

**ÓZBEKSTAN RESPUBLIKASÍ JOQARÍ HÁM ORTA
ARNAWLÍ BILIMLENDIRIW MINISTRLIGI**

**ÁJINIYAZ ATÍNDAĞÍ NÓKIS MÁMLEKETLIK
PEDAGOGIKALÍQ INSTITUTI**

B.B. Prenov

MATEMATIKALÍQ ANALIZ

páninen

5110100 – «Matematika hám informatika» bakalavr tálim

bağdarı talabaları ushın

LEKCIYA TEKSTLERI

(2-kurs qaraqalpaq toparı)

Nókis – 2021

1-lekciya

Funkcionallıq izbe-izlik túsiniǵı. Jıynaqlı izbe-izlik, onıń limiti. Funkcionallıq izbe-izliktiń teń ólshewli jıynaqlılıǵı. Tegis jıynaqlılıq belgisi. Tegis jıynaqlı izbe-izliktiń qásiyetleri

Funkcional izbe-izlikler. Endi $E = N$, F kóplik sıpatında $X \subset R$ kóplikte berilgen funkciyalar kópligi $f(x)$ ti alıp, to'mendegi

$$\varphi : N \rightarrow f(x) \quad \varphi : n \rightarrow f_n(x) \quad (1)$$

sáwlelendiriwdi qaraymız. Bul sáwlelendiriw funkcional izbe-izlik túsiniǵine alıp keledi.

(1) sáwlelendiriwdi tómendegishe kórsetiw múmkin:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & , & 2 & , & \dots & , & n & , & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ f_1(x) & , & f_2(x) & , & \dots & , & f_n(x) & , & \dots \end{array}$$

Nátijjede $\varphi : n \rightarrow f_n(x)$ sáwlelendiriwdiń obrazlarınan dúzilgen to'mendegi

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (2)$$

kóplik payda boladı.

(2) kóplik $X \subset R$ de berilgen **funkcional izbe-izlik (funkciyalar izbe-izligi)** dep ataladı hám ol $f_n(x)$ dep belgilenedi.

Solay etip, funkcional izbe-izliktiń hár bir aǵzası, biz dáslep 1-bólim, 3-bapta kórgen sanlı izbe-izliktiń aǵzalarınan pariqlı bolıp berilgen funkciyalardan ibarat eken.

Sonıda aytıp ótiw kerek, $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ izbe-izliktiń túrli aǵzalarınan anıqlanıw oblastı ulıwma aytqanda, hár túrli bolıwı múmkin. Biz bul jerde X sıpatında usı oblastlardıń ulıwma bólegin alıp qaraymız.

(2) izbe-izlikte $f_n(x)$ funkciya usı izbe-izliktiń **ulıwma aǵzalı (n –aǵzası)** delinedi. Demek, (2) funkcional izbe-izliktiń ulıwma aǵzası x hám n ózgeriwshilerine $x \in X, n \in N$ baylanıslı boladı.

Mısallar.

1. φ –hár bir natural n sanǵa $\frac{1}{n^2 + x^2}$ funkciyanı sáykes qoyıwshı sáwlelendiriw bolsın. Onda mına $X = -\infty, +\infty$ kóplikte berilgen

$$\frac{1}{1 + x^2}, \quad \frac{1}{4 + x^2}, \quad \frac{1}{9 + x^2}, \dots, \frac{1}{n^2 + x^2}, \dots$$

funkcional izbe-izlikke iye bolamız. Bul izbe-izliktiń ulıwma aǵzası

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}$$

boladı.

2. φ –hár bir natural n sanǵa $\sin \frac{\sqrt{x}}{n}$ funkciyanı sáykes qoyıwshı sáwlelendiriw bolsın. Bul jaǵdayda tómendegi

$$\sin \frac{\sqrt{x}}{1}, \quad \sin \frac{\sqrt{x}}{2}, \quad \sin \frac{\sqrt{x}}{3}, \dots, \sin \frac{\sqrt{x}}{n}, \dots$$

funkcional izbe-izlik payda boladı. Ol $X = [0, +\infty]$ kóplikte berilgen bolıp, ulıwma aǵzası $f_n(x) = \sin \frac{\sqrt{x}}{n}$ boladı.

3. To'mendegi

$$x, \sqrt{x}, x^2\sqrt{x}, \dots$$

funkcional izbe-izlikti qarayıq. Bul izbe-izliktiń taq sanlı nomerli orında turǵan aǵzaları $-\infty, +\infty$ aralıqta berilgen funkciyalar bolıp, jup nomerli orında turǵan aǵzaları bolsa $[0, +\infty]$ aralıqta berilgen dep qaraymız. Onıń ulıwma aǵzası

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{\frac{n+1}{2}}, & \text{eger } n\text{-taq san bolsa,} \\ \sqrt{x}, & \text{eger } n\text{-jup san bolsa} \end{cases}$$

boladı.

X kóplikte berilgen bazıbir

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

izbe-izlikti qarayıq. Bul X kóplikte $x_0 \in X$ noqattı alıp, (2) izbe-izliktiń hár bir $f_n(x)$ aǵzasınıń usı noqattaǵı mánisin esaplaymız.

Nátıyjede tómendegi

$$f_1(x_0), f_2(x_0), \dots, f_n(x_0), \dots \quad (3)$$

sanlar izbe-izligi payda boladı.

Sanlar izbe-izligi bolsa, anıǵıraǵı olardıń jıynaqlılıǵı, tarqalıwshılıǵı, jıynaqlı izbe-izliktiń qásiyetleri 1-bólimniń 3-babında keń túrde úyrenilgen edi.

1-anıqlama. Eger $f_n(x_0)$ sanlar izbe-izligi jıynaqlı (tarqalıwshı) bolsa, $f_n(x)$ funkcional izbe-izlik x_0 noqatta jıynaqlı (tarqalıwshı) dep ataladı, x_0 noqat bolsa bul funkcional izbe-izliktiń **jıynaqlılıq (tarqalıwshılıq) noqatı** delinedi.

$f_n(x)$ funkcional izbe-izliktiń barlıq jıynaqlılıq (tarqalıwshılıq) noqatlarınan ibarat kóplik $f_n(x)$ izbe-izliktiń **jıynaqlılıq (tarqalıwshılıq) oblastı (kópligi)** dep ataladı.

Biz ayırım waqıtta M kóplik $M \subset R$ $f_n(n)$ funkcional izbe-izliktiń jıynaqlılıq (tarqalıwshılıq) oblastı (kópligi) bolsın degen aytım ornına, onıń ekvivalenti — $f_n(x)$ funkcional izbe-izlik M oblastta (kóplikte) jıynaqlı (tarqalıwshı) bolsın degen aytımdı islete beremiz.

Bazıbir $f_n(x)$ funkcional izbe-izlik berilgen bolıp, $M \subset R$ bolsa usı izbe-izliktiń jıynaqlılıq oblastı bolsın. Onda $\forall x_0 \in M$ ushın oǵan sáykes

$$f_1(x_0), f_2(x_0), \dots, f_n(x_0), \dots$$

izbe-izlik $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$ limitke iye boladı.

Eger $M \subset R$ kóplikten alıńǵan hár bir $x \in M$ ke, óǵan sáykes keletuǵın $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ izbe-izliktiń limitin sáykes qoysaq, yaǵnıy

$$f : x \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

onda M kóplikte berilgen $f(x)$ funkciya payda boladı. Bul $f(x)$ funkciyanı $f_n(x)$ izbe-izliktiń **limit funkciyası** dep ataymız. Demek,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad x \in M. \quad (4)$$

Mısallar. 1. To'mendegi

$$f_n(x) = \left\{ \frac{1}{n^2 + x^2} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

funkcional izbe-izlik $\forall x \in R$ de jıynaqlı bolıp, limit funkciya 0 ge teń: $\forall x \in R$ ushın

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 + x^2} = 0$$

2. Tómendegi

$$f_n(x) = n^2 x + 1 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

funkcional izbe-izlik tek ǵana bir $x = 0$ noqatta ǵana jıynaqlı, qalǵan barlıq noqatlarda tarqalıwshı boladı:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 x + 1) = \begin{cases} 1, & \text{eger } x = 0 \text{ bolsa,} \\ +\infty, & \text{eger } x > 0 \text{ bolsa,} \\ -\infty, & \text{eger } x < 0 \text{ bolsa.} \end{cases}$$

3. To'mendegi

$$f_n(x) = \left\{ n \cdot \sin \frac{\sqrt{x}}{n} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

funkcional izbe-izlik $\forall x \in R_+$ de jıynaqlı bolıp, onıń limit funkciyası $f(x) = \sqrt{x}$ boladı. Haqıyqattan da,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin \frac{\sqrt{x}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\sqrt{x}}{n}}{\frac{\sqrt{x}}{n}} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{x}.$$

4. Tómendegi

$$f_n(x) = x^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

funkcional izbe-izlikti qarayıq. Bul funkcional izbe-izlik ushın, $\forall x \in [1, +\infty)$ de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \infty,$$

$x = 1$ bolǵanda $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1, \quad \forall x \in (-1, 1)$ de

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0, \quad \forall x \in (-\infty, -1)$ bolǵanda berilgen funkcional izbe-izliktiń limiti bar bolmaydı.

Solay etip, berilgen $f_n(x) = \{x^n\}$ funktsional izbe-izliktiń jıynaqlılıq oblastı $M = (-1, 1)$ bolıp, limit funkciya

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{eger } -1 < x < 1 \text{ bolsa,} \\ 1, & \text{eger } x = 1 \text{ bolsa} \end{cases}$$

boladı.

Funktsional izbe-izliktiń tegis jıynaqlılıǵı. Bazıbir $f_n(x)$:

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (2)$$

funktsional izbe-izlik berilgen bolıp, $M \subset R$ bolsa bul izbe-izliktiń jıynaqlılıq oblastı bolsın. $f(x)$ funkciya (2) funktsional izbe-izliktiń limit funkciyası bolsın. Demek, $f_n(x)$ funktsional izbe-izlik M kópliktiń hár bir $x_0 \in M$ noqtasında, $n \rightarrow \infty$ ke sáykes $f(x_0)$ ge umtıladı.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

Izbe-izliktiń limiti anıqlamasına muwapıq bul tómendegini anılatadı: $\forall \varepsilon > 0$ sanı alıńanda da, sonday $n_0 \in N$ tabılıp, barlıq $n > n_0$ ushın

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

boladı. Bunda n_0 natural san $\varepsilon > 0$ ge hám alıńan x_0 noqtatqa gárezli boladı: $n_0 = n_0(\varepsilon, x_0)$ (sebebi, x ózgeriwshiniń M kóplikten alıńan túrli mánislerinde $f_n(x)$ izbe-izlik, ulıwma aytqanda, hár túrli boladı).

M kópliktegi barlıq noqtalar ushın ulıwma bolǵan n_0 natural sandı tabıw múmkinbe? degen soraw tuwıladı. Bunı tómendegishe túsiniw kerek: $\forall \varepsilon > 0$ sanı alıńanda da, $\forall n > n_0$ hám $\forall x \in M$ ushın $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ bolatuǵın $n_0 \in N$ tabıladıma?

Tómende keltiriletuǵın mısallar kórsetedi, bazıbir funktsional izbe-izlikler ushın bunday n_0 natural san tabıladı; bazıbir funktsional izbe-izlikler ushın bolsa tabılmaydı, yaǵnıy qandayda bir $\varepsilon_0 > 0$ sanı ushın qálegen úlken $n \in N$ sanı alıńanda sonday $x \in M$ tabılıp

$$|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_0$$

teńsizlik orınlanadı.

Mısallar. 1. To'mendegi

$$f_n(x) = \left\{ \frac{\sin nx}{n} \right\}$$

funktsional izbe-izlikti qarayıq. Bul izbe-izliktiń jıynaqlılıq oblastı $M = (-\infty, +\infty)$, limit funkciyası bolsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin nx}{n} = 0$$

boladı. Demek $f(x) \equiv 0$. Bunin' jıynaqlılıqtıń xarakteri tómendegishe:

$\forall \varepsilon > 0$ sanı alıńanda da $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ delinse, barlıq $n > n_0$ de hám $\forall x \in M$ de

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{\sin nx}{n} - 0 \right| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0 + 1} < \varepsilon$$

boladı.

Bul jaǵdayda n_0 natural san tek ǵana ε ge ǵárezli bolıp, qaralıp atırǵan $x \in -\infty, +\infty$ noqatqa ǵárezli emes, Basqasha aytqanda, tabılǵan n_0 natural san barlıq $x \in -\infty, +\infty$ noqatlar ushın ulıwma boladı.

2. To'mendegi

$$f_n(x) = \left\{ \frac{nx}{1+n+x} \right\} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

funkcional izbe-izlikti qarayıq.

Bul funkcional izbe-izliktiń limit funkciyası $f(x) = x$ boladı:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n+x} = x$$

Bul jıyınalıqlıqtıń xarakteride dáslepki mısaldaǵıday. Haqıyqattan da, $\forall \varepsilon > 0$ ($\varepsilon < 1$). sanın alayıq. n_0 sıpatında

$$n_0 = \left\lceil 1 + x_0 \left(\frac{x_0}{\varepsilon} - 1 \right) \right\rceil$$

dep alsaq, $\forall n > n_0$ hám $x \in [0, 1]$ noqat ushın

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{nx}{1+n+x} - x \right| = \frac{x_0(1+x_0)}{1+n+x_0} \leq \frac{x_0(1+x_0)}{2+n_0+x_0} < \varepsilon \quad (5)$$

boladı. Bul jerde kórinip tur, n_0 san ε ge hám x_0 noqatqa baylanıslı. Biraq n_0' dep

$$n_0' = \max_{0 \leq x \leq 1} n_0 = \left\lceil 2 \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rceil$$

alınsa, $\forall n > n_0$ hám $\forall x \in [0, 1]$ ushın (5) orınlana beredi. Demek, n_0' natural san barlıq x ($0 \leq x \leq 1$) noqatlar ushın ulıwma boladı.

3. Tómendegi

$$f_n(x) = \left\{ \frac{nx}{1+n^2x^2} \right\} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

funkcional izbe-izlikti qarayıq. Onıń limit funkciyası

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0$$

boladı.

Bul anıqlamaǵa muwapıq tómendegini bildiredi:

$\forall \varepsilon > 0$ sanı alıńanda da,

$$n_0 = n_0(\varepsilon, x) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon x} \right\rceil \quad (x \neq 0) \quad (6)$$

delinse, barlıq $n > n_0$ ushın

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| = \left| \frac{nx}{1+n^2x^2} - 0 \right| = \frac{nx}{1+n^2x^2} < \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{n_0 + 1} < \varepsilon \quad (7)$$

boladı, $x = 0$ bolsa, kórinip tur, $\forall n$ ushın $f_n(0) = f(0) = 0$ boladı.

Biraq máselen, $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$ dep alsaq, qálegen $n \in N$ sanı hám $x = \frac{1}{n}$ noqat ushın

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \frac{1}{1 + \frac{1}{n^2} \cdot n^2} = \frac{1}{2} > \varepsilon_0$$

boladı.

Demek, barlıq x ($0 \leq x \leq 1$) noqatlar ushın ulıwma bolǵan hám (7) teńsizlik orınlanatuǵın n_0 natural san tabılmaıdı. (Bul juwmaqqa joqarıdaǵı n_0 ushın (6) formulanı úyrenip (kórinip tur, ol jerde $x \rightarrow 0$ da $n_0 \rightarrow +\infty$) te keliw múmkin edi).

$M \subset R$ kóplikte bazıbir $f_n(x)$ funktsional izbe-izlik berilgen bolıp, ol limit funktsiyaǵa iye bolsın. Bul limit funktsiyanı $f(x)$ ($x \in M$) dep belgileyik.

2-anıqlama. Eger $\forall \varepsilon > 0$ alıńanda da sonday $n_0 \in N$ tabılıp, qa'legen $n > n_0$ hám qa'legen $x \in M$ noqatlar ushın bir jola

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon$$

teńsizlik orınlansa, $f_n(x)$ funktsional izbe-izlik M kóplikte $f(x)$ ke **tegis jıynaladı (funktsional izbe-izlik tegis jıynaqlı)** dep ataladı. Keri jaǵdayda, (yaǵnıy $\forall n \in N$ alıńanda da, sonday $\varepsilon_0 > 0$ hám $x_0 \in M$ bar bolıp,

$$\left| f_n(x_0) - f(x_0) \right| \geq \varepsilon_0$$

teńsizlik orınlansa) $f_n(x)$ funktsional izbe-izlik M kóplikte $f(x)$ ke **tegis jıynalmaydı (funktsional izbe-izlik tegis jıynaqlı emes)** dep ataladı.

$f_n(x)$ funktsional izbe-izlikte $f(x)$ ke tegis jıynaqlılıǵı tómendegishe belgilenedi:

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad (x \in M).$$

Joqarıda keltirilgen mısallardıń birinshisinde $f_n(x) = \left\{ \frac{\sin nx}{n} \right\}$ funktsional izbe-izlik limit funktsiya $f(x) = 0$ ge $[0,1]$ aralıqta tegis jıynaladı:

$$\frac{\sin nx}{n} \rightarrow 0 \quad (0 \leq x \leq 1).$$

úshinshisinde bolsa, yaǵnıy $f_n(x) = \left\{ \frac{nx}{1+n^2x^2} \right\}$ funktsional izbe-izlik $f(x) = 0$ limit funktsiyaǵa jıynalsada

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0,$$

bul funktsional izbe-izlik ushın tegis jıynaqlılıq orınlanbaydı.

1-teorema. $f_n(x)$ funksional izbe-izliktiñ M kóplikte $f(x)$ ke tegis jıynalıwı ushın

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

bolıwı zárúrli hám jetkilikli.

Dálil. Zárúrligi. M kóplikte $f_n(x)$ funksional izbe-izlik $f(x)$ limit funkciyağa tegis jıynalsın. Anıqlamağa muwapıq, $\forall \varepsilon > 0$ alıńanda da, sonday $n_0 \in N$ tabılıp, $n > n_0$ bolǵanda M kópliktiñ barlıq X noqatlari ushın

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

boladı. Bunnan bolsa $\forall n > n_0$ ushın

$$M_n = \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

bolatuǵınlıǵı kelip shıǵadı. Demek,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Jetkilikligi. M kóplikte $f_n(x)$ funksional izbe-izlik $f(x)$ limit funkciyağa iye bolıp,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

bolsın. Demek, $\forall \varepsilon > 0$ alıńanda da, sonday $n_0 \in N$ tabılıp, barlıq $n > n_0$ ushın

$$\sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

boladı. Eger to'mendegi

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| \quad (x \in M)$$

qatnasın itibarǵa alsaq, onda $\forall x \in M$ ushın

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

bolatuǵının tabamız. Bul bolsa M kóplikte $f_n(x)$ funksional izbe-izlik $f(x)$ limit funkciyağa tegis jıynalatuǵınlıǵın bildiredi.

Mısallar. 1. Mına

$$f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$$

funktsional izbe-izlikti $-c < x < c$ ($c > 0$) intervalda qarayıq. Bul funksional izbe-izliktiñ limit funkciyası

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-(x-n)^2} = 0$$

boladı. Nátiyjede

$$M_n = \sup_{-c < x < c} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{-c < x < c} |e^{-(x-n)^2} - 0| = \sup_{-c < x < c} e^{-(x-n)^2} = e^{-(c-n)^2}$$

bolıp, onnan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-(c-n)^2} = 0$$

bolatuǵının tabamız.

Demek, berilgen funkcional izbe-izlik $(-c, c)$ aralıqta $f(x) = 0$ limit funksiyağa tegis jıynaladı:

$$e^{-(x-n)^2} \rightarrow 0 \quad (-c < x < c; \quad c > 0).$$

2. Tóمندegi

$$f_n(x) = \left\{ n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right) \right\} \quad (0 < x < \infty)$$

funkcional izbe-izlikti qarayıq. Bul funkcional izbe-izliktiń limit funksiyanı tabamız:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} \right)^2 - \sqrt{x}^2}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (0 < x < +\infty). \end{aligned}$$

Demek, $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Bul jaǵdayda

$$\begin{aligned} M_n &= \sup_{0 < x < \infty} |f_n(x) - f(x)| = \\ &= \sup_{0 < x < \infty} \left| n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right) - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right| = \sup_{0 < x < \infty} \left| \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right| = \\ &= \sup_{0 < x < \infty} \frac{\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x} (\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x})} = \sup_{0 < x < \infty} \frac{1}{2n\sqrt{x} (\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x})^2} = \infty \end{aligned}$$

bolıp, berilgen funkcional izbe-izlik ushın 1-teoremanıń shártı orınlanbaydı.

1-bólim, 3-bap, 10-§ te sanlar izbe-izliginiń limitke iye bolıwı haqqındaǵı Koshi teoreması keltirilgenligi málim. Soǵan uqsas teoremanı funkcional izbe-izliklerde de aytıw múmkin.

Biz tómende funkcional izbe-izlik qanday shártte limit funksiyağa iye bolıwı hám oǵan tegis jıynalıwın anıqlaytuǵın teoremanı keltiremiz. Dáslep fundamental izbe-izlik túsiniǵı menen tanısamız.

$X \subset R$ kóplikte $f_n(x) : f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ funkcional izbe-izlik berilgen bolsın.

3-anıqlama. Eger $\forall \varepsilon > 0$ sanı alıńanda da sonday $n_0 \in N$ san bar bolıp, $n > n_0, m > n_0$ bolǵanda $\forall x \in X$ noqatlar ushın bir jola

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad (8)$$

teńsizlik orınlansa, $f_n(x)$ funkcional izbe-izlik X kóplikte fundamental izbe-izlik dep ataladı.

Máselen, joqarıda keltirilgen

$$f_n(x) = \left\{ \frac{\sin nx}{n} \right\}$$

funkcional izbe-izlik $X = (-\infty, +\infty)$ kóplikte fundamental izbe-izlik boladı,

$$f_n(x) = \left\{ \frac{nx}{1+n^2x^2} \right\}$$

izbe-izlik bolsa $X = [0,1]$ kóplikte fundamental izbe-izlik bolmaydı.

2-teorema. (Koshi teoreması) $f_n(x)$ funkcional izbe-izlik X kóplikte limit funkciyağa iye bolıwı hám oğan tegis jıynalıwı ushın ol X kóplikte fundamental bolıwı zárúrli hám jetkilikli.

Dálil. Zárúrligi. X kóplikte $f_n(x)$ izbe-izlik limit funkciyağa iye bolıp, oğan tegis jıynalsın:

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad x \in X .$$

Tegis jıynaqlılıq anıqlamasına muwapıq $\forall \varepsilon > 0$ sanı alıńanda da, $\varepsilon/2$ ushın sonday $n_0 \in N$ tabılıp, $n > n_0$ bolǵanda $\forall x \in M$ noqatlar ushın

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2 ,$$

sonday-aq, $m > n_0$ bolǵanda $\forall x \in X$ ushın

$$|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon/2$$

boladı.

Onda $n > n_0$, $m > n_0$ hám $\forall x \in X$ ushın

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$$

boladı.

Bul $f_n(x)$ izbe-izlik X kóplikte fundamental izbe-izlik ekenligin bildiredi.

Jetkilikligi. $f_n(x)$ izbe-izlik X kóplikte fundamental izbe-izlik bolsın. X kóplikten alıńan hár bir $x_0 \in X$ de $f_n(x)$ funkcional izbe-izlik $f_n(x_0)$ sanlar izbe-izligine aylanadı. Ol jaǵdayda Koshi teoremasına muwapıq $f_n(x_0)$ jıynaqlı. Demek, X kópliktiń hár bir $x_0 \in X$ noqatında $f_n(x_0)$ izbe-izlik jıynaqlı.

Bul $f_n(x)$ izbe-izliktiń limit funkciyasın $f(x)$ deyik:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad x \in X .$$

Endi (8) teńsizlikte $m \rightarrow \infty$ ke (bunda n hám x tayınlangan) limitke ótip tómendegini tabamız:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon .$$

Bunnan bolsa $f_n(x)$ funkcional izbe-izliktiń $f(x)$ limit funkciyağa tegis jıynaqlılıǵı kelip shıǵadı. **Teorema dálillendi.**

2-lekciya

Funkcional qatarlar hám onıń qosındısı, teń ólshewli jıynaqlı qatarlar, teń ólshewli jıynaqlılıq belgisi. Teń ólshewli jıynaqlı qatarlardıń qásiyetleri.

Funkcional qatarlar. Bazıbir X $X \subset R$ kóplikte

$u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$ funkcional izbe--izlik berilgen bolsın.

1-anıqlama. Tómenдеgi

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

añlatpa funkcional qatar dep ataladı hám ol $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ dep belgilenedi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (1)$$

$u_1(x), u_2(x), \dots$ funkciyalar (1) funkcional qatar dıń aǵzaları, $u_n(x)$ bolsa **funkcional qatar dıń ulıwma aǵzası (n-aǵzası)** dep ataladı.

Funkcional qatarǵa mısallar keltiremiz:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \dots \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)} = \frac{x}{1 \cdot (x+1)} + \frac{x}{(x+1)(2x+1)} + \frac{x}{(2x+1)(3x+1)} + \dots \quad (0 < x < \infty).$$

Solay etip, funkcional qatar dıń hár bir aǵzası, dáslep (1-bólimniń 11-babında) úyrenilgen sanlı qatar dıń aǵzalarınan basqasha bolıp, funkciyalardan ibarat eken.

1-eskertiw. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ funkcional qatar túrli aǵzalarınıń beriliw oblastları

(kóplikleri), ulıwma aytqanda, hár túrli boladı. Biz bul jerde X kóplik sıpatında usı oblastlardıń ulıwma bólegin túsinemiz.

X kóplikte $x_0 \in X$ noqattı alıp, (1) funkcional qatar dıń hár bir $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) aǵzalarınıń usı noqattaǵı mánisin tabamız. Nátiyjede to'mendegi

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots \quad (2)$$

sanlı qatar payda boladı.

Belgili, sanlı qatarlar, olardıń jıynaqlılıǵı, tarqalıwshılıǵı, jıynaqlılıq belgileri, jıynaqlı qatarlardıń qásiyetleri 1-bólimniń 11-babında keń túrde bayan etilgen edi.

2-aniqlama. Eger $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ sanlı qatar jıynaqlı (tarqalıwshı) bolsa, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ funktsional qatar $x_0, x_0 \in X$ noqatta **jıynaqlı (tarqalıwshı)** dep ataladı, x_0 noqat bolsa bul funktsional qatardıń **jıynaqlılıq (tarqalıwshı) noqatı** delinedi.

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ funktsional qatardıń barlıq jıynaqlılıq (tarqalıwshı) noqatlarınan ibarat kóplik, bul funktsional qatardıń **jıynaqlılıq (tarqalıwshı) oblastı (kópligi)** delinedi.

Keyingi bayanlamada biz $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ funktsional qatardıń jıynaqlılıq (tarqalıwshı) oblastı M kóplik bolsın dep aytıwdın' ornına $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ funktsional qatar M kóplikte jıynaqlı (tarqalıwshı) bolsın degen aytımdı da islete beremiz.

Bazıbir $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ funktsional qatar berilgen bolıp, $M \subset R$ bolsa usı funktsional qatardıń jıynaqlılıq oblastı bolsın. $\forall x_0 \in M$ ushın, oǵan sáykes

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots$$

qatar jıynaqlı, onıń qosındısı bolsa S_0 dep aytayıq.

Eger M kóplikten alınǵan hár bir x belgisizge oǵan sáykes keletuǵın

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

qatardıń qosındısı sáykes qoysaq, onda M kóplikte berilgen $S(x)$ funktsiya payda boladı. Bul $S(x)$ funktsiyanı $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$ funktsional qatardıń qosındısı dep ataymız. Demek $\forall x \in M$ ushın

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = S(x)$$

Funktsional qatarlarda da, sanlı qatarlarǵa uqsas, qatardıń dara qosındıları túsinipleri kiritiledi.

(1) funktsional qatardıń dáslepki aǵzalarınan dúzilgen to'mendegi

$$S_1(x) = u_1(x),$$

$$S_2(x) = u_1(x) + u_2(x),$$

... ..

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x),$$

... ..

qosındılar (1) funkcionál qatardıń **dara qosındıları** delinedi. Demek, (1) funkcionál qatar berilgen jaǵdayda b́arqulla bul qatardıń dara qosındılarınınan ibarat

$$S_n(x) : S_1(x), S_2(x), \dots, S_n(x), \dots \quad (3)$$

funkcionál izbe-izlikti payda etiw ḿumkin.

Kerinshe, (1) funkcionál qatardıń dara qosındılarınınan ibarat (3) funkcionál izbe-izlik berilgen jaǵdayda, b́arqulla aǵzaları (1) funkcionál qatardıń sáykes aǵzalarına teń bolǵan tómendegi:

$$S_1(x) + [S_2(x) - S_1(x)] + \dots + [S_n(x) - S_{n-1}(x)] + \dots$$

funkcionál qatardı payda etiw ḿumkin.

Sanlı qatardıń jıynaqlılıǵı (taralıwshılıǵı) anıqlamasın eslep (qaralsın, 1-bólim, 11-bap, 1-§) (1) funkcionál qatardıń x_0 noqatta jıynaqlılıǵın (taralıwshılıǵın) tómendegishede anıqlaw ḿumkin.

3-anıqlama. Eger $n \rightarrow \infty$ ke $S_n(x)$ funkcionál izbe-izlik x_0 $x_0 \in M$

noqatta jıynaqlı (taralıwshı) bolsa, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ funkcionál qatar x_0 noqatta **jıynaqlı**

(taralıwshı) dep ataladı.

Bul funkcionál izbe-izliktiń jıynaqlılıq (taralıwshılıq) oblastı (kópligi) tiyisli funkcionál qatardıń jıynaqlılıq (taralıwshılıq) oblastı (kópligi) dep ataladı.

(3) funkcionál izbe-izliktiń limit funkciyası $S(x)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x).$$

(1) funkcionál qatardı qosındısı dep ataladı.

Mısallar. 1. To'mendegi

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots$$

funkcionál qatardı qarayıq. Bul qatardıń hár bir aǵzası: $u_n(x) = x^{n-1}$ ($n = 1, 2, \dots$) funkciya $R = (-\infty, \infty)$ de berilgen. Qaralıp atırǵan funkcionál qatardıń dara qosındısı

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \begin{cases} \frac{1-x^n}{1-x}, & \text{eger } x \neq 1 \text{ bolsa} \\ n, & \text{eger } x = 1 \text{ bolsa} \end{cases}$$

boladı. Onda

$$\forall x \in (-1, 1) \text{ ushın } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x} \right) = \frac{1}{1-x},$$

$$\forall x \in [1, +\infty] \text{ ushın } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \infty,$$

$$\forall x \in [-\infty, -1] \text{ ushın } S_n(x) \text{ funkcionál izbe-izlik limitke iye emes.}$$

Solay etip, berilgen funkcional qatardıń jıynaqlılıq oblastı $M = (-1, +1)$, tarqalıwshılıq oblastı bolsa, $R \setminus M = [-\infty, -1] \cup [1, +\infty]$ ten ibarat. $(-1, +1)$ aralıqta funkcional qatardıń qosındısı $S(x) = \frac{1}{1-x}$ boladı.

2. Tómendegi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)} \quad (0 < x < +\infty)$$

funkcional qatardı qarayıq. Bul qatardıń dara qosındısın tabamız:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x}{(k-1)x+1} \frac{1}{(kx+1)} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{(k-1)x+1} - \frac{1}{kx+1} \right] = 1 - \frac{1}{nx+1}.$$

Onda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{nx+1} \right] = 1 \quad (0 < x < +\infty)$$

boladı. Demek, berilgen qatardıń qosındısı $S(x)=1$ boladı.

Biz joqarıda funkcional izbe-izlik hámde funkcional qatarlar, olardıń jıynaqlılıǵı (tarqalıwshılıǵı) túsinikleri menen tanıstıq.

Tiykarında bunday túsinikler menen biz, dáslep, dara jaǵdayda (ózgeriwshi x tıń hárbir tayınlangan mánisinde) 1-bólimniń 3-hám 11-baplarında sanlar izbe-izligi, sanlı qatarlar dep tanııp, olardı keń túrde úyrenген edik.

Házirgi jaǵday, yaǵnıy funkcional izbe-izliktiń limit funkciyası $f(x)$, funkcional qatar qosındısı $S(x)$ ler x ózgeriwshiniń funkciyaları bolıwı bul $f(x)$ hám $S(x)$ lerdiń funkcional qásiyetlerin úyreniwdi talap etedi.

Máselen $f_n(x)$ funkcional izbe-izlik hár bir $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) aǵzasınıń funkcional qásiyetlerine muwapıq (úzliksizligi, differenciallanıwshılıǵı hám t.b.)

$f(x)$ limit funkciyanıń sáykes qásiyetlerin, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ funkcional qatar hár bir $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) aǵzası funkcional qásiyetlerine muwapıq, qatar qosındısı $S(x)$ tiń sáykes qásiyetlerin úyreniwden ibarat.

Bul $f(x)$ hámde $S(x)$ funkciyalardıń qásiyetlerin úyreniwde, $f_n(x)$ izbe-izliktiń limit funkciya $f(x)$ ke, qatar dara qosındısı $S_n(x)$ tiń qatar qosındısı $S(x)$ ke jıynalıwı (umtılwı) xarakterı áhmiyetli rol oynaydı. Sonıń ushın bayanımızdı funkcional izbe-izlik hámde funkcional qatardıń tegis jıynaqlılıǵı túsinigin kiritiw hám onı úyreniwden baslaymız.

Funkcional qatarlardıń tegis jıynaqlılıǵı.

$M \subset R$ kóplikte bazıbir

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (1)$$

funkcional qatar berilgen bolsın. Bul funkcional qatar M kóplikte jıynaqlı bolıp, onıń qosındısı $S(x)$ bolsın. Demek, M kóplikte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) = S(x).$$

boladı, bunda $S_n(x)$ - berilgen funktsional qatardıń dara qosındılarının ibarat funktsional izbe-izlik bolıp esaplanadı.

4-anıqlama. Eger M kóplikte $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ funktsional qatardıń dara qosındılarının ibarat $S_n(x)$ funktsional izbe-izlik qatar qosındısı $S(x)$ ke tegis jıynalsa, onda bul funktsional qatar **M kóplikte tegis jıynaqlı** dep ataladı, kerisinshe, yaǵnıy $S_n(x)$ funktsional izbe-izlik M kóplikte $S(x)$ ke tegis jıynalmasa, (1) funktsional qatar M kóplikte $S(x)$ ke tegis jıynalmaydı delinedi.

Solay etip, funktsional qatardıń tegis jıynaqlılıǵı (jıynalmawı) túsinigide olardıń ádettegi jıynaqlılıǵınday, funktsional izbe-izliklerdiń tegis jıynaqlılıǵı (jıynalmawı) arqalı kiritiledi.

Mısallar. 1. To'mendegi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} \quad (0 \leq x < +\infty)$$

funktsional qatardı qarayıq. Bul qatardıń dara qosındısı

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \dots + \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \\ &= \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1} \right) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n+1} \end{aligned}$$

bolıp, onıń qosındısı

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n+1} \right) = \frac{1}{x+1}.$$

Anıqlamaǵa muwapıq, $\forall \varepsilon > 0$ san alıńanda da $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - (1+x) \right\rceil$ delinse,

barlıq $n > n_0$ ushın

$$\left| S_n(x) - S(x) \right| = \left| \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n+1} - \frac{1}{x+1} \right| = \frac{1}{x+n+1} \leq \frac{1}{x+n_0+2} < \varepsilon$$

boladı. Bundaǵı n_0 natural san $\varepsilon > 0$ ge hám x $0 \leq x \leq +\infty$ noqatlarǵa baylanıslı. Biraq n_0' dep

$$n_0' = \max_{0 \leq x < \infty} \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - (1+x) \right\rceil = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rceil$$

alınsa, onda $n > n_0'$ bolǵan n lerde joqarıdaǵı (14.12) teńsizlik orınlana bermeydi.

Demek, berilgen funktsional qatar ushın anıqlamaǵa n_0' natural san barlıq x ($0 \leq x < \infty$) noqatları ushın ulıwma boladı, yaǵnıy x ke baylanıslı bolmaydı.

Demek, berilgen funktsional qatar tegis jıynaqlı.

2. Tómendegi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)} \quad (0 < x < \infty)$$

funkcional qatardı qarayıq. Bul funkcional qatardıń dara qosındısı

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{x}{1 \cdot (x+1)} + \frac{x}{(x+1)(2x+1)} + \dots + \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(n-1)x+1} - \frac{1}{nx+1}\right) = 1 - \frac{1}{nx+1} \end{aligned}$$

bolıp, onıń qosındısı

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{nx+1}\right) = 1 \quad (0 < x < \infty).$$

Anıqlamaǵa muwapıq, $\forall \varepsilon > 0$ sanı alıńanda da $n_0 = \left\lceil \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \right\rceil$ ($x \neq 0$)

delinse, barlıq $n > n_0$ ushın

$$\left| S_n(x) - S(x) \right| = \left| 1 - \frac{1}{nx+1} - 1 \right| = \frac{1}{nx+1} \leq \frac{1}{n_0+1} < \varepsilon$$

boladı. Eger $x = 0$ bolsa, kórinip tur, $\forall n$ ushın $S_n(0) = S(0) = 1$ bolıp,

$$S_n(0) - S(0) = 0$$

boladı. Bundaǵı n_0 natural san $\varepsilon > 0$ hám x ($0 < x < \infty$) noqatlarǵa baylanıslı bolıp, ol barlıq x ($0 < x < +\infty$) noqatlar ushın ulıwma bolmaydı. (bul jaǵdayda

$n_0 = \left\lceil \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \right\rceil$ dıń $(0, +\infty)$ de x boyınsha maksimumı shekli san emes).

Basqasha aytqanda qálegen n natural san alsaqta, sonday $\varepsilon_0 > 0$ (máselen,

$\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$) hám $x = \frac{1}{n} \in (0, +\infty)$ noqat tabılıp

$$\left| S_n\left(\frac{1}{n}\right) - S\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \frac{1}{n \cdot \frac{1}{n} + 1} = \frac{1}{2} > \varepsilon_0$$

boladı.

1-teorema. $M \subset R$ kóplikte $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ funkcional qatar berilgen bolıp,

onıń qosındısı $S(x)$ bolsın. Bul funkcional qatardıń M de tegis jıynaqlı bolıwı ushın, onıń dara qosındıları izbe-izligin $S_n(x)$ tiń M de fundamental izbe-izlik bolıwı zárúrli hám jetkilikli.

Bul teorema funkcional izbe-izliktiń tegis jıynaqlılıǵı haqqındaǵı 14.2-teoremanı funkcional qatarǵa qarata aytıluwı bolıp, onıń dálili 14.2-teoremanıń dálilindey.

Funkcional qatar

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

tiń tegis jıynaqlı bolıwı haqqındaǵı 4-anıqlama hámde funkcional izbe-izliktiń tegis jıynaqlı bolıwınıń zárúr hám jetkilikli shártin anıqlaytuǵın 1-teoremadan paydalanıp tómendegi teoremaǵa kelemiz.

2-teorema $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ funkcional qatar M kóplikte $S(x)$ ke tegis jıynalıwı ushın

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} |S_n(x) - S(x)| = 0$$

bolıwı zárúr hám jetkilikli.

Mısalı. To'mendegi

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

funkcional qatar $(-1, +1)$ de jıynaqlı bolıp, onıń qosındısı

$$S(x) = \frac{1}{1-x}$$

ekenligin kórgen edik. Bul funkcional qatar ushın

$$|S_n(x) - S(x)| = \left| \frac{x^n}{1-x} \right| \quad (x \in (-1, +1))$$

bolıp,

$$\sup_{-1 < x < 1} |S_n(x) - S(x)| = +\infty$$

boladı. Demek berilgen qatar $(-1, +1)$ aralıqta tegis jıynaqlı emes.

3-teorema (Veyershtass belgisi). Eger mına

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (1)$$

funkcional qatardıń hár bir aǵzası $M \subset R$ kóplikte tómendegi

$$|u_n(x)| \leq c_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (*)$$

teńsizlikti qanaatlardırsa hám

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots \quad (4)$$

sanlı qatar jıynaqlı bolsa, onda (1) funkcional qatar M kóplikte tegis jıynaqlı boladı.

Dáلیل. (4) qatar jıynaqlı bolǵanlıqtan 1-bólim, 11-bap, 2-§ de keltirilgen teoremaǵa tiykarlanıp, $\forall \varepsilon > 0$ sanı alıńanda da, sonday $n_0 \in N$ tabılıp, barlıq $n > n_0$, $m > n$ ushın

$$c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_m < \varepsilon$$

boladı. (*) teńsizlikten paydalanıp, M kópliktiń barlıq $x \in M$ noqatları ushın

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_m(x)| < \varepsilon$$

bolatuǵının tabamız. Bunnan 3-teoremaǵa muwapıq berilgen funkcional qatardıń M kóplikte tegis jıynaqlı bolıwı kelip shıǵadı.

Mısallar. 1. Mına

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} \quad (0 \leq x < +\infty)$$

funkcional qatardıń tegis jıynaqlılıǵı anıqlanǵan edi. Bul qatardıń tegis jıynaqlılıǵın Veyershtrass belgisine járdeminde ańsat kórsetiw múmkin.

Haqıyqattan da

$$|u_n(x)| = \left| \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} \right| = \frac{1}{|x+n| |x+n+1|} \leq \frac{1}{n^2}$$

bolıwı hámde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

qatardıń jıynaqlılıǵınan berilgen funkcional qatardıń $(0, +\infty)$ de tegis jıynaqlılıǵı kelip shıǵadı.

2. Mına

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2} \quad (0 \leq x < +\infty).$$

funkcional qatarın qarayıq. Bul funkcional qatardıń ulıwma aǵzası

$$u_n(x) = \frac{nx}{1+n^5x^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

funkciyadan ibarat. Bul funkciyanı $[0, +\infty)$ aralıqta ekstremumge tekseremiz $u_n(x)$

funkciyanıń tuwındısı jalǵız $x = n^{-5/2}$ noqatta nolge aylanadı ($x = n^{-5/2}$ stacionar noqat). Bul stacionar noqatta

$$u_n''\left(n^{-5/2}\right) < 0$$

boladı. Demek, $u_n(x)$ funkciya $x = n^{-5/2} \in [0, +\infty)$ noqatta maksimumge erisedi.

Onıń maksimum mánisi bolsa $\frac{1}{2} n^{-3/2}$ ge teń. Demek, $0 \leq x < +\infty$ de

$$|u_n(x)| = \left| \frac{nx}{1+n^5x^2} \right| \leq \frac{1}{2n^{3/2}}$$

boladı. Eger $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{3/2}}$ qatardıń jıynaqlılıǵın itibarǵa alsaq, onda

Veyershtrass belgisine muwapıq, berilgen funkcional qatardıń $[0, +\infty)$ te tegis jıynaqlılıǵın tabamız.

3-lekciya

Dárejeli qatar túsini. Abel teoreması. Dárejeli qatarlardıń jıynaqlılıq radiusı hám jıynaqlılıq intervalı. Dárejeli qatardıń teń ólsheuli jıynaqlılıǵı

Dárejeli qatarlar. Abel teoreması. Biz aldınǵı paragraflerde funktsional qatarlardı úyrendik. Funktsional qatarlar arasında, olardıń dara jaǵdayı bolǵan mına

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (1)$$

yamasa, ulıwma ko'rinite,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots \quad (2)$$

qatarlar (bunda $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, x_0 – turaqlı haqıyqıy sanlar) matematikada hám onıń qollanıwlarında áhmiyetli rol oynaydı. Bul jerde, usı baptıń 1-§ indegi (1) ańlatpada qatnasqan $u_n(x)$ sıpatında

$$u_n(x) = a_n x^n \text{ (yamasa } u_n(x) = a_n (x - x_0)^n \text{)}$$

yaǵnıy x (yamasa $x - x_0$) ózgeriwshiniń dárejeleri qaraladı. Sol sebepli (1) hám (2) qatarlar **dárejeli qatarlar** dep ataladı.

Eger (2) qatarda $x - x_0 = t$ dep alınsa, onda bul qatar t ózgeriwshige qarata (1) qatar kórinisine keledi. Demek, (1) dárejeli qatarlardı úyreniw jetkilikli.

(1) ańlatpadaǵı $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ haqıyqıy sanlar (1) **dárejeli qatardıń koeffisientleri** dep ataladı.

Dárejeli qatardıń dúzilisin, dárejeli qatarlar bir-birinen tek ǵana koeffisientleri menen ǵana parq qılatuǵının kóremiz. Demek dárejeli qatar berilgen degende onıń koeffisientleri berilgen degendi túsinemiz.

Mısallar. Mına

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (0! = 1)$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

qatarlar dárejeli qatarlar.

Solay etip, dárejeli qatarlardıń hár bir aǵzası $(-\infty, +\infty)$ de berilgen funkciya. Olay bolsa, dárejeli qatardı formal kóz qarastan, $(-\infty, +\infty)$ de qaraw múmkin. Biraq, tábiyǵıy, olardı qálegen noqatta jıynaqlı boladı dep ayta almaymız.

Albette, qálegen dárejeli qatar $x = 0$ noqatta jıynaqlı boladı. Bul ayqın. Demek, dárejeli qatardıń jıynaqlılıq oblastı álbette $x = 0$ noqattı óz ishine aladı.

Dárejeli qatardıń jıynaqlılıq oblastı (kópligi) dúzilisin anıqlawda tómendegi Abel teoremasına tiykarlanadı.

1-teorema (Abel` teoreması). Eger

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (1)$$

dárejeli qatar x tiń $x = x_0$ $x_0 \neq 0$ mánisinde jıynaqlı bolsa, x tiń

$$|x| < |x_0| \quad (3)$$

teńsizlikti qanaatlandıırıwshı barlıq mánislerinde (1) dárejeli qatar absolyut jıynaqlı boladı.

Dáلیل. Shártke muwapıq

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n + \dots$$

qatar (sanlı qatar) jıynaqlı. Bul jaǵdayda qatar jıynaqlılıǵınıń zárúrli shártine muwapıq

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$$

boladı. Demek, $\{a_n x_0^n\}$ izbe-izlik shegaralangán boladı, yaǵnıy sonday turaqlı M sanı tabılıp, $\forall n \in N$ ushın

$$|a_n x_0^n| \leq M$$

teńsizlik orınlanadı. Bul teńsizlikti itibarǵa alıp tómendegini tabamız:

$$\left| a_n x^n \right| = \left| a_n x_0^n \right| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n.$$

Endi mına

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \dots + |a_n x^n| + \dots \quad (4)$$

qatar menen birge tómendegi

$$\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n = M + M \left| \frac{x}{x_0} \right| + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \dots + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \dots \quad (5)$$

qatardı qarayıq. Bunda birinshiden (5) qatar jıynaqlı (sebebi bul qatar geometriyalıq qatar bolıp, onıń bólimi (3) ge muwapıq 1 den kishi: $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$), ekinshiden (4) qatardıń hár bir aǵzası (5) qatardıń sáykes aǵzasınan úlken emes. Onda 1-bólim, 11-bap, 3-§ de keltirilgen teoremaǵa muwapıq (4) qatar jıynaqlı boladı. Demek, berilgen (1) dárejeli qatar absolyut jıynaqlı. **Teorema dálillendi.**

1-saldar. Eger

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (1)$$

dárejeli qatar x tiń $x = x_0$ mánisinde tarqalıwshı bolsa, x tiń $|x| > |x_0|$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı barlıq mánislerinde tarqalıwshı boladı.

Dálil. Berilgen (1) dárejeli qatar x_0 noqatta tarqalıwshı bolsın. Onda bul qatar x tiń $|x| > |x_0|$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı mánislerinde de tarqalıwshı boladı, sebebi (1) qatar x tiń $|x| > |x_0|$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı bazıbir $x = x_1$ mánisinde jıynaqlı bolatuǵın bolsa, onda Abel teoremasına muwapıq bul qatar $x = x_0$ $|x_0| < |x_1|$ noqatlarında jıynaqlı bolıp qaladı. Bul bolsa (1) qatardıń $x = x_0$ de tarqalıwshı delingenine qarsı. **Saldar dálillendi.**

Dárejeli qatardıń jıynaqlılıq radiusı hám jıynaqlılıq intervalı. Endi dárejeli qatardıń jıynaqlılıq oblastı dúzilisin anıqlayıq.

2-teorema. Eger

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (1)$$

dárejeli qatar x tiń bazıbir ($x \neq 0$) mánislerinde jıynaqlı, bazıbir mánislerinde tarqalıwshı bolsa, onda sonday jalǵız $r > 0$ haqıyqıy sanı tabılıp (1) dárejeli qatar x tiń $|x| < r$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı mánislerinde absolyut jıynaqlı, $|x| > r$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı mánislerinde bolsa tarqalıwshı boladı.

Dálil. Berilgen (1) dárejeli qatar $x = x_0 \neq 0$ de jıynaqlı, $x = x_1$ de bolsa tarqalıwshı bolsın. Kórinip tur, $|x_0| < |x_1|$ boladı. Onda 1-teorema hámde 1-saldarǵa

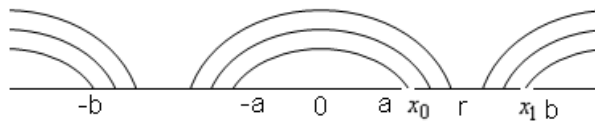
muwapıq (1) dárejeli qatar x tiń $|x| < |x_0|$ teńsizlikti

qanaatlandırıwshı mánislerinde absolyut jıynaqlı, x tiń $|x| > |x_1|$ teńsizlikti

qanaatlandırıwshı mánislerinde bolsa tarqalıwshı boladı. Solay etip (1) dárejeli qatar

a $a < |x_0|$ noqatta jıynaqlı,

b $b > |x_1|$ noqatta bolsa



1 - sızılma

tarqalıwshı boladı. (1-sızılma).

Demek,

(1) qatar $[a, b]$ segmenttiń shep ushında jıynaqlı, oń ushında bolsa tarqalıwshı.

$[a, b]$ segmenttiń ortası $\frac{a+b}{2}$ noqatın alıp, bul noqatta (1) qatardı qarayıq.

Eger (1) qatar $\frac{a+b}{2}$ noqatta jıynaqlı bolsa, onda $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ segmentti alıp, onı $[a_1, b_1]$ arqalı belgileyik. Demek, (1) qatar a_1 noqatta jıynaqlı, b_1 noqatta bolsa tarqalıwshı bolıp, $[a_1, b_1]$ segmenttiń uzınlıǵı $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$ ge teń. Soń $[a_1, b_1]$ segmenttiń ortası $\frac{a_1+b_1}{2}$ noqatı alıp, bul noqatta (1) qatardı qaraymız. Eger ol $\frac{a_1+b_1}{2}$ noqatta jıynaqlı bolsa, onda $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ segmentti, tarqalıwshı bolsa, $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$ segmentti alıp, onı $[a_2, b_2]$ arqalı belgileyimiz. Demek, (1) qatar a_2 noqatta jıynaqlı, b_2 noqatta bolsa tarqalıwshı bolıp, $[a_2, b_2]$ segmenttiń uzınlıǵı $b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2}$ ge teń. Usılay qılıp dawam ettiremiz. Nátiyjede ishpe-ish jaylasqan

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$$

segmentler izbe-izligi payda boladı. Bul segmentlerdiń hár biriniń shep ushında (a_n noqatlarda) (1) qatar jıynaqlı, oń ushında bolsa (b_n -noqatlarda) tarqalıwshı, $n \rightarrow \infty$

ke bul segmentler uzınlıǵı nolge umtılıp baradı. $\left(b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0\right)$

Onda ishpe-ish jaylasqan segmentler principine muwapıq (qaralsın, 1-bólim, 3-bap, 8-§) sonday, jalǵız r san tabılıp,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = r$$

bolıp, bul r noqat barlıq segmentlerge tiyisli boladı.

Endi x ózgeriwshiniń $|x| < r$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı qalegen mánisin qarayıq. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = r$ bolǵanı ushın, sonday natural n_0 sanı tabılıp, $|x| < a_{n_0} < r$ boladı. a_{n_0} noqatta (1) qatar jıynaqlı. Demek, 1-teoremaǵa muwapıq x noqatta da (1) dárejeli qatar jıynaqlı boladı.

x ózgeriwshiniń $|x| > r$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı qalegen mánisin qarayıq. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = r$ bolǵanlıǵı sebepli, sonday natural n_1 sanı tabılıp, $|x| > b_{n_1} > r$ boladı. b_{n_1} noqatta (1) qatar tarqalıwshı. Onda 1-saldarǵa muwapıq x de (1) qatar tarqalıwshı boladı.

Solay etip, sonday r sanı tabılıp (1) därejeli qatar x tiń $|x| < r$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı mánislerinde absolyut jıynaqlı, $|x| > r$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı mánislerinde bolsa tarqalıwshı boladı. **Teorema dálillendi.**

1-anıqlama. Joqarıdağı 2-teorema tabılğan r sanı (1) därejeli qatardıń **jıynaqlılıq radiusı**, $(-r, r)$ interval bolsa (1) därejeli qatardıń **jıynaqlılıq intervalı** dep ataladı.

1-eskertiw. 2-teorema x tiń $x = \pm r$ mánislerinde (1) därejeli qatardıń jıynaqlı yamasa tarqalıwshı bolıwı tuwralı juwmaq shıǵarıp bermeydi. Bul $x = \pm r$ noqatlarda (1) därejeli qatar jıynaqlı bolıwı da múmkin, tarqalıwshı bolıwı da múmkin.

Endi mısallar qaraymız.

Mısallar. 1. Mına

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

därejeli qatar (geometriyalıq qatar) dıń jıynaqlılıq radiusı $r = 1$, jıynaqlılıq intervalı $(-1, +1)$ boladı. Bul qatar intervaldıń shetki noqatları $r = \pm 1$ de tarqalıwshı.

2. Tómendegi

$$1 + \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \dots + \frac{x^n}{n^2} + \dots$$

qatardıń jıynaqlılıq radiusı $r = 1$, jıynaqlılıq intervalı bolsa $(-1, 1)$ boladı. Berilgen därejeli qatar $r = \pm 1$ de jıynaqlı (tarqalıwshı). Demek, därejeli qatardıń jıynaqlılıq oblastı (kópligi) $(-1, 1]$ segmentten ibarat.

3. Mına

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

därejeli qatardıń jıynaqlılıq radiusı $r = 1$, jıynaqlılıq intervalı bolsa $(-1, 1)$ boladı. Berilgen qatar $r = 1$ de jıynaqlı $r = -1$ de bolsa tarqalıwshı. Demek, qatardıń jıynaqlılıq oblastı $(-1, 1]$ yarım intervaldan ibarat.

2-eskertiw. Joqarıdağı teorema bazıbir $x_0 \neq 0$ noqatlarda jıynaqlı, bazıbir $x_1 \neq 0$ noqatlarda tarqalıwshı bolğan därejeli qatarlar haqqında edi. Biraq sonday därejeli qatarlarda bar, olar tek ǵana $x = 0$ noqatta jıynaqlı boladı.

Máselen, $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$ qatar qálegen $x_0 \neq 0$ noqatta tarqalıwshı. haqıyqattanda,

Dalamber belgisine muwapıq

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! x_0^{n+1}}{n! x_0^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) x_0 = \infty$$

boladı. Demek, $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$ qatar qálegen $x \neq 0$ de tarqalıwshı. Bunday därejeli qatarlardıń jıynaqlılıq radiusın $r = 0$ dep alamız.

Sonın menen birge sonday dárejeli qatarlarda bar, olar qa'legen $x \in (-\infty, \infty)$ de jıynaqlı boladı.

Máselen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ di alayıq. Bul qatar qálegen x_0 noqatta jıynaqlı.

Haqıyqattanda, jáne Dalamber belgisine muwapıq

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x_0^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_0|}{n+1} = 0$$

boladı. Demek, bul qatar qálegen $x \in (-\infty, +\infty)$ de jıynaqlı. Bunday dárejeli qatarların jıynaqlılıq radiusı $r = +\infty$ dep alınadı.

Koshi-Adamar teoreması. Joqarıda kórdik, dárejeli qatarların jıynaqlılıq oblastı ápiwayı dúziliske iye bolar eken: ya interval, ya yarım interval, ya segment. Barlıq jaǵdaylarda da bul oblast jıynaqlılıq radiusı r arqalı anlatıladı.

Belgili, hár qanday dárejeli qatar

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (1)$$

óziniń koeffisientleri izbe-izligi a_n menen anıqlanadı. Solay eken, onıń jıynaqlılıq radiusıda usı koeffisientler izbe-izligi arqalı qalayda tabılıwı kerek. Berilgen (1) dárejeli qatar koeffisientleri járdeminde $\sqrt[n]{|a_n|}$:

$$|a_0|, |a_1|, \sqrt{|a_2|}, \dots, \sqrt[n]{|a_n|}, \dots \quad (6)$$

sanlar izbe-izligin dúzemiz. Belgili, hár qanday sanlar izbe-izliginiń joqarı limiti bar (qaralsın, 1-bólim, 3-bap, 11-§). Demek, (6) izbe-izlikte joqarı limitke iye.

Onı b menen belgileyik:

$$b = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \quad (0 \leq b \leq +\infty)$$

3-teorema (Koshi-Adamar teoreması). Berilgen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dárejeli qatardıń jıynaqlılıq radiusı

$$r = \frac{1}{b} = \frac{1}{\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}} \quad (7)$$

boladı.

3-eskertiw. Joqarıdaǵı (7) formulada $b = 0$ bolǵanda $r = +\infty$, $b = +\infty$ bolǵanda $r = 0$ dep alınadı.

Dálil. (7) formulanıń durıslıǵın kórsetiwde tómendegi

1) $b = +\infty$ ($r = 0$),

2) $b = 0$ ($r = +\infty$),

3) $0 < b < +\infty$ $\left(r = \frac{1}{b} \right)$

jaǵdayların hár qaysısın óz aldına qaraymız.

1) $b = \infty$ bolsın. Bul jaǵdayda $\sqrt[n]{|a_n|}$ izbe-izlik shegaralanbaǵan. Qalegen $x_0 \neq 0$ noqattı alıp, bul noqatta (1) dárejeli qatardıń tarqalıwshı ekenligin kórsetemiz. Meyli kerisinshe orınlı bolsın, yaǵnıy usı x_0 noqatta (1) dárejeli qatar jıynaqlı bolsın. Demek, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ qatar (sanlı qatar) jıynaqlı. Onda qatar jıynaqlılıǵınıń zarúrli shártine muwapıq

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$$

boladı. Demek, $\{a_n, x_0^n\}$ izbe-izlik shegaralanǵan, yaǵnıy sonday turaqlı M sanı bar bolıp (onı 1 den úlken qılıp alıw múmkin)

$\forall n \in N$ ushın

$$|a_n x_0^n| \leq M \quad (M > 1)$$

teńsizlik orınlanađı. Bul teńsizlikten

$$\sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x_0| \leq \sqrt[n]{M} < M,$$

yaǵnıy

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{M}{|x_0|}$$

bolatuǵını kelip shıǵadı. Solay etip, $\sqrt[n]{|a_n|}$ izbe-izlik shegaralanǵan bolıp qaladı. Nátiyjede qarama-qarsılıq júzege keldi. Qarama-qarsılıqtıń kelip shıǵıwına sebep $x_0 \neq 0$ noqatta (1) qatardıń jıynaqlı bolsın dep alınıwda.

Demek, (1) dárejeli qatar qalegen $x_0 \neq 0$ noqatta taralıwshı. 2) $b = 0$ bolsın. Bul jaǵdayda qalegen $x_0 \neq 0$ noqatta (1) dárejeli qatardıń jıynaqlı bolıwın kórsetemiz. Shárt boyınsha $\sqrt[n]{|a_n|}$ izbe-izliktiń joqarı limiti nolge teń eken, bunnan onıń limitide bar hám nolge teńligi kelip shıǵadı.

Anıqlamaǵa muwapıq $\forall \varepsilon > 0$ san alıńanda da, dara jaǵdayda $\varepsilon = \frac{1}{2|x_0|}$

boyınsha sonday $n_0 \in N$ tabılıp, barlıq $n > n_0$ ushın

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2|x_0|}$$

boladı. Keyingi teńsizlikten bolsa

$$|a_n x_0^n| < \frac{1}{2^n}$$

bolıwı kelip shıǵadı.

Kórinip tur $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ qatar jıynaqlı. Salıstırıw teoreması boyınsha (qaralsın,

1-bólim, 11-bap,3-§)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n|$$

qatar jıynaqlı boladı. Demek,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$$

qatar absolyut jıynaqlı.

3) $0 < b < +\infty$ bolsın. Bul jaǵdayda (1) dárejeli qatar qalegen x_0 ($|x_0| < \frac{1}{b}$) noqatta jıynaqlı, qalegen x_1 ($|x_1| > \frac{1}{b}$) noqatta tarqalıwshı ekenligin kórsetemiz.

$|x_0| < \frac{1}{b}$ bolsın. Bul jaǵdayda sonday $\delta > 0$ sanın tabıw múmkin, $|x_0| = \frac{1}{b + \delta}$ boladı. Endi δ_1 $0 < \delta_1 < \delta$ sandı alayıq. Bul $\delta_1 > 0$ san ushın sonday $n_0 \in N$ tabılıp, barlıq $n > n_0$ ushın (joqarı limitin qásiyetine muwapıq, 1-bólim, 3-bap, 11-§)

$$\sqrt[n]{|a_n|} < b + \delta_1, \text{ yaǵnıy } |a_n| < (b + \delta_1)^n \text{ boladı.}$$

Demek, barlıq $n > n_0$ ushın

$$|a_n x_0^n| = |a_n| \cdot |x_0^n| < (b + \delta_1)^n \cdot \frac{1}{(b + \delta)^n} = \left(\frac{b + \delta_1}{b + \delta} \right)^n \quad (8)$$

bolıwı kelip shıǵadı. bunda

$$\frac{b + \delta_1}{b + \delta} = \frac{(b + \delta) - (\delta - \delta_1)}{b + \delta} = 1 - \frac{\delta - \delta_1}{b + \delta} < 1.$$

Endi mına

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n| = |a_0| + |a_1 x_0| + |a_2 x_0^2| + \dots + |a_n x_0^n| + \dots \quad (4)$$

qatar menen tómendegi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b + \delta_1}{b + \delta} \right)^n = 1 + \frac{b + \delta_1}{b + \delta} + \dots + \left(\frac{b + \delta_1}{b + \delta} \right)^n + \dots \quad (9)$$

qatardı salıstırayıq. Bunda birinshiden (9) qatar jıynaqlı (sebebi bul geometriyalıq bolıp, onıń bólimi $0 < \frac{b + \delta_1}{b + \delta} < 1$), ekinshiden, n niń bazıbir mánisinen baslap

$n > n_0$ (8) qatnasqa muwapıq (4) qatardıń hár bir aǵzası (9) qatardıń sáykes aǵzasınan úlken emes. Onda qatarlar teoriyasında keltirilgen salıstırıw teoremasına (1-bólim, 11-bap, 3-§) muwapıq (4) qatar jıynaqlı boladı.

$|x_1| > \frac{1}{b}$ bolsın. Onda sonday $\delta' > 0$ sanın tabıw múmkin,

$$|x_1| = \frac{1}{b - \delta'}$$

boladı. Endi δ'_1 $0 < \delta'_1 < \delta'$ sanın alayıq. Joqarı limittiń qásiyetine muwapıq (1-bólim, 3-bap, 2-§) $\sqrt[n]{|a_n|}$ izbe-izliktiń mına

$$\sqrt[n]{|a_n|} > b - \delta'_1, \text{ yaǵnıy } |a_n| > (b - \delta'_1)^n$$

teńsizlikti qanaatlandıratuǵın aǵzalarınıń sanı sheksiz kóp boladı.

Demek, bul jaǵdayda

$$|a_n x_1^n| = |a_n| \cdot |x_1^n| > (b - \delta'_1)^n \cdot \frac{1}{(b - \delta')^n} = \left(\frac{b - \delta'_1}{b - \delta'} \right)^n \quad (10)$$

bolıp, bunda

$$\frac{b - \delta'_1}{b - \delta'} = \frac{b - \delta' + \delta' - \delta'_1}{b - \delta'} = 1 + \frac{\delta' - \delta'_1}{b - \delta'} > 1$$

boladı.

Joqarıdaǵı (11) qatnastan $n \rightarrow \infty$ ke $\{a_n x_1^n\}$ izbe-izliktiń limiti nolge teń emesligin tabamız.

Demek,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$$

qatar tarqalıwshı (qatar jıynaqlılıǵınıń zárúrli shárti orınlanbaydı)

Solay etip hár bir x_0 ($|x_0| < \frac{1}{b}$) noqatta (1) dárejeli qatar jıynaqlı. hár bir

x_1 ($|x_1| > \frac{1}{b}$) noqatta bolsa usı dárejeli qatar tarqalıwshı bolar eken.

Dárejeli qatardıń jıynaqlılıq radiusı anıqlamasın itibargá alıp, $\frac{1}{b}$ berilgen dárejeli qatardıń jıynaqlılıq radiusı ekenligin tabamız. **Teorema dálillendi.**

Mısallar. 1. Mına

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{\sqrt{n}}} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^{\sqrt{2}}} + \dots + \frac{x^n}{2^{\sqrt{n}}} + \dots$$

dárejeli qatardı qarayıq. Bul dárejeli qatardıń jıynaqlılıq radiusın (7) formula boyınsha tabamız:

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{\sqrt{n}}{n}} = 1.$$

Demek, berilgen dárejeli qatardıń jıynaqlılıq radiusı $r = 1$, jıynaqlılıq intervalı bolsa $(-1, 1)$ den ibarat. Bul dárejeli qatar jıynaqlılıq intervalınıń ushlarında sáykes túrde tómendegi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{\sqrt{n}}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$$

sanlı qatarlarga aylanıp, olardı Leybnic teoreması hámde Raabe belgisinen paydalanıp jıynaqlı ekenligin dálillew qıyın emes. Demek, berilgen dárejeli qatardıń jıynaqlılıq oblastı $[-1, +1]$ segmentten ibarat.

Kóbinese praktikada dárejeli qatarlardıń jıynaqlılıq oblastların tabıwda sanlı qatarlar teoriyasında keltirilgen belgilerden paydalanıladı. Bunda ózgeriwshi x parametr sıpatında qaraladı.

2. Mına

$$1 + \frac{x}{2 \cdot 5} + \frac{x^2}{3 \cdot 5^2} + \dots + \frac{x^n}{(n+1)5^n} + \dots$$

dárejeli qatardı qarayıq. Bul qatarǵa Dalamber belgisin (1-bólimi, 11-bap, 4-§) qollap tómendegini tabamız:

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+2)5^{n+1}} : \frac{x^n}{(n+1)5^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)5^n \cdot x^{n+1}}{(n+2)5^{n+1}x^n} \right| = \frac{|x|}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = \frac{|x|}{5}.$$

Demek, $\frac{|x|}{5} < 1$, yaǵnıy $|x| < 5$ bolǵanda qatar jıynaqlı, $\frac{|x|}{5} > 1$, yaǵnıy $|x| > 5$ bolǵanda qatar tarqalıwshı.

Solay etip, berilgen dárejeli qatardıń jıynaqlılıq radiusı $r = 5$, jıynaqlılıq intervalı bolsa $(-5, 5)$ boladı.

Jıynaqlılıq intervalı $(-5, 5)$ tiń ushlarında dárejeli qatar sáykes túrde

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots; 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

sanlı qatarlarga aylanıp, bul qatarlardıń birinshisi jıynaqlı, ekinshisi bolsa tarqalıwshı. Demek, berilgen qatardıń jıynaqlılıq oblastı $[-5, 5)$ yarım intervaldan ibarat eken.

4-lekciya

Funkciyalardı dárejeli qatarǵa jayıw máselesi. Teylor qatarı. $\sin x$, $\cos x$, e^x , $\ln(1+x)$ va $(1+x)^\alpha$ funkciyalardı dárejeli qatarǵa jayıw. Dárejeli qatarlardıń juwıq esapqa qollanılıwı

Biz joqarıda, qálegen dárejeli

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

qatar óziniń jıynaqlılıq intervalı $(-r, r)$ de úzliksiz $S(x)$ funkciyanı (dárejeli qatar qosındısı) ańlatıp, bul funkciya usı aralıqta qálegen tártiptegi tuwındıǵa iye bolıwın kórdik.

Endi bazıbir aralıqta qálegen tártiptegi tuwındıǵa iye bolǵan funkciyanı dárejeli qatarǵa jayıw máselesin qaraymız.

Funkciyalardı Teylor qatarına jayıw. $f(x)$ funkciya $x = x_0$ noqattıń bazıbir

$$U_\delta(x_0) = \{x \in R : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$$

dógeresinde berilgen bolıp, usı dógerekte funkciya qálegen tártiptegi tuwındıǵa iye bolsın. Kórinip tur, bul jaǵdayda funkciyanıń 1-bólim, 6-bap, 7-§ de keń túrde úyrenilgen Teylor formulası

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x)$$

ti jazıw múmkin, bunda $r_n(x)$ – qaldıq aǵza.

Berilgen $f(x)$ funkciyanıń x_0 noqatta qálegen tártiptegi tuwındıǵa iye bolıwı Teylor formulasındaǵı aǵzalardıń sanın qálegenimizshe úlken sanda alıw múmkinshiligin beredi. Solay eken, tábiyǵıy túrde mına

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \dots \quad (1)$$

qatar júzege keledi. Bul ayrıqsha dárejeli qatar bolıp onıń koefficientleri $f(x)$ funkciya hám onıń tuwındılarınıń x_0 noqattaǵı mánisleri arqalı anlatılǵan.

Adette (1) dárejeli qatar $f(x)$ funkciyanıń **Teylor qatarı** dep ataladı.

Dara jaǵdayda, $x_0 = 0$ de qatar tómendegishe boladı;

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots \quad (2)$$

Dárejeli qatarlar dep atalǵan 8-§ dıń basında $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ kórinistegi dárejeli qatarlardı úyreniwdi kelisip alǵan edik. Usını itibarǵa alıp, $f(x)$ funkciyanıń (2) kórinistegi Teylor qatarın úyrenemiz.

Jáne bir márte atap kórsetemiz, (1) qatar $f(x)$ funkciya menen óziniń koefisientleri arqalı baylanısqan bolıp, bul (1) qatar jıynaqlı bolama, jıynaqlı bolǵan jaǵdayda onıń qosındısı $f(x)$ ke teń bolama, bunnan ǵárezsiz túrde, onı $f(x)$ funkciyanıń Teylor qatarı dep atadıq.

Tábiyǵıy túrde tómendegi sawal tuwıladı: qashan bazıbir $U_\delta(0)$ dógerekte berilgen, qálegen tártiptegi tuwındıǵa iye bolǵan $f(x)$ funkciyanıń Teylor qatarı.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

usı aralıqta usı $f(x)$ ke jıynaladı?

1-teorema. $f(x)$ funkciya bazıbir $(-r, r)$ ($r > 0$) aralıqta qálegen tártiptegi tuwındıǵa iye bolıp, onıń $x = 0$ noqattaǵı Teylor qatarı

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots \quad (2)$$

bolsın. Bul qatar $(-r, r)$ aralıqta $f(x)$ ke jıynalıwı ushın $f(x)$ funkciya Teylor formulası

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + r_n(x) \quad (3)$$

tiń qaldıq aǵzası barlıq $x \in (-r, r)$ de nolge umtılwı ($\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$) zárúr hám jetkilikli.

Dálil. Zárúrligi. Dáslep (2) qatardıń koefficientleri menen (3) Teylor formulasındaǵı koefficientlerdiń bir qıylı ekenligin atap kórsetemiz. (2) qatar jıynaqlı bolıp, onıń qosındısı $f(x)$ ke teń bolsın. Ol jaǵdayda bul qatardıń dara qosındısı

$$S_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

ushın

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x) \quad \forall x \in (-r, r)$$

boladı. Bunnan bolsa $\forall x \in (-r, r)$ ushın

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - S_n(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$$

bolatugını kelip shıgadı.

Jetkilikligi. $\forall x \in (-r, r)$ de $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ bolsın. Ol jaǵdayda $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - S_n(x)] = 0$ bolıp, onnan bolsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$$

bolatugını kelip shıgadı. Bul bolsa (2) qatar jıynaqlı bolıp, onıń qosındısı $f(x)$ ke teń bolatugının, yaǵnıy

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (*)$$

ekenligin bildiredi. Teorema dálillendi.

Adette (*) qatnas orınlı bolsa, **$f(x)$ funkciya Teylor qatarına jayılǵan** dep ataladı.

2-teorema. Eger $f(x)$ funkciya $(-r, r)$ ($r > 0$) aralıqta dárejeli qatarǵa jayılǵan bolsa:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (4)$$

bul qatar $f(x)$ funkciyanıń Teylor qatarı boladı.

Dálil. 1-teorema hám onıń saldarına muwapıq (4) dárejeli qatar $(-r, r)$ aralıqta qálegen márte (aǵzalap) differenciallanıwshı boladı;

$$f'(x) = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x + 3a_3x^2 + \dots + n \cdot a_nx^{n-1} + \dots,$$

$$f''(x) = 1 \cdot 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3a_3x + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \dots,$$

$$f'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 + \dots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3} + \dots,$$

.....

$$f^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)n \cdot a_n + \dots,$$

.....

boladı. Keyingi teńliklerde $x = 0$ dep tómendegilerdi tabamız:

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = \frac{f'(0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad \dots$$

Nátiyjede (4) qatardıń kórinisi tómendegishe boladı:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Bul bolsa teoremanı dálilleydi.

Mısal. Mına

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{eger } x \neq 0 \text{ bolsa,} \\ 0, & \text{eger } x = 0 \text{ bolsa} \end{cases}$$

funkciyanı qarayıq. Bul funkciya $(-\infty, +\infty)$ de barlıq tártiptegi tuwındılarǵa iye:

a) $x \neq 0$ bolǵanda

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}},$$

$$f''(x) = -\left(\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right) e^{-\frac{1}{x^2}},$$

... ..

$$f^{(n)}(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}},$$

... ..

bunda $P(u)$ – u dıń racional funkciyası. Bul

$$f^{(n)}(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

qatnastırnı tuwrılıǵı matematikalıq indukciya metodı járdeminde kórsetiledi.

b) $x = 0$ bolsın. Berilgen funkciya $x = 0$ noqatta barlıq tártiptegi tuwındılarǵa iye bolıp, olar nolge teń boladı:

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Haqıyqattanda,

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0, \quad f'(0) = 0.$$

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = 0, \quad f''(0) = 0.$$

... ..

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Ulıwma jaǵdayda, $f^{(n)}(0) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$) bolıwın matematikalıq induksiya metodı járdeminde kórsetiw múmkin.

Demek, berilgen funkciyanıń $x = 0$ noqattaǵı barlıq tártiptegi tuwındıları nolge teń eken. Bul funkciyanıń $x = 0$ noqattaǵı Teylor qatarı

$$0 + \frac{0}{1!} x + \frac{0}{2!} x^2 + \dots + \frac{0}{n!} x^n + \dots$$

bolıp, onıń qosındısı 0 ge teń.

Keltirilgen mısaldan kórinedi, bazıbir aralıqta qálegen tártiptegi tuwındılarǵa iye bolǵan ayırım funktsiyalardıń Teylor qatarı usı aralıqta qaralıp atırǵan funkciyaǵa jıynalmawıda múmkin eken.

Tómende funkciyanıń Teylor qatarına jayılıwınıń jetkilikli shártin anıqlaytuǵın teoremanı keltiremiz.

3-teorema. $f(x)$ funkciya bazıbir $(-r, r)$ aralıqta qálegen tártiptegi tuwındıǵa iye bolsın. Eger sonday ózgermes $M > 0$ sanı tabılıp, barlıq $x \in (-r, r)$ hámde barlıq

$$n = 0, 1, 2, \dots \text{ ushın} \quad \left| f^{(n)}(x) \right| \leq M$$

teńsizlik orınlansa, onda $(-r, r)$ aralıqta $f(x)$ funkciya Teylor qatarına jayıladı, yaǵnıy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots \quad (4)$$

Dálil. $f(x)$ funkciya ushın Teylor formulası

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + r_n(x)$$

ti jazıp, onıń Lagranj kórinisindegi qaldıq aǵzası

$$r_n(x) = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

di alayıq. Ol jaǵdayda

$$|r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq M \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} \quad (x \in (-r, r))$$

boladı. Eger

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

bolıwın itibarǵa alsaq, onda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0 \quad x \in (-r, r)$$

ekenligin anıqlaymız. Bul bolsa (4) qatnastırın orınlı bolıwın bildiredi. **Teorema dálillendi.**

1°. $f(x) = e^x$ funkciyanıń Teylor qatarı. Belgili, $f(x) = e^x$ funksiyanıń (ıqtıyarlı shekli $[-a, a]$, $(a > 0)$ aralıqtaǵı Teylor formulası

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x)$$

bolıp, onıń qaldıq aǵzası bolsa Lagranj kórinisinde tómendegishe boladı:

$$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \quad (0 < \theta < 1)$$

(qarań, 1-bólim, 6-bap, 7-§). Hár bir $x \in [-a, a]$ ($a < 0$) da $e^{\theta x} < e^a$ bolıwın itibarǵa alsaq, onda

$$|r_n(x)| \leq \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} e^a$$

ekenligi kelip shıǵadı hám $n \rightarrow \infty$ ke ol nolge umtıladı.

Demek, ıqtıyarlı shekli x ta

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

boladı.

2°. $f(x) = \sin x$ funkciyanıń Teylor qatarı. Belgili $f(x) = \sin x$ funkciyanıń (ıqtıyarlı shekli $[-a, a]$ ($a > 0$) aralıqtaǵı Teylor formulası.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + r_{2n}(x)$$

boladı. Bul formula qaldıq aǵzasınıń Lagranj kórinisinen paydalanıp (qaralsın, 1-bólim, 6-bap, 7-§) $\forall x \in [-a, a]$ ($a > 0$) ushın

$$|r_{2n}(x)| \leq \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

bolıwın tabamız. Onnan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{2n}(x) = 0$$

bolıwı kelip shıǵadı. Demek, $\forall x$ ushın

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

boladı.

3°. $f(x) = \cos x$ funkciyanıń Teylor qatarı. Bul funkciyanıń Teylor formulası

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + r_{2n}(x)$$

qaldıq aǵzasınıń Lagranj kórinisinen paydalanıp (qaralsın, 1-bólim, 6-bap, 7-§) $\forall x \in [-a, a]$ ($a > 0$) ushın

$$|r_{2n}(x)| \leq \frac{a^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

bolıwın tabamız. Onnan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{2n}(x) = 0$$

bolıwı kelip shıǵadı. Demek, $\forall x$ ushın

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

4°. $f(x) = \ln(1+x)$ funkciyanıń Teylor qatarı. Belgili bul funkciyanıń Teylor formulası tómendegishe boladı:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + r_n(x)$$

Bul formulada $x \in [0, 1]$ de $r_n(x)$ qaldıq aǵzanı Lagranj kórinisinde tómendegishe jazıp

$$r_n(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},$$

onıń ushın

$$|r_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \quad (5)$$

bolıwın, $x \in [-a, 0]$ ($0 < a < 1$) bolǵanda bolsa $r_n(x)$ qaldıq aǵzanı Koshi kórinisinde tómendegishe jazıp

$$r_n(x) = (-1)^n x^{n+1} \frac{(1 - \theta_1)^n}{(1 + \theta_1 x)^{n+1}} \quad 0 < \theta_1 < 1 ,$$

onıń ushın

$$| r_n(x) | < \frac{a^{n-1}}{1 - a}$$

bolıwın kórgen edik (1-bólim, 6-bap, 7-§).

(5) hám (6) qatnaslardan $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ bolıwın tabamız. Demek, $\forall x \in (-1, 1]$ de

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (7)$$

boladı.

Sonı atap kórsetiw lazım, $\ln(1 + x)$ funksiya $(-1, +\infty)$ aralıqta berilgen bolsa da bul funkciyanıń Teylor qatarı $-(3)$ qatnas $(-1, +1]$ intervalda orınlı.

5°. $f(x) = (1 + x)^\alpha$ funkciyanıń Teylor qatarı. Bul funkciyanıń Teylor formulası

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)}{n!} x^n + r_n(x)$$

bolıp (qaralsın, 1-bólim, 6-bap, 7-§), onıń qaldıq aǵzası Koshi kórinisinde tómendegishe boladı:

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n)}{n!} (1 + \theta x)^{\alpha - n - 1} (1 - \theta)^n x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

Onı mına

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots [(\alpha - 1) - (n - 1)]}{n!} x^n \alpha x (1 + \theta x)^{\alpha - 1} \left(\frac{1 - \theta}{1 + \theta x} \right)^n x$$

kórinisinde jazıp alamız.

Eger $-1 < x < 1$

bolǵanda:

birinshiden

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} (\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots [(\alpha - 1) - (n - 1)] x^n = 0$, sebebi bul jıynaqlı

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)}{n!} x^n$$

qatardıń ulıwma aǵzası (bul qatardıń jıynaqlılıǵı Dalamber belgisi boyınsha kórsetiledi), ekinshiden,

$$| \alpha x | \quad 1 - | x |^{\alpha - 1} < \alpha x \quad 1 + \theta x^{\alpha - 1} < | \alpha x | \quad 1 + | x |^{\alpha - 1},$$

hám eń sońında, úshinshiden $\left| \frac{1 - \theta}{1 + \theta x} \right|^n \leq \left| \frac{1 - \theta}{1 + \theta x} \right| < 1$ bolǵanlıǵınan

$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ bolıwı kelip shıǵadı. Demek, $| x | < 1$ de

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)}{n!} x^n \dots$$

boladı.

5-lekciya

Fure koefficientleri hám Fure qatarı. Funkciyanı Fure qatarına jayıw máselesi. Dirixle teoreması (dálillewsız). Periodlı, jup hám taq funkciyalar ushın Fure qatarı

Biz usı

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

funkcional qatarın keń úyrendik. Endi hár bir aǵzası

$$u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

garmonikadan ibarat tómendegi

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$

dara funkcional qatarın qarayıq.

Ádette (1) – qatar trigonometriyalıq qatar dep ataladı.

$a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ sanlar bolsa trigonometriyalıq qatardıń koefficientleri delinedi.

Solay etip, trigonometriyalıq qatar funkcional qatar bolsa da (onıń hár bir aǵzası belgili funkciyalar bolǵanlıǵı ushın) óz koefficientleri $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$ ler menen tolıq anıqlanadı.

(1) – trigonometriyalıq qatardıń dara qosındısı

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

trigonometriyalıq kópaǵzalı dep ataladı.

Fure qatarınıń anıqlaması. $f(x)$ funkciya $[-\pi, \pi]$ de berilgen hám usı aralıqta integrallanıwshı bolsın. Onda

$$f(x) \cos nx, f(x) \sin nx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

funkciyalar da, eki integrallanıwshı funkciyalar kóbeymesi sıpatında (qaralsın, 1 – bólim, 9 – bap, 7 - §) $[-\pi, \pi]$ de integrallanıwshı boladı. Bul funkciyalardıń integralların esaplap, olardı tómendegishe belgileyik:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Bul sanlardan paydalanıp, tómendegi

$$T(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (3)$$

trigonometriyalıq qatarın dúzemiz.

1 – anıqlama. $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ koefficientleri (2) – formulalar menen anıqlanǵan (3) – trigonometriyalıq qatar $f(x)$ funkciyanıń Fure qatarı dep ataladı. $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$ sanları bolsa $f(x)$ funkciyanıń Fure koefficientleri delinedi.

Demek, berilgen funkciyanıń Fure qatarı sonday trigonometriyalıq qatar bolıp, onıń koefficientleri usı funkciyaǵa baylanıslı bolıp, (2) – formulalar menen anıqlanadı. Usı sebepli (3) – qatardı (onıń jıynaqlı yamasa taralıwshı bolıwınan qatań túrde) tómendegi «~» belgisi menen tómendegishe jazıladı:

$$f(x) \sim T(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

Mısal. Tómendegi

$$f(x) = e^{\alpha x} \quad (-\pi \leq x \leq \pi, \quad \alpha \neq 0)$$

funkciyanıń Fure qatarı dúzilsin.

(2) – formuladan paydalanıp, bul funkciyanıń Fure koefficientlerin tabamız:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha\pi} (e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}) = \frac{2}{\alpha\pi} sh\alpha\pi. \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha x} \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha \cos nx + n \sin nx}{\alpha^2 + n^2} e^{\alpha x} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\
&= (-1)^n \frac{1}{\pi} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + n^2} sh\alpha\pi, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha x} \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha \sin nx - n \cos nx}{\alpha^2 + n^2} e^{\alpha x} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\
&= (-1)^{n-1} \frac{1}{\pi} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + n^2} sh\alpha\pi, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)
\end{aligned}$$

(qarań, 1- bólim, 8 – bap, 2 - §).

Demek, berilgen funkciyanıń Fure qatarı

$$\begin{aligned}
e^{\alpha x} &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \\
&= \frac{2sh\alpha\pi}{\pi} \left\{ \frac{1}{2\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 + n^2} (\alpha \cos nx - n \sin nx) \right\}
\end{aligned}$$

boladı.

Meyli, bazıbir

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (3)$$

trigonometriyalıq (funkcional) qatar $[-\pi, \pi]$ de jıynaqlı bolsın. Onıń qosındısı $f(x)$ dep belgileyik:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = f(x). \quad (4)$$

Bunnan tısqarı, (4) – ni hámde onı $\cos kx$ hám $\sin kx$ ($k = 1, 2, \dots$) lerge kóbeytiwden payda bolǵan

$$\frac{a_0}{2} \cos kx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cdot \cos kx + b_n \sin nx \cdot \cos kx) = f(x) \cdot \cos kx \quad (5)$$

$$\frac{a_0}{2} \sin kx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cdot \sin kx + b_n \sin nx \cdot \sin kx) = f(x) \cdot \sin kx \quad (k = 1, 2, \dots)$$

qatarlardı $[-\pi, \pi]$ de aǵzama – aǵza integrallaw múmkin bolsın. (4) hám (5) ların $[-\pi, \pi]$ de integrallaymız:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right) = \pi \cdot a_0, \\
\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} \cos kx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cdot \cos kx + b_n \sin nx \cdot \cos kx) \right] dx = \\
&= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos kx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos kx dx \right), \\
\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} \sin kx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cdot \sin kx + b_n \sin nx \cdot \sin kx) \right] dx = \\
&= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \sin kx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin kx dx \right).
\end{aligned}$$

Eğer $n \neq k$ da

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin kx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-k)x - \cos(n+k)x] dx = \\
&= \left[\frac{\sin(n-k)x}{n-k} - \frac{\sin(n+k)x}{n+k} \right]_{-\pi}^{\pi} \cdot \frac{1}{2} = 0
\end{aligned}$$

hám

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx) dx = \pi,$$

sonday-aq,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos kx dx &= 0 \quad (n \neq k), \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi, \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \sin kx dx &= 0 \quad (n, \quad k = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad \dots)
\end{aligned}$$

bolıwın itibarğa alsaq, onda

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \pi \cdot a_0, \\
\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx &= \pi \cdot a_k \quad (k = 1, \quad 2, \quad 3, \quad \dots), \\
\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx &= \pi \cdot b_k \quad (k = 1, \quad 2, \quad 3, \quad \dots),
\end{aligned}$$

ekenligin tabamız. Bul teńliklerden bolsa

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad (2)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

kelip shıǵadı.

Demek, $f(x)$ funkciya trigonometriyalıq qatarǵa jayılgan bolsa hám bul qatar ushın joqarıda ayılǵan shártler orınlı bolsa, onda bul trigonometriyalıq qatardıń koefficientleri $f(x)$ funkciya arqalı (2) – formulalar menen ańlatıladı, yaǵnıy $f(x)$ tıń Fure koefficientleri boladı. Sonıń menen birge, qatardıń ózi $f(x)$ tıń Fure qatarı boladı.

Jup hám taq funkciyalardıń Fure qatarları birqansha ápiwayı kóriniske iye boladı. Biz tómende olardı keltiremiz.

$f(x)$ funkciya $[-\pi, \pi]$ de berilgen jup funkciya bolsın. Ol usı $[-\pi, \pi]$ aralıqta integrallanıwshı bolsın. Bizge belgili, bul jaǵdayda $f(x) \cos nx$ jup funkciya, al $f(x) \sin nx$ ($n = 1, 2, \dots$) bolsa taq funkciya boladı hám olar $[-\pi, \pi]$ de integrallanıwshı boladı.

(2) – formuladan paydalanıp, $f(x)$ funkciyanıń Fure koefficientlerin tabamız:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \cos nxdx + \int_0^{\pi} f(x) \cos nxdx \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nxdx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \sin nxdx + \int_0^{\pi} f(x) \sin nxdx \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[- \int_0^{\pi} f(x) \sin nxdx + \int_0^{\pi} f(x) \sin nxdx \right] = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Demek, jup $f(x)$ funkciyanıń Fure koefficientleri

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nxdx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (6)$$

bolıp, Fure qatarı bolsa

$$f(x) \sim T(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

boladı.

Endi $f(x)$ funksiya $[-\pi, \pi]$ de berilgen taq funksiya bolsın hám ol usı $[-\pi, \pi]$ aralıqta integrallanıwshı bolsın. Bul jaǵdayda $f(x) \cos nx$ taq funksiya, al $f(x) \sin nx$ ($n = 1, 2, \dots$) bolsa jup funksiya boladı. (2) – formuladan paydalanıp, $f(x)$ funksiyanıń Fure koefficientlerin tabamız:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \cos nx dx + \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[- \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx + \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \right] = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \sin nx dx + \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Demek, taq $f(x)$ funksiyanıń Fure koefficientleri

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (7)$$

bolıp, Fure qatarı bolsa

$$f(x) \approx T(f; x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

boladı.

Mısallar. 1. $f(x) = x^2$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) funksiyanıń Fure qatarı jızılısın. (6) – formulalardan paydalanıp, berilgen funksiyanıń Fure koefficientlerin tabamız:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2 \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} x^2 \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \\ &= -\frac{4}{n\pi} \left[\left(-x \cdot \frac{\cos nx}{n} \right) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos nx dx \right] = (-1)^n \frac{4}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Demek, $f(x) = x^2$ funksiyanıń Fure qatarı tómendegi

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right)$$

kóriniste boladı.

2. Tómendegi

$$f(x) = x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

taq funkciyanıń Fure qatarı jızılısın.

(7) – formulalardan paydalanıp berilgen funkciyanıń Fure koefficientlerin tabamız:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = -\frac{2}{n\pi} x \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx = \\ &= -\frac{2}{n} \cos n\pi = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Demek, $f(x) = x$ funkciyanıń Fure qatarı tómendegishe boladı:

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n} \sin nx = 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right)$$

6-lekciya

Kóp ózgeriwshili funkciya haqqında túsinik. R^m keńisliktiń úles kóplikleri m ózgeriwshili funkciyanıń anıqlanıw oblastı sıpatında. Eki ózgeriwshili funkciyanıń grafigi. Qáddi sızıqları hám betleri túsinigi

1. R^2, R^3 **keńislikler**. İqtıyarlı eki A hám B kóplikleriniń Dekart kóbeymesi menen tanısqan edik (qaralsın, 1-bólim, 1-bap, 1-§). Endi A hám B kóplikler dep R kópligin alayıq: $A = B = R$. Onda $A \times B = R \times R = (x_1, x_2) : x_1 \in R, x_2 \in R$ boladı.

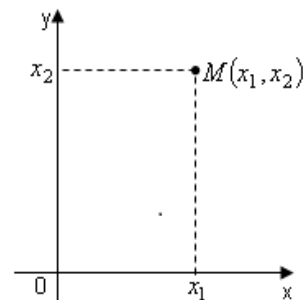
Mına

$$x_1, x_2 : x_1 \in R, x_2 \in R$$

kóplik R^2 **kóplik** dep ataladı. R^2 kópliginiń elementleri juplıqlar bolatuǵını ayqın. Olar usı kópliktiń **noqatları** dep júrgiziledi. Ádette R^2 kópliktiń noqatı bir háríp,

máselen $x_1, x_2 \in R^2$ noqat x arqalı belgilenedi: $x = x_1, x_2$. Bunda x_1 hám x_2 sanları x noqatınıń sáykes **birinshi** hám **ekinshi koordinataları** delinedi. Eger noqatlar ushın $x_1 = y_1, x_2 = y_2$ bolsa, onda $x = y$ dep ataladı.

Tegislikte tuwrı múyeshli Oxy Dekart koordinataları sistemasın alayıq. Ox kósherde (abscissa kósherinde) x_1 ózgeriwshiniń mánisleri, Oy kósherde (ordinata kósherinde) bolsa x_2 ózgeriwshiniń mánisleri jaylasqan bolsın.



1-sızılma

Bul jaǵdayda x_1, x_2 juplıǵı, tegislikte koordinataları x_1 hám x_2 bolǵan $M(x_1, x_2)$ noqatın ańlatadı (1-sızılma).

Haqıyqıy sanlar kópłigi R menen tuwrı sıızıq noqatları arasında óz-ara bir mánisli sáykeslik ornatılǵanıday-aq (qaralsın, 1-bólim, 2-bap, 10-§) R^2 kópłigi noqatları menen tegislik noqatları arasında da óz-ara bir mánisli sáykeslik ornatiw múmkin. Bul bolsa R^2 kópłiktıń geometriyalıq suwretleniwın tegislik dep qarawǵa imkaniyat beredi. Joqarıda R^2 kópłiktıń elementleriniń noqat dep atalıwınıń sebebide usınnan edi. Analitikalıq geometriya kursında kórsetilgenindey, R^2 kópłiginde eki noqat arasındaqı aralıq túsiniǵın kiritiw múmkin. $x = x_1, x_2 \in R^2, y = y_1, y_2 \in R^2$ bolsın.

1-anıqlama. Mına

$$\rho(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$$

shaması $x = x_1, x_2, y = y_1, y_2$ noqatlar arasındaqı **aralıq** dep ataladı. Kirgizilgen

$\rho(x, y)$ aralıq tómendegi qásiyetlerge iye (bunda $\forall x, y, z \in R^2$):

$$1^0. \quad \rho(x, y) \geq 0 \quad \text{hám} \quad \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y^*.$$

$$2^0. \quad \rho(x, y) = \rho(y, x).$$

$$3^0. \quad \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Bul qásiyetlerdiń dálilleri keyingi punktte (ulıwma jaǵdayda) keltiriledi.

Ádette R^2 kópłik R^2 **keńislik (eki ólshemli Evklid keńisligi)** dep ataladı.

Endi R^2 keńisliginiń keleshekte tez-tez ushırasıp turatuǵın bazıbir áhmiyetli kópłiklerin keltiremiz.

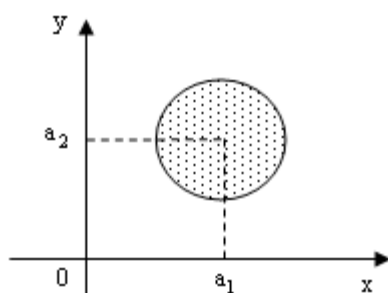
R^2 keńisliginiń $a = a_1, a_2$ noqatın hám oń r sanın alayıq.

Tómendegi

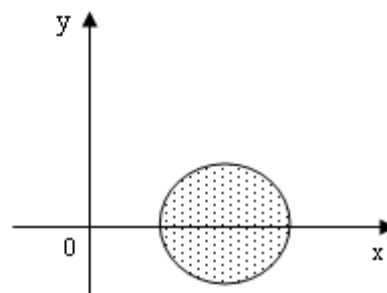
$$x_1, x_2 \in R^2 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 \leq r^2 \quad (1)$$

$$x_1, x_2 \in R^2 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2 \quad (2)$$

kópłikleri sáykes **dóńgelek** hám **ashıq dóńgelek** dep ataladı. Bunda a noqatı **dóńgelektiń orayı**, r bolsa **dóńgelek radiusı** delinedi.



2-sızılma



3-sızılma

Mına

$$x_1, x_2 \in R^2 : x_1 - a_1^2 + x_2 - a_2^2 = r^2$$

kópligi **sheńber** delinedi.

Bul sheńber (1) hám (2) dóńgelekleriniń shegarası boladı. Bunda a noqat sheńber **orayı** hám r bolsa sheńber **radiusı** delinedi. (qálegen kópliktiń shegarası anıqlamasın keyinirek keltiremiz).

(1) kópliginiń geometriyalıq súwretleniwi 2-sızılmada kórsetilgen.

(1) kópliginde (dóńgelekte) dóńgelektiń shegarası usı kóplikke tiyisli boladı, (2) kópliginde bolsa (ashıq dóńgelekte) dóńgelektiń shegarası (2) kópligine tiyisli bolmaydı.

Ashıq dóńgelek hám bul dóńgelektiń shegarasınıń bazıbir noqatlarınan ibarat bolǵan kópliklerdi dúzipte qaraw múmkin. Máselen 3-sızılmada ashıq dóńgelek hám onıń shegarasınıń joqarı yarım tegislikte jaylasqan noqatlarınan ibarat kóplik keltirilgen.

Aralıq anıqlamasınan paydalanıp, dóńgelek hám ashıq dóńgeleklerdi sáykes tómendegi

$$x \in R^2 : \rho(x, a) \leq r, \quad (1') \quad x \in R^2 : \rho(x, a) < r \quad (2')$$

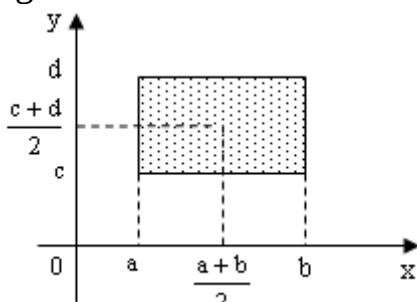
kóplikler depte qaraw múmkin.

a, b, c, d - haqıyqıy sanlar hám $a < b, c < d$ bolsın. Tómendegi

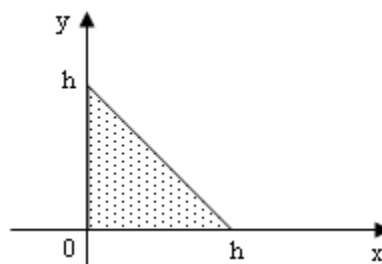
$$x_1, x_2 \in R^2 : a \leq x_1 \leq b, \quad c \leq x_2 \leq d, \quad (3)$$

$$x_1, x_2 \in R^2 : a < x_1 < b, \quad c < x_2 < d \quad (4)$$

kóplikler, sáykes túrde **tuwrı tórtmúyeshlik** hám **ashıq tuwrı tórtmúyeshlik** dep ataladı. Bul (3) kóplik 4 - sızılmada Oxy tegisligindegi shtrixlangan bólek sıpatında súwretlengen.



4-sızılma



5-sızılma

$M_{\text{ına}} \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) \in R^2$ noqat (3) hám (4) **tuwrı tórtmúyeshliktiń orayı**

delinedi.

R^2 keńisliginiń mına

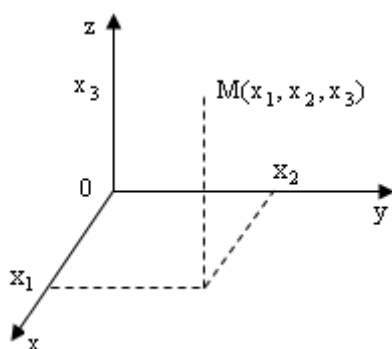
$$x_1, x_2 \in R^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq h \quad (5)$$

noqatlarınan ibarat kóplik (**eki ólshemli**) **simpleks** dep ataladı, bunda h - oń san. **Simpleks** (simplex) latinsha sóz bolıp, ol **ápiwayı** degendi bildiredi. (5) kópliktiń geometriyalıq súwretleniwi 5 - sızılma keltirilgen.

Endi R^3 keńislik túsiniǵı menen tanısamız. R^3 keńisligide joqarıdaǵı R^2 keńisligindey bolıp anıqlanadı. Eki kópliktiń Dekart kóbeymesine uqsas ıqtıyarlı úsh A, B, C kópliktiń Dekart kóbeymesi túsiniǵı kiritiledi. Dara jaǵdayda $A = B = C = R$ bolǵanda

$A \times B \times C = R \times R \times R = x_1, x_2, x_3 : x_1 \in R, x_2 \in R, x_3 \in R$ boladı. Mına

$$x_1, x_2, x_3 : x_1 \in R; x_2 \in R; x_3 \in R$$



kóplik R^3 **kóplik** dep ataladı.

R^3 kópliktiń elementi x_1, x_2, x_3 úshlik usı kópliktiń **noqatı** delinedi hám ol ádette bir hárip, máselen, x arqalı belgilendi: $x = x_1, x_2, x_3$. Bunda x_1, x_2 hám x_3 sanlar x noqatınıń sáykes **birinshi, ekinshi hám úshinshi koordinataları** delinedi.

6-sızılma

Keńislikte tuwrı múyeshli Oxyz Dekart koordinataları sistemasın alayıq.

Ox kósherinde x_1 ózgeriwshisiniń mánisleri, Oy kósherde x_2 ózgeriwshisiniń mánisleri hám Oz kósherde x_3 ózgeriwshisiniń mánisleri jaylasqan bolsın. Bul jaǵdayda x_1, x_2, x_3 úshligi keńislikte koordinataları x_1, x_2 hám x_3 bolǵan M noqatın ańlatadı (6-sızılma).

R^3 kóplikte ıqtıyarlı $x = x_1, x_2, x_3$, $y = y_1, y_2, y_3$ noqatların alayıq. Mına

$$\rho(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}$$

shama x hám y noqatları arasındaqı **aralıq** dep ataladı. Bunday qılıp anıqlanǵan aralıq tómendegi qásiyetlerge iye (bunda $\forall x, y, z \in R^3$):

$$1^0 \quad \rho(x, y) \geq 0 \quad \text{hám} \quad \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y^*$$

$$2^0 \quad \rho(x, y) = \rho(y, x)$$

* Eger $x = x_1, x_2, x_3$ hám $y = y_1, y_2, y_3$ noqatlar ushın $x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_3$ bolsa, onda $x=y$ dep ataladı.

$$3^0 \quad \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Bul qásiyetlerdiń dálilleri 2-punktte (ulıwma jaǵdayda) keltiriledi.

Joqarıda keltirilgen R^3 kóplik R^3 **keńislik (úsh ólsheмли Евклид кеńisligi)** dep ataladı.

Endi R^3 keńisliginiń áhmiyetli kópliklerin keltiremiz. R^3 keńisliginiń $a = a_1, a_2, a_3$ noqatın hám r oń sanın alayıq. Tómenдеgi

$$x_1, x_2, x_3 \in R^3 : x_1 - a_1^2 + x_2 - a_2^2 + x_3 - a_3^2 \leq r^2, \quad (6)$$

$$x_1, x_2, x_3 \in R^3 : x_1 - a_1^2 + x_2 - a_2^2 + x_3 - a_3^2 < r^2, \quad (7)$$

kóplikler sáykes **shar** hám **ashıq shar** dep ataladı. Bunda a noqatı **shardıń orayı**, r bolsa **shardıń radiusı** delinedi.

Mına

$$x_1, x_2, x_3 \in R^3 : x_1 - a_1^2 + x_2 - a_2^2 + x_3 - a_3^2 = r^2$$

kópligi **sfera** delinedi. Bul sfera (6), (7) sharlarınıń shegarası boladı a noqatı **sfera orayı**, r bolsa **sfera radiusı** delinedi.

Joqarıda keltirilgen (6) kópliktiń geometriyalıq súwretleniwi 7-sızılmaда keltirilgen.

Demek, (6) kóplikte (sharda) shar shegarası usı kóplikke tiyisli boladı, (7) kópliginde bolsa (ashıq sharda) shar shegarası (7) kópligine tiyisli bolmaydı.

R^3 keńisligindegi aralıq túsiniğinen paydalanıp, shar hám ashıq sharlardı sáykes túrde mına

$$x \in R^3 : \rho(x, a) \leq r \quad (6') \quad x \in R^3 : \rho(x, a) < r \quad (7')$$

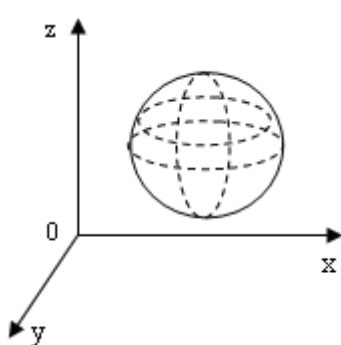
kóplikler sıpatında anıqlaw múmkin.

Mına

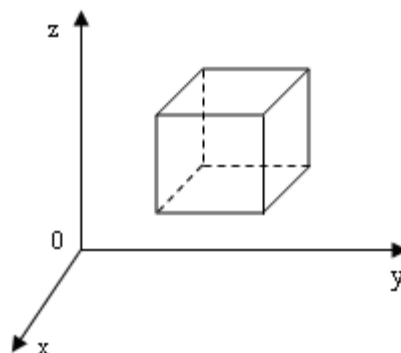
$$(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : a \leq x_1 \leq b, \quad c \leq x_2 \leq d, \quad \ell \leq x_3 \leq s,$$

$$(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : a < x_1 < b, \quad c < x_2 < d, \quad \ell < x_3 < s$$

kóplikler (bunda a, b, c, d, ℓ, s - haqıyqıy sanlar) sáykes túrde **parallelepiped** hám de **ashıq parallelepiped** dep ataladı. Joqarıda keltirilgen parallelepiped 8 - sızılmaда keltirilgen.



7-sızılma



8-sızılma

Mına

$$(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq h$$

kóplik (**úsh ólshemli**) **simpleks** delinedi, bunda $h>0$ - ózgermes san. Bul kóplik 9-sızılma kórsetilgen.

2. R^m **keńisligi**. m sandağı $A_1, A_2, \dots, A_m$ kóplikleriniń Dekart kóbeymesi eki A hám B kóplikleriniń Dekart kóbeymesine uqsas anıqlanadı. Eger $A_1 = A_2 = \dots = A_m = R$. bolsa, onda

$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m = R \times R \times \dots \times R = (x_1, x_2, \dots, x_m): x_1 \in R, x_2 \in R, \dots, x_m \in R$ boladı. Mına

$$(x_1, x_2, \dots, x_m): x_1 \in R, x_2 \in R, \dots, x_m \in R$$

R^m kóplik dep ataladı. R^m kópliktiń $x_1, x_2, \dots, x_m$ elementi usı **kóplik noqatı** delinedi hám ol ádette bir hárıp benen belgilenedi: $x = x_1, x_2, \dots, x_m$. Bunda $x_1, x_2, \dots, x_m$ sanları x noqatınıń sáykes túrde **birinshi, ekinshi, ..., m - koordinataları** delinedi.

R^m kóplikte ıqtıyarlı $x = x_1, x_2, \dots, x_m$, $y = y_1, y_2, \dots, y_m$ noqatların alayıq. Mına

$$\rho(x, y) = \sqrt{y_1 - x_1^2 + y_2 - x_2^2 + \dots + y_m - x_m^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^m y_i - x_i^2} \quad (8)$$

shama x hám y noqatlar arasındağı **aralıq** dep ataladı. Bunday anıqlanğan aralıq tómendegi qásiyetlerge iye (bunda $\forall x, y, z \in R^m$):

$$1^0. \quad \rho(x, y) \geq 0 \text{ hám } \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y^*$$

$$2^0. \quad \rho(x, y) = \rho(y, x)$$

$$3^0. \quad \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

Bul qásiyetlerdi dálilleyik. (8) qatnasınan $\rho(x, y)$ shamasınıń bárqulla teris emesligin kóremiz. Eger $\rho(x, y) = 0$ bolsa, onda $y_1 - x_1 = 0, y_2 - x_2 = 0, \dots, y_m - x_m = 0$ bolıp, $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_m = y_m$, yaǵnıy $x = y$ boladı. Kerisinshe $x = y$, yaǵnıy $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_m = y_m$ bolsa, onda jánede (8) nan $\rho(x, y) = 0$ bolatúǵını kelip shıǵadı. Bul demek 1^0 - qásiyetti dálilleydi. (8) qatnasınan

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \sqrt{y_1 - x_1^2 + y_2 - x_2^2 + \dots + y_m - x_m^2} = \\ &= \sqrt{x_1 - y_1^2 + x_2 - y_2^2 + \dots + x_m - y_m^2} = \rho(y, x) \end{aligned}$$

boladı.

Aralıqtıń 3^0 - qásiyeti mına

* Eger $x = x_1, x_2, x_3$ hám $y = y_1, y_2, y_3$ noqatlar ushin $x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_3$ bolsa, onda $x=y$ dep ataladı.

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m a_i + b_i}^2 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2} \quad (9)$$

teńsizligine tiykarlanıp dálillenedi, bunda $a_1, a_2, \dots, a_m; b_1, b_2, \dots, b_m$ – iqtıyarlı haqıyqıy sanlar. Dáslep usı teńsizliktiń orınlı ekenligin kórseteyik. $\forall x \in R$ ushın

$$\sum_{i=1}^m a_i x + b_i^2 \geq 0$$

ekenı ayqın. Bunnan x ke qarata kvadrat úsh aǵzalınıń teris emesligi

$$\left(\sum_{i=1}^m a_i^2 \right) x^2 + \left(2 \sum_{i=1}^m a_i b_i \right) x + \sum_{i=1}^m b_i^2 \geq 0$$

kelip shıǵadı. Demek, bul kvadrat úsh aǵzalılı hár qıylı eki haqıyqıy túbirlerge iye bolmaydı. Sonlıqtan onıń diskriminantı

$$-\sum_{i=1}^m a_i^2 \sum_{i=1}^m b_i^2 + \left[\sum_{i=1}^m a_i b_i \right]^2 \leq 0$$

bolıwı kerek. Bunnan bolsa

$$\sum_{i=1}^m a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2}$$

bolıp,

$$\sum_{i=1}^m a_i^2 + \sum_{i=1}^m b_i^2 + 2 \sum_{i=1}^m a_i b_i \leq \left[\sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2} \right]^2 + \left[\sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2} \right]^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2}$$

boladı. Keyingi teńsizlikten

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m a_i + b_i}^2 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2} \quad (9)$$

bolatuǵını kelip shıǵadı. Ádette (9) teńsizlik **Koshi - Bunyakovskiıy teńsizligi** dep ataladı.

Iqtıyarlı $x = x_1, x_2, \dots, x_m \in R^m, \quad y = y_1, y_2, \dots, y_m \in R^m,$

$z = z_1, z_2, \dots, z_m \in R^m$ noqatların alıp, olar arasındadı aralıqtı (8) formulasınan paydalanıp tabamız:

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^m y_i - x_i}^2, \quad \rho(y, z) = \sqrt{\sum_{i=1}^m z_i - y_i}^2, \quad \rho(x, z) = \sqrt{\sum_{i=1}^m z_i - x_i}^2 \quad (10)$$

Endi Koshi-Bunyakovskiıy teńsizligi (9) de

$$a_i = y_i - x_i, \quad b_i = z_i - y_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m)$$

dep alsaq, onda

$$a_i + b_i = z_i - x_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m)$$

bolıp

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m z_i - x_i^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m y_i - x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^m z_i - y_i^2}$$

boladı. Joqarıdağı (10) qatnaslardı itibarğa alıp, tabamız:

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Bul 3°-qásiyetti dälilleydi. Ádette 3°-qásiyet penen kórsetiletuğın teńsizlik **úshmúyeshlik teńsizligi** (úshmúyeshliktiń bir tárepiniń uzınlıǵı qalğan eki tárepiniń uzınlıqlarınıń qosındısınan úlken emesligin itibarğa alıp) dep júrgiziledi.*

R^m kóplik R^m **keńislik (m ólshemli Evklid keńisligi)** dep ataladı. Endi R^m keńisliginiń bazıbir áhmiyetli kópliklerin keltiremiz.

Qandayda bir $a = a_1, a_2, \dots, a_m \in R^m$ noqat hám $r > 0$ sanın alayıq. Tómenдеgi

$$x = x_1, x_2, \dots, x_m \in R^m : x_1 - a_1^2 + x_2 - a_2^2 + \dots + x_m - a_m^2 \leq r^2 \quad (11)$$

$$x = x_1, x_2, \dots, x_m \in R^m : x_1 - a_1^2 + x_2 - a_2^2 + \dots + x_m - a_m^2 < r^2 \quad (12)$$

yaǵnıy

$$x \in R^m : \rho(x, a) \leq r \quad (11')$$

$$x \in R^m : \rho(x, a) < r \quad (12')$$

kóplikler sáykes túrde **shar** hám **ashıq shar** dep ataladı. Bunda a noqat **shardıń orayı**, r bolsa **shar radiusı** delinedi.

Mına

$$x = x_1, x_2, \dots, x_m \in R^m : x_1 - a_1^2 + x_2 - a_2^2 + \dots + x_m - a_m^2 = r^2$$

yaǵnıy

$$x \in R^m : \rho(x, a) = r$$

kóplik **sfera** dep ataladı. Bul sfera (11) hám (12) kóplikleriniń shegarası boladı.

Mına

$$x = x_1, x_2, \dots, x_m \in R^m : a_1 \leq x_1 \leq b_1, \quad a_2 \leq x_2 \leq b_2, \quad \dots, \quad a_m \leq x_m \leq b_m,$$

$$x = x_1, x_2, \dots, x_m \in R^m : a_1 < x_1 < b_1, \quad a_2 < x_2 < b_2, \quad \dots, \quad a_m < x_m < b_m,$$

kóplikler (bunda $a_1, a_2, \dots, a_m; b_1, b_2, \dots, b_m$ — haqıyqıy sanlar) sáykes túrde **parallelepiped** hám **ashıq parallelepiped** dep ataladı.

Mına

$$x = x_1, x_2, \dots, x_m \in R^m : x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \dots, \quad x_m \geq 0, \quad x_1 + x_2 + \dots + x_m \leq h$$

kóplik **(m- ólshemli) simpleks** dep ataladı, bunda h -oń san. Joqarıda keltirilgen kóplikler tez-tez ushırasıp turadı. Olar járdeminde áhmiyetli túsinipler, solardan biri dógerek túsiniği anıqlanadı.

* R^m keńisliginiń ıqtıyarlı eki $x, y \quad x \in R^m, y \in R^m$ ushın 1°-3° shártlerin qanaatlandırıwshı funkciyalardı kóplep tabıw múmkin, yaǵnıy x, y noqatları arasındagı «aralıq» túsiniğın hárqıylı kiritiw múmkin (bul haqqında 14-bap, 1-§ ke qarań)

3. R^m keńisliginde ashıq hám tuyıq kóplikler. Qandayda bir $x^0 = x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0$ noqatın hám $\varepsilon > 0$ sanın alayıq.

2–anıqlama. Orayı x^0 noqatında, radiusı ε ge teń bolğan ashıq shar x^0 noqatınıń sferalıq dógeregi (ε – dógeregi) delinedi hám $U_\varepsilon(x^0)$ dep belgilenedi

$$U_\varepsilon x^0 = \{x \in R^m : \rho(x, x^0) < \varepsilon\} \quad (13)$$

Noqatnıń basqasha dógeregi túsiginde kiritiw múmkin.

3–anıqlama. Mına

$$\{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1^0 + \delta_1, \dots, x_m^0 - \delta_m < x_m < x_m^0 + \delta_m\} \quad (14)$$

ashıq parallelepiped x^0 noqatınıń **parallelepipedial dógeregi** dep ataladı hám $\bar{U}_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m}(x^0)$ dep belgilenedi.

Dara jaǵdayda $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_m = \delta$ bolsa, (14) ashıq parallelepiped kubqa aylanadı hám onı $\bar{U}_\delta(x^0)$ dep belgileymiz.

Solay etip, R^m keńisliginde noqatnıń eki túrli dógeregine anıqlama berildi.

1-lemma. $x^0 \in R$ noqatınıń qálegen $U_\varepsilon(x^0)$ sferalıq dógeregi alınǵanda da bárqulla x^0 noqatınıń sonday $\bar{U}_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m}(x^0)$ parallelepipedial dógeregi bar bolıp, bunda

$$\bar{U}_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m}(x^0) \subset U_\varepsilon(x^0)$$

boladı.

Sonday-aq, x^0 noqatınıń qálegen $\bar{U}_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m}(x^0)$ parallelepipedial dógeregi alınǵanda da bárqulla usı noqatnıń sonday $U_\varepsilon x^0$ sferalıq dógeregi bar boladı, bunda

$$U_\varepsilon x^0 \subset \bar{U}_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m} x^0$$

boladı.

Dálil. $x^0 \in R^m$ noqatınıń sferalıq dógeregi

$$U_\varepsilon(x^0) = \{x \in R^m : \rho(x, x^0) < \varepsilon\}$$

berilgen bolsın. Bundaǵı $\varepsilon > 0$ sanı ushın $\delta < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ teńsizligin qanaatlandıırıwshı δ

sanın alamız. Solay etip x^0 noqatınıń mına

$\bar{U}_\delta(x^0) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : x_1^0 - \delta < x_1 < x_1^0 + \delta, \dots, x_m^0 - \delta < x_m < x_m^0 + \delta\}$ parallelepipedial dógeregin dúzemiz.

$\forall x \in \bar{U}_\delta(x^0)$ bolsın. Onda $|x_i - x_i^0| < \delta$ ($i = 1, 2, 3, \dots, m$) bolıp,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^m \delta^2} = \delta \cdot \sqrt{m}$$

boladı. Joqarıdaǵı $\delta < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ teńsizligin itibarǵa alıp tabamız:

$$\rho(x, x^0) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2} < \varepsilon.$$

Demek, $\rho(x, x^0) < \varepsilon$. Bul $x \in U_\varepsilon x^0$ ekenligin bildiredi. Solay etip,

$$\forall x \in \bar{U}_\delta x^0 \Rightarrow x \in U_\varepsilon x^0,$$

yaǵnıy

$$\bar{U}_\delta x^0 \subset U_\varepsilon x^0$$

boladı.

$x^0 \in R^m$ noqatınıń

$$\bar{U}_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m}(x^0) = \{x_1, x_2, \dots, x_m \in R^m : x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1^0 + \delta_1, \dots, x_m^0 - \delta_m < x_m < x_m^0 + \delta_m\}$$

parallelepipedial dógeregi berilgen bolsın. Onda

$$\varepsilon = \min \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$$

dı alıp, x^0 noqatınıń sferalıq dógeregi

$$U_\varepsilon x^0 = \{x \in R^m : \rho(x, x^0) < \varepsilon\}$$

di dúzemiz.

$\forall x \in U_\varepsilon(x^0)$ bolsın. Bul jaǵdayda

$$\rho(x, x^0) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2} < \varepsilon \leq \delta_i, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m)$$

boladı. Demek,

$$|x_i - x_i^0| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2} < \delta_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m.$$

Bunnan $x \in \bar{U}_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m} x^0$ bolatuǵını kelip shıǵadı. Solay etip,

$$\forall x \in U_\varepsilon x^0 \Rightarrow x \in \bar{U}_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m} x^0,$$

yaǵnıy

$$U_\varepsilon x^0 \subset \bar{U}_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m} x^0$$

boladı. **Lemma dálillendi.**

R^m keńisliginde bazıbir G kóplik berilgen bolsın: $G \subset R^m$. Eger $x^0 \in G$ noqatınıń sonday bir ε – dógeregi $U_\varepsilon x^0$ tabılıp, bul dógerektiń barlıq noqatları usı G kóplikke tiyisli bolsa $U_\varepsilon x^0 \subset G$, onda x^0 noqatı G kópliktiń **ishki noqatı** dep ataladı.

Mısallar. 1. Ashıq shar

$$A = \{x \in R^m : \rho(x, a) < r\}$$

dıń barlıq noqatları onıń ishki noqatı boladı. Bunı dálilleyik. $\forall x^0 \in A$ noqatın alıp, mına $\delta = r - \rho(x^0, a)$ teńlik penen anıqlanatuǵın δ sanın alamız. $\delta > 0$ bolatuǵını ayqın. Orayı x^0 noqatında radiusı δ bolǵan

$$U_\delta(x^0) = \{x \in R^m : \rho(x, x^0) < \delta\}$$

ashıq shar x^0 noqatınıń sferalıq dógeregi bolıp, joqarıdağı A kópliktiń úlesi boladı. Haqıyqattan da, $\forall x \in U_\delta x^0 \Rightarrow \rho(x, x^0) < \delta$ bolıp, aralıqtıń 3°-qásiyetine muwapıq

$$\rho(x, a) \leq \rho(x, x^0) + \rho(x^0, a) < \delta + \rho(a, x^0) = r$$

boladı. Demek, $\forall x \in U_\delta x^0 \Rightarrow x \in A$. Bul $U_\delta x^0 \subset A$ ekenligin bildiredi. Bunnan A ashıq sharınıń hár bir noqatı ishki noqat ekenligi kelip shıǵadı. 2. Mına

$$C = A \cup (r, 0, 0, \dots, 0), (0, r, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 0, r)$$

kópliktiń noqatları arasında onıń ishki noqatı bolmaǵan noqatlar bar. Máselen $(z, 0, 0, \dots, 0) \in C$ noqatınıń ıqtıyarlı $U_\varepsilon(r, 0, 0, \dots, 0)$ $\varepsilon > 0$ sferalıq dógeregin alǵanıımızda da, oǵan tiyisli bolatuǵın $\left(r + \frac{\varepsilon}{2}, 0, 0, \dots, 0\right)$ noqat C kópligine tiyisli bolmaydı.

4-anıqlama. G kópliginiń hár bir noqatı onıń ishki noqatı bolsa, bunday kóplik **ashıq kóplik** dep ataladı.

Máselen, ashıq shar ashıq kóplik boladı.

R^m keńislikte bazıbir F kóplik hám qandayda bir x^0 noqat berilgen bolsın: $F \subset R^m$, $x_0 \in R^m$.

5-anıqlama. Eger x^0 noqatınıń qálegen sferalıq dógeregi $U_\varepsilon x^0$ de F kópliginiń x^0 den ózgeshe keminde bir noqatı tabılsa, x^0 noqatı F kópliktiń **limit noqatı** dep ataladı.

Mına $R^m \setminus x \in R^m : \rho(0, x) \leq \varepsilon$ ashıq kóplik ∞ «noqattıń» dógeregi delinedi ($0 = (0, 0, \dots, 0)$).

Qaralıp otırǵan x^0 noqatınıń ózi F ke tiyisli bolıwıda, tiyisli bolmawıda múmkin (tómendegi 1-mısalǵa qarań).

F kópliktiń barlıq limit noqatlarınan payda bolǵan kóplik F kópliginiń **tuwındı kópligi** delinedi hám F' dep belgilenedi.

Mına $F \cup F'$ kóplik F kópliginiń **tuyıqlanıwı** delinedi hám ol $\bar{F}$ dep belgilenedi:

$$\bar{F} = F \cup F'.$$

Mısallar. 1. Tómendegi

$$A = \{x \in R^m : \rho(x, x^0) < r\}$$

ashıq sharın alayıq. Bul kóplik ushın usı kópliktiń barlıq noqatları hám mına

$$x \in R^m : \rho(x, x^0) = r$$

sferanıń barlıq noqatları limit noqat boladı. Demek, A nıń tuwındı kópligi

$$A' = \{x \in R^m : \rho(x, x^0) \leq r\},$$

A nıń tuyıqlanıwı $\bar{A} = A \cup A' = A'$ boladı.

2. Shar

$$E = \{x \in R^m : \rho(x, x^0) \leq r\}$$

nıń barlıq noqatları usı kópliktiń limit noqatları. Bunda

$$E' = E, \quad \overline{E} = E$$

boladı.

6-anıqlama. $F \subset R^m$ kópliktiń barlıq limit noqatları usı kóplikke tiyisli bolsa, F **tuyıq kóplik** dep ataladı.

Bul jaǵdayda $F' \subset F, \quad F \cup F' \Rightarrow \overline{F} = F$.

Shar

$$E = \{x \in R^m : \rho(x, x^0) \leq r\}$$

tuyıq kóplik boladı, sebebi $E = \overline{E}$.

Qandayda bir $M \subset R^m$ kópligin qarayıq. $R^m \setminus M$ ayırma M kóplikti R^m kóplikke deyin toliqtırırwshı kóplik bolatuǵını ayqın (qaralsın 1-bólim, 1-bap, 1-§).

7-anıqlama. Eger $x^0 (x^0 \in R^m)$ noqatınıń qálegen $U_\varepsilon x^0$ dógeresinde hám M kópliginiń, hám $R^m \setminus M$ kópliginiń noqatları bolsa, x^0 noqatı M kópliginiń **shegaralıq noqatı** dep ataladı. M kópliktiń barlıq shegaralıq noqatlarınan ibarat kóplik M kópliktiń **shegarası** delinedi hám onı ádette $\partial(M)$ dep belgileydi.

Bul túsiniń járdeminde tuyıq kóplikti de anıqlaw múmkin.

8-anıqlama. Eger $F (F \subset R^m)$ kópliktiń shegarası usı kóplikke tiyisli, yaǵnıy $\partial(F) \subset F$ bolsa, F **tuyıq kóplik** delinedi.

Joqarıda keltirilgen tuyıq kópliktiń 4- hám 2- anıqlamaları ekvivalent anıqlamalar.

Qandayda bir $M \subset R^m$ kóplik berilgen bolsın.

9-anıqlama. Eger R^m keńisliginde sonday shar

$$U^0 = \{x \in R^m : \rho(x, 0) < r, \quad 0 = (0, \dots, 0, 0)\}$$

tabılıp, $M \subset U^0$ bolsa, onda M **shegaralanǵan kóplik** dep ataladı.

Málim, qandayda bir $E \subset R$ kópligi berilgen bolıp, sonday ózgermes ρ sanı tabılıp, $\forall x \in E$ ushın $|x| < \rho$, yaǵnıy E kópliktiń barlıq elementleri $(-\rho, \rho)$ intervalda jaylassa, E shegaralanǵan kóplik dep atalatuǵın edi. Joqarıda keltirilgen anıqlama $m=1$ bolǵanda usı anıqlamanıń ózi boladı.

R^m keńisligindegi shar, parallelepiped simpleksler shegaralanǵan kóplikler.

Mına

$$D = \{x_1, x_2, \dots, x_m \in R^m : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_m \geq 0\}$$

kóplik shegaralanbaǵan boladı, sebebi R^m de hár qanday

$$U^0 = \{x \in R^m : \rho(x, 0) < r\}$$

shar alıńanda da D kóplikte sonday noqat, máselen $a_1, 0, 0, \dots, 0$ noqat ($a_1 > r$)

tabılıp, bul noqat U^0 kóplikke tiyisli bolmaydı.

Málim,

$$\left. \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right\} (a \leq t \leq b), \quad (15)$$

yağniy $(x(t), y(t))$ sistema (kóplik) R^2 keńislikte,

$$\left. \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array} \right\} (a \leq t \leq b) \quad (16)$$

yağniy $(x(t), y(t), z(t))$ sistema (kóplik) R^3 keńislikte iymek sızıqtı ańlatatuğın edi, bunda $x(t), y(t)$ jánede $z(t) - [a, b]$ segmentinde úzliksiz funkciyalar. Dara jağdayda $x = \alpha_1 t + \beta_1, \quad y = \alpha_2 t + \beta_2, \quad z = \alpha_3 t + \beta_3 \quad (-\infty < t < +\infty), \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \neq 0$ ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2, \beta_3$ – haqıyqıy sanlar hám $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ lerdiń ishinde hesh bolmağanda birewi nol'den ózgeshe) bolğanda (15) hám (16) sistema sáykes túrde R^3 keńisliklerde tuwrı sızıqlar boladı. Áne usı túsiniklerge uqsas, R^m keńisliginde iymek sızır hám tuwrı sızır túsinikleri kirgiziledi.

Meyli $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)$ funkciyalarınń hár biri $[a, b]$ kesindisinde ańqlanğan hám úzliksiz bolsın.

Mına

$$(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)) \quad (a \leq t \leq b) \quad (17)$$

sistema yamasa noqatlar kópligi R^m keńisliginde **iymek sızır** dep ataladı.

Dara jağdayda, $x_1 = \alpha_1 t + \beta_1, \quad x_2 = \alpha_2 t + \beta_2, \quad \dots, \quad x_m = \alpha_m t + \beta_m$ $-\infty < t < +\infty), \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ - haqıyqıy sanlar hám $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ lerdiń keminde birewi nolden ózgeshe bolğanda (17) sistema R^m keńisliginde **tuwrı sızır** delinedi. R^m keńislikte ıqtıyarlı eki $x = (x'_1, x'_2, \dots, x'_m)$ hám $x'' = (x''_1, x''_2, \dots, x''_m)$ noqatların alayıq. Bul noqatlar arqalı ótiwshi tuwrı sızır tómendegi

$$(x'_1 + t(x''_1 - x'_1), \quad x'_2 + t(x''_2 - x'_2), \quad \dots, \quad x'_m + t(x''_m - x'_m)) \quad (18)$$

$$(-\infty < t < +\infty)$$

sistema menen ańlatıladı. Bunda $t=0$ hám $t=1$ bolğanda R^m keńisliginiń sáykes túrde x' hám x'' noqatları payda bolıp, $0 \leq t \leq 1$ bolğanda (18) sistema R^m keńislikte x' hám x'' noqatların tutastırırshı tuwrı sızıqtıń kesindisi payda boladı.

R^m keńisliginde shekli sandağı tuwrı sızır kesindilerin izbe-iz tutastırırwdan payda bolğan sızır **sınır sızır** dep ataladı.

$M \subset R^m$ kóplik berilgen bolsın.

10–ańqlama. Eger M kópliktiń ıqtıyarlı eki noqatın tutastırırshı sonday sınır sızır tabılıp, ol M kóplikke tiyisli bolsa, M **baylamlı kóplik** dep ataladı.

Mısallar. 1. R^m keńisligindegi parallelepiped, shar, simpleksler baylamlı kóplikler boladı.

2. R^m keńisliginiń eki x' hám x'' noqatlarınan dúzilgen x', x'' kóplik $x', x'' \subset R^m$ bayamlı kóplik bolmaydı, sebebi bul noqatlardı tutastırıwshı sınıq sızıq x', x'' kópligine tiyisli emes.

11-anıqlama. Eger $M \subset R$ kóplik ashıq hám bayamlı kóplik bolsa, ol **oblast'** dep ataladı.

R^m keńisligindegi ashıq parallelepiped, ashıq shar, ashıq simpleksler R^m keńisligindegi oblast'lar boladı.

7 - lekciya

R^m keńislikte noqattıń dógeregi. R^m keńisliktegi noqatlar izbe-izligi hám onıń limiti, m ózgeriwshili funkciyanıń limiti. Tákirarıy limitler.

Natural sanlar kópligi N hám R^m keńisligi berilgen bolıp, f hár bir $n(n \in N)$ ge R^m keńisliginiń qandayda bir $x^{(n)} = x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)} \in R^m$ noqatın sáykes qoyıwshı sáwlelendiriw bolsın:

$$f : N \rightarrow R^m \text{ yamasa } n \rightarrow x^{(n)} = x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}.$$

Bul sáwlelendiriwdi tómendegishe kórsetiw múmkin:

$$\begin{aligned}
1 &\rightarrow x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_m^{(1)}), \\
2 &\rightarrow x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_m^{(2)}), \\
3 &\rightarrow x^{(3)} = (x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, \dots, x_m^{(3)}), \\
&\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
n &\rightarrow x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}).
\end{aligned}$$

$f : N \rightarrow R^m$ sáwlelendiriwiniń obrazlarınan dúzilgen

$$x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots, x^{(n)}, \dots \quad (1)$$

kóplik **izbe-izlik** dep ataladı hám ol $x^{(n)}$ dep belgilenedi. hár bir $x^{(n)}$ ($n = 1, 2, \dots$) di **izbe-izliktiń aǵzası** delinedi. Demek (1) izbe-izlik aǵzaları R^m keńisliginiń noqatlarınan ibarat.

$x^{(n)}$ izbe-izliktiń sáykes koordinatalarınan dúzilgen $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}$ ler sanlı izbe-izlikler bolatuǵının kórsetiw menen birge, $x^{(n)}$ izbe-izlikti usı m sandaǵı izbe-izliktiń (belgili tártipte) birgelikte qarastırılıwı dep esaplaw múmkin.

Izbe-izliklerge mısallar keltireyik.

1. $x^{(n)} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) : (1, 1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \dots$
2. $x^{(n)} = \left(\frac{1}{n}, 0\right) : (1, 0), \left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{3}, 0\right), \dots$
3. $x^{(n)} = \left(0, \frac{1}{n}\right) : (0, 1), \left(0, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{3}\right), \dots$
4. $x^{(n)} = (-1)^{n+1}, (-1)^{n+1} : (1, 1), (-1, -1), (1, 1), \dots$
5. $x^{(n)} = (1, n) : (1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots$

Bul keltirilgen izbe-izlikler R^2 keńisliginiń noqatlarınan dúzilgen izbe-izlikler.

1. Izbe-izliktiń limiti. Endi (1) izbe-izliktiń limiti túsiniǵın kiritemiz. R^m keńisliginde izbe-izliktiń limiti túsiniǵı haqıyqıy sanlar izbe-izliginiń limiti túsiniǵına uqsas kiritiledi.

R^m keńisliginde qandayda bir

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \dots \quad (1)$$

izbe-izlik hám $a = a_1, a_2, \dots, a_m \in R^m$ noqat berilgen bolsın.

1-anıqlama. Eger $\forall \varepsilon > 0$ alıńanda da, sonday $n_0 \in N$ tabılıp, barlıq $n > n_0$ ushın

$$\rho(x^{(n)}, a) < \varepsilon \quad (2)$$

teńsizligi orınlı bolsa, a noqatı $x^{(n)}$ **izbe-izliginiń limiti** dep ataladı hám

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a \quad \text{yamasa} \quad n \rightarrow \infty \quad \text{da} \quad x^{(n)} \rightarrow a$$

dep belgilenedi.

1-§ ta keltirilgen a noqatınıń ε - dógeregi anıqlamasın itibarǵa alıp, $x^{(n)}$ izbe-izliktiń limitin tómendegishede anıqlasa boladı.

2-anıqlama. Eger a noqatınıń ıqtıyarlı $U_\varepsilon(a)$ dógeregi alınıǵanda da $x^{(n)}$ izbe-izliktiń qandayda bir aǵzasınan baslap keyingi barlıq aǵzaları usı dógerekke tiyisli bolsa, onda $a - x^{(n)}$ **izbe-izliktiń limiti** delinedi.

Eger (1) izbe-izlik limitke iye bolsa, ol **ıyınaqlı izbe-izlik** dep ataladı.

Limit anıqlamasındaǵı shártti qanaatlandırıwshı a bar bolmasa, $x^{(n)}$ izbe-izligi limitke iye emes delinedi, izbe-izliktiń ózi **tarqalıwshı** dep ataladı.

Izbe-izliktiń limiti anıqlamasındaǵı ε ıqtıyarlı oń san bolıp, izlenip atırǵan n_0 ($n_0 \in N$) bolsa usı ε ge (hámde, tábiyiy túrde, qaralıp atırǵan izbe-izlikke) ǵárezli baylanıslı túrde tabılatuǵına itibar beriw kerek.

Mısallar. 1. R^m keńisliginde mına $x^{(n)} = \left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right\}$ izbe-izliktiń limiti $a = (0, 0, \dots, 0)$ bolatuǵını kórsetilsin. $\forall \varepsilon > 0$ sanın alayıq. Usı ε ge sáykes keletuǵın $n_0 = \left\lceil \frac{\sqrt{m}}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ di tabamız. Nátiyjede barlıq $n > n_0$ ushın

$$\rho(x^{(n)}, a) = \rho\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots, 0\right) = \frac{\sqrt{m}}{n} < \frac{\sqrt{m}}{n_0} = \frac{\sqrt{m}}{\left\lceil \frac{\sqrt{m}}{\varepsilon} \right\rceil + 1} < \varepsilon$$

boladı. Demek anıqlamaǵa muwapıq

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right) = (0, 0, \dots, 0) = a$$

boladı.

2. Tómendegi

$$x^{(n)} = (-1)^{n+1}, (-1)^{n+1} : (1, 1), (-1, -1), (1, 1), (-1, -1), \dots$$

izbe-izliginiń limiti bar bolmaytuǵını kórsetilsin. Meyli kerisi orınlı bolsın, yaǵnıy berilgen izbe-izlik limitke iye hám ol $a = (a_1, a_2)$ ge teń bolsın. Limit anıqlamasına muwapıq $\forall \varepsilon > 0$, dara jaǵdayda $\varepsilon = 1$ ushın sonday $n_0 \in N$ tabılıp, barlıq $n > n_0$ ushın

$$\rho((1, 1), a_1, a_2) < \varepsilon, \quad \rho((-1, -1), a_1, a_2) < \varepsilon$$

boladı. Bul mına

$2\sqrt{2} = \rho((-1, -1), (1, 1)) \leq \rho((-1, -1), (a_1, a_2)) + \rho((a_1, a_2), (1, 1)) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = 2$ qarama-qarsılıqqa alıp keldi. Bunıń sebebi qaralıp atırǵan izbe-izlik limitke iye degenimiz boladı. Demek berilgen izbe-izlik limitke iye emes.

R^m кеңісliğінде $x^{(n)} = x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}$ ізбе-ізлік берілген болып, ол $a = a_1, a_2, \dots, a_m$ limitке iye bolsın. Bul jaǵdayda limit anıqlamasına muwapıq $\forall \varepsilon > 0$ berilgende de $x^{(n)}$ ізбе-ізлігiniń qandayda bir n_0 -aǵzasınan baslap keyingi barlıq aǵzaları a noqatınıń

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in R^m : \rho(x, a) < \varepsilon\}$$

sferalıq dógeretine tiyisli boladı. Bul sferalıq dógeret usı baptıń 1-§ deǵı 12.1-lemmaǵa muwapıq usı a noqatınıń $\tilde{U}_\varepsilon(a)$ parallelepipedial dógeretiniń úlesi boladı:

$$U_\varepsilon(a) \subset \tilde{U}_\varepsilon(a).$$

Demek, $x^{(n)}$ ізбе-ізліктіń usı n_0 -aǵzasınan baslap, keyingi barlıq aǵzaları a noqatınıń $\tilde{U}_\varepsilon(a)$ dógeretinde jatadı, yaǵnıy barlıq $n > n_0$ ushın $x^{(n)} \in \tilde{U}_\varepsilon(a) = \{x_1, x_2, \dots, x_m \in R^m : a_1 - \varepsilon < x_1 < a_1 + \varepsilon, \dots, a_m - \varepsilon < x_m < a_m + \varepsilon\}$ boladı. Bunnan, barlıq $n > n_0$ ushın

$$a_1 - \varepsilon < x_1^{(n)} < a_1 + \varepsilon$$

$$a_2 - \varepsilon < x_2^{(n)} < a_2 + \varepsilon$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$a_m - \varepsilon < x_m^{(n)} < a_m + \varepsilon$$

bolatuǵını kelip shıǵadı. Demek $\forall \varepsilon > 0$ alıńanda da, sonday $n_0 \in N$ tabılıp barlıq $n > n_0$ ushın

$$|x_1^{(n)} - a_1| < \varepsilon, \quad |x_2^{(n)} - a_2| < \varepsilon, \quad \dots, \quad |x_m^{(n)} - a_m| < \varepsilon$$

boladı. Bul bolsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} = a_1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} = a_2,$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_m^{(n)} = a_m$$

ekenligin bildiredi.

Solay etip, R^m кеңісlikte $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})$ ізбе-ізліктіń limiti $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ bolsa, onda bul ізбе-ізліктіń koordinatalarınan dúzilgen sanlar ізбе-ізлікleri $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}$ lerde limitке iye bolıp, olar sáykes túrde a noqatınıń $a_1, a_2, \dots, a_m$ koordinatalarına teń.

Demek,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} = a_1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} = a_2, \\ \dots \dots \dots \dots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_m^{(n)} = a_m \end{cases} \quad (3)$$

Endi R^m keńislikte izbe-izliktiń koordinatalarınan dúzilgen $x_1^{(n)}$, $x_2^{(n)}$, ..., $x_m^{(n)}$ sanlar izbe-izlikleri limitke iye bolıp, olardıń limitleri sáykes túrde $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in R^m$ noqat koordinataları $a_1, a_2, \dots, a_m$ lerge teń bolsın:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} &= a_1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} &= a_2, \\ \dots \dots \dots \dots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_m^{(n)} &= a_m \end{aligned}$$

Limit anıqlamasına tiykarlanıp, $\forall \varepsilon > 0$ alıńanda da, $\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ ge muwapıq sonday $n_0^{(1)} \in N$ tabıladı, barlıq $n > n_0^{(1)}$ ushın

$$|x_1^{(n)} - a_1| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}},$$

sonday $n_0^{(2)} \in N$ tabıladı, barlıq $n > n_0^{(2)}$ ushın

$$|x_2^{(n)} - a_2| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$$

hám taǵı basqa, sonday $n_0^{(m)} \in N$ tabılıp, barlıq $n > n_0^{(m)}$ ushın

$$|x_m^{(n)} - a_m| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$$

boladı. Eger $n_0 = \max n_0^{(1)}, n_0^{(2)}, \dots, n_0^{(m)}$ dep alsaq, onda barlıq $n > n_0$ ushın bir jola

$$|x_i^{(n)} - a_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

teńsizlikler orınlanadı. Ol jaǵdayda

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i^{(n)} - a_i)^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\right)^2} = \varepsilon$$

bolıp, onnan

$$\rho(x^{(n)}, a) < \varepsilon$$

bolatuǵını kelip shıǵadı. Bul bolsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a$$

ekenligin bildiredi.

Demek, $x^{(n)} = x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}$ izbe-izlik koordinatalarından dúzilgen $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}$ sanlar izbe-izlikleriniń limitleri sáykes túrde $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ noqat koordinataları $a_1, a_2, \dots, a_m$ lerge teń bolsa, $x^{(n)}$ izbe-izliktiń limiti joqarıdağı anıqlama mánisinde usı a noqat boladı:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} = a_1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} = a_2, \\ \dots \dots \dots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_m^{(n)} = a_m \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a \quad (4)$$

Joqarıdağı (3) hám (4) qatnaslardan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} = a_1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} = a_2, \\ \dots \dots \dots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_m^{(n)} = a_m \end{array} \right.$$

ekenligi kelip shıǵadı.

Solay etip tómendegi teoremaǵa kelemiz:

1-teorema. R^m keńisliginde $x^{(n)} = x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}$ izbe-izliktiń $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in R^m$ ǵa umtılıwı $x^{(n)} \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$ ke) ushın $n \rightarrow \infty$ ke bir jola

$$\begin{array}{l} x_1^{(n)} \rightarrow a_1, \\ x_2^{(n)} \rightarrow a_2, \\ \dots \dots \\ x_m^{(n)} \rightarrow a_m \end{array}$$

bolıwı zárúr hám jetkilikli.

Joqarıdağı 2-misalda $-1^{n+1}, (-1)^{n+1}$ izbe-izliktiń limiti bar

bolmaytuǵını usı teoremadan dárhal kelip shıǵadı.

Bul teorema R^m keńisliginde izbe-izliktiń limitin úyreniw sanlı izbe-izliklerdiń limitin úyreniwge keltiriletuǵınlıǵın ańlatadı.

Matematikalıq analiz kursınıń 1-bólimi, 3-babında sanlar izbe-izligi hám onıń limiti keń túrde úyrenilgenligi málim. Usını itibarǵa alıp, biz tómende R^m keńisliginde izbe-izlikler limitleri teoriyasınıń bayanlamasında tiykarǵı faktlerdi ǵana keltiriw, olardıń ayırımların dálillew menen shegaralanamız.

Joqarıda dálillengen teorema hám jıynaqlı sanlar izbe-izliginiń qásiyetlerinen R^m keńisliginde jıynaqlı izbe-izliktiń tómendegi qásiyetleri kelip shıǵadı:

1°. Eger $x^{(n)}$ izbe-izlik jıynaqlı bolsa, onıń limiti jalǵız.

Kelesi qásiyetti keltiriwden burın, $x^{(n)}$ izbe-izliktiń shegaralanǵanlıǵı túsiniǵı menen tanısamız.

Eger $x^{(n)}$ izbe-izliktiń barlıq aǵzalarınan dúzilgen kóplik shegaralanǵan bolsa, $x^{(n)}$ izbe-izlik shegaralanǵan izbe-izlik dep ataladı.

R^m keńisliginde $x^{(n)} = x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}$ izbe-izlik shegaralanǵan bolsın. Anıqlamaǵa muwapıq (12.9-anıqlama) sonday $U^0 = \{x \in R^m : \rho(x, 0) < r\}$ shar tabılıp, $\forall n \in N$ ushın $x^{(n)} \in U^0$ boladı. Demek,

$$\rho(x^{(n)}, 0) < r.$$

Keyingi teńsizlikten

$$|x_1^{(n)}| < r, |x_2^{(n)}| < r, \dots, |x_m^{(n)}| < r \quad (\forall n \in N)$$

bolatuǵını kelip shıǵadı.

Solay etip, $x^{(n)} = x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}$ izbe-izlik shegaralanǵan bolsa, bul izbe-izliktiń koordinatalarınan ibarat bolǵan $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}$ izbe-izliklerdiń hár biride shegaralanǵan boladı eken.

Endi $x^{(n)} = x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}$ izbe-izliktiń koordinatalarınan ibarat $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}$ izbe-izliklerdiń hár biri shegaralanǵan bolsın. Sanlar izbe-izliginiń shegaralanǵanlıǵınıń anıqlamasına muwapıq (1-bólim, 3-bap, 2-§) sonday $C_1, C_2, \dots, C_m$ ózgermes sanlar tabılıp, $\forall n \in N$ ushın

$$|x_1^{(n)}| < C_1$$

$$|x_2^{(n)}| < C_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$|x_m^{(n)}| < C_m$$

boladı. Eger $C = \max C_1, C_2, \dots, C_m$ dep alsaq $|x_k^{(n)}| < C$ ($k = 1, 2, 3, \dots, m$) bolıp, onnan $\forall n \in N$ ushın

$$\rho(x^{(n)}, 0) < C\sqrt{m}$$

bolatuǵının tabamız. Bul $x^{(n)}$ izbe-izliktiń shegaralanǵanın bildiredi.

Solay etip, $x^{(n)} = x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}$ izbe-izliklerdiń koordinatalarınan ibarat $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}$ izbe-izliklerdiń hár biriniń shegaralanǵanlıǵınan $x^{(n)}$ izbe-izliktiń shegaralanǵanlıǵı kelip shıǵar eken.

Nátiyjede tómendegi teoremaǵa kelemiz:

2-teorema. R^m кеңісliğінде $x^{(n)} = x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}$ ізбе-ізліктің shegaralangan bolıwı ushın bul ізбе-ізлік koordinatalarınan ibarat $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}$ sanlar ізбе-ізлікleriniń hár biriniń shegaralangan bolıwı zárúr hám jetkilikli.

Máselen, R^2 кеңісliğінде $\frac{1}{n}, \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$) ізбе-ізлік shegaralangan boladı, sebebi bul ізбе-ізлік koordinatalarınan ibarat ізбе-ізлікlerdiń hár biri shegaralangan. R^2 кеңісliğінде (n, n) ($n = 1, 2, \dots$) ізбе-ізлік shegaralanbağan ізбе-ізлік.

Joqarıda keltirilgen $(1, 1), (-1, -1), (1, 1), \dots$ ізбе-ізлік shegaralangan ізбе-ізлік boladı. Bul mısaldan kórinip turǵanıday shegaralangan ізбе-ізлікler limitke iye bolıwı da, limitke iye bolmawı da múmkin eken. 2°. Eger

$x^{(n)}$ ізбе-ізлік jıynaqlı bolsa, ol shegaralangan boladı.

Jıynaqlı ізбе-ізлікler ústindegi arifmetikalıq ámellderdi úyreniwden burın R^m кеңісliği elementleri ústinde orınlanatuǵın ámellderdi keltiremiz.

R^m кеңісliğiniń eki $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ noqatların alayıq.

R^m кеңісliğiniń $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m)$ noqatı a hám b noqatlar **qosındısı** dep ataladı hám $a + b$ dep belgilenedi: $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m)$.

R^m кеңісliğiniń $(\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_m)$ (α – haqıyqıy san) noqatı α haqıyqıy sanı menen $a \in R^m$ noqat **kóbeymesi** dep ataladı hám αa dep belgilenedi:

$\alpha a = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_m)$. R^m кеңісliğiniń a hám b noqatları arasındaǵı **ayırma** $a + (-1)b$ kórinisinde anıqlanadı hám $a - b$ dep belgilenedi: $a - b = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_m - b_m)$. Solay etip, R^m кеңісliği noqatları ústinde qosıw, ayırıw hám R^m кеңісliği noqatın haqıyqıy sanǵa kóbeytiw ámellderi kiritiledi.

R^m кеңісliğінде eki

$$x^{(n)} = x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}, \quad y^{(n)} = y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \dots, y_m^{(n)}$$

ізбе-ізлік berilgen bolsın. Mına

$$x_1^{(n)} + y_1^{(n)}, x_2^{(n)} + y_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)} + y_m^{(n)}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ізбе-ізлік $x^{(n)}$ hám $y^{(n)}$ **ізбе-ізлікler qosındısı** dep ataladı hám $x^{(n)} + y^{(n)}$ dep belgilenedi, $x^{(n)}$ hám $y^{(n)}$ **ізбе-ізлікler ayırması** tómendegi

$$x_1^{(n)} - y_1^{(n)}, x_2^{(n)} - y_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)} - y_m^{(n)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ізбе-ізлік sıpatında anıqlanadı hám $x^{(n)} - y^{(n)}$ dep belgilenedi.

R^m кеңісliğінде $\alpha x_1^{(n)}, \alpha x_2^{(n)}, \dots, \alpha x_m^{(n)}$ ізбе-ізлік α саны менен $x^{(n)}$ **ізбе-ізлік көбеймеси** деп аталады һәм $\alpha x^{(n)}$ деп белгіленеді.

3°. Eger $x^{(n)}$ ізбе-ізлік жинақлы болып, оның limiti a ($a \in R^m$) болса, онда $\alpha x^{(n)}$ ($\alpha \in R$) ізбе-ізлікте жинақлы болып, бул ізбе-ізліктің limiti αa ға тең болады:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha x^{(n)} = \alpha a = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)}$$

4° Eger $x^{(n)}$ һәм $y^{(n)}$ ізбе-ізліктер жинақлы болып, олардың limiti сәйкес a һәм b болса, онда $x^{(n)} \pm y^{(n)}$ ізбе-ізлікте жинақлы болып, бул ізбе-ізліктің limiti $a \pm b$ ға тең болады:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x^{(n)} \pm y^{(n)}) = a \pm b = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y^{(n)}.$$

5° Eger a нүкте M ($M \subset R^m$) көптіктің limit нүктесі болса, онда M көптік нүктелерінен a ға умтылушы $x^{(n)}$ ізбе-ізлік ($x^{(n)} \in M, n = 1, 2, \dots$) ажыратылу мүмкін.

Мәлім a нүктесі M көптіктің limit нүктесі болса, a нін һәр бир $U_\varepsilon(a)$ дөңгегінде ($\forall \varepsilon > 0$) M көптіктің шексіз көп нүктелері болады.

Нол'ге умтылатуғын оң санлар ізбе-ізлігі $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ алып a нүктесінің

$$U_{\frac{1}{n}}(a) = \left\{ x \in R^m : \rho(x, a) < \frac{1}{n} \right\}$$

дөңгегіне дүземіз. Бул a нүкте M көптіктің limit нүктесі болғаны үшін a нүктесінің $U_1(a)$ дөңгегінде M көптіктің a дан өзгеше нүктелері болады. Олардан біреуін $x^{(1)}$ деп аламыз. Енді a нүктесінің $U_{\frac{1}{2}}(a)$ дөңгегіне қарайық. Бул дөңгегіде де M

көптіктің a дан өзгеше нүктелері болады. Олардан $x^{(1)}$ дан өзгеше болған біреуін $x^{(2)}$ деп белгілейміз. Усылай қылып дауам етіп n -адымда a нүктесінің $U_{\frac{1}{n}}(a)$ дөңгегі

алынса, бул дөңгегіде де M көптіктің a дан өзгеше нүктелері болады. Олардан $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n-1)}$ нүктелерінің һәр биріне тең болмауының алып, оны $x^{(n)}$ менен белгілейміз. Жәнеде ұсындай қылып дауам етіп, нәтижесінде M көптік нүктелерінен

$$x^{(n)} : x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \dots$$

ажыралды. Бул ізбе-ізлік үшін

$$\rho(x^{(n)}, a) < \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

болғаны себепті, $n \rightarrow \infty$ ке $x^{(n)} \rightarrow a$ болатуғын келіп шығады.

2. Koshi теоремасы (жинақылдық принципі).

Алдын айтп өткенімізде, ізбе-ізліктің қашан limitке ие болуын анықлау limitтер теориясының әһмийетлі мәселелерінен бірі.

Joqarıda keltirilgen 1-teorema, R^m keńisliginde $x^{(n)}$ izbe-izliktiń jıynaqlı bolıwı bul izbe-izlik aǵzaları koordinatalarınan dúzilgen sanlı izbe-izliklerdiń jıynaqlı bolıwı arqalı anıqlanatuǵının kórsetedi.

Dáslep, bul jerde de fundamental' izbe-izlik túsiniǵi menen tanısamız. R^m keńisliginde $x^{(n)}$ izbe-izligi berilgen bolsın.

3-anıqlama. Eger $\forall \varepsilon > 0$ alıńanda da, sonday $n_0 \in N$ tabılıp, barlıq $n > n_0$, $p > n_0$ ler ushın

$$\rho(x^{(p)}, x^{(n)}) < \varepsilon$$

teńsizligi orınlı bolsa, $x^{(n)}$ **fundamental' izbe-izlik** dep ataladı.

Mısallar. 1. R^2 keńisliginde mına $\left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \right\}$ izbe-izlik fundamental' izbe-izlik boladı. Haqıyqattan

$$\rho \left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right), \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p} \right) \right) = \sqrt{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n} \right)^2 + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n} \right)^2} = \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \right| \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{n} \right) \sqrt{2}$$

Eger $\forall \varepsilon > 0$ sanı ushın n_0 natural sanın

$$n_0 = \left\lfloor \frac{2\sqrt{2}}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$$

dep alsaq, onda barlıq $n > n_0$, $p > n_0$ ler ushın

$$\rho \left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right), \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p} \right) \right) < \left(\frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} \right) \sqrt{2} < \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \cdot \varepsilon = \varepsilon$$

bolatuǵının tabamız. Demek, berilgen izbe-izlik fundamental' eken.

2. R^2 keńisliginde tómendegi $x_n, 0 : x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ izbe-izligi fundamental' bolmaydı. Haqıyqattan da, bul izbe-izlik ushın, máselen $n > p$ da

$$\rho((x_p, 0), (x_n, 0)) = \sqrt{x_n - x_p}^2 = x_n - x_p = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \dots + \frac{1}{n} > \frac{n-p}{n}$$

bolıp, $n = 2p$ bolǵanda

$$\rho((x_p, 0), (x_n, 0)) > \frac{1}{2}$$

ekenligi kelip shıǵadı. Bul berilgen izbe-izliktiń fundamental' emesligin kórsetedi.

Meyli $x^{(n)} = x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}$ fundamental' izbe-izlik bolsın.

Anıqlamaǵa muwapıq, $\forall \varepsilon > 0$ alıńanda da, sonday $n_0 \in N$ tabılıp, barlıq $n > n_0$, $p > n_0$ ushın

$$\rho(x^{(n)}, x^{(p)}) < \varepsilon$$

boladı. Bul teńsizlikti tómendegishe

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^{(n)} - x_i^{(p)} }^2 < \varepsilon$$

jazıp, onnan

$$\left| x_i^{(n)} - x_i^{(p)} \right| < \varepsilon$$

bolatuǵının tabamız. Bul $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}$ izbe-izliklerdiń hár biri fundamental' izbe-izlikler (qaralsın, 1-bólim, 3-bap, 10-§) ekenligin bildiredi.

Sonday qılıp, R^m keńisliginde $x^{(n)} = x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}$ izbe-izliktiń fundamental' bolıwınan bul izbe-izlik koordinatalarınan dúzilgen $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}$ izbe-izliklerdiń hár biriniń fundamental' bolatuǵınlıǵı kelip shıǵar eken.

Endi $x^{(n)} = x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}$ izbe-izlik koordinatalarınan ibarat $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}$ izbe-izliklerdiń hár biri fundamental' bolsın.

Bul jaǵdayda $\forall \varepsilon > 0$ alıńanda da, $\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ ge sáykes keliwshi sonday $n_0^{(1)}, n_0^{(2)}, \dots, n_0^{(m)}$ natural sanlar tabılıp,

$$\text{barlıq } n > n_0^{(1)}, p > n_0^{(1)} \Rightarrow \left| x_1^{(n)} - x_1^{(p)} \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}},$$

$$\text{barlıq } n > n_0^{(2)}, p > n_0^{(2)} \Rightarrow \left| x_2^{(n)} - x_2^{(p)} \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}},$$

.....

$$\text{barlıq } n > n_0^{(m)}, p > n_0^{(m)} \Rightarrow \left| x_m^{(n)} - x_m^{(p)} \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$$

boladı. Eger $n_0 = \max n_0^{(1)}, n_0^{(2)}, \dots, n_0^{(m)}$ dep alsaq, onda barlıq $n > n_0, p > n_0$ ushın bir waqıtta

$$\left| x_i^{(n)} - x_i^{(p)} \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

teńsizlikler orınlanadı. Nátiyjede

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^{(n)} - x_i^{(p)} }^2 < \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} \right)^2} = \varepsilon$$

boladı. Demek

$$\rho(x^{(n)}, x^{(p)}) < \varepsilon.$$

Bul $x^{(n)}$ fundamental' izbe-izlik ekenligin bildiredi. Nátiyjede tómendegi teoremaǵa kelemiz:

boladı. Teoremanıń shártinen $n \rightarrow \infty$ ke $r_n \rightarrow 0$ den hám joqarıdağı teńsizlikten $a^{(n)}$ fundamental' izbe-izlik ekenligi kelip shıǵadı. Koshi teoremasınan bul izbe-izlik limitke iye. Biz onı a menen belgileyik.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{(n)} = a$$

İqtıyarlı S_n ($n = 1, 2, \dots$) sharın alayıq. Bul shar $a^{(n)}$ izbe-izliginiń qandayda bir aǵzasınan baslap keyingi barlıq aǵzaların óz ishine aladı (kóp bolǵanda $a^{(n)}$ izbe-izliktiń shekli sandaǵı $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n-1)}$ aǵzaları ǵana S_n shargá tiyisli bolmawı múmkin). Demek, a noqatı S_n niń limit noqatı hám S_n tuyıq kóplik bolǵanı ushın $a \in S_n$ ($n = 1, 2, \dots$) boladı. Solay etip, a noqatınıń barlıq sharlarǵa tiyisli ekenligin kórsettik. Endi bunday a noqatınıń jalǵızlıǵın kórsetemiz. Meyli, a noqatınıń ózgeshe barlıq sharlarǵa tiyisli bolǵan b noqatıda bar bolsın: $b \in S_n$ ($n = 1, 2, \dots$) $b \neq a$. Aralıq qásiyetinen paydalanıp tabamız:

$$\rho(a, b) \leq \rho(a, a^{(n)}) + \rho(a^{(n)}, b) \leq 2r_n.$$

Bunnan $n \rightarrow \infty$ ke $r_n \rightarrow 0$ ge bolǵanı ushın

$$\rho(a, b) = 0,$$

yaǵnıy $a = b$ bolatuǵını kelip shıǵadı. Teorema dálillendi.

4. Úles izbe-izlikler. Bol'cano-Veyershtrass teoreması.

R^m keńisliginde

$$x^{(n)} : x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \dots \quad x^{(n)} \in R^m, \quad n = 1, 2, \dots$$

izbe-izlik berilgen bolsın. Bul izbe-izliktiń $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$

$$n_1, n_2 < \dots < \dots, \quad n_k \in N, \quad k = 1, 2, \dots,$$

sanlı aǵzalarınan dúzilgen mına

$$x^{(n_1)}, x^{(n_2)}, \dots, x^{(n_k)}, \dots \quad x^{(n_k)} \in R^m$$

izbe-izlik $x^{(n)}$ izbe-izliktiń **úles izbe-izligi** dep ataladı hám $x^{(n_k)}$ dep

belgilenedi. Máselen, R^m keńislikte tómendegi

$$(1, 1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right), \dots, \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n} \right), \dots$$

$$(1, 1), \left(\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2} \right), \left(\frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^2} \right), \dots, \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2} \right), \dots$$

izbe-izlikler

$$(1, 1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \dots, \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right), \dots$$

izbe-izliktiń úles izbe-izlikleri boladı.

Bir izbe-izlikten júdá kóp túrli úles izbe-izlikler ajratıw múmkin ekenligi ayqın.

6-teorema. Eger $x^{(n)}$ izbe-izlik jıynaqlı bolıp, onıń limiti $a(a \in R^m)$ bolsa, onda bul izbe-izliktiń hár qanday úles x^{n_k} izbe-izliginde jıynaqlı bolıp, onıń limitide a ǵa teń boladı.

Bul teoremanıń dálili izbe-izliktiń limiti anıqlamasınan tikkeley kelip shıǵadı.

1-eskertiw. Izbe-izliktiń úles izbe-izliginiń limitiniń bar ekenliginen berilgen izbe-izliktiń limiti bar bolıwı bárqulla kelip shıǵa bermeydi. Máselen mına izbe-izliktiń

$$(1,1), (-1,-1), \dots, (1,1), (-1,-1), \dots, ((-1)^{n+1}, (-1)^{n+1}), \dots$$

izbe-izliktiń

$$(1,1), (1,1), \dots, (1,1), \dots, (-1,-1), (-1,-1), \dots, (-1,-1), \dots$$

úles izbe-izlikleri limitke iye (olar sáykes $(1,1)$ hám $(-1,-1)$ noqatlarına teń bolǵanı menen $-1^{n+1}, -1^{n+1}$ izbe-izlik limitke iye emes.

Demek, $x^{(n)}$ izbe-izlik limitke iye bolmasada onıń úles izbe-izlikleri limitke iye bolıwı múmkin eken.

7-teorema (Bol'cano-Veyershtass teoreması). Hár bir shegaralanǵan izbe-izlikten jıynaqlı úles izbe-izlik ajıratıw múmkin.

Dálil. $x^{(n)} = x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}$ izbe-izlik shegaralanǵan bolsın.

Anıqlamaǵa muwapıq sonday shar $x \in R^m : \rho(x, 0) \leq r$ tabılıp, $x^{(n)}$ izbe-izliktiń barlıq aǵzaları usı sharda jatadı.

Eger mına

$$\{x \in R^m : \rho(x, 0) \leq r\} \subset U_r(0)$$

qatnastı esapqa alsaq, onda barlıq n ler ushın

$$-r \leq x_i^{(n)} \leq r \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

bolatuǵını tabıladı. Bul $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}$ izbe-izlikleriniń hár biriniń shegaralanǵanlıǵın bildiredi.

1-bólim, 3-bapta keltirilgen Bol'cano-Veyershtass teoremasına muwapıq $x_1^{(n)}$ izbe-izlikten jıynaqlı úles izbe-izlik $x_1^{(n_k)}$ di ajıratıw múmkin. Nátiyjede birinshi koordinatası jıynaqlı bolǵan mına

$$\{(x_1^{(n_{k_1})}, x_2^{(n_{k_1})}, \dots, x_m^{(n_{k_1})})\}$$

izbe-izlikke kelemiz.

Endi $\{x_2^{(n_{k_1})}\}$ izbe-izlikti qarayıq. Bul izbe-izlikte shegaralanǵan. Jáne de Bol'cano-Veyershtass teoremasına muwapıq $\{x_2^{(n_{k_1})}\}$ dan jıynaqlı úles izbe-izlik $\{x_2^{(n_{k_2})}\}$ ajıratıw múmkin. Nátiyjede, birinshi hám ekinshi koordinataları jıynaqlı bolǵan

$$\{(x_1^{(n_{k_2})}, x_2^{(n_{k_2})}, \dots, x_m^{(n_{k_2})})\}$$

úles izbe-izlik payda boladı.

Usınday qılıp dawam ete berip, m adımnan keyin, barlıq koordinataları jıynaqlı bolǵan mına

$$\{(x_1^{(n_{k_m})}, x_2^{(n_{k_m})}, \dots, x_m^{(n_{k_m})})\} = \{x^{(n_{k_m})}\}$$

úles izbe-izlikke iye bolamız. Bul izbe-izlik $\{x^{(n)}\}$ izbe-izliktiń úles izbe-izligi boladı. Ekinshi jaqtan, 1-teoremaǵa muwapıq $\{x^{(n_{k_m})}\}$ izbe-izlik jıynaqlı izbe-izlik boladı. Teorema dálillendi.

Kóp ózgeriwshili funkciya hám onıń limiti

Dáslepki túsinipler qatarında (1-bólim, 1-bap, 3-§) ıqtıyarlı E kópligin F kóplikke sáwlelendiriw ($\phi: E \rightarrow F$) túsiniǵı keltirilgen edi. Sońınan $E = N$, $F = R$; $E = R$, $F = R$, hám $E = N$, $F = R^m$ dep mına

$$f: N \rightarrow R \quad f: n \rightarrow x_n; n \in N, x_n \in R,$$

$$\varphi: R \rightarrow R \quad (\varphi: x \rightarrow y; x \in R, y \in R),$$

$$\psi: N \rightarrow R^m \quad \psi: n \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_m); n \in N, (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m$$

sáwlelendiriwlerge iye boldıq. Bul sáwlelendiriwler sáykes sanlar izbe-izligi, funkciya jánede R^m keńisligi noqatları izbe-izligi, túsiniplerine alıp keldi. Sanlar izbe-izligi hám onıń limiti 1-bólimniń 3-babında, funkciya hám onıń limiti 1-bólimniń 4-babında, R^m keńisligi noqatları izbe-izligi hám onıń limiti bolsa usı baptıń 2-§ de keń túrde bayan etildi.

Endi $E = R^m$, $F = R$ dep $f: R^m \rightarrow R$ sáwlelendiriwin qaraymız. Bul kóp ózgeriwshili funkciya túsiniǵine alıp keledi.

1. Funkciya. Qandayda bir M ($M \subset R^m$) kópligi berilgen bolsın.

1-anıqlama. Eger M kópliktegi hár bir $x = x_1, x_2, \dots, x_m$ noqatına bazı bir qaǵıyda yamasa nızamǵa muwapıq bir haqıyqıy san sáykes qoyılǵan bolsa, M kóplikte **kóp ózgeriwshili (m ózgeriwshili) funkciya berilgen (anıqlanǵan)** dep ataladı hám onı

$$f: x_1, x_2, \dots, x_m \rightarrow y \text{ yamasa } y = f(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (1)$$

dep belgilenedi. Bunda M - **funkciyanıń beriliwi (anıqlanıw) kópligi**, $x_1, x_2, \dots, x_m$ erikli ózgeriwshiler-**funkciya argumentleri**, y eriksiz ózgeriwshi - $x_1, x_2, \dots, x_m$ **ózgeriwshileriniń funkciyası** delinedi.

$x_1, x_2, \dots, x_m$ noqat bir x penen belgileniwin itibarǵa alıp, bunnan keyin derlik barlıq waqıt $x_1, x_2, \dots, x_m$ nıń ornına x ti isletemiz. Onda joqarıdaǵı (1) belgilewler tómendegishe jazıladı:

$f: x \rightarrow y$ yamasa $y = f(x)$ ($x \in R^m, y \in R$) funkciyanıń beriliw kópliginen alınǵan $x^0 \in M$ noqatına sáykes keliwshi y_0 sanı $y = f(x)$ funkciyanıń $x = x^0$ noqatındaǵı **dara mánisi** dep ataladı.

Mısallar. 1. $f: R^m \rightarrow R$ keńisligindegi hár bir x noqatına usı noqat koordinataları kvadratlarınıń qosındısı sáykes qoyıwshı qaǵıyda, yaǵnıy

$$f: x \rightarrow x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2$$

bolsın. Bul jaǵdayda $y = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2$ funkciyası hasıl boladı. Bul funksiya $M = R^m$ kóplikte berilgen.

2. F - hár bir $x \in M = \{x \in R^m : \rho(x,0) \leq 1\}$ noqatqa mına

$$x \rightarrow \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_m^2}$$

qaǵıyda menen bir haqıyqıy sandı sáykes qoysın. Bul jaǵdayda da kóp ózgeriwshili

$$y = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_m^2}$$

funkciyaǵa iye bolamız. Bul funkciyanıń M kóplikte berilgenligi ayqın.

$f(x)$ funksiya $M \subset R^m$ kóplikte berilgen bolsın. x ózgeriwshi M kópliginde ózgeredi, funkciyanıń sáykes mánislerinen ibarat $f(x) : x \in M$ kóplik funksiya **mánisleriniń kópligi (funkciyanıń ózgeriw oblastı)** dep ataladı. Joqarıda keltirilgen mısallardıń birinshisinde funkciyanıń mánisler kópligi $[0, +\infty]$, ekinshisinde bolsa $[0,1]$ segmentinen ibarat.

Kóp ózgeriwshili (m ózgeriwshi) funksiyalarda funksiyanıń beriliw kópligi R^m keńisligindegi kóplik bolıp bul funkciyanıń mánisler kópligi bolsa haqıyqıy sanlardıń úles kópliginen ibarat bolatuǵının jáne bir márte esletip ótemiz.

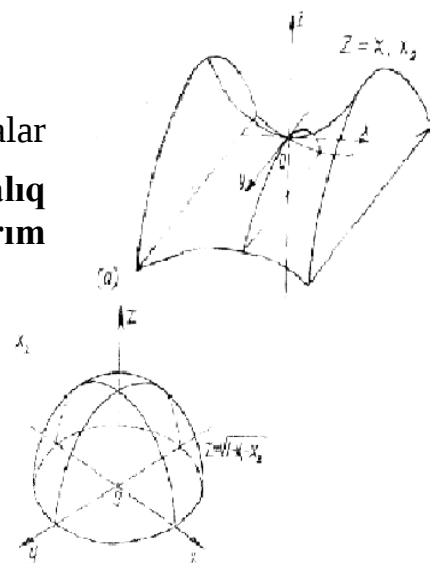
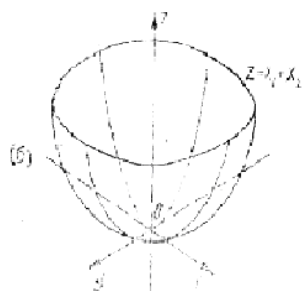
R^{m+1} keńisliginiń (x, y) $x \in R^m, y = f(x) \in R$ noqatlarınan ibarat mına

$$\{(x, f(x))\} = \{(x, f(x)) : x \in R^m, f(x) \in R\}$$

kópligi $y = f(x)$ **funkciya grafigi** dep ataladı.

Máselen, $m = 2$ bolǵanda (R^2 keńisliginde)

$y = x_1 \cdot x_2, y = x_1^2 + x_2^2, y = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ funksiya grafigi sáykes túrde R^3 keńisliginde **giperbolalıq paraboloid, aylanba paraboloid hám joqarı yarım sferalardan** ibarat (10-sızılma)



1-sızılma

$M \subset R^m$ kóplikte $y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funksiya berilgen bolıp, $x_1, x_2, \dots, x_m$ lerdiń hár biri $T \subset R^k$ ($k \in N$) kóplikte berilgen funksiya bolsın:

$$x_1 = \varphi_1(t) = \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k)$$

$$x_2 = \varphi_2(t) = \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_m = \varphi_m(t) = \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k)$$

Bunda $t = (t_1, t_2, \dots, t_k)$ ózgeriwshi $T \subset R^k$ kóplikte ózgergende olar sáykes $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ noqat $M \subset R^m$ kóplikte bolsın. Nátiyjede y ózgeriwshi $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ózgeriwshi arqalı $t = (t_1, t_2, \dots, t_k)$ ózgeriwshilerdiń funksiya boladı:

$$t \rightarrow x \rightarrow y$$

$$(t_1, t_2, \dots, t_k) \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow y.$$

Bul

$$y = f(x(t)) = f(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k))$$

funkciya **quramalı funksiya** yamasa $f(x)$ hám $\varphi_i(t)$, ($i = 1, 2, \dots, m$) funksiya **superpoziciyası** dep ataladı.

Elementar funksiya ústinde qosıw, ayırıw, kóbeytiw hám bóliw ámelleri hám funksiya superpoziciyası járdeminde kóp ózgeriwshili elementar funksiya hasıl qılınadı. Mına

$$y = e^{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_m}, \quad y = \ln \sqrt{x_1 + x_2 + \dots + x_m},$$

$$y = \sin x_1 \cdot x_2 + \sin x_2 \cdot x_3 + \dots + \sin x_{m-1} \cdot x_m$$

funksiya sonday funksiya boladı.

$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funksiya $M \subset R^m$ kóplikte berilgen bolsın. Eger bul funksiya mánisler kópligi

$$Y = f(x_1, x_2, \dots, x_m) : x_1, x_2, \dots, x_m \in M$$

joqarıdan (tómennen) shegaralanğan bolsa, yaǵnıy sonday ózgermes C (ózgermes P) sanı tabılıp, $\forall x_1, x_2, \dots, x_m \in M$ ushın

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) \leq C \quad f(x_1, x_2, \dots, x_m) \geq P$$

teńsizlik orınlı bolsa, $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funksiya M kóplikte **joqarıdan (tómennen) shegaralanğan** dep ataladı, keri jaǵdayda, yaǵnıy qálegen úlken S oń sanı tabılǵanda da, M kóplikte sonday $x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0$ noqatı tabılıp,

$$f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) > S \quad f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) < -S$$

teńsizlik orınlı bolsa, $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funksiya M kóplikte **joqarıdan (tómennen) shegaralanbağan** dep ataladı.

Eger $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funksiya M kóplikte joqarıdan da, tómennen de shegaralanğan bolsa, funksiya usı kóplikte **shegaralanğan** delinedi.

Máselen. $M = R^2 \setminus \{(0, 0)\}$ de berilgen

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}$$

funksiya usı M kóplikte tómennen shegaralanğan, lekin joqarıdan shegaralanbağan: $Y = (0, \infty)$.

2. Funkciyanıń limiti. R^m keńisliginde qandayda bir M kóplik alayıq. a noqatı $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ usı kópliktiń limit noqatı bolsın.

Bul jaǵdayda M kópliginiń noqatlarınan a ǵa umtılwshı túrli $x^{(n)}$
 $x^{(n)} \in M, \quad x^{(n)} \neq a, \quad n = 1, 2, \dots$ izbe-izlikler dúziw múmkin:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a$$

Endi usı M kóplikte qandayda bir $y = f(x)$ funkciya berilgen bolsın.

2–anıqlama (Geyne anıqlaması). Eger M kópliginiń noqatlarınan dúzilgen, a ǵa umtılwshı hár qanday $x^{(n)} \quad x^{(n)} \neq a, \quad n = 1, 2, \dots$, izbe-izlik alıńanda da sáykes $f(x^{(n)})$ izbe-izlik barlıq waqıtta jalǵız b (shekli yamasa sheksiz) limitke umtılsa, b $f(x)$ funkciyasınıń a **noqatındaǵı (yamasa $x \rightarrow a$ ǵa) limiti*** dep ataladı hám onı

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \text{yamasa} \quad x \rightarrow a \quad \text{ǵa} \quad f(x) \rightarrow b$$

dep belgilenedi.

Funkciya limitin basqashada anıqlawǵa boladı.

3–anıqlama. (Koshi anıqlaması) Eger $\forall \varepsilon > 0$ sanı ushın sonday $\delta > 0$ sanı tabılıp, mına $0 < \rho(x, a) < \delta$ teńsizligin qanaatlandırwshı barlıq $x \in M$ noqatlarında

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

teńsizligi orınlı bolsa, b sanı $f(x)$ funkciyasınıń a noqatındaǵı ($x \rightarrow a$ ǵı) **limiti** dep ataladı.

4–anıqlama (Koshi anıqlaması). Eger $\forall \varepsilon > 0$ sanı ushın sonday $\delta > 0$ tabılıp, mına $0 < \rho(x, a) < \delta$ teńsizlikti qanaatlandırwshı barlıq $x \in M$ noqatlarda

$$|f(x)| > \delta \quad (f(x) > \varepsilon; \quad f(x) < -\varepsilon)$$

bolsa, $f(x)$ funkciyanıń a noqatındaǵı ($x \rightarrow a$ daǵı) **limiti** ∞ ($+\infty, -\infty$) delinedi

Solay etip funkciya limiti eki túrli anıqlanadı. Bul anıqlamalar ekvivalent anıqlamalar. Bunıń dálili 1-bólim, 4-bap, 3-§ de keltirilgen bir ózgeriwshili funkciya limiti anıqlamaları dáliline uqsas.

Joqarıdaǵı $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ yamasa $x \rightarrow a$ ǵa $f(x) \rightarrow b$ belgilewler

$$x = x_1, x_2, \dots, x_m, \quad a = a_1, a_2, \dots, a_m \quad \text{hám}$$

$$x \rightarrow a \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \rightarrow a_1 \\ x_2 \rightarrow a_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_m \rightarrow a_m \end{cases}$$

ekenligin itibarǵa alıp, tómendegishe

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ x_2 \rightarrow a_2 \\ \dots \\ x_m \rightarrow a_m}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = b \quad \text{yamasa} \quad \left. \begin{array}{l} x_1 \rightarrow a_1 \\ x_2 \rightarrow a_2 \\ \dots \dots \dots \\ x_m \rightarrow a_m \end{array} \right\} \quad \text{ge} \quad f(x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow b$$

dep jazıwǵa da boladı.

R^m keńisliginde bazıbir M kóplik berilgen bolıp, ∞ usı kópliktiń limit noqatı bolsın. Bul M kóplikte $y = f(x)$ funkciya berilgen.

5-anıqlama (Geyne anıqlaması). Eger M kópliktiń noqatlarınan dúzilgen qálegen $x^{(n)}$ izbe-izlik ushın $x^{(n)} \rightarrow \infty$ ke sáykes $f(x^{(n)})$ izbe-izlik barlıq waqıt jalǵız b ǵa umtılsa, b $f(x)$ funkciyanıń $x \rightarrow \infty$ ke **limiti** dep ataladı hám

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

dep belgilenedi.

6-anıqlama (Koshi anıqlaması) Eger $\forall \varepsilon > 0$ sanı ushın sonday $\delta > 0$ sanı tabılıp, mına $\rho(x, 0) > \delta$ teńsizligin qanaatlandırwshı barlıq $x \in M$ noqatlarda

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

teńsizligi orınlı bolsa, b $f(x)$ funkciyanıń $x \rightarrow \infty$ ke limiti dep ataladı hám

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

dep belgilenedi.

Funkciya limiti túsinigi kiritilgende limit qaralıp atırǵan noqatta funkciyanıń beriliwi (anıqlanıwı) shárt emes ekenligin jáne bir márte esletip ótpekshimiz.

1-eskertiw. Joqarıda funkciya limitine berilgen Geyne anıqlamasınıń áhmiyeti, qálegen $x^{(n)}$ $x^{(n)} \neq a$, $n = 1, 2, \dots$, $x^{(n)} \rightarrow a$ izbe-izlik ushın sáykes $f(x^{(n)})$ izbe-izliktiń limiti alınǵan $x^{(n)}$ izbe-izlikke baylanıslı emesliginde.

Mısallar. 1. Mına

$$f(x) = f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \text{eger } x_1^2 + x_2^2 > 0 \text{ bolsa,} \\ 0, & \text{eger } x_1^2 + x_2^2 = 0 \text{ bolsa} \end{cases}$$

funkciyanıń $x = (x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)$ (yaǵnıy $x_1 \rightarrow 0$, $x_2 \rightarrow 0$) degi limiti nól ekenligi kórsetilsin. Bul funkciya R^2 kóplikte berilgen bolıp, $(0, 0)$ noqat usı kópliktiń limit noqatı.

a) Geyne anıqlaması boyınsha: $(0, 0)$ noqatına umtılwshı qálegen

$$x^{(n)} = x_1^{(n)}, x_2^{(n)} \rightarrow (0, 0) \quad (\text{yaǵnıy } x_1^{(n)} \rightarrow 0, \quad x_2^{(n)} \rightarrow 0) \quad (x^{(n)} \neq (0, 0))$$

izbe-izlik alamız. Onda sáykes $f(x^{(n)})$ izbe-izligi ushın tómendegishe

$$f(x^{(n)}) = f(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) = \frac{x_1^{(n)} x_2^{(n)}}{\sqrt{x_1^{(n)2} + x_2^{(n)2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{x_1^{(n)} \cdot x_2^{(n)}}{x_1^{(n)2} + x_2^{(n)2}}} \cdot \sqrt{x_1^{(n)} \cdot x_2^{(n)}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x_1^{(n)} x_2^{(n)}}$$

bolıp, $x_1^{(n)} \rightarrow 0$, $x_2^{(n)} \rightarrow 0$ de

$$\lim_{n \rightarrow (0,0)} f(x^{(n)}) = 0$$

boladı. Demek,

$$\lim_{x \rightarrow (0,0)} f(x) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} \frac{x_1 \cdot x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = 0;$$

b) Koshi anıqlaması boyınsha: $\forall \varepsilon > 0$ sanı ushın $\delta = 2\varepsilon$ dep alınsa, onda $0 < \rho(x, 0) < \delta$ teńsizligin qanaatlandırıwshı barlıq x noqatlarda

$$\left| f(x) - 0 \right| = \left| \frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right| = \frac{|x_1| \cdot |x_2|}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \leq \frac{1}{2} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \frac{1}{2} \rho(x, 0) < \frac{1}{2} \delta = \varepsilon$$

teńsizligi orınlı boladı. Bul

$$\lim_{x \rightarrow (0,0)} f(x) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} \frac{x_1 \cdot x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = 0$$

ekenligin bildiredi.

2. Tómendegi

$$f(x) = f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 \cdot x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2 + (x_1 - x_2)^2}$$

funkciyanıń $x = (x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)$ (yaǵnıy $x_1 \rightarrow 0, x_2 \rightarrow 0$) degi limitiniń joq ekenligi kórsetilsin. Bul funkciyada $R^2 \setminus (0, 0)$ kóplikte berilgen bolıp, $(0, 0)$ noqat usı kópliktiń limit noqatı.

$(0, 0)$ noqatına umtılwshı eki

$$x^{(n)} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \rightarrow (0, 0) \quad \text{hám} \quad \bar{x}^{(n)} = \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n} \right) \rightarrow (0, 0)$$

izbe-izlikler alınsa, olar ushın saykes túrde

$$f(x^{(n)}) = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}} = 1 \rightarrow 1 \quad \text{hám} \quad f(\bar{x}^{(n)}) = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + \frac{4}{n^2}} = 0 \rightarrow 0$$

boladı. Bul $x \rightarrow (0, 0)$ da berilgen funkciyanıń limiti bolmaytuǵının bildiredi.

3. Sheksiz kishi hám sheksiz úlken funkciyalar. 1-bólimniń 3-babı, 4-ş hám de 5-ş lerinde sheksiz kishi hám sheksiz úlken shamalar túsiniikleri, 4-baptıń 7-ş inde bolsa sheksiz úlken hám sheksiz kishi funkciyalar túsiniikleri kiritilip, olar kórsetilgen paragraflerde úyrenilgen edi.

Dál usınday túsinikler kóp ózgeriwshili funkciyalar ushında kiritiliwi múmkin. Olardı úyreniw bolsa bir ózgeriwshili funkciya jaǵdayındaǵıǵa uqsas ekenligin itibarǵa alıp, sheksiz kishi hám sheksiz úlken kóp ózgeriwshili funkciyalar haqqındaǵı maǵlıwmatlardı sanap ótiw menen sheklenemiz.

Bazıbir $\alpha(x)$ funkciya $M \subset R^m$ kóplikte berligen bolıp, $a \in R^m$ noqat usı kópliktiń limit noqatı bolsın.

7-anıqlama. Eger $x \rightarrow a$ ǵa $\alpha(x)$ diń limiti nól, yaǵnıy

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$$

bolsa, onda $\alpha(x)$ funkciya $x \rightarrow a$ ǵa sheksiz kishi funkciya dep ataladı.

Berilgen $f(x)$ funkciya $x \rightarrow a$ ǵa shekli b limitke iye bolıwı ushın

$$\alpha(x) = f(x) - b$$

sheksiz kishi funkciya bolıwı zárúr hám jetkilikli.

Bunıń dálili funkciyanıń limiti hám sheksiz kishi funkciyanıń anıqlamalarınan kelip shıǵadı.

Solay etip, $x \rightarrow a$ ǵa $f(x)$ funkciya b limitke iye bolsa, bul funkciyanı baraqulla

$$f(x) = b + \alpha(x)$$

kórinisinde anıqlaw múmkin, bunda $\alpha(x)$ —sheksiz kishi funkciya.

Sheksiz kishi funkciyalar tómendegi qásiyetlerge iye.

Meyli, $\beta(x)$ funkciya da usı M kóplikte berilgen bolsın.

1°. Eger $x \rightarrow a$ ǵa $\alpha(x)$ hám $\beta(x)$ funkciyalar sheksiz kishi funkciyalar bolsa, onda olardıń qosındısı $\alpha(x) + \beta(x)$ funkciyada sheksiz kishi funkciya boladı.

2°. Eger $x \rightarrow a$ ǵa $\alpha(x)$ sheksiz kishi funkciya bolıp, $\beta(x)$ funkciya bolsa shegaralanǵan funkciya bolsa, onda olardıń kóbeymesi $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ sheksiz kishi funkciya boladı.

8-anıqlama. Eger M kóplikte berilgen $\gamma(x)$ funkciya ushın

$$\lim_{x \rightarrow a} \gamma(x) = \infty$$

bolsa, $\gamma(x)$ funkciya $x \rightarrow a$ ǵa sheksiz úlken funkciya dep ataladı.

3°. Eger $x \rightarrow a$ ǵa $\alpha(x)$ funkciya sheksiz kishi ($\alpha(x) \neq 0$) funkciya bolsa, $\frac{1}{\alpha(x)}$ funkciya $x \rightarrow a$ ǵa sheksiz úlken funkciya boladı.

4°. Eger $x \rightarrow a$ ǵa $\gamma(x)$ funkciya sheksiz úlken funkciya bolsa, $\frac{1}{\gamma(x)}$ funkciya $x \rightarrow a$ ǵa sheksiz kishi funkciya boladı.

4. Limitke iye bolǵan funkciyalardıń qásiyetleri.

Shekli limitke iye bolǵan kóp ózgeriwshili funkciyalar hám shekli limitke iye bolǵan bir ózgeriwshili funkciyalardıń qásiyetlerine (qaralsın, 1-bólim, 4-bap, 4-§) uqsas qásiyetlerge iye. Olardıń dálili bir ózgeriwshili funkciyalar qásiyetleriniń dál

ózi. Usını itibarğa alıp, biz tómende shekli limitke iye bolğan kóp ózgeriwshili funkciyalardıń qásiyetlerin dálilsiz keltiremiz.

Bazıbir $M \subset R^m$ kóplikte $f(x)$ funkciya berilgen bolıp, $a \in R^m$ noqat usı M kópliktiń limit noqatı bolsın.

1°. Eger

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

bar bolıp, $b > p$ ($b < q$) bolsa, a noqatınıń jetkilikli kishi dógeregindegi $x \in M$ ($x \neq a$) noqatlarda $f(x) > p$ ($f(x) < q$) boladı. Dara jaǵdayda, $b \neq 0$ bolsa, onda a noqatınıń jetkilikli kishi dógereginde $f(x) \neq 0$ boladı.

2°. Eger

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

bar bolsa, a noqatınıń jetkilikli kishi dógeregindegi $x \in M$ ($x \neq a$) noqatlarda $f(x)$ shegaralangán boladı.

Endi M de eki $f_1(x)$ hám $f_2(x)$ funkciyalar berilgen bolsın.

3°. Eger

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = b_1, \quad \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = b_2$$

bolıp, a noqatınıń $U_\delta(a)$ dógeregindegi barlıq x noqatlarda ($x \in M \cap U_\delta(a)$) $f_1(x) \leq f_2(x)$ bolsa, onda $b_1 \leq b_2$ boladı.

4°. Eger a noqatınıń $U_\delta(a)$ dógeregindegi $x \in M \cap U_\delta(a)$ noqatlarda

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$$

bolıp, $x \rightarrow a$ ǵa $f(x_1)$ hám $f(x_2)$ funkciyalar limitke iye hám

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = b$$

bolsa, onda $f(x)$ funkciyada limitke iye hám

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

boladı.

5°. Eger $x \rightarrow a$ ǵa $f_1(x)$ hám $f_2(x)$ funkciyalar limitke iye bolsa, $f_1(x) \pm f_2(x)$ funkciyada limitke iye boladı hám

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \pm f_2(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$$

6°. Eger $x \rightarrow a$ ǵa $f_1(x)$ hám $f_2(x)$ funkciyalar limitke iye bolsa, $f_1(x) \cdot f_2(x)$ funkciyada limitke iye boladı hám

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot f_2(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$$

7°. Eger $x \rightarrow a$ ǵa $f_1(x)$ hám $f_2(x)$ funkciyalar limitke iye bolıp,

$\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \neq 0$ bolsa, $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ funkciyada limitke iye boladı hám

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)}$$

2-eskertiw. Bir ózgeriwshili funkciyalardaǵıday, $x \rightarrow a$ ǵa $f_1(x)$ hám $f_2(x)$ funkciyalar qosındısı, kóbeymesi hám qatnasınan ibarat bolǵan funkciyalardıń limitke iye bolıwınan bul funkciyalardıń hár biriniń limitke iye bolıwı kelip shıǵa bermeydi.

3-eskertiw. Eger $x \rightarrow a$ ǵa 1) $f_1(x)$ hám $f_2(x)$ funkciyalardıń hár biriniń limiti nól (yamasa sheksiz) bolsa, $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ ańlatpa; 2) $f_1(x) \rightarrow 0$, $f_2(x) \rightarrow \infty$ bolǵanda $f_1(x) \cdot f_2(x)$ ańlatpası hám 3) $f_1(x)$ hám $f_2(x)$ hár qıylı belgili sheksiz limitke iye bolǵanda $f_1(x) + f_2(x)$ qosındısı sáykes túrde $\frac{0}{0}$ $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ kórinisindegi anıq emesliklerdi anıqlaydı.

Eger $x \rightarrow a$ ǵa 1) $f_1(x) \rightarrow 0$, $f_2(x) \rightarrow 0$ bolsa, 2) $f_1(x) \rightarrow 1$, $f_2(x) \rightarrow \infty$ bolsa, 3) $f_1(x) \rightarrow \infty$, $f_2(x) \rightarrow 0$ bolsa, onda $[f_1(x)]^{f_2(x)}$ sáykes 0^0 , 1^∞ , ∞^0 kórinisindegi anıq emesliklerdi ańlatadı. Bunday anıq emeslikler bir ózgeriwshili funkciyalarda qaralǵanınday, $f_1(x)$ hám $f_2(x)$ funkciyanıń óz limitlerine umtılw xarakterine qarap ashıladı.

5. Tákirarlanıwshı limitler. Biz joqarıda $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciyanıń $a = a_1, a_2, \dots, a_m$ noqattaǵı limiti

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \left(\lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ \dots \dots \dots \\ x_m \rightarrow a_m}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = b \right)$$

menen tanısayıq. Demek, funkciyanıń limiti, onıń argumentleri $x_1, x_2, \dots, x_m$ lerdiń bir jola, sáykes túrde $a_1, a_2, \dots, a_m$ sanlarına umtılgandaǵı limitinen ibarat.

Kóp ózgeriwshili funkciyalar ushın (tek ǵana olarǵa tiyisli bolatuǵın) basqa formadaǵı limit túsiniǵın kiritiw múmkin.

$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciya $M \subset R^m$ kóplikte berilgen bolıp, $a = a_1, a_2, \dots, a_m$ noqatı M kópliktiń limit noqatı bolsın. Bul funkciyanıń $x_1 \rightarrow a_1$ ge (basqa barlıq ózgeriwshiler berilgen tayınlangan) limiti

$$\lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

di qarayıq. Bul limit, birinshiden bir ózgeriwshili funkciya limitiniń ózi boladı, ekinshiden ol $x_2, x_3, \dots, x_m$ ózgeriwshilerine baylanıslı:

$$\lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \varphi_1(x_2, \dots, x_m)$$

Endi $\varphi_1(x_2, x_3, \dots, x_m)$ funkciyanıń $x_2 \rightarrow a_2$ ge (basqa barlıq ózgeriwshiler tayınlangan) limiti

$$\lim_{x_2 \rightarrow a_2} \varphi_1(x_2, x_3, \dots, x_m) = \varphi_2(x_3, x_4, \dots, x_m)$$

di qarayiq.

Joqarıdağıday izbe-iz $x_3 \rightarrow a_3, x_4 \rightarrow a_4, \dots, x_m \rightarrow a_m$ ge limitke ótip

$$\lim_{x_m \rightarrow a_m} \lim_{x_{m-1} \rightarrow a_{m-1}} \dots \lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

di hasıl qılamız. Bul limit $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciyanıń **tákırarlanıwshı limiti** delinedi.

Demek, funkciyanıń tákırarlanıwshı limiti onıń argumentleri $x_1, x_2, \dots, x_m$ lerdiń hár biriniń izbe-iz sáykes $a_1, a_2, \dots, a_m$ sanlarına umılǵandağı limitinen ibarat.

Joqarıdağıday $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciyanıń $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ argumentleri sáykes $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ lerge umılǵandağı tákırarlanıwshı limiti

$$\lim_{x_{i_k} \rightarrow a_{i_k}} \dots \lim_{x_{i_1} \rightarrow a_{i_1}} f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

di de qaraw múmkin.

Sonıda aytıp ótiw kerek, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciya argumentleri $x_1, x_2, \dots, x_m$ ler sáykes $a_1, a_2, \dots, a_m$ sanlarǵa túrli tártipte umılǵanda funkciyanıń túrli tákırarlanıwshı limitler payda boladı.

Mısallar. 1. Usı paragraftıń 2-punktinde keltirilgen

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \text{eger } x_1^2 + x_2^2 > 0 \text{ bolsa,} \\ 0, & \text{eger } x_1^2 + x_2^2 = 0 \text{ bolsa,} \end{cases}$$

funkciyanıń limiti

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} f(x_1, x_2) = 0$$

bolatuǵının kórsetken edik. Bul funkciyanıń takırarlanıwshı limitleri bar hám olarda 0 ge teń. Haqıyqattan da

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = 0, \quad \lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) = 0.$$

Sunday-aq

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = 0, \quad \lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) = 0.$$

Demek, berilgen funkciyanıń tákırarlanıwshı limitleri bar hám olar bir-birine teń bolıp, bul tákırarlanıwshı limitler funkciyanıń (eseli) limitine teń boladı.

2. Mına

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 3x_2}, & \text{eger } x_1 + 3x_2 \neq 0 \text{ bolsa,} \\ 0, & \text{eger } x_1 + 3x_2 = 0 \text{ bolsa} \end{cases}$$

funkciyanı qarayıq. Bul funkciyanıń tákırarlanıwshı limitleri tómendegishe:

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 3x_2} = -\frac{1}{3}, \quad \lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 3x_2} = -\frac{1}{3},$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 3x_2} = 2, \quad \lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 3x_2} = 2.$$

Demek, berilgen funkciyanıń tákirarlanıwshı limitleri bar bolıp, olardıń birewi $-\frac{1}{3}$ ge, ekinshisi bolsa 2 ge teń.

Biraq $x = x_1, x_2 \rightarrow (0, 0)$ ge $f(x_1, x_2)$ funkciyasınıń (eseli) limiti bar bolmaydı. Sebebi $(0, 0)$ noqatına umtılwshı eki

$$x^{(n)} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \rightarrow (0, 0)$$

$$\frac{-n}{x} = \left(\frac{5}{n}, \frac{4}{n} \right) \rightarrow (0, 0)$$

izbe-izlikler alınsa, olar ushın sáykes túrde

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{4}, \quad f\left(\frac{5}{n}, \frac{4}{n}\right) = \frac{6}{17} \rightarrow \frac{6}{17}$$

boladı. Bul $x_1, x_2 \rightarrow (0, 0)$ ge berilgen funkciyanıń (eseli) limit bar bolmaytuǵının bildiredi.

3. Tómendegi

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 \cdot x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2 + x_1 - x_2}$$

funkciyanıń tákirarlanıwshı limitleri

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{x_1^2 \cdot x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2 + x_1 - x_2} = 0, \quad \lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{x_1^2 \cdot x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2 + x_1 - x_2} = 0,$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{x_1^2 \cdot x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2 + x_1 - x_2} = 0, \quad \lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{x_1^2 \cdot x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2 + x_1 - x_2} = 0$$

boladı. Demek, berilgen funkciyanıń takirarlanıwshı limitleri bar hám olar bir-birine teń eken. Biz joqarıda bul funkciyanıń $x_1, x_2 \rightarrow (0, 0)$ ge (eseli) limiti bar bolmaytuǵının kórsetken edik.

4. Mına

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2 \sin \frac{1}{x_1}, & \text{eger } x_1 \neq 0 \text{ bolsa,} \\ 0, & \text{eger } x_1 = 0 \text{ bolsa} \end{cases}$$

funkciyanı qarayıq. Bul funkciya ushın

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) = x_1, \quad \lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) = 0$$

bolıp, $\lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, x_2)$ - bar bolmaydı. Demek, berilgen bir takirarlanıwshı limiti bar bolıp, ekinshi takirarlanıwshı limiti bar bolmaydı. Lekin

$$|f(x_1, x_2) - 0| = \left| x_1 + x_2 \sin \frac{1}{x_1} \right| \leq |x_1| + |x_2| \quad (x_1 \neq 0)$$

qatnasınan $(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)$ ge $f(x_1, x_2)$ funkciyasınıń (eseli) limiti bar hám

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} f(x_1, x_2) = 0$$

bolatuǵını kelip shıǵadı.

5. Tómendegi

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2) \cdot \sin \frac{1}{x_1} \cdot \sin \frac{1}{x_2}$$

funkciyanı qarayıq. Bul funkciyanıń $x_1 \rightarrow 0$ ge limiti bar bolmaydı. Sebebi nól'ge umtılıwshı eki

$$x_1^{(n)} = \frac{1}{n\pi} \rightarrow 0, \quad x_1^{-(n)} = \frac{2}{(4n+1)\pi} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

izbe-izlikler alınsa, olar ushın sáykes túrde ($x_2 \neq 0$)

$$f\left(\frac{1}{n\pi}, x_2\right) \rightarrow 0, \quad f\left(\frac{2}{(4n+1)\pi}, x_2\right) \rightarrow x_2 \cdot \sin \frac{1}{x_2}$$

boladı.

Usıǵan uqsas kórsetiw múmkin

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0} f(x_1, x_2)$$

bar bolmaydı. Lekin

$$|f(x_1, x_2) - 0| = |(x_1 + x_2) \sin \frac{1}{x_1} \cdot \sin \frac{1}{x_2}| \leq |x_1| + |x_2|$$

teńsizliginen $(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)$ ge $f(x_1, x_2)$ funkciyasınıń (eseli) limiti bar hám

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} f(x_1, x_2) = 0$$

bolatuǵının tabamız.

Joqarıda keltirilgen mısallardan kórinip turǵanday funkciyanıń bazı bir noqatı eseli limitiniń bar bolıwınan, onıń usı noqatta tákirarlanıwshı limitiniń bar bolıwı hám kerisinshe, funkciyanıń bazı bir noqatta tákirarlanıwshı limitleriniń bar bolıwınan onıń usı noqatta eseli limitiniń bar bolıwı kelip shıǵa bermeydi eken. Jáne de funkciyanıń tákirarlanıwshı limitleri bir-birine mudamı teń bola bermeydi eken.

Biz tómende funkciyanıń eseli hám tákirarlanıwshı limitleri arasındaǵı baylanıs hám de olardıń málim shártlerde óz-ara teńligi haqqındaǵı teoremanı dálilleybiz.

$f(x_1, x_2)$ funkciya

$M = (x_1, x_2) \in R^2 : |x_1 - x_1^0| < a_1, |x_2 - x_2^0| < a_2$ kóplikte berilgen bolsın.

1-teorema. Eger 1) $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^0, x_2^0)$ ge $f(x_1, x_2)$ funkciyanıń eseli limiti bar:

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_1^0 \\ x_2 \rightarrow x_2^0}} f(x_1, x_2) = b$$

2) hár bir alıńǵan x_1 de tómendegi

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} f(x_1, x_2) = \varphi(x_1)$$

limit bar bolsa, onda

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} f(x_1, x_2)$$

tákirarlanıwshı limitide bar bolıp

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} f(x_1, x_2) = b$$

boladı.

Dálil. $f(x_1, x_2)$ funkciya $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^0, x_2^0)$ ge eseli

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_1^0 \\ x_2 \rightarrow x_2^0}} f(x_1, x_2) = b$$

limitke iye bolsın. Limittiń anıqlamasına muwapıq $\forall \varepsilon > 0$ sanı alıńanda da, sonday $\delta > 0$ tabılıp, mına

$$(x_1, x_2) \in R^2 : |x_1 - x_1^0| < \delta, \quad |x_2 - x_2^0| < \delta \subset M$$

kópliktiń barlıq (x_1, x_2) noqatları ushın

$$|f(x_1, x_2) - b| < \varepsilon \quad (2)$$

boladı. Endi teoremaniń 2) shártin itibarǵa alıp, x_1 ózgeriwshisiniń $|x_1 - x_1^0| < \delta$ teńsizligin qanaatlandırıwshı mánisin tayınlap $x_2 \rightarrow x_2^0$ ge (2) teńsizlikte limitke ótip

$$|\varphi(x_1) - b| \leq \varepsilon$$

di tabamız. Demek, $\forall \varepsilon > 0$ sanı alıńanda da, sonday $\delta > 0$ tabılıp, $|x_1 - x_1^0| < \delta$ bolǵanda $|\varphi(x_1) - b| \leq \varepsilon$ boladı. Bul $\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \varphi(x_1) = b$ bolatuǵının bildiredi.

Keyingi qatnastan

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} f(x_1, x_2) = b$$

bolatuǵını kelip shıǵadı. Teorema dálillendi.

Tómendegi teorema usıǵan uqsas dálillenedi.

2-teorema. Eger 1) $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^0, x_2^0)$ ge $f(x_1, x_2)$ funkciyanıń eseli limiti bar:

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_1^0 \\ x_2 \rightarrow x_2^0}} f(x_1, x_2) = b$$

2) Hár bir tayınlap alıńǵan x_2 de tómendegi

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} f(x_1, x_2) = f(x_2)$$

limit bar bolsa, onda

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} f(x_1, x_2)$$

tákirarlanıwshı limiti bar bolıp,

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} f(x_1, x_2) = b$$

boladı.

1-nátiyje. Eger bir waqıtta 1-hám 2-teoremalardıń shártleri orınlansa, onda

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_1^0 \\ x_2 \rightarrow x_2^0}} f(x_1, x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} f(x_1, x_2)$$

boladı.

Biz eki ózgeriwshi funkciyanıń eseli hám tákirarlanıwshı limitleri arasındaǵı baylanıstı kórsetetuǵın teoremalardı keltirdik.

Joqarıdaǵıday $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciyanıń $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ ózgeriwshileri boyınsha

$$\lim_{\substack{x_{i_1} \rightarrow x_{i_1}^0 \\ x_{i_2} \rightarrow x_{i_2}^0 \\ \dots \dots \dots \\ x_{i_k} \rightarrow x_{i_k}^0}} f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

eseli hám

$$\lim_{x_{i_1} \rightarrow x_{i_1}^0} \lim_{x_{i_2} \rightarrow x_{i_2}^0} \dots \lim_{x_{i_k} \rightarrow x_{i_k}^0} f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

tákirarlanıwshı limitleri hám olar arasındaǵı baylanıstı qaraw múmkin.

6. Koshi teoreması (jiynaqlılıq principı). Endi kóp ózgeriwshili funksiya limitiniń bar bolıwı haqqındaǵı ulıwma teoremanı keltiremiz.

R^m keńislikte M kóplik berilgen bolıp, $a \in R^m$ onıń limit noqatı bolsın.

Bul kóplikte $f(x)$ funksiya berilgen.

9-anıqlama. Eger $\forall \varepsilon > 0$ sanı ushın sonday $\delta > 0$ tabılıp, mına $0 < \rho(\bar{x}, a) < \delta$, $0 < \rho(x, a) < \delta$ teńsizliklerin qanaatlandıırıwshı barlıq x hám $\bar{x}$ ($x \in M, \bar{x} \in M$) noqatlarda

$$|f(\bar{x}) - f(x)| < \varepsilon$$

teńsizlik orınlı bolsa, $f(x)$ funksiya ushın a noqatında Koshi shárti orınlanadı delinedi.

3-teorema (Koshi teoreması). $f(x)$ funksiya a noqatında shekli limitke iye bolıwı ushın a noqatında Koshi shártiniń orınlı bolıwı zárúr hám jetkilikli.

Dálil. Zárúrligi. $x \rightarrow a$ ǵa $f(x)$ funksiya shekli limit

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

ǵa iye bolsın. Anıqlamaǵa muwapıq, $\forall \varepsilon > 0$ sanı alıńanda da, $\frac{\varepsilon}{2}$ ushın sonday $\delta > 0$ tabılıp, mına $0 < \rho(x, a) < \delta$ teńsizligin qanaatlandıırıwshı barlıq x ($x \in M$) noqatlarda

$$|f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2},$$

sonlıqtan $0 < \rho(\bar{x}, a) < \delta \Rightarrow |f(\bar{x}) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ boladı. Bul teńsizliklerden

$$|f(\bar{x}) - f(x)| \leq |f(\bar{x}) - b| + |f(x) - b| < \varepsilon$$

bolatuǵını kelip shıǵadı. Bul $f(x)$ funksiya ushın a noqatında Koshi shártiniń orınlanatuǵının kórsetedi.

Jetkilikligi. $f(x)$ funkciya ushın a noqatta Koshi shártı orınlansa, yaǵnıy $\forall \varepsilon > 0$ san alıńanda da sonday $\delta > 0$ tabılıp, mına $0 < \rho(x) < \delta$, $0 < \rho(\bar{x}, a) < \delta$ teńsizliklerin qanaatlandıırıwshı barlıq x hám $\bar{x}$ ($x, \bar{x} \in M$) noqatlarda

$$|f(\bar{x}) - f(x)| < \varepsilon$$

bolsın. Bul jaǵdayda $f(x)$ funkciya $x \rightarrow a$ ǵa shekli limitke iye bolatuǵının kórsetemiz.

a noqat M kópliktiń limit noqatı. Sonıń ushın M kópliktiń noqatlarınan $x^{(n)}$ ($x^{(n)} \neq a$, $n = 1, 2, \dots$) izbe-izlik dúziw múmkin, bunda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a$$

boladı. Limit anıqlamasına muwapıq, joqarıda keltirilgen $\delta > 0$ ge muwapıq sonday $n_0 \in N$ tabılıp, barlıq $n > n_0$, $p > n_0$ ushın $0 < \rho(x^{(n)}, a) < \delta$, $0 < \rho(x^{(p)}, a) < \delta$ boladı. Bul teńsizliklerdiń orınlanıwınan, shártke muwapıq:

$$|f(x^{(p)}) - f(x^{(n)})| < \varepsilon$$

boladı. Demek, $f(x^{(n)})$ – fundamental’ izbe-izlik 2-§ de keltirilgen 12.4-teoremaǵa muwapıq $f(x^{(n)})$ – izbe-izlik jıynaqlı. Bul izbe-izliktiń limitin b menen belgileyik:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = b$$

Endi M kópliktiń noqatlarınan dúzilgen hám a noqatına umtılatuǵın ıqtıyarlı $\{\bar{x}^{(n)}\}$ izbe-izlik

$$\bar{x}^{(n)} \rightarrow a \quad \bar{x}^{(n)} \neq a, \quad n = 1, 2, \dots,$$

alıńanda da sáykes $f(\bar{x}^{(n)})$ izbe-izlik (bul joqarıda kórsetkenimizge muwapıq jıynaqlı boladı) te sol b ǵa umtılatuǵınlıǵın kórsetemiz.

Meyli $\bar{x}^{(n)} \rightarrow a$ ($\bar{x}^{(n)} \neq a$, $n = 1, 2, \dots$) bolǵanda

$$f(\bar{x}^{(n)}) \rightarrow b'$$

bolsın.

$\{x^{(n)}\}$, $\{\bar{x}^{(n)}\}$ izbe-izlik aǵzalarınan mına

$$x^{(1)}, \bar{x}^{(1)}, x^{(2)}, \bar{x}^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \bar{x}^{(n)}, \dots$$

izbe-izlik dúzeyik. Bul izbe-izliktiń a ($a \in R^m$) ǵa umtılatuǵınlıǵı ayqın. Onda

$$f(x^{(1)}), f(\bar{x}^{(1)}), f(x^{(2)}), f(\bar{x}^{(2)}), \dots, f(x^{(n)}), f(\bar{x}^{(n)}), \dots \quad (3)$$

izbe-izlik shekli limitke iye. Onı b^* arqalı belgileyik. Eger $f(x^{(n)})$ hám $\{f(\bar{x}^{(n)})\}$

izbe-izliklerdiń hár biri (3) izbe-izliklerdiń úles izbe-izlikleri ekenligin itibarǵa alsaq, onda

$$f(x^{(n)}) \rightarrow b^*, \quad f(\bar{x}^{(n)}) \rightarrow b^*$$

ekenligin tabamız. Demek,

$$b^* = b = b'.$$

Solay etip, $f(x)$ funkciya ushın a noqatta Koshi shártleriniń orınlı bolıwınan M kóplik noqatlarınan dúzilgen hám a ǵa umtılwshı qálegen $x^{(n)}$

$x^{(n)} \neq a, \quad n = 1, 2, \dots$ izbe-izlik alıńanda, sáykes $f(x^{(n)})$ izbe-izlik bir sanǵa umtılwın tabıń. Bul funkciya limitiniń Geyne anıqlamasına muwapıq $f(x)$ funkciya a noqatta shekli limitke iye bolatuǵının bildiredi. Teorema dálillendi.

12.5-eskertiw. Koshi shárti hám Koshi teoreması $x \rightarrow \infty$ ke joqarıdaǵıǵa uqsas aytıladı hám dálillenedi.

8-lekciya

Kóp ózgeriwshili funkciyalardıń úzliksizlik anıqlamaları. Kóp ózgeriwshili úzliksiz funkciyanıń qásiyetleri. Quramalı funkciyanıń úzliksizligi. Kóp ózgeriwshili funkciyanıń aralıq mánisleri haqqında teoremlar. Veyershtass teoremları. Teń ólshewli úzliksizlik hám Kantor teoreması

Funkciya úzliksizliginiń anıqlamaları. $M \subset R^m$ kóplikte

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

funkciya berilgen bolıp, $a \in M$ $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ noqat M kópliktiń limit noqatı bolsın.

1-anıqlama. Eger $x \rightarrow a$ ға $f(x)$ funkciyanıń limiti bar bolıp

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ x_2 \rightarrow a_2 \\ \dots \\ x_m \rightarrow a_m}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

(*)

bolsa, $f(x)$ funkciya a **noqatta úzliksiz** dep ataladı.

Mısal. Mına

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \text{eger } x_1^2 + x_2^2 \neq 0 \text{ bolsa,} \\ 0, & \text{eger } x_1^2 + x_2^2 = 0 \text{ bolsa} \end{cases}$$

funkciyanı qarayıq. Bul funkciyanıń ıqtıyarlı $(x_1^0, x_2^0) \neq (0, 0)$ noqatta úzliksiz bolıwın funkciya limitiniń qásiyetlerinen paydalanıp tabamız:

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_1^0 \\ x_2 \rightarrow x_2^0}} f(x_1, x_2) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_1^0 \\ x_2 \rightarrow x_2^0}} \frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{x_1^0 x_2^0}{\sqrt{(x_1^0)^2 + x_2^2}} = f(x_1^0, x_2^0)$$

Usı baptıń 3-§ de keltirilgen mısılǵa muwapıq

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} f(x_1, x_2) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} \frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = 0 = f(0, 0)$$

bolıp, bunnan berilgen funkciyanıń $(0, 0)$ noqatta da úzliksiz ekenligi kelip shıǵadı. Demek qaralıp atırǵan funkciya R^2 kóplikte úzliksiz.

Solay etip funkciyanıń úzliksizligi onıń limit arqalı anıqlanadı eken. Funkciyanıń limiti bolsa óz náwbetinde Geyne hám Koshi anıqlamalarına iye. Usını itibarǵa alıp, funkciya úzliksizliginiń Geyne hám Koshi anıqlamaların keltiriw múmkin.

2-anıqlama (Geyne anıqlaması) Eger $M \subset R^m$ kópliktiń noqatlarınan dúzilgen, a ($a \in M$) ға umtılıwshı qálegen $x^{(n)}$ izbe-izlik alıńanda da, sáykes $f(x^{(n)})$ izbe-izlik barlıq waqıtta $f(a)$ ға umtılsa, $f(x)$ funkciya a **noqatta úzliksiz** dep ataladı.

3-anıqlama (Koshi anıqlaması) Eger $\forall \varepsilon > 0$ sanı ushın sonday $\delta > 0$ tabılıp, mına $\rho(x, a) < \delta$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı barlıq $x \in M$ noqatlarda

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

teńsizlik orınlansa, $f(x)$ funkciya a **noqatta úzliksiz** delinedi.

Dóğerek túsiniǵı járdeminde funkciyanıń úzliksizligin tómendegishe anıqlaw múmkin.

4-anıqlama. Eger $\forall \varepsilon > 0$ san ushın, sonday $\delta > 0$ tabılıp, barlıq $x \in U_\delta(a) \cap M$ noqatlarda $f(x)$ funkciyanıń mánisleri $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$ bolsa, yaǵnıy

$$x \in U_\delta(a) \cap M \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$$

bolsa, $f(x)$ funkciya a **noqatta úzliksiz** dep ataladı.

$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funksiyanıń $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ noqatta úzliksizligin funksiya ósimi járdeminde de anıqlaw múmkin. Funkciya argumentleriniń ósimleri

$$\Delta x_1 = x_1 - a_1, \quad \Delta x_2 = x_2 - a_2, \quad \dots, \quad \Delta x_m = x_m - a_m$$

ge sáykes mına

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= f(x_1, x_2, \dots, x_m) - f(a_1, a_2, \dots, a_m) = \\ &= f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, \dots, a_m + \Delta x_m) - f(a_1, a_2, \dots, a_m) \end{aligned} \quad (*)$$

ayırma $f(x)$ funksiyanıń a noqattaǵı **tolıq ósimi** dep ataladı hám Δf yamasa $\Delta f(a)$ dep belgilenedi:

$$\Delta f(a) = f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, \dots, a_m + \Delta x_m) - f(a_1, a_2, \dots, a_m)$$

Tómendegi

$$\begin{aligned} &f(a_1 + \Delta x_1, a_2, \dots, a_m) - f(a_1, a_2, \dots, a_m) \\ &f(a_1, a_2 + \Delta x_2, a_3, \dots, a_m) - f(a_1, a_2, \dots, a_m) \\ &f(a_1, a_2, \dots, a_m + \Delta x_m) - f(a_1, a_2, \dots, a_m) \end{aligned}$$

ayırmalar $f(x)$ funksiyanıń a noqattaǵı **dara ósimleri** delinedi hám olar sáykes túrde $\Delta_{x_1} f, \Delta_{x_2} f, \dots, \Delta_{x_m} f$ dep belgilenedi.

Joqarıdaǵı (*) limit qatnasınan tabamız:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = 0$$

Nátiyjede (*) teńlik tómendegi

$$\lim_{x \rightarrow a} \Delta f(a) = 0, \quad \text{yaǵnıy} \quad \lim_{\substack{\Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \Delta x_2 \rightarrow 0 \\ \dots \\ \Delta x_m \rightarrow 0}} \Delta f(a) = 0$$

kóriniske keledi. Demek, $f(x)$ funksiyanıń a noqattaǵı úzliksizligi

$$\lim_{x \rightarrow a} \Delta f(a) = 0, \quad \left(\lim_{\substack{\Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \Delta x_2 \rightarrow 0 \\ \dots \\ \Delta x_m \rightarrow 0}} \Delta f(a) = 0 \right)$$

kórinisinde anıqlanıwı múmkin eken.

5-anıqlama. Eger $f(x)$ funksiya M ($M \subset R^m$) kópliktiń hár bir noqatında úzliksiz bolsa, funksiya usı **M kóplikte úzliksiz** dep ataladı.

Biz joqarıda keltirilgen kóp ózgeriwshili funksiyalardıń úzliksizligi olardıń barlıq ózgeriwshileri boyınsha úzliksizligin, yaǵnıy birjola úzliksizligin ańlatadı.

Áwelgidey $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funksiya $M \subset R^m$ kóplikte berilgen bolsın. Berilgen funksiyanıń bazıbir x_k $k = 1, 2, \dots, m$ argumentinen basqa barlıq argumentlerin tayınlap, bul x_k argumentke Δx_k ósim bereyik, bunda

$$x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_m \in M$$

bolsın. Nátiyjede $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funksiya

$$\Delta_{x_k} f = f(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) - f(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad k = 1, 2, \dots, m$$

dara ósimge iye bolamız.

Eger $\Delta x_k \rightarrow 0$ ge funkciyanıń dara ósımı $\Delta_{x_k} f$ de nol'ge umtılsa, yaǵnıy

$$\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \Delta_{x_k} f = 0$$

bolsa, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciya $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ noqatında x_k **ózgeriwshisi boyınsha úzliksiz** dep ataladı. Ádette funkciyanıń bunday úzliksizligi, onıń hár bir ózgeriwshisi boyınsha **dara úzliksizligi** dep ataladı.

Demek, kóp ózgeriwshili funkciyanıń hár bir ózgeriwshisi boyınsha dara úzliksizligi, bir ózgeriwshili funkciya úzliksizliginiń dál ózi eken.

Eger $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciya $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in M$ noqatta (bir jola) úzliksiz bolsa, funkciya usı noqatta hár bir ózgeriwshisi boyınshada dara úzliksiz boladı. Haqıyqattan da $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciya $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in M$ noqatta úzliksiz bolsın. Anıqlamaǵa muwapıq

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \Delta x_2 \rightarrow 0 \\ \dots \\ \Delta x_m \rightarrow 0}} \Delta f = \lim_{\substack{\Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \Delta x_2 \rightarrow 0 \\ \dots \\ \Delta x_m \rightarrow 0}} \left| f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, \dots, x_m^0) \right| = 0$$

boladı.

Dara jaǵdayda

$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_{k-1} = \Delta x_{k+1} = \dots = \Delta x_m = 0, \quad \Delta x_k \neq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m)$ bolǵanda

$$\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \Delta x_k f = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \left| f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k^0 + \Delta x_k, x_{k+1}^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \right| = 0$$

boladı. Bul berilgen funkciyanıń $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ noqatta x_k ($k = 1, 2, \dots, m$) ózgeriwshisi boyınsha dara úzliksiz bolatuǵının bildiredi.

1-eskertiw. $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciyanıń bazıbir noqatta hár bir ózgeriwshisi boyınsha dara úzliksiz bolıwınan onıń usı noqatta (bir jola) úzliksiz bolıwı bárqulla kelip shıǵa bermeydi. Máselen mına

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{2x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{eger } x_1^2 + x_2^2 \neq 0 \text{ bolsa,} \\ 0, & \text{eger } x_1^2 + x_2^2 = 0 \text{ bolsa,} \end{cases}$$

funkciyanı qarayıq. Bul funkciyanıń hár bir ózgeriwshi boyınsha úzliksiz bolatuǵının kórsetemiz. $f(x_1, 0) = f(0, x_2) = 0$ ekenligi ayqın. Qálegen $(x_1, x_2) \in R^2$ noqat alıp, onda x_2 ózgeriwshini tayınlap qoyamız.

Eger $x_2 \neq 0$ hám $x_1 \rightarrow x_1^0 \neq 0$ bolsa,

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \frac{2x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{2x_1^0x_2}{(x_1^0)^2 + x_2^2} = f(x_1^0, x_2)$$

boladı.

Eger $x_2 = 0$ hám $x_1 \rightarrow x_1^0 \neq 0$ bolsa,

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} f(x_1, 0) = 0 = f(x_1^0, 0)$$

boladı.

$$\text{Eger } x_2 = 0 \quad \text{hám } x_1 \rightarrow x_1^0 = 0 \text{ bolsa,}$$

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, 0) = 0 = f(0, 0)$$

boladı. Demek,

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} f(x_1, x_2) = f(x_1^0, x_2)$$

Bul berilgen $f(x_1, x_2)$ funkciya x_1 ózgeriwshisi boyınsha dara úzliksiz ekenligin bildiredi. Berilgen funkciyanıń x_2 ózgeriwshisi boyınsha dara úzliksiz bolıwı soǵan uqsas kórsetiledi. Demek $f(x_1, x_2)$ funkciya hár bir ózgeriwshisi boyınsha dara úzliksiz. Biraq bul funkciya $(0,0)$ noqatta úzliksiz emes. Bul noqatta funkciya hátte limitke de iye bolmaytuǵının kórseteyik. haqıyqattan da $(0,0)$

noqatına umılatuǵın tómendegi eki $\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}$ hám $\left\{\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}$ izbe-izlikler:

$$\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\} \rightarrow (0,0), (n \rightarrow \infty)$$

$$\left\{\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right\} \rightarrow (0,0), (n \rightarrow \infty)$$

alıńanda, olarǵa sáykes keletuǵın funkciya mánislerinen ibarat $\left\{f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}$ hám

$\left\{f\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}$ izbe-izlikler ushın

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = 1 \rightarrow 1, \quad f\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{4}{5} \rightarrow \frac{4}{5}$$

boladı.

Biz joqarıda kóp ózgeriwshili $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciyanıń hár bir x_k ($k = 1, 2, \dots, m$) ózgeriwshisi boyınsha dara úzliksizligi túsiniǵı menen tanıstıq, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciyanıń $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ ózgeriwshileri boyınsha úzliksizligi usıǵan uqsas anıqlanadı.

7-anıqlama. Eger $x \rightarrow a$ ǵa $f(x)$ funkciyasınıń limiti bar bolmasa yamasa

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty,$$

yamasa funkciyanıń limiti bar, shekli bolıp,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq f(a)$$

bolsa, onda funkciya a **noqatta úziliske iye** delinedi.

Mısallar. 1. Mına

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1^2 + x_2^2, & \text{eger } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \text{ bolsa,} \\ 1, & \text{eger } (x_1, x_2) = (0, 0) \text{ bolsa} \end{cases}$$

funkciyanı qarayıq. Bul funksiya R^2 kóplikte berilgen bolıp, onıń $(0,0)$ noqattaǵı limiti

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} f(x_1, x_2) = 0 \neq f(0,0) = 1$$

boladı. Demek berilgen funksiya $(0,0)$ noqatta úziliske iye.

2. Usı bapnıń 1-§ inde keltirilgen

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{eger } (x_1, x_2) \neq (0,0) \text{ bolsa,} \\ 0, & \text{eger } (x_1, x_2) = (0,0) \text{ bolsa} \end{cases}$$

funksiya úziliske iye, sebebi

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} f(x_1, x_2) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} = +\infty$$

3. Tómendegi

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 - 1}, & \text{eger } x_1^2 + x_2^2 \neq 1 \text{ bolsa,} \\ 0, & \text{eger } x_1^2 + x_2^2 = 1 \text{ bolsa} \end{cases}$$

funksiya $x_1, x_2 \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1$ kópliktiń hár bir noqatında úziliske iye boladı, sebebi $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^0, x_2^0)$, $(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2 = 1$ de $f(x_1, x_2)$ funksiyanıń shekli limiti bar bolmaydı.

4. Mina

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 3x_2}, & \text{eger } x_1 + 3x_2 \neq 0 \text{ bolsa,} \\ 1, & \text{eger } x_1 + 3x_2 = 0 \text{ bolsa} \end{cases}$$

funksiya $(0,0)$ noqatta úziliske iye, sebebi $x_1, x_2 \rightarrow (0,0)$ ge berilgen funksiyanıń limiti bar bolmaydı (qaralsın 41-bet).

Joqarıda keltirilgen mısallardan $f(x_1, x_2)$ funksiya tegisliktiń ayırım noqatlarında yamasa tegisliktegi bazıbir sıızıqtıń barlıq noqatlarında (yaǵnıy sıızık boylap) úziliwi múmkin ekenligi kórinedi.

Úzliksiz funksiyalar ústinde arifmetikalıq ámeller. **Quramalı funksiyanıń úzliksizligi.** Endi úzliksiz funksiyalardıń qosındısı, ayırması, kóbeymesi hám qatnasınıń úzliksizligi máselesin úyrenemiz.

1-teorema. Eger $f_1(x)$ hám $f_2(x)$ funksiya lardıń hár biri $M \subset R^m$ kóplikte berilgen bolıp, olar $a \in M$ noqatta úzliksiz bolsa,

$$f_1(x) \pm f_2(x), \quad f_1(x) \cdot f_2(x) \quad \text{jáne de} \quad \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \quad (f_2(a) \neq 0)$$

funksiya larda usı noqatta úzliksiz boladı.

Dálil. Bul teoremanıń dálili tiykarınan limitke iye bolǵan funksiya larda ústindegi arifmetikalıq ámeller haqqındaǵı maǵlıwmatlardan (usı bapnıń 3-§ degi 5°, 6° hám 7°-qásiyetleri) tikkeley kelip shıǵadı. Onı limitke iye bolǵan funksiyanıń

qásiyetleri (3-§ degi 1°- hám 2°- qásiyetleri) hám berilgen funkciyanıń noqatta úzliksizliginen paydalanıpta dálillew múmkin. Biz tómende eki funkciya qatnasınıń úzliksiz bolıwın kórsetemiz. $f_1(x)$ hám $f_2(x)$ funkciyanıń hár biri a noqatta úzliksiz bolıp, $f_2(a) \neq 0$ bolsın. Ayqın $x \rightarrow a$ ğa $f_1(x)$ hám $f_2(x)$ funkciyalar sáykes $f_1(a), f_2(a)$ limitlerine iye:

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = f_1(a), \quad \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = f_2(a) \quad (f_2(a) \neq 0),$$

Bul jaǵdayda usı baptıń 3-§ indegi 2°-qásiyeti boyınsha a noqatınıń jetkilikli kishi dógeregi $U_{\delta_1}(a) = \{x \in R^m : \rho(x, a) < \delta_1\}$ de $f_1(x)$ hám $f_2(x)$ funkciyalar shegaralanǵan boladı:

$$m_1 < f_1(x) < M_1, \quad m_2 < f_2(x) < M_2 \quad x \in U_{\delta_1}(a),$$

bunda m_1, M_1 hám m_2, M_2 — ózgermes sanlar. Ekinshi tárepten $f_2(a) \neq 0$ bolǵanlıǵı sebepli 3-§ degi 1° qásiyetke muwapiq usı a noqatınıń jetkilikli kishi dógeregi $U_{\delta_2}(a) = \{x \in R^m : \rho(x, a) < \delta_2\}$ de $f_2(x) \neq 0$ boladı.

Endi mına

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{f_1(a)}{f_2(a)} \quad (x \in U_{\delta_2}(a))$$

ayırmanı qarayıq. Onı tómendegishe jazıp alamız:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{f_1(a)}{f_2(a)} = \frac{f_1(x)}{f_2(a) \cdot f_2(x)} (f_2(a) - f_2(x)) + \frac{1}{f_2(a)} (f_1(x) - f_1(a)),$$

Eger $\delta' = \min \delta_1, \delta_2$ dep alsaq, onda $\forall x \in U_{\delta'}(a)$ ushın

$$\left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{f_1(a)}{f_2(a)} \right| \leq \left| \frac{M_1}{m_2 \cdot f_2(a)} \right| \cdot |f_2(x) - f_2(a)| + \frac{1}{|f_2(a)|} |f_1(x) - f_1(a)| \quad (1)$$

boladı.

$f_1(x)$ hám $f_2(x)$ funkciyalardıń a noqatta úzliksizligine tiykarlanıp, $\forall \varepsilon > 0$ san alıńanda da, $\frac{|f_2(a)|}{2} \cdot \varepsilon$ ge kóre sonday $\delta'' > 0$ tabılıp, $\forall x \in U_{\delta''}(a)$ ushın

$$|f_1(x) - f_1(a)| < \frac{|f_2(a)|}{2} \varepsilon, \quad (2)$$

sonday-aq, usı $\varepsilon > 0$ alıńanda da, $\left| \frac{m_2 \cdot f_2(a)}{M_1} \right| \cdot \frac{\varepsilon}{2}$ ge kóre sonday $\delta''' > 0$ tabılıp,

$\forall x \in U_{\delta'''}(a)$ ushın

$$|f_2(x) - f_2(a)| < \left| \frac{m_2 \cdot f_2(a)}{M_1} \right| \frac{\varepsilon}{2} \quad (3)$$

boladı. Eger $\delta = \min \delta', \delta'', \delta'''$ dep alınsa, onda $\forall x \in U_{\delta}(a)$ ushın joqarıdaǵı (1), (2) hám (3) qatnaslar bir jola orınlı bolıp, nátiyjede mına

$$\left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{f_1(a)}{f_2(a)} \right| < \varepsilon$$

teńsizlikke iye bolamız. Bul bolsa $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ funkciyanıń a noqatta úzliksiz ekenligin bildiredi.

Dál usı jol menen teoremanıń qalǵan bólekleride dálillenedi.

2-eskertiw. Eki funkciya qosındısı, ayırması, kóbeymesi hám qatnası úzliksiz bolıwınan bul funkciyalardıń hár biriniń úzliksiz bolatuǵını kelip shıǵa bermeydi.

Mısal. Mina $D = \{x_1, x_2 \in R^2 : |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\} \subset R^2$ kvadratin alıp, onıń racional noqatları (yaǵnıy hár eki koordinataları racional san bolǵan noqatları) kópligin D_p menen belgileymiz. Bul D kóplikte tómendegi

$$f_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{eger } (x_1, x_2) \in D_p \text{ bolsa,} \\ 0, & \text{eger } (x_1, x_2) \in D \setminus D_p \text{ bolsa} \end{cases}$$

jánede

$$f_2(x_1, x_2) = \begin{cases} -1, & \text{eger } (x_1, x_2) \in D_p \text{ bolsa,} \\ 0, & \text{eger } (x_1, x_2) \in D \setminus D_p \text{ bolsa} \end{cases}$$

funkciyalardı qarayıq. Bul funkciyalar qosındısı $f_1(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2) = 0$ ($\forall (x_1, x_2) \in D$) bolıp, ol usı kóplikte úzliksiz bolsada, $f_1(x_1, x_2)$, $f_2(x_1, x_2)$ funkciyalardıń hár biri D da úzliksiz emes.

Joqarıda keltirilgen teorema qosılıwshılar hám kóbeytiwshiler sanı qálegen shekli bolǵan jaǵdayda da orınlı bolatuǵının kórsetiw qıyın emes.

Endi quramalı funkciyanıń úzliksizligi haqqındaǵı teoremanı keltiremiz.

Meyli, $M \subset R^m$ kóplikte $y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciya berilgen bolıp, $x_1, x_2, \dots, x_m$ lerdiń hár biri $T \subset R^k$ ($k \in N$) kóplikte berilgen funkciyalar bolsın:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t) = \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k) \\ x_2 &= \varphi_2(t) = \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k) \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \\ x_m &= \varphi_m(t) = \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k) \end{aligned}$$

Biz $t = (t_1, t_2, \dots, t_k) \in T$ bolǵanda oǵan sáykes $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in M$ dep qaraymız. Bul funkciyalar járdeminde

$y = f(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k)) = \Phi(t_1, t_2, \dots, t_k) = \Phi(t)$ quramalı funkciyanı dúzemiz (qaralsın, 33-bet).

2-teorema. Eger $\phi_i(t) = \phi_i(t_1, t_2, \dots, t_k)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) funkciyalarınıń hár biri $t^0 = (t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ noqatta úzliksiz bolıp, $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciya bolsa $t^0 = (t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ noqatqa sáykes $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ ($x_1^0 = \varphi_1(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$, $x_2^0 = \varphi_2(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$, ..., $x_m^0 = \varphi_m(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$) noqatta úzliksiz bolsa, $y = \Phi(t) = \Phi(t_1, t_2, \dots, t_k)$ quramalı funkciya $t^0 = (t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ noqatta úzliksiz boladı.

$T \subset R^k$ kóplikte $t^0 = (t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ noqatına umtılıwshı qálegen

izbe-izlik alayıq. Onda Geyne anıqlamasına muvafiq

$$\left. \begin{array}{l} t_1^{(n)} \rightarrow t_1^0 \\ t_2^{(n)} \rightarrow t_2^0 \\ \dots \quad \dots \\ t_k^{(n)} \rightarrow t_k^0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1^{(n)} = \varphi_1(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots, t_k^{(n)}) \rightarrow \varphi_1(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0) = x_1^0 \\ x_2^{(n)} = \varphi_2(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots, t_k^{(n)}) \rightarrow \varphi_2(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0) = x_2^0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_m^{(n)} = \varphi_m(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots, t_k^{(n)}) \rightarrow \varphi_m(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0) = x_m^0 \end{array}$$

$y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciya $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ noqatta úzliksiz. Bul jaǵdayda jáne Geyne anıqlamasına muwapıq

$$\left. \begin{array}{l} x_1^{(n)} \rightarrow x_1^0 \\ x_2^{(n)} \rightarrow x_2^0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_m^{(n)} \rightarrow x_m^0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}) \rightarrow f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$$

$$\begin{aligned} & f(\varphi_1(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots, t_k^{(n)}), \varphi_2(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots, t_k^{(n)}), \dots, \varphi_m(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots, t_k^{(n)})) \rightarrow \\ & \rightarrow f(\varphi_1(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0), \varphi_2(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0), \dots, \varphi_m(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)). \end{aligned}$$

Kóp ózgeriwshili úzliksiz funkciyanıń qásiyetleri. Quramalı funkciyanıń úzliksizligi. Teń ólshewli úzliksizlik hám Kantor teoreması

Kóp ózgeriwshili úzliksiz funkciyalar da bir ózgeriwshili úzliksiz funkciyalardıń qásiyetlerine uqsas qásiyetlerge iye.

$f(x)$ funksiya M ($M \subset R^m$) kóplikte berilgen bolsın, M kóplikten bazıbir x^0 noqat alıp, bul noqatnıń usı kóplikke tiyisli bolǵan jetkilikli kishi dógeregın qaraymız. $f(x)$ funksiya x^0 noqatta úzliksiz bolsın. Bunday $f(x)$ funksiyanıń x^0 noqatınıń jetkilikli kishi dógeregindegi qásiyetlerin (lokal qásiyetlerin) úyrenemiz.

1°. Eger $f(x)$ funksiya $x^0 \in M$ nuqatda uzliksiz bolsa, onda x^0 nuqtatining jetkilikli kishi dogereginde funksiya shegaralangan boladi.

Dálil. Funksiya uzliksizligining aniqlamasina muvapiq

$$\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = f(x^0)$$

bolip, onnan $f(x)$ funksiyanı x^0 nuqatda shekli limitke iye ekenligi kelip shıgadı. Shekli limitke iye bolgan funksiyanın qásiyetlerinen (qarań, 38-bet), $f(x)$ funksiyanı x^0 nuqtatining jetkilikli kishi dogereginde shegaralanganlıgın tabamız.

2°. Eger $f(x)$ funksiya x^0 nuqatda uzliksiz bolip, $f(x^0) > 0$ ($f(x^0) < 0$) bolsa, x^0 nuqtatining jetkilikli kishi dogeregindegi x nuqatlarda $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) boladi.

Dálil. $f(x)$ funksiya x^0 nuqatda uzliksizligi aniqlamasina muvapiq $\forall \varepsilon > 0$ alınganda da sonday $\delta > 0$ tabılıp, barlıq $x \in U_\delta(x^0) \cap M$ nuqatlar ushın

$$f(x^0) - \varepsilon < f(x) < f(x^0) + \varepsilon$$

boladi. Bul jerde $\varepsilon = f(x^0) > 0$ (eger $f(x^0) < 0$ bolsa, $\varepsilon = -f(x^0)$ dep alsaq, pikirimizdiń dáliline iye bolamız.

Demek, $f(x)$ funksiya x^0 nuqtatında uzliksiz hám $f(x^0) \neq 0$ bolsa, x^0 nuqtatining jetkilikli kishi dogeregindegi x nuqatlarında funksiya mánislerining belgisi $f(x^0)$ diń belgisi menen bir qıylı bolar eken:

$$\text{sign } f(x) = \text{sign } f(x^0)$$

3°. Eger $f(x)$ funksiya x^0 nuqtatında uzliksiz bolsa, x^0 nuqtatining jetkilikli kishi dogereginde $x' \in M$, $x'' \in M$ nuqatlar ushın

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

teńsizlik orınlı boladı.

Dálil. $f(x)$ funksiyanın x^0 nuqatdağı uzliksizliginen, $\forall \varepsilon > 0$ alınganda da, $\frac{\varepsilon}{2}$ ushın sonday $\delta > 0$ tabılıp, barlıq $x \in U_\delta(x^0)$ nuqatlar ushın

$$|f(x) - f(x^0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

boladı. Sonlıqtan $x' \in U_\delta(x^0)$, $x'' \in U_\delta(x^0)$ nuqatlar ushında

$$|f(x') - f(x^0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(x'') - f(x^0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

teńsizlikler orınlı boladı. Keyingi teńsizliklerden bolsa $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ ekenligi kelip shıgadı.

2. Kóplikte uzliksiz bolgan funksiylardıń qásiyetleri (global qásiyetleri).

Endi $M \subset R^m$ kóplikte uzliksiz bolgan funksiylardıń qásiyetlerin (global qásiyetlerin), anıgırağı $f(x)$ funksiya mánislerinen ibarat $\{f(x) : x \in M\}$ kópliktiń qásiyetlerin úyrenemiz.

1-teorema (Bol'cano-Koshidiń birinshi teoreması)

$y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funksiya baylamli* $M \subset R^m$ kóplikte berilgen hám úzliksiz bolsın. Eger bul funksiya kópliktiń eki $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ hám $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ noqatlarında hár qıylı belgili mánislerge iye bolsa, onda sonday $c = (c_1, c_2, \dots, c_m) \in M$ noqat tabılıp, bul noqatta funksiya nol'ge aylanadı:

$$f(c) = f(c_1, c_2, \dots, c_m) = 0$$

Dáílil. Anıqlıq ushın $f(a) = f(a_1, a_2, \dots, a_m) < 0$, $f(b) = f(b_1, b_2, \dots, b_m) > 0$ bolsın. $M \subset R^m$ baylamli kóplik bolǵanı ushın bul a hám b noqatların tutastırıwshı hám M kóplikte jatatuǵın sınıq sızıq tabıladı. Bul sınıq sızıq ushları bolǵan noqatlarda $f(x)$ funksiylardıń mánislerin esaplap baramız. Bunda eki jaǵday payda boladı:

1) Sınıq sızıq ushlarıńń birewinde $f(x)$ funksiya nol'ge aylanadı. Bul jaǵdayda sınıq sızıqtıń sol ushın teoremaǵa c noqat dep alınsa, $f(c) = 0$ bolıp teorema dálillenedi.

2) Sınıq sızıq ushlarında $f(x)$ funksiya nol'ge aylanbaydı. Bul jaǵdayda sınıq sızıqtıń sonday kesindisi tabılıp, onıń ushlarında $f(x)$ funksiya mánisleri hár qıylı belgili boladı. Sınıq sızıqtıń usı ushlarıńń birewin $a' = (a'_1, a'_2, \dots, a'_m)$ menen, ekinshi ushın bolsa $b' = (b'_1, b'_2, \dots, b'_m)$ menen belgilesek, onda

$$f(a') = f(a'_1, a'_2, \dots, a'_m) < 0,$$

$$f(b') = f(b'_1, b'_2, \dots, b'_m) > 0$$

boladı. Sınıq sızıqtıń bul kesindisiniń teńlemesi mına

$$x_1 = a'_1 + t(b'_1 - a'_1)$$

$$x_2 = a'_2 + t(b'_2 - a'_2)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_m = a'_m + t(b'_m - a'_m)$$

($0 \leq t \leq 1$) kórinisinde jazıladı.

Eger ózgeriwshi $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in M$ noqattı sınıq sızıqtıń usı kesindisi boyınsha ǵana ózgeredi dep alınatuǵın bolsa, onda $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ kóp ózgeriwshili funksiya tómendegi

$$F(t) = f(a'_1 + t(b'_1 - a'_1), a'_2 + t(b'_2 - a'_2), \dots, a'_m + t(b'_m - a'_m))$$

bir t ózgeriwshisiniń quramalı funksiya bolıp qaladı. Quramalı funksiyanıń úzliksizligi haqqındaǵı teoremaǵa muwapıq $F(t)$ funksiya $[0, 1]$ segmentte úzliksiz. Ekinshi tárepten $t = 0$ hám $t = 1$ de bul funksiya túrli belgili mánislerge iye:

$$F(0) = f(a'_1, a'_2, \dots, a'_m) < 0,$$

$$F(1) = f(b'_1, b'_2, \dots, b'_m) > 0.$$

* Baylamli kóplik anıqlamasın 1-§, 17-betten qarań.

Solay etip, $F(t)$ funkciya $[0,1]$ kesindi de úzliksiz hám usı segmenttiń shekli noqatlarında hár qıylı belgili mánislerge iye. Onda 1-bólimi, 5-bap, 7-§ degi 5.5-teoremaǵa muwapıq, $(0,1)$ intervalda sonday t_0 noqat tabılıp

$$F(t_0) = 0$$

boladı. Demek,

$$F(t_0) = f(a'_1 + t_0(b'_1 - a'_1), a'_2 + t_0(b'_2 - a'_2), \dots, a'_m + t_0(b'_m - a'_m)) = 0$$

Eger

$$\begin{aligned} c_1 &= a'_1 + t_0(b'_1 - a'_1) \\ c_2 &= a'_2 + t_0(b'_2 - a'_2) \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \\ c_m &= a'_m + t_0(b'_m - a'_m) \end{aligned}$$

dep alsaq, $c = (c_1, c_2, \dots, c_m) \in M$. hám $f(c) = f(c_1, c_2, \dots, c_m) = 0$ boladı. Bul joqarıda keltirilgen teoremanı dálilleydi.

Tómendegi teoremada usıǵan uqsas dálillenedi.

2-teorema (Bol'cano-Koshidiń ekinshi teoreması). $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$

funkciya baylamalı $M \subset R^m$ kóplikte berilgen hám úzliksiz bolıp, M kópliktiń eki $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ hám $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ noqatında $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A \neq B$ bolsın. A menen B arasında qálegen C san alınsada, M kóplikte sonday $c = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ noqat tabılıp,

$$f(c) = f(c_1, c_2, \dots, c_m) = C'$$

boladı.

3-teorema (Veyershtasstıń birinshi teoreması). Eger $f(x)$ funkciya shegaralanǵan tuyıq $M \subset R^m$ kóplikte berilgen hám úzliksiz bolsa, funkciya usı M kóplikte shegaralanǵan boladı.

Dálil. Meyli kerisi orınlı bolsın, yaǵnıy $f(x)$ funkciya shegaralanǵan tuyıq M kóplikte úzliksiz bolsa da ol usı kóplikte shegaralanbaǵan bolsın. Onda $\forall n \in N$ ushın sonday $x^{(n)} \in M$ noqat tabılıp,

$$|f(x^{(n)})| > n \quad (1)$$

boladı. Bunday noqatlardan $x^{(n)}$, $x^{(n)} \in M$ ($n = 1, 2, \dots$) izbe-izlik dúzemiz. M kóplik shegaralanǵan bolǵanlıqtan, ondaǵı $x^{(n)}$ izbe-izlikte shegaralanǵan.

Bol'cano-Veyershtass teoremasına (usı baptıń 2-§ ine) muwapıq $x^{(n)}$ izbe-izlikten jıyınalı bolǵan $x^{(n_k)}$ úles izbe-izlik ajratıw múmkin:

$$x^{(n_k)} \rightarrow x^0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

M tuyıq kóplik bolǵanı ushın $x^0 \in M$ boladı. $f(x)$

funkciyanıń M kóplikte úzliksiz ekenliginen bolsa

$$f(x^{(n_k)}) \rightarrow f(x^0)$$

ekenligi kelip shıǵadı, nátiyjede bir tárepten (12.31) qatnasına muwapıq

$$\left| f(x^{(n_k)}) \right| > n_k$$

yaғnıy $f(x^{(n_k)}) \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$ ke) bolsa, ekinshi tárepten $f(x^{(n_k)}) \rightarrow f(x^0)$ bolıp qaladı.

Bul qarama-qarsılıq $f(x)$ funkciyanı M kóplikte shegaralanbağan dep alınıwınıń nátiyjesinde kelip shıqtı. Demek, $f(x)$ funkciya M kóplikte shegaralanğan. Teorema dálillendi.

4-teorema (Veyershtasstıń ekinshi teoreması). Eger $f(x)$ funkciya shegaralanğan tuyıq $M \subset R^m$ kóplikte anıqlanğan úzliksiz bolsa, ol usı kóplikte óziniń dál joqarı hámde dál tómengi shegaralarına erisedi.

Bul teoremanıń dálili 1-bólim, 5-bap, 7-§ degi 5.8-teoremanıń dálilindegidey. Onı dálillewdi oqıwshılarga inam etemiz.

Kóp ózgeriwshili funkciyanıń tegis úzliksizligi. Kantor teoreması

Bul paragrafta kóp ózgeriwshili funkciyanıń tegis úzliksizligi túsiniǵın kiritemiz hám onı tolıq úyrenemiz.

$f(x)$ funkciya $M \subset R^m$ kóplikte berilgen bolsın.

5-anıqlama. Eger $\forall \varepsilon > 0$ sanı ushın, sonday $\delta > 0$ tabılıp, M kópliktiń $\rho(x', x'') < \delta$ teńsizligin qanaatlandırıwshı qálegen x' hám x'' ($x' \in M, x'' \in M$) noqatlarında

$$\left| f(x') - f(x'') \right| < \varepsilon$$

teńsizlik orınlansa, $f(x)$ funkciya M kóplikte **tegis úzliksiz funkciya** dep ataladı.

Funkciyanıń tegis úzliksizligi anıqlamasındaǵı $\delta > 0$ san $\varepsilon > 0$ ge baylanıslı boladı. Eger $f(x)$ funkciya $M \subset R^m$ kóplikte tegis úzliksiz bolsa, ol usı kóplikte úzliksiz boladı.

Mısallar 1. Mına

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

funkciyanıń $D = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ kóplikte tegis úzliksiz bolıwı kórsetilsin. $\forall \varepsilon > 0$ sanın alıp, ol boyınsha tabılatuǵın $\delta > 0$ sanın $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$ dep alsaq, onda

$$\rho(x', x'') = \rho((x'_1, x'_2), (x''_1, x''_2)) = \sqrt{(x''_1 - x'_1)^2 + (x''_2 - x'_2)^2} < \delta$$

teńsizligin qanaatlandırıwshı $\forall (x'_1, x'_2) \in D, (x''_1, x''_2) \in D$ noqatlar ushın

$$\begin{aligned} \left| f(x'_1, x'_2) - f(x''_1, x''_2) \right| &= \left| (x'_1)^2 + (x'_2)^2 - [(x''_1)^2 + (x''_2)^2] \right| = \\ &= \left| (x'_1 - x''_1)(x'_1 + x''_1) + (x'_2 - x''_2)(x'_2 + x''_2) \right| \leq 2\sqrt{(x''_1 - x'_1)^2 + (x''_2 - x'_2)^2} + \\ &\quad + 2\sqrt{(x''_1 - x'_1)^2 + (x''_2 - x'_2)^2} = 4\delta < \varepsilon \end{aligned}$$

boladı. Demek, berilgen funkciya $D \subset R^2$ kóplikte tegis úzliksiz.

2. Tómendegi

funkciyanı $A = (x_1, x_2) \in R^2 : 0 < x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ kóplikte qarayıq. Bul funkciyanıń A kóplikte úzliksizligi ayqın. Biraq qaralıp atırǵan funkciya ushın A kóplikte tegis úzliksizlik anıqlamasındaǵı shárt orınlanbaydı, yaǵnıy $\forall \delta > 0$ ushın sonday $\varepsilon > 0$ hám $x' = (x'_1, x'_2) \in A$, $x'' = (x''_1, x''_2) \in A$ noqatlar tabılıp, $\rho(x', x'') < \delta$ hám de

boladi. Haqiqatanda $\forall \delta > 0$ ushin $\varepsilon = 1$ dep hám $\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \in A$, $\frac{1}{2n}, \frac{2}{2n} \in A$

$$\left| f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right) \right| = 3n^2 > 1 = \varepsilon$$

Joqarıda keltirilgen mısallardan bazıbir kóplikte úzliksiz bolğan funksiya barqulla usı kóplikte tegis úzliksizlik anıqlamasındaǵı shártti qanaatlandıra bermesligi kórinedi eken. Lekin tómendegi teorema orınlı.

Dálil. Meyli kerisi orınlı bolsın, yaǵnıy $f(x)$ funkciya shegaralangan tuyıq M kóplikte úzliksiz bolsın, lekin tegis úzliksizlik anıqlamasındaǵı shárt orınlanbasın. Onda bazıbir $\varepsilon > 0$ san hám ıqtıyarlı $\delta > 0$ san ushın M kóplikte $\rho(x', x'') < \delta$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı sonday x' hám x'' ($x' \in M, x'' \in M$) noqatlar tabılıp,

Nol'ge umtılıwshı óń sanlar izbe-izligi $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$ di alayıq:

Uyğarıwımızğa muwapıq, joqarıdağı $\varepsilon > 0$ san hám ıqtıyarlı $\delta_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) noqatlar tabılıp

$$\rho(a^{(n)}, b^{(n)}) < \delta_n \quad \text{hám} \quad \left| f(a^{(n)}) - f(b^{(n)}) \right| \geq \varepsilon,$$

boladı.

M-shegaralangan kópik hám $a^{(n)} \in M$ ($n = 1, 2, \dots$) bolğanlıqtan, Bol'cano-Veyershtass teoreması boyınsha $a^{(n)}$ izbe-izlikten jıynaqlı úles $\{a^{(n_k)}\}$ izbe-izlik ajratıw múmkin:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a^{(n_k)} = a^0 \quad (3)$$

M tuyıq kópik bolğanı sebepli $a^0 \in M$ boladı. Joqarıdağı $b^{(n)}$ izbe-izlikten ajratılğan $b^{(n_k)}$ úles izbe-izliktiń limitide a^0 ge teń boladı. Haqıyqattanda, mına

$$\rho(b^{(n_k)}, a^0) \leq \rho(b^{(n_k)}, a^{(n_k)}) + \rho(a^{(n_k)}, a^0) < \delta_{n_k} + \rho(a^{(n_k)}, a^0)$$

teńsizliktegi δ_{n_k} hám $\rho(a^{(n_k)}, a^0)$ ler ushın (12.32) hám (12.33) qatnaslarına muwapıq $k \rightarrow \infty$ ke

$$\delta_{n_k} \rightarrow 0, \quad \rho(a^{(n_k)}, a^0) \rightarrow 0$$

bolıwın itibarğa alıp, $k \rightarrow \infty$ te $\rho(a^{(n_k)}, a^0) \rightarrow 0$ ekenligin tabamız

$$a^{(n_k)} \rightarrow a^0, \quad b^{(n_k)} \rightarrow a^0.$$

qaralıp atırğan $f(x)$ funkciyanıń, shárt boyınsha M kópikte úzliksiz ekenliginen

$$f(a^{(n_k)}) \rightarrow f(a^0), \quad f(b^{(n_k)}) \rightarrow f(a^0)$$

bolıp, olardan

$$f(b^{(n_k)}) - f(a^{(n_k)}) \rightarrow 0$$

bolatuǵını kelip shıǵadı. Bul $\forall n_k$ lar ushın

$$\left| f(b^{(n_k)}) - f(a^{(n_k)}) \right| \geq \varepsilon$$

dep uyǵarıwımızǵa qarsı. Bunday qarama-qarsılıqtıń kelip shıǵıwına sebep $f(x)$ funkciyanıń M kópikte tegis úzliksizlik shártin qanaatlandırmaydı dep alıwımızda. Demek, funkciya M kópikte tegis úzliksiz. Teorema dálillendi.

Bazıbir $M \subset \mathbb{R}^m$ kópik berilgen bolsın. Bul kópikte qálegen eki x' hám x'' noqatların alıp, olar arasındaǵı $\rho(x', x'')$ qashıqlıqtı tabamız. Aralıq alınğan noqatlarǵa baylanıslı bolatuǵını ayqın. Eger x' hám x'' noqatların M kópikte ózgertip otırsaq, onda $\rho(x', x'')$ kópik hasıl boladı. Ádette bul kópiktiń dál joqarǵı shegarasın $\sup \rho(x', x'')$ ($x' \in M, x'' \in M$) M kópiktiń **diametri** dep ataladı hám $d(M)$ dep belgilenedi:

$$d(M) = \sup \rho(x', x'') \quad (x' \in M, x'' \in M).$$

$f(x)$ funkciya $M \subset \mathbb{R}^m$ kópikte berilgen bolsın.

1–anıqlama. Mına

$$\sup |f(x'') - f(x')| \quad (x' \in M, x'' \in M).$$

shama $f(x)$ funkciyanıń M kópliktegi **terbelisi** dep ataladı hám ol $\omega(f; M)$ dep belgilenedi:

$$\omega(f; M) = \sup |f(x'') - f(x')| \quad (x' \in M, x'' \in M).$$

Joqarıda keltirilgen Kantor teoremasınan áhmiyetli saldar kelip shıǵadı.

1–saldar. $f(x)$ funkciya shegaralanǵan tuyıq kóplikte berilgen hám úzliksiz bolsın. Onda $\forall \varepsilon > 0$ sanı alıńanda da M kóplikti shekli sandaǵı M_k kópliklerge sonday ajratıw múmkin,

$$\bigcup_k M_k = M, \quad M_k \cap M_j = \emptyset \quad (k \neq j) \quad \text{hám} \quad \omega(f; M_k) \leq \varepsilon$$

boladı.

Dálil. $f(x)$ funkciya shegaralanǵan tuyıq M kóplikte úzliksiz bolsın. Kantor teoremasına muwapıq bul funkciya M kóplikte tegis úzliksiz boladı. Solay etip $\forall \varepsilon > 0$ ushın sonday $\delta > 0$ tabılıp, $\rho(x', x'') < \delta$ bolǵan $\forall x', x''$ ler ushın $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ boladı. M kóplikti diametrleri usı δ bolǵan M_k kópliklerge ajıratamız. Bul jaǵdayda $\forall x' \in M_k, \forall x'' \in M_k$ noqatlar ushın $\rho(x', x'') < \delta$ boladı hám demek,

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

teńsizlik orınlanadı. Bunnan

$$\sup |f(x'') - f(x')| \leq \varepsilon,$$

yaǵnıy

$$\omega(f; M_k) \leq \varepsilon$$

bolatuǵını kelip shıǵadı. Saldar dálillendi.

Biz usı paragrafte funkciyanıń tegis úzliksizligi menen baylanıslı bolǵan funkciyanıń úzliksizlik moduli túsiniǵi menen de tanısamız.

$f(x)$ funkciya $M \subset R^m$ kóplikte berilgen bolsın. $\forall \delta > 0$ sanın alıp, M kópliktiń $\rho(x', x'') \leq \delta$ teńsizligin qanaatlandırıwshı qálegen x' hám x'' ($x' \in M, x'' \in M$) noqatlarındaqı funkciya mánislerinen dúzilgen $|f(x'') - f(x')|$ ayırmalardı qarayıq.

2–anıqlama. Mına

$$|f(x'') - f(x')| \quad (x' \in M, x'' \in M)$$

ayırmalar kópliginiń dál joqarǵı shegarası

$$\sup_{\rho(x', x'') \leq \delta} |f(x'') - f(x')| \quad (x' \in M, x'' \in M)$$

$f(x)$ funkciyanıń M kópligindegi **úzliksizlik moduli** dep ataladı hám $\omega(f; \delta)$ dep belgilenedi:

$$\omega(f; \delta) = \sup_{\rho(x', x'') \leq \delta} |f(x'') - f(x')| \quad (x' \in M, x'' \in M)$$

Bul anıqlamadan, funkciyanıń úzliksizlik moduli δ nıń teris bolmaǵan funkciyası ekenligin kóremiz. Bunnanda basqa $\delta_1 > \delta_2 > 0$ bolǵanda mına

$$\sup_{\rho(x', x'') \leq \delta_1} |f(x'') - f(x')| \geq \sup_{\rho(x', x'') \leq \delta_2} |f(x'') - f(x')|$$

$(x' \in M, x'' \in M)$ teńsizlik orınlı bolıp, onnan

$$\omega(f : \delta_1) \geq \omega(f : \delta_2)$$

ekenligi kelip shıǵadı. Bul $\omega(f : \delta)$ - δ nıń ósıwshi funkciyası ekenligin bildiredi.

Endi $f(x)$ funkciyanıń tegis úzliksizligi menen onıń úzliksizlik moduli arasındaǵı baylanıstı kórsetetuǵın teoremanı keltiremiz.

7-teorema. $f(x)$ funkciyanıń $M \subset R^m$ kóplikte tegis úzliksiz bolıwı ushın

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega(f : \delta) = 0$$

bolıwı zárúr hám jetkilikli.

9-lekciya

Kóp ózgeriwshili funkciyalardıń dara tuwındıları. Kóp ózgeriwshili differenciyanıwshı funksiya. Differenciyanıwshı bolıwınıń zárúrli, jetkilikli shártleri. Kóp ózgeriwshili funkciyanıń tolıq differencialı.

Funkciya dara tuwındısınıń anıqlamaları. $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funksiya ashıq $M \subset R^m$ kóplikte berilgen bolsın. Bul kóplikte

$x^0 = x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0$ noqat alıp, onıń birinshi koordinatası x_1^0 ge sonday $\Delta x_1 \geq 0$ ósim bereyik, $x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, \dots, x_m^0 \in M$ bolsın. Nátiyjede $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciyada $x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0$ noqatta x_1 ózgeriwshisi boyınsha

$$\Delta_{x_1} f = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$$

dara ósimge iye boladı.

Mına

$$\frac{\Delta_{x_1} f}{\Delta x_1} = \frac{f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\Delta x_1} \quad (1)$$

qatnastı qarayıq. Ayqın, bul qatnas Δx_1 dıń funkciyası bolıp, ol Δx_1 dıń nolden ózgeshe mánislerinde anıqlanǵan.

1-anıqlama. Eger $\Delta x_1 \rightarrow 0$ ge (1) qatnastıń limiti

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_1} f}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\Delta x_1}$$

bar hám shekli bolsa, bul limit $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciyanıń $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ noqattaǵı x_1 ózgeriwshisi boyınsha **dara tuwındısı** dep ataladı hám

$$\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad f'_{x_1}(x_1^0, \dots, x_m^0), \quad f'_{x_1}$$

belgilerdiń birewi menen belgilenedi. Demek,

$$f'_{x_1}(x^0) = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_1} f}{\Delta x_1}.$$

Eger $x_1^0 + \Delta x_1 = x_1$ dep alsaq, onda $\Delta x_1 = x_1 - x_1^0$ hám $\Delta x_1 \rightarrow 0$ da $x_1 \rightarrow x_1^0$ bolıp, nátiyjede

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_1} f}{\Delta x_1} = \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \frac{f(x_1, x_2^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{x_1 - x_1^0}$$

boladı. Demek, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciyanıń $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ noqattaǵı x_1 ózgeriwshisi boyınsha dara tuwındısı mına

$$\frac{f(x_1, x_2^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{x_1 - x_1^0}$$

qatnasınıń $x_1 \rightarrow x_1^0$ degi limiti sıpatında anıqlaw múmkin.

Usıǵan uqsas $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciyanıń basqa ózgeriwshileri boyınsha dara tuwındıları anıqlanadı:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_2} f}{\Delta x_2} = \lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} \frac{f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2, x_3^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\Delta x_2}$$

... ..

$$\frac{\partial f}{\partial x_m} = \lim_{\Delta x_m \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_m} f}{\Delta x_m} = \lim_{\Delta x_m \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{m-1}^0, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\Delta x_m}$$

Demek, kóp ózgeriwshili $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciyanıń qandayda bir $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ noqatta x_k $k = 1, 2, \dots, m$ ózeriwshisi boyınsha dara tuwındısın anıqlawda bul funkciyanıń x_k $k = 1, 2, \dots, m$ ózgeriwshiden basqa barlıq ózgeriwshileri ózgermes dep esaplanar eken. Solay etip, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciyanıń dara tuwındıları $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_m}$ 1-bólim, 6-bap, 1-§ de úyrenilgen tuwındı - bir ózgeriwshili funkciya tuwındısı sıyaqlı ekenligin kóremiz. Demek, kóp ózgeriwshili funkciyalardıń dara tuwındıların esaplawda bir ózgeriwshili funkciyanıń tuwındısın esaplawdağı málim bolǵan qaǵıyda hám kestelerden tolıq paydalanıw múmkin.

Mısallar. 1. $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ bolsın. Bul funkciyanıń $\forall x_1, x_2 \in R^2$ noqattaǵı dara tuwındıları

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

boladı.

2. $f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{x_2}} e^{-\frac{x_1+x_2}{2}}$ funkciyanıń $x_1, x_2 \in R^2, x_2 > 0$

noqattaǵı dara tuwındıların esaplaymız:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{\sqrt{x_2}} e^{-\frac{x_1+x_2}{2}} \right) = -\frac{1}{2\sqrt{x_2}} e^{-\frac{x_1+x_2}{2}}, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{\sqrt{x_2}} e^{-\frac{x_1+x_2}{2}} \right) = -\frac{1}{2\sqrt{x_2^3}} e^{-\frac{x_1+x_2}{2}} - \frac{1}{2\sqrt{x_2}} e^{-\frac{x_1+x_2}{2}} = \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{x_2}} e^{-\frac{x_1+x_2}{2}} \left(1 + \frac{1}{x_2} \right). \end{aligned}$$

3. Mina

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{2x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{eger } x_1, x_2 \neq 0, 0 \text{ bolsa,} \\ 0, & \text{eger } x_1, x_2 = 0, 0 \text{ bolsa} \end{cases}$$

funkciyanıń dara tuwındıların tabıń

Aytayıq, $x_1, x_2 \neq 0, 0$ bolsın. Onda

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{2x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) = \frac{2x_2(x_1^2 + x_2^2) - 2x_1x_2 \cdot 2x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{2x_2(x_2^2 - x_1^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{2x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) = \frac{2x_1(x_1^2 + x_2^2) - 2x_1x_2 \cdot 2x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{2x_1(x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \end{aligned}$$

boladı.

Endi $x_1, x_2 = 0, 0$ bolsın. Onda

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta x_1) - f(0, 0)}{\Delta x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x_2} = \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{f(0, 0) - f(0, 0)}{\Delta x_2} = 0$$

boladı.

Demek, berilgen $f(x_1, x_2)$ funkciya $\forall x_1, x_2 \in R^2$ de dara tuwındılarǵa iye.

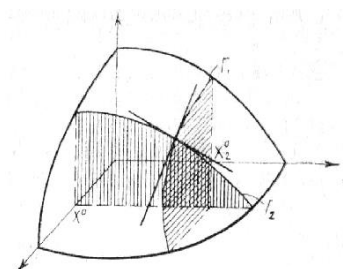
Dara tuwındınıń geometriyalıq mánisi. Ápiwayılıq ushın eki ózgeriwshili funkciya dara tuwındılarınıń geometriyalıq mánisin keltiremiz.

$f(x_1, x_2)$ funkciyanıń M ($M \subset R^2$) kóplikte berilgen bolıp, $(x_1^0, x_2^0) \in M$ bolsın. Bul funkciya (x_1^0, x_2^0) noqatta $f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0)$, $f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0)$ dara tuwındılarına iye bolsın. Anıqlamaǵa muwapıq $f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0)$ hám $f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0)$ dara tuwındılar sáykes $y_1 = f(x_1, x_2^0)$ hám $y_2 = f(x_1^0, x_2)$ bir ózgeriwshili funkciyalardıń x_1^0 hám x_2^0 degi tuwındılarınan ibarat.

Meyli, $y = f(x_1, x_2)$ funkciyanıń grafigi 11-sızılmada kórsetilgen betti súwretlesin. Onda

$y_1 = f(x_1, x_2^0)$ hám $y_2 = f(x_1^0, x_2)$ funkciyalardıń grafikleri sáykes túrde $y = f(x_1, x_2)$ beti menen

$x_2 = x_2^0$ tegisliktiń hám usı beti menen $x_1 = x_1^0$ tegisliktiń kesilisiwinen payda bolǵan Γ_1 hám Γ_2 sızıqlardan ibarat.



11-sızılma

Bizge málim, bir ózgeriwshili $u = \varphi(x)$ funkciyanıń bazıbir x_0 ($x_0 \in R$) noqatındaǵı tuwındısınıń geometriyalıq mánisi (1-bólim, 6-bap, 1-§) bul funkciya súwretlengen iymek sızıqqa $x_0, \phi(x_0)$ noqatta júrgizilgen urınbanıń múyeshlik koefficientinen, yaǵnıy urınbanıń Ox kósheri menen jasaǵan múyeshiniń tangensinen ibarat edi. $f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0)$ hám $f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0)$ dara tuwındıları sáykes Γ_1 hám Γ_2 iymek sızıqlarǵa (x_1^0, x_2^0) noqatta júrgizilgen urınbalardıń Ox_1 hám Ox_2 kósherleri menen jasaǵan múyeshiniń tangensin bildiredi. Demek, $f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0)$ hám $f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0)$ dara tuwındılar $y = f(x_1, x_2)$ bettiń sáykes Ox_1 hám Ox_2 kósherler baǵıtı boyınsha ózgeriw dárejesin kórsetedi.

Funkciyanıń úzliksiz bolıwı menen onıń dara tuwındıǵa iye bolıwı arasındaǵı baylanıs.

$f(x)$ funkciya ashıq M ($M \subset \mathbb{R}^2$) kóplikte berilgen bolıp, $x_0 \in M$ noqatta shekli $f'_{x_1}(x^0)$ dara tuwındısına iye bolsın. Anıqlamaǵa muwapıq

$$f'_{x_1} x^0 = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_1} f}{\Delta x_1}$$

bolıp, onnan

$$\Delta_{x_1} f = f'_{x_1}(x^0) \Delta x_1 + \alpha_1 \Delta x_1$$

bolatuǵının tabamız, bunda $\Delta x_1 \rightarrow 0$ ge $\alpha \rightarrow 0$ ge. Nátiyjede

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \Delta_{x_1} f = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} [f'_{x_1}(x^0) \Delta x_1 + \alpha \Delta x_1] = 0$$

boladı. Bul $f(x)$ funkciyanıń x^0 noqatta x_1 ózgeriwshisi boyınsha dara úzliksiz ekenligin bildiredi. Demek, $f(x)$ funkciya x^0 noqatta shekli $f'_{x_k}(x^0)$ $k = 1, 2, \dots, m$ dara tuwındıǵa iye bolsa, $f(x)$ funkciya usı noqatta sáykes x_k $k = 1, 2, \dots$, ózgeriwshileri boyınsha dara úzliksiz boladı.

Biraq kóp ózgeriwshili $f(x)$ funkciyanıń bazıbir x^0 noqatta barlıq dara tuwındılarǵa iye bolıwınan, onıń usı noqatta úzliksiz (barlıq ózgeriwshiler boyınsha bir jola úzliksiz) bolıwı bárqulla kelip shıǵa bermeydi.

Máselen, usı paragraftıń 1-punktinde keltirilgen 3-mısaldıǵı $f(x_1, x_2)$

funkciya $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$ noqatta $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}$ dara tuwındılarǵa iye bolsada, bul

funkciya $(0,0)$ noqatta úzliksiz (eki ózgeriwshisi boyınsha bir jola úzliksiz) emes (qaralsın, 12-bap, 1-§).

Kóp ózgeriwshili funkciyalardıń differenciallanıwshılıǵı

Funkciyanıń differenciallanıwshılıǵı túsiniǵi. Differenciallanıwshılıqtıń zárúrli shárti. $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciya ashıq M ($M \subset \mathbb{R}^m$) kóplikte berilgen bolsın. Bul kóplikte $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = x^0$ noqat penen birge $(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m)$ noqattı alıp, berilgen funkciyanıń tolıq ósimi

$$\Delta f(x^0) = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$$

di qaraymız.

Ayqın, funkciyanıń $\Delta f(x^0)$ ósimi argumentler ósimleri $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ lerge baylanıslı bolıp, kópshilik jaǵdaylarda $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ ler menen Δf arasındaǵı baylanıs quramalı boladı. Tábiyiy, bunda $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ lerge qarata Δf ti anıq yaki juwıq esaplaw qıyınlasadı. Nátiyjede ósimi

$\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ ósimler menen ápiwayıraq baylanısta bolǵan funkciyalardı úyreniw máselesi júzege keledi.

2-anıqlama. Eger $f(x)$ funkciyanıń x^0 noqattaǵı $\Delta f(x^0)$ ósimin

$$\Delta f(x^0) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m \quad (2)$$

kóriniste ańlatıw múmkin bolsa, $f(x)$ funkciya x^0 **noqatta differenciallanıwshı** dep ataladı, bunda $A_1, A_2, \dots, A_m$ ler $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ lerde ǵárezsiz turaqlılar, al $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ler bolsa, $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ lerge ǵárezli hám $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ ge $\alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0, \dots, \alpha_m \rightarrow 0$ ($\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_m = 0$ bolǵanda $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$ dep alınadı).

Eger $f(x)$ funkciya M kópliktiń hár bir noqatında differenciallanıwshı bolsa, $f(x)$ funkciya M **kóplikte differenciallanıwshı** dep ataladı.

Mısal. Mina $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ funkciyanı qarayıq. Bul funkciya $\forall (x_1^0, x_2^0) \in R^2$ noqatta differenciallanıwshı boladı. Haqıyqattanda, (x_1^0, x_2^0) noqatta berilgen funkciyanıń ósimi

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2) - f(x_1^0, x_2^0) = (x_1^0 + \Delta x_1)^2 + (x_2^0 + \Delta x_2)^2 - (x_1^0)^2 - (x_2^0)^2 = \\ &= 2x_1^0 \Delta x_1 + 2x_2^0 \Delta x_2 + (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 \end{aligned}$$

bolıp, onda $A_1 = 2x_1^0, A_2 = 2x_2^0, \alpha_1 = \Delta x_1, \alpha_2 = \Delta x_2$ delinse, nátiyjede

$$\Delta f = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2$$

boladı. Bul berilgen funkciyanıń $\forall x_1, x_2 \in R^2$ noqatta differenciallanıwshı ekenligin bildiredi.

$f(x)$ funkciyanıń x^0 noqatta differenciallanıwshılıq shárti (2) ni tómendegi

$$\Delta f(x^0) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + o(\rho) \quad (3)$$

kórinisinde jazıw múmkinligin kórsetemiz, bunda $\rho(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = x^0$ hám $(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m)$ noqatlar arasındǵı aralıq:

$$\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots + (\Delta x_m)^2}.$$

Ayqın,

$$\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0 \Rightarrow \rho \rightarrow 0$$

hám

$$\rho \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$$

boladı.

Endi $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ ge (2) ańlatpasındaǵı

$\alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m$ shama ρ ға qarata joqarı tártipli sheksiz kishi shama ekenligin kórsetemiz. Eger

$$\alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m = \rho \left(\alpha_1 \frac{\Delta x_1}{\rho} + \alpha_2 \frac{\Delta x_2}{\rho} + \dots + \alpha_m \frac{\Delta x_m}{\rho} \right), \quad \rho \neq 0$$

añlatpada

$$\frac{|\Delta x_k|}{\rho} \leq 1 \quad k = 1, 2, \dots, m$$

bolatuǵının itibarǵa alsaq, onda

$$|\alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m| \leq (|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_m|) \cdot \rho$$

boladı. Demek,

$$\alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m = o \rho.$$

Solay etip, (2) shárttıń orınlı bolıwınan (3) tiń orınlı bolıwı kelip shıqtı.

Eger $f(x)$ funkciyanıń x^0 noqatta differenciallanıwshılıq shárti (3) kórinisinde orınlı bolsa, bunnan bul shárttıń (2) kórinisinde orınlı bolıwı kelip shıǵadı. Usını dálilleyik.

Eger $\rho = 0$ bolsa, onda $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_m = 0$ boladı hám (3) ten (2) kelip shıǵadı.

$\rho \neq 0$ bolsın. Onda $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ lerdiń barlıǵı bir jola nolge teń bolmaydı. Sonı itibarǵa alıp tómendegini tabamız:

$$\begin{aligned} o \rho &= \frac{o \rho}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_m^2}{\rho} = \frac{o \rho}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_1}{\rho} \cdot \Delta x_1 + \frac{o \rho}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_2}{\rho} \cdot \Delta x_2 + \\ &+ \dots + \frac{o \rho}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_m}{\rho} \cdot \Delta x_m = \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m \end{aligned}$$

bunda

$$\alpha_k = \frac{o \rho}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_k}{\rho} \quad k = 1, 2, \dots, m$$

bolıp, $\rho \rightarrow 0$, yaǵnıy $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ ge $\alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0, \dots, \alpha_m \rightarrow 0$.

Demek, $f(x)$ funkciyanıń x^0 noqatta differenciallanıwshılıǵınıń (2) hám (3) shártleri óz-ara ekvivalent eken.

Endi differenciallanıwshı funkciyalar haqqında eki teorema keltiremiz.

1-teorema. Eger $f(x)$ funkciya x^0 noqatında differenciallanıwshı bolsa, onda bul funkciya usı noqatta úzliksiz boladı.

Dálil. $f(x)$ funkciya x^0 noqatta differenciallanıwshı bolsın. Onda anıqlamaǵa muwapıq funkciya ósimi ushın

$$\Delta f(x^0) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m$$

boladı, bunda $A_1, A_2, \dots, A_m$ – turaqlı, $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ ge $\alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0, \dots, \alpha_m \rightarrow 0$.

Joqarıdağı teńlikten

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \Delta x_2 \rightarrow 0 \\ \dots \dots \\ \Delta x_m \rightarrow 0}} \Delta f(x^0) = 0$$

bolıwı kelip shıǵadı. Bul $f(x)$ funkciyanıń x^0 noqatta úzliksizligin bildiredi.

Teorema dálillendi.

2-teorema. Eger $f(x)$ funkciya x^0 noqatta differenciallanıwshı bolsa, onda bul funkciyanıń usı noqatta barlıq dara tuwındıları $f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), \dots, f'_{x_m}(x^0)$ bar hám olar sáykes túrde (13.2) ańlatpadağı $A_1, A_2, \dots, A_m$ lerge teń boladı, yaǵnıy

$$f'_{x_1}(x^0) = A_1, \quad f'_{x_2}(x^0) = A_2, \quad \dots, \quad f'_{x_m}(x^0) = A_m.$$

Dálil. $f(x)$ funkciya x^0 noqatta differenciallanıwshı bolsın. Onda anıqlamaǵa muwapıq funkciya ósimi ushın

$$\Delta f(x^0) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m \quad (2)$$

boladı. Bul teńlikte

$$\Delta x_1 \neq 0, \quad \Delta x_2 = \Delta x_3 = \dots = \Delta x_m = 0$$

dep alsaq, onda (2) mına

$$\Delta_{x_1} f(x^0) = A_1 \Delta x_1 + \alpha_1 \Delta x_1$$

kórinisin aladı. Bul teńliktiń eki jaǵın Δx_1 ge bólip, onnan keyin $\Delta x_1 \rightarrow 0$ ge limitke ótip, tómendegini tabamız:

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_1} f(x^0)}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} A_1 + \alpha_1 = A_1.$$

Demek

$$f'_{x_1}(x^0) = A_1.$$

Dál usıǵan uqsas $f(x)$ funkciyanıń x^0 noqatta $f'_{x_2}(x^0), f'_{x_3}(x^0), \dots, f'_{x_m}(x^0)$ dara tuwındılarınıń bar bolıwı jánede

$$f'_{x_2}(x^0) = A_2, \quad f'_{x_3}(x^0) = A_3, \quad \dots, \quad f'_{x_m}(x^0) = A_m$$

ekenligi kórsetiledi. **Teorema dálillendi.**

1-saldar. Eger $f(x)$ funkciya x^0 noqatta differenciallanıwshı bolsa, onda

$$\Delta f(x^0) = f'_{x_1}(x^0) \Delta x_1 + f'_{x_2}(x^0) \Delta x_2 + \dots + f'_{x_m}(x^0) \Delta x_m + o(\rho)$$

boladı.

1-eskertiw. $f(x)$ funkciyanıń bazıbir x^0 noqatta barlıq dara tuwındıları $f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), \dots, f'_{x_m}(x^0)$ dıń bar bolıwınan, funkciyanıń usı noqatta differenciallanıwshı bolıwı bárqulla kelip shıǵa bermeydi.

Máselen, mına

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 \cdot x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \text{eger } x_1, x_2 \neq 0, 0 \text{ bolsa,} \\ 0, & \text{eger } x_1, x_2 = 0, 0 \text{ bolsa} \end{cases}$$

funkciyanı qarayıq. Bul funkciya (0,0) noqatta dara tuwındılargá iye:

$$f'_{x_1}(0,0) = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x_1, 0) - f(0,0)}{\Delta x_1} = 0,$$

$$f'_{x_2}(0,0) = \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta x_2) - f(0,0)}{\Delta x_2} = 0.$$

Berilgen funkciyanıń (0,0) noqattaǵı ósimi

$$\Delta f(0,0) = f(\Delta x_1, \Delta x_2) - f(0,0) = \frac{\Delta x_1 \cdot \Delta x_2}{\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2}}$$

bolıp, onı (2) yamasa (3) kórinisinde jazıp bolmaydı. Bunı dálillew maqsetinde, kerisin, yaǵnıy $f(x_1, x_2)$ funkciya (0,0) noqatta differenciallanıwshı bolsın dep uýǵarayıq. Onda

$$\Delta f(0,0) = f'_{x_1}(0,0) \cdot \Delta x_1 + f'_{x_2}(0,0) \cdot \Delta x_2 + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 = \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 \quad (4)$$

bolıp, bul ańlatpada $\Delta x_1 \rightarrow 0$, $\Delta x_2 \rightarrow 0$ ge $\alpha_1 \rightarrow 0$, $\alpha_2 \rightarrow 0$ boladı. Demek,

$$\frac{\Delta x_1 \Delta x_2}{\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2}} = \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 \quad (5)$$

Bunda Δx_1 hám Δx_2 ler qálegen ósimler. Sonlıqtan, $\Delta x_1 = \Delta x_2$ bolǵanda (5) teńlik mına

$$\frac{\Delta x_1}{\sqrt{2}} = \Delta x_1(\alpha_1 + \alpha_2)$$

kóriniske kelip, bunnan

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

bolatuǵını kelip shıǵadı. Nátiyjede $\Delta x_1 \rightarrow 0$, $\Delta x_2 \rightarrow 0$ ge α_1 hám α_2 shamaların nól'ge umtılmaytuǵınlıǵın tabamız. Bul $f(x_1, x_2)$ funkciyanıń (0,0) noqatta differenciallanıwshı bolsın dep uýǵarıwımızǵa qarsı keledi. Demek, berilgen funkciya (0,0) noqatta dara tuwındılargá iye, lekin ol usı noqatta differenciallanıwshılıq shártin qanaatlandırmaydı.

Solay etip, funkciyanıń bazıbir noqatta barlıq dara tuwındılargá iye bolıwı, funkciyanıń usı noqatta differenciallanıwshı bolıwınıń zárúrli shártinen ibarat eken.

Funkciyanıń differenciallanıwshılıǵınıń jetkilikli shárti. Endi kóp ózgeriwshili funkciya differenciallanıwshı bolıwınıń jetkilikli shártin keltiremiz.

Bir hám kóp ózgeriwshili funkciyalarda funkciyanıń differenciallanıwshılıǵı túsiniǵı kiritildi (qaralsın, 1-bólim, 6-bap, 4-§ jánede usı baptıń 2-§). Olardı salıstırıp tómendegi juwmaqqa kelemiz.

1) Bir ózgeriwshili funkciyalarda da, kóp ózgeriwshili funkciyalarda da funkciyanıń bazıbir noqatta differenciallanıwshı bolıwınan onıń usı noqatta úzliksiz bolıwı kelip shıǵadı. Demek, bir hám kóp ózgeriwshili funkciyalarda funkciyanıń differenciallanıwshı bolıwı menen onıń úzliksiz bolıwı arasındadıǵı qatnas bir qıylı.

2) Bizge málim, bir ózgeriwshili funkciyalarda funkciyanıń bazıbir noqatta differenciallanıwshı bolıwınan onıń usı noqatta shekli tuwındıǵa iye bolıwı kelip shıǵadı hám, kerisinshe, funkciyanıń bazıbir noqatta shekli tuwındıǵa iye bolıwınan onıń usı noqatta differenciallanıwshı bolıwı kelip shıǵatuǵını málim.

Kóp ózgeriwshili funkciyalarda funkciyanıń bazıbir noqatta differenciallanıwshı bolıwınan onıń usı noqatta barlıq shekli dara tuwındılarǵa iye bolıwı kelip shıǵadı. Bıraq, funkciyanıń bazıbir noqatta barlıq shekli dara tuwındılarǵa iye bolıwınan onıń usı noqatta differenciallanıwshı bolıwı bárqulla kelip shıǵa bermeydi.

Demek, bir hám kóp ózgeriwshili funkciyalarda funkciyanıń differenciallanıwshı bolıwı menen onıń tuwındıǵa (dara tuwındıǵa) iye bolıwı arasındadıǵı qatnas bir qıylı emes eken.

10-lekciya

Urınba tegislik. Eki ózgeriwshili funkciyanıń differencialnıń geometriyalıq mánisi. Quramalı funkciyanı differenciallaw. Differential formasınıń invariantlıǵı. Differentialdın juwıq esaplawǵa qollanıwı.

Funkciya differencialnıń anıqlaması. $y = f(x)$ funkciya ashıq M ($M \subset R^m$) kóplikte berilgen bolıp, bul kópliktiń x^0 noqatında differenciallanıwshı bolsın. Anıqlamaǵa muwapıq, onda $f(x)$ funkciyanıń x^0 noqatındaǵı ósimi

$$\Delta f(x^0) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + o \rho \quad (1)$$

bolıp, bunda

$$A_i = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

hám $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ ge $\rho \rightarrow 0$ boladı. (1) teńliktiń oń jaǵı eki bólimnen, 1) $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ ósimlerge qarata sıızıqlı ańlatpa $A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m$ nen, 2) $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ ge, yaǵnıy $\rho \rightarrow 0$ ge ρ ǵa qarata joqarı tártipli sheksiz kishi shama $o \rho$ dan ibarat.

Sunday-aq, (1) ańlatpadan, $\rho \rightarrow 0$ ge $A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m$ - sheksiz kishi shama $\Delta f(x^0)$ - sheksiz kishi shamanıń bas bólegi ekenin ańǵaramız.

1-anıqlama. $f(x)$ funkciya ósimi $\Delta f(x^0)$ diń $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ lerge qarata sıızıqlı bas bólegi

$$A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_m} \Delta x_m$$

$f(x)$ funkciyanıń x^0 noqatındaǵı differencialı (tolıq differencialı) dep ataladı hám $df(x^0)$ yamasa $df(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ dep belgilenedi.

Demek ,

$$\begin{aligned} df(x^0) &= df(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m = \\ &= \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_m} \Delta x_m. \end{aligned}$$

Eger $x_1, x_2, \dots, x_m$ erikli ózgeriwshilerdiń qálegen ósimleri $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ ler sáykes túrde bul ózgeriwshilerdiń differencialları $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ ge teń ekenligin itibarǵa alsaq, onda $f(x)$ funkciyanıń differencialı tómendegi

$$df(x^0) = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_m} dx_m \quad (2)$$

kóriniske keledi.

Ádette $\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1, \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m$ ler $f(x)$ funkciyanıń dara differencialları dep ataladı hám olar sáykes túrde $d_{x_1} f, d_{x_2} f, \dots, d_{x_m} f$ dep belgilenedi:

$$d_{x_1} f = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1, \quad d_{x_2} f = \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2, \quad \dots, \quad d_{x_m} f = \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m.$$

Demek, $f(x)$ funkciyanıń x^0 noqattaǵı differencialı, onıń usı noqattaǵı dara differencialları qosındısınan ibarat.

Mısal. Mına

$$f(x_1, x_2) = e^{x_1 \sin x_2}$$

funkciya $\forall x_1, x_2 \in R^2$ noqatta differenciallanıwshı bolsıp onıń diffrencialı

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 = \sin x_2 \cdot e^{x_1 \sin x_2} dx_1 + x_1 \cos x_2 \cdot e^{x_1 \sin x_2} dx_2 = \\ &= e^{x_1 \sin x_2} \sin x_2 dx_1 + x_1 \cos x_2 dx_2 \end{aligned}$$

boladı.

$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciyanıń differencialı $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ noqatqa baylanışlı bolıwı menen birge bul ózgeriwshilerdiń ósimleri $\Delta x_1 = dx_1, \Delta x_2 = dx_2, \dots, \Delta x_m = dx_m$ lerge de baylanışlı ekenligin jáne bir márte esletiw lazım.

Funkciyanıń differencialı ápiwayı geometriyalıq mániske iye. Tórende onı keltiremiz.

$y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciya ashıq M kóplikte ($M \subset R^m$) berilgen bolıp, $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ noqatta ($x^0 \in M$) differenciallanıwshı bolsın. Demek, bul funkciyanıń x^0 noqatındaǵı ósimi

$$\Delta f(x^0) = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$$

ushın

$$\Delta f(x^0) = f'_{x_1}(x^0)(x_1 - x_1^0) + f'_{x_2}(x^0)(x_2 - x_2^0) + \dots + f'_{x_m}(x^0)(x_m - x_m^0) + o(\rho)$$

boladı.

Meyli $y = f(x)$ funkciyanıń grafigi R^{m+1} keńisliktegi mına

$$(S) = (x_1, x_2, \dots, x_m; y) : x_1, x_2, \dots, x_m \in R, y \in R$$

betten ibarat bolsın. Geometriyadan málim, bul bettiń $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, y_0)$ noqatınan ($y_0 = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$) ótiwshi hám de Oy kósherine parallel bolmaǵan tegisliklerdiń ulıwma teńlemesi

$Y - y_0 = A_1(X_1 - x_1^0) + A_2(X_2 - x_2^0) + \dots + A_m(X_m - x_m^0)$
boladı, bunda $X_1, X_2, \dots, X_m$, Y – tegisliktegi ózgeriwshi noqatın koordinataları.

Dara jaǵdayda, mına

$$Y - y_0 = f'_{x_1}(x^0) x_1 - x_1^0 + f'_{x_2}(x^0) x_2 - x_2^0 + \dots + f'_{x_m}(x^0) x_m - x_m^0 \quad (3)$$

tegislik bolsa (S) betke $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, y_0)$ noqatında júrgizilgen **urınba tegislik** dep ataladı.

Eger $x_1 - x_1^0 = dx_1$, $x_2 - x_2^0 = dx_2$, ..., $x_m - x_m^0 = dx_m$ delinse, onda (3) urınba tegislik

$$Y - y_0 = f'_{x_1}(x^0)dx_1 + f'_{x_2}(x^0)dx_2 + \dots + f'_{x_m}(x^0)dx_m = df(x^0)$$

kóriniske keledi.

Nátiyjede tómendegi juwmaqqa kelemiz: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciya argumentleri $x_1, x_2, \dots, x_m$ lerdiń mánislerine sáykes ósimler bereyik. Onda funkciyanıń sáykes ósimi

$$\Delta f(x^0) = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = y - y_0$$

(S) bet $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, y_0)$ hám $(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m, y)$ noqatlarınıń eń sońǵı, y koordinatası alǵan ósimdi bildiredi.

Funkciyanıń usı noqattaǵı differencialı bolsa

$$df(x^0) = Y - y_0$$

urınba tegislik $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, y_0)$ hám $(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m, Y)$ noqatlarınıń eń sońǵı, y koordinatası alǵan ósimdi bildiredi.

Dara jaǵdayda, $y = f(x_1, x_2)$ funkciya ashıq M ($M \subset \mathbb{R}^2$) kóplikte berilgen bolıp, $(x_1^0, x_2^0) \in M$ noqatta differenciallanıwshı bolsın. Bul funkciyanıń grafigi 14-sızılmada kórsetilgen (S) betti ańlatatuǵın bolsın.

(S) betke (x_1^0, x_2^0, y_0) noqatında ($y_0 = f(x_1^0, x_2^0)$) júrgizilgen urınba tegislik mına

$$Y - y_0 = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^0)$$

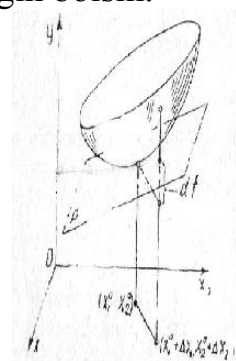
kóriniste bolıp, onnan

$$Y - y_0 = df(x_1^0, x_2^0)$$

ekenligi kelip shıǵadı. Demek, $y = f(x_1, x_2)$

funkciyanıń (x_1^0, x_2^0) noqattaǵı differencialı bul funkciya grafigine $(x_1^0, x_2^0, f(x_1^0, x_2^0))$ noqatında júrgizilgen urınba tegislik applikatasınıń ósiminen ibarat eken.

2. Quramalı funkciyanıń differencialı. $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciya M ($M \subset \mathbb{R}^m$) kóplikte berilgen bolıp, $x_1, x_2, \dots, x_m$ ózgeriwshileriniń hár biri óz



14 - sızılma

náwbetinde $t_1, t_2, \dots, t_k$ ózgeriwshilerdiń T ($T \subset \mathbb{R}^k$) kóplikte berilgen funkciyası bolsın:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1 \quad t_1, t_2, \dots, t_k \quad , \\ x_2 &= \varphi_2 \quad t_1, t_2, \dots, t_k \quad , \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_m &= \varphi_m \quad t_1, t_2, \dots, t_k \quad . \end{aligned} \tag{3}$$

Bunda $t_1, t_2, \dots, t_k \in T$ bolganda oğan sáykes $x_1, x_2, \dots, x_m \in M$ bolıp, mına $y = f \varphi_1 t_1, t_2, \dots, t_k, \varphi_2 t_1, t_2, \dots, t_k, \dots, \varphi_m t_1, t_2, \dots, t_k$ quramalı funksiya dúzilgen bolsın.

Meyli (3) funksiya $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0) \in T$ noqatda differensiallanishi bolib, $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in M$ noqatda differensiallanishi bolsin. Ol jagdayda 13.5-teoremağa saykes quramalı funksiya $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ noqatda differensiallanishi boladi. Onda quramalı funksiyanın usı noqattağı differensialı

$$df = \frac{\partial f}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial f}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial t_k} dt_k$$

bolad1.

Endi $\frac{\partial f}{\partial t_1}, \frac{\partial f}{\partial t_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial t_k}$ dara tuwındıladı, usı baptıń 4-§ de keltirilgen

(13.19) formulalardan paydalanıp esaplaymız:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_1}, \\ \frac{\partial f}{\partial t_2} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_2}, \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial t_k} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_k}. \end{aligned}$$

Nátiyjede

$$\begin{aligned} df &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_1} \right) dt_1 + \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_2} \right) dt_2 + \\ &+ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots + \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_k} \right) dt_k = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_1}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial x_1}{\partial t_k} \cdot dt_k \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial f}{\partial x_2} \left(\frac{\partial x_2}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_2}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial x_2}{\partial t_k} dt_k \right) + \\
& + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots + \\
& + \frac{\partial f}{\partial x_m} \left(\frac{\partial x_m}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_m}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial x_m}{\partial t_k} dt_k \right)
\end{aligned}$$

boladı.

Eger

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_1}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_1}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial x_1}{\partial t_k} dt_k &= dx_1 \\
\frac{\partial x_2}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_2}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial x_2}{\partial t_k} dt_k &= dx_2 \\
\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \\
\frac{\partial x_m}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_m}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial x_m}{\partial t_k} dt_k &= dx_m
\end{aligned}$$

ekenligin itibargá alsaq, onda quramalı funkciya differencialı ushın

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m \quad (4)$$

bolatuǵını kelip shıǵadı. Quramalı funkciya differencialın anıqlaytuǵın (4) formulanı dáslep qarap ótilgen (2 formula menen salıstırıp, funkciya quramalı bolǵan jaǵdayda funkciya differencialı funkciya dara tuwındıları

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad x_1, x_2, \dots, x_m \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \text{menen (bunda } x_1, x_2, \dots, x_m \text{ argumentleriniń}$$

hár biri $t_1, t_2, \dots, t_k$ ózgeriwshilerdiń funkciyası) sáykes argument differencialları $dx_i \quad i = 1, 2, \dots, m$ kóbeymesinen ibarat ekenin kóremiz. Solay etip, qaralıp atırǵan funkciyalar quramalı

$f = \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k)$
 $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_k), \quad i = 1, 2, \dots, m$ kóriniste bolǵanda da bul funkciyalardıń differencialları bir qıylı (13.22) formaǵa iye boladı (yaǵnıy differencial forması saqlanadı). Adette bul noqattaǵı differencial formasınıń **invariantlıǵı** delinedi.

Demek, kóp ózgeriwshili funkciyalarda da, bir ózgeriwshili funkciyalardaǵıday, differencial formasınıń invariantlıǵı qásiyeti orınlı eken.

Sonı óz aldına atap kórsetiw kerek, (13.22) ańlatpada $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ ler $x_1, x_2, \dots, x_m$ lerdiń qálegen ósimleri $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ ler bolmastan, olar $t_1, t_2, \dots, t_k$ ózgeriwshilerdiń funkciyaları boladı.

3. Funkciya differencialın esaplawdıń ápiwayı qaǵıydaları. $u = f(x)$

hám $v = g(x)$ funkciyalar ashıq M ($M \subset \mathbb{R}^m$) kóplikte berilgen bolıp, $x^0 \in M$

noqatta olar differenciallanıwshı bolsın. Onda $u \pm v$, $u \cdot v$, $\frac{u}{v}$ ($v \neq 0$)

funkciyalarda usı x^0 noqatta differenciallanıwshı boladı hám olardıń differencialları ushın tómendegi

$$1) d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$2) d(u \cdot v) = u dv + v du$$

$$3) d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2} \quad v \neq 0$$

formulalar orınlı boladı.

Bul ańlatpalardıń birewiniń, máselen, 2) niń dálilin keltiriw menen shegaralanamız.

$u = f(x)$ hám $v = g(x)$ funkciyalar kóbeymesin F funkciya dep qarayıq: $F = u \cdot v$. Nátiyjede F funkciya u hám v lar arqalı $x_1, x_2, \dots, x_m$ ózgeriwshilerdiń ($x = (x_1, \dots, x_m)$) quramalı funkciyası boladı. Quramalı funkciyanıń differencialın tabıw formulası (4) ge muwapıq

$$dF = \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot dv$$

boladı.

Eger

$$\frac{\partial F}{\partial u} = v, \quad \frac{\partial F}{\partial v} = u$$

ekenligin itibarǵa alsaq, onda

$$dF = v du + u dv$$

bolatuǵının tabamız. Demek

$$d(u \cdot v) = v du + u dv.$$

4. Juwıq formulalar. Funkciya matematikalıq analiz kursında úyreniletuǵın tiykarǵı ob'ekt ekenligi málim. Kópshilik máseleler bolsa funkciyalardı esaplaw(berilgen noqatta mánisin tabıw) menen baylanıslı. Qaralıp atırǵan funkciya quramalı kóriniste bolsa, onıń mánisin anıq esaplaw qıyınshılıǵı ayqın, ayırım jaǵdayda belgili usıllar menen esaplanbay qalıwı múmkin*

Sheksiz sandaǵı operaciyalardı orınlaw menen sheshiletuǵın máselelerdi, sonıń ishinde ayırım funkciyalardıń mánislerin esaplaw menen baylanıslı bolǵan máselelerdi sheshiwde qaralıp atırǵan funkciya onnan ápiwayıraq, esaplaw ushın ańsatıraq bolǵan funkciya menen almasırladı. Bunday almasırlawlar menen juwıq formulalardı payda etiwde funkciyanıń differencialı túsiniǵi áhmiyetli rol' oynaydı.

* Tuwrı, funkciyalardıń mánislerin esaplawda elektron esaplaw mashinalardan keń paydalanıladı. Anıq házirgi zaman elektron esaplaw mashinaları qısqa waqıt ishinde júdá kóp operaciyalardı orınlap, qoyılǵan mäseleni sheship beredi.

$f(x)$ funksiya ashıq M ($M \subset \mathbb{R}^m$) kóplikte berilgen bolıp, $x^0 \in M$ noqatta differenciallanıwshı bolsın. Onda anıqlamağa muwapıq

$$\Delta f = \Delta f(x^0) = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_m} \Delta x_m + o(\rho) = df(x^0) + o(\rho)$$

bolıp, bunnan $df \neq 0$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{df} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{df + o(\rho)}{df} = 1$$

bolıwı kelip shıǵadı. Bunnan tómendegi

$$\Delta f(x^0) \approx df(x^0) \quad (5)$$

juwıq formula kelip shıǵadı. Bul (5) formula $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ noqatta differenciallanıwshı $f(x)$ funksiyanıń usı noqattaǵı $\Delta f(x^0)$ ósimin, onıń x^0 noqattaǵı $df(x^0)$ differencialı menen juwıq almasıw múmkinligin kórsetedi. Bul almasıwdıń áhmiyeti sonda, funksiyanıń Δf ósimi $x_1, x_2, \dots, x_m$ $x = x_1, x_2, \dots, x_m$ ózgeriwshiler $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ ósimleriniń, ulıwma aytqanda, quramalı funksiya bolǵan jaǵdayda funksiyanıń df differencialı bolsa, $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ lerdiń sızıqlı funksiya bolıwında.

(5) formula mına

$$\begin{aligned} f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) \approx & f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \\ & + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\partial x_m} \Delta x_m \end{aligned} \quad (6)$$

kórinisinde jazıw múmkin.

Eger $\Delta x_1 = x_1 - x_1^0, \Delta x_2 = x_2 - x_2^0, \dots, \Delta x_m = x_m - x_m^0$ ekenin itibarǵa alsaq, onda joqarıdaǵı (6) formula tómendegishe boladı:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_m) \approx & f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\partial x_1} (x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\partial x_2} (x_2 - x_2^0) + \\ & + \dots + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\partial x_m} (x_m - x_m^0). \end{aligned}$$

Dara jaǵdayda, $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = 0, 0, \dots, 0 \in M$ bolǵanda

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) \approx f(0, 0, \dots, 0) + \frac{\partial f(0, 0, \dots, 0)}{\partial x_1} \cdot x_1 + \frac{\partial f(0, 0, \dots, 0)}{\partial x_2} x_2 + \dots + \frac{\partial f(0, 0, \dots, 0)}{\partial x_m} x_m$$

boladı.

5. Bir tekli funksiya. $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funksiya ashıq M ($M \subset \mathbb{R}^m$) kóplikte berilgen. M kóplikte $x_1, x_2, \dots, x_m$ noqat penen mına $tx_1, tx_2, \dots, tx_m$ noqat $-\infty < t < \infty$ ta usı M kóplikke tiyisli bolsın.

13.5-anıqlama. Eger $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciya ushın

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_m) = t^\rho f(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (7)$$

$$x_1, x_2, \dots, x_m \in M, \quad \rho \in R$$

bolsa, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ρ -tártipli bir tekli funkciya dep ataladı.

Mısallar. 1. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ funkciya ekinshi tártipli bir tekli funkciya boladı, sebebi

$$f(tx_1, tx_2) = (tx_1)^2 + (tx_2)^2 = t^2(x_1^2 + x_2^2) = t^2 f(x_1, x_2)$$

2. $f(x_1, x_2) = \arctg \frac{x_2}{x_1} + e^{\frac{x_1}{x_2}}$ funkciyanı qarayıq .

Bunda

$$f(tx_1, tx_2) = \arctg \frac{tx_2}{tx_1} + e^{\frac{tx_1}{tx_2}} = \arctg \frac{x_2}{x_1} + e^{\frac{x_1}{x_2}} = f(x_1, x_2) .$$

boladı. Demek berilgen funkciya nólinshi tártipli bir tekli funkciya eken.

3. Mına

$$f(x_1, x_2) = e^{\sin x_1 x_2}$$

funkciya ushın (13.25) shárt orınlanbaydı. Demek, bir tekli funkciya emes.

Meyli $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ p -tártipli bir tekli funkciya M kóplikte differencialla-nıwshı bolsın. Onda

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_m) = t^p f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

teńliktiń hár eki jaǵın t boyınsha differenciallap tómendegini tabamız:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(tx_1, tx_2, \dots, tx_m)}{\partial tx_1} x_1 + \frac{\partial f(tx_1, tx_2, \dots, tx_m)}{\partial tx_2} x_2 + \dots + \frac{\partial f(tx_1, tx_2, \dots, tx_m)}{\partial tx_m} x_m = \\ = pt^{p-1} f(x_1, x_2, \dots, x_m) . \end{aligned}$$

Dara jaǵdayda, $t = 1$ bolǵanda

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_2} x_2 + \dots + \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_m} x_m = \\ = p f(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{aligned} \quad (8)$$

boladı. Bul (8) **Eyler formulası** dep ataladı.

Aytayıq, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciya nólinshi tártipli bir tekli funkciya bolsın.

Anıqlamaǵa muwapıq

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_m) = t^0 \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

boladı. Eger bul teńlikte $t = \frac{1}{x_1}$ $x_1 \neq 0$ dep alsaq, onda

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_m}{x_1}\right)$$

bolıp, nátiyjede m ózgeriwshige baylanıslı bolǵan $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciya

$m-1$ $y_1, y_2, \dots, y_{m-1}$ ($y_1 = \frac{x_2}{x_1}, y_2 = \frac{x_3}{x_1}, \dots, y_{m-1} = \frac{x_m}{x_1}$) ózgeriwshige baylanıslı

bolǵan funkciyaǵa aylanadı:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = F(y_1, y_2, \dots, y_{m-1})$$

Endi $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciya ρ -tártıplı bir tekli funkciya bolsın. Onda

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_m) = t^0 \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

boladı. Eger bul teńlikte $t = \frac{1}{x_1}$ $x_1 \neq 0$ dep alsaq, onda

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_m) = f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_m}{x_1}\right) = F\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_m}{x_1}\right)$$

bolatuǵını kelip shıǵadı.

Demek, r -tártıplı bir tekli funkciya mına

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = x_1^p \cdot F\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_m}{x_1}\right)$$

kóriniske iye bolar eken.

11-lekciya

Joqarı tártıplı dara tuwındılar. Joqarı tártıplı differenciallar. Eki ózgeriwshili funkciya ushın Teylor formulası.

Funkciyanıń joqarı tártıplı dara tuwındıları.

$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciya ashıq M ($M \subset R^m$) kóplikte berilgen bolıp, onıń hár bir $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ noqatında $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_m}$ dara tuwındılarǵa iye bolsın. Bul dara tuwındılar óz nábwetinde $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ózgeriwshilerge baylanıslı bolıp, olardıń funkciyaları bolatuǵını ayqın. Demek, berilgen funkciya dara tuwındıları $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_m}$ lardıń da dara tuwındıların qaraw múmkin.

1-anıqlama. $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciya dara tuwındıları $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_m}$ lerdiń x_k $k = 1, 2, \dots, m$ ózgeriwshi boyınsha dara tuwındıları berilgen funkciyanıń **ekinshi tártıplı dara tuwındıları** dep ataladı hám

$$f''_{x_1 x_k}, f''_{x_2 x_k}, \dots, f''_{x_m x_k} \quad k = 1, 2, \dots, m$$

yamasa

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_k}, \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_k} \quad k = 1, 2, \dots, m$$

dep belgilenedi. Demek

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k} = f''_{x_1 x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_k} = f''_{x_2 x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right),$$

... ..

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_k} = f''_{x_m x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_m} \right) \quad k = 1, 2, \dots, m$$

Bul ekinshi tártipli dara tuwındıladı ulıwma jaǵdayda

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = f''_{x_i x_k} \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, m$$

kóriniste jazıw múmkin, bunda $k = i$ bolǵanda

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_k} = f''_{x_k x_k}$$

dep jazıwdıń ornına

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = f''_{x_k^2}$$

dep jazıladı.

Eger joqarıdaǵı ekinshi tártipli dara tuwındılar túrli ózgeriwshiler boyınsha alınǵan bolsa, onda bul

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = f''_{x_i x_k} \quad i \neq k$$

2-tártipli dara tuwındılar **aralas tuwındılar** dep ataladı.

Soǵan uqsas, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciyanıń úshinshi, tórtinshi hám taǵı sonday tártiptegi dara tuwındıları anıqlanadı. Ulıwma, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciya $n - 1$ tártipli dara tuwındınıń dara tuwındısı berilgen funkciyanıń **n-tártipli dara tuwındısı** dep ataladı.

Somida aytıw kerek, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciyanıń $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$ ózgeriwshileri boyınsha túrli tártipte alınǵan dara tuwındılar berilgen funkciyanıń túrli aralas tuwındıların júzege keltiredi.

Mısallar 1. Mına

$$f(x_1, x_2) = \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2} \quad x_2 \neq 0$$

funkciyanıń 2-tártipli dara tuwındıların tabamız:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) = -\frac{2x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right) = \frac{2x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}.$$

2. Mına

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{eger } x_1^2 + x_2^2 \neq 0 \text{ bolsa,} \\ 0, & \text{eger } x_1^2 + x_2^2 = 0 \text{ bolsa} \end{cases}$$

funkciyanıń aralas tuwındıların tabamız.

Aytayıq $x_1, x_2 \neq 0, 0$ bolsın. Onda

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 \left(\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{4x_1^2 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 \left(\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{4x_1^2 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \left(1 + \frac{8x_1^2 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \left(1 + \frac{8x_1^2 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \right)$$

boladı.

Berilgen $f(x_1, x_2)$ funkciyanıń $(0,0)$ noqattaǵı dara tuwındıların anıqlamaǵa muwapıq tabamız:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x_1, 0) - f(0,0)}{\Delta x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta x_2) - f(0,0)}{\Delta x_2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) = \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, \Delta x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)}{\Delta x_2} = \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{-\Delta x_2^3}{\Delta x_2^3} = -1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0) = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(\Delta x_1, 0) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta x_1^3}{\Delta x_1^3} = 1.$$

Bul keltirilgen mısallardan kórinedi, funkciyanıń $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ hám $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ aralas tuwındılar bir-birine teń bolıwıda, bolmaslıǵıda múmkin eken.

1-teorema. $f(x_1, x_2)$ funkciya ashıq M ($M \subset R^2$) kóplikte berilgen bolıp, usı kóplikte f'_{x_1}, f'_{x_2} jánede $f''_{x_1 x_2}, f''_{x_2 x_1}$ aralas tuwındılarǵa iye bolsın. Eger aralas tuwındılar $(x_1^0, x_2^0) \in M$ noqatta úzliksiz bolsa, onda usı noqatta

$$f''_{x_1 x_2}(x_1^0, x_2^0) = f''_{x_2 x_1}(x_1^0, x_2^0)$$

boladı.

Dálil. (x_1^0, x_2^0) noqat koordinatalarına sáykes túrde sonday $\Delta x_1 > 0, \Delta x_2 > 0$ ósimler bereyik,

$$\Delta = \{x_1, x_2 \in R^2 : x_1^0 \leq x_1 \leq x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 \leq x_2 \leq x_2^0 + \Delta x_2\} \subset M$$

bolsin. Bul tuwrı tórtmúyeshlik ushların kórsetetuǵın $(x_1^0, x_2^0), (x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0), (x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2), (x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2)$ noqatlarda funkciyanıń mánislerin tawıp, olardan mına

$$P = [f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2) - f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0) - f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2) + f(x_1^0, x_2^0)]$$

ańlatpasın hasıl qılamız. Bul ańlatpanı tómendegi eki

$$P = [f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2) - f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0)] - [f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2) - f(x_1^0, x_2^0)],$$

$$P = [f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2) - f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2)] - [f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0) - f(x_1^0, x_2^0)]$$

kóriniste jazıw múmkin.

Endi berilgen, $f(x_1, x_2)$ funkciya járdeminde x_1 ózgeriwshige baylanıslı bolǵan

$$\varphi(x_1) = f(x_1, x_2^0 + \Delta x_2) - f(x_1, x_2^0),$$

x_2 ózgeriwshige baylanıslı bolǵan

$$\psi(x_2) = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2)$$

funkciyalardı dúzeyik. $\varphi(x_1)$, $\psi(x_2)$ funkciyalar

$$\varphi'(x_1) = f'_{x_1}(x_1, x_2^0 + \Delta x_2) - f'_{x_1}(x_1, x_2^0)$$

$$\psi'(x_2) = f'_{x_2}(x_1^0 + \Delta x_1, x_2) - f'_{x_2}(x_1^0, x_2)$$

tuwındılarǵa iye bolıp, Lagranj teoreması boyınsha

$$\varphi'(x_1) = f''_{x_1 x_2}(x_1, x_2^0 + \theta_2 \Delta x_2) \Delta x_2,$$

$$\psi'(x_2) = f''_{x_2 x_1}(x_1^0 + \theta_1 \Delta x_1, x_2) \Delta x_1 \quad (2)$$

boladı, bunda $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$.

Joqarıda keltirilgen P ańlatpanı $\varphi(x_1)$ hám $\psi(x_2)$ funkciyalar arqalı mına

$$P = \varphi(x_1^0 + \Delta x_1) - \varphi(x_1^0),$$

$$P = \psi(x_2^0 + \Delta x_2) - \psi(x_2^0)$$

kóriniste jazıp, soń jáne Lagranj teoremasın qollanıp tómendegilerdi tabamız:

$$P = \varphi'(x_1^0 + \theta_1 \Delta x_1) \Delta x_1, \quad P = \psi'(x_2^0 + \theta_2 \Delta x_2) \Delta x_2$$

$$0 < \theta'_1, \theta'_2 < 1. \quad (3)$$

Nátiyjede (2) hám (3) ańlatpalardan

$$P = f''_{x_1 x_2} (x_1^0 + \theta'_1 \Delta x_1, x_2^0 + \theta_2 \Delta x_2) \Delta x_1 \Delta x_2,$$

$$P = f''_{x_2 x_1} (x_1^0 + \theta_1 \Delta x_1, x_2^0 + \theta'_2 \Delta x_2) \Delta x_1 \Delta x_2$$

bolıp, olardan

$$f''_{x_1 x_2} (x_1^0 + \theta'_1 \Delta x_1, x_2^0 + \theta_2 \Delta x_2) = f''_{x_2 x_1} (x_1^0 + \theta_1 \Delta x_1, x_2^0 + \theta'_2 \Delta x_2) \quad (4)$$

bolatuǵını kelip shıǵadı.

Shárt boyınsha $f''_{x_1 x_2}$ hám $f''_{x_2 x_1}$ aralas tuwındılar (x_1^0, x_2^0) noqatta úzliksiz. Sonıń ushın (4) de $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0$ (bunda $x_1^0 + \theta'_1 \Delta x_1 \rightarrow x_1^0, x_2^0 + \theta_2 \Delta x_2 \rightarrow x_2^0, x_1^0 + \theta_1 \Delta x_1 \rightarrow x_1^0, x_2^0 + \theta'_2 \Delta x_2 \rightarrow x_2^0$) limitke ótsek,

$$f''_{x_1 x_2} (x_1^0, x_2^0) = f''_{x_2 x_1} (x_1^0, x_2^0)$$

boladı. Bul teoremanı dálilleydi.

Eger f_{x_1, x_2} funkciya ashıq M ($M \subset R^2$) kóplikte joqarı tártipli úzliksiz dara tuwındılarǵa iye bolsa, bul tuwındılarǵa qarata joqarıdaǵı teoremanı qaytadan qollanıw múmkin.

Máselen, $f'_1, f'_2, f''_{x_1 x_2}$ lerge teoremanı qollap tómendegilerdi tabamız:

$$f'''_{x_1 x_1 x_2} = f'''_{x_1 x_2 x_1} = f'''_{x_2 x_1 x_1},$$

$$f'''_{x_1 x_2 x_2} = f'''_{x_2 x_2 x_1} = f'''_{x_2 x_2 x_1}$$

$$f^{(IV)}_{x_1 x_1 x_2 x_2} = f^{(IV)}_{x_1 x_2 x_1 x_2} = f^{(IV)}_{x_1 x_2 x_2 x_1} = f^{(IV)}_{x_2 x_1 x_1 x_2} = f^{(IV)}_{x_2 x_1 x_2 x_1} = f^{(IV)}_{x_2 x_2 x_1 x_1}.$$

Funkciyanıń joqarı tártipli differencialları. Kóp ózgeriwshili funkciyanıń joqarı tártipli differencialı túsiniǵı keltiriwden aldın, funkciyanıń $n > 1$ márte differenciallanıwshılıǵı túsiniǵı menen tanısamız.

$f(x)$ funkciya ashıq M ($M \subset R^m$) kóplikte berilgen bolıp, $x^0 \in M$ bolsın. Bizge málim $f(x)$ funkciyanıń x^0 noqattaǵı ósimi mına

$$\Delta f(x^0) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + o(\rho).$$

kóriniste jazılsa, funkciya x^0 noqatta differenciallanıwshı dep atalar edi, bunda $A_1, A_2, \dots, A_m$ – turaqlı sanlar, $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_m^2}$. Bul jaǵdayda $A_i = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Aytayıq, $f(x)$ funkciya M kóplikte $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_m}$ dara tuwındılarǵa iye bolsın. Eger bul dara tuwındılar x^0 noqatta differenciallanıwshı bolsa, $f(x)$ usı noqatta eki márte **differenciallanıwshı funkciya dep ataladı**.

Ulıwma, $f(x)$ funkciya M kóplikte barlıq $n-1$ - tártipli dara tuwındılarǵa iye bolıp, bul dara tuwındılar $x^0 \in M$ noqatta differenciallanıwshı bolsa, $f(x)$ funkciya x^0 noqatta n márte **differenciallanıwshı funkciya dep ataladı**.

2-teorema. Eger ashıq M kóplikte $f(x)$ funkciyanıń barlıq n -tártipli dara tuwındıları bar hám $x^0 \in M$ noqatta úzliksiz bolsa, $f(x)$ funkciya x^0 noqatta n márte differenciallanıwshı boladı.

Meyli, $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciya ashıq M ($M \subset R^m$) kóplikte berilgen bolıp, ol $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in M$ noqatta differenciallanıwshı bolsın. Onda bul funkciyanıń x noqattaǵı differencialı

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m \quad (5)$$

boladı, bunda $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ ler $x_1, x_2, \dots, x_m$ ózgeriwshilerdiń iqtıyarlı ósimleri.

Endi $f(x)$ funkciya $x \in M$ noqatta eki márte differenciallanıwshı bolsın.

2-anıqlama. $f(x)$ funkciyanıń x noqattaǵı differencialı $df(x)$ diń differencialı berilgen $f(x)$ funkciyanıń **ekinshi tártipli differencialı** dep ataladı hám d^2f dep belgilenedi:

$$d^2f = d(df).$$

Joqarıdaǵı (5) ańlatpanı itibarǵa alıp, differenciallaw qaǵıydalarınan paydalanıp tómendegini tabamız:

$$d^2f = d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= dx_1 d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) + dx_2 d\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) + \dots + dx_m d\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right) = \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} dx_m\right) dx_1 + \\
&+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} dx_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} dx_2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m} dx_m\right) dx_2 + \\
&+ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots + \\
&+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} dx_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} dx_m\right) dx_m = \quad (6) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} dx_2^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} dx_m^2 + \\
&+ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} dx_1 dx_3 + \dots + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} dx_1 dx_m + \\
&+ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} dx_2 dx_3 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_4} dx_2 dx_4 + \dots + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m} dx_2 dx_m + \\
&+ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots + \\
&+ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_{m-1} \partial x_m} dx_{m-1} dx_m.
\end{aligned}$$

$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciyanıń $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ noqattaǵı úshinshi, tórtinshi hám taǵı sonday tártipli differencialları da dál joqarıdaǵıday anıqlanadı.

Ulıwma, $f(x)$ funkciyanıń x noqatındaǵı $(n-1)$ tártipli differencialı $d^{n-1}f(x)$ tıń differencialı berilgen $f(x)$ funkciyanıń usı noqattaǵı **n - tártipli differencialı** dep ataladı hám $d^n f$ dep belgilenedi. Demek,

$$d^n f = d \ d^{n-1} f .$$

Biz joqarıda $f(x)$ funkciyanıń ekinshi tártipli differencialı onıń dara tuwındıları arqalı (6) qatnası menen ańlatatuǵının kórdik.

$f(x)$ funkciyanıń keyingi tártipli differenciallarınıń funkciya dara tuwındıları arqalı ańlatpası barǵan sayın quramalasıp baradı. Sol sebepli joqarı

tártili differencialardı, simvolliq kóriniste, ápiwayıraq formada ańlatıw áhmiyetli.

$f(x)$ funksiya differencialı

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m$$

di simvolliq kóriniste (f ti formal túrde qawsırmadan shıǵarıp) tómendegishe

$$df = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right) f$$

jazamız. Onda funksiyanıń ekinshi tártili differencialın

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^2 f \quad (7)$$

dep qaraw múmkin. Bunda qawsırma ishindegi qosındı kvadratqa kóterilip, soń f ke «kóbeytiriledi». Keyin dáreje kórsetkishleri dara tuwındılar tártili dep esaplanadı.

Usı tárizde kiritilgen simvolliq ańlatıw $f(x)$ funksiyanıń n -tártili differencialın

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^n f$$

dep jazıw imkaniyatın beredi.

Kóp ózgeriwshili funksiyanıń Teylor formulası

1-bólim, 6-bap, 7-§ de bir ózgeriwshili funksiyanıń Teylor formulası, onıń túrli formada jazılıwı hámde Teylor formulasınıń túrli formadaǵı qaldıq aǵzaları úyrenilgen edi. Máselen, $F(t)$ funksiya $t = t_0$ noqattıń dógerinde berilgen bolıp, onda $F'(t), F''(t), \dots, F^{(n+1)}(t)$ tuwındılarǵa iye bolǵanda

$$F(t) = F(t_0) + F'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2!} F''(t_0)(t - t_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} F^{(n)}(t_0)(t - t_0)^n + R_n(t) \quad (1)$$

boladı, bunda qaldıq aǵza $R_n(t)$ bolsa tómendegishe

$$a) \text{ Koshi kórinisinde } R_n(t) = \frac{F^{(n+1)}(c)}{n!} (t - t_0)^{n+1} (1 - \theta)^n,$$

$$b) \text{ Lagranj kórinisinde } R_n(t) = \frac{F^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (t - t_0)^{n+1},$$

$$v) \text{ Peano kórinisinde } R_n(t) = \theta((t - t_0)^n)$$

jazıladı (bunda $0 < \theta < 1$, $c = t_0 + \theta(t - t_0)$).

$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciya ashıq M ($M \subset R^m$) kóplikte berilgen. Bul kóplikte $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ noqattı alıp, onıń $U_\delta((x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)) \subset M$ dógeregin qarayıq. Kórinip tur, $\forall x_1', x_2', \dots, x_m' \in U_\delta((x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0))$ noqat penen $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ noqattı tutastırıwshı tuwrı sızıq kesindisi

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_m \in R^m : x_1 = x_1^0 + t(x_1' - x_1^0),$$

$$x_2 = x_2^0 + t(x_2' - x_2^0), \dots, x_m = x_m^0 + t(x_m' - x_m^0); 0 \leq t \leq 1$$

usı $U_\delta((x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0))$ dógerекке tiyisli boladı.

Aytayıq, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciya $U_\delta((x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0))$ de $n+1$ márte differenciallanıwshı bolsın.

Endi $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciyanı A kóplikte qarayıq. Onda

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(x_1^0 + t(x_1' - x_1^0), x_2^0 + t(x_2' - x_2^0), \dots, x_m^0 + t(x_m' - x_m^0))$$

bolıp, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ t ózgeriwshiniń $[0,1]$ de berilgen funkciyasına aylanıp qaladı:

$$F(t) = f(x_1^0 + t(x_1' - x_1^0), x_2^0 + t(x_2' - x_2^0), \dots, x_m^0 + t(x_m' - x_m^0)), 0 \leq t \leq 1. \quad (2)$$

Bul funkciyanıń tuwındıların esaplayıq:

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1} (x_1' - x_1^0) + \frac{\partial f}{\partial x_2} (x_2' - x_2^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} (x_m' - x_m^0) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (x_1' - x_1^0) + \frac{\partial}{\partial x_2} (x_2' - x_2^0) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} (x_m' - x_m^0) \right) f,$$

$$F''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} (x_1' - x_1^0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} (x_2' - x_2^0)^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} (x_m' - x_m^0)^2 +$$

$$+2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} (x'_1 - x_1^0)(x'_2 - x_2^0) + \dots + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_{m-1}^2 \partial x_m} (x'_{m-1} - x_{m-1}^0)(x'_m - x_m^0) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (x'_1 - x_1^0) + \frac{\partial}{\partial x_2} (x'_2 - x_2^0) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} (x'_m - x_m^0) \right)^2 f.$$

Ulıwma k-tártipli tuwındı mına

$$F^{(k)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (x'_1 - x_1^0) + \frac{\partial}{\partial x_2} (x'_2 - x_2^0) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} (x'_m - x_m^0) \right)^k f$$

$$k = 1, 2, \dots, n+1 \quad (3)$$

kórinisinde boladı. (Onıń durısıǵı matematikalıq indukciya metodı járdeminde dálillenedi).

Joqarıdaǵı $F'(t)$, $F''(t)$, ..., $F^{(n)}(t)$ tuwındılarınıń ańlatpalarına kirgen $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciyanıń barlıq dara tuwındıları

$$(x_1^0 + t(x'_1 - x_1^0), x_2^0 + t(x'_2 - x_2^0), \dots, x_m^0 + t(x'_m - x_m^0))$$

noqatta esaplangan.

(1) formulada $t_0 = 0$ hám $t = 1$ dep alınsa, mına

$$F(1) = F(0) + \frac{1}{1!} F'(0) + \frac{1}{2!} F''(0) + \dots + \frac{1}{n!} F^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!} F^{(n+1)}(\theta)$$

$$, \quad 0 < \theta < 1 \quad (4)$$

hasıl boladı. (Bul jerde qaldıq aǵza Lagranj kórinisinde alınǵan).

(3) hám (4) ańlatpalarınan paydalanıp tómendegilerdi tabamız:

$$F(0) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0),$$

$$F(1) = f(x'_1, x'_2, \dots, x'_m),$$

$$F^{(k)}(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (x'_1 - x_1^0) + \frac{\partial}{\partial x_2} (x'_2 - x_2^0) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} (x'_m - x_m^0) \right)^k f,$$

$$k = 1, 2, \dots, n+1$$

Keyingi teńliktegi $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciyanıń barlıq dara tuwındıları $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ noqatta esaplangan.

Demek, (1) formulaǵa muwapıq

$$\begin{aligned}
f(x'_1, x'_2, \dots, x'_m) &= f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) + \left(\frac{\partial}{\partial x_1} x'_1 - x_1^0 + \frac{\partial}{\partial x_2} x'_2 - x_2^0 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} x'_m - x_m^0 \right) f + \\
&+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} x'_1 - x_1^0 + \frac{\partial}{\partial x_2} x'_2 - x_2^0 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} (x'_m - x_m^0) \right) f + \\
&+ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots + \\
&+ \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} x'_1 - x_1^0 + \frac{\partial}{\partial x_2} x'_2 - x_2^0 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} x'_m - x_m^0 \right)^n f + \\
&+ \frac{1}{n+1!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} x'_1 - x_1^0 + \frac{\partial}{\partial x_2} x'_2 - x_2^0 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} x'_m - x_m^0 \right)^{n+1} f
\end{aligned}$$

boladı, bunda $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funksiyanın barlıq birinshi, ekinshi hám tağı basqa n -tártipli dara tuwındıları $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ noqatta, usı funksiyanın barlıq $n+1$ -tártipli dara tuwındıları bolsa $(x_1^0 + \theta(x'_1 - x_1^0), x_2^0 + \theta(x'_2 - x_2^0), \dots, x_m^0 + \theta(x'_m - x_m^0))$ $0 < \theta < 1$ noqatta esaplangan.

Bul formula kóp ózgeriwshili $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funksiyanın **Taylor formulası** dep ataladı.

Dara jaǵdayda, eki ózgeriwshili funksiyanın **Taylor formulası** tómendegishe boladı:

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2) &= f(x_1^0, x_2^0) + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} x_1 - x_1^0 + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} x_2 - x_2^0 + \\
&+ \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1^2} (x_1 - x_1^0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1 \partial x_2} (x_1 - x_1^0)(x_2 - x_2^0) + \right. \\
&\left. + \frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2^2} (x_2 - x_2^0)^2 \right] + \dots + \frac{1}{n!} \left[\frac{\partial^n f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1^n} (x_1 - x_1^0)^n + \right. \\
&\left. + \frac{\partial^n f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1^{n-1} \partial x_2} (x_1 - x_1^0)^{n-1} (x_2 - x_2^0) + \dots + \frac{\partial^n f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2^n} (x_2 - x_2^0)^n \right] + \\
&+ \frac{1}{n+1!} \left[\frac{\partial^{n+1} f(x_1^0 + \theta(x_1 - x_1^0), x_2^0 + \theta(x_2 - x_2^0))}{\partial x_1^{n+1}} (x_1 - x_1^0)^{n+1} + \dots + \right.
\end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial^{n+1} f(x_1^0 + \theta(x_1 - x_1^0), x_2^0 + \theta(x_2 - x_2^0))}{\partial x_2^{n+1}} x_2 - x_2^0 \Big]^{n+1}.$$

12-lekciya

Bir hám kóp ózgeriwshili ayqın emes funkciyalar. Ayqın emes funkciyanıń bar bolıwı hám differenciyanıwshılıǵı

Ayqın emes funkciya túsiniǵı. Bul kurstıń 1-bólimi, 4-bap. 1-§ inde funkciya anıqlaması keltirilgen edi. Onı esletip ótemiz. Eger X kópliktegi $X \subset R$ hár bir x sanǵa qandayda bir qaǵıyda yamasa nızamǵa muwapıq Y kóplikten $Y \subset R$ bir y san sáykes qoyılǵan bolsa, X kóplikte funkciya berilgen dep aytılar hám ol

$$f : x \rightarrow y \text{ yamasa } y = f(x)$$

dep belgilener edi. Bunda x ke y ti sáykes qoyatuǵın qaǵıyda yamasa nızam hár túrli, solardan analitikalıq, keste hám grafik usıllar da bolıwın kórdik. Máselen, funkciyanıń grafik usılında beriliwinde x penen y arasındaǵı baylanıs tegisliktegi iymek sıızıq járdeminde orınlanatuǵın edi.

Endi eki x hám y argumentlerdiń $F(x,y)$ funkciyası

$$M = \{x, y \in R^2 : a < x < b, c < y < d\}$$

kóplikte berilgen bolsın. Mına

$$F(x, y) = 0$$

teńlemenı qarayıq. Qandayda bir x_0 sandı ($x_0 \in (a, b)$) alıp, onı joqarıdaǵı teńlemedegi x tiń ornına qoyamız. Nátiyjede y ti tabıw ushın tómendegi

$$F(x_0, y) = 0 \quad (1)$$

teńlemege kelemiz. Bul teńlemenıń sheshimi haqqında mına jaǵdaylar bolıwı múmkin:

- 1°. (1) teńleme jalǵız haqıyqıy y_0 sheshimge iye,
- 2°. (1) teńleme birde haqıyqıy sheshimge iye emes,
- 3°. (1) teńleme birneshe, hátte sheksiz kóp haqıyqıy sheshimge iye.

Máselen,

$$F(x, y) = \begin{cases} y - x^2, & \text{eger } x \geq 0 \text{ bolsa,} \\ y^2 + x, & \text{eger } x < 0 \text{ bolsa} \end{cases}$$

bolsın. Onda

$$F(x, y) = 0 \quad (2)$$

teńleme $x_0 \geq 0$ bolǵanda jalǵız $y = x_0^2$ sheshimge, $x_0 < 0$ bolǵanda eki

$$y = \sqrt{-x_0}, \quad y = -\sqrt{-x_0}$$

sheshimlerde iye boladı.

Eger bazıbir $F(x, y)$ teńleme ushın 1°-jaǵday orınlı bolsa, bunday teńleme itibarǵa ılayıq. Onıń járdeminde funkciya anıqlanıwı múmkin.

Endi x ózgeriwshiniń mánislerinen ibarat sonday X kóplikti qarayıq, bul kóplikten alınǵan hár bir mániste $F(x, y) = 0$ teńleme jalǵız sheshimge iye bolsın.

X kóplikten qálegen x sanın alıp, bul sanǵa $F(x, y) = 0$ teńlemeniniń jalǵız sheshimi bolǵan y sanın sáykes qoyamız. Nátiyjede X kóplikten alınǵan hár bir x ke joqarıda kórsetilgen qaǵıydaǵa muwapıq bir y sáykes qoyılıp, funkciya payda boladı. Bunda x hám y ózgeriwshileri arasındǵı baylanıs $F(x, y) = 0$ teńleme járdeminde boladı. Ádette bunday berilgen (anıqlanǵan) funkciya **ayqın emes kóriniste berilgen funkciya** (yamasa **ayqın emes funkciya**) dep ataladı hám

$$x \rightarrow y : F(x, y) = 0$$

dep belgilenedi.

Mısallar. 1. Mina

$$F(x, y) = y\sqrt{x^2 - 1} - 2$$

funkciyanı qarayıq. Kórinip tur,

$$F(x, y) = y\sqrt{x^2 - 1} - 2 = 0 \quad (3)$$

teńleme x tiń $R \setminus x \in R : -1 \leq x \leq 1$ dep alınǵan hár bir mánisinde jalǵız

$$y = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

sheshimge iye, bunnan

$$F\left(x, \frac{2}{\sqrt{x^2 - 1}}\right) = 0$$

Nátiyjede (3) teńleme járdeminde berilgen mına

$$x \rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 1}} : F\left(x, \frac{2}{\sqrt{x^2 - 1}}\right) = 0$$

ayqın emes kórinistegi funkciyaǵa iye bolamız.

2. Mına

$$F(x, y) = x - y + \frac{1}{2} \sin y = 0 \quad (4)$$

teńlemenı qarayıq. Onı tómendegishe

$$x = y - \frac{1}{2} \sin y = \varphi(y) \quad y \in -\infty, \infty$$

kóriniste jazıp alamız. Kórinip tur, $\varphi(y)$ funkciya $-\infty, \infty$ de úzliksiz hám $\varphi'(y) = 1 - \frac{1}{2} \cos y > 0$ tuwındıǵa iye.

Onda kerı funkciya haqqındaǵı teoremaǵa muwapıq (1-bólim, 5-bap, 7-§) $y = \varphi^{-1}(x)$ funkciya bar. Demek, $-\infty, \infty$ den alınǵan x tiń hár bir mánisinde (4) teńleme jalǵız $y = \varphi^{-1}(x)$ sheshimge iye, bunnan

$$F(x, \varphi^{-1}(x)) = 0.$$

Hár bir x ke $\varphi^{-1}(x)$ ti sáykes qoyıp,

$$x \rightarrow \varphi^{-1}(x) : F(x, \varphi^{-1}(x)) = 0$$

ayqın emes funkciyaǵa iye bolamız.

3. Joqarıda keltirilgen (2) teńlemede $x \geq 0$ de

$$x \rightarrow x^2 : F(x; x^2) = 0$$

ayqın emes kórinistegi funkciyanı anıqlaydı.

4. Tómendegi

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - \ln y = 0 \quad y > 0$$

teńlemenı qarayıq. Bul teńleme x tń $-\infty, \infty$ aralıqtan alıńǵan hesh bir mánisinde sheshimge iye emes. Sebebi b́arqulla $y^2 - \ln y > 0$. Bul jaǵdayda berilgen teńleme járdeminde funkciya anıqlanbaydı.

1-eskertiw. Meyli mına

$$F(x, y) = 0$$

teńleme ayqın emes kórinistegi funkciyanı anıqlamasın. Ayırım waqıtta, bul jaǵdayda y ke belgili shárt qoyıw nátiyjesinde joqarıdaǵı teńleme ayqın emes kórinistegi funkciyanı anıqlawı ḿumkin.

Máselen, tómendegi

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (5)$$

teńlemenı qarayıq. Bul teńleme x tń $(-1, 1)$ aralıqtan alıńǵan hár bir mánisinde eki

$$y = -\sqrt{1 - x^2}, \quad y = \sqrt{1 - x^2}$$

sheshimge iye. Eger y ke, onıń mánisleri $[-1, 0]$ segmentte bolsın dep shárt qoyılsa, onda (13.50) teńleme járdeminde anıqlanǵan

$$x \rightarrow -\sqrt{1 - x^2}, \quad F(x, -\sqrt{1 - x^2}) = 0$$

ayqın emes kórinistegi funkciya payda boladı.

Ayqın emes funkciyanıń bar bolıwı.

Biz joqarıda

$$F(x, y) = 0$$

teńleme járdeminde b́arqulla ayqın emes kórinistegi funkciya anıqlana bermeytuǵının kórdik.

Endi teńleme, yaǵnıy $F(x, y)$ funkciya qanday shártlerdi qanaatlandırǵanda ayqın emes kórinistegi funkciyanıń bar bolıwı máselesi menen shuǵıllanamız.

1-teorema. $F(x, y)$ funkciya $x_0, y_0 \in R^2$ noqattıń bazıbir

$$U_{h,k}(x_0, y_0) = \{x, y \in R^2 : x_0 - h < x < x_0 + h, y_0 - k < y < y_0 + k\}$$

dógeresinde $h > 0, k > 0$ berilgen hám ol tómendegi shártlerdi qanaatlandırsın:

1) $U_{h,k} \quad x_0; y_0$ de úzliksiz;

2) x ózgeriwshiniń $x_0 - h; x_0 + h$ aralıqtan alınǵan hár bir tayınlanǵan mánisinde y ózgeriwshiniń funkciyası sıpatında ósiwshi;

3) $F(x_0, y_0) = 0$.

Onda (x_0, y_0) noqattıń sonday

$$U_{\delta, \varepsilon} \quad x_0, y_0 = \{x, y \in R^2 : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \quad y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon\}$$

dógeregi $0 < \delta < h, \quad 0 < \varepsilon < h$ tabılıp;

1') $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ushın

$$F(x, y) = 0$$

teńleme jalǵız y sheshimge $y \in [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ iye, yaǵnıy $F(x, y) = 0$ teńleme járdeminde

$$x \rightarrow y : F(x, y) = 0$$

ayqın emes kórinistegi funkciya anıqlanadı.

2') $x = x_0$ bolǵanda oǵan sáykes kelgen $y = y_0$ boladı,

3') ayqın emes kóriniste anıqlanǵan $x \rightarrow y : F(x, y) = 0$ funkciya $x_0 - \delta; x_0 + \delta$ aralıqta úzliksiz boladı.

Dálil. $U_{h,k} \quad x_0, y_0$ dógerekke tiyisli bolǵan $x_0, y_0 - \varepsilon, \quad x_0, y_0 + \varepsilon$ noqatların alayıq. Kórinip tur, $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ aralıqta $F(x, y)$ funkciya ósiwshi boladı.

Demek,

$$y_0 - \varepsilon < y_0 \Rightarrow F(x_0, y_0 - \varepsilon) < F(x_0, y_0)$$

$$y_0 + \varepsilon > y_0 \Rightarrow F(x_0, y_0 + \varepsilon) > F(x_0, y_0)$$

Teoremanıń 3-shártine muwapıq

$$F(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0, \quad F(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0.$$

Teoremanıń 1-shártine muwapıq $F(x,y)$ funkciya $U_{h,k}(x_0, y_0)$ de úzliksiz. Sonlıqtan $F(x, y_0 - \varepsilon)$ hám $F(x, y_0 + \varepsilon)$ funkciyalar $x_0 - h, x_0 + h$ aralıqta úzliksiz boladı. Onda úzliksiz funkciyanıń qásiyetine muwapıq (qaralsın, 1-bólim, 5-bap, 7-§) x_0 noqattıń sonday dógeregi $x_0 - \delta, x_0 + \delta$ tabılıp $0 < \delta < h, \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ushın $F(x, y_0 - \varepsilon) < 0, F(x, y_0 + \varepsilon) > 0$ boladı.

Kórinip tur, (x_0, y_0) noqattıń mına

$$U_{h,k}(x_0, y_0) = \{x, y \in R^2 : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, y_0 - k < y < y_0 + k\}$$

dógeregi ushın teoremanıń barlıq shártleri orınlana bermeydi; sebebi

$$U_{\delta,k}(x_0, y_0) \subset U_{h,k}(x_0, y_0)$$

$\forall x^* \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ noqatın alıp, $F(x^*, y)$ funkciyanı qarayıq. Bul funkciya, joqarıda ayılğanına muwapıq $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ aralıqta úzliksiz hám onıń shetki noqatlarında túrli belgili mánislerge iye:

$$F(x^*, y_0 - \varepsilon) < 0, F(x^*, y_0 + \varepsilon) > 0.$$

Bul jaǵdayda Bol'cano-Koshidiń birinshi teoremasına muwapıq (qaralsın, 1-bólim, 5-bap, 7-§) sonday y^* tabılıp $y^* \in [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$,

$$F(x^*, y^*) = 0$$

boladı. Bul tabılǵan y^* jalǵız boladı. haqıyqattanda,

$$y \neq y^* \Rightarrow F(x^*, y) \neq F(x^*, y^*), \quad y \in [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$$

sebebi, $F(x,y)$ ósiwshi bolǵanlıǵı sebepli, $y > y^*$ ushın $F(x^*, y) > F(x^*, y^*)$ hám $y < y^*$ ushın $F(x^*, y) < F(x^*, y^*)$ boladı.

Solay etip, x tiń $x_0 - \delta, x_0 + \delta$ aralıǵınan alınǵan hár bir mánisinde $F(x^0, y) = 0$ teńleme jalǵız y sheshimge iye ekenligin kórsetedi. Bul bolsa $F(x,y)=0$ teńleme járdeminde

$$x \rightarrow y : F(x,y) = 0 \quad (6)$$

ayqın emes kórinistegi funkciya anıqlanǵanlıǵın bildiredi.

$x = x_0$ bolsın. Onda teoremanıń 3-shártı $F(x_0, y_0) = 0$ den, x_0 ge y_0 di sáykes qoyılǵandaǵana

$$x_0 \rightarrow y_0 : F(x_0, y_0) = 0.$$

Demek, $x = x_0$ de ayqın emes funkciyanıń mánisi y_0 ge teń boladı.

Endi ayqın emes funkciyanıń $x_0 - \delta, x_0 + \delta$ aralıqta úzliksiz bolıwın kórsetemiz.

Kórinip tur, $x \in x_0 - \delta, x_0 + \delta$ ke sáykes qoyılatuǵın $y \in y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon$ boladı. Bul bolsa ayqın emes funkciyanıń $x = x_0$ noqatta úzliksiz ekenligin bildiredi.

Ayqın emes funkciyanıń $\forall x^* \in x_0 - \delta, x_0 + \delta$ noqatta úzliksiz bolıwın kórsetiw bul funkciyanıń x_0 noqatta úzliksiz bolıwın kórsetiw sıyaqlı boladı.

Haqıyqattanda $F(x, y) = 0$ teńleme x_0, y_0 noqattıń dógeregi $U_{\delta, \varepsilon}(x_0, y_0)$ de ayqın emes funkciyanıń anıqlanǵanlıǵınan, sonday $y^* \in y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon$ tabılıp, $F(x^*, y^*) = 0$ boladı. Joqarıdaǵı ayılǵanlardı (x^*, y^*) noqatına qollap, $F(x, y) = 0$ teńleme (x^*, y^*) noqattıń dógereginde ayqın emes kórinistegi funkciyanı anıqlaytuǵının (bul anıqlanǵan funkciya (13.51) diń ózi boladı), onıń x^* noqatta úzliksiz bolıwın tabamız. Demek, ayqın emes funkciya $x_0 - \delta, x_0 + \delta$ aralıqta úzliksiz boladı. **Teorema dálillendi.**

1-eskertiw. 1-teorema, $F(x, y)$ funkciya x ózgeriwshiniń $x_0 - \delta, x_0 + \delta$ aralıqtan alınǵan hár bir tayınlanǵan mánisinde y ózgeriwshiniń funkciyası sıpatında kemeyiwshi bolǵanda da orınlı boladı.

Biz joqarıda $F(x, y) = 0$ teńlemenı (x_0, y_0) noqatınıń dógereginde x ti y tiń funkciyası sıpatında anıqlaytuǵının kórsetetuǵın teoremanı keltirdik.

Dál usıǵan uqsas, $F(x, y) = 0$ teńleme (x_0, y_0) noqattıń dógereginde y ti x tiń funkciyası sıpatında anıqlaytuǵının kórsetetuǵın teoremanı keltiriw múmkin.

2-teorema. $F(x, y)$ funkciya $(x_0, y_0) \in R^2$ noqattıń qandayda bir $U_{h, k}((x_0, y_0))$ dógereginde $h > 0, k > 0$ berilgen hám ol tómendegi shártlerdi qanaatlandırıń:

1) $U_{h, k}((x_0, y_0))$ de úzliksiz;

2) y ózgeriwshiniń $y_0 - h, y_0 + h$ aralıqtan alıńǵan hár bir tayınlangan mánisinde x ózgeriwshiniń funkciyası sıpatında ósiwshi (kemiwshi),

$$3) F(x_0, y_0) = 0.$$

Onda (x_0, y_0) noqatınıń sonday

$$U_{\delta, \varepsilon}(x_0, y_0) = \{x, y \in R^2 : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon\}$$

dógeregi $0 < \delta < h, 0 < \varepsilon < k$ tabılıp,

$$1) \forall y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \text{ ushın } F(x, y) = 0$$

teńleme jalǵız $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ sheshimge iye, yaǵnıy $F(x, y) = 0$ teńleme járdeminde $y \rightarrow x : F(x, y) = 0$,

ayqın emes, anıqlanadı;

2) $y = y_0$ bolǵanda oǵan sáykes kelgen $x = x_0$ boladı.

3) ayqın emes kóriniste anıqlanǵan funksiya $y \rightarrow x : F(x, y) = 0$, $y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon$ de úzliksiz boladı.

Bul teoremanıń dálili joqarıda keltirilgen 1-teoremanıń dálilindey.

Ayqın emes funksiyanıń tuwındısı.

Endi ayqın emes funksiyanıń tuwındısını tabıw menen shuǵıllanamız.

1-teorema. $F(x, y)$ funksiya $(x_0, y_0) \in R^2$ noqatını qandayda bir

$$U_{h, k}(x_0, y_0) = \{x, y \in R^2 : x_0 - h < x < x_0 + h, y_0 - k < y < y_0 + k\}$$

dógereginde $h > 0, k > 0$ berilgen hám ol tómendegi shártlerdi qanaatlandırıń:

1) $U_{h, k}(x_0, y_0)$ de úzliksiz;

2) $U_{h, k}(x_0, y_0)$ de úzliksiz $F'_x(x, y), F'_y(x, y)$ dara tuwındılarga iye hám

$$F'_y(x_0, y_0) \neq 0;$$

$$3) F(x_0, y_0) = 0.$$

Onda (x_0, y_0) noqatını sonday

$$U_{\delta,\varepsilon} \quad x_0, y_0 \quad = \quad x, y \in R^2 : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon$$

dógeregi $0 < \delta < h, \quad 0 < \varepsilon < k$ tabılıp,

1`) $\forall x \in x_0 - \delta; \quad x_0 + \delta$ ushın

$$F(x,y)=0$$

teńleme jalǵız y sheshimge $y \in y_0 - \varepsilon, \quad y_0 + \varepsilon$ iye, yaǵnıy $F(x,y)=0$ teńleme járdeminde

$$x \rightarrow y : \quad F(x,y) = 0$$

ayqın emes kórinistegi funkciya anıqlanadı;

2`) $x = x_0$ bolǵanda oǵan sáykes keletuǵın $y = y_0$ boladı;

3`) ayqın emes kóriniste anıqlanǵan $x \rightarrow y : \quad F(x,y) = 0$ funkciya $x_0 - \delta : x_0 + \delta$ aralıqta úzliksiz boladı;

4`) Bul ayqın emes kórinistegi funkciya $x_0 - \delta; \quad x_0 + \delta$ aralıqta úzliksiz tuwındıǵa iye boladı.

Dálil. Shártke muwapıq $F'_y(x,y)$ funkciya $U_{h,k} \quad x_0, y_0$ de úzliksiz hám $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Anıqlıq ushın $F'_y(x_0, y_0) > 0$ bolsın. Onda úzliksiz funkciyanıń qásiyetine muwapıq x_0, y_0 noqattıń sonday

$$U_{h,k} \quad x_0, y_0 \quad = \quad x, y \in R^2 : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon$$

dógeregi $0 < \delta < h, \quad 0 < \varepsilon < k$ tabılıp, $\forall x, y \in U_{\delta,\varepsilon} \quad x_0, y_0$ ushın $F'_y(x,y) > 0$ boladı. Demek, $F(x,y)$ funkciya x ózgeriwshiniń $x_0 - \delta : x_0 + \delta$ aralıǵınan alınǵan hár bir tayınlanǵan mánisinde, y ózgeriwshiniń funkciyası sıpatında ósiwshi. Joqarıda dálillengen áq.áá teoremaǵa muwapıq

$$F(x,y) = 0$$

teńleme $x_0 - \delta, x_0 + \delta$ da

$$x \rightarrow y : \quad F(x,y) = 0$$

ayqın emes funkciyanı anıqlaydı, $x = x_0$ bolǵanda oǵan sáykes keletuǵın $y = y_0$ boladı hám ayqın emes funkciya $x_0 - \delta, \quad x_0 + \delta$ da úzliksiz boladı.

Endi ayqın emes funkciyanıń tuwındısıń tabamız. x_0 noqatqa sonday Δx ósim bereyik, $x_0 + \Delta x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ bolsın. Nátiyjede

$$x \rightarrow y : F(x, y) = 0$$

ayqın emes funkciyada ósimge iye bolıp,

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = 0$$

boladı. Demek,

$$\Delta F(x_0, y_0) = F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) = 0. \quad (1)$$

Shártke muwapıq $F'_x(x, y)$ hám $F'_y(x, y)$ dara tuwındılar $U_{\delta, \varepsilon}(x_0, y_0)$ de úzliksiz.

Solay etip $F(x, y)$ funkciya x_0, y_0 noqatta differenciallanıwshı

$$\Delta F(x_0, y_0) = F'_x(x_0, y_0) \Delta x + F'_y(x_0, y_0) \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y. \quad (1')$$

Bul qatnastağı α hám β lar Δx hám Δy lerge baylanıslı hám $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ de $\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$.

(1') hám (1) ańlatpalarınan

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{F'_x(x_0, y_0) + \alpha}{F'_y(x_0, y_0) + \beta}$$

ekenligi kelip shıǵadı.

Ayqın emes funkciyanıń x_0 noqatta úzliksizligin itibarǵa alıp, keyingi teńlikte

$\Delta x \rightarrow 0$ ge limitke ótip tómendegini tabamız:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(- \frac{F'_x(x_0, y_0) + \alpha}{F'_y(x_0, y_0) + \beta} \right) = - \frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

Demek,

$$y'_{x=x_0} = - \frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

$U_{\delta, \varepsilon}(x_0, y_0)$ de $F'_x(x, y), F'_y(x, y)$ dara tuwındılar úzliksiz hám $F'(x, y) \neq 0$ bolıwınan ayqın emes funkciyasınıń tuwındısı

$$y'_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$$

tiń $x_0 - \delta, x_0 + \delta$ aralıqta úzliksiz bolıwı kelip shıǵadı. **Teorema dálillendi.**

Mısal. Mına

$$F(x,y) = x e^y + y e^x - 2 = 0 \quad (2)$$

teńlemenı qarayıq.

Kórinip tur, $F(x,y) = x e^y + y e^x - 2$ funkciya $x,y \in R^2 : -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$ kóplikte joqarıdaǵı 1-teoremanıń barlıq shártlerin qanaatlandıradı. Demek, $\forall x_0, y_0 \in R^2$ noqattıń $U_{\delta,\varepsilon}(x_0, y_0)$ dógerinde (2) teńleme ayqın emes kórinistegi funkciyanı anıqlaydı hám bul ayqın emes funkciya tuwındısı

$$y'_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\frac{e^y + y e^x}{x e^y + e^x}$$

boladı.

Ayqın emes kórinistegi funkciyanıń tuwındısın tómendegishe esaplasa boladı. y tiń x ke gárezli ekenligin esapqa alıp, $F(x,y)=0$ den tabamız:

$$F'_x(x,y) + F'_y(x,y) \cdot y' = 0$$

Bunnan

$$y'_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$$

bolatuǵını kelip shıǵadı.

Joqarıda keltirilgen (2) teńleme járdeminde anıqlanǵan ayqın emes kórinistegi funkciyanıń tuwındısın tabayıq :

$$F'_x(x,y) + F'_y(x,y) \cdot y' = e^y + y e^x + x e^y + e^x y' = 0 \quad (H)$$

$$y'_x = -\frac{e^y + y e^x}{e^x + x e^y}.$$

13-lekciya

Kóp ózgeriwshili funkciyalardıń ekstremum mánisleri. Ekstremumnıń zárúrli shárti. Eki ózgeriwshili funkciya ushın ekstremumnıń jetkilikli shárti. Eń úlken hám eń kishi mánislerdi izlew. Shártli ekstremumlar.

Bağıt boyınsha tuwındı. Gradient

Funkciyanıń maksimum hám minimum mánisleri.

Kóp ózgeriwshili funkciyanıń ekstremum mánisleri anıqlamaları dál bir ózgeriwshili funkciyanıkindey kiritiledi. $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciya qandayda bir ashıq M ($M \subset R^m$) kóplikte berilgen bolıp, $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in M$ bolsın.

1-anıqlama. Eger x^0 noqatınıń sonday

$$U_\delta(x^0) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : \rho(x, x^0) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_m - x_m^0)^2} < \delta\} \subset M$$

dógeregi tabılıp, $\forall x \in U_\delta(x^0)$ ushın

$$f(x) \leq f(x^0) \quad (f(x) \geq f(x^0))$$

bolsa, **$f(x)$ funkciya x^0 noqatta maksimumge (minimumge) iye delinedi, $f(x^0)$ mánis bolsa $f(x)$ funkciyanıń maksimum (minimum) mánisi yamasa maksimumı (minimumı) delinedi.**

2-anıqlama. Eger x^0 noqattıń sonday $U_\delta(x^0)$ dógeregi tabılıp, $\forall x \in U_\delta(x^0) \setminus \{x^0\}$ ushın $f(x) < f(x^0)$ ($f(x) > f(x^0)$) bolsa, **$f(x)$ funkciya x^0 noqatta qatań maksimumge (qatań minimumge) iye delinedi. $f(x^0)$ mánis bolsa $f(x)$ funkciyanıń qatań maksimum (minimum) mánisi yamasa qatań maksimumı (qatań minimumı) delinedi.**

Joqarıdağı anıqlamalardağı x^0 noqat $f(x)$ funkciyağa maksimum (minimum) (1-anıqlamada), qatań maksimum (qatań minimum) (2-anıqlamada) mánis beretuğın noqat dep ataladı.

Funkciyanıń maksimum (minimum) mánisi tómendegishe belgilenedi:

$$f(x^0) = \max_{x \in U_\delta(x^0)} f(x), \quad (f(x^0) = \min_{x \in U_\delta(x^0)} f(x)).$$

Funkciyanıń maksimum hám minimumı ulıwma at penen onıń **ekstremumı** dep ataladı.

Mısal. Mına

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}, \quad x_1^2 + x_2^2 \leq 1$$

funkciyanı qarayıq. Bul funkciya (0,0) noqatta qatań maksimumge erisedi.

haqıyqattanda, (0,0) noqattıń mına

$$U_r(0,0) = \{x_1, x_2 \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 < r^2 \quad 0 < r < 1\}$$

dógeregi alınsa, onda $\forall x_1, x_2 \in U_r(0,0) \setminus \{0,0\}$ ushın

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} < f(0,0) = 1$$

boladı.

1 hám 2-anıqlamalardan kórinedi, $f(x)$ funkciyanıń x^0 noqattaǵı mánisi $f(x^0)$ di onıń usı noqat dógeregindegi noqatlardaǵı mánisleri menen ǵana salıstırıladı eken. Sonın ushın funkciyanıń ekstremumı (maksimumı, minimumı) **lokal ekstremum (lokal maksimum, lokal minimum)** dep ataladı.

Funkciyanıń ekstremumınıń zárúrli shárti.

$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciya ashıq M ($M \subset R^m$) kóplikte berilgen. Aytayıq, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciya $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ noqatta maksimumge (minimumge) iye bolsın. Anıqlamaǵa muwapıq $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ noqattıń sonday $U_\delta(x^0) \subset M$ dógeregi tabıladı, $\forall x_1, x_2, \dots, x_m \in U_\delta(x^0)$ ushın

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) \leq f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \quad (f(x_1, x_2, \dots, x_m) \geq f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)),$$

dara jaǵdayda

$$f(x_1, x_2^0, \dots, x_m^0) \leq f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \quad (f(x_1, x_2^0, \dots, x_m^0) \geq f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0))$$

boladı. Nátiyjede bir ózgeriwshige x_1 ge baylanıslı bolǵan $f(x_1, x_2^0, \dots, x_m^0)$ funkciyanıń $U_\delta(x^0)$ de eń úlken (eń kishi) mánisi $f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ ge eriskenin kóremiz. Egerde x^0 noqatta $f'_{x_1}(x^0)$ dara tuwındı bar bolatuǵın bolsa, onda Ferma teoreması (qaralsın, 1-bólim, 6-bap, 6-§) na muwapıq

$$f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = f'_{x_1}(x^0) = 0$$

boladı.

Dál sonday-aq, $f'_{x_2}(x^0), \dots, f'_{x_m}(x^0)$ dara tuwındılar bar bolsa,

$$f'_{x_2}(x^0) = 0, \quad f'_{x_3}(x^0) = 0, \dots, \quad f'_{x_m}(x^0) = 0$$

bolatuǵının tabamız.

Solay etip tómendegi teoremaǵa kelemiz:

1-teorema. Eger $f(x)$ funkciya x^0 noqatta ekstremumge erisse hám usı noqatta barlıq $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_m}$ dara tuwındılarǵa iye bolsa, onda

$$f'_{x_1}(x^0) = 0, \quad f'_{x_2}(x^0) = 0, \dots, \quad f'_{x_m}(x^0) = 0$$

boladı.

Biraq $f(x)$ funkciyanıń bazıbir $x' \in R^m$ noqatta barlıq dara tuwındılarǵa iye hám

$$f'_{x_1} x' = 0, f'_{x_2} x' = 0, \dots, f'_{x_m} x' = 0$$

bolıwınan, onıń usı x' noqatta ekstremumge iye bolıwı b́arqulla kelip shıǵa bermeydi.

Máselen, R^2 kóplikte berilgen

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

funkciyanı qarayıq. Bul funkciya $f'_{x_1} x_1, x_2 = x_2$, $f'_{x_2} x_1, x_2 = x_1$ dara tuwındılarına iye bolıp, olar $(0,0)$ noqatta nol'ge aylanadı. Lekin $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ funkciya $(0,0)$ noqatta ekstremumge iye emes. (Bul funkciyanıń grafigi giperbolalıq paraboloidtı anıqlaydı, qaralsın 12-bap, 3-§).

Demek, **1-teorema** bir argumentli funkciyalardaǵıday funkciya ekstremumge erisiwiniń zárúrli shártin anıqlaydı eken.

$f(x)$ funkciya dara tuwındıların nol'ge aylandıratuǵın noqatlar onıń **stacionar noqatları** delinedi.

1-eskertiw. Eger $f(x)$ funkciya x^0 noqatta differenciallanıwshı bolsa, onda funkciyanıń ekstremumǵa erisiwiniń zárúrli shártin mına

$$df(x^0) = 0 \tag{3}$$

kóriniste jazıw múmkin.

Haqıyqattanda, $f(x)$ funkciyanıń x^0 noqatta differenciallanıwshı bolıwınan onıń usı noqatta barlıq $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_m}$ dara tuwındılarǵa iye bolıwı kelip shıǵadı.

x^0 noqatta funkciya ekstremumge erisiwinen teoremaǵa muwapıq

$$f'_{x_1}(x^0) = 0, \quad f'_{x_2}(x^0) = 0, \dots, \quad f'_{x_m}(x^0) = 0$$

boladı. Bunnan bolsa (3) orınlı bolıwı tabıladı.

Baǵıt boyınsha tuwındı

Bizge málım, bir ózgeriwshili $y = f(x)$ funkciyanıń

$x \in R, y \in R$ $\frac{\partial f}{\partial x}$ tuwındısı bul funkciyanıń ózgeriw tezligin bildiretuǵını

málım. Kóp ózgeriwshili $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciyanıń

$x_1, x_2, \dots, x_m \in R^m, y \in R$ dara tuwındılarında bir ózgeriwshili funkciyanıń

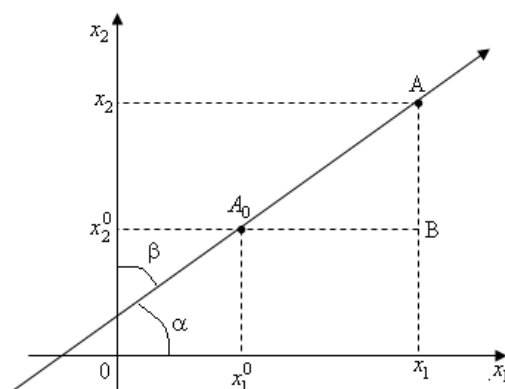
tuwındısına uqsas ekenligin itibarǵa alıp, bul $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}$ dara

tuwındılarda $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funkciyanıń sáykes $Ox_1, Ox_2, \dots, Ox_m$ kósherleri boyınsha ózgeriw tezligin anıqlaydı dep aytıw múmkin.

Endi funkciyanıń qálegen baǵıt boyınsha ózgeriw tezligin kórsetetuǵın túsiniq penen tanısamız. Ápiwayılıq ushın eki ózgeriwshili funkciyanı qaraymız, $y = f(x_1, x_2) = f(A)$ funkciya ashıq M kóplikte ($M \in R^2$) berilgen bolsın. Bul kóplikte qálegen $A_0(x_1^0, x_2^0)$ noqatın alıp, ol arqalı bazıbir tuwrı sızıq ótkizeyik hám ondaǵı eki baǵıttan birewin oń baǵıt, ekinshisin teris baǵıt dep qabıl qılayıq. Bul baǵıtlanǵan tuwrı sızıqtı ℓ deyik.

α hám β dep ℓ baǵıtlanǵan tuwrı sızıq oń baǵıtı menen sáykes Ox_1 hám Ox_2 koordinata kósherleriniń oń baǵıtı arasındǵı múyeshlerdi alayıq (12-sızılma). Onda $\triangle A_0 A B$ dan

$$\frac{x_1 - x_1^0}{\rho} = \cos \alpha, \quad \frac{x_2 - x_2^0}{\rho} = \cos \beta.$$



1-sızılma

bolatugini kelip shigadi. Adette cos α
ham cos β lar ℓ tuwri sızıqtin
bagıtlawshı kosinusları delinedi.

ℓ tuwri sızıgında A_0 den özgeshe ham M kóplikke tiyisli bolgan A noqattı
 $A = (x_1, x_2)$ alıp, $A_0 A$ kesindi M kóplikke tiyisli bolsın. Egerde A noqat A_0 ge
qarağanda ℓ tuwri sızıqtin on bagıtı tárepinde bolsa (sızılmadağıday), onda $A_0 A$
kesindi uzınlıgı $\rho(A_0, A)$ nı on belgi menen, teris bagıt tárepinde jaylasqan
bolsa, teris belgi menen alıwğa kelisemiz.

1-anıqlama. A noqat ℓ bagıtlangan tuwri sızıq boylap A_0 noqatqa
umılğanda ($A \rightarrow A_0$) mına qatnas

$$\frac{f(A) - f(A_0)}{\rho(A_0, A)} = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2^0)}{\rho((x_1^0, x_2^0), (x_1, x_2))}$$

diñ limiti bar bolsa, bul limit $f_{x_1, x_2} = f_A$ funkciyanın $A_0 = (x_1^0, x_2^0)$
noqattağı ℓ **bagıtı boyınsha tuwındısı** dep ataladı ham

$$\frac{\partial f(A_0)}{\partial \ell} \text{ yamasa } \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial \ell}$$

dep belgilenedi. Demek

$$\frac{\partial f}{\partial \ell} = \lim_{A \rightarrow A_0} \frac{f(A) - f(A_0)}{\rho(A_0, A)}$$

Endi f_{x_1, x_2} funkciyanın ℓ bagıt boyınsha tuwındısınıñ bar
bolatuginligı hamde onı tabıw máselesi menen shugıllanamız.

1-teorema. f_{x_1, x_2} funkciya ashıq M kóplikte ($M \subset R^2$) berilgen
bolsın. Eger bul funkciya $A_0 = (x_1^0, x_2^0)$ noqatta $((x_1^0, x_2^0) \in M)$
differenciallanıwshı bolsa, onda funkciya usı noqatta qálegen ℓ bagıtı boyınsha
tuwındıǵa iye ham

$$\frac{\partial f(A_0)}{\partial \ell} = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial \ell} = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} \cos \alpha + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} \cos \beta \quad (13.8)$$

Dálil. Shártke muwapıq f_{x_1, x_2} funkciya $A_0 = (x_1^0, x_2^0)$ noqatta
differenciallanıwshı. Demek, funkciya ósimi

$$f(A) - f(A_0) = f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2^0)$$

ushin

$$f(A) - f(A_0) = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} (x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} (x_2 - x_2^0) + o(\rho) \quad (1)$$

boladı, bunda

$$\rho = \rho(A_0, A) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2}$$

(1) teńliktiń eki tárepini $\rho = \rho(A_0, A)$ ǵa bólsek, onda

$$\frac{f(A) - f(A_0)}{\rho(A_0, A)} = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} \cdot \frac{x_1 - x_1^0}{\rho} + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} \cdot \frac{x_2 - x_2^0}{\rho} + \frac{o(\rho)}{\rho} \quad (2)$$

boladı.

Nátiyjede (2) teńlik mına

$$\frac{f(A) - f(A_0)}{\rho(A_0, A)} = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} \cos \alpha + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} \cos \beta + \frac{o(\rho)}{\rho}$$

kóriniske keledi. Bul teńlikte $A \rightarrow A_0$ ge (yaǵnıy $\rho \rightarrow 0$ ge) limitke ótsek, onda

$$\lim_{A \rightarrow A_0} \frac{f(A) - f(A_0)}{\rho(A_0, A)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(A) - f(A_0)}{\rho} = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} \cos \alpha + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} \cos \beta$$

boladı. Demek,

$$\frac{\partial f(A_0)}{\partial \ell} = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial \ell_1} = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} \cos \alpha + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} \cos \beta$$

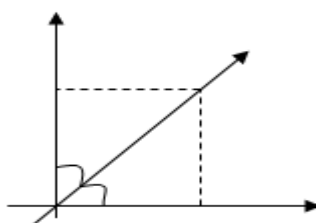
Bul teoremanı dálilleydi.

Mısallar. 1. Mına

$$f(x_1, x_2) = \arctg \frac{x_1}{x_2}$$

funkciyanı qarayıq.

ℓ birinshi kvadrattıń (1,1) noqatınan ótiwshi hám (0,0) noqattan (1,1) noqatqa qarap baǵıtlanǵan bissektrisadan ibarat (13-sızılma).



13-sizilma

Berilgen funkciyanıń $A_0(1,1)$ noqattaǵı ℓ baǵıtı boyınsha tuwındısı tabıń.

Berilgen

$$f(x_1, x_2) = \arctg \frac{x_1}{x_2}$$

funkciyanıń $A_0(1,1)$ noqatta differenciallanıwshı

ekenligi ayqın. Onda joqarıda keltirilgen (13.8) formuladan paydalanıp,

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial \ell} = \frac{\partial f(1,1)}{\partial x_1} \cos \frac{\pi}{4} + \frac{\partial f(1,1)}{\partial x_2} \cos \frac{\pi}{4} = \left(\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right)_{\substack{x_1=1 \\ x_2=2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

bolatuǵının tabamız. Demek

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial \ell} = 0.$$

Qaralıp atırǵan funkciyanıń $A_0(1,1)$ noqattaǵı Ox_1 hám Ox_2 koordinata kósherleri boyınsha tuwındıları sáykes

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial x_1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial f(1,1)}{\partial x_2} = -\frac{1}{2}$$

boladı.

2. Tómendegi

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

funkciyanıń $A_0(0,0)$ noqatta qálegen ℓ baǵıt boyınsha tuwındısı

boladı. $\frac{\partial f(0,0)}{\partial \ell} = 1$

Haqıyqattan da,

$$\frac{f(A) - f(A_0)}{\rho(A_0, A)} = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\rho} = \frac{\rho}{\rho} = 1$$

$$\text{bolıp, } \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(A) - f(A_0)}{\rho(A_0 - A)} = 1$$

boladı.

3. Mına

$$f(x_1, x_2) = x_1 + |x_2|$$

funkciyanıń (0,0) noqatta Ox_1 koordinata kósheri boyınsha tuwındısı 1 ge teń bolıp, Ox_2 koordinata kósheri boyınsha tuwındısı bar bolmaydı.

1-eskertiw. Funkciya bazıbir noqatta differenciallanıwshılıq shártin qanaatlandırmasada, ol usı noqatta qandayda bir bağıt boyınsha, hátte qálegen bağıt boyınsha tuwındıǵa iye bolıwı múmkin.

Máselen, mına

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

funkciya $A_0(0,0)$ noqatta differenciallanıwshılıq shártin qanaatlandırmaydı. Joqarıda kórdik, bul funksiya (0,0) noqatta qálegen bağıt boyınsha tuwındıǵa iye.

14-lekciya

Eki eseli integral túsinigi. Eki eseli integraldıń qásiyetleri. Úzliksiz funksiyalardıń integrallanıwshılıǵı. Tákirariy integrallar.

Darbu qosındıları. $f(x,y)$ funksiya $(D) \subset R^2$ oblastta berilgen bolıp, ol usı oblastta shegaralangán bolsın. Demek, sonday ózgermes m hám M sanlar bar bolıp, $\forall(x,y) \in (D)$ da

$$m \leq f(x,y) \leq M$$

boladı.

(D) oblasttıń bazıbir P bóliniwin alayıq. Bul bóliniwdiń hár bir D_k $k = 1, 2, \dots, n$ bóleginde $f(x,y)$ funksiya shegaralangán bolıp, onıń anıq shegaraları

$$m_k = \inf_{f(x,y):(x,y) \in D_k}, \quad M_k = \sup_{f(x,y):(x,y) \in D_k}$$

bar boladı. Ayqın, $\forall (x,y) \in D_k$ ushın

$$m_k \leq f(x,y) \leq M_k. \quad (1)$$

1-anıqlama. Mına

$$s = S_p(f), \quad S = S_p(f).$$

Sonday-aq, bárqulla

$$s \leq S$$

boladı.

Joqarıdağı (18.4) teńsizlikten paydalanıp tómendegini tabamız:

$$\sum_{k=1}^n m_k D_k \leq \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) D_k \leq \sum_{k=1}^n M_k D_k.$$

Demek,

$$S_p(f) \leq \delta_p(f) : \xi_k, \eta_k \leq S_p(f).$$

Solay etip, $f(x,y)$ funksiyanıń integral qosındısı bárqulla onıń Darbu qosındıları arasında bolar eken.

Dál shegaranıń qásiyetine muwapıq

$$m \leq m_k, \quad M_k \leq M \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

boladı. Nátiyjede mına

$$s = \sum_{k=1}^n m_k D_k \geq m \sum_{k=1}^n D_k = mD,$$

$$S = \sum_{k=1}^n M_k D_k \leq M \sum_{k=1}^n D_k = M \cdot D$$

teńsizliklerge kelemiz. Demek, $\forall P \in \mathfrak{R}$ ushın

$$m \cdot D \leq s \leq S \leq M \cdot D \quad (2)$$

boladı. Bul bolsa Darbu qosındılarınıń shegaralanıǵın bildiredi.

Eki eseli integraldın basqasha anıqlaması. $f(x,y)$ funkciya $(D) \subset R^2$ oblastta berilgen bolıp, ol usı oblastta shagalaran bolsın. (D) oblasttıń bóliniwleri kópligi $\mathfrak{R} = P$ nıń hár bir $P \in \mathfrak{R}$ bóliniwine qarata $f(x,y)$ funkciyanıń Darbu qosındıları $s_p(f)$, $S_p(f)$ ti dúzip

$$s_p(f) \quad , \quad S_p(f)$$

kópliklerdi qaraymız. Bul kóplikler (18.5) ke muwapıq shagalaran boladı.

2-anıqlama. $s_p(f)$ kópliktiń dál joqarǵı shegarası $f(x,y)$ funkciyanıń (D) oblasttaǵı tómengi eki eseli integralı (tómengi Riman integralı) dep ataladı hám ol

$$\underline{I} = \iint_{(D)} f(x,y) dD$$

dep belgilenedi.

$S_p(f)$ kópliktiń dál tómengi shegarası $f(x,y)$ funkciyanıń (D) oblastta joqarı eki eseli integralı (joqarı Riman integralı) dep ataladı hám ol

$$\bar{I} = \overline{\iint_{(D)} f(x,y) dD}$$

dep belgilenedi. Demek,

$$\underline{I} = \iint_{(D)} f(x,y) dD = \sup S \quad , \quad \bar{I} = \overline{\iint_{(D)} f(x,y) dD} = \inf S \quad .$$

3-anıqlama. Eger $f(x,y)$ funkciyanıń (D) oblastta tómengi hámde joqarı eki eseli integralları bir-birine teń bolsa, ol jaǵdayda $f(x,y)$ funkciya (D) oblastta integrallanıwshı dep ataladı, olardıń ulıwma mánisi

$$I = \iint_{(D)} f(x,y) dD = \overline{\iint_{(D)} f(x,y) dD}$$

$f(x,y)$ funkciyanıń (D) oblasttaǵı eki eseli integralı (Riman integralı) delinedi hám ol

$$\iint_{(D)} f(x,y) dD$$

kibi belgilenedi. Demek,

$$\iint_{(D)} f(x,y)dD = \iint_{(D)} f(x,y)dD = \overline{\iint_{(D)} f(x,y)dD}.$$

Eger

$$\iint_{(D)} f(x,y)dD \neq \overline{\iint_{(D)} f(x,y)dD}.$$

bolsa, $f(x,y)$ funkciya (D) oblastta integrallanbaydı dep ataladı.

Solay etip, $f(x,y)$ funkciyanıń eki eseli integralına eki túrli anıqlama berildi. Bul anıqlamalar óz-ara ekvivalent anıqlamalar. Ol 1-bólim, 9-baptaǵı anıq integral anıqlamalarınan ekvivalentligin dáliylegendey kórsetiledi.

Eki eseli integraldıń bar bolıwı

$f(x,y)$ funkciyanıń $(D) \subset R^2$ oblast' boyınsha eki eseli integral barlıǵı máselesin qaraymız. Bunıń ushın dáslep (D) oblasttıń hámde Darbu qosındılarının qásiyetlerin keltiremiz.

(D) oblasttıń bóliniwleri qásiyetleri 1-bólim, 9-baptı úyrenen $[a,b]$ aralıqtıń bóliniwleri qásiyetlerine uqsas. Olardı dáliyillew derlek bir qıylı pikirlew tiykarında alıp barılatuǵınlıǵın itibarǵa alıp, tómende ol qásiyetlerdi dáliyilsiz keltiriwdi lazım taptıq.

$f(x,y)$ funkciyanıń Darbu qosındıları qásiyetleri haqqındaǵı jaǵdayda dál usınday.

1. (D) oblast bóliniwleriniń qásiyetleri. Meyli, $\mathfrak{R} = P - (D)$ oblast bóliniwlerinen ibarat kóplik bolıp, $P_1 \in \mathfrak{R}$, $P_2 \in \mathfrak{R}$ bolsın.

Eger P_1 bóliniwdiń hár bir bóliniwshi sıızıǵı P_2 bóliniwdińde bóliwshi sıızıǵı bolsa, P_2 bóliniw P_1 di ertedi dep ataladı hám $P_1 < P_2$ kibi belgilenedi.

1°. Eger $P_1 \in \mathfrak{R}$, $P_2 \in \mathfrak{R}$, $P_3 \in \mathfrak{R}$ bóliniwler ushın $P_1 < P_2$, $P_2 < P_3$ bolsa, ol jaǵdayda $P_1 < P_3$ boladı.

2°. $\forall P_1 \in \mathfrak{R}$, $\forall P_2 \in \mathfrak{R}$ bóliniwler ushın, sonday $P \in \mathfrak{R}$ tabılıp, $P_1 < P$, $P_2 < P$ boladı.

2. Darbu qosındılarının qásiyetleri. $f(x,y)$ funkciya (D) oblastta berilgen hám shegaralanǵan bolsın. (D) oblasttıń P bóliniwın alıp, bul bóliniwge qarata $f(x,y)$ funkciyanıń integral hám Darbu qosındıların dúzemiz:

$$\delta = \delta_p \quad f : \xi_k, \eta_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \cdot D_k,$$

$$s = s_p(f) = \sum_{k=1}^n m_k D_k, \quad S = S_p(f) = \sum_{k=1}^n M_k D_k$$

1°. $\forall \varepsilon > 0$ alıńanda da $\xi_k, \eta_k \in D_k$ noqatların $k = 1, 2, \dots, n$ sonday qılıp tańlap alıw múmkin,

$$0 \leq S_p(f) - \delta_p(f) < \varepsilon,$$

sonday-aq, $\xi_k, \eta_k \in D_k \quad k = 1, 2, \dots, n$ noqatların jáne sonday tańlap alıw múmkin,

$$0 \leq \delta_p(f) - s_p(f) < \varepsilon$$

boladı.

Bul qásiyet Darbu qosındıları $s_p(f)$, $S_p(f)$ ler integral qosındı $\delta_p(f)$ usı bóliniw ushın sáykes túrde anıq tómengi hámde anıq joqarı shegara bolıwın bildiredi.

2°. Eger P_1 hám P_2 ler (D) oblasttıń eki bóliniwleri bolıp, $P_1 < P_2$ bolsa, ol jaǵdayda

$$s_{P_1}(f) \leq s_{P_2}(f), \quad S_{P_2}(f) \leq S_{P_1}(f)$$

boladı.

Bul qásiyet (D) oblasttıń bóliniwdegi bólekler sanı artıp barǵanda olar sáykes Darbudıń tómengi qosındısıń kemeyiwı, joqarı qosındısıń bolsa óspewin bildiredi.

3°. Eger P_1 hám P_2 ler (D) oblasttıń ıqtıyarlı eki bóliniwleri bolıp, $s_{P_1}(f)$, $S_{P_1}(f)$ hám $s_{P_2}(f)$, $S_{P_2}(f)$ ler $f(x,y)$ funkciyanıń usı bóliniwlerge qarata Darbu qosındıları bolsa, ol jaǵdayda

$$s_{P_1}(f) \leq S_{P_2}(f), \quad s_{P_2}(f) \leq S_{P_1}(f)$$

boladı.

Bul qásiyet, (D) oblasttıń bóliniwlerine qarata dúzilgen tómengi qosındılar kópligi $s_p(f)$ tıń hár bir elementi (joqarı qosındılar kópligi $S_p(f)$ tıń hár bir

elementi) joqarı qosındılar kópligi $S_p(f)$ tıń qálegen elementinen (tómengi qosındılar kópligi $s_p(f)$ tıń qálegen elementinen) úlken (kishi) emesligin bildiredi.

4°. Eger $f(x,y)$ funkciya (D) oblastta berilgen hám shegaralanğan bolsa, ol jaǵdayda

$$\sup s_p(f) \leq \inf S_p(f)$$

boladı.

Bul qásiyet $f(x,y)$ funkciyanıń tómengi eki eseli integralı, onıń joqarı eki eseli integralınan úlken emesligin bildiredi:

$$\underline{I} \leq \bar{I}.$$

5°. Eger $f(x,y)$ funkciya (D) oblastta berilgen hám shegaralanğan bolsa, ol jaǵdayda $\forall \varepsilon > 0$ alıńanda da, sonday $\delta > 0$ tabılıp, (D) oblasttıń diametri $\lambda_p < \delta$ bolǵan barlıq bóliniwleri ushın

$$\begin{aligned} S_p(f) < \bar{I} + \varepsilon \quad 0 \leq S_p(f) - \bar{I} < \varepsilon, \\ s_p(f) > \underline{I} - \varepsilon \quad 0 \leq \underline{I} - s_p(f) < \varepsilon \end{aligned} \quad (3)$$

boladı.

Bul qásiyet $f(x,y)$ funkciyanıń joqarı hámde tómengi integralları $\lambda_p \rightarrow 0$ da saykes túrde Darbudiń joqarı hámde tómengi qosındılarınıń limiti ekenligin bildiredi:

$$\bar{I} = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} S_p(f), \quad \underline{I} = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} s_p(f).$$

3. Eki eseli integraldıń bar bolıwı. Endi eke eseli integraldıń bar bolıwınıń zárúr hám jetkilikli shártin (kritiriyasın) keltiremiz.

1-teorema. $f(x,y)$ funkciya (D) oblastta integrallanıwshı bolıwı ushın, $\forall \varepsilon > 0$ alıńanda da, sonday $\delta > 0$ tabılıp, (D) oblasttıń diametri $\lambda_p < \delta$ bolǵan hár qanday P bóliniwine qarata Darbu qosındıları

$$S_p(f) - s_p(f) < \varepsilon \quad (18.7)$$

teńsizlikti qanaatlandırıwı zárúr hám jetkilikli.

Dálil. Zárúrligi. $f(x,y)$ funkciya (D) oblastta integrallanıwshı bolsın – anıqlamağa muwapıq

$$I = \underline{I} = \bar{I}$$

boladı, bunda

$$\underline{I} = \sup s_p(f) , \quad \bar{I} = \inf S_p(f(x)) .$$

$\forall \varepsilon > 0$ alıńanda da, $\frac{\varepsilon}{2}$ ge muwapıq sonday $\delta > 0$ tabılıp, (D) oblasttıń diametri $\lambda_p < \delta$ bolǵan hár qanday P bóliniwine qarata Darbu qosındıları ushın (18.6) qatnaslarǵa muwapıq

$$S_p(f) - \bar{I} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \underline{I} - s_p(f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

bolıp onnan

$$S_p(f) - s_p(f) < \varepsilon$$

bolıwı kelip shıǵadı.

Jeterliligi. $\forall \varepsilon > 0$ alıńanda da, sonday $\delta > 0$ tabılıp, (D) oblasttıń diametri $\lambda_p < \delta$ bolǵan hár qanday P bóliniwine qarata Darbu qosındıları ushın

$$S_p(f) - s_p(f) < \varepsilon$$

bolsın. qaralıp atırǵan $f(x,y)$ funkciya (D) oblastta shegaralanǵanlıǵı ushın, anıq tómeni hámde joqarı integralları

$$\underline{I} = \sup s_p(f) , \quad \bar{I} = \inf S_p(f)$$

$$\underline{I} \leq \bar{I}$$

bar boladı. Ayqın,

$$s_p(f) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S_p(f).$$

Bul qatnastan

$$0 \leq \bar{I} - \underline{I} \leq S_p(f) - s_p(f)$$

bolıwın tabamız. Demek, $\forall \varepsilon > 0$ ushın

$$0 \leq \bar{I} - \underline{I} < \varepsilon$$

bolıp, onnan $\underline{I} = \bar{I}$ bolıwı kelip shıǵadı. Bul bolsa $f(x,y)$ funkciyanıń (D) oblastta integrallanıwshı ekenligin bildiredi. Teorema dáliyillendi.

Eger $f(x,y)$ funkciyanıń D_k $k = 1, 2, \dots, n$ oblasttaǵı terbelsin ω_k menen belgilesek, ol jaǵdayda

$$S_p(f) - s_p(f) = \sum_{k=1}^n M_k - m_k D_k = \sum_{k=1}^n \omega_k D_k$$

bolıp, teoremadaǵı (18.7) shárti mına

$$\sum_{k=1}^n \omega_k D_k < \varepsilon, \text{ yaǵnıy } \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \omega_k D_k = 0$$

kórinislerin aladı.

Eki eseli integraldın qásiyetleri

Bul paragrafte eki eseli integraldın barlıǵı haqqındaǵı teoremadan paydalanıp, ayırım klass funkciyalarınıń integrallanıwshı bolıwın kórsetemiz.

1-teorema. Eger $f(x,y)$ funkciya shegaralanǵan tuyıq $(D) \subset R^2$ oblastta berilgen hám úzliksiz bolsa, ol usı oblastta integrallanıwshı boladı.

Dálil. $f(x,y)$ funkciya (D) oblastta tegis úzliksiz boladı. Ol jaǵdayda Kontor teoremasınıń saldarına tiykarlanıp (12-bap, 6-§), $\forall \varepsilon > 0$ alıńanda da, sonday $\delta > 0$ tabıladı, (D) oblasttıń diametri $\lambda_p < \delta$ bolǵan P bóliniwi alıńanda, bul bóliniwdiń hár bir bóleginde funkciyanıń terbelisi $\omega_k < \varepsilon$ boladı. Demek, (D) oblasttıń diametri $\lambda_p < \delta$ bolǵan hár qanday P bóliniwinde

$$S_p(f) - s_p(f) = \sum_{k=1}^n \omega_k D_k < \varepsilon \sum_{k=1}^n D_k = \varepsilon \cdot D.$$

bolıp, onnan

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \omega_k D_k = 0$$

bolıwı kelip shıǵadı. Demek, $f(x,y)$ funkciya (D) oblastta integrallanıwshı. Teorema dáliyillendi.

Bazıbir úziletuđın funkciyalardıń da integrallanıwshı bolıwın kórsetiwden burın nol' maydanlı sızıq túsiniđin esletip, bir lemma dáliyilleymiz. R^2 tegislikte qandayda bir Γ sızıq berilgen bolsın. Belgili, $\forall \varepsilon > 0$ berilgende de, Γ sızıqtı sonday kópmúyeshlik (Q) menen oraw múmkin bolsa, bul kópmúyeshliktiń maydanı $Q < \varepsilon$ bolsa, ol jağdayda Γ -nol' maydanlı sızıq dep atalar edi. Máselen, $[a,b]$ aralıqta anıqlanđan hám úzliksiz $y = f(x)$ funksiya anıqlanđan sızıq nol' maydanlı sızıq boladı. Sonıda aytıw kerek, bir qarağanda hár qanday sızıq nol' maydanlı bolıp kórinse, tiykarında onday emes.

(D) oblastta nol' maydanlı Γ sızıq berilgen bolsın.

1-lemma. $\forall \varepsilon > 0$ alıńanda da, sonday $\delta > 0$ tabıladı, (D) oblasttıń diametri $\lambda_p < \delta$ bolđan P bóliniwi alıńanda bul bóliniwdiń Γ sızıq penen ulıwma noqatqa iye bolđan bólekleri maydanlarınıń qosındısı ε nan kishi boladı.

Dálil. Shártke muwapıq Γ -nol' maydanlı sızıq. Demek, onı sonday (Q) kópmúyeshlik penen orınlaw múmkin, bul kópmúyeshliktiń maydanı $Q < \varepsilon$ boladı.

Γ sızıq penen (Q) kóp múyeshlik shegarası ulıwma noqatqa iye emes dep, Γ -sızıq noqatlar menen (Q) kópmúyeshlik shegarası noqatları arasındağı aralıqtı qarayıq. Bul noqatlar arasındağı aralıq óziniń eń kishi mánisine erisedi. Biz onı $\delta > 0$ arqalı qaraymız. Eger (D) oblasttıń diametri $\lambda_p < \delta$ bolđan P bóliniwi alınsa, ayqın bul bóliniwdiń Γ sızıq penen ulıwma noqatqa iye bolđan bólekleri pútinley (Q) kópmúyeshlikte jaylasadı. Demek, bunday bólekler maydanlarınıń qosındısı ε nan kishi boladı. Lemma dáliyillendi.

2-teorema. Eger $f(x,y)$ funksiya (D) oblastta shegaralanđan hám bul oblasttıń shekli sandağı nol' maydanlı sızıqlarında úziliske iye bolıp qalđan barlıq noqatlarında úzliksiz bolsa, funksiya (D) oblastta integrallanıwshı boladı.

Dálil. $f(x,y)$ funksiya (D) oblastta shegaralanđan bolıp, ol usı oblasttıń tek ğana bir nol' maydanlı Γ sızıǵında $\Gamma \subset (D)$ úziliske iye bolıp, qalđan barlıq noqatlarda úzliksiz bolsın.

$\forall \varepsilon > 0$ sandı alıp, Γ sızıqtı maydanı ε nan kishi bolđan (Q) kópmúyeshlik penen oraymız. Nátiyjede (D) oblast' (Q) hám $(D) \setminus (Q)$ oblastlarǵa ajıraladı.

Shártke muwapıq, $f(x,y)$ funksiya $(D) \setminus (Q)$ da úzliksiz. Demek, $\forall \varepsilon > 0$ alıńanda da sonday $\delta_1 > 0$ tabıladı, diametri $\lambda_{p_1} < \delta_1$ bolđan P_1 bóliniwdiń hár bir bólegindegi $f(x,y)$ funksiyanıń terbelisi $\omega_k < \varepsilon$ boladı.

Joqarıdağı lemmanın dâliyilew jolı kórsetedi, usı $\varepsilon > 0$ ge muwapıq, sonday tabıladı, (D) oblasttıń diametri $\lambda_p < \delta_2$ bolğan bóliniwi alınsa, bul bóliniwdiń (Q) kópmúyeshlik penen ulıwma noqatqa iye bolğan bólekler maydanlarınń qosındısı ε nan kishi boladı.

Endi $\min \delta_1, \delta_2 = \delta$ dep, (D) oblasttıń diametri $\lambda_p < \delta$ bolğan P bóliniwin alamız. Bul bóliniwge qarata $f(x,y)$ funkciyanıń Darbu qosındıların dúzip, tómendegi

$$S_p(f) - s_p(f) = \sum_{k=1}^n \omega_k D_k \quad (1)$$

ayırmanı qaraymız.

Bul (18.8) qosındınnıń (Q) kópmúyeshlikten sırtta jaylasqan D_k bóleklerge sáykes aǵzalarınan ibarat qosındı

$$\sum_k' \omega_k D_k$$

bolsın.

(18.8) qosındınnıń qalğan barlıq aǵzalarınan dúzilgen qosındı

$$\sum_k'' \omega_k D_k$$

bolsın. Nátiyjede (18.8) qosındı eki bólimge ajıraladı;

$$\sum_{k=1}^n \omega_k D_k = \sum_k' \omega_k D_k + \sum_k'' \omega_k D_k \quad (2)$$

$(D) \setminus (Q)$ oblasttağı bóleklerde $\omega_k < \varepsilon$ bolǵanlıǵınan

$$\sum_k' \omega_k D_k < \varepsilon \sum_k' D_k \leq \varepsilon \cdot D \quad (3)$$

boladı.

Eger $f(x,y)$ funkciyanıń (D) oblasttağı terbelisin Ω penen belgilesek, ol jaǵdayda

$$\sum_k'' \omega_k \Delta_k \leq \Omega \sum_k'' D_k$$

boladı. (Q) kópmúyeshlikte pútinley jaylasqan P bóliniwdiń bólekleri maydanlarınń qosındısı ε nan kishi hámde (Q) kópmúyeshlik shegarası menen ulıwma noqatqa

iye bolğan bólekler maydanlardıń qosındısı da ε nan kishi bolıwın itibarǵa alsaq, onda

$$\sum_k D_k < 2\varepsilon$$

bolıwın tabamız. Demek,

$$\sum_k \omega_k D_k < 2\Omega \cdot \varepsilon \quad (4)$$

Nátıyjede (18.9), (18.10) hám (18.11) qatnaslardan

$$\sum_{k=1}^n \omega_k D_k < \varepsilon \quad D + 2\Omega \cdot \varepsilon = \varepsilon \quad D + 2\Omega$$

ekenligi kelip shıǵadı. Demek,

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \omega_k D_k = 0.$$

Bul bolsa $f(x,y)$ funkciyanıń (D) oblastta integrallanıwshı bolıwın bildiredi.

$f(x,y)$ funkciya (D) oblasttıń shekli sandaǵı nol' maydanlı sızıqlarında úziliksiz iye bolıp, qalǵan barlıq noqatlarında úzliksiz bolsa, onıń (D) da integrallanıwshı bolıwı joqarıdaǵıday dáliyillendi. Teorema dálillendi.

Eki eseli integraldıń qásiyetleri

Tómende $f(x,y)$ funkciya eki eseli integraldıń qásiyetlerine uqsas qásiyetlerge iye. Olardıń dáliyilsiz keltiremiz.

1°. $f(x,y)$ funkciya (D) oblastta $D \subset R^2$ integrallanıwshı bolsın. Bul funkciyanıń (D) oblastqa tiyisli bolǵan nol' maydanlı L sızıqtaǵı $L \subset D$ mánislerǵana (shegaralanǵan saqlaǵan jaǵdayda) ózgertiwden hasıl bolǵan $F(x,y)$ funkciyada (D) oblastta integrallanıwshı bolıp,

$$\iint_{(D)} f(x,y) dD = \iint_{(D)} F(x,y) dD$$

boladı.

Dálil. Ayqın, $\forall (x,y) \in (D) \setminus L$ ushın

$$f(x,y) \equiv F(x,y).$$

shártke muwapıq L -nol' maydanlı sıızıq. Onda 18.1-lemmağa tiykarlanıp, $\forall \varepsilon > 0$ alıńanda da, sonday $\delta > 0$ tabıladı, (D) oblasttıń diametri $\lambda_p < \delta$ bolǵan hár qanday P bóliniwi alıńanda da, bul bóliniwdiń L sıızıq penen ulıwma noqatqa iye bolǵan bólekleri maydanlarınń qosındısı ε nan kishi boladı. Usı P bóliniwge qarata $f(x,y)$ hám $F(x,y)$ funkciyalardıń mına integral qosındıların dúzemiz:

$$\delta_p(f) = \sum_{k=1}^n f|_{\xi_k, \eta_k} D_k, \quad \delta_p(F) = \sum_{k=1}^n F|_{\xi_k, \eta_k} D_k.$$

$\delta_p(f)$ qosındını tómendegishe eki bólimge ajıratamız:

$$\delta_p(f) = \sum_k 'f|_{\xi_k, \eta_k} \cdot D_k + \sum_k ''f|_{\xi_k, \eta_k} D_k,$$

bunda $\sum_k '$ qosındı L sıızıq penen ulıwma noqatqa iye bolǵan D_k bólekler boyınsha alıńan, $\sum_k ''$ bolsa qalǵan barlıq aǵzalardan dúzilgen qosındı.

Dál soǵan uqsas

$$\delta_p(F) = \sum_k 'F|_{\xi_k, \eta_k} D_k + \sum_k ''F|_{\xi_k, \eta_k} D_k.$$

Eger $\forall (x,y) \in (D) \setminus L$ ushın $f(x,y) \equiv F(x,y)$ ekenligin itibarǵa alsaq, ol jaǵdayda

$$|\delta_p(f) - \delta_p(F)| \leq \sum_k ' |f|_{\xi_k, \eta_k} - F|_{\xi_k, \eta_k}| \cdot D_k \leq M \cdot \sum_k ' D_k < M\varepsilon$$

bolıwı kelip shıǵadı, bunda $M = \sup |f(x,y) - F(x,y)|, \quad x,y \in (D) \setminus L$.

Demek, $|\delta_p(f) - \delta_p(F)| < M\varepsilon$.

Keyingi teńsizlikte $\lambda_p \rightarrow 0$ da limitke ótip tómendegini tabamız

$$\iint_{(D)} f(x,y) dD = \iint_{(D)} F(x,y) dD.$$

2°. $f(x,y)$ funkciya (D) oblastta berilgen bolıp, (D) oblast nol' maydanlı L sıızıq penen D_1 hám D_2 oblastlarǵa ajralǵan bolsın. Eger $f(x,y)$ funkciya (D) oblastta integrallanıwshı bolsa, funkciya D_1 hám D_2 oblastlarda da integrallanıwshı boladı, hám kerisinshe, yaǵnıy $f(x,y)$ funkciya D_1 hám D_2 oblastlardıń hár

birinde integrallanıwshı bolsa, funksiya (D) oblastta da integrallanıwshı boladı. Bunda

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD = \iint_{D_1} f(x, y) dD + \iint_{D_2} f(x, y) dD.$$

3°. Eger $f(x, y)$ funksiya (D) oblastta integrallanıwshı bolsa, ol jaǵdayda $c f(x, y)$ ($c = \text{const}$) da usı oblastta integrallanıwshı hám mına

$$\iint_{(D)} c f(x, y) dD = c \iint_{(D)} f(x, y) dD.$$

formula orınlı boladı.

4°. Eger $f(x, y)$ hám $g(x, y)$ funksiya (D) oblastta integrallanıwshı bolsa, ol jaǵdayda $f(x, y) \pm g(x, y)$ funksiya da usı oblastta integrallanıwshı hám mına

$$\iint_{(D)} [f(x, y) \pm g(x, y)] dD = \iint_{(D)} f(x, y) dD \pm \iint_{(D)} g(x, y) dD$$

formula orınlı boladı.

1-saldar. Eger $f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_n(x, y)$ funksiya lardıń hár biri (D) oblastta integrallanıwshı bolsa, ol jaǵdayda mına

$$c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y) + \dots + c_n f_n(x, y) \quad c_i = \text{const}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

funksiya da usı oblastta integrallanıwshı hám

$$\begin{aligned} \iint_{(D)} [c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y) + \dots + c_n f_n(x, y)] dD = & c_1 \iint_{(D)} f_1(x, y) dD + \\ & + c_2 \iint_{(D)} f_2(x, y) dD + \dots + c_n \iint_{(D)} f_n(x, y) dD \end{aligned}$$

boladı.

5°. Eger $f(x, y)$ funksiya (D) oblastta integrallanıwshı bolıp, $\forall (x, y) \in (D)$ ushın $f(x, y) \geq 0$ bolsa, ol jaǵdayda

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD \geq 0$$

boladı.

2-saldar. Eger $f(x,y)$ hám $g(x,y)$ funkciyalar (D) oblastta integrallanıwshı bolıp, $\forall (x,y) \in D$ ushın

$$f(x,y) \leq g(x,y)$$

bolsa, ol jaǵdayda $|f(x,y)|$ funkciyada usı oblastta integrallanıwshı hám

$$\left| \iint_{(D)} f(x,y) dD \right| \leq \iint_{(D)} |f(x,y)| dD$$

boladı.

7°. Orta mánis haqqındaǵı teoremlar. $f(x,y)$ funkciya (D) oblastta berilgen hám ol usı oblastta shegaralanǵan bolsın. Demek, sonday m hám M ózgermes sanlar

$$m = \inf_{(x,y) \in (D)} f(x,y), \quad M = \sup_{(x,y) \in (D)} f(x,y)$$

bar bolıp, $\forall (x,y) \in (D)$ ushın

$$m \leq f(x,y) \leq M$$

boladı.

3-teorema. Eger $f(x,y)$ funkciya (D) oblastta integrallanıwshı bolsa, ol jaǵdayda sonday ózgermes μ ($m \leq \mu \leq M$) san bar bolıp,

$$\iint_{(D)} f(x,y) dD = \mu \cdot D$$

boladı, bunda D - (D) oblastnıń maydanı.

3-saldar. Eger $f(x,y)$ funkciya tuyıq (D) oblastta úzliksiz bolsa, ol jaǵdayda bul oblastta sonday $(a,b) \in (D)$ noqat tabıladı,

$$\iint_{(D)} f(x,y) dD = f(a,b) \cdot D$$

boladı.

4-teorema. Eger $g(x,y)$ funkciya (D) oblastta integrallanıwshı bolıp, ol usı oblastta óz belgisin ózgertpese hám $f(x,y)$ funkciya (D) oblastta úzliksiz bolsa, ol jaǵdayda sonday $(a,b) \in (D)$ noqat tabıladı;

$$\iint_{(D)} f(x,y)g(x,y) dD = f(a,b) \iint_{(D)} g(x,y) dD$$

boladı.

8°. Integrallaw oblastı ózgeriwshi bolǵan eki eseli integrallar. $f(x,y)$ funkciya (D) oblastta berilgen bolıp, ol usı oblastta integrallanıwshı bolsın. Bul funkciya, (D) oblasttıń maydangá iye bolǵan hár qanday (d) bóleginde $(d) \subset (D)$ de integrallanıwshı boladı.

Ayqın mına

$$\iint_{(D)} f(x,y) dD$$

integral (d) ǵa baylansılı boladı.

(D) oblasttıń maydangá iye bolǵan hár bir (d) bólegine joqarıdaǵı integraldı sáykes qoyamız:

$$\Phi : (d) \rightarrow \iint_{(d)} f(x,y) dD.$$

Nátiyjede funkciya hasıl boladı. Ádette bul

$$\Phi((d)) = \iint_{(d)} f(x,y) dD$$

funkciya oblasttıń funkciyası dep ataladı.

(D) oblastta bazıbir x_0, y_0 noqattı alayıq. (d) bolsa usı noqattı óz ishine alǵan hám $(d) \subset (D)$ bolǵan oblast' bolsın. Bul oblasttıń maydanı d , diametri bolsa λ bolsın.

Eger $\lambda \rightarrow 0$ da $\frac{\Phi((d))}{d}$ qatnastıń limiti $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\Phi((d))}{d}$ bar hám shekli bolsa, bul limit $F((d))$ funkciyanıń x_0, y_0 noqattaǵı oblast' boyınsha tuwındısı dep ataladı.

Eger $f(x,y)$ funkciya (D) oblastta úzliksiz bolsa, ol jaǵdayda $F((d))$ funkciyanıń x_0, y_0 noqattaǵı oblast boyınsha tuwındısı $f(x_0, y_0)$ ge teń boladı.

15-lekciya

Eki eseli integraldı esaplaw. Eki eseli integralda ózgeriwshini almasırw. Polyar koordinatalarda eki eseli integral. Eki eseli integraldıń qollanıwları

$f(x,y)$ funksiyanıń (D) oblasttaǵı $D \subset R^2$ eki eseli integralı tiyisli integral qosındısıńnıń málim mánistegi limiti sıpatında anıqlanadı. Bul limit túsinigi quramalı xarakterge iye bolıp, onı usı anıqlama boyınsha esaplaw hátte ápiwayı jaǵdaylarda da biraz qıyın boladı.

Eger $f(x,y)$ funksiyanıń (D) oblastta integrallanıwshılıǵı málim bolsa, onda belgisiz integral qosındı (D) oblasttıń bóliniw usılında, hár bir bólekke alınǵan ξ_k, η_k noqatlarǵada baylanıslı bolmay, $\lambda_p \rightarrow 0$ da jalǵız $\iint_{(D)} f(x,y)dD$ sanǵa umtıladı. Nátiyjede funksiyanıń eki eseli integralnıń tabıw ushın bazıbir bóliniwge qarata integral qosındıńnıń limitin esaplaw jetkilikligi boladı. Bul jaǵdayda (D) oblasttıń bóliniwın hámde ξ_k, η_k noqatların, integral qosındıńnı hám onıń limitin esaplawǵa qolay qılıp alıw imkaniyatın beredi.

Mısal. Mina

$$\iint_{(D)} xy dD$$

integraldı esaplayıq. Bunda

$$(D) = \{(x,y) \in R^2; \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1-x\}.$$

Ayqın, $f(x,y) = xy$ funksiya (D) da úzliksiz. Demek, bul funksiya (D) oblastta integrallanıwshı.

(D) oblasttı

$$D_{ik} = \left\{ (x,y) \in R^2 : \frac{i}{n} \leq x \leq \frac{i+1}{n}, \quad \frac{k}{n} \leq y \leq \frac{k+1}{n}, \quad \frac{i}{n} + \frac{k}{n} \leq 1 \right\}$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-i$$

bóleklerge ajratıp, hár bir D_{ik} da $\xi_i, \eta_k = \left(\frac{i}{n}, \frac{k}{n}\right)$ dep qaraymız. Ol jaǵdayda

$$\begin{aligned} \delta &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i} f_{\xi_i, \eta_k} D_{ik} = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\sum_{k=0}^{n-i-1} \frac{i}{n} \cdot \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n-i}{n} \cdot \frac{1}{2n^2} \right] = \frac{1}{2n^4} \sum_{i=0}^{n-1} i(n-i)^2 = \\ &= \frac{1}{2n^2} \left(\frac{n^2(n-1)n}{2} - 2n \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n^2(n-1)^2}{4} \right) \end{aligned}$$

boladı. Bunnan bolsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta = \frac{1}{24}$$

bolıwı kelip shıǵadı. Demek,

$$\iint_{(D)} xy dD = \frac{1}{24}$$

Ulıwma, kóp jaǵdaylarda funkciyalardıń eseli integralların anıqlamaǵa muwapıq esaplaw qıyın boladı. Sonıń ushın eseli integrallardı esaplawdıń ámelde qolay bolǵan jolların tabıw zárúrligi tuwıladı.

Joqarıda aytıp ótkenimizdey, $f(x,y)$ funkciyanıń eseli integralı hám onı esaplaw (D) oblastqa baylanıslı.

Dáslep, ápiwayı jaǵdayda, (D) oblast tuwrı tórtmúyeshlik oblasttan ibarat bolǵan jaǵdayda funkciyanıń eseli integralın esaplaymız.

18.6-teorema. $f(x,y)$ funkciya $(D) = \{(x,y) \in R^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ oblastta berilgen hám integrallanıwshı bolsın.

Eger $x \in [a,b]$ ózgeriwshiniń hár bir tayın mánisinde

$$I(x) = \int_c^d f(x,y) dy$$

integral bar bolsa, ol jaǵdayda mına

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y) dy \right] dx$$

integralda bar boladı hám

$$\iint_{(D)} f(x,y) dD = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y) dx \right] dy$$

boladı.

Dáلیل. (D) oblasttı

$$D_{ik} = \{(x,y) \in R^2 : x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_k \leq y \leq y_{k+1} \mid i = 0, 1, \dots, n-1, k = 0, 1, \dots, m\}$$

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$ bóleklerge ajıratamız.

Bul bóliniwdi P_{nm} dep belgileymiz. Onıń diametri

$$\lambda_{P_{n,m}} = \max \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_k^2} \quad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i; \quad \Delta y_k = y_{k+1} - y_k \quad .$$

Solay etip, $f(x,y)$ funkciya (D) oblastta integrallanıwshı eken, ol usı oblastta shegaralanğan boladı. Solay eken, $f(x,y)$ funkciya hár bir D_{ik} de shegaralanğan, hám demek, ol usı oblastta anıq joqarı hámde anıq tómengi shegaralarına iye boladı:

$$m_{ik} = \inf_{(x,y) \in D_{ik}} f(x,y),$$

$$M_{ik} = \sup_{(x,y) \in D_{ik}} f(x,y),$$

$$i = 0, 1, \dots, n-1, \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \quad .$$

Ayqın, $\forall (x,y) \in D_{ik}$ ushın $m_{ik} \leq f(x,y) \leq M_{ik}$, dara jaǵdayda, $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ ushında $m_{ik} \leq f(\xi_i, y) \leq M_{ik}$ boladı.

Teoremanıń shártinen paydalanıp tabamız:

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} m_{ik} dy \leq \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(\xi_i, y) dy \leq \int_{y_k}^{y_{k+1}} M_{ik} dy,$$

yaǵnıy

$$m_{ik} \Delta y_k \leq \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(\xi_i, y) dy \leq M_{ik} \Delta y_k, \text{ bunda } \Delta y_k = y_{k+1} - y_k.$$

Eger keyingi teńsizliklerdi k nıń $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$ mánislerinde jazıp, olardı aǵzalap qoysaq, ol jaǵdayda

$$\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik} \Delta y_k \leq \sum_{k=0}^{m-1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(\xi_i, y) dy \leq \sum_{k=0}^{m-1} M_{ik} \Delta y_k,$$

yaǵnıy

$$\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik} \Delta y_k \leq \int_c^d f(\xi_i, y) dy = I(\xi_i) \leq \sum_{k=0}^{m-1} M_{ik} \Delta y_k$$

$i = 0, 1, \dots, n-1$ boladı.

Endi keyingi teńsizliklerdi Δx_i $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ ke kóbeytirip, soń aǵzalap qosamız. Nátiyjede

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik} \Delta y_k \right) \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{m-1} M_{ik} \Delta y_k \right) \Delta x_i$$

boladı.

Ayqın,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik} \Delta y_k \right) \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} m_{ik} \Delta y_k = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} m_{ik} D_{ik} = s$$

$f(x,y)$ funkciya ushın Darbudiń tómengi qosındısı,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{m-1} M_{ik} \Delta y_k \right) \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} M_{ik} D_{ik} = S$$

bolsa Darbudiń joqarı qosındısı. Demek,

$$s \leq \sum_{i=0}^{n-1} I \quad \xi_i \quad \Delta x_i \leq S \quad (1)$$

Shártke muwapıq $f(x,y)$ funkciya (D) da integrallıwshı. Ol jaǵdayda $\lambda_{P_{nm}} \rightarrow 0$ da

$$s \rightarrow \iint_{(D)} f(x,y) dD, \quad S \rightarrow \iint_{(D)} f(x,y) dD$$

boladı.

(1) qatnastan bolsa,

$$\sum_{i=0}^{n-1} I \quad \xi_i \quad \cdot \Delta x_i$$

qosındıń limitke iye bolıwı hám bul limit

$$\iint_{(D)} f(x,y) dD$$

ge teń bolıwı kelip shıǵadı:

$$\lim_{\lambda_{P_{nm}} \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} I \quad \xi_i \quad \Delta x_i = \iint_{(D)} f(x,y) dD.$$

Eger

$$\lim_{\lambda_{P_{nm}} \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} I \quad \xi_1 \quad \Delta x_i = \int_a^b I(x) dx$$

hám

$$\int_a^b I(x)dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx$$

ekenligin itibarğa alsaq, onda

$$\iint_{(D)} f(x,y)dD = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx$$

bolıwın tabamız. Bul bolsa teoremanı dáliyilleydi.

1-teorema. $f(x,y)$ funkciya $D = \{x,y \in R^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ oblastta berilgen hám integrallanıwshı bolsın. Eger $y \in [c,d]$ ózgeriwshiniń hár bir tayın mánisinde

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

integral bar bolsa, ol jaǵdayda mına

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy$$

integralda bar boladı hám

$$\iint_{(D)} f(x,y)dD = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy$$

boladı.

Bul teoremanıń dáliyilli joqarıdaǵı teoremanıń dáliyli kibi.

1-teorema hám 18.7-teoremalardan tómendegi nátiyjeler kelip shıǵadı.

1-saldar. $f(x,y)$ funkciya (D) oblastta berilgen hám integrallanıwshı bolsın. Eger $x \in [a,b]$ ózgeriwshiniń hár bir mánisinde $\int_c^d f(x,y)dy$ integral bar bolsa, $y \in [c,d]$ ózgeriwshiniń hár bir tayın mánisinde $\int_a^b f(x,y)dx$ integral bar bolsa, ol jaǵdayda mına

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx, \quad \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy \quad (2)$$

integrallarda bar boladı hám

$$\iint_{(D)} f(x,y)dD = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy$$

boladı.

2-saldar. Eger $f(x,y)$ funkciya (D) oblastta berilgen hám úzliksiz bolsa, ol jaǵdayda

$$\iint_{(D)} f(x,y)dD, \quad \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx, \quad \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy$$

integrallardıń hár biri bar boladı hám olar bir-birine teń boladı.

(18.13) integrallar, dúzilisine muwapıq, eki argumentli funkciyadan dáslep bir argumenti boyınsha (ekinshi argumentin ózgermes esaplap turıp), soń ekinshi argumenti boyınsha alınǵan integrallar. Bunday integrallardı tákirar integrallar dep ataw (tákirar limitlerdey) tábiyiy.

Sonday qılıp, qaralıp atırǵan jaǵdayda eseli integrallardı esapalaw tákirar integrallardı esaplawǵa keltiriler eken. Tákirar integraldı esaplaw bolsa eki ápiwayı (bir argumentli funkciyanıń integralın) Riman integralın izbe-iz esaplaw demek.

1-eskertiw. Joqarıda keltirilgen 18.6-teoremanı dáliyillew jolında kórdik, tuwrı tórtmúyeshlik (D) oblast tárepleri sáykes túrde $\Delta x_i, \Delta y_k$ bolǵan tuwrı tórtmúyeshlik oblastalar D_{ik} larǵa ajıraladı. Ayqın, bul elementar oblasttıń maydanı $D_{ik} = \Delta x_i \Delta y_k$ boladı.

Dáslep aytqanımızday, Δx ti dx ke, Δy ti dy ke almasırw múmkinligin hámde $a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d$ ekenligin itibarǵa alıp, bunnan bılay mına

$$\iint_{(D)} f(x,y)dD$$

kóriniste jazıw ornına

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dy \, dx \quad \left(\text{yamasa} \int_c^d \int_a^b f(x,y) \, dx \, dy \right)$$

kibi de jazıp kete beremiz.

Mısal. Mına

$$\iint_{(D)} \frac{x}{1+x^2+y^2} dx \, dy$$

integral esaplansın, bunda $(D) = (x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

Integral astındağı

$$f(x, y) = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}^{\frac{3}{2}}$$

funkciya (D) oblastta úzliksiz. Onda qarlıp atırğan eki eseli integralda,

$$\int_0^1 \frac{x}{1 + x^2 + y^2}^{\frac{3}{2}} dx$$

integralda bar. 18.7-teoremağa muwapıq

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x}{1 + x^2 + y^2}^{\frac{3}{2}} dx \right] dy$$

integral bar boladı hám

$$\iint_{(D)} \frac{x}{1 + x^2 + y^2}^{\frac{3}{2}} dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x}{1 + x^2 + y^2}^{\frac{3}{2}} dx \right] dy$$

boladı.

Eger

$$\int_1^0 \frac{x dx}{1 + x^2 + y^2}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2 + y^2}^{\frac{3}{2}} d(1 + x^2 + y^2) =$$

$$= - \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{y^2 + 2}}$$

bolıwın esapqa alsaq, onda

$$\iint_{(D)} \frac{x dx dy}{1 + x^2 + y^2}^{\frac{3}{2}} = \int_0^1 \left[\frac{1}{y^2 + 1} - \frac{1}{y^2 + 2} \right] dy =$$

$$= \left[\ln |y + \sqrt{y^2 + 1}| - \ln |y + \sqrt{y^2 + 2}| \right] \Big|_0^1 = \ln \frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}}$$

ekenligin tabamız. Demek,

$$\iint_{(D)} \frac{x \, dx \, dy}{1 + x^2 + y^2} = \ln \frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}}$$

Endi (D) oblast mına $(D) = (x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)$ kóriniste bolsın. Bunda $\phi_1(x)$ hám $\phi_2(x)$ $[a, b]$ da berilgen hám úziliksiz funkciyalar (18-sızılma).

18.8-teorema. $f(x, y)$ funkciya (D) oblastta berilgen hám integrallanıwshı bolsın. Eger $x \in [a, b]$ ózgeriwshiniń hár bir tayın mánisinde

$$I(x) = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) \, dy$$

integral bar bolsa, ol jaǵdayda mına

$$\int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) \, dy \right] dx$$

integralda bar boladı hám

$$\iint_{(D)} f(x, y) \, dD = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) \, dy \right] dx$$

boladı.

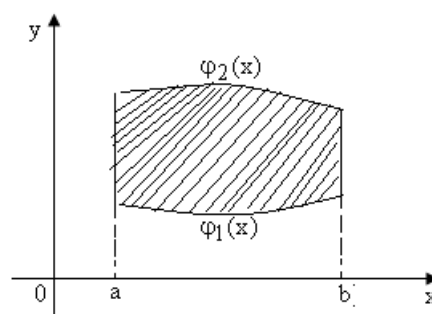
Dálil. $\phi_1(x)$ hám $\phi_2(x)$ funkciyalar $[a, b]$ da úzliksiz. Veyershtrass teoremasına muwapıq bul funkciyalar $[a, b]$ da óziniń eń úlken hám eń kishi mánislerine erisedi. Olardı

$$\min_{a \leq x \leq b} \phi_1(x) = c, \quad \max_{a \leq x \leq b} \phi_2(x) = d$$

dep belgileyik

Endi $D_1 = (x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ oblastta mına

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{eger } (x, y) \in (D) \text{ bolsa,} \\ 0, & \text{eger } (x, y) \in D_1 \setminus (D) \text{ bolsa} \end{cases}$$



18-sızılma

funkciyanı qarayıq.

Ayqın, teorema shártlerinde bul funksiya D_1 oblastta integrallanıwshı hám integral qásiyetine muwapıq

$$\iint_{D_1} f^*(x, y) dD = \iint_{(D)} f^*(x, y) dD + \iint_{D_1 \setminus (D)} f^*(x, y) dD = \iint_{(D)} f(x, y) dD \quad (18.14)$$

boladı. Sonday-aq, $x \in [a, b]$ ózgeriwshiniń hár bir mánisinde

$$I_1(x) = \int_c^d f^*(x, y) dy$$

integral bar hám

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \int_c^d f^*(x, y) dy = \int_c^{\phi_1(x)} f^*(x, y) dy + \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f^*(x, y) dy + \\ &+ \int_{\phi_2(x)}^d f^*(x, y) dy = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \end{aligned} \quad (18.15)$$

boladı. Onda 18.6-teoremaǵa muwapıq

$$\int_a^b \left[\int_c^d f^*(x, y) dy \right] dx$$

integralda bar boladı hám

$$\iint_{D_1} f^*(x, y) dD = \int_a^b \left[\int_c^d f^*(x, y) dy \right] dx$$

boladı.

(18.14) hám (18.15) qatnaslardan

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

bolıwı kelip shıǵadı. Teorema dálillendi.

Endi (D) oblast' mına

$$(D) = \{(x, y) \in R^2 : \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), \quad c \leq y \leq d\}$$

kóriniste bolsın. Bunda $\psi_1(y)$ hám $\psi_2(y)$ $[c,d]$ da berilgen úzliksiz funkciyalar (19-sızılma)

18.9-teorema. $f(x,y)$ funkciya (D) oblastta berilgen hám integrallanıwshı bolsın. Eger $y \in [c,d]$ ózgeriwshiniń hár bir tayın mánisinde

$$I(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$$

integral bar bolsa, ol jaǵdayda mına

$$\int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right] dy$$

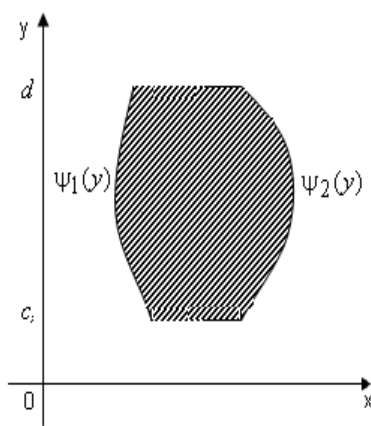
integralda bar boladı hám

$$\iint_{(D)} f(x,y)dD = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right] dy$$

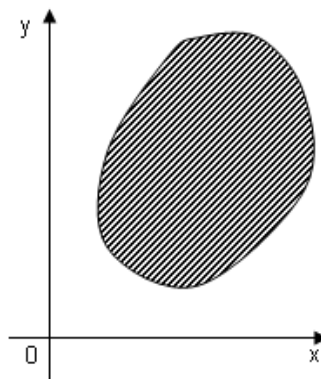
boladı.

Bul teoremanıń dáliyilli 18.8-teoremanıń dáliyilli kibi.

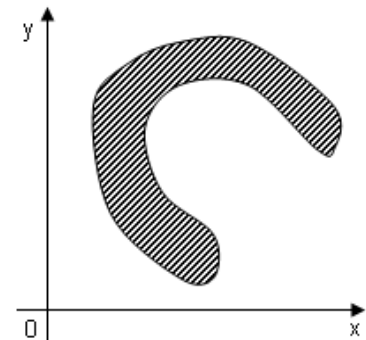
Meyli (D) oblast $D \subset R^2$ joqarıda qaralǵan oblastlardıń hár biriniń qásiyetine iye bolsın. (20-sızılma).



19-sızılma



20-sızılma



21-sızılma

18.6-saldar. $f(x,y)$ funkciya (D) oblastta berilgen hám integrallanıwshı bolsın. Eger $x \in [a,b]$ ózgeriwshiniń hár bir tayın mánisinde

$$\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy$$

integral bar bolsa, $y \in [c, d]$ ózgeriwshiniń hár bir tayın mánisinde

$$\int_{\psi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x, y) dx$$

integral bar bolsa, ol jaǵdayda

$$\int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx, \quad \int_c^d \left[\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

integrallarda bar hám

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

boladı.

Bul saldardıń dáliyilli 18.8-teorema hám 18.9-teoremadan kelip shıǵadı.

Eger (D) oblast 21-sızılmada suwretlengen oblast bolsa, ol jaǵdayda bul oblast joqarıda úyrenilgen oblastlar kórinisine keletuǵın qılıp bóleklerge ajratıladı. Nátiyjede (D) oblast eki eseli integral ajratılǵan oblastlar boyınsha eki eseli integrallar qosındısına teń boladı. Solay etip, biz integrallaw oblast (D) nıń jetkilikli keń klassı ushın eseli integrallardı tákirar integrallarǵa keltirip esaplaw múmkinligin kóremiz.

Мисаллар. 1. Мина

$$\iint_{(D)} e^{-y^2} dD$$

integraldı qarayıq, bunda $(D) = (x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1$. Bul jaǵdayda 18.7-teoremanıń barlıq shártleri orınlanadı. Usı teoremaǵa muwapıq

$$\iint_{(D)} e^{-y^2} dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^y e^{-y^2} dx \right] dy$$

boladı. Bul teńliktiń oń jaǵındaǵı integrallardı esaplap

tómendegilerdi tabamız:

$$\int_0^y e^{-y^2} dx = y e^{-y^2},$$

$$\int_0^1 y e^{-y^2} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-y^2} d y^2 = -\frac{1}{2} e^{-y^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right)$$

Demek,

$$\iint_{(D)} e^{-y^2} dx dy = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right).$$

2. Mına

$$\iint_{(D)} xy dx dy$$

integraldı qarayıq, bunda $(D) = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}$.

Bul jaǵdayda 18.6-teoremanıń barlıq shártleri orınlanadı. Onda

$$\iint_{(D)} xy dx dy = \int_0^1 x \left[\int_0^{1-x} y dy \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x)^2 dx = \frac{1}{24}$$

boladı.

3. Mına
$$\iint_{(D)} \sqrt{x+y} dx dy$$

integraldı qarayıq, bunda $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}$. Bul jaǵdayda 18.6-teoremanıń barlıq shártleri orınlanadı. Sol teoremaǵa muwapıq

$$\iint_{(D)} \sqrt{x+y} dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \sqrt{x+y} dy \right] dx$$

boladı. Integrallardı esaplap tabamız:

$$\int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \sqrt{x+y} dy \right] dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{3} \sqrt{x+y}^3 \right)_{y=0}^{y=1-x} = \frac{2}{3} \int_0^1 (1 - \sqrt{x}^3) dx = \frac{2}{5}$$

Demek,

$$\iint_{(D)} \sqrt{x+y} dx dy = \frac{2}{5}.$$

Bul keltirilgen mısallarda ápiwayı funkciyalardıń ápiwayı oblast boyınsha eki eseli integralları qaraladı. Kóp jaǵdaylarda ápiwayı funkciyalardı quramalı oblast boyınsha, quramalı funkciyalardı ápiwayı oblast boyınsha hám quramalı

funkciyalardı quramalı oblast boyınsha eki eseli integrallardı esaplawğa tuwra keledi. Bul integrallardı esaplaw bolsa biraz qıyın boladı.

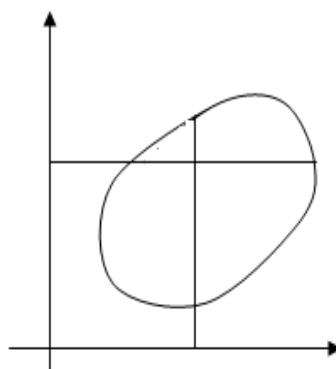
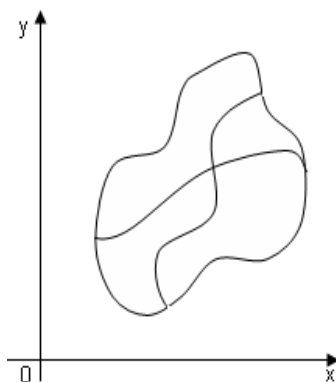
Eki eseli integrallarda ózgeriwshilerdi almasırw

$f(x,y)$ funkciya (D) oblastta $D \subset R^2$ berilgen bolsın. Bul funkciyanıń eki eseli integralı

$$\iint_{(D)} f(x,y) \, dx \, dy \quad (1)$$

barlıǵı málim bolıp, onı esaplaw talap etilsin. Bizge belgili, $f(x,y)$ funkciya hámde (D) oblast quramalı bolsa, (1) integraldı esaplaw qıyın boladı. Kóbinshe, x hám y ózgeriwshilerdi, málim qaǵıydaǵa muwapıq basqa ózgeriwshilerge almasırw nátiyjesinde integral astındaǵı funkciyada, integrallaw oblastı da ápiwayılasıp, eki eseli integraldı esaplaw ańsatlasadı.

Usı paragrafta eki eseli integrallarda ózgeriwshilerdi almasırw menen shuǵıllanamız. Dáslep tegislikte oblasttı oblastqa sáwlelendiriw, iymek sızıqlı koordinatlarda kórsetiliwin keltiremiz.



1 – sızılma

Eki tegislik berilgen bolsın (1-sızılma). Birinshi tegislikte tuwrı múyeshli Oxy koordinata sistemasın hám shegaralanǵan (D) oblasttı qarayıq. Bul oblasttıń shegarası $\partial(D)$ ápiwayı, bólek-sıypaq sızıqdan ibarat bolsın. Ekinshi tegislikte bolsa, tuwrı múyeshli Ouv koordinata sistemasın hám shegaralanǵan Δ oblasttı qarayıq. Bul oblasttıń shegarası $\partial \Delta$ da ápiwayı, bólekli-sıypaq sızıqtan ibarat bolsın.

$\phi(u,v)$ hám $\psi(u,v)$ lar Δ oblastta berilgen sonday funkciyalar bolsın, olardan dúzilgen $\phi(u,v)$, $\psi(u,v)$ sistema Δ oblasttaǵı (u,v) noqatı (D) oblasttaǵı (x,y) noqatqa sáwlelendirsın:

$$\left. \begin{aligned} \phi &: (u, \vartheta) \rightarrow x, \\ \psi &: (u, \vartheta) \rightarrow y. \end{aligned} \right\}$$

hám bul sáwlelendiriwdiń sáwlelerinen ibarat (x, y) kópik (D) ǵa tiyisli bolsın.

Demek, mına

$$\left. \begin{aligned} x &= \phi(u, \vartheta), \\ y &= \psi(u, \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

sistema Δ oblasttı (D) oblastqa sáwlelendiredi.

Bul sáwlelendiriw tómendegi shártlerdi orınlasın:

1°. (2) sáwlelendiriw óz-ara bir mánisli sáwlelendiriw, yaǵnıy Δ oblasttıń túrli noqatların (D) oblasttıń túrli noqatlarına sáwlelendirip, (D) oblasttaǵı hár bir noqat ushın (Δ) oblastta oǵan sáykes keletuǵın noqat beriw ǵana bolsın.

Ayqın, bul jaǵdayda (2) sistema u hám ϑ larǵa qarata bir mánisi sheshiledi:
 $u = \phi_1(x, y), \quad \vartheta = \psi_1(x, y)$ hám mına

$$\left. \begin{aligned} u &= \phi_1(x, y), \\ \vartheta &= \psi_1(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

sistema menen sáwlelendiriw joqarıdaǵı sáwlelendiriwge kerı bolıp (D) oblasttı Δ oblastqa sáwlelendiredi. Demek,

$$\left. \begin{aligned} \phi \phi_1(x, y), \psi_1(x, y) &\equiv x, \\ \psi \phi_1(x, y), \psi_1(x, y) &\equiv y. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

2°. $\phi(u, \vartheta), \psi(u, \vartheta)$ funksiýalar Δ oblastta, $\phi_1(x, y)$ hám $\psi_1(x, y)$ funksiýalar (D) oblastta úzliksiz hám barlıq dara tuwındılarǵa iye bolıp, bul dara tuwındılarda úzliksiz bolsın.

3°. (2) sistemadaǵı funksiýalardıń dara tuwındılarınınan dúzilgen mına

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \end{array} \right| \quad (5)$$

funkcional determinant Δ oblastta nolden parqlı (yaǵnıy Δ oblasttıń hár bir noqatında nolden parıqlı) bolsın. ádette (5) determinantı **sistemanıń Yakobiani** delinedi hám $I = (u, \vartheta)$ yamasa $\frac{D(x, y)}{D(u, \vartheta)}$ kóriniste belgilendi.

Bul 2° hám 3° shártlerden, Δ baylanıslı oblast bolǵanda, (5) Yakobiannıń usı oblastta óz belgisin saqlawı kelip shıǵadı.

Haqıyqattanda, $I(u, \vartheta)$ funkciya Δ oblasttıń eki túrli noqatlarında túrli belgili mánislerge iye bolsa, ol jaǵdayda 12-baptıń 5-§ indegi 12.13 teorema (Bal’cano – Koshi teoremasına muwapıq) Δ da sonday u_0, ϑ_0 noqat tabıladı. $I(u_0, \vartheta_0) = 0$ boladı. Bul bolsa $I(u, \vartheta) \neq 0$ bolıwına qarsı.

3°-shártten (3) sistemanıń Yakobiani, yaǵnıy mına

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial x} & \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (6)$$

funkcional determinanttıń da (D) oblastta nolden parqlı bolıwı kelip shıǵadı.

Haqıyqattanda, (4) qatnastan

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 1,$$

$$\frac{\partial y}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 1,$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0$$

bolıwın itibarǵa alsaq, ol jaǵdayda

$$\frac{D(x, y)}{D(u, \vartheta)} \cdot \frac{D(u, \vartheta)}{D(x, y)} = 1$$

bolıp

$$I_1(x, y) = \frac{D(u, \vartheta)}{D(x, y)} \neq 0$$

bolıwın tabamız.

Demek, (D) baylanıslı oblast bolǵanda (6) Yakobianda (D) oblastta óz belgisin saqlaydı.

(2) sáwlelendiriw Δ oblasttıń ishki noqatın (D) oblasttıń ishki noqatına sáwlelendiredi. Haqıyqattanda, ayqın emes funkciyanıń bar bolıwı haqqındaǵı teoremaǵa muwapıq (2) sistema x_0, y_0 noqattıń bazıbir dógeresinde u hám ϑ lardı x hám y ózgeriwshilerdiń funkciyası sıpatında anıqlaydı: $u = \phi_1(x, y)$, $\vartheta = \psi_1(x, y)$. Bunda $\phi_1(x_0, y_0) = u_0$, $\psi_1(x_0, y_0) = \vartheta_0$ boladı.

Demek, x_0, y_0 (D) oblasttıń ishki noqatı. Bunnan (2) sáwlelendiriw Δ oblasttıń shegarası $\partial \Delta$ nıń (D) oblasttıń shegarası $\partial \Delta$ ǵa sáwlelendiriwi kelip shıǵadı.

Sonday-aq, (2) sáwlelendiriw Δ oblasttaǵı sıypaq (bólek-sıypaq) iymek sızıq

$$\left. \begin{aligned} u &= u(t) \\ \vartheta &= \vartheta(t) \end{aligned} \right\} \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

ni (D) oblasttaǵı sıypaq (bólek-sıypaq) iymek sızıq

$$\left. \begin{aligned} x &= \phi(u(t), \vartheta(t)) \\ y &= \psi(u(t), \vartheta(t)) \end{aligned} \right\}$$

ǵa sáwlelendiredi.

Δ oblastta $u = u_0$ tuwrı sızıqtı alayıq. (2) sáwlelendiriw bul tuwrı sızıqtı (D) oblasttaǵı

$$\left. \begin{aligned} x &= \phi(u_0, \vartheta) \\ y &= \psi(u_0, \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

iymek sızıqqa sáwlelendiredi. Dál sonday Δ oblasttaǵı $\vartheta = \vartheta_0$ tuwrı sızıqtı (2) sáwlelendiriw (D) oblasttaǵı

$$\left. \begin{aligned} x &= \phi(u, \vartheta_0) \\ y &= \psi(u, \vartheta_0) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

iymek sızıqqa sáwlelendiredi. ádette (7) hám (8) iymek sızıqlardı koordinat sızıqları ((7) ni ϑ koordinat sızıǵı, (8) ti bolsa u koordinat sızıǵı) dep ataladı.

Solay etip, (2) sáwlelendiriw óz-ara bir mánisli sáwlelendiriw eken, onda (D) oblasttıń hár bir (x,y) noqatınan jalǵız ϑ -koordinat sızıǵı (u diń tayın ózgermes mánisine sáykes bolǵan sızıq), jalǵız u -koordinat sızıǵı (ϑ nıń tayın ózgermes mánisine sáykes bolǵan sızıq) ótedi. Demek, (D) oblasttıń usı (x,y) noqatı joqarıda ayılǵan u hám ϑ lar, menen, yaǵnıy Δ oblasttıń (u,ϑ) noqatı menen tolıq anıqlanadı. Sonıń ushın u hám ϑ lardı (D) oblast noqatlarınıń koordinataları dep qaraw múmkin. (D) oblast noqatlarınıń bunday koordinataları iymek sızıqlı koordinatalar dep ataladı.

Sonday qılıp, u hám ϑ lar bir tamannan Δ oblast noqatınıń Dekart koordinataları, ekinshi tamannan dál usı u hám ϑ lar (D) oblast noqatınıń iymek sızıqlı koordinataları boladı.

Mısal. Mına

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi \end{aligned} \right\} \quad (\rho \geq 0, \quad 0 \leq \phi < 2\pi)$$

sistemanı qarayıq.

Bul sistema $\Delta = \{u, \vartheta \in R^2 : 0 \leq \rho < +\infty, \quad 0 \leq \phi < 2\pi\}$ oblasttı Oxy tegislikke sáwlelendiredi. Bul sistemanıń Yakobiani

$$I(u, \vartheta) = \begin{vmatrix} \cos \phi & -\rho \sin \phi \\ \sin \phi & \rho \cos \phi \end{vmatrix} = \rho$$

boladı.

ρ hám ϕ ler (D) oblast noqatlarınıń iymek sızıqlı koordinataları bolıp, usı oblasttıń koordinat sızıqları bolsa, orayı $(0,0)$ noqatta, radiusı ρ ǵa teń mına

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

sheńberlerden (ϑ -koordinat sızıqları) hámde $(0,0)$ noqattan shıqqan $\phi = \rho_0 \quad 0 \leq \rho_0 < 2\pi$ nurlardan (ϑ -koordinat sızıqlar) ibarat.

Meyli, mına

$$\begin{aligned} x &= \phi(u, \vartheta) \\ y &= \psi(u, \vartheta) \end{aligned} \quad (2)$$

sistema Δ oblasttı (D) oblastqa sáwlelendirsın. Bul sáwlelendiriw joqarıdağı 1°-3° shártlerdi orınlasin. Ol jaǵdayda, (D) oblasttıń maydanı

$$D = \iint_D |I(u, \vartheta)| du d\vartheta = \iint_{\Delta} \left| \frac{\Delta(x, y)}{\Delta(u, \vartheta)} \right| du d\vartheta \quad (9)$$

boladı.

Bul formulaniń dáliyilli keyingi bapta (qarań 19-bap, 3-§.)

$f(x, y)$ funkciya (D) oblastta $D \subset R^2$ berilgen hám usı oblastta úzliksiz bolsın. (D) bolsa ápiwayı, bólek sıypaq sızıq penen shegaralangán oblast bolsın. Ayqın $f(x, y)$ funkciya (D) oblastta integrallanıwshı boladı.

Ayqın, mına

$$\left. \begin{aligned} x &= \phi(u, \vartheta) \\ y &= \psi(u, \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

sistema Δ oblasttı (D) oblastqa sáwlelendirsın hám bul sáwlelendiriw joqarıdağı 1°-3° shártlerdi orınlasin.

Hár bir bóliwshi sızıǵı bólekli-sıypaq bolǵan Δ oblasttıń P_{Δ} bóliniwin alayıq. (2) sáwlelendiriw nátiyjesinde (D) oblasttıń P_D bóliniwi hasıl boladı. Bul bóliniwge qarata $f(x, y)$ funkciyanıń integral qosındısı

$$\delta = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta_k$$

nı dúzemiz. Ayqın,

$$\lim_{\lambda_{P_D} \rightarrow 0} \delta = \lim_{\lambda_{P_D} \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta_k = \iint_{(D)} f(x, y) dx dy \quad (10)$$

Joqarıda keltirilgen (9) formulaǵa muwapıq

$$D_k = \iint_{D_k} |I(u, \vartheta)| \, du \, d\vartheta$$

boladı. Orta mánis haqkındağı teoremadan paydalanıp tómendegini tabamız:

$$D_k = \left| I(u^*_k, \vartheta^*_k) \right| \cdot \Delta_k \quad u^*_k, \vartheta^*_k \in \Delta_k,$$

bunda Δ_k — Δ nıń maydanı. Nátiyjede (10) qosındı mına

$$\delta = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \cdot \left| I(u^*_k, \vartheta^*_k) \right| \cdot \Delta_k$$

kóriniske keledi.

ξ_k, η_k noqattıń D_k oblasttağı ıqtıyarlı noqat ekenleginen paydalanıp, onı

$$\phi(u^*_k, \vartheta^*_k) = \xi_k,$$

$$\psi(u^*_k, \vartheta^*_k) = \eta_k.$$

dep alıw múmkin. Ol jaǵdayda

$$\delta = \sum_{k=1}^n f(\phi(u^*_k, \vartheta^*_k), \psi(u^*_k, \vartheta^*_k)) \cdot \left| I(u^*_k, \vartheta^*_k) \right| \cdot \Delta_k$$

boladı.

Ayqın, $f(\phi(u, \vartheta), \psi(u, \vartheta)) \cdot |I(u, \vartheta)|$ funkciya Δ oblastta úzliksiz.

Demek, ol usı oblastta integrallanıwshı. Ol jaǵdayda

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda_{P_\Delta} \rightarrow 0} \delta &= \lim_{\lambda_{P_\Delta} \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\phi(u^*_k, \vartheta^*_k), \psi(u^*_k, \vartheta^*_k)) \cdot \left| I(u^*_k, \vartheta^*_k) \right| \cdot \Delta_k = \\ &= \iint_{\Delta} f(\phi(u, \vartheta), \psi(u, \vartheta)) \cdot |I(u, \vartheta)| \, du \, d\vartheta \end{aligned} \quad (11)$$

boladı.

$\lambda_{P_\Delta} \rightarrow 0$ da $\lambda_{P_D} \rightarrow 0$ bolıwın itibarǵa alıp, (10) hám (11) qatnaslardan

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(\phi(u, \vartheta), \psi(u, \vartheta)) \cdot |I(u, \vartheta)| \, du \, d\vartheta \quad (12)$$

bolıwın tabamız.

Bul eki eseli integralda ózgeriwshilerdi almastırıw formulası.

Ol berilgen (D) oblast boyınsha integraldı esaplawdı Δ oblast boyınsha integraldı esaplawğa keltiredi. Egerde (12) de óń tárepindegi integraldı esaplaw jeńil bolsa, orınlangan ózgeriwshilerdi almastırıw ózin aqlaydı.

Mısal. Mına

$$\iint_{(D)} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dx dy$$

integraldı qarayıq, bunda

$$D = (x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 1, y > 0$$

orayı $(0,0)$ noqatta, radiusı 1 ge teń bolǵan joqarı tegisliktegi yarım dóńgelek.

Berilgen integralda ózgeriwshilerdi tómendegishe almastıramız:

$$x = \rho \cos \phi,$$

$$y = \rho \sin \phi$$

Bul almastırıw mına

$$\Delta = (\rho, \phi) \in R^2 : 0 < \phi < \pi, 0 < \rho < 1$$

tuwrı tórmúyeshlikti (D) oblastqa sáwlelendiredi hám ol $1^\circ-3^\circ$ shártlerdi qanaatlandıradı. Onda (12) formulaǵa muwapıq

$$\iint_{(D)} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dx dy = \iint_{\Delta} \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}} |I(\rho, \phi)| d\rho d\phi$$

boladı. Bunda Yakobian $I(\rho, \phi) = \rho$ boladı. Bul teńliktiń óń tárepindegi integraldı esaplap tabamız:

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}} |I(\rho, \phi)| d\rho d\phi &= \int_0^1 \left(\int_0^\pi d\phi \right) \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}} \rho d\rho = \\ &= \pi \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}} \rho d\rho = \frac{\pi}{4} \quad \pi - 2 \end{aligned}$$

Demek,
$$\iint_{\Delta} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dx dy = \frac{\pi}{4} \quad \pi - 2$$

Eki eseli integraldın bazıbir qollanıwları

Deneniń kólemi hám onıń eki eseli integral arqalı anıqlanıwı.

R^3 keńislikte bazıbir shegaralanǵan (V) deneni qarayıq. Bul (V) deneniń ishinde (A) kópjaqlar jaylasqan, óz nábwetinde (V) dene bolsa (B) kópjaqlar ishinde jaylasqan bolsın. (A) kópjaqlar kólemlerin V_A menen, (B) kópjaqlar kólemlerin V_B menen belgileyik. Biz kópjaqlardıń kólemleri túsinińler hám onı esaplawdı (dál tegisliktegi kópmúyeshtiń maydanı túsinińi hám esaplaw kibi) bilemiz dep alamız. Nátiyjede (V) deneniń ishinde jaylasqan kópjaqlar kólemlerinen ibarat V_A kóplik, ishine (V) dene jaylasqan kópjaqlar kólemlerinen ibarat V_B kóplikler hasıl boladı.

V_A kóplik joqarıdan, V_B kóplik tómennen shegaralanǵanlıǵı sebepli V_A kóplik anıq joqarı shegaraǵa, V_B kóplik bolsa anıq tómengi shegaraǵa iye boladı.

$$\sup V_A = \underline{V}, \quad \inf V_B = \overline{V}.$$

Ayqın,

$$\underline{V} \leq \overline{V}.$$

1-anıqlama. Eger $\underline{V} = \overline{V}$, yaǵnıy $\sup V_A = \inf V_B$ teńlik orınlı bolsa, ol jaǵdayda (V) dene kólemge iye dep ataladı hám $V = \underline{V} = \overline{V}$ shama (V) **deneniń kólemi** delinedi.

Demek, $V = \sup V_A = \inf V_B$.

Endi (V) dene sıpatında joqarıdan $z=f(x,y)$ bet penen, qaptal jaqlarınan jasawshıları Oz kósherine parallel bolǵan cilindrdik bet hámde tómennen Oxy tegisliktegi (D) oblast penen shegaralanǵan deneni qarayıq.

(D) tuyıq oblasttıń P bóliniwin alamız. $f(x,y)$ funkciya (D) da úzliksiz bolǵanlıǵı sebepli, bul funkciya P bóliniwdiń hár bir D_k bóleginde de úzliksiz bolıp, onda

$$\inf f(x,y) : (x,y) \in D_k = m_k, \quad \sup f(x,y) : (x,y) \in D_k = M_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

large iye boladı.

Tómendegi

$$V_A = \sum_{k=1}^n m_k D_k, \quad V_B = \sum_{k=1}^n M_k D_k$$

qosındılardı dúzemiz. Bul qosındılardıń birinshisi (V) dene ishine jaylasqan kópjaqtıń kólemin, ekinshisi bolsa (V) deneni óz ishine alǵan kópjaqtıń kólemin anıqlaydı.

Ayqın, bul kópjaqlar, demek olardıń kólemleride $f(x,y)$ funkciya hámde (D) oblasttıń bóliniwine baylanıslı boladı:

$$V_A = V_A^P(f), \quad V_B = V_B^P(f).$$

(D) oblasttıń túrli bóliniwleri alınsa, olarǵa qarata (V) deneniń ishine jaylasqan hámde (V) deneni óz ishine alǵan túrli kópjaqlar jasaladı. Nátiyjede bul kópjaqlar kólemlerinen ibarat tómendegi

$$V_A^P(f), \quad V_B^P(f)$$

kóplikler hasıl boladı. Bunda $V_B^P(f)$ kóplik joqarıdan, $V_A^P(f)$ kóplik bolsa tómennen shegaralanǵan boladı. Demek, bul kópliklerdiń anıq shegaraları

$$\sup V_A^P(f), \quad \inf V_B^P(f)$$

bar. Shártke muwapıq $f(x,y)$ funkciya (D) tuyıq oblastta úzliksiz. Ol jaǵdayda Kantor teoremasınıń saldarına muwapıq, $\forall \varepsilon > 0$ san alıńandada, $\frac{\varepsilon}{D}$ sanǵa muwapıq sonday $\delta > 0$ san tabıladı, (D) oblasttıń diametri $\lambda_P < \delta$ bolǵan hár qanday bóliniwi P ushın hár bir D_k de funkciyanıń terbelisi

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{D}$$

boladı. Onda

$$\begin{aligned} \inf V_B^P(f) - \sup V_A^P(f) &\leq V_B^P(f) - V_A^P(f) = \sum_{k=1}^n M_k D_k - \sum_{k=1}^n m_k D_k = \\ &= \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) D_k < \frac{\varepsilon}{D} \sum_{k=1}^n D_k = \frac{\varepsilon}{D} \cdot D = \varepsilon. \end{aligned}$$

Demek, (D) oblasttıń diametri $\lambda_p < \delta$ bolǵan hár qanday bóliniwi alıńanda da bul bóliniwge sáykes (V) deneniń ishine jaylasqan hámde bul (V) nı óz ishine alǵan kópjaqlı kólemleri ushın b́arqulla

$$0 \leq \inf V_B^P(f) - \sup V_A^P(f) < \varepsilon$$

teńsizlik orınlı boladı. Bunnan bolsa

$$\inf V_B^P(f) = \sup V_A^P(f) \quad (1)$$

teńlik kelip shıǵadı. Bul teńlik (V) dene kólemge iye bolıwın bildiredi.

Endi joqarı da úyrenilgen $V_A^P(f)$, $V_B^P(f)$ qosındıları Darbu qosındıları menen salıstırıp, $V_A^P(f)$ hám $V_B^P(f)$ qosındılar $f(x,y)$ funkciyanıń (D) oblastta sáykes túrde Darbudıń tómengi hámde joqarı qosındıları ekenligin tabamız. Sonıń ushın mına

$$\sup V_A^P(f), \quad \inf V_B^P(f)$$

shamalar $f(x,y)$ funkciyanıń tómengi hámde joqarı eki eseli integralları boladı, yaǵnıy

$$\sup V_A^P(f) = \iint_{(D)} f(x,y)dD, \quad \inf V_B^P(f) = \overline{\iint_{(D)} f(x,y)dD}.$$

Joqarıdaǵı (18.33) qatnasqa muwapıq

$$\iint_{(D)} f(x,y)dD = \overline{\iint_{(D)} f(x,y)dD}$$

teńlik orınlı ekenligin kórinedi. Demek,

$$\iint_D f(x,y)dD = \iint_{(D)} f(x,y)dD = \overline{\iint_{(D)} f(x,y)dD}.$$

Sonday qılıp, bir tamannan, qaralıp atırǵan (V) dene kólemge iye ekeni, ekinshi tamannan onıń kólemi $f(x,y)$ funkciyanıń D oblast boyınsha eki eseli integralına teń ekeni dáliyillendi. Demek, (V) deneniń kólemi ushın mına

$$V = \iint_{(D)} f(x,y)dD \quad (2)$$

formula orınlı.

Mısal. Mına

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

ellipsoidtıń kólemi tabılsın. Bul ellipsoid $z = 0$ teńlikke qarata simmetriyalı. Joqarı bólegin $z \geq 0$ orap turǵan bet

$$z = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

boladı.

Joqarıdaǵı (18.34) formulaǵa muwapıq ellipsoidtıń kólemi V :

$$V = 2c \iint_{(D)} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \, dxdy$$

boladı, bunda

$$(D) = \left\{ (x, y) \in R^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Integralda

$$\left. \begin{aligned} x &= a\rho \cos \phi \\ y &= b\rho \sin \phi \end{aligned} \right\}$$

almastırıwdı orınlaymız. Bul sistemanıń Yakobiani

$$I = (\rho \cdot \phi) = \begin{vmatrix} a \cos \phi & b \sin \phi \\ -a \rho \sin \phi & b \rho \cos \phi \end{vmatrix} = ab\rho$$

boladı. (18.35) sistema $(\Delta) = (\rho, \phi) \in R^2 : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ oblasttı (D) oblastqa sáwlelendiredi. (18.27) formulaǵa muwapıq

$$\iint_{(D)} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \, dxdy = \iint_{(\Delta)} \sqrt{1 - \rho^2} \, ab \, \rho \, d\rho \, d\phi$$

boladı. Demek,

$$V = 2abc \iint_{(\Delta)} \sqrt{1 - \rho^2} \rho d\rho d\phi = 2abc \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) \sqrt{1 - \rho^2} \rho d\rho =$$

$$= 4\pi abc \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2} \rho d\rho = \frac{4\pi}{3} abc.$$

Sonday qılıp, ellipsoidtıń kólemi

$$V = \frac{4}{3} \pi a b c.$$

boladı.

Tegis figuranıń maydanı. Usı baptıń 1-§ inde (D)oblasttıń maydanı tómendegi

$$D = \iint_{(D)} dD = \iint_{(D)} dx dy$$

integralğa teń bolıwın kórdik. Demek, eki eseli integral járdeminde tegis figuranıń maydanın esaplaw múmkin eken.

Dara jaǵdayda, oblast

$$(\Delta) = (x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)$$

iyemek sıızıqlı trapeciyadan ibarat bolsa ($f(x)$ funkciya $[a, b]$ da úzliksiz), ol jaǵdayda

$$\Delta = \iint_{(\Delta)} dx dy = \int_a^b \left[\int_0^{f(x)} dy \right] dx = \int_a^b f(x) dx$$

bolıp, 1-bólim, 10-bap, 2-§ inde tabılǵan formulaǵa kelemiz.

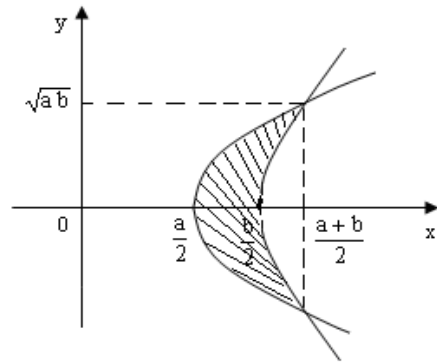
Mısal. Mına

$$x = \frac{y^2 + a^2}{2a}, \quad x = \frac{y^2 + b^2}{2b} \quad (0 < a < b)$$

sızıqlar menen shegaralangán figuranıń maydanı tabılsın. Bul sızıqlar paraboladan ibarat (23-sızılma).

Tómendegi

$$\left. \begin{aligned} x - \frac{y^2 + a^2}{2a} &= 0 \\ x - \frac{y^2 + b^2}{2b} &= 0 \end{aligned} \right\}$$



23-sızılma

sistemanı sheship, parabolalardıń kesiliskeń noqatları

$$\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab} \right) \text{ hám } \left(\frac{a+b}{2}, -\sqrt{ab} \right)$$

ekenin tabamız: qaralıp atırǵan figura Ox kósherine qarata simmetriyalı bolıwın itibarǵa alsaq, ol jaǵdayda Δ nıń maydanı

$$\Delta = 2 \iint_{\Delta_1} dx dy$$

boladı, bunda

$$\Delta_1 = \left\{ (x, y) \in R^2 : \frac{y^2 + a^2}{2a} \leq x \leq \frac{y^2 + b^2}{2b}, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{ab} \right\}.$$

Integraldı esaplap, tómendegini tabamız:

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta_1} dx dy &= \int_0^{\sqrt{ab}} \left(\int_{\frac{y^2+a^2}{2a}}^{\frac{y^2+b^2}{2b}} dx \right) dy = \\ &= \int_0^{\sqrt{ab}} \left(\frac{y^2+b^2}{2b} - \frac{y^2+a^2}{2a} \right) dy = \frac{1}{3} (b-a) \sqrt{ab}. \end{aligned}$$

Demek,

$$\Delta = \iint_{\Delta} dx dy = \frac{2}{3} (b-a) \sqrt{ab}.$$

Bettiń maydanı hám onıń eseli integral arqalı anıqlanıwı. Eki eseli integral járdeminde bet maydanın esaplaw múmkin. Bul funkciyanıń grafigi 17-sızılmada suwretlengen. (S) betten ibarat bolsın.

(D) oblasttın P bóliniwin alayıq. Onın bólekleri $D_1, D_2, \dots, D_n$ bolsın. Bul bóliniwdiń bóliwshi sıızqların baǵıtlawshılar sıpatında qarap, olar arqalı jasawshıları Oz kósherine parallel bolǵan cilindrlik betler ótkizemiz. Ayqın, bul cilindrlik betler (S) betti $S_1, S_2, \dots, S_n$ bóleklerge ajıratadı. hár bir D_k $k = 1, 2, \dots, n$ da ıqtıyarlı ξ_k, η_k noqat alıp, (S) bette oǵan sáykes noqat ξ_k, η_k, Z_k $z_k = f(\xi_k, \eta_k)$ nı tabamız.

Soń (S) betke usı ξ_k, η_k, Z_k noqatta urınba tegislik júrgizemiz. Bul urınba tegislik penen joqarıda ayılǵan cilindrlik bettiń kesilsiwinen hasıl bolǵan urınba tegislik bólegin T_k menen onıń maydanı T_k menen belgileyik.

Geometriyadan málim, D_k oblast T_k nıń ortogonal proekciyası bolıp,

$$D_k = T_k \left| \cos \gamma_k \right| \quad (18.36)$$

boladı, bunda γ_k – (S) betke ξ_k, η_k, Z_k $z_k = f(\xi_k, \eta_k)$ noqatta ótkizilgen urınba tegislik normalınıń Oz kósheri menen jasaǵan múyesh.

Ayqın, $\lambda_p \rightarrow 0$ da S_k ($k = 1, 2, \dots, n$) nıń diametri de nol'ge umtıladı.

Eger $\lambda_p \rightarrow 0$ da $\sum_{k=1}^n T_k$ qosındı shekli limitke iye bolsa, bul limit (S) bettiń **maydanı** dep ataladı. Demek, (S) bettiń maydanı

$$S = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n T_k \quad (18.37)$$

boladı.

Joqarıda qaralıp atırǵan $z = f(x, y)$ funkciya (D) oblastta $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ dara tuwındılarǵa iye bolıp, bul dara tuwındılar (D) oblastta úzliksiz bolsın. Ol jaǵdayda

$$\cos \gamma_k = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2_x(\xi_k, \eta_k) + f'^2_y(\xi_k, \eta_k)}}$$

boladı.

(18.36) qatnastan

$$T_k = \frac{1}{\cos \gamma_k} D_k$$

bolıwın tabamız. Demek,

$$\sum_{k=1}^n T_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\cos \gamma_k} D_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + f_x'^2(\xi_k, \eta_k) + f_y'^2(\xi_k, \eta_k)} D_k \quad (18.38)$$

Teńliktiń oń jaǵındaǵı qosındı

$$\sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)}$$

funkciyanıń integral qosındısı (qarań, 1-§). Bul funksiya (D) oblastta úzliksiz, demek, integrallanıwshı.

Sonıń ushın

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + f_x'^2(\xi_k, \eta_k) + f_y'^2(\xi_k, \eta_k)} D_k = \iint_{(D)} \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)} dD$$

boladı.

Sonday qılıp. (18.37) hám (18.38) qatnaslardan

$$S = \iint_{(D)} \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)} dD \quad (18.39)$$

bolıwı kelip shıǵadı.

Mısal. Ultanınıń radiusı r , biyikligi h bolǵan dóńgelek konustıń qaptal beti tabılsın.

Bunday konus betiniń teńlemesi

$$z = \frac{h}{r} \sqrt{x^2 + y^2}$$

boladı. Joqarıdaǵı (18.39) formulaǵa muwapıq

$$S = \iint_{(D)} \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} \, dxdy$$

boladı, bunda

$$\Delta = (x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq r^2 \quad .$$

Endi

$$z'_x = \frac{h}{r} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = \frac{h}{r} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

hám

$$\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2} \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{h^2}{r^2} \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2}}$$

ekenligin itibarğa alıp, tómendegini tabamız:

$$S = \iint_{\Delta} \sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2}} \, dxdy = \sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2}} \iint_{\Delta} dxdy = \sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2}} \pi r^2 = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}.$$

16-lekciya

Úsh eseli integral túsiniğı. U'sh eseli integraldıń qásiyetleri. Úsh eseli integraldı esaplaw. Úsh eseli integralda ózgeriwshilerdi almastırıw. Tsilindrlik hám sferalıq koordinatalarda úsh eseli integral. Úsh eseli integrallardıń qollanıhları

Joqarıda Riman integralı túsiniǵınıń eki ózgeriwshili funkciya ushın qanday kiritiliwin kórdik hám onı keń úyrendik. Dál soǵan uqsas bul túsiniq úsh ózgeriwshili funkciya ushın da kiritiledi. Onı úyreniwde Riman integralı hámde eki eseli integralda júrgizilgen barlıq pikirlewler (integrallaw oblastınıń bóliniwin alıw, bóleklerde ıqtıyarlı noqat tańlap alıw, integral qosındı dúziw, tiyisli limitke ótiw hám basqalar) qaytarıladı. Sonı itibarğa alıp, tómende úsh eseli integral haqqındaǵı faktlerdi keltiriw menen shegaralanamız.

1. Úsh eseli integral anıqlaması. $f(x,y,z)$ funkciya R^3 keńislikegi shegaralanǵan (V) oblastta berilgen bolsın. (Bul jerde hám keleshekte barlıq waqıt funkciyanıń beriliwi oblastı (V) nı kólemge iye bolǵan dep qaraymız). (V) oblasttıń P bóliniwin hám bul bóliniwdiń hár bir V_k ($k = 1, 2, \dots, n$) bóleginde ıqtıyarlı ξ_k, η_k, ζ_k noqattı alayıq. Soń tómendegi

$$\delta = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot V_k$$

qosindını dúzemiz, bunda V_k — V nıń kólemi.

Bul qosındı $f(x, y, z)$ funkciyanıń **integral qosındısı** yaki **Riman qosındısı** dep ataladı.

Endi (V) oblasttıń sonday

$$P_1, P_2, \dots, P_m, \dots \quad (18.40)$$

bóliniwlerin qaraymız, olardıń diametrlerinen dúzilgen

$$\lambda_{P_1}, \lambda_{P_2}, \dots, \lambda_{P_m}, \dots$$

izbe-izlik nol'ge umtılsın: $\lambda_{P_m} \rightarrow 0$. Bunday P_m ($m = 1, 2, \dots$) bóliniwlerge qarata $f(x, y, z)$ funkciyanıń integral qosındısı dúzemiz:

$$\delta = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot V_k$$

Nátiyjede tómendegi

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m, \dots$$

izbe-izlik hasıl boladı. Bul izbe-izlik hár bir aǵzası ξ_k, η_k, ζ_k noqatlarǵa ǵárezli.

18.9-anıqlama. Eger (V) nıń hár qanday (18.40) bóliniwler izbe-izligi P_m alıńanda da, oǵan sáykes integral qosındı nıń mánislerinen ibarat δ_m izbe-izlik ξ_k, η_k, ζ_k noqatlardı tańlap alınıwına ǵárezli bolmaǵan jaǵdayda hámme waqıt bir I sanǵa umtılsa, bul I san δ qosındı nıń **limiti** dep ataladı hám ol

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \delta = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot V_k = I$$

kibi belgilenedi.

18.10-anıqlama. Eger $\lambda_p \rightarrow 0$ da $f(x, y, z)$ funkciyanıń integral qosındısı δ shekli limitke iye bolsa, $f(x, y, z)$ funkciya (V) da **integrallanıwshı (Riman mánisinde integrallanıwshı) funkciya** delinedi. Bul δ qosındı nıń shekli limiti I

bolsa $f(x,y,z)$ funkciyanıń (V) boyınsha **úsh eseli integralı (Riman integralı)** delinedi hám ol

$$\iiint_{(V)} f(x,y,z) dV$$

kibi belgilenedi. Demek,

$$\iiint_{(V)} f(x,y,z)dV = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \delta = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \xi_k) \cdot V_k$$

$f(x,y,z)$ funkciya (V) da $V \subset R^3$ berilgen bolıp, ol usı oblastta shegaralangán bolsın:

$$m \leq f(x,y,z) \leq M \quad \forall (x,y,z) \in (V) .$$

(V) oblasttıń bóliniwleri kópligi P nıń hár bir bóliniwine qarata $f(x,y,z)$ funkciyasınıń Darbu qosındıları

$$s_p(f) = \sum_{k=1}^n m_k V_k, \quad S_p(f) = \sum_{k=1}^n M_k V_k$$

nı dúzip, mına

$$s_p(f) ; \quad S_p(f)$$

kópliklerdi qarayıq. Ayqın, bul kóplikler shegaralangán boladı.

18.11-anıqlama. $s_p(f)$ kópliktiń anıq joqarı shegarası $f(x,y,z)$ funkciyanıń tómengi **úsh eseli integralı** dep ataladı hám ol

$$\underline{I} = \iiint_{(V)} f(x,y,z)dV$$

kibi belgilenedi.

18.12-anıqlama. Eger $f(x,y,z)$ funkciyanıń tómengi hámde joqarı úsh eseli integralları bir-birine teń bolsa, ol jaǵdayda $f(x,y,z)$ funkciya (V) da integrallanıwshı dep ataladı hám olardıń ulıwma mánisi

$$I = \iiint_{(V)} f(x,y,z)dV = \overline{\iiint_{(V)} f(x,y,z)dV}$$

$f(x,y,z)$ funkciyanıń **úsh eseli integralı (Riman integralı)** delinedi .

Demek,

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \overline{\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV}$$

2. Úsh eseli integrallardıń bar bolıwı. $f(x, y, z)$ funkciya $(V) \quad V \subset R^3$ oblastta berilgen bolsın.

18.10-teorema. $f(x, y, z)$ funkciya (V) oblastta integrallanıwshı bolıwı ushın $\forall \varepsilon > 0$ alıńanda da sonday $\delta > 0$ tabılıp, (V) oblasttıń diametri $\lambda_P < \delta$ bolǵan hár qanday P bóliniwine qarata Darbu qosındıları

$$S_P(f) - s_p(f) < \varepsilon$$

teńsizlikti qanaatlandırıwı zárúr hám jeterli.

3. Integrallanıwshı funkciyalar klassı. Úsh eseli integraldıń barlıǵı haqqındaǵı teoremadan paydalanıp, málim klass funkciyalarınıń integrallanıwshı bolıwı kórsetiledi.

18.11-teorema. Eger $f(x, y, z)$ funkciya shegaralanǵan tuyıq $(V) \quad V \subset R^3$ oblastta berilgen hám úzliksiz bolsa, ol usı oblastta integrallanıwshı boladı.

18.12-teorema. Eger $f(x, y, z)$ funkciya (V) oblastta shegaralanǵan hám bul oblasttıń shekli sandaǵı nol' kólemli betlerinde úziliske iye bolıp, qalǵan barlıq noqatlarında úzliksiz bolsa, funkciya (V) da integrallanıwshı boladı.

4. Úsh eseli integraldıń qásiyetleri. Úsh eseli integrallarda usı bapttıń 5-§ inde keltirilgen eki eseli integraldıń qásiyetleri kibi qásiyetlerge iye.

1°. $f(x, y, z)$ funkciya (V) oblastta berilgen bolıp, (V) oblast' nol' kólemli (S) bet penen V_1 hám V_2 oblastlarǵa ajratılǵan bolsın. Funkciya V_1 hám V_2 oblastlarda da integrallanıwshı bolsa, funkciya V_1 hám V_2 oblastlarda da integrallanıwshı boladı, hám kerisinshe, yaǵnıy $f(x, y, z)$ funkciya V_1 hám V_2 oblastlardıń hár birinde integrallanıwshı bolsa, funkciya (V) da da integrallanıwshı boladı. Bunda

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_{V_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{V_2} f(x, y, z) dV$$

boladı.

2°. Eger $f(x,y,z)$ funksiya (V) da integrallanishı bolsa, ol jaǵdayda $c \cdot f(x,y,z)$ ($c = \text{const}$) funksiya usı oblastta integrallanishı hám mına

$$\iiint_{(V)} c f(x,y,z) dV = c \iiint_{(V)} f(x,y,z) dV$$

formula orınlı boladı.

3°. Eger $f(x,y,z)$ hám $g(x,y,z)$ funksiya (V) da integrallanishı bolsa, ol jaǵdayda $f(x,y,z) \pm g(x,y,z)$ funksiya usı oblastta integrallanishı hám mına

$$\iiint_{(V)} [f(x,y,z) \pm g(x,y,z)] dV = \iiint_{(V)} f(x,y,z) dV \pm \iiint_{(V)} g(x,y,z) dV$$

formula orınlı boladı.

4°. Eger $f(x,y,z)$ funksiya (V) da integrallanishı bolıp, $\forall (x,y,z) \in (V)$ ushın $f(x,y,z) \geq 0$ bolsa, ol jaǵdayda

$$\iiint_{(V)} f(x,y,z) dV \geq 0$$

boladı.

5°. Eger $f(x,y,z)$ funksiya (V) da integrallanishı bolsa, ol jaǵdayda $|f(x,y,z)|$ funksiya usı oblastta integrallanishı hám

$$\left| \iiint_{(V)} f(x,y,z) dV \right| \leq \iiint_{(V)} |f(x,y,z)| dV$$

boladı.

6°. Eger $f(x,y,z)$ funksiya (V) da integrallanishı bolsa, ol jaǵdayda sonday ózgermes μ ($m \leq \mu \leq M$) san bar bolıp,

$$\iiint_{(V)} f(x,y,z) dV = \mu \cdot V$$

boladı, bunda V - (V) oblasttıń kólemi.

7°. Eger $f(x,y,z)$ funksiya tuyıq (V) oblastta úziksiz bolsa, ol jaǵdayda bul oblastta sonday $(a,b,c) \in (V)$ noqat tabıladı,

$$\iiint_{(V)} f(x,y,z) dV = f(a,b,c) \cdot V$$

boladı.

Úsh eseli integrallardı esaplaw.

$f(x,y,z)$ funkciya

$$(V) = \{(x,y,z) \in R^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq \ell\}$$

oblastta (parallelepipedte) berilgen hám úzliksiz bolsın. Ol jaǵdayda

$$\iiint_{(V)} f(x,y,z) dV = \int_a^b \left[\int_c^d \left(\int_e^\ell f(x,y,z) dz \right) dy \right] dx$$

boladı.

Endi $(V) \subset R^3$ oblast – tómenen $z = \psi_1(x,y)$, joqarıdan $z = \psi_2(x,y)$ betler menen, qaptal tárepinen bolsa Oz kósherine parallel cilindrlik bet penen shegaralanǵan oblast bolsın. Bul oblasttıń Oxy tegisliktegi proekciyası bolsa (Δ) bolsın.

Eger $f(x,y,z)$ funkciya sonday (V) oblastta úzliksiz bolıp, $z = \psi_1(x,y)$, $z = \psi_2(x,y)$ funciyalar da úzliksiz bolsa, ol jaǵdayda

$$\iiint_{(V)} f(x,y,z) dv = \iint_{\Delta} \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z) dz \right) dx dy$$

boladı. Eger joqarıdaǵı jaǵdayda

$(\Delta) = \{(x,y) \in R^2 : a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$ bolıp, $\phi_1(x)$ hám $\phi_2(x)$ funciyalar $[a,b]$ da úzliksiz bolsa ol jaǵdayda

$$\iiint_{(V)} f(x,y,z) dv = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z) dz \right) dy \right] dx.$$

Úsh eseli integrallarda ózgeriwshilerdi almastırıw.

Úsh eseli integrallarda ózgeriwshilerdi almastırıw, usı baptıń 7-§ inde keltirilgen eki eseli integrallarda ózgeriwshilerdi almastırıw kibi boladı. Sonı esapqa alıp, tómende úsh eseli integrallarda ózgeriwshilerdi almastırıw formulasın keltiriw menen sheklenemiz.

$f(x,y,z)$ funkciya $(V) \subset R^3$ oblastta berilgen hám úzliksiz bolsın, (V) oblast bolsa sıypaq yamasa bólekli sıypaq betler menen shegaralanǵan bolsın.

Міна

$$\left. \begin{aligned} x &= \phi(u, v, w), \\ y &= \psi(u, v, w), \\ z &= \chi(u, v, w), \end{aligned} \right\}$$

система $(\Delta) \quad \Delta \subset R^3$ областті (V) областқа сáwlelendirsін hám буl сáwlelendiriw 7-§ de keltirilgen 1°-3° шáртlerin орinласын. Оl жағdayda

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dv = \iiint_{(\Delta)} f(\phi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)) |I| du dv dw$$

boladı, bunda

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

7. Úsh eseli integraldın bazıbir qollanılıwları.

Úsh eseli integral járdeminde R^3 кеңisliktegi deneniń kólemin, deneniń massasın, inerciya momentlerin tabıw múmkin.

17-lekciya

Doğa uzınlığı boyınsha alınған iymek sızıqlı integralға alıp kelinetuǵın máseleler. Doğa uzınlığı boyınsha alınған iymek sızıqlı integral, onıń qásiyetleri. Doğa uzınlığı boyınsha alınған iymek sızılı integraldı esaplaw.

Joqarıdaǵı bapta Riman integralı túsinigin eki ózgeriwshili funkciya ushın qanday kiritiliwin kórdik hám onı úyrendik. Sonnı da aytıw kerek, kóp ózgeriwshili funkciyalar ushın integral túsinigi hár túrli kiritiliwi múmkin. Biz tómende keltiretuǵın iymek sızıqlı integrallarda konkret ámeliy máselelerden payda bolған.

Биринши túr iymek sızıqlı integrallar

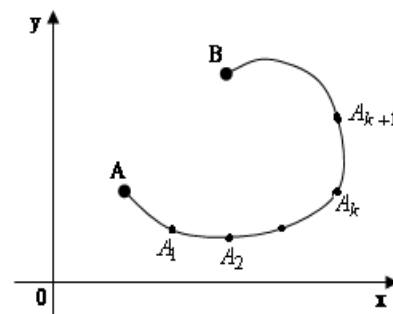
1. Birinshi túr iymek sızıqıń integral anıqlaması. Tegislikte bazıbir ápiwayı $\overline{AB}^*$ ($A = (a_1, a_2) \in R^2$, $B = (b_1, b_2) \in R^2$) iymek sızıqtan (doǵanı) alayıq. Bul iymek sızıqta eki baǵıttan birewin oń, ekinshisin teris baǵıt dep qabal qılayıq (24-sızılma).

$\overline{AB}$ iymek sızıqtı A - dan B ǵa qarap

$$A_0 = A, \quad A_1, \quad A_2, \quad \dots, \quad A_n = B \quad (A_k = (x_k, y_k) \in AB,$$

$$k = 0, 1, \dots, n,$$

$A_0 = (x_0, y_0) = (a_0, a_2), \quad \dots, \quad A_n = (x_n, y_n) = (b_1, b_2)$ noqatlar járdeminde n bólekke bólemiz. Bul $A_0, A_1, \dots, A_n$ noqatlar sisteması AB doǵanıń bóliniwi dep ataladı.



24-sızılma

$$\underline{P} = A_0, A_1, \dots, A_n$$

kibi belgilenedi. $\overline{A_k A_{k+1}}$ doǵa (bóliniw doǵaları) uzınlıqları

ΔS_k ($k = 0, 1, \dots, n$) nıń eń úlkeni P bóliwdiń diametri delinedi hám ol λ_p menen belgilenedi;

$$\lambda_p = \max_k \Delta S_k.$$

Ayqın, $\overline{AB}$ iymek sızıqtı túrli usıllar menen qálegen sanda bóliniwlerin dúziw múmkin.

$\overline{AB}$ iymek sızıqta $f(x, y)$ funkciya berilgen bolsın. Bul iymek sızıqtıń

$$P = A_0, A_1, \dots, A_n$$

bóliniwin hám onıń hár bir $\overline{A_k A_{k+1}}$ doǵasında ıqtıyarlı $Q_k = (\xi_k, \eta_k)$ ($Q_k = (\xi_k, \eta_k) \in \overline{A_k A_{k+1}}, \quad k = 0, 1, \dots, n$) noqat alamız. Berilgen funkciyanıń

* Aytayıq, $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ funkciyaların hár biri (α, β) da berilgen bolsın. Bul funkciyalar (α, β) da $\phi'(t)$, $\psi'(t)$ tuwındılarǵa iye hám olar úziksiz bolıp, $\phi'^2(t) + \psi'^2(t) > 0$ bolsın.

R^2 tegisliktegi mına $L = \{(x, y) \in R^2 : x = \phi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in (\alpha, \beta)\}$ kóplik ápiwayı iymek sızıq dep ataladı. Ápiwayı iymek sızıq uzınlıqqa iye boladı.

$Q_k = (\xi_k, \eta_k)$ noqattağı $f(\xi_k, \eta_k)$ mánisin $\overline{A_k A_{k+1}}$ dín ΔS_k uzınlıǵına kóbeytip tómendegi qosındını dúzemiz:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta S_k \quad (19.1)$$

Endi $\overline{AB}$ iymek sıızıqtıń sonday

$$P_1, P_2, \dots, P_m, \dots \quad (19.2)$$

bóliniwler izbe-izligin qaraymız, olardıń sáykes diametrlerinen dúzilgen

$$\lambda_{P_1}, \lambda_{P_2}, \dots, \lambda_{P_m}, \dots$$

izbe-izlik nolge umtılsın: $\lambda_{P_m} \rightarrow 0$. Bunday bóliniwlerge qarata (19.1) kibi qosındılardı dúzip, mına

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m, \dots$$

izbe-izlikti hasıl qılamız. Ayqın, bul izbe-izliktiń hár bir aǵzası $Q_k = (\xi_k, \eta_k)$ noqatlarga ǵárezli.

19.1-anıqlama. Eger $\overline{AB}$ iymek sıızıqtıń hár qanday (19.2) kórinistegi bóliniwleri izbe-izligi P_m alıńanda da, oǵan sáykes qosındılardan ibarat σ_m izbe-izlik (ξ_k, η_k) noqatlardıń tańlap alınıwınan ǵárezsiz bolǵan jaǵdayda bárqulla bir I sanǵa umtılsa, bul san σ qosındınıń limiti dep ataladı hám

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta S_k = I \quad (19.3)$$

kibi belgilenedi

(19.1) qosındınıń limitin tómendegishe de anıqlaw múmkin.

19.2-anıqlama. Eger $\forall \varepsilon > 0$ sanı alıńanda da sonday $\delta > 0$ tabılsa, $\overline{AB}$ iymek sıızıqtıń diametri $\lambda_p < \delta$ bolǵan hár qanday P bóliniwi ushın dúzilgen σ qosındı ıqtıyarlı $(\xi_k, \eta_k) \in \overline{A_k A_{k+1}}$ noqatlarda

$$|\delta - I| < \varepsilon$$

teńsizlikti orınlasa, I san σ qosındınıń $\lambda_p \rightarrow 0$ daǵı limiti dep ataladı hám (19.3) kibi belgilenedi.

(19.1) qosındınıń limitiniń bul anıqlamaları ekvivalent anıqlamalar.

19.3-anıqlama. Eger $\lambda_p \rightarrow 0$ da σ qosındı shekli limitke iye bolsa, ol jaǵdayda $f(x, y)$ funkciya $\overline{AB}$ iymek sızıq boyınsha integrallanıwshı delinedi. Bul limit $f(x, y)$ funkciyanıń iymek sızıq boyınsha **birinshi túr iymek sızıqlı integralı** dep ataladı hám ol

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) dS$$

kibi belgilenedi.

Sunday qılıp, kiritilgen iymek sızıqlı integral túsiniginiń ózinsheligi qaralıp atırǵan eki argumentli funkciyanıń beriliw oblastı tegisliktegi bazıbir $\overline{AB}$ iymek sızıq ekenligi. Qalǵan basqa pikirlewler (bóliniwlerdiń alınıwı, bóleklerden ıqtıyarlı noqat tańlap integral qosındı dúziw, tiyisli limitke ótiw) joqarıda kiritilgen integral túsiniklerindey.

2. Úzliksiz funkciyanıń birinshi túr iymek sızıqlı integralı. Endi birinshi túr iymek sızıqlı integraldıń bar bolıwın támiyinleytuǵın shártti tabıw menen shuǵıllanamız. Joqarıda keltirilgen 19.3-anıqlamadan kórinedi, birinshi túr iymek sızıqlı integral $\overline{AB}$ iymek sızıqqa hámde onda berilgen $f(x, y)$ funkciyaǵa ǵárezli boladı. Demek, integraldıń bar bolıwı shártin $\overline{AB}$ iymek sızıq hámde $f(x, y)$ funkciyaǵa qoyılatuǵın shártler arqalı tabıw kerek boladı.

Meyli, AB iymek sızıq mına

$$\left. \begin{array}{l} x = x(s) \\ y = y(s) \end{array} \right\} \quad (0 \leq s \leq S)$$

sistema menen berilgen bolsın. Bunda $s - \overline{AQ}$ doǵasınıń uzınlıǵı ($Q = (x, y) \in \overline{AB}$), S bolsa $\overline{AB}$ nıń uzınlıǵı. $f(x, y)$ funkciya usı $\overline{AB}$ iymek sızıqta berilgen bolsın. Demek, $x = x(s)$, $y = y(s)$ ($0 \leq s \leq S$) eken, onda $f(x, y) = f(x(s), y(s))$ bolıp, nátiyjede mına

$$f(x(s), y(s)) = F(s) \quad (0 \leq s \leq S)$$

quramalı funkciyaǵa iye bolamız.

$\overline{AB}$ iymek sızıqtıń $P = A_0, A_1, \dots, A_n$ bóliniwın hám hár bir $\overline{A_k A_{k+1}}$ da ıqtıyarlı $Q_k = (\xi_k, \eta_k)$ noqat alayıq. Hár bir A_k noqatqa sáykes keletuǵın $\overline{AA_k}$ nıń

uzunlığı S_k , hár bir Q_k noqatqa sáykes keletuǵın $\overline{AQ_k}$ nıń uzunlığı S_k^* diyik. Ayqın $\overline{A_kA_{k+1}}$ dıń uzunlığı $S_{k+1} - S_k = \Delta S_k$ boladı.

Nátiyjede P bóliniwge qarata dúzilgen

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta S_k$$

qosındı mına

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta S_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(x(S_k^*), y(S_k^*)) \cdot \Delta S_k = \sum_{k=0}^{n-1} F(S_k^*) \cdot \Delta S_k$$

kóriniske keledi. Demek,

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} F(S_k^*) \cdot \Delta S_k \quad (19.5)$$

Bul qosındını $[0, S]$ aralıqtaǵı $F(S)$ funkciyanıń integral qosındısı (Riman qosındısı) ekenligin bayqaw qıyın emes (qaralsın, 1-bólim, 9-bap, 1-§).

Eger $f(x, y)$ funksiya $\overline{AB}$ iymek sızıqta úzliksiz bolsa, ol jaǵdayda $F(s)$ funksiya $[0, S]$ de úzliksiz boladı. Demek, bul jaǵdayda $F(s)$ funksiya $[0, S]$ da integrallanıwshı

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(s_k^*) \cdot \Delta s_k = \int_0^S F(s) ds \quad (19.6)$$

Sonday qılıp, (19.5), (19.6) qatnaslardan $\lambda_p \rightarrow 0$ da σ qosındınıń limiti bar bolıwı hám

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sigma = \int_0^S F(s) ds$$

ekenligin tabamız. Nátiyjede tómendegi teoremaǵa kelemiz.

19.1-teorema. Eger $f(x, y)$ funksiya $\overline{AB}$ iymek sızıqta úzliksiz bolsa, ol jaǵdayda bul funkciyanıń $\overline{AB}$ iymek sızıq boyınsha birinshi túr iymek sızıqlı integralı bar boladı hám

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) ds = \int_0^s f(x(s), y(s)) ds$$

boladı.

Bul teorema, bir tamannan úzliksiz funkciya birinshi túr iymek sızıqlı integralınıń barlıgın anıqlap berse, ekinshi tamannan bul integraldıń anıq integralğa (Riman integralına) keliwin kórsetedi.

19.1-eskertiw. Iymek sızıqlı integral túsinigi menen Riman integralı túsinigin salıstırıp, olardıń ekewide qosındınıń limitisıpatında anıqlanıwın kórdik. Sonıń menen birge bul túsiniklerdiń parqlı tamanıda bar. Mına

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta S_k \quad (19.5)$$

qosındıdağı ΔS_k bárqulla óń bolıp, $\overline{AB}$ iymek sızıqtıń bağıtına gárezli emes. Demek,

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) ds = \int_{\overline{BA}} f(x, y) ds$$

3. Birinshi túr iymek sızıqlı integrallardıń qásiyetleri. Joqarıda kórdik, úzliksiz funkciyalardıń birinshi túr iymek sızıqlı integralları Riman integrallarına keledi. Solay eken, iymek sızıqlı integrallarda Riman integralları qásiyetleri kibi qásiyetlerge iye boladı. Sonı itibargá alıp, iymek sızıqlı integrallardıń tiykargı qásiyetlerin sanap ótiw menen sheklenemiz.

(19.4) sistema menen anıqlanğan $\overline{AB}$ iymek sızıqta $f(x, y)$ funkciya berilgen hám úzliksiz.

1°. Eger $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$ bolsa, ol jaǵdayda

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) ds = \int_{\overline{AC}} f(x, y) ds + \int_{\overline{CB}} f(x, y) ds$$

2°. Mına

$$\int_{\overline{AB}} c f(x, y) ds = c \int_{\overline{AB}} f(x, y) ds \quad (c = \text{const})$$

teńlik orınlı.

$\overline{AB}$ iymek sızıqta $f(x, y)$ funkciya menen $g(x, y)$ funkciyada berilgen hám ol úzliksiz bolsın.

3°. Tómenдеgi

$$\int_{\overline{AB}} [f(x, y) \pm g(x, y)] ds = \int_{\overline{AB}} f(x, y) ds \pm \int_{\overline{AB}} g(x, y) ds$$

formula orınlı boladı.

4°. Eger $\forall (x, y) \in \overline{AB}$ da $f(x, y) \geq 0$ bolsa, ol jaǵdayda

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) ds \geq 0$$

boladı.

5°. $|f(x, y)|$ funkciya usı $\overline{AB}$ da integrallanıwshı hám

$$\left| \int_{\overline{AB}} f(x, y) ds \right| \leq \int_{\overline{AB}} |f(x, y)| ds$$

boladı.

6°. Sonday $(c_1, c_2) \in \overline{AB}$ noqat tabılıp,

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) ds = f(c_1, c_2) \cdot S$$

boladı, bunda S - $\overline{AB}$ nıń uzınlıǵı.

Bul 6° - qásiyet **orta mánis haqqındaǵı teorema** dep ataladı.

19-lekciya

Grin formulası. Iymek sızılıq integral járdeminde maydanlardı esaplaw.

Iymek sızılıq integraldın integrallaw jolına ǵárezsizlik shárti. Tolıq differenciallıq shárti. Funkciyanı onıń tolıq differencialı boyınsha tiklew

Belgili, N'yuton-Leybnic formulası $f(x)$ funkciyanıń $[a, b]$ aralıq boyınsha alınǵan anıq integralın usı funkciya dáslepki funkciyasınıń aralıq shetlerindegi (shegaraları) mánisleri arqalı anıqlar edi.

Bazıbir (D) oblastta $(D) \subset R^2$ berilgen $f(x)$ úzliksiz funksiyanıń eki eseli

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy$$

integralnı tiyisli funksiyanıń usı oblast shegarasındaǵı mánisleri arqalı (anıǵıraǵı, oblast' shegarası boyınsha alınǵan iymek sızıqlı integral arqalı) anıqlaytuǵın formulada bar. Tórende bul formulanı keltiremiz.

1. Grin formulası. Joqarıdan $y = \phi_2(x)$ ($a \leq x \leq b$) funksiya grafigi, qaptal táreplerinen $x=a$, $x=b$ vertikal sızıqlar hámde tómennen $y = \phi_1(x)$ ($a \leq x \leq b$) funksiya grafigi menen shegaralanǵan oblast – iymek sızıqlı trapeciyanı qarayıq. Bul oblasttı (D) menen, onıń shegarası – tuyıq sızıqtı $\partial(D)$ menen belgileyik (26-sızılma).

Ayqın, $\overline{AB} - \phi_2(x)$ funksiya grafigi, $\overline{EC} - \phi_1(x)$ funksiya grafigi hámde

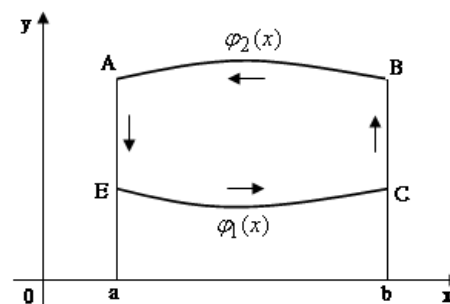
$$\partial(D) = \overline{EC} + \overline{CB} + \overline{BA} + \overline{AE}.$$

$R(x, u)$ funksiya usı (D) oblastta berilgen hám úzliksiz bolıp, $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$ dara tuwındıǵa iye hám olda (D) da úzliksiz bolsın. Ol jaǵdayda mına

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy$$

integral bar boladı hám 18-baptıń 6-§ indegi formulaǵa muwapıq

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy \right) dx$$



26-sızılma

boladı. Endi

$$\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy = P(x, y) \Big|_{y=\phi_1(x)}^{y=\phi_2(x)} = P(x, \phi_2(x)) - P(x, \phi_1(x))$$

bolıwın itibarǵa alıp tómendegini tabamız:

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dx dy = \int_a^b P(x, \phi_2(x)) dx - \int_a^b P(x, \phi_1(x)) dx$$

Usı baptın 2-ş indegi formula (19.20) boyınsha

$$\int_a^b P(x, \phi_2(x)) dx = \int_{AB} P(x,y) dx, \quad \int_a^b P(x, \phi_1(x)) dx = \int_{EC} P(x,y) dx$$

boladı. Demek,

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dx dy = \int_{AB} P(x,y) dx - \int_{EC} P(x,y) dx = - \int_{BA} P(x,y) dx - \int_{EC} P(x,y) dx$$

Ayqın,

$$\int_{CB} P(x,y) dx = 0, \quad \int_{EA} P(x,y) dx = 0$$

Bul teńliklerdi esapqa alıp tómendegini tabamız:

$$\begin{aligned} \iint_{(D)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dx dy &= - \int_{EC} P(x,y) dx - \int_{CB} P(x,y) dx - \int_{BA} P(x,y) dx - \int_{AE} P(x,y) dx = \\ &= - \left(\int_{EC} P(x,y) dx + \int_{CB} P(x,y) dx + \int_{BA} P(x,y) dx + \int_{AE} P(x,y) dx \right) = - \int_{\partial(D)} P(x,y) dx. \end{aligned}$$

Demek,

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dx dy = - \int_{\partial(D)} P(x,y) dx. \quad (19.23)$$

Endi, joqarıdan $u=s$, tómennen $u=d$ sızıqlar, qaptal tárepten bolsa $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$ funkciyalar grafikleri menen shegaralanğan oblast – iymek sızıqlı trapeciyanı qarayıq. Bul oblasttı (D) menen, onıń shegarası – tuyıq sızıqtı $\partial(D)$ menen belgileyik (27-sızılma).

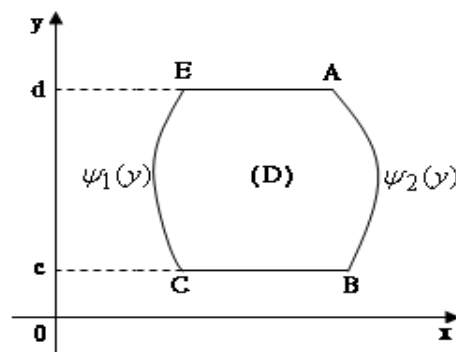
$Q(x,y)$ funkciya usı (D) oblastta berilgen, úzliksiz bolıp, $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ dara tuwındıǵa iye hám bul tuwındı (D) da úzliksiz bolsın. Ol jaǵdayda

$$\iint_{(D)} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dx dy = \int_{\partial(D)} Q(x,y) dy \quad (19.24)$$

boladı.

Bul formulanın durıslıǵı joqarıdaǵıday pikirlewler júrgiziw menen dáliyllenedi.

Endi R^2 keńisliginde qaralatuǵın (D) oblast joqarıdaǵı eki jaǵdayda qaralǵan oblasttıń hár biriniń xarakterine iye bolǵan oblast bolsın, $\partial(D)$ bolsa onıń shegarası bolsın. Bul (D) oblastta eki $P(x,y)$ hám $Q(x,y)$ funkciyalar berilgen, úzliksiz bolıp, olar



27-sızılma

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}, \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

dara tuwındılargá iye hámde bul tuwındılarda (D) da úzliksiz bolsın. Ayqın, bul jaǵdayda (19.23) hám (19.24) formulalar orınlı boladı. Olardı aǵzalap qosıp mınanı tabamız:

$$\int_{\partial(D)} P(x,y) dx + Q(x,y) dy = \iint_{(D)} \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dx dy \quad (19.25)$$

Bul **Grin formulası** dep ataladı.

Demek, Grin formulası oblast boyınsha alıńǵan eki eseli integraldı usı oblast shegarası boyınsha alıńǵan iymek sızıqlı integral menen baylanıstıratuǵın formula eken.

Biz joqarıda Grin formulasın ayırıqsha kórinistegi (D) oblastlar (iymek sızıqlı trapeciyalar) ushın keltirdik. Tiyykarında bul formula ádewir keń klasstaǵı oblastlar ushın da tuwrı bolıp, bul fakt oblastlardı shekli sandaǵı iymek sızıqlı trapeciyalar qosındısı sıpatında súwretlew menen dáliyllenedi.

Grin formulasınıń bazıbir qollanıwları

1°. Figuranıń maydanın tabıw. Grin formulasınan paydalanıp tegis figuranıń maydanı ápiwayı funkciyalardıń iymek sızıqlı integralları járdeminde esaplanıwın

kórsetiw qıyın emes. Haqıyqattanda, (19.25) formulada $P(x, y) = -y$, $Q(x, y) = 0$ delinse, ol jaǵdayda

$$\int_{\partial(D)} (-y) dx = \iint_{(D)} dx dy = 0$$

boladı. Demek,

$$D = - \int_{\partial(D)} y dx$$

Eger (19.25) formulada $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = x$ delinse, ol jaǵdayda

$$D = \int_{\partial(D)} x dy \quad (19.26)$$

boladı.

(19.25) formulada $P(x, y) = -\frac{1}{2}y$, $Q(x, y) = \frac{1}{2}x$ dep alınsa, (D) oblasttıń maydanı

$$D = \frac{1}{2} \int_{\partial(D)} x dy - y dx \quad (19.27)$$

boladı.

Mısal. Mına

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= b \sin t \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

ellips penen shegaralanǵan figuranıń maydanı tabılsın. (19.27) formulaǵa muwapıq

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2} \int_{\partial(D)} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t \cdot b \cos t + b \sin t \cdot a \sin t) dt = \\ &= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \pi \cdot ab \end{aligned}$$

boladı.

Iymek sızıqlı integraldıń integrallaw jolına ǵárezli bolmawı.

Shegaralangan tuyiq baylamli $(D) \subset \mathbb{R}^2$ oblastta eki $P(x, y)$ ham $Q(x, y)$ funkciyalar berilgen bolsin. Bul funkciyalar (D) oblastta uzliksiz ham $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$, $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ dara tuvindilarga iye ham bul tuvindilarda usi oblastta uzliksiz bolsin.

1) Eger (D) oblastta

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \quad (19.36)$$

bolsa, ol jagdayda (D) oblastqa tiyisli bolgan har qanday K tuyiq siziq boyinsha alingan mina

$$\int_K P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

integral nolge teñ boladi:

$$\int_K P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Dálil. K tuyiq siziq shegaralagan oblastti (G) deyik. Ayqin $(G) \subset (D)$ Grin formulasina muwapiq

$$\int_K P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_{(G)} \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dxdy$$

boladi. Shartke muwapiq (D) da, demek (G) da

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

Ol jagdayda (19.36) qatnastan

$$\iint_{(G)} \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dxdy = 0$$

boladi. Demek,

$$\int_K P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

2) Eger (D) oblastqa tiyisli bolgan har qanday K tuyiq sızıq boyınsha alingan mına integral

$$\int_K P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

bolsa, ol jagdayda tómendegi

$$\int_{\overline{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad \overline{AB} \subset (D) \quad (19.37)$$

integral A hám B noqatlardı birlestiriwshi iymek sızıqqa gárezli bolmaydı, yagnıy (19.37) integral mánisi integrallaw jolına gárezli bolmaydı.

Dálil. (D) oblasttıń A hám B noqatların birlestiriwshi hám usı oblastqa tiyisli bolgan ıqtıyarlı eki $A\tilde{a}B$ hámde $A\tilde{b}B$ iymek sızıqtı alayıq. Bul jagdayda $A\tilde{a}B$ hám $A\tilde{b}B$ iymek sızıqlar birgelikte (D)oblastqa tiyisli bolgan tuyiq sızıqtı dúzedi. Onı K menen belgileyik.

$$K = AaBbA$$

Shártke muwapıq

$$\int_K P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{AaBbA} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

boladı. Integraldıń qásiyetinen paydalanıp mınanı tabamız:

$$\begin{aligned} \int_{AaBbA} P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= \int_{A\tilde{a}B} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \int_{B\tilde{b}A} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \\ &= \int_{A\tilde{a}B} P(x, y)dx + Q(x, y)dy - \int_{A\tilde{b}B} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \end{aligned}$$

Demek,

$$\int_{A\tilde{a}B} P(x, y)dx + Q(x, y)dy - \int_{A\tilde{b}B} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Bunnan bolsa

$$\int_{A\tilde{a}B} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{A\tilde{b}B} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

ekenligi kelip shıǵadı.

19.2-eskertiw. Joqarıdağı tastıyıqlawdıń dáliyilinen kórinedi, $\overline{AB}$ iymek sıızıq ápiwayı iymek sıızıqlar kópılginen ıqtıyarlı alıńanda orınlı.

3) Eger mına

$$\int_{\overline{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad \overline{AB} \subset (D) \quad (19.37)$$

integral A hám B noqatlardı birlestiriwshi iymek sıızıqqa gárezli bolmasa, yaǵnıy integral integrallaw jolına gárezli bolmasa, ol jaǵdayda

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

ańlatpa (D) oblastta berilgen bazıbir funkciyanıń tolıq differencialı boladı.

Dálil. Solay etip, (19.37) integrallaw jolına gárezli emes eken, ol jaǵdayda integral $A(x_0, y_0)$ hám $B(x_1, y_1)$ noqatlar menen bir mánisli anıqlanadı. Sonıń ushın bul jaǵdayda (19.27) integral tómendegishe jazıladı:

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy .$$

Endi A noqattı tayınlap, B noqat sıpatında (D) oblasttıń ıqtıyarlı (x, y) noqatın alıp, mına

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

integraldı qaraymız. Ayqın, bul integral (x, y) ke gárezli boladı:

$$F(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

Bul funkciyanıń dara tuwındıların esaplaymız. (x, y) noqattıń x koordinatasına sonday Δx ósim bereyik, $(x + \Delta x, y)$ noqatlardı birlestiriwshi tuwrı sıızıq kesindiside (D) oblastqa tiyisli bolsın. Nátiyjede $F(x, y)$ funkciyada dara ósimge iye boladı.

$$F(x + \Delta x, y) - F(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x + \Delta x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy - \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$

$$= \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P(x,y)dx$$

Orta mánis haqqındağı teoremadan paydalanıp tómendegini tabamız:

$$\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P(x,y)dx = P(x + \theta\Delta x, y)\Delta x \quad (0 < \theta < 1).$$

Nátiyjede

$$\frac{F(x + \Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x} = P(x + \theta\Delta x, y)$$

boladı. Bunnan

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(x + \theta\Delta x, y) = P(x, y)$$

boladı. Demek,

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = P(x, y)$$

Dál usıǵan uqsas

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$$

bolıwı kórsetiledi.

Sonday qılıp,

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}dy = dF(x, y)$$

boladı.

4) Eger

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

ańlatpa (D) oblastta berilgen bazıbir funkciyanıń tolıq differencialı bolsa, ol jaǵdayda

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

boladı.

Dáliyilli. Aytayıq, (19.35) ańlatpa (D) oblastta berilgen $F(x, y)$ funkciyanıń tolıq differencialı bolsın:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y)$$

Ayqın,

$$P(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$$

Keyingi teńliklerden mınanı tabamız:

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y \partial x}$$

Shártke muwapıq $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}, \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ ler (D) oblastta úzliksiz . Aralas tuwındılardıń teńligi haqqındaǵı teoremaǵa muwapıq (qaralsın, 13-bap, 6-§)

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

boladı.

Sonday qılıp, Grin formulasınan paydalanǵan jaǵdayda, joqarıdaǵı 1) – 4) tastıyıqlawlar arasında

$$1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 1)$$

qatnas barlıǵı kórsetildi.

ÁDEBIYATLAR

1. Azlarov. T., Mansurov. X., Matematik analiz. T.: «O'zbekiston». 1 t: 1994 y.-416 b.
2. Xudayberganov G., Vorisov A., Mansurov X., Shoimqulov B. Matematik analizdan maruzalar. I T.: «Vorish-nashriyot». 2010 y. – 374 b.
3. Toshmetov Ó., Turgunbayev R., Saydamatov E., Madirimov M. Matematik analiz, I-qism. T.: “Extremum-Press”, 2015. -408 b.
4. Sa'dullaev A. va boshq. Matematik analiz kursidan misol va masalalar to'plami. I qism. T., «O'zbekiston». 2000 y.-400b.
5. Turgunbaev R.M. Matematikalik analiz. I tom. T.: “Abumatbuot-konsalt”, 2014.-344b.
6. В.А.Ильин, В.А.Садовничий, Бл.Х.Сендов. Математический анализ. 1-ч.М. 1985.
7. Claudia Canuto, Anita Tabacco Mathematical analysis. I. Springer-Verlag. Italia, Milan. 2008.-435p.
8. Gaziyeu A., Israilov I., Yaxshibayev M. “Matematik analizdan misol va masalalar” T.: “Yangi asr avlodi” 2006 y.
9. Toshmetov O', Turgunbayev R. Matematik analizdan misol va masalalar to'plami. 1-q. TDPU. 2006 y.-140 b.
10. Turgunbayev R.M., Koshnazarov R.A., Raximov I.K. Matematik analiz. Mustaqil ta'lim uchun metodik ko'rsatmalar. I semestr. T.: TDPU. 2013 y. – 56 b.

Internet saytlari

1. <http://vilenin.narod.ru/Mm/Books/>
2. <http://www.allmath.ru/>