibbs o'lchovi soni quyidagiga teng

$$1 + C_q^m + 2 \sum_{s=1}^{m-1} C_q^s.$$

2.2. Potts modeli uchun davriy Gibbs o'lchovlari

Faraz qilaylik, $T^k = (V, L)$, $k \geq 1$ - k -tartibli Keli daraxti bo'lsin, ya'ni cheksiz daraxt bo'lib, har bir uchidan roppa-rosa $k+1$ dona qirra chiquvchi, siklsiz, cheksiz graf va V - bu daraxtning uchlari to'plami, L - esa T^k daraxtning qirralari to'plami bo'lsin.

Yuqorida ko'rsatildiki, T^k daraxtning G_k - $k+1$ ta hosil qiluvchilari mos ravishda $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ bo'lgan ikkinchi tartibli siklik gruppalarining ozod ko'paytmasi ko'rinishida tasvirlash mumkin edi.

Quyidagicha belgilashlar qilib olamiz, ixtiyoriy fiksirlangan $x^0 \in V$ nuqta uchun

$$\begin{aligned} W_n &= \{x \in V \mid d(x^0, x) = n\}, \\ V_n &= \bigcup_{m=0}^n W_m, \\ L_n &= \{ \langle x, y \rangle \in L \mid x, y \in V_n \}, \end{aligned}$$

Bu yerda $d(x, y)$ - T^k daraxtning x va y uchlari orasidagi masofa, ya'ni x va y uchlarni tutashtiruvchi yo'ldagi (eng qisqa yo'ldagi) qirralar sonidir.

Faraz qilaylik, $\Phi = \{1, 2, 3, \dots, q\}$ va $\sigma \in \Omega = \Phi^V$ - konfiguratsiya, ya'ni $\sigma = \{\sigma(x) \in \Phi : x \in V\}$ hamda $A \subset V$ bo'lsin. Ω_A bilan A to'plamda aniqlangan va $\Phi = \{1, 2, 3, \dots, q\}$ to'plamdan qiymat qabul qiluvchi barcha konfiguratsiyalar fazasini belgilaymiz.

Potts modeli Gamil'tonianini qaraymiz, u quyidagicha bo'lishi bizga ma'lum edi:

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \quad (2.2.1)$$

bu yerda, $J \in \mathbb{R}$, $\langle x, y \rangle$ - eng yaqin qo'shnilar, hamda

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Faraz qilaylik, $h_x = (h_{1,x}, h_{2,x}, \dots, h_{q,x}) \in R^q$, $x \in V$ bo'lsin. Har bir n uchun μ_n o'lchovni Ω_{V_n} da quyidagicha aniqlaymiz :

$$\mu_n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp\{-\beta H_n(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\sigma(x),x}\}, \quad (2.2.2)$$

bu yerda $\beta = \frac{1}{T}$ ($T > 0$ - temperatura), $\sigma_n = \{\sigma(x), x \in V_n\} \in \Omega_{V_n}$, Z_n^{-1} - esa normallashtiruvchi ko'paytma (ba'zan statistik ko'paytma deb ham yuritiladi).

$$H_n(\sigma_n) = -J \sum_{\langle x,y \rangle \in L_n} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}.$$

$\mu_n(\sigma_n)$, $n \geq 1$, o'lchov uchun muvofiqlik sharti quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$\sum_{\sigma^{(n)}} \mu_n(\sigma_{n-1}, \sigma^{(n)}) = \mu_{n-1}(\sigma_{n-1}), \quad (2.2.3)$$

bu yerda $\sigma^{(n)} = \{\sigma(x), x \in W_n\}$.

Faraz qilaylik, μ_n , $n \geq 1$ -lar Ω_{V_n} dagi o'lchovlar ketma-ketligi bo'lsin, hamda bu ketma-ketlik (2.2.3) muvofiqlik shartini bajarsin. U holda, Kolmogorov teoremasiga ko'ra $\Omega_V = \Omega$ da aniqlangan limit o'lchov mavjud va u yagona bo'ladi, (Uni limit Gibbs o'lchovi deb ataladi) bu o'lchov, har bir $n = 1, 2, \dots$ uchun quyidagi tenglikni qanoatlantiradi:

$$\mu(\sigma_n) = \mu_n(\sigma_n).$$

Gibbs o'lchovlariga oid ilmiy maqolalar va risolalardan bizga ma'lumki, (2.2.2) o'lchov (2.2.3) shartni faqat va faqatgina bajaradiki, bunda quyidagi $h = \{h_x, x \in G_k\}$ vektorlar ushbu tenglikni bajaradi

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} F(h_y, \theta), \quad (2.2.4)$$

bu yerda $S(x)$ -to'plam $x \in V$ nuqtaning «to'g'ri ajdodlari» to'plami va

$$F : h = (h_1, h_2, \dots, h_{q-1}) \in R^{q-1} \rightarrow F(h, \theta) = (F_1, F_2, \dots, F_{q-1}) \in R^{q-1},$$

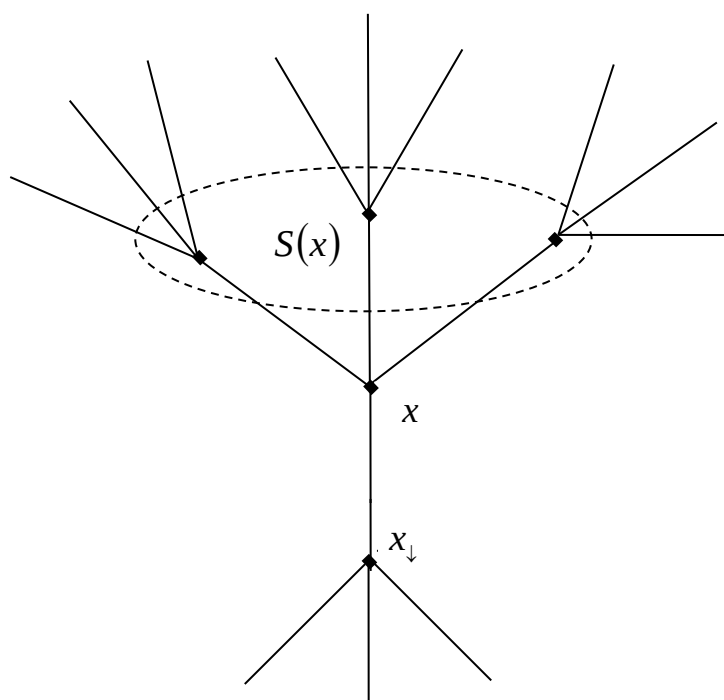
$$F_i = \ln \left(\frac{(\theta - 1)e^{h_i} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j}} \right), \quad \theta = \exp(J\beta), \quad \beta = \frac{1}{T}, \quad T > 0$$

temperatura.

$\hat{G}_k$ G_k gruppaning normal bo'luvchisi bo'lsin.

Ta'rif 2.2.1. Ushbu vektorlar $h = \{h_x, x \in G_k\}$ ni $\hat{G}_k$ - davriy deyiladi, agar $h_{xy} = h_x$ tenglik har bir $x \in G_k, y \in \hat{G}_k$ lar uchun bajarilsa. G_k - davriy o'lchov translyatsion-invariant deyiladi.

Ixtiyoriy $x \in G_k$ uchun quyidagicha belgilash qilamiz:
 $x_{\downarrow} = \{y \in G_k : \langle x, y \rangle\} \setminus S(x)$ (quyidagi rasmga qarang 2.2.1).



rasm 2.2.1.

$G_k / \hat{G}_k = \{H_1, H_2, \dots, H_r\}$ - faktor gruppasi bo'lsin, bu yerda $\hat{G}_k$ - indeksi $r \geq 1$ bo'lgan normal bo'luvchi.

Ta'rif 2.2.2. Ushbu vektorlar $h = \{h_x, x \in G_k\}$ ni $\hat{G}_k$ - kuchsiz davriy deb ataymiz, agar $h_x = h_{x_{\downarrow}}$, tenglik $x \in H_i, x_{\downarrow} \in H_j$ lar va ixtiyoriy $x \in G_k$ uchun bajarilsa.

Professorlar U.A.Rozikov, N.N.Ganihodjaev, F.Muhammedovlar va ularning o'quvchilari tomonidan bir nechta modellar uchun Keli daraxtida translyatsion invariant va davriy Gibbs o'lchovlari chuqur o'rganilgan. Potss modeli uchun translyatsion invariant Gibbs o'lchovlari U.A.Rozikov, N.N.Ganihodjaevlarning ilmiy maqolalarida o'rganilgan ammo bu model uchun davriy Gibbs o'lchovlari to'liq hozirgacha o'rganilmagan.

Bundan tashqari professorlar U.A.Rozikov kuchsiz davriy Gibbs o'lchovi tushunchasi kiritdi va Izing modeli uchun kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlari U.A.Rozikov, M.M.Rahmatullaevlar tomonidan o'rganildi. Ungacha har bir model uchun ko'pi bilan 3 ta Gibbs o'lchovi borligi ko'rsatilardi, yani 2 ta kritik harorat topilib 3 ta fazaviy holat borligi isbotlangan edi. Masalan suvni ko'radigan bo'lsak unda ham 3 ta fazaviy holat bor, ular qattiq, suyuq va gaz holatlaridir. Umuman boshqa jismlarda fazaviy holat 3 tadan ortiq bo'lishi mumkin edi, masalan qora qalamni ko'rish mumkin uni bir necha hil turi bor, lekin ularni tarkibi bir hil, demak bular boshqa fazaviy holatlar, ular uchun kritik harorat, ularni fazaviy o'tishi qanday boradi...? degan savollarga javob qidirish maqsadida kiritilgan kuchsiz davriy Gibbs o'lchovi muvofaqiyatli tushuncha bo'lib chiqdi va Izing modeli uchun 7 ta kuchsiz davriy Gibbs o'lchovi mavjud ekani ko'rsatildi.

Biz ushbu Magistrlik dissertatsiya ishida davriy Gibbs o'lchovlari, kuchsiz davriy Gibbs o'lchoqlarini o'rganamiz va berilgan model - Potts modeli uchun bundan boshqacha o'lchoqlarni mavjudligini tekshirish maqsadida ularni tenglamalarini keltirib chiqaramiz hamda, ularni o'rganamiz.

Yuqorida kiritilgan ta'riflardan ko'rishimiz mumkinki, kuchsiz davriy vektorlar to'plami h odatiy davriy vektorlar to'plami bo'ladi (2.2.1.) ta'rifga qarang), agar h_x miqdor $x_{\downarrow}$ nuqtaga bog'liq bo'lmasa.

Ta'rif 2.2.2. μ o'lchovni $\hat{G}_k$ - (kuchsiz) davriy deb ataymiz, agar u $\hat{G}_k$ - (kuchsiz) davriy vektorlar to'plami h vektorlarga mos kelsa. [13,163-175 b].

Masala quyidagicha: Potts modeli uchun chekli indeksli normal bo'luvchilar bo'lgan holda barcha davriy va kuchsiz davriy limit Gibbs o'lchoqlarini o'rganamiz. Oldindan ma'lum bo'lgan translatsion-invariant, davriy Gibbs o'lchoqlari yordamida yangi tipdagi Gibbs o'lchoqlarini qurish.

2.2.1. Keli daraxti tartibi $k=2$ bo'lgan holda davriy Gibbs o'lchovlari

$G_k^{(2)}$ – davriy Gibbs o'lchovlarini indeks 2 ga teng bo'lgan normal bo'luvchi $G_k^{(2)}$ – uchun yozishga harakat qilamiz. Ma'lumki, $G_k^{(2)}$ – normal bo'luvchining umumiy ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$G_k^{(2)} = \{x \in G_k : |x| - \text{juft}\},$$

bu erda $|x|$ – x so'zning uzunligi.

$$G_k / G_k^{(2)} = \{G_k^{(2)}, G_k \setminus G_k^{(2)}\}$$

faktor grupp bo'lsin.

U holda $G_k^{(2)}$ – davriy vektorlar to'plami h quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$h_x = \begin{cases} h_1, & x \in G_k^{(2)} \\ h_2, & x \in G_k \setminus G_k^{(2)}, \end{cases} \quad (2.2.1)$$

va u quyidagi

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} F(h_y, \theta), \quad (2.2.2)$$

tenglamani qanoatlantirishi kerak. Keli daraxti tartibi $k=2$ bo'lgan holda qaraymiz. $h_1 = (h_{11}, h_{12})$, $h_2 = (h_{21}, h_{22})$ deb olsak quyidagi tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\begin{cases} h_1 = 2F(h_2, \theta) \\ h_2 = 2F(h_1, \theta) \end{cases} \quad (2.2.3)$$

tenglamalar sistemasini olamiz, bulardan vektor koordinatalari bo'yicha yozadigan bo'lsak (2.2.3) tenglamalar sistemasidan quyidagi tenglamalar sistemasi kelib chiqadi:

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{11} = 2 \ln \left(\frac{(\theta - 1)e^{h_{21}} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_{2j}} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_{2j}}} \right) \\ h_{12} = 2 \ln \left(\frac{(\theta - 1)e^{h_{22}} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_{2j}} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_{2j}}} \right) \\ h_{21} = 2 \ln \left(\frac{(\theta - 1)e^{h_{11}} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_{1j}} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_{1j}}} \right) \\ h_{22} = 2 \ln \left(\frac{(\theta - 1)e^{h_{12}} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_{1j}} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_{1j}}} \right) \end{array} \right. \quad (2.2.4)$$

Bu tenglamalar sistemasining har bir tenglamasidagi 2 koeffitsientni darajaga chiqarib so'ngra e ni darajasiga ko'tarsak quyidagi tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{h_{11}} = \left(\frac{\theta e^{h_{21}} + e^{h_{22}} + 1}{\theta + e^{h_{21}} + e^{h_{22}}} \right)^2 \\ e^{h_{12}} = \left(\frac{\theta e^{h_{22}} + e^{h_{21}} + 1}{\theta + e^{h_{21}} + e^{h_{22}}} \right)^2 \\ e^{h_{21}} = \left(\frac{\theta e^{h_{11}} + e^{h_{12}} + 1}{\theta + e^{h_{11}} + e^{h_{12}}} \right)^2 \\ e^{h_{22}} = \left(\frac{\theta e^{h_{12}} + e^{h_{11}} + 1}{\theta + e^{h_{11}} + e^{h_{12}}} \right)^2 \end{array} \right. \quad (2.2.5)$$

(2.2.5) tenglamalar sistemasida quyidagicha belgilashlar qilamiz:

$$e^{h_{11}} = z_1, e^{h_{12}} = z_2, e^{h_{21}} = z_3, e^{h_{22}} = z_4. \quad (2.2.6)$$

Natijada (2.2.5) tenglamalar sistemasi quyidagi tenglamalar sistemasiga keladi:

$$\begin{cases} z_1 = \left(\frac{\theta z_3 + z_4 + 1}{\theta + z_3 + z_4} \right)^2 \\ z_2 = \left(\frac{\theta z_4 + z_3 + 1}{\theta + z_3 + z_4} \right)^2 \\ z_3 = \left(\frac{\theta z_1 + z_2 + 1}{\theta + z_1 + z_2} \right)^2 \\ z_4 = \left(\frac{\theta z_2 + z_1 + 1}{\theta + z_1 + z_2} \right)^2 \end{cases} \quad (2.2.7)$$

Quyidagi ko‘rinishda aniqlangan $W : R^4 \rightarrow R^4$ akslantirishni (operatorni ko‘ramiz):

$$\begin{cases} z'_1 = \left(\frac{\theta z_3 + z_4 + 1}{\theta + z_3 + z_4} \right)^2 \\ z'_2 = \left(\frac{\theta z_4 + z_3 + 1}{\theta + z_3 + z_4} \right)^2 \\ z'_3 = \left(\frac{\theta z_1 + z_2 + 1}{\theta + z_1 + z_2} \right)^2 \\ z'_4 = \left(\frac{\theta z_2 + z_1 + 1}{\theta + z_1 + z_2} \right)^2 \end{cases} \quad (2.2.8)$$

Ko‘rish osonki (2.2.7) tenglamalar sistemasi $z = W(z)$ tenglamalar sistemasi bo‘ladi, bu erda $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)^T$. (2.2.7) tenglamalar sistemasini echish $z' = W(z)$ (2.2.8) akslantirishning qo‘zg‘almas nuqtalarini topish deganidir. Shu sababli biz (2.2.8) akslantirishning qo‘zg‘almas nuqtalarini aniqlash bilan shug‘ullanamiz.

Lemma 2.2.1. W akslantirish quyidagi ko‘rinishdagi invariant to‘plamlarga ega bo‘ladi:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \{z \in R^4 : z_1 = z_2 = z_3 = z_4\}, \\
I_2 &= \{z \in R^4 : z_1 = z_3; \quad z_2 = z_4\}, \\
I_3 &= \{z \in R^4 : z_1 = z_4; \quad z_2 = z_3\}, \\
I_4 &= \{z \in R^4 : z_1 = z_2; \quad z_3 = z_4\}.
\end{aligned}$$

Eslatma: Umuman olganda w akslantirish uchun yuqoridagi lemma 2.2.1 da ko'rsatilgan invariant to'plamlardan boshqa invariant to'plamlar ham mavjud bo'lishi mumkin.

Isboti: Birinchi I_1 to'plamni invariantligini ko'rsatamiz.

Ixtiyoriy $z^* = \{z_1^*, z_2^*, z_3^*, z_4^*\} \in I_1$ uchun

$$\begin{cases}
z'_1 = \left(\frac{\theta z_3^* + z_4^* + 1}{\theta + z_3^* + z_4^*} \right)^2 = \left(\frac{\theta z_1^* + z_1^* + 1}{\theta + 2z_1^*} \right)^2 \\
z'_2 = \left(\frac{\theta z_4^* + z_3^* + 1}{\theta + z_3^* + z_4^*} \right)^2 = \left(\frac{\theta z_1^* + z_1^* + 1}{\theta + 2z_1^*} \right)^2 \\
z'_3 = \left(\frac{\theta z_1^* + z_2^* + 1}{\theta + z_1^* + z_2^*} \right)^2 = \left(\frac{\theta z_1^* + z_1^* + 1}{\theta + 2z_1^*} \right)^2 \\
z'_4 = \left(\frac{\theta z_2^* + z_1^* + 1}{\theta + z_1^* + z_2^*} \right)^2 = \left(\frac{\theta z_1^* + z_1^* + 1}{\theta + 2z_1^*} \right)^2
\end{cases}$$

Ya'ni $z'_1 = z'_2 = z'_3 = z'_4, \Rightarrow z' = W(z^*) \in I_1$.

Endi I_2 to'plamni invariantligini ko'rsatamiz.

Ixtiyoriy $z^* = \{z_1^*, z_2^*, z_3^*, z_4^*\} \in I_2$ uchun ravshanki $z_1^* = z_3^*; \quad z_2^* = z_4^*$, u holda quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} z'_1 = \left(\frac{\theta z^*_3 + z^*_4 + 1}{\theta + z^*_3 + z^*_4} \right)^2 = \left(\frac{\theta z^*_1 + z^*_2 + 1}{\theta + z^*_1 + z^*_2} \right)^2 \\ z'_2 = \left(\frac{\theta z^*_4 + z^*_3 + 1}{\theta + z^*_3 + z^*_4} \right)^2 = \left(\frac{\theta z^*_2 + z^*_1 + 1}{\theta + z^*_1 + z^*_2} \right)^2 \\ z'_3 = \left(\frac{\theta z^*_1 + z^*_2 + 1}{\theta + z^*_1 + z^*_2} \right)^2 = \left(\frac{\theta z^*_1 + z^*_2 + 1}{\theta + z^*_1 + z^*_2} \right)^2 \\ z'_4 = \left(\frac{\theta z^*_2 + z^*_1 + 1}{\theta + z^*_1 + z^*_2} \right)^2 = \left(\frac{\theta z^*_2 + z^*_1 + 1}{\theta + z^*_1 + z^*_2} \right)^2 \end{cases}$$

Ya'ni $z'_1 = z'_3; z'_2 = z'_4, \Rightarrow z' = W(z^*) \in I_2$.

Endi I_3 to'plamni invariantligini ko'rsatamiz.

Ixtiyoriy $z^* = \{z^*_1, z^*_2, z^*_3, z^*_4\} \in I_3$ uchun $z_1 = z_4; z_2 = z_3$ bo'ladi va ularni tenglamalar sistemasiga quysak

$$\begin{cases} z'_1 = \left(\frac{\theta z^*_3 + z^*_4 + 1}{\theta + z^*_3 + z^*_4} \right)^2 = \left(\frac{\theta z^*_2 + z^*_1 + 1}{\theta + z^*_1 + z^*_2} \right)^2 \\ z'_2 = \left(\frac{\theta z^*_4 + z^*_3 + 1}{\theta + z^*_3 + z^*_4} \right)^2 = \left(\frac{\theta z^*_1 + z^*_2 + 1}{\theta + z^*_1 + z^*_2} \right)^2 \\ z'_3 = \left(\frac{\theta z^*_1 + z^*_2 + 1}{\theta + z^*_1 + z^*_2} \right)^2 = \left(\frac{\theta z^*_1 + z^*_2 + 1}{\theta + z^*_1 + z^*_2} \right)^2 \\ z'_4 = \left(\frac{\theta z^*_2 + z^*_1 + 1}{\theta + z^*_1 + z^*_2} \right)^2 = \left(\frac{\theta z^*_2 + z^*_1 + 1}{\theta + z^*_1 + z^*_2} \right)^2 \end{cases}$$

Ya'ni $z'_1 = z'_4; z'_2 = z'_3, \Rightarrow z' = W(z^*) \in I_3$.

Endi I_4 to'plamni invariantligini ko'rsatamiz

Ixtiyoriy $z^* = \{z^*_1, z^*_2, z^*_3, z^*_4\} \in I_3$ uchun $z_1 = z_2; z_3 = z_4$ bo'ladi va ularni tenglamalar sistemasiga qo'ysak

$$\left\{ \begin{array}{l} z'_1 = \left(\frac{\theta z^*_3 + z^*_4 + 1}{\theta + z^*_3 + z^*_4} \right)^2 = \left(\frac{\theta z^*_3 + z^*_3 + 1}{\theta + z^*_3 + z^*_3} \right)^2 \\ z'_2 = \left(\frac{\theta z^*_4 + z^*_3 + 1}{\theta + z^*_3 + z^*_4} \right)^2 = \left(\frac{\theta z^*_3 + z^*_3 + 1}{\theta + z^*_3 + z^*_3} \right)^2 \\ z'_3 = \left(\frac{\theta z^*_1 + z^*_2 + 1}{\theta + z^*_1 + z^*_2} \right)^2 = \left(\frac{\theta z^*_1 + z^*_1 + 1}{\theta + z^*_1 + z^*_1} \right)^2 \\ z'_4 = \left(\frac{\theta z^*_2 + z^*_1 + 1}{\theta + z^*_1 + z^*_2} \right)^2 = \left(\frac{\theta z^*_1 + z^*_1 + 1}{\theta + z^*_1 + z^*_1} \right)^2 \end{array} \right.$$

Ya'ni $z'_1 = z'_2$; $z'_3 = z'_4$, $\Rightarrow z' = W(z^*) \in I_4$.

Lemma to'liq isbot bo'ldi.

2.2.2. Keli daraxtining tartibi k ixtiyoriy bo‘lgan hol

Keli daraxti tartibi k ixtiyoriy bo‘lgan holda qaraymiz. $h_1 = (h_{11}, h_{12})$, $h_2 = (h_{21}, h_{22})$ deb olsak (2.2.2) tenglamalar sistemasi o‘rnida quyidagi tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\begin{cases} h_1 = kF(h_2, \theta) \\ h_2 = kF(h_1, \theta) \end{cases} \quad (2.2.9)$$

bulardan $h_1 = (h_{11}, h_{12})$, $h_2 = (h_{21}, h_{22})$ vektorlar koordinatalari bo‘yicha yozadigan bo‘lsak (2.2.9) tenglamalar sistemasidan quyidagi tenglamalar sistemasi kelib chiqadi:

$$\begin{cases} h_{11} = k \ln \left(\frac{(\theta - 1)e^{h_{21}} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_{2j}} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_{2j}}} \right) \\ h_{12} = k \ln \left(\frac{(\theta - 1)e^{h_{22}} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_{2j}} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_{2j}}} \right) \\ h_{21} = k \ln \left(\frac{(\theta - 1)e^{h_{11}} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_{1j}} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_{1j}}} \right) \\ h_{22} = k \ln \left(\frac{(\theta - 1)e^{h_{12}} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_{1j}} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_{1j}}} \right) \end{cases} \quad (2.2.10)$$

Bu tenglamalar sistemasining harbir tenglamasidagi k koefitsientni darajaga chiqarib so‘ngra e ni darajasiga ko‘tarsak quyidagi tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\left\{ \begin{aligned} e^{h_{11}} &= \left(\frac{\theta e^{h_{21}} + e^{h_{22}} + 1}{\theta + e^{h_{21}} + e^{h_{22}}} \right)^k \\ e^{h_{12}} &= \left(\frac{\theta e^{h_{22}} + e^{h_{21}} + 1}{\theta + e^{h_{21}} + e^{h_{22}}} \right)^k \\ e^{h_{21}} &= \left(\frac{\theta e^{h_{11}} + e^{h_{12}} + 1}{\theta + e^{h_{11}} + e^{h_{12}}} \right)^k \\ e^{h_{22}} &= \left(\frac{\theta e^{h_{12}} + e^{h_{11}} + 1}{\theta + e^{h_{11}} + e^{h_{12}}} \right)^k \end{aligned} \right. . \quad (2.2.11)$$

(2.2.11) tenglamalar sistemasida quyidagicha belgilashlar qilamiz:

$$e^{h_{11}} = z_1, e^{h_{12}} = z_2, e^{h_{21}} = z_3, e^{h_{22}} = z_4. \quad (2.2.12)$$

Natijada (2.2.11) tenglamalar sistemasi quyidagi tenglamalar sistemasiga keladi:

$$\left\{ \begin{aligned} z_1 &= \left(\frac{\theta z_3 + z_4 + 1}{\theta + z_3 + z_4} \right)^k \\ z_2 &= \left(\frac{\theta z_4 + z_3 + 1}{\theta + z_3 + z_4} \right)^k \\ z_3 &= \left(\frac{\theta z_1 + z_2 + 1}{\theta + z_1 + z_2} \right)^k \\ z_4 &= \left(\frac{\theta z_2 + z_1 + 1}{\theta + z_1 + z_2} \right)^k \end{aligned} \right. \quad (2.2.13)$$

Quyidagi ko‘rinishda aniqlangan $W : R^4 \rightarrow R^4$ akslantirishni (operatorni ko‘ramiz):

$$\left\{ \begin{array}{l} z'_1 = \left(\frac{\theta z_3 + z_4 + 1}{\theta + z_3 + z_4} \right)^k \\ z'_2 = \left(\frac{\theta z_4 + z_3 + 1}{\theta + z_3 + z_4} \right)^k \\ z'_3 = \left(\frac{\theta z_1 + z_2 + 1}{\theta + z_1 + z_2} \right)^k \\ z'_4 = \left(\frac{\theta z_2 + z_1 + 1}{\theta + z_1 + z_2} \right)^k \end{array} \right. . \quad (2.2.14)$$

Bu holda ham yuqoridagi Lemma 2.2.1. kabi quyidagi lemmani isbot qilishimiz mumkin:

Lemma 2.2.2. W akslantirish quyidagi ko‘rinishdagi invariant to‘plamlarga ega bo‘ladi:

$$\begin{aligned} I_1 &= \{z \in R^4 : z_1 = z_2 = z_3 = z_4\}, \\ I_2 &= \{z \in R^4 : z_1 = z_3; \quad z_2 = z_4\}, \\ I_3 &= \{z \in R^4 : z_1 = z_4; \quad z_2 = z_3\}, \\ I_4 &= \{z \in R^4 : z_1 = z_2; \quad z_3 = z_4\}. \end{aligned}$$

Eslatma: Umuman olganda W akslantirish uchun yuqoridagi lemma (2.2.2) da ko‘rsatilgan invariant to‘plamlardan boshqa invariant to‘plamlar ham mavjud bo‘lishi mumkin.

Potts modeli uchun topilgan asosiy holatlar Rozikov va Botirovlar tomonidan Throry Mathematical Physics nomli jurnalda nashr etilgan. Bu maqolada Ikkinchi tartibli Keli daraxtida aniqlangan spin qiymati uchga teng bo‘lgan Potts modeli uchun Asosiy holatlar va ularning sonlari topilgan.

Teorema 2.2.1: W akslantirish uchun I_1 va I_2 invariant to‘plamlar ustida translyatsion-invariant yechimlarga mos keluvchi qo‘zg‘almas nuqtalarigina mavjud. [18,507-516- b].

Isbot: Avval teoremani I_1 invariant to‘plam uchun isbotlaymiz. $I_1 = \{z \in R^4 : z_1 = z_2 = z_3 = z_4\}$ ekanligidan (2.2.12) belgilashga ko‘ra $h_{11} = h_{12} = h_{21} = h_{22}$ ekanini olamiz va bundan esa $h_1 = h_2$ vektorlarni teng ekanligini olamiz. Bu esa professorlar N.N.Ganihodjayev va U.A.Rozikovlar tomonidan yaxshi o‘rganilgan Potts modeli uchun translyatsion-invariant yechimlarnigina beradi.

Endi teoremani I_2 invariant to‘plam uchun isbotlaymiz. $I_2 = \{z \in R^4 : z_1 = z_3; z_2 = z_4\}$ ekanligidan (2.2.12) belgilashga ko‘ra $h_{11} = h_{21}; h_{12} = h_{22}$ ekanini olamiz va bundan esa $h_1 = h_2$ vektorlarni teng ekanligini olamiz, chunki ularning mos koordinatalari teng. Bu holda ham professorlar N.N.Ganihodjayev va U.A.Rozikovlar tomonidan yaxshi o‘rganilgan Potts modeli uchun translyatsion-invariant yechimlarnigina paydo bo‘ladi holos. Demak har ikki holda ham (2.2.11) akslantirish uchun translyatsion-invariant yechimlarga mos keluvchi qo‘zg‘almas nuqtalarigina mavjud bo‘lar ekan.

Teorema isbot bo‘ldi.

2.3. Potts modeli uchun Keli daraxtida ART Gibbs va (κ_0) - translyatsion invariant Gibbs o'lchovlari

§2.1. da Potts modeli uchun translatsion-invariant Gibbs o'lchovlarini o'rgandik. Bu paragrafda shu o'lchovlar yordamida ART Gibbs o'lchovlari va k_0 – translyatsion invariant Gibbs o'lchovlari qurish bilan shug'ullanamiz.

[17,62-70-bet], [18,507-516-bet] ishda Potts modeli uchun barcha translyatsion invariant Gibbs o'lchovlari tasniflangan. [22,314-321-bet] maqolada mualliflar Izing modeli uchun konstruktiv usulda ART Gibbs o'lchovlari mavjudligini ko'rsatishgan va bunday o'lchovlarni mavjudligini tasniflashgan. [19,477-493-bet] maqolada esa Izing modeli uchun (κ_0) -translyatsion invariant o'lchovlar o'rganilgan.

Bu magistrlik dissertatsiya ishida biz Potts modeli uchun translyatsion invariant Gibbs o'lchovlaridan foydalanib [9,325-b] dagi kabi ART Gibbs o'lchovlari va [17,62-70-bet] dagi kabi (κ_0) - translyatsion invariant Gibbs o'lchovlarini qurish bilan shug'ullanamiz. h_x vektorlar majmuasi quyidagi tenglik orqali aniqlanadi:

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} F(h_y, \theta) \quad (2.3.1)$$

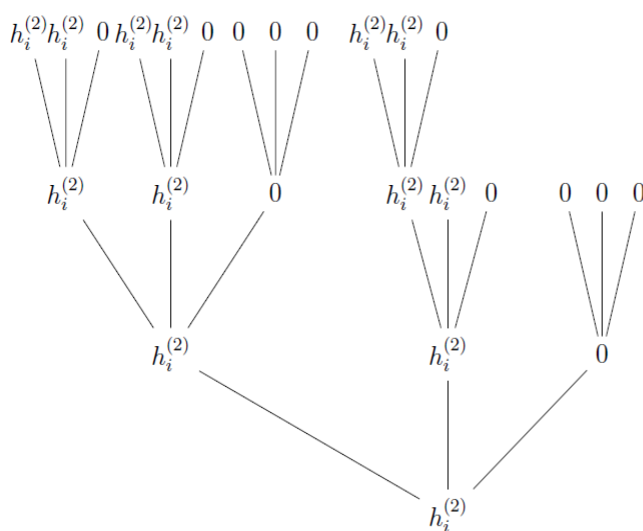
Aytaylik $k_0 \leq k$ tartibli Keli daraxtidagi ba'zi Gibbs o'lchovi μ bo'lsin, ushbu μ o'lchov $h_x(\mu)$ vektorlar to'plamiga mos bo'ladi.

Endi biz $k \geq k_0$ tartibli Keli daraxtida μ uchun $v = v(\mu)$ Gibbs o'lchovini quramiz. Aytaylik τ^k daraxtning uchlar to'plami V^k , mos deyiladi τ^{k_0} ning uchlar to'plami V^{k_0} ga. τ^k daraxtda $\bar{h}_x = \bar{h}_x(v)$ vektorlar to'plami $v(\mu)$ o'lchovga mos ekanligini quyidagi tengliklardan ko'rish mumkin.

Aytaylik V_0^k -uchlar to'plamini quyidagicha aniqlaymiz:

$$\bar{h}_x = \begin{cases} h_x(\mu), & x \in V^{k_0} \\ 0, & x \in V^k \setminus V^{k_0}. \end{cases} \quad (2.3.2)$$

Bu funksiyani biz $k=3$ tartibli Keli daraxtida 1-rasm orqali ko‘rishimiz mumkin.



Rasm 1: τ^3 da $\tilde{h}_y$ vektor funksiyaning ko‘rinishi.

Endi biz τ^k daraxtda (2.3.2) tenglik (2.3.1) funksional tenglamani qanoatlantirishini ko‘rishimiz mumkin.

Bundan $x \in V^k \subset V^{k_0}$ bo'lib quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned}\tilde{h}_x &= \sum_{y \in S_k(x)} F(\tilde{h}_y, \theta) = \sum_{y \in S_k(x) \cap V^{k_0}} F(h_x(\mu), \theta) + \sum_{y \in S_k(x) \cap (V^k \setminus V^{k_0})} F(0, \theta) = \\ &= \sum_{y \in S_{k_0}(x)} F(h_x(\mu), \theta) = k_0 F(h_x(\mu), \theta) = h_x(\mu).\end{aligned}$$

Bu yerda biz $F(0, \theta) = 0$ ekanligidan foydalanamiz. Ya'ni

$$\sum_{y \in S(x) \cap (V^k \setminus V^{k_0})} F(0, \theta) = 0.$$

Agar $x \in V^k \setminus V^{k_0}$, da ko‘rish osonki $S(x) \subset V^k \setminus V^{k_0}$. Quyidagi tenglikka ega bo‘lamiz

$$\tilde{h}_x = \sum_{\tilde{y} \in S(x)} F(\tilde{h}_y, \theta) = \sum_{y \in S(x)} F(0, \theta) = -kF(0, \theta) = 0$$

Kuzatuvlarimizga ko‘ra (2.3.2) tenglik (2.3.1) funksional tenglamani qanoatlantiradi. Demak $\nu = \nu(\mu)$ o‘lchov $\tilde{h}_x$ vektorlar majmuasiga mos keladi, bu o‘lchov ART-Gibbs o‘lchovi deyiladi.

Biz qilgan ilmiy ishlarimizdan quyidagi teorema isbotlandi:

Teorema 2.3.1. $k \geq 3$ bo'lsin. Agar $\theta > \theta_{cr} = 1 + 2\sqrt{q-1}$ bo'lsa, u holda Keli daraxtida Potts modeli uchun avvaldan ma'lum bo'lgan Gibbs o'lchovlaridan farqli ART Gibbs o'lchovlarining sanoqsiz to'plami mavjud bo'ladi.

III BOB. KELI DARAXTIDA POTTS MODELI UCHUN (k_0) – TRANSLYATSION INVARIANT GIBBS O‘LCHOVLARI

3.1. Beshinchi tartibli Keli daraxtida Potts modeli uchun

(k_0) – translyatsion invariant Gibbs o‘lchovlari

Teorema 3.1.1. Beshinchi tartibli Keli daraxtida $q=3$, $\theta=5,5$ bo‘lsin, u holda kamida ikkita (k_0) – translyatsion invariant Gibbs o‘lchovlari mavjud bo‘ladi.

Isbot: 5 – tartibli τ^5 daraxtga bu yechimlarni quyidagicha qo‘yamiz.

Agar $x \in V$ uchda $(h_1^{(1)}, 0)$ vektor bo‘lsa, $S_4(x)$ ni uchlariga $(h_1^{(1)}, 0)$ ni, qolgan $S_1(x)$ uchlariga $(h_1^{(2)}, 0)$ ni joylashtiramiz, u holda

$$\tilde{h}_1 = 4F(h_1, \theta) + F(h_2, \theta)$$

tenglamaga ega bo‘lamiz.

Agar $x \in V$ uchda $(h_1^{(2)}, 0)$ vektor bo‘lsa, $S_3(x)$ ni uchlariga $(h_1^{(2)}, 0)$ ni, qolgan $S_2(x)$ uchlariga $(h_1^{(1)}, 0)$ ni joylashtiramiz, u holda ushbu

$$\tilde{h}_1 = 2F(h_1, \theta) + 3F(h_2, \theta)$$

tenglamaga ega bo‘lamiz.

Natijada $h_1 = (h_1^{(1)}, 0)$, $h_2 = (h_2^{(2)}, 0)$ ekanligidan quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz

$$\begin{cases} h_1^{(1)} = 4 \ln \frac{\theta e^{h_1^{(1)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(1)}}} + \ln \frac{\theta e^{h_1^{(2)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(2)}}} \\ h_1^{(2)} = 2 \ln \frac{\theta e^{h_1^{(1)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(1)}}} + 3 \ln \frac{\theta e^{h_1^{(2)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(2)}}} \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Ma’lumki

$$h_1^{(i)} = 2 \ln \frac{\theta e^{h_1^{(i)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(i)}}}$$

Tenglik o‘rinli, bundan quyidagi tenglamaga ega bo‘lamiz.

$$2 \ln \frac{\theta e^{h_1^{(1)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(1)}}} + \ln \frac{\theta e^{h_1^{(2)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(2)}}} = 0 \quad (3.1.2)$$

Agar (3.1.2) o‘rinli bo‘ladigan θ ni topsak, u holda yuqorida ko‘rilgan h_x vektorlar to‘plami $h_x = \sum_{y \in S(x)} F(h_y, \theta)$ funksional tenglamani qanoatlantirishini isbotlagan bo‘lar edik. (3.1.2) tenglamani analiz qilaylik.

$$h_1^{(1)} = 2 \ln \frac{\theta e^{h_1^{(1)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(1)}}} \text{ ba } h_1^{(2)} = 2 \ln \frac{\theta e^{h_1^{(2)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(2)}}} \quad (3.1.3)$$

ekanligini e‘tiborga olsak (3.1.2) tenglamadan quyidagi tenglama kelib chiqadi.

$$2h_1^{(1)} + h_1^{(2)} = 0 \quad (3.1.4)$$

Bu tenglamadan quyidagilar kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} 4 \ln \frac{\theta e^{h_1^{(1)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(1)}}} + 2 \ln \frac{\theta e^{h_1^{(2)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(2)}}} &= 0 \\ 2 \ln \frac{\theta e^{h_1^{(1)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(1)}}} + \ln \frac{\theta e^{h_1^{(2)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(2)}}} &= 0 \\ \ln \left(\frac{\theta e^{h_1^{(1)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(1)}}} \right)^2 + \ln \left(\frac{\theta e^{h_1^{(2)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(2)}}} \right) &= 0 \\ \ln \left(\frac{\theta e^{h_1^{(1)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(1)}}} \right)^2 \left(\frac{\theta e^{h_1^{(2)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(2)}}} \right) &= 0 \\ \left(\frac{\theta e^{h_1^{(1)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(1)}}} \right)^2 \cdot \left(\frac{\theta e^{h_1^{(2)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(2)}}} \right) &= 1 \end{aligned}$$

$h_1^{(i)}, i = 1, 2$ larni o‘z qiymatlarini qo‘yib

$$\left(\frac{\theta - 1 - \sqrt{(\theta - 1)^2 - 8}}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{\theta - 1 + \sqrt{(\theta - 1)^2 - 8}}{2} \right) = 1 \quad (3.1.5)$$

tenglamaga ega bo‘lamiz. Bu tenglamani analiz qilaylik.

Bunda (3.1.5) tenglama quyidagicha yechiladi:

$$\left(\frac{\theta - 1 - \sqrt{(\theta - 1)^2 - 8}}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{\theta - 1 + \sqrt{(\theta - 1)^2 - 8}}{2} \right) = 1$$

$$\left(\frac{\theta - 1 - \sqrt{(\theta - 1)^2 - 8}}{2} \right) \cdot \frac{8}{4} = 1$$

$$\theta - 1 - \sqrt{(\theta - 1)^2 - 8} = 1$$

$$\theta - 2 = \sqrt{(\theta - 1)^2 - 8}, \quad (\theta \geq 2)$$

shartda kvadratga ko'tarsak $\theta = 5,5$ ekanligini topamiz.

Bu holda kamida ikkita k_0 – translyatsion invariant Gibbs o'lchovlari mavjud bo'ladi.

Teorema isbot bo'ldi.

Eslatma: Teorema 3.1.1 da berilgan shartlarda kamida ikkita (k_0) – translyatsion invariant Gibbs o'lchovlari mavjud bo'lishi aytiladi, bunda boshqa yana o'lchovlar bo'lishi ham mumkin.

3.2. Keli daraxtining tartibi $k = a + b + 2$ bo'lganda

(k_0) – translyatsion invariant Gibbs o'lchovlari mavjudligi

k – tartibli τ^k daraxtga bu yechimlarni quyidagicha qo'yamiz.

Bu yerda $k = a + b + 2$, $a, b \in N$.

Agar $x \in V$ uchda $(h_1^{(1)}, 0)$ vektor bo'lsa, $S_{a+2}(x)$ ni uchlariga $(h_1^{(1)}, 0)$ ni, qolgan $S_b(x)$ uchlariga $(h_1^{(2)}, 0)$ ni joylashtiramiz, u holda

$$\tilde{h}_1 = (a + 2)F(h_1, \theta) + bF(h_2, \theta)$$

tenglamaga ega bo'lamiz.

Agar $x \in V$ uchda $(h_1^{(2)}, 0)$ vektor bo'lsa, $S_{b+2}(x)$ ni uchlariga $(h_1^{(2)}, 0)$ ni, qolgan $S_a(x)$ uchlariga $(h_1^{(1)}, 0)$ ni joylashtiramiz, u holda ushbu

$$\tilde{h}_1 = aF(h_1, \theta) + (b + 2)F(h_2, \theta)$$

tenglamaga ega bo'lamiz.

Natijada $h_1 = (h_1^{(1)}, 0)$, $h_2 = (h_2^{(2)}, 0)$ ekanligidan quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz

$$\begin{cases} h_1^{(1)} = (a + 2) \ln \frac{\theta e^{h_1^{(1)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(1)}}} + b \ln \frac{\theta e^{h_1^{(2)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(2)}}} \\ h_1^{(2)} = a \ln \frac{\theta e^{h_1^{(1)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(1)}}} + (b + 2) \ln \frac{\theta e^{h_1^{(2)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(2)}}} \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Ma'lumki

$$h_1^{(i)} = 2 \ln \frac{\theta e^{h_1^{(i)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(i)}}}$$

Tenglik o'rinli, bundan quyidagi tenglamaga ega bo'lamiz.

$$a \ln \frac{\theta e^{h_1^{(1)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(1)}}} + b \ln \frac{\theta e^{h_1^{(2)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(2)}}} = 0 \quad (3.2.2)$$

Agar (3.2.2) o'rinli bo'ladigan θ ni topsak, u holda yuqorida ko'rilgan h_x vektorlar to'plami $h_x = \sum_{y \in S(x)} F(h_y, \theta)$ funksional tenglamani qanoatlantirishini

isbotlagan bo'lar edik. (3.2.2) tenglamani analiz qilaylik.

$$h_1^{(1)} = 2 \ln \frac{\theta e^{h_1^{(1)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(1)}}} \text{ ba } h_1^{(2)} = 2 \ln \frac{\theta e^{h_1^{(2)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(2)}}} \quad (3.2.3)$$

Ekanligini e'tiborga olsak (3.2.2) tenglamadan quyidagi tenglama kelib chiqadi.

$$ah_1^{(1)} + bh_1^{(2)} = 0 \quad (3.2.4)$$

Bu tenglamadan quyidagilar kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} 2a \ln \frac{\theta e^{h_1^{(1)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(1)}}} + 2b \ln \frac{\theta e^{h_1^{(2)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(2)}}} &= 0 \\ a \ln \frac{\theta e^{h_1^{(1)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(1)}}} + b \ln \frac{\theta e^{h_1^{(2)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(2)}}} &= 0 \\ \ln \left(\frac{\theta e^{h_1^{(1)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(1)}}} \right)^a + \ln \left(\frac{\theta e^{h_1^{(2)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(2)}}} \right)^b &= 0 \\ \ln \left(\frac{\theta e^{h_1^{(1)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(1)}}} \right)^a \left(\frac{\theta e^{h_1^{(2)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(2)}}} \right)^b &= 0 \\ \left(\frac{\theta e^{h_1^{(1)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(1)}}} \right)^a \cdot \left(\frac{\theta e^{h_1^{(2)}} + 2}{\theta + 1 + e^{h_1^{(2)}}} \right)^b &= 1 \end{aligned}$$

$h_1^{(i)}, i = 1, 2$ larni o'z qiymatlarini qo'yib

$$\left(\frac{\theta - 1 - \sqrt{(\theta - 1)^2 - 8}}{2} \right)^a \cdot \left(\frac{\theta - 1 + \sqrt{(\theta - 1)^2 - 8}}{2} \right)^b = 1 \quad (3.2.5)$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglamani analiz qilaylik. Ya'ni a va b larning qanday qiymatlarida yuqoridagi (3.2.5) tenglama ildizlarga ega bo'ladi.

Aytaylik a va b lar $a = b + 1$ shartni qanoatlantirsin. Ushbu shartni qanoatlantiruvchi a va b larni hususiy holda tanlab (3.2.5) tenglamaga olib borib tekshiraylik.

1-hol: $a = 2, b = 1, k = 5$ bo'lsin bunda (3.2.5) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\left(\frac{\theta - 1 - \sqrt{(\theta - 1)^2 - 8}}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{\theta - 1 + \sqrt{(\theta - 1)^2 - 8}}{2} \right) = 1$$

$$\left(\frac{\theta - 1 - \sqrt{(\theta - 1)^2 - 8}}{2} \right) \cdot \frac{8}{4} = 1$$

$$\theta - 1 - \sqrt{(\theta - 1)^2 - 8} = 1$$

$$\theta - 2 = \sqrt{(\theta - 1)^2 - 8}, \quad (\theta \geq 2)$$

shartda kvadratga ko'tarsak $\theta = 5,5$ ekanligini topamiz.

Bu holda kamida ikkita k_0 – translyatsion invariant Gibbs o'lchovlari mavjud bo'ladi. [20,95-97-b]

2- hol: $a = 3, b = 2, k = 7$ bo'lsin bunda (3.2.5) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\left(\frac{\theta - 1 - \sqrt{(\theta - 1)^2 - 8}}{2} \right)^3 \cdot \left(\frac{\theta - 1 + \sqrt{(\theta - 1)^2 - 8}}{2} \right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{\theta - 1 - \sqrt{(\theta - 1)^2 - 8}}{2} \right) \cdot \left(\frac{8}{4} \right)^2 = 1$$

$$\theta - 1 - \sqrt{(\theta - 1)^2 - 8} = \frac{1}{2}$$

$$\theta - 1,5 = \sqrt{(\theta - 1)^2 - 8}, \quad (\theta \geq 1,5)$$

shartda kvadratga ko'tarsak $\theta = 9,25$ ekanligini topamiz.

3- hol: $a = 4, b = 3, k = 9$ bo'lsin bunda (3.2.5) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\left(\frac{\theta - 1 - \sqrt{(\theta - 1)^2 - 8}}{2} \right)^4 \cdot \left(\frac{\theta - 1 + \sqrt{(\theta - 1)^2 - 8}}{2} \right)^3 = 1$$

$$\left(\frac{\theta - 1 - \sqrt{(\theta - 1)^2 - 8}}{2} \right) \cdot \left(\frac{8}{4} \right)^3 = 1$$

$$\theta - 1 - \sqrt{(\theta - 1)^2 - 8} = \frac{1}{4}$$

$$\theta - 1,25 = \sqrt{(\theta - 1)^2 - 8}, \quad (\theta \geq 1,25)$$

Bu tenglamani ham yuqoridagi shartda kvadratga ko'tarsak $\theta = 17,125$ ildizga ega bo'lamiz.

Xulosa: Yuqorida ko'rilgan 3 ta holdan quyidagi qonuniyatni ko'rish qiyin emas.

1-hol: $a = 2, b = 1, k = 5$ bo'lganda $\theta = 5,5 = 1 + 2^2 + \frac{1}{2}$, ya'ni $\theta = 1 + 2^a + \frac{1}{2^b}$.

2-hol: $a = 3, b = 2, k = 7$ bo'lganda $\theta = 9,25 = 1 + 2^3 + \frac{1}{2^2}$, ya'ni $\theta = 1 + 2^a + \frac{1}{2^b}$.

3-hol: $a = 4, b = 3, k = 9$ bo'lganda $\theta = 17,125 = 1 + 2^4 + \frac{1}{2^3}$, ya'ni $\theta = 1 + 2^a + \frac{1}{2^b}$.

Ko'rilgan hollardan shuni aytish mumkin a va b lar $a = b + 1$ shartni qanoatlantirsa, u holda yuqoridagi (3.2.5) tenglama har doim $\theta = 1 + 2^a + \frac{1}{2^b}$ ildizga ega bo'ladi.

Endi biz yuqoridagi $a = b + 1$ shartga ko'ra a ning o'rniga $b + 1$ ni qo'yib (3.2.5) tenglamani yechamiz.

$$\left(\frac{\theta - 1 - \sqrt{(\theta - 1)^2 - 8}}{2} \right)^{b+1} \cdot \left(\frac{\theta - 1 + \sqrt{(\theta - 1)^2 - 8}}{2} \right)^b = 1$$

$$\left(\frac{\theta - 1 - \sqrt{(\theta - 1)^2 - 8}}{2} \right) \cdot 2^b = 1$$

$$\theta - 1 - \sqrt{(\theta - 1)^2 - 8} = \frac{1}{2^{b-1}}$$

$$\sqrt{(\theta - 1)^2 - 8} = \theta - 1 - \frac{1}{2^{b-1}}, \quad (\theta \geq 1 + \frac{1}{2^{b-1}})$$

deb kvadratga ko'tarsak

$$\theta^2 - 2\theta(1 + \frac{1}{2^{b-1}}) + (1 + \frac{1}{2^{b-1}})^2 = \theta^2 - 2\theta - 7$$

$$\frac{2\theta}{2^{b-1}} = 1 + \frac{1}{2^{b-2}} + \frac{1}{2^{2b-2}} + 7$$

bundan

$$\theta = 1 + 2^{b+1} + \frac{1}{2^b}, \quad b \geq 1$$

yechimga ega bo'amiz.

Demak $a = b + 1$, $b \in N$ shart bajarilganda θ har doim $\theta = 1 + 2^{b+1} + \frac{1}{2^b}$, $b \geq 1$ ga teng bo'ar ekan. θ yuqoridagiga teng bo'lsa (3.2.2) tenglama ham o'rinli bo'ladi. Bundan (3.2.3) tengliklar ham o'rinliligi kelib chiqadi. U holda τ^k daraxtda yuqoridagidek ko'rilgan h_x vektorlar to'plami

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} F(h_y, \theta) \quad (3.2.6)$$

tenglikni qanoatlantiradi. Agar a va b lar ixtiyoriy bo'lganda (3.2.6) funksional tenglamani qanoatlantiruvchi yechimlar $\theta > \theta_{cr} = 1 + 2\sqrt{q-1}$ sharni qanoatlantirishi kerak. Agar $q = 3$ bo'lsa $\theta > 1 + 2\sqrt{2}$ bo'ladi, biz yuqorida topgan yechimlarimizning barchasi $\theta > 1 + 2\sqrt{2}$ shartni qanoatlantiradi.

Demak $E(a; b) = \left\{ \theta \in R_+ : \theta > 1 + 2\sqrt{2} \right\} \cap \left\{ \theta : ah_1^{(1)} + bh_1^{(2)} = 0 \right\}$ to'plamni hosil qilamiz.

Ushbu ishda $\kappa = 2b + 3$, $b \in N$ tartibli Keli daraxtida (κ_0) -translyatsion-invariant Gibbs o'lchovlari mavjudligini ko'rsatdik.

Quyidagi teorema isbotlandi.

Teorema: $k_0 = 2$, $k = 2b + 3$, $b \in N$ tartibli Keli daraxtida $q = 3$,

$\theta = 1 + 2^{b+1} + \frac{1}{2^b}$ bo'lsa, u holda kamida ikkita (κ_0) - translyatsion-invariant Gibbs o'lchovi mavjud bo'ladi.

Eslatma: Agar $b = 1$ bo'lsa, u holda $k = 5$ va $\theta = 5,5$ bo'lib $[20, 95 - 97 - b]$ dagi Teorema 3 hosil bo'ladi.

XULOSA

Potts modeli uchun Keli daraxtida (k_0) –translyatsion invariant va (k_0) –davriy Gibbs o‘lchovlari oid tadqiqot natijalariga asoslanib, quyidagi xulosalarga kelindi.

Kimyo, fizika, bioinformatika, tibbiyot va boshqa ko‘plab yo‘nalishlarda, xususan statistik mexanika modellarining faza almashishlarini tasniflashda Gibbs o‘lchovlari nazariyasi samarali hisoblanadi. Panjarali klassik sistemalarda Gibbs o‘lchovlarini tadqiq qilish va o‘lchovlarni davom ettirish haqidagi natijalar muhim ahamiyatga ega. Shuning uchun panjarali sistemalarda aniqlangan turli modellardagi fazalar sinfida (k_0) –translyatsion invariant va (k_0) –davriy limit Gibbs o‘lchovlarini aniqlash, ularni to‘liq tasniflash dolzarb masalalardan biridir.

Gibbs o‘lchovlari statistik fizika va kvant mehanikasining asosiy ob’ekti bo‘lishi bilan bir qatorda Gibbs o‘lchovlari nazariyasi o‘lchovlar nazariyasining yangi sohaslaridan biridir.

Graflar nazariyasi orqali boshqotirmalarni, turli hil yo‘llar haqidagi masalalarni yechish mumkin. Gibbs o‘lchovlari biz o‘rgangan o‘lchovlar nazariyasining davomi bo‘lib Keli deb ataluvchi daraxtda aniqlanar ekan.

Konfiguratsiyalar fazosi va Gamil’tonian tushunchalari Keli daraxtida Gibbs o‘lchovlarini aniqlashda muhim ahamiyatga ega.

Potts modeli uchun (k_0) –translyatsion invariant va ART limit Gibbs o‘lchovlari tasniflandi. **Teorema 2.3.1.** $k \geq 3$ bo‘lsin. Agar $\theta > \theta_{cr} = 1 + 2\sqrt{q-1}$ bo‘lsa, u holda Keli daraxtida Potts modeli uchun avvaldan ma’lum bo‘lgan Gibbs o‘lchovlaridan farqli ART Gibbs o‘lchovlarining sanoqsiz to‘plami mavjud bo‘ladi. Ushbu teoremadagi shartlar bajarilganda ART Gibbs o‘lchovlarining sanoqsiz to‘plami mavjud ekanligi isbotlandi.

Teorema (3.1.1)da beshinchi tartibli Keli daraxtida $q=3$, $\theta=5,5$ bo‘lsin, u holda kamida ikkita (k_0) –translyatsion invariant Gibbs o‘lchovlari mavjud

bo'lishini isbotlandi. Bunda yana boshqa o'lchovlar mavjud bo'lishi mumkin ekanligi ta'kidlandi;

Keli daraxtining tartibi $k = a + b + 2$ bo'lganda translyatsion invariant Gibbs o'lchovlariga doir quyidagi teoremani isbotladi: $k_0 = 2$, $k = 2b + 3$, $b \in N$ tartibli

Keli daraxtida $q = 3$, $\theta = 1 + 2^{b+1} + \frac{1}{2^b}$ bo'lsa, u holda kamida ikkita (κ_0) - translyatsion-invariant Gibbs o'lchovi mavjud bo'ladi;

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

- [1] Mirziyoyev SH.M. Tanqidiy tahlil, qat'iy tartib-intizom va shaxsiy javobgarlik – har bir rahbar faoliyatining kundalik qoidasi bo'lishi kerak. – Toshkent: “O‘zbekiston”, 2017. – 104 b.
- [2] Mirziyoyev. SH.M. PQ-2909 sonli “Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarori. 2017-yil 20-aprel. -55 b
- [3] Sh.Mirziyoyev. 2017 yil 7-fevral “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha Harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi Farmoni. “Sog‘lom avlod uchun” jurnali 2-son 2017 yil. -7 b
- [4] Karimov I.A. Ona yurtimiz baxtu iqboli va buyuk kelajagi yo‘lida xizmat qilish – eng oliy saodatdir. – Toshkent: “O‘zbekiston”, 2015. – 304 b.
- [5] Karimov I.A. Ozod va obod vatan, erkin va farovon hayot – pirovard maqsadimiz. - Toshkent: “O‘zbekiston”, 2000. T.8. -528 b.
- [6] O‘zbekiston Respublikasining “Ta’lim to‘g‘risida”gi Qonuni. O‘zbekiston Respublikasi Oliy Majlisining Axborotnomasi, 1997 yil. 9-son, 225-modda.
- [7] Kadrlar tayyorlash milliy dasturi. O‘zbekiston Respublikasi Oliy Majlisining Axborotnomasi, 1997 yil. 11-12-son, 295-modda.
- [8] O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2015 yil 20 avgustdagi “Oliy ta’lim muassasalarining rahbar va pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirishni tashkil etish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi №242-sonli Qarori.
- [9] X.-O. Георги, Гиббсовские меры и фазовые переходы, М., Мир, 1992.-325 b
- [10] К. Престон, Гиббсовские состояния на счетных множествах, Мир, М., 1977.-128 b
- [11] Я. Г. Синай, Теория фазовых переходов. Строгие результаты, Наука, М., 1980.167-177
- [12] U. A. Rozikov, Gibbs Measures on Cayley Trees, World Sci., Singapore, 2013.155-165
- [13] Н. Н. Ганиходжаев, ТМФ, 85:2 (1990), 163–175.
- [14] Н. Н. Ганиходжаев, Докл. АН РУз, 6–7 (1992), 4–7.
- [15] Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков, ТМФ, 111:1 (1997), 109–117.
- [16] N. N. Ganikhodjaev, U. A. Rozikov, Lett. Math. Phys., 75:2 (2006), 99–109.

- [17] C. K˘ulske, U. A. Rozikov, R. M. Khakimov, Description of the translation-invariant splitting Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree, arXiv: 1310.62-70.
- [18] У. А. Розиков, М.М. Рахматуллаев, ТМФ, 160:3 (2009), 507–516.
- [19] М. М. Рахматуллаев, ТМФ, 176:3 (2013), 477–493.
- [20] М.М.Рахматуллаев, Рафиқов Ф.К, Азамов Ш.Х. “Кэли дарахтида Поттс модели учун конструктив Гиббс ўлчовлари” Республика илмий-амалий анжумани. Фарғона 2019-йил. Стр.95-97
- [21] Rozikov U. A. Gibbs measures on Cayley trees. World scientific -2013. 148-154
- [22] Akin H. , Rozikov U. A. , Temir S. A. , New set of limiting Gibbs measures for the Ising model on a Cayley tree. \ Jour. Stat. Phys. 2011, V. 142, No.2,p.314-321.
- [23] Dobrushin R.L. The description of a random field by means of conditional probabilities and conditions of its regularity. // Theory Probab. Appl. 13 (1968), p. 197-224.
- [24] Lanford O.E., Ruelle D. Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics. // Comm. Math. Phys. - 1969. - V. 13. - P. 194-215.

Internet saytlari

1. www.Ziyonet.uz
2. www.edu.uz
3. www.pedagog.uz
4. www.tdpu.uz
5. <http://student.km.ru>
6. <http://dissforall.com>