

Z.B.Saparov, B.B. Prenov, B.M. Narekeev,
D.E. Mirzanova, A.G. Xodjaniyazov

MATEMATIKALÍQ ANALIZ

1-bólim



**ÓZBEKSTAN RESPUBLIKASI JOQARI HÁM ORTA
ARNAWLI BILIMLENDIRIW MINISTRILIGI**

**ÁJINIYAZ ATINDAĞI NÓKIS MÁMLEKETLIK
PEDAGOGIKALIQ INSTITUTI**

**Z.B.Saparov, B.B. Prenov, B.M. Narekeev,
D.E. Mirzanova, A.G. Xodjaniyazov**

MATEMATIKALIQ ANALIZ

1-bólim

**5110100 – «Matematika oqıtw metodikası» bakalavr tálim
bağdarı talabalari ushin oqıwlıq**

**«Tafakkur bo'stoni» baspasi
Tashkent – 2019**

UDK 517

BBK 22.161

M-33

Dúziwshiler: Z.B.Saparov, B.B. Prenov, B.M. Narekeev, D.E. Mırzanova, A.G.Xodjaniyazov

Darslik «Matematika o`qitish metodikasi» ta`lim yo`nalishi uchun o`quv dasturi asosida yozilgan.

Darslikga to`plamlar nazariyasi elementlari, ketma-ketliklar va funktsiyalarning limitlari, uzluksiz funktsiyalar, differentsiallanuvchi funktsiyalar nazariyasi kiritilgan.

Darslikdan oliy ta`lim muassasalari talabalari, magistrantlar, professor-o`qituvchilar, ilmiy xodimlar, shuningdek akademik litsey, kasb-hunar kolledjlari va o`rta ta`lim berish maktablarining o`quvchilari va o`qituvchilari foydalanishi mumkin.

Учебник написан на основе учебной программы для образовательного направления «Методика преподавания математики».

В учебник входят элементы теории множеств, предел последовательностей и функции, непрерывные функции и теория дифференцируемых функций.

Учебником могут пользоваться студенты вузов, магистранты, преподаватели, научные сотрудники, а также ученики и учителя академических лицеев, колледжей и средних школ.

The text book was written on the base of study program for educational direction «Methods of teaching Mathematics».

The text book deals with elements of multiplicity theory, limit of sequence functions, continual function and theory of differential function.

The text book can be used by students, masters, teachers, scientific staffs, teachers and students of academic lueums, colledges and schools.

Oqıwlıq «Matematika oqıtıw metodikası» tálim baǵdarı ushın oqıw baǵdarlaması tiykarında jazılǵan.

Oqıwlıqqa kóplikler teoriyasınıń elementleri, izbe-izlikler hám funktsiyalardıń shekleri, úzliksiz funktsiyalar, differentsiallanıwshı funktsiyalar teoriyası kiritilgen.

Oqıwlıqtan joqarı oqıw orınlarınıń talabaları, magistrantlar, professor-oqıtıwshılar, ilimiy xızmetkerler, sonday-aq akademiyalıq litsey, kásip-óner kolledjleri hám orta bilim beriw mektepleriniń oqıwshıları hám muǵallimleri paydalanıwı múmkin.

Juwaplı redaktor:

Z.B.Saparov - Ájiniyaz atındaǵı Nókis mámleketlik pedagogikalıq institutınıń «Matematika oqıtıw metodikası» kafedrasınıń úlken oqıtıwshısı, fizika-matematika ilimleriniń kandidatı.

Pikir bildiriwshiler:

O.D.Nurjanov - Berdaq atındaǵı Qaraqalpaq mámleketlik universitetiniń «Matematikalıq analiz» kafedrasınıń docenti fizika-matematika ilimleriniń kandidatı.

S.A. Tańirbergenov - Ájiniyaz atındaǵı Nókis mámleketlik pedagogikalıq institutınıń «Matematika oqıtıw metodikası» kafedrasınıń docenti fizika-matematika ilimleriniń kandidatı.

Kirisiw

Matematika pání muǵdarlar haqqındaǵı anıq abstrakt pán bolıp, átirapımızdı qorshap turǵan materiallıq dúnyanıń muǵdarlıq qatnasların hám keńislik formaların úyrenedi. Onıń anıqlıǵı qollanılatuǵın metodlarınıń qatal logikalıq pikirlerge tiykarlanǵanlıǵı hám shıǵarılǵan juwmaqlarınıń qatal logikalıq formada jámlengenligi, al abstraktlıǵı túsiniqleriniń tábiyiy (fizikalıq, ximiyalıq, biologiyalıq, ekonomikalıq h. t. b.) processti analiz qılıw maqsetinde qurılǵan logikalıq modeller ekenligi menen xarakterlenedi.

Matematikaniń pán sıpatında qalıplesiwinde hám tariyxıy rawajlanıwı procesinde geometriya menen fizikanıń, ásirese, mexanikanıń xızmetleri oǵada úlken bolǵan. Bunıń dálili sıpatında tiykarǵı matematikalıq túsiniqlerdiń kelip shıǵıwına bir názer taslaw jetkilikli. Nárselerdi sanaw, geometriyalıq hám fizikalıq shamalardı ólshew procesinde *san* túsiniǵı, al materiallıq noqattıń mexanikalıq háreketin úyreniw procesinde *funkciya* túsiniǵı payda bolǵan. Háreketdegi materiallıq noqattıń tezligin anıqlaw máselesi *tuwındı* túsiniǵıne, al tuwındılardı esaplaw máselesi *funkciya limiti* hám *úzliksizligi* túsiniqlerine alıp keldi. Háreketdegi materiallıq noqattıń tezligi boyınsha onıń háreket nızamın tiklew máselesi *dáslepki funkciya* hám *anıq emes integral* túsiniqleriniń, iymek sıızıqlı trapeciyanıń maydanın esaplaw hám hárekettegi materiallıq noqattıń berilgen waqıt aralıǵında basıp ótken jolın esaplaw máselesi *anıq integral* túsiniǵınıń payda bolıwına sebepker boldı. Oqıwshılar bul túsiniqler menen ulıwma bilim beriw mektebiniń, akademiyalıq licey hám kolledjlerdiń matematika kursında tanısqa.

Joqarı oqıw orınlarında oqıtılatuǵın fizika hám astronomiyaǵa derek pánler joqarıda ayılǵan matematikalıq túsiniqlerdi jetik biliwdi hám basqa bir qatar jańa matematikalıq túsiniqlerdi hám matematikalıq metodlardı úyreniwdi talap qıladı.

Matematikalıq analizde funkciyalar hám olardıń ulıwmalasıwları (funkcionallar, operatorlar h. t. b.) limitler metodı (sheksiz kishiler metodı) járdeminde analiz qılınadı. Úyreniletuǵın matematikalıq analiz kursı kóplikler hám olar ústinde ámeller, haqıyqıy sanlar teoriyası, limitler teoriyası, differenciallıq hám integrallıq esap, qatarlar teoriyası, ádettegi differencial teńlemeler, kompleks ózgeriwshili funkciyalar teoriyası elementleri, Fure qatarları hám integralları sıyaqlı tiykarǵı baplardan dúzilgen. Onı oqıtıwda kózde tutılǵan tiykarǵı maqset, birinshiden, talabalarda fizika hám astronomiyanıń hár qıylı oblastlarında differenciallıq hám integrallıq esaplardan paydalanıw kónlikpelerin hasıl qılıw, ekinshiden, talabalardı matematikanıń matematikalıq fizika metodları, kompleks analiz, funkcionallıq analiz, differencial hám integral teńlemeler teoriyası, itimallıqlar teoriyası sıyaqlı áhmiyetli bólimlerin úyreniwge tayarlawdan ibarat.

Biz bayanlawdı matematikalıq analizdi úyrengende ushırasıwǵa tuwra keletuǵın túsinikler hám mashqalalardı anıqlawdan baslaymız. Bul kirisiw bóliminde keltiriletuǵın formulirovkalar dáslepki maǵlıwmat xarakterine iye bolıp, anıqlıqlar kiritiwdi talap qılatuǵının eskertemiz.

Matematikalıq analizdiń tiykarǵı túsinikleri.

a) Haqıyqıy sanlar - sheksiz onlıq bólshekler.

b) Eń ápiwayı kórinistegi háreketti- materiallıq noqattıń tuwrı sızıq boylap háreketin, qaraymız hám bunday háreketti táriplegende qanday matematikalıq túsinikler payda bolatuǵının anıqlawǵa háreket qılamız.

Meyli, materiallıq noqat OY kósherin boylap háreket qılsın, al x - bazı bir dáslepki momentten baslap esaplanatuǵın waqıt bolsın. Bunday hárekettiń xarakteristikası ushın hár bir x waqıt momenti ushın háreketleniwshi noqattıń usı waqıt momentindegi y koordinatasın sáykes qoyatuǵın qaǵıydanı bilw kerek. Bunday qaǵıyda *háreket nızamı* dep ataladı.

x hám y ózgeriwshiniń fizikalıq maǵanasınan abstraktlanıp, biz ulıwma bilimlendiriw mektep kursınan bizge málim hám pútkil matematikanıń áhmiyetli túsiniqleriniń bir bolǵan funkciya túsinigine kelemiz.

Funkciyanıń anıqlanıw oblastı hám mánisler kópligi bolǵan kópliklerdiń hám funkciyanıń xarakteristikasınıń tábiyatına qarap analizdiń hár qıylı tarawlarında qaralıp atırǵan funkciya sáwlelendiriw, operator, funkcional h. t. b. dep ataladı. Eger qaralıp atırǵan sáwlelendiriwde hár bir y mánis argumenttiń jalǵız bir x mánisine juwap berse, onda bul sáwlelendiriw óz-ara bir mánisli sáwlelendiriw dep ataladı. Óz-ara bir mánisli sáwlelendiriwde hár bir y mániske málim bir x mánisti (atap aytqanda, argumenttiń tuwrı sáwlelendiriwde berilgen y mánis juwap beretuǵın mánisin) sáykes qoyıwshı keri sáwlelendiriw bar boladı.

x argumentiniń ózi bazı bir jańa t ózgeriwshiniń $x = \varphi(t)$ kórinisindegi funkciyası bolǵan $y = f(x)$ funkciyalardı jiye qarawǵa tuwra keledi. Bunday jaǵdayda y ózgeriwshi t argumenttiń *quramalı funkciyası* dep, al x ózgeriwshi *aralıq argument* dep ataladı. Bul quramalı funkciya f hám φ funkciyalardıń *superpoziciyası* dep te ataladı. Bul funkciyanı belgilew ushın $y = f[\varphi(t)]$ simvolınan paydalanıladı.

c) Fizika kursınan materiallıq noqattıń hár bir x waqıt momentindegi tezligi onıń háreketiniń áhmiyetli xarakteristikası ekeni málim. Tezlik fizikalıq túsiniǵı fundamentallıq matematikalıq tuwındı túsinigine alıp keledi.

Funkciyanıń tuwındısın esaplawda funkciyanıń limiti túsiniǵı fundamental rol oynaydı. Oqıwshı akademiyalıq licey hám kásip-óner kolledjleri kursınan funkciyanıń limiti (tuwındısı) haqqındaǵı dáslepki túsiniǵke iye boladı. Matematikanıń áhmiyetli túsiniqleriniń biri bolǵan, matematikalıq analiz kursında puxta úyreniletuǵın *úzliksizlik* túsiniǵı de limit túsinigine tiykarlanǵanın esletip ótemiz.

Biraq, limit túsinigin qatal hám izbe-iz úyreniw tek qatal haqıyqıy sanlar teoriyası bazasında ǵana múmkin ekenin atap ótemiz. Mısalı, qatal haqıyqıy sanlar teoriyasız $y = \sin x$ hám $y = \log_a x$ funkciyalardıń tuwındısın esaplaǵanda payda bolatuǵın áhmiyetli $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}$ hám $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t}$ ájayıp limitlerdiń bar (yaǵnıy shekli sanǵa teń) bolıwın anıqlaw múmkin emes.

Solay etip, tuwındıń bar bolıwı hám onı esaplaw haqqındaǵı másele qatal haqıyqıy sanlar teoriyasın hám onıń bazasında limitler teoriyasın rawajlandırıwǵa keledi.

Ápiwayı elementar funkciyalardıń tuwındıların esaplaǵanda ayırıqsha kúynshılıqlar payda bolmaydı. Bul tuwındılardı esaplaw ushın tek limitke ótiw ámeliniń arifmetikalıq qásiyetleri, eki áhmiyetli limit hám bul funkciyalardıń óz anıqlanıw oblastına derek noqatlarda úzliksizligi ǵana kerek boladı.

Ápiwayı funkciyalardıń tuwındılarınıń kestegin qatal tiykarlaw matematikalıq analizdiń *differenciallıq esap* dep atalatuǵın bóliminiń áhmiyetli máseleleriniń biri.

Klassikalıq differenciallıq esaptıń tradiciyalıq máselesi ápiwayı elementar funkciyalardan shekli sandaǵı tórt arifmetikalıq ámel hám shekli sandaǵı superpoziciyalar orınlaw jolı menen alınatuǵın funkciyalardıń tuwındısın esaplaw. Ádette bunday funkciyalar *elementar funkciya* dep ataladı.

Qálegen elementar funkciyanıń tuwındısın esaplaw ushın ápiwayı elementar funkciyalardıń tuwındılarınıń kestesine eki qaǵıydanı biriktiriw kerek: 1) quramalı funkciyanı differenciallaw qaǵıydası; 2) funkciyalardıń qosındısın, ayırmasın, kóbeymesin hám qatnasın differenciallaw qaǵıydası.

Hár bir elementar funkciyanıń tuwındısı elementar funkciya boladı, yaǵnıy differenciallaw ámeli bizdi elementar funkciyalar klasınan sırtqa shıǵarmaydı. Bul elementar funkciyalar klasın klassikalıq analizdiń tradiciyalıq ob`ekti sıpatında kiritiwge múmkinshilik beredi.

d) Jáne materiallıq noqattıń tuwrı sızıq- OY kósheri, boylap háreket qılıwı haqqındaǵı mexanikalıq máseleni qaraymız. Bul ret hárekettegi noqattıń qálegen x waqıt momentindegi $f(x)$ tezligi málim dep boljaw qılınadı hám bul noqattıń háreket nızamın tabıw talap etiledi.

$f(x)$ tezlik háreket nızamın anıqlaytuǵın $y = F(x)$ funkciyanıń tuwındısı bolǵanlıqtan, másele berilgen $f(x)$ funkciya boyınsha $F'(x)$ tuwındısı $f(x)$ funkciyaǵa teń bolǵan $y = F(x)$ funkciyanı tabıwǵa keltiriledi. $f(x)$ hám $y = F(x)$ funkciyalardıń mexanikalıq mánislerinen abstrakciyalanıp, biz dáslepki funkciya hám anıq emes integral túsiniǵine kelemiz.

Funkciyanıń dáslepki funkciyasınıń anıqlamasında qaysı kóplikte $F'(x)$ tuwındısı $f(x)$ funkciyaǵa teń bolatuǵınıń anıq aytıw kerek. Bul kóplikler teoriyasın rawajlandırıw zárúrligin jáne bir mártebe ayırıqsha atap kórsetedi.

Materiallıq noqattıń OY kósheri boylap háreket qılıwı nızamın onıń x waqıt momentindegi $f(x)$ tezligi boyınsha anıqlaw haqqındaǵı máseleǵe qaytıp, bul háreket nızamı $F(x) + C$ (C – turaqlı san) funkciya menen anıqlanadı dep tastıyıqlawımız múmkin, bul jerde $F(x) - f(x)$ funkciyanıń qálegen dáslepki funkciyası.

Kórip turǵanıımızday, qosımsha shártlersiz tezlik boyınsha háreket nızamı bir mánisli anıqlanbay, C turaqlı qosılıwshı anıqlıǵında anıqlanadı. Bul turaqlını anıqlaw ushın qosımsha shártler qoyılıwı kerek.

e) Eki fundamentallıq másele *anıq integral* túsiniǵi menen baylanısqań: $f(x)$ tezlikte háreketleniwshi materiallıq noqattıń $x = a$ dan $x = b$ ǵa deyingi waqıt aralıǵında basıp ótken jolı haqqındaǵı fizikalıq másele hám $f(x)$ funkciyanıń grafigi, $x = a$ hám $x = b$ tuwrı sızıqları hám Ox kósheri menen shegaralanǵan iymek sızıqlı trapeciyanıń maydanın esaplaw haqqındaǵı geometriyalıq másele.

$f(x)$ funkciyanıń $[a, b]$ kesindisi boyınsha anıq integralın esaplaw máselesin bul funkciyanıń qálegen $\Phi(x)$ dáslepki funkciyasınıń $x = a$ hám $x = b$ noqatlardaǵı mánisleriniń ayırmasın esaplawǵa keltiretuǵın N`yuton-Leybnic formulasın qatal tiykarlaw matematikalıq analizdiń tiykarǵı máseleleriniń biri.

f) Dáslepki funkciyası ushın anıq analitikalıq ańlatpanı tek tar funkciyalar klası ushın ǵana alıw múmkin ekenin atap ótemiz. Sonıń ushın N`yuton-Leybnic formulası menen bir qatarda anıq integraldı esaplawdıń juwıq usıllarınan paydalanıwǵa tuwrı keledi.

Integraldı juwıq esaplaw usıllarınan (tuwrımúyeshlikler, trapeciyalar hám parabolalar (Simpson)) komp`yuterde effektiv paydalanıw múmkin.

g) Anıq integrallardı juwıq esaplaw usılları menen bir qatarda hár qıylı teńlemelerdi sheshiwdiń juwıq usılları da (ápiwayı iteraciya, N`yuton) házirgi zaman matematikasında úlken áhmiyetke iye.

Matematikalıq analizdi rawajlandırıwdıń áhmiyetli máselesi kóp ózgeriwshili funkciyanıń differenciallıq hám integrallıq esapların qurıwdan ibarat.

Júdá keń maǵanada túsiniletuǵın matematikalıq analiz diferencial teńlemeler (yaǵnıy belgisiz funkciyalar tuwındıları menen kiretuǵın teńlemeler) teoriyasın óz ishine aladı.

Keyingi waqıtları funkciya túsiniǵın, tuwındı hám funkciyalardıń tuwındıların baylanıstırıwshı diferencial teńlemenıń sheshimi túsiniǵın ulıwmalastırıwǵa tiykarlangan teoriya keń rawajlanıp atır.

Matematikalıq analizdi qurıw insan aqlınıń eń áhmiyetli jetiskenlikleriniń biri. Ol dara bólek-bólek fizikalıq hám geometriyalıq máselelerdi (deneniń awırlıq kúshi tásirinde qulawı, málím iymek sıızıq penen shegaralangán figura maydanın esaplaw h. t. b.) qarawdan úlken máseleler klassların sheshiw usılların

rawajlandırıwǵa ótiwge múmkinshilik berdi. Matematikalıq analizdiń rawajlanıwı, óz nábette, ilim hám texnika progresine úlken tásir kórsetti.

Klassikalıq matematikalıq analiz biz hámme dáslepki shamalardıń anıq mánislerine iyemiz hám hámme esaplanatuǵın shamalardıń anıq mánislerin taba alamız degen isenimge tiykarlanǵan júdá qolaylı ideallastırılǵan model.

Sonıń menen birge usı modelge tiykarlanıp, biz, ádette, dáslepki shamalar bazı bir qátelik penen berilgenligi hám hámme esaplawlar tek málím anıqlıq penen ǵana esaplanatuǵınlıǵı sebepli payda bolatuǵın qátelikti bahalawımız múmkin bolatuǵının aytıp ótemiz.

Solay etip, matematikalıq analiz apparatı sanlı usıllardı qurıw hám qáteliklerdi bahalaw ushın qollanıwı múmkin.

Sózimizdiń juwmaqlap, biz júrgizgen dáslepki izertlewler nátiyjesinde anıqlanǵan birinshi nábettegi hám eń áhmiyetli mashqalalardı tártiplestiremiz.

1. Háqıyqıy san, kóplik hám funkciya túsiniklerine anıqlıqlar kirgiziw.
2. Limitler teoriyasın hám bul teoriya menen baylanısqa funkciyanıń úzliksizligi túsinigin rawajlandırıw.
3. Differenciallıq hám integrallıq esap apparatı qurıw.
4. Arnawlı túrdegi qosındılardıń limiti sıpatındaǵı anıq integral teoriyasın qurıw.
5. Anıq integrallardı juwıq esaplaw hám teńlemelerdi sheshiwdiń juwıq usılların rawajlandırıw.
6. Geypara geometriyalıq túsiniklerdi (mısalı, tegis figuranıń maydanı, doǵa uzınlıǵı) anıqlaw.

Matematikalıq belgiler. Ayırım jaǵdaylarda matematikada jazıwdı qısqartıw maqsetinde tez-tez ushırasatuǵın sóz hám sóz birikpeleriniń ornına arnawlı belgiler qollanıladı.

«Eger ... bolsa, onda „, boladı» tastıyıqlawı $\Rightarrow$ - *implikaciya* belgisi arqalı jazıladı.

Eki ekvivalent tastıyıqlawdı jazıwda « $\Leftrightarrow$ » yaki « $\sim$ »- *ekvivalentlik* belgisi qollanıladı.

«Hár bir», «qálegen», «hámmesi ushın» sózleriniń ornına « $\forall$ »- *ulıwmalıq kvantorı* belgisinen paydalanıladı.

«Bar boladı», «tabıladı» sózleriniń ornına « $\exists$ »- *bar bolıw kvantorı* belgisi qollanıladı.

Matematikalıq belgilerdiń qollanıw mazmunın qolaylılıq ushın mına keste de beremiz.

№	Matematikalıq belgiler	Matematikalıq belgilerdiń qollanıw mazmunı
1.	$\in$	<i>dereklilik belgisi</i> - a element A kóplik elementi bolsa, $a \in A$ dep jazıladı.
2.	$\notin$	<i>derek emeslik belgisi</i> - b element B kóplik elementi bolmasa, $b \notin B$ dep jazıladı.
3.	$\subset$	<i>úleslik belgisi</i> . A kóplik B kópliktiń úles kópligi bolsa, $A \subset B$ dep jazıladı.
4.	$\forall$	<i>ulıwmalıq kvantorı</i> belgisi. «Hár bir», «qálegen», «hámmesi ushın» sózleriniń ornına qollanıladı.
5.	$\exists$	<i>bar bolıw kvantorı</i> belgisi. «Bar boladı», «tabıladı» sózleriniń ornına qollanıladı.
6.	$\Rightarrow$	<i>implikaciya belgisi</i> . «Eger ... bolsa, onda „„, boladı» tastıyıqlawınıń ornına paydalanıladı.
7.	$\Leftrightarrow$	<i>ekvivalentlik belgisi</i> .

1- BAP

HAQÍYQÍY SANLAR

Matematikaniń dáslepki, sonıń menen birge tiykarǵı, túsinikleriniń biri san túsinigi. Oqıwshılar mektep matematika kursında natural san, nol sanı, pútin san, racional san, haqıyqıy san túsinikleri menen tanısadı hám olardıń qásiyetleri menen ámeliy qollanıwların úyrenedi. Biraq san haqqındaǵı bul maǵlıwmatlar matematikalıq analiz kursın úyreniw ushın kemlik qıladı. Matematikalıq analizdiń funkciya, limit, jıynaqlılıq, úzliksizlik, tuwındı, integral sıyaqlı túsinikleri haqqında tolıq bilimge iye bolıw ushın dáslep haqıyqıy sanlar teoriyasın jaqsı biliw kerek.

1-§. Kóplik. Kóplikler ústinde ámeller

1. K ó p l i k t ú s i n i g i. Hár bir pándi úyreniw dáslep onıń tiykarǵı túsinikleri menen tanısıwdan baslanadı. Kóplik túsinigi matematikaniń baslanǵısh túsinikleriniń biri bolıp, ol mısallar járdeminde túsindiriledi. Mısalı, shkaftaǵı kitaplar, hámme durıs bólshekler, Quyash sistemasındaǵı planetalar, berilgen noqattan ótiwshi tuwrı sızıqlar kópligi haqqında aytıw múmkin.

Kóplikti dúziwshi nárseler (predmetler) onıń *elementleri* dep ataladı.

Ádette kóplikler latin yaki grek alfavitiniń bas háribi menen, al onıń elementleri kishi háripler menen belgilenedi. Mısalı, $A, B, \dots, E, F, \dots$ háripler menen kópliklerdi, al $a, b, c, \dots$ háripler menen kópliktiń elementlerin belgileymiz.

Eger $a \in A$ kópliktiń elementi bolsa, $a \in A$ dep jazıladı hám « a element A kóplikke derek» dep oqıladı. Keri jaǵdayda $a \notin A$ dep jazıladı hám « a element A kóplikke derek emes» dep oqıladı. Mısalı, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ bolsa, onda $6 \in A, 7 \notin A$.

Shekli sandaǵı elementlerden dúzilgen kóplik *shekli kóplik* dep ataladı. Mısalı, joqarıda keltirilgen kópliklerden shkaftaǵı kitaplar kópligi shekli kóplikti dúzedi.

Matematikada kóbineşe shekli bolmağan kópliklerdi- *sheksiz kópliklerdi* qarawǵa tuwra keledi. Mısalı, hámme durıs bólshekler, hámme natural sanlar, berilgen noqattan ótiwshi hámme tuwrı sıızıqlar kópligi sheksiz kópliklerge mısal boladı.

Hámme natural sanlardan dúzilgen kóplik N háribi menen belgilenedi hám

$$N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\} \text{ yaki } N = \{n: 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

dep jazıladı. $B = \{x: x^2 - 5x + 6 = 0\}$ kóplikti jáne bir mısal sıpatında keltireyik. Bul kóplik $x^2 - 5x + 6 = 0$ teńlemenin sheshimlerinden dúzilgen.

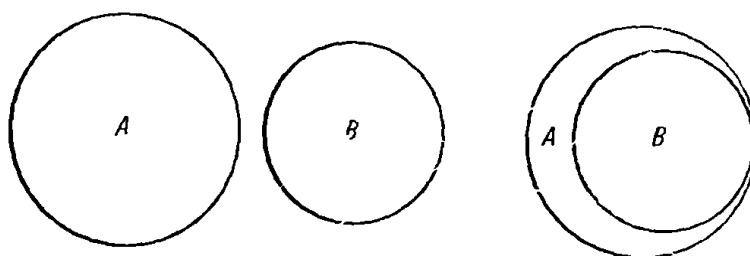
Joqarıda biz kóplik onıń hámme elementleri ushın xarakterli bolǵan qásiyetti, qaǵıydanı beriw menen beriliwin, sonday-aq, onıń hámme elementlerin tikkeley kórsetiw menen beriliwin kórdik. Geyde kóplik qanday qásiyetlerge iye elementlerden dúziliwi kerekligi málim bolsa da, bunday qásiyetke iye elementler tabılmaslıǵı múmkin. Mısalı, A kóplik $m + x = n$ ($n, m \in N, n < m$) teńlemenin natural sanlar kópligindegi sheshimlerinden dúzilgen dep shárt qoyılsa, bul kópliktiń hesh bir elementi joq ekeni málim boladı. Buǵan sebep- berilgen teńlemenin natural sanlar kópliginde sheshimge iye emesligi. Bunnan elementke iye bolmağan kópliklerdi qurıwǵa tuwra keletuǵını kórinip tur.

Hesh bir elementke iye bolmağan kóplik *bos kóplik* dep ataladı hám $\emptyset$ simvol menen belgilenedi.

Kóplikti anıqlaǵanda onı dúziwshi elementler arasında bir- birine teń bolǵan elementler kópliktiń elementi sıpatında tek bir mártebe alınatuǵının aytıp ótiwimiz kerek. Mısalı, B kóplik $x^3 - 3x + 2 = 0$ teńlemenin sheshimlerinden dúzilgen bolsın. Bul teńlemenin sheshimleri $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -2$ bolıp, olardan dúzilgen B kóplik degende biz 1 hám -2 sanlardan dúzilgen $B = \{1, -2\}$ kóplikti túsinemiz.

Kóplikler, shekli yaki sheksiz bolıwına qaramay, simbolikalıq túrde kóbinese tegislikte bazı bir figura, mısalı, dóńgelekler menen súwretlenedi. Al bul kóplikler ústinde orınlangan ámellerdi kóz aldımızǵa keltirgenimizde, olar arasındaǵı qatnaslardı úyrengenimizde júdá qolaylı boladı (1- súwret).

Eger B kópliktiń hár bir elementi A kópliktiń de elementi bolsa, onda B kóplik A kópliktiń *úles kópligi* dep ataladı hám $B \subset A$ dep belgilenedi (2- súwret). Mısalı, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ bolsa, $B \subset A$ ekenin kóriw qıyın emes.



1- súwret

2- súwret

Bos kóplik hár bir kópliktiń úles kópligi dep esaplanadı.

Bazı bir A kóplik berilgen bolsın. Bul kópliktiń hámme úles kópliklerinen dúzilgen kóplikti $\mathcal{F}(A)$ simbolı menen belgileymiz. $\emptyset \in \mathcal{F}(A)$, $A \in \mathcal{F}(A)$ bolatuǵını óz-ózinen málim. $\mathcal{F}(A)$ kópliktiń elementleriniń ózi kóplik. Mısalı, $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ kóplikler ushın

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(A) &= \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \emptyset\}, \\ \mathcal{F}(B) &= \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \emptyset\}\end{aligned}$$

boladı. Ulıwma, elementler sanı n bolǵan kópliktiń hámme úles kópliklerinen dúzilgen kópliktiń elementleriniń sanı 2^n ne teń.

Eger kóplik sheksiz kóplik bolsa, onda úles kópliklerinen dúzilgen kópliktiń elementleri de sheksiz kóp boladı.

1- a n ı q ı l a m a. Eger A kóplik B kópliktiń úles kópligi, al B kóplik A kópliktiń úles kópligi bolsa, onda A hám B kóplikler *teń kóplikler* dep ataladı hám $A = B$ dep jazıladı.

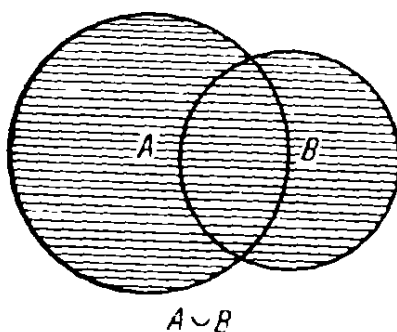
Mısalı, A kóplik $k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) kórinistegi sanlardan dúzilgen, yaǵnıy $A = \{a : a = k\pi \text{ } (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)\}$, al B kóplik $\sin x = 0$ teńlemenıń sheshimlerinen dúzilgen, yaǵnıy $B = \{x : \sin x = 0\}$ bolsın. Eger $\sin x = 0$ teńlemenıń sheshimleri $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) kóriniste jazılatuǵının esapqa alsaq, $A = B$ bolatuǵının kóremiz.

2- a n ı q l a m a. Eger $a \notin B$ bolatuǵın $a \in A$ element hám $b \notin A$ bolatuǵın $b \in B$ element tabılsa, onda A m B kóplikler *teń emes kóplikler* dep ataladı hám $A \neq B$ dep jazıladı.

Mısalı, $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ kóplikler teń emes.

2. K ó p l i k l e r ú s t i n d e á m e l l e r. Biz tómende kóplikler ústinde orınlanatuǵın ámellerdi keltiremiz.

3- a n ı q l a m a. A hám B kópliklerdiń hámme elementlerinen dúzilgen C kóplik A hám B kópliklerdiń *qosındısı (birikpesi)* dep ataladı hám $C = A \cup B$ dep belgilenedi (3- súwret).



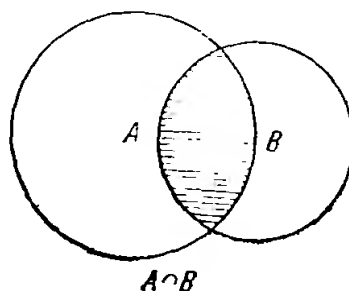
3- súwret

Mısalı, $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$, $D = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ bolsa, onda olardıń qosındıları (birikpeleri) tómendegi kóplikler boladı:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}, E \cup D = \{1, 2, 3, 4, \dots\} = N, A \cup E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}.$$

Joqarıda keltirilgen anıqlamadan $A \cup A = A$, $A \cup B = B \cup A$ bolıwı, sonday- aq, eger $A \subset B$ bolsa, $A \cup B = B$ bolıwı kelip shıǵadı.

4- a n ı q l a m a. A hám B kópliklerdiń ulıwma elementlerinen dúzilgen D kóplik A hám B kópliklerdiń *kóbeymesi* (*kesilispesi*) dep ataladı hám $D = A \cap B$ dep belgilenedi (4- súwret).



4- súwret

Mısalı, $A = \{2; 4; 6; 8\}$, $B = \{1; 2; 3; 4\}$ kópliklerdiń kóbeymesi $D = A \cap B = \{2, 4\}$ kóplik boladı. Kópliklerdiń kóbeymesiniń anıqlamasınan $A \cap A = A$, $A \cap B = B \cap A$ bolıwı, sonday- aq, eger $A \subset B$ bolsa, $A \cap B = A$ bolıwı kelip shıǵadı.

A hám B kópliklerdiń kóbeymesi bos kóplik, yaǵnıy $A \cap B = \emptyset$ bolsa, onda A hám B kóplik *kesilispeytuǵın kóplikler* dep ataladı. Mısalı, $E = \{2, 4, 6, \dots\}$, $F = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ kóplikler kesilispeytuǵın kóplikler, sebebi $E \cap F = \emptyset$.

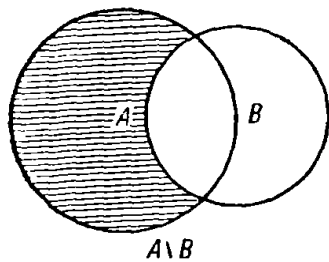
Biz kópliklerdiń qosındısı hám kóbeymesi anıqlamaların eki kóplik ushın berdik. $A_1, A_2, \dots, A_n$ kópliklerdiń $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ qosındısı hám $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ kóbeymesi joqarıdaǵıǵa uqsas anıqlanadı.

5- a n ı q l a m a. A kópliktiń B kóplikke derek bolmaǵan hámme elementlerinen dúzilgen E kóplik A kóplikten B kópliktiń *ayırması* dep ataladı hám $E = A \setminus B$ dep belgilenedi (5- súwret).

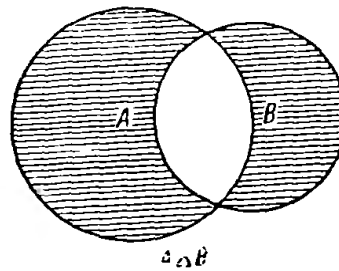
Mısalı, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 6, 9, 12\}$ bolsa, $A \setminus B = \{1, 2, 4, 5\}$ hám $B \setminus A = \{6, 9, 12\}$ boladı.

Eger A kópik S kópiktiń úles kópigi (yaǵnıy $A \subset S$) bolsa, onda $S \setminus A$ ayırma A kópikti S kópikke *tolıqtırwshı kópik* dep ataladı hám $C_S A = S \setminus A$ dep jazıladı.

6- a n ı q l a m a. A kópiktiń B kópikke derek bolmaǵan hám B kópiktiń A kópikke derek bolmaǵan elementlerinen dúzilgen kópik A hám B kópiklerdiń *simmetriyalıq ayırması* dep ataladı hám $A \Delta B$ dep belgilenedi (6- súwret).



5- súwret



6- súwret

Anıqlama boyınsha

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Mısalı, eger $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ bolsa, onda bul kópiklerdiń simmetriyalıq ayırması

$$A \Delta B = \{1, 2, 3, 7, 8, 9\}.$$

Eki A hám B kópik berilgen bolsın. Birinshi elementi A kópikke, al ekinshi elementi B kópikke derek bolǵan tártiplengen (a, b) juplıqlardı qarayıq: $a \in A$, $b \in B$.

7- a n ı q l a m a. Hámme (a, b) kórinistegi juplıqlardan dúzilgen kópik A hám B kópiklerdiń *Dekart kóbeymesi* dep ataladı hám $A \times B$ dep belgilenedi.

Ádette $A \times A$ kópik A^2 dep belgilenedi: $A \times A = A^2$. Mısalı, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4\}$ bolsın. Bul kópiklerdiń Dekart kóbeymesi

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4)\}$$

kópik boladı. Ulıwma aytqanda, $A \times B \neq B \times A$.

3. *U n i v e r s a l k ó p l i k*. Joqarıda kiritilgen ámeller qálegen kópplikler ushın, kóppliklerdiń tábiyatına hesh qanday shárt qoymastan, anıqlandı. Biraq bunday «ulıwmalıq» geyde konkret jaǵdaylarda maǵananıń joǵalıwına alıp keliwi de múmkin. Mısalı, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, al B kópplik Quıyash sistemasındaǵı planetalar kópligi bolsa, olardıń qosındısı hám kóbeymesin rásmiy túrde ayta alsaqta, tábiyiylikke qarama- qarsı keliwimiz anıq. Bunday mánissizlikke jol qoymaw ushın ádette hámme ámeller bazı bir *universal kópplik* dep atalatuǵın kópliktiń úles kópplikleri ústinde orınlanadı dep esaplanadı. Bul universal kópplik U yaki Ω háribi menen belgilenedi. Mısalı, joqarıda qaralǵan mısallarda universal kópplik sıpatında $U = N = \{1, 2, 3, \dots\}$ natural sanlar kópligi, al Eyler-Vien diagrammaları ushın U kópplik sıpatında tegislik noqatlarınń kópligi alınıwı múmkin.

Matematikalıq analiz kursı dawamında universal kópplik sıpatında, tiykarınan, R haqıyqıy sanlar kópligi (2- bap, 4- §) qaraladı.

4. *K ó p l i k l e r d i b ó l e k l e w*. Bazı bir A kópplik berilgen bolıp, $A_1, A_2, \dots, A_n$ kópplikler onıń úles kópplikleri bolsın: $A_k \subset A$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$).

Eger $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ úles kópplikler sisteması ushın

$$1^0. A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A,$$

$$2^0. A_k \cap A_i = \emptyset \quad (k \neq i; \quad k, i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

shártler orınlansa, $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ sistema A kóplikte *bóleklew orınlaǵan* yaki A kópplik $A_1, A_2, \dots, A_n$ kóppliklerge *bóleklengen* dep ataladı.

Birinshi shárt $A_1, A_2, \dots, A_n$ kópplikler qosındısı A kópplik bolıwın, al ekinshi shárt bul kóppliklerdiń jup- juptan kesilispeytuǵının bildiredi. Eki shárt birgelikte A kópliktegi hár bir element bóleklewdiń bir hám tek bir elementine derek bolıwın támiyinleydi.

Geyde $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ sistema A kópliktegi *bóleklew*, al A_i kópplikler *bóleklewdiń elementleri* dep ataladı.

Bir A kópikte bir neshe bólekler orınlangan bolıwı múmkinligi hám hár bir $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ bólekler $\mathcal{F}(A)$ kópiktiń úles kópligi bolıwı tábiyiy.

M ı s a l l a r. № 1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kópik berilgen bolıp, $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3, 4\}$, $A_3 = \{5, 6\}$ bolsın. $A_1 \subset A$, $A_2 \subset A$, $A_3 \subset A$ bolıp,

$$1) A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = A,$$

$$2) A_1 \cap A_2 = \emptyset, A_1 \cap A_3 = \emptyset, A_2 \cap A_3 = \emptyset$$

bolatuǵını anıq. Demek, A kópik A_1, A_2, A_3 kópiklerge bóleklengen ($\{A_1, A_2, A_3\}$ sistema A kópiktegi bólekler).

№2. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ bolıp, $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$, $A_3 = \{3\}$, $A_4 = \{4\}$, $A_5 = \{5\}$, $A_6 = \{6\}$ bolsın. Bul jaǵdayda da $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ sistema ushın joqarıdaǵı $1^0 - 2^0$ shártler orınlanadı, demek, bul sistema A kópiktegi bólekler boladı.

2-§. Racional sanlar hám olardıń qásiyetleri

2.1. Natural sanlar. $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ sanlar *natural sanlar* dep ataladı.

Natural sanlar kópligi N háribi menen belgilenedi: $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$.

Bul kópik sheksiz kópik bolıp, onda salıstırıw qaǵıydası anıqlanǵan. Bul kópikten alınǵan qálegen m, n, p sanlar ushın mına eki tastıyıqlaw orınlı:

1^0 . $n < m, n = m, n > m$ qatnastıń birewi hám tek birewi orınlı.

2^0 . $n < m, m < p$ teńsizliklerden $n < p$ teńsizlik kelip shıǵadı.

Eger qanday da bir E kópiktiń elementleri ushın $1^0 - 2^0$ qatnaslar orınlı bolsa, onda E kópik *tártiplengen kópik* dep ataladı. Natural sanlar kópligi tártiplengen kópikke dáslepki mısál boladı.

Eger E kópik tártiplengen kópik bolıp, onda $\forall x \in E$ ushın $x = x_0$ yaki $x > x_0$ ($x > x_0$) bolatuǵın x_0 element tabılsa, onda bul element E kópiktiń *eń kishi (eń úlken) elementi* dep ataladı. Tártiplengen kópiktiń eń kishi (eń úlken) elementi bolıwı da, bolmawı da múmkin. Natural sanlar kópliginiń eń kishi elementi bar (1 ge teń), eń úlken elementi joq.

Natural sanlar kópliginde qosıw hám kóbeytiw ámeleri anıqlanğan hám olar mına qásiyetlerge iye ($n, m, p \in N$):

$$1^0. \text{Kommutativlik: } n + m = m + n, \quad n \cdot m = m \cdot n.$$

$$2^0. \text{Associativlik: } (n + m) + p = n + (m + p), \quad (n \cdot m) \cdot p = n \cdot (m \cdot p).$$

$$3^0. \text{Distributivlik: } (n + m) \cdot p = n \cdot p + m \cdot p.$$

4⁰. Natural sanlar kópliginde $k \cdot n = n \cdot k = n$ teńliklerdi qanaatlandıratuǵın element bar. Bul element $k = 1$.

Matematikalıq indukciya usılı járdeminde dálillew principi natural sanlar kópliginiń mına ájayıp qásiyetine tiykarlanğan:

1- t e o r e m a (indukciya aksioması). *Eger*

$$1^0. A \subset N,$$

$$2^0. 1 \in A,$$

$$3^0. k \in A \Rightarrow k + 1 \in A$$

shártler orınlansa, onda $A = N$.

2.2. Pútin sanlar. Natural sanlar, bul sanlarǵa karama qarsı $-1, -2, -3, \dots, -n, \dots$ sanlar hám 0 (nol) sanı *pútin sanlar* dep ataladı. Natural sanlar *oń pútin sanlar*, $-1, -2, -3, \dots, -n, \dots$ sanlar *teris pútin sanlar*, al $0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots$ sanlar *teris emes pútin sanlar* dep ataladı. Pútin sanlar kópligi Z háribi, al teris emes pútin sanlar kópligi Z_0 háribi menen belgilenedi. Z kópligi sheksiz kóplik bolıp, onda salıstırıw qaǵıydası anıqlanğan. $N \subset Z_0 \subset Z$ qatnaslar orınlı.

Pútin sanlar kópligi tártiplengen kóplik. Pútin sanlar kópliginiń eń kishi elementi de, eń úlken elementi de joq.

Pútin sanlar kópliginde qosıw, alıw hám kóbeytiw ámeleri anıqlanğan bolıp, bul ámellerge qarata 1.1- punkttegi $1^0 - 4^0$ qásiyetler menen birge mına qásiyetler de orınlı:

$$5^0. \forall q \in Z \text{ element ushın } q + (-q) = 0 \text{ bolatuǵın } -q \text{ element bar.}$$

$$6^0. \forall q \in Z \text{ element ushın } q + 0 = 0 + q = q.$$

7⁰. $\forall q \in \mathbb{Z}$ element ushın $q \cdot 0 = 0 \cdot q = 0$.

2.3. Racional sanlar. $\frac{m}{n}$ ($m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$) qısqarmaytugın bólshek

kórinisinde ańlatılatuǵın san *racional san* dep ataladı. Racional sanlar kópligi

Q háribi menen belgilenedi: $Q = \left\{ \frac{m}{n} (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}; (m, n) = 1) \right\}$.

Racional sannıń berilgen anıqlamasına ekvivalent jáne bir anıqlamasın keltiremiz: sheksiz periodlı onlıq bólshek kórinisinde jazılatuǵın san *racional san* dep ataladı.

Hár bir natural san hám pútin san racional san, sonlıqtan $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset Q$.

Racional sanlar kópligi de tártiplengen kóplik. Racional sanlar kópliginiń eń kishi elementi de, eń úlken elementi de joq.

Racional sanlar kópliginde qosıw, alıw, kóbeytiw ámelleri menen birge bóliw ámeli de (nolden ózgeshe sanǵa) anıqlanǵan bolıp, bul ámellerge qarata mına qásiyetler orınlı ($r, t, s \in Q$)

1⁰. Kommutativlik: $r + t = t + r, \quad r \cdot t = t \cdot r$.

2⁰. Associativlik: $(r + t) + s = r + (t + s), \quad (r \cdot t) \cdot s = r \cdot (t \cdot s)$.

3⁰. Distributivlik: $(r + t) \cdot s = r \cdot s + t \cdot s$.

4⁰. Nol sanınıń qásiyeti: $r + 0 = 0, \quad r \cdot 0 = 0$.

5⁰. Bir sanınıń qásiyeti: $r \cdot 1 = r$.

6⁰. Qarama- qarsı elementtiń bar bolıwı: $\forall r \in Q$ san ushın $r + (-r) = 0$ teńlik orınlı bolatuǵın $-r \in Q$ element bar.

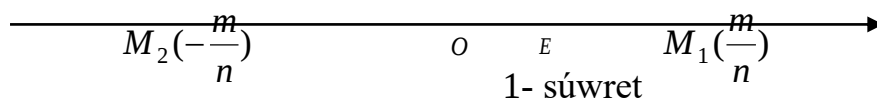
7⁰. Keri elementtiń bar bolıwı: $\forall r \in Q$ ($r \neq 0$) san ushın $r \cdot r^{-1} = 1$ teńlik orınlı bolatuǵın $r^{-1} \in Q$ element bar.

8⁰. $\forall r \in Q, t \in Q, s \in Q$ sanlar ushın $r > t$ teńsizlikten $r + s > t + s$ teńsizlik kelip shıǵadı.

9⁰. $\forall r \in Q, t \in Q, s \in Q$ ($s > 0$) sanlar ushın $r > t$ teńsizlikten $r \cdot s > t \cdot s$ teńsizlik kelip shıǵadı.

10⁰. Qálegen eki óń r hám t racional sanlar ushın $n \cdot r > t$ bolatuǵın n natural san bar. Bul qásiyet, ádette, *Arximed aksioması* dep ataladı.

2.4. Racional sanlar kópligin keńeytiw zárurligi. Málim bir O noqat (sanaq bası), uzınlıǵın 1 ge teń dep qabıl qılınatuǵın OE masshtab kesindisi hám óń baǵıt (ádette O noqattan E noqatqa qarap) saylap alınǵan tuwrı sıızıqtı *sanlar kósheri* dep ataymız. *Sanlar kósherinde hár bir racional sanǵa málim bir noqat sáykes qoyıladı.* Haqıyqatında da, mektep matematika kursınan uzınlıǵı OE masshtab kesindisiniń uzınlıǵınıń $1/n$ (n – qálegen natural san) bólegin quraytuǵın kesindini qurıw jolı málim, Demek, uzınlıǵı masshtab kesindisiniń uzınlıǵına m/n (m, n – qálegen natural sanlar) qatnasta bolǵan kesindini de qurıwımız múmkin. Usınday kesindini O noqattan óńǵa (shepke) jaylastırıp, biz $\frac{m}{n}$ ($-\frac{m}{n}$) racional sanǵa sáykes keletuǵın M_1 (M_2) noqattı alamız (1- súwret).



Endi, *sanlar kósheriniń hár bir noqatına racional san sáykes kele bermeytuǵının* atap ótemiz. Mısalı, eger M noqat OM kesindiniń uzınlıǵı tárepi OE masshtab kesindisi bolǵan kvadrattıń diagonalınıń uzınlıǵına teń bolatuǵınday qılıp saylap alınsa, onda OM kesindiniń x uzınlıǵı $x^2 = 2$ tenlemeniniń sheshimi bolıp, racional san bolmaydı. Bul kórsetilgen M noqatqa racional san sáykes kelmeytuǵının bildiredi.

Racional sanlar kópligin sanlar kósheriniń hár bir noqatına keńirek bolǵan kóplikten bazı bir san sáykes keletuǵınday (yaki usı keńirek sanlar kópliginiń járdeminde sanlar kósheriniń hár bir OM kesindisiniń uzınlıǵın ańlatıw

múmkın bolatuǵınday) qılıp keńeytiw hám usı keńirek bolǵan sanlar kópligin úyreniw talabı tábiyiy ráwishte hasıl boladı.

Racional sanlar kópligin keńeytiwdiń bir- birine ekvivalent bolǵan bir neshe usılları (Koshi, Kantor, Veyershtrass hám Dedekind usılları) bar. Biz Dedekind usılın keltiremiz.

2.5. Racional sanlar kópligindegi kesim. Q racional sanlar kópliginde orınlangan kesim túsiniǵı menen tanısamız.

1- a n ı q l a m a. Eger Q racional sanlar kópligi tómendegi shártlerdi qanaatlandıratuǵın A hám B kópliklerge bóleklense, onda A hám B kóplikler Q racional sanlar kópliginde *kesim orınlaydı* dep ayıladı

- 1) $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset,$
- 2) $A \cup B = Q,$
- 3) $\forall x \in A, \forall y \in B \Rightarrow x < y.$

Bul anıqlamadaǵı birinshi shárt A hám B kóplikler bos emesligin, ekinshi shárt hár bir racional san yaki A kóplikke, yaki B kóplikke derek bolıwın, al úshinshi shárt A kóplikke derek hár bir x racional san B kóplikke derek hár bir y racional sannan kishi ekenin ańlatadı.

Ádette kesim (A, B) simvolı menen belgilenip, A kóplik kesimniń *tómengi klası*, al B kóplik kesimniń *joqarǵı klası* dep ataladı.

Kesim anıqlamasınan tikkeley tómendegishe juwmaq shıǵarıwımız múmkın:

1⁰. (A, B) kesim Q kóplikte orınlangan kesim bolıp, $a \in A$ bolsa, onda $a_1 < a$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı $\forall a_1 \in Q$ san kesimniń tómengi klası bolǵan A kóplikke derek boladı.

2⁰. (A, B) kesim Q kóplikte anıqlangán kesim bolıp, $b \in B$ bolsa, onda $b_1 > b$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı $\forall b_1 \in Q$ san kesimniń joqarǵı klası bolǵan B kóplikke derek boladı.

Q kóplikte orınlangan kesim (A, B) kesim tek úsh túrli bolıwı múmkin:

1. Kesimniń A tómengi klasınıń eń úlken elementi $(r_0 - \text{racional san})$ bar, al B joqarı klasınıń eń kishi elementi joq. Bul jaǵdayda r_0 san A kópliktiń tuyıqlawshı elementi boladı.

2. Kesimniń A tómengi klasınıń eń úlken elementi joq, al B joqarı klasınıń eń kishi elementi $(r'_0 - \text{racional san})$ bar. Bul jaǵdayda r'_0 san B kópliktiń tuyıqlawshı elementi boladı.

3. Kesimniń A tómengi klasınıń eń úlken elementi joq, al B joqarı klasınıń eń kishi elementi joq. Bul jaǵdayda A kópliktiń de, B kópliktiń de tuyıqlawshı elementi joq.

Q kóplikte hám A tómengi klasınıń eń úlken elementi bar, hám B joqarı klasınıń eń kishi elementi bar bolǵan (A, B) kesim joq. Bunı dálilleymiz.

Meyli, Q kóplikte usınday (A, B) kesim bar bolsın. $a_0 - A$ kópliktiń eń úlken elementi, al $b_0 - B$ kópliktiń eń kishi elementi bolsın. Onda kesimniń anıqlaması boyınsha $a_0 < b_0$.

$$a_0 < \frac{a_0 + b_0}{2} < b_0 \quad \text{teńsizlik orınlı.} \quad \frac{a_0 + b_0}{2} \quad \text{racional san} \quad A \quad \text{kóplikke}$$

derek emes, sebebi $a_0 - A$ kópliktiń eń úlken elementi hám $a_0 < \frac{a_0 + b_0}{2}$. Tap

usınday $\frac{a_0 + b_0}{2}$ racional san B kóplikke derek emes, sebebi $b_0 - B$ kópliktiń

eń kishi elementi hám $\frac{a_0 + b_0}{2} < b_0$. Demek, $\frac{a_0 + b_0}{2}$ racional san A kóplikke

de, B kóplikke de derek emes. Bul kesim anıqlamasına qarama- qarsı. Solay etip, tómengi klasınıń eń úlken elementi bar, joqarǵı klasınıń eń kishi elementi bar kesim joq eken.

Joqarıdaǵı birinshi hám ekinshi túr kesimlerde tómengi yaki joqarǵı klassları tuyıq bolıp, tuyıqlawshı elementlerdi bir klasstan ekinshisine ótkizip, hámme waqıt bir túrdegi kesimge-tómengi klası ashıq, al joqarǵı klası tuyıq

bolǵan kesimge keltiriw múmkin. Bunnan bılay biz bir túrdegi kesimdi, tómengi klasınıń eń úlken elementi joq (ashıq klass), al joqargı klasınıń eń kishi elementi bar (tuyıq klass) kesimdi, qaraymız. Bunday kesimler *racional kesim* dep ataladı.

Hár bir $r \in Q$ racional san ushın Q kóplikte A kóplik ashıq klass, B kóplik tuyıq klass, tuyıqlawshı element r sannıń ózi bolǵan (A, B) kesimdi hár dayım orınlaw múmkin. Demek, Q kóplikten alınǵan hár bir racional sanǵa bul kóplikte orınlangan racional kesim sáykes keledi.

Kerisinshe, Q kóplikte A kóplik ashıq klass, B kóplik tuyıq klass, tuyıqlawshı element r san bolǵan (A, B) kesim orınlangan bolsa, bul kesim r racional sandı ańlatadı. Demek, Q kóplikte orınlangan hár bir racional kesim bir racional sandı anıqlaydı.

Solay etip, Q kóplik elementleri menen Q kóplikte orınlangan racional kesimler kópligi elementleri arasında bir mánisli sáykeslik ornatıladı.

Racional sanlar kópliginde orınlangan úshinshi túrdegi kesim- hám tómengi klası, hám joqargı klası ashıq bolǵan kesim, *irracional kesim* dep ataladı.

2- a n ı q l a m a. Racional sanlar kópliginde orınlangan irracional kesim *irracional sandı anıqlaydı* dep ayıladı.

3-§. Haqıyqıy sanlar. Haqıyqıy sanlar kópliginiń qásiyetleri

Racional sanlar kópliginde orınlangan kesim eki túrde- racional hám irracional kesimler bolıp, racional kesim racional sandı, al irracional kesim irracional sandı anıqlaytuǵının biz joqarıda kórdik.

3- a n ı q l a m a. Racional hám irracional sanlar ulıwma atama menen *haqıyqıy sanlar* dep ataladı.

Haqiqiy sanlar kópligi R háribi menen belgilenedi.

Usı kópliktiń qásiyetlerin qaraymız.

1⁰. *Haqiqiy sanlar kópligi tártiplengen kóplik*. Dáslep haqiqiy sanlar kópliginde teń, úlken hám kishi túsinikleri kirgizemiz. Meyli, $x, y \in R$ sanlar berilgen bolsın. Hár bir haqiqiy san racional sanlar kópliginde orınlangan kesim menen anıqlanadı. Demek, x hám y sanlardı anıqlawshı kesimler orınlangan: $x = (A, B)$, $y = (A', B')$. Bul kesimlerdiń tómengi klassları ushın ya $A = A'$ (bul jaǵdayda álbette $B = B'$ boladı), ya $A \neq A'$ (bul jaǵdayda $B \neq B'$) qatnaslardıń biri orınlı.

Eger $A = A'$ bolsa, (A, B) hám (A', B') kesimler óz-ara teń dep ataladı: $(A, B) = (A', B')$. Bul jaǵdayda kesimler anıqlaǵan sanlar da bir-birine teń dep ataladı: $x = y$.

Endi, meyli, $A \neq A'$ bolsın. Bul jaǵdayda ya A klassqa derek, biraq A' klassqa derek bolmaǵan $r_1 \in Q$ element bar, ya A klassqa derek bolmaǵan, biraq A' klassqa derek bolǵan $r_2 \in Q$ element bar. Birinshi jaǵdayda $r_1 \in A \cap B'$ hám kesim anıqlaması boyınsha $A' \subset A$. Al ekinshi jaǵdayda $r_2 \in B \cap A'$ hám $A \subset A'$.

Solay etip, $A \neq A'$ bolǵanda ya $A' \subset A$, ya $A \subset A'$ boladı eken.

Eger $A \subset A'$ bolsa, (A, B) kesim (A', B') kesimnen kishi dep, al sáykes x haqiqiy san y sannan kishi dep ataladı: $x < y$.

Eger $A \supset A'$ bolsa, (A, B) kesim (A', B') kesimnen úlken dep, al sáykes x haqiqiy san y sannan úlken dep ataladı: $x > y$.

Solay etip, qálegen eki x hám y haqiqiy sanlar ushın $x < y$, $x = y$, $x > y$ qatnaslardıń birewi hám tek birewi orınlı boladı.

Endi $x, y, z \in R$ haqiqiy sanlar ushın $x < y$, $y < z$ teńsizliklerden $x < z$ teńsizlik kelip shıǵıwın dálilleymiz. Meyli, bul kesimlerdi anıqlawshı kesimler

$x = (A, B)$, $y = (A', B')$, $z = (A'', B'')$ bolsın. Anıqlama boyınsha

$$x < y \Rightarrow A \subset A', \quad y < z \Rightarrow A' \subset A''.$$

Biz kóplikler teoriyasınan $A \subset A'$, $A' \subset A'' \Rightarrow A \subset A''$ bolatuǵının bilemiz. Bul $x < z$ bolatuǵının bildiredi. Demek, haqiqiy sanlar kópligi tártiplengen kóplik.

Haqiqiy sanlar arasındǵı teń, kishi hám úlken túsinikleri, dara jaǵdayda, bul sanlar racional sanlar bolǵanda racional sanlar arasındǵı teń, kishi hám úlken túsinikleri menen birdey boladı.

2⁰. *Haqiqiy sanlar kópligi tıǵız kóplik.* Meyli, $x, y \in R$, $x < y$ bolsın. $x < r < y$ teńsizliklerdi qanaatlandıırıwshı r racional san bar ekenin dálilleymiz. Q racional sanlar kópliginde orınlangan (A, B) , (A', B') kesimler x hám y sanlardı anıqlasın: $x = (A, B)$, $y = (A', B')$. Onda $x < y$ teńsizlikten $A \subset A'$ qatnas kelip shıǵadı. Demek, A' kóplikte $r_0 \in A'$, $r_0 \notin A$ bolatuǵın r_0 racional san bar. Onda $r_0 \in B$ boladı hám demek, $x \leq r_0$ teńsizlik orınlı boladı. Ekinshi tárepten, $y = (A', B')$, $r_0 \in A'$ bolǵanlıqtan hám A' kópliktiń eń úlken elementi joqlıǵı sebepli $r_0 < r$ hám $r < y$ bolatuǵın $r \in A'$ racional san bar. Nátiyjede $x \leq r_0 < r < y$ teńsizliklerge iye bolamız. Bunnan $x < r < y$ teńsizlikler orınlı bolatuǵını kelip shıǵadı. Usı usıl menen $x, y \in R$, $x > y$ bolǵanda $x > r > y$ teńsizliklerdi qanaatlandıırıwshı r racional san bar ekeni de dálillenedi. Solay etip, *bir- birine teń bolmaǵan eki haqiqiy san arasında keminde bir haqiqiy san bar*. Al bunnan olar arasında sheksiz kóp haqiqiy san bar ekeni kelip shıǵadı. Demek, haqiqiy sanlar kópligi tıǵız kóplik.

Racional sanlar kópliginiń tıǵızlıǵı mına tastıyqlaw menen anıqlanadı: *bir- birine teń bolmagan eki racional san arasında keminde bir racional san bar.*

4-§. Haqıyqıy sanlar kópliginiń tolıqlıǵı. Dedekind teoreması

Eger haqıyqıy sanlar kópliginde kesim túsinigi kiritilse racional sanlar kópligindeǵıdey haqıyqıy sanlar kópligin de keńeytiw zárurlıǵı payda boladıma degen sorawdıń qoyılıwı tábiyiy.

4- a n ı q l a m a. R haqıyqıy sanlar kópligi tómendegi shártlerdi qanaatlandırıwshı E hám E' kópliklerge bólinse, onda bul kóplikler R kóplikte *kesim orınlaydı* dep ataladı

- 1) $E \neq \emptyset, E' = \emptyset,$
- 2) $E \cup E' = R,$
- 3) $\forall x \in E, \forall x' \in E' \Rightarrow x < x'.$

Ádette bul kesim (E, E') simvolı menen belgilenedi. E kóplik kesimniń *tómengi klası*, al E' kóplik kesimniń *joqarǵı klası* dep ataladı.

Racional sanlar kópligindegi sıyaqlı haqıyqıy sanlar kópliginde de tómengi klasınıń eń úlken elementi bar, joqarǵı klasınıń eń kishi elementi bar kesim orınlanbaǵan. Basqasha aytqanda, R kóplikte hám tómengi klası, hám joqarǵı klası tuyıq kesim joq.

2- t e o r e m a (Dedekind). *Haqıyqıy sanlar kópliginde orınlanǵan hár bir kesim ushın tómendegi eki jaǵdaydıń tek birewi orınlı:*

- a) *kesimniń tómengi klasınıń eń úlken elementi bar, joqarǵı klasınıń eń kishi elementi joq.*
- b) *kesimniń tómengi klasınıń eń úlken elementi joq, joqarǵı klasınıń eń kishi elementi bar.*

Bul teoremanı oqıwshı óz betinshe dálillewi múmkin.

E hám E' kópliklerdiń tuyıqlawshı elementlerin birewinen ekinshisine ótkiziw jolı menen teoremada kórsetilgen eki túrdegi kesimdi bir túрге keltiriw

múmkin. Biz R kóplikte orınlangan hár bir kesimdi tómengi klasınıń eń úlken elementi joq, al joqargı klasınıń eń kishi elementi bar kesim dep qaraymız. Bul Dedekind teoremasın tómendegishe aytıw múmkinshiligin beredi.

3- t e o r e m a. *Haqıyqıy sanlar kópliginde orınlangan hár bir kesim jalǵız bir haqıyqıy sandı anıqlaydı.*

$\forall \alpha \in R$ san járdeminde haqıyqıy sanlar kópliginde bul san joqargı klasına derek bolıp, bul klass elementleriniń eń kishisi bolǵan (E, E') kesim orınlaw múmkin. Kerisinshe, R kóplikte (E, E') kesim orınlangan bolsa, bul kesimniń E' joqarı klasınıń eń kishi elementi bar bolıp, kesim usı sandı ańlatadı.

Demek, R kóplik hám bul kóplikte orınlangan kesimler kópligi arasında bir mánisli sáykeslik bar.

Solay etip, R kóplikti keńeytiw zárúrligi joq eken. Bul qásiyet haqıyqıy sanlar kópliginiń *tolıqlıq qásiyeti* dep ataladı.

5-§. Haqıyqıy sanlar ústinde arifmetikalıq ámeller hám olardıń qásiyetleri

5.1. Haqıyqıy sanlardıń qosındısı. $\alpha, \beta \in R$ sanlar Q racional sanlar kópliginde orınlangan $(A, A'), (B, B')$ kesimler menen anıqlanǵan bolsın: $\alpha = (A, A'), \beta = (B, B')$. Kesimlerdiń A hám B tómengi klasslarınan sáykes túrde α hám β sanlardı alıp, olardıń $c := \alpha + \beta$ qosındısını dúzemiz. Usınday qosındılardan dúzilgen kóplikti $C = \{c : c = \alpha + \beta, \alpha \in A, \beta \in B\}$ dep, bul kópliktiń Q kóplikke toltırıwshısını $C' := Q \setminus C$ dep belgileymiz. Qurılıwı boyınsha $Q = C \cup C'$.

C hám C' kóplikler Q racional sanlar kópliginde (C, C') kesim orınlaytuǵının kórsetemiz. $\alpha = (A, A'), \beta = (B, B')$ kesimler Q kóplikte orınlangan kesimler bolǵanı ushın

$$A \neq \emptyset, A' \neq \emptyset, A \cup A' = Q, a \in A, a' \in A' \Rightarrow a < a',$$

$$B \neq \emptyset, B' \neq \emptyset, B \cup B' = Q, b \in B, b' \in B' \Rightarrow b < b'.$$

Bunnan $C \neq \emptyset$. Soń $a + b < a' + b'$ bolǵanı ushın C kóplik joqarıdan shegaralanǵan bolıp, bul kópliktiń dál joqargı shegarası bar: $\sup C =: \gamma$. A hám B kópliklerdiń eń úlken elementi joq, sonlıqtan $a + b < \gamma$ ($a \in A, b \in B$). Onda $a' + b' \geq \gamma$ ($a' \in A', b' \in B'$) bolıp, $a' + b' \notin C$. Bunnan $a' + b' \notin Q \setminus C = C'$. Demek, $C' \neq \emptyset$. Sonıń menen birge $c = a + b \in C$ hám $c < c' = a' + b' \in Q \setminus C = C'$

Solay etip, C hám C' kóplikler Q racional sanlar kópliginde (C, C') kesim orınlaydı eken.

5- a n ı q l a m a. (C, C') kesim menen anıqlanatuǵın γ haqıyqıy san α hám β sanlardıń qosındısı dep ataladı hám $\gamma = \alpha + \beta$ dep belgilenedi.

Endi haqıyqıy sanlardı qosıw ámeliniń qásiyetlerin keltiremiz. Meyli, $\alpha, \beta, \gamma \in R$ bolsın. Tómendegi teńlikler orınlı:

$$1^0. \alpha + \beta = \beta + \alpha;$$

$$2^0. (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma);$$

$$3^0. \text{Nol sanı ushın } \alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha.$$

Bul qásiyetler ańsat dálillenedi. Bul qásiyetlerdi oqıwshı óz betinshe dálillewi múmkin.

Qosıw ámeliniń kelesi qásiyetin keltiriwden aldın $\alpha \in R$ sanǵa qarama-qarsı sandı anıqlaymız.

$\alpha \in R$ san Q racional sanlar kópliginde (A, A') kesim menen anıqlanǵan bolsın: $\alpha = (A, A')$. Racional sanlardıń $-A' = \{-a' : a' \in A'\}$, $-A = \{-a : a \in A\}$ kópliklerin karaymız. Bul kóplikler Q kóplikte $(-A', -A)$ kesim orınlaydı.

6- a n ı q l a m a. $(-A', -A)$ kesim menen anıqlanatuǵın haqıyqıy san $\alpha \in R$ sanǵa qarama-qarsı san dep ataladı hám $-\alpha := (-A', -A)$ dep belgilenedi.

$$4^0. \forall \alpha \in R \text{ san ushın } \alpha + (-\alpha) = 0 \text{ teńlik orınlı.}$$

5⁰. Eger $\alpha, \beta \in R$ sanlar ushın $\alpha > \beta$ teńsizlik orınlı bolsa, onda $\forall \gamma \in R$ san ushın $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ teńsizlik orınlı.

Bul qásiyetlerdi oqıwshı óz betinshe dálillewi múmkin.

Berilgen haqıyqıy sanǵa qarama- qarsı sannıń anıqlanıwı eki haqıyqıy sannıń ayırması túsiniǵın kirgiziwge múmkinshilik beredi.

7- a n ı q ı l a m a. $\alpha + (-\beta)$ san α hám β sanlardıń *ayırması* dep ataladı hám $\alpha - \beta := \alpha + (-\beta)$ dep belgilenedi.

5.2. Haqıyqıy sanlardıń kóbeymesi. $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ haqıyqıy sanlar Q racional sanlar kópiginde orınlangan $(A, A'), (B, B')$ kesimler menen anıqlangán bolsın: $\alpha = (A, A'), \beta = (B, B')$. A hám B kópiklerdiń teris emes a hám b elementlerinen

$$\{a \cdot b : a \in A (a \geq 0), b \in B (b \geq 0)\}$$

kópikti dúzemiz. Soń racional sanlardıń

$$C := Q_- \cup \{a \cdot b : a \in A (a \geq 0), b \in B (b \geq 0)\}, \\ C' = Q \setminus C$$

kópiklerin qaraymız (bul jerde Q_- – teris racional sanlar kópigi). Bul C hám C' kópikler Q kópikte kesim dúzetuǵının tekseriw qıyın emes.

8- a n ı q ı l a m a. (C, C') kesim menen anıqlanatuǵın haqıyqıy san α hám β sanlardıń *kóbeymesi* dep ataladı hám $\alpha \cdot \beta$ dep belgilenedi: $\alpha \cdot \beta = (C, C')$.

$\forall \alpha, \beta \in R$ sanlar ushın bul sanlardıń kóbeymesi α hám β sanlardıń belgileri hár qıylı bolsa $-(\lfloor \alpha \rfloor \cdot \lfloor \beta \rfloor)$ kóbeyme kórinisinde, al birdey bolsa $\lfloor \alpha \rfloor \cdot \lfloor \beta \rfloor$ kóbeyme kórinisinde anıqlanadı.

Endi haqıyqıy sanlardı kóbeytiw ámeliniń qásiyetlerin keltiremiz. Meyli, $\alpha, \beta, \gamma \in R$ bolsın.

$$1^0. \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha,$$

$$2^0. (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma),$$

$$3^0. \alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha.$$

Bul qásiyetlerdi dálillew qıyın emes, olardı oqıwshı óz betinshe dálillewi múmkin.

Haqıyqıy sanlardı kóbeytiw ámeliniń kelesi qásiyetin keltiriwden aldın haqıyqıy sanǵa keri sandı anıqlaymız.

$0 < \alpha \in R$ san Q kóplikte orınlangan (A, A') kesim menen anıqlanǵan bolsın.

$$C := Q_- \cup \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{a'} : a' \in A' \right\},$$

$$C' = Q \setminus C$$

racional sanlar kópliklerin qaraymız. Bul kóplikler Q kóplikte (C, C') kesim orınlaytuǵının kóriw qıyın emes. Bunı oqıwshı óz betinshe dálillewi múmkin.

9- a n ı q l a m a. (C, C') kesim menen anıqlanǵan haqıyqıy san $0 < \alpha \in R$ sanǵa keri san dep ataladı hám $\frac{1}{\alpha}$ dep belgilenedi: $\frac{1}{\alpha} = (C, C')$

Eger $\alpha < 0$ bolsa, onda bul sanǵa keri san $\frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{|\alpha|}$ kóriniste anıqlanadı.

4⁰. Nolden ózgeshe $\forall \alpha \in R$ sanǵa keri $\frac{1}{\alpha}$ san bar hám $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$ teńlik orınlı.

4- t e o r e m a. Eger $\alpha, \beta \in R$ ($\alpha \neq 0$) sanlar berilgen bolsa, onda $\alpha \cdot x = \beta$ teńlemenı qanaatlandıırıwshı jalǵız bir haqıyqıy san bar.

10- a n ı q l a m a. $\beta \cdot \frac{1}{\alpha}$ san α hám β sanlardıń qatnası dep ataladı hám $\frac{\beta}{\alpha}$ dep belgilenedi.

5⁰. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in R$ sanlar ushın $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$ teńlik orınlı.

6⁰. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in R$ ($\gamma > 0$) sanlar berilgen bolsa, $\alpha > \beta$ teńsizlikten $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ teńsizlik kelip shıǵadı.

4- teoremanı hám 5^0 - 6^0 qásiyetlerdi oqıwshı óz betinshe dálillewi múmkin.

5.3. Haqıyqıy sannıń dárejesi. Dáslep tómendegi eki lemmanı dálillewsiz keltiremiz.

1- l e m m a. Meyli, $(A, A') - Q$ kóplikte orınlanǵan qálegen kesim bolsın. $\forall \varepsilon > 0$ racional san berilse de, $a' - a < \varepsilon$ teńsizlikti qanaatlandıratuǵın $a \in A$, $a' \in A'$ racional sanlar bar.

2- l e m m a. $\alpha, \beta \in R$ sanlar berilgen bolsın. $\forall \varepsilon > 0$ racional san berilse de, $\exists a, a' \in Q$, $a < a'$ sanlar tabılıp,

$$a \leq \alpha \leq a',$$

$$a \leq \alpha \leq a',$$

$$a' - a < \varepsilon$$

teńsizlikler orınlı bolsa, onda $\alpha = \beta$ boladı.

a) Haqıyqıy sannıń pútın dárejesi. Biz joqarıda eki haqıyqıy sannıń kóbeymesiniń anıqlamasın berdik. n dana $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ haqıyqıy sanlardıń $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n$ kóbeymesi de usı jol menen anıqlanadı. Eger $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$ bolsa, onda $\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_n$ kóbeyme α sannıń n -
dárejesi dep ataladı hám α^n dep belgilenedi: $\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_n = \alpha^n$.

Bul keltirilgen anıqlamadan hám haqıyqıy sanlar ústindegi ámelлердің qásiyetlerinen tómendegiler kelip shıǵadı. $\alpha, \beta \in R$ hám $n, m \in N$ bolsın.

1) Tómendegi teńsizlikler orınlı:

$$\alpha^n \cdot \alpha^m = \alpha^{n+m},$$

$$\alpha^n \cdot \beta^n = (\alpha \cdot \beta)^n,$$

$$(\alpha^n)^m = \alpha^{n \cdot m},$$

$$\frac{\alpha^n}{\alpha^m} = \alpha^{n-m} \quad (n > m);$$

2) eger $n > m$ hám $\alpha > 1$ bolsa, $\alpha^n > \alpha^m$ bolıp, al eger $0 < \alpha < 1$ bolsa, $\alpha^n < \alpha^m$ boladı.

3) eger $\alpha > \beta > 0$ bolsa, onda $\alpha^n > \beta^n$ boladı.

$\forall \alpha \in R \quad (\alpha \neq 0)$ san ushın bul sanǵa keri $\frac{1}{\alpha}$ san bar ekeni málim.

$\underbrace{\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\alpha}}_n$ kóbeyme α sannıń — n - dárejesi dep ataladı hám α^{-n} dep

belgilenedi: $\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}$.

$\alpha \neq 0$ sannıń nolinshi dárejesi 1 ge teń: $\alpha^0 = 1$.

b) Haqıyqıy sannan alınǵan túbir. Meyli $0 < \alpha \in R$ hám bazı bir $n \in N$ san berilgen bolsın.

11- a n ı q l a m a. $\xi^n = \alpha$ (*) teńlemenıń oń sheshimi α sannan alınǵan n - túbir dep ataladı hám ol $\sqrt[n]{\alpha}$ dep belgilenedi.

Bul anıqlamanıń korrektiligin, yaǵnıy (*) teńlemenıń ξ sheshimi barlıǵın hám jalǵız birew ekenin kórsetemiz.

Bunıń ushın Q kóplikti

$$A_n = Q_- \cup \{0\} \cup \{r : r \in Q, r > 0, r^n < \alpha\},$$

$$A'_n = \{r' : r' \in Q, r' > 0, r'^n > \alpha\}$$

kóplikler járdeminde jazıp alamız: $Q = A_n \cup A'_n$. Usılay dúzilgen A_n hám A'_n kóplikler Q kóplikte (A_n, A'_n) kesim dúzetuǵının kóriw qıyın emes. Bul kesim anıqlaytuǵın haqıyqıy sandı ξ dep belgileybiz: $\xi = (A_n, A'_n)$.

Joqarıdaǵı 1- lemmadan $\forall \varepsilon > 0$ racional san ushın $r' - r < \varepsilon$ teńsizlikti qanaatlandıratuǵın $r \in A_n$ hám $r' \in A'_n$ sanlar bar. Bul sanlardıń alınıwınan $0 < r < \xi < r'$ hám demek, $r^n < \xi^n < r'^n$ teńsizlikler orınlı.

A'_n kóplikte $0 < r < r' < r_0$ bolǵan r_0 sandı (bunday san hámme waqıt tabıladı) alsaq

$$r'^n - r^n = (r' - r)(r'^{n-1} + r \cdot r'^{n-2} + \dots + r^{n-2} \cdot r' + r^{n-1}) <$$

$$< (r' - r) \cdot n \cdot r_0^{n-1} < \varepsilon \cdot n \cdot r_0^{n-1}$$

teńsizlik orınlı boladı. Bunnan $\forall \varepsilon > 0$ racional san ushın $(\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{n r_0^{n-1}})$ san boyınsha) sonday $r \in A_n$ hám $r' \in A'_n$ sanlar tabılıp, $r^n < \xi^n < r'^n$ hám $r'^n - r^n < \varepsilon$ teńsizlikler orınlı boladı.

Ekinshi tárepten, (A_n, A'_n) kesimniń dúziliwi boyınsha $r^n < \alpha < r'^n$ teńsizlikler orınlı. Solay etip, 2-lemmanıń hámme shártleriniń orınlanatuǵının kórsettik. Usı lemma boyınsha $\xi^n = \alpha$ boladı.

Solay etip, (A_n, A'_n) kesim menen anıqlanǵan ξ san (*) teńlemenıń sheshimi boladı. Bul teńlemenıń sheshimi jalǵız birew. Haqıyqatında da, eger ξ_1, ξ_2 sanlar (*) teńlemenıń sheshimi bolsa, yaǵnıy $\xi_1^n = \alpha, \xi_2^n = \alpha$ bolsa, onda

$$\xi_1^n - \xi_2^n = (\xi_1 - \xi_2)(\xi_1^{n-1} + \xi_2 \xi_1^{n-2} + \dots + \xi_2^{n-2} \xi_1 + \xi_2^{n-1}) = 0$$

teńlikten $\xi_1 - \xi_2 = 0$, yaǵnıy $\xi_1 = \xi_2$ ekenligi kelip shıǵadı.

c) Haqıyqıy sannıń racional dárejesi. Biz $\alpha \in R$ sannıń pútın dárejesiniń, sonıń menen birge $\alpha > 0$ sannan alınǵan n — dárejeli túbirdiń anıqlamasın berdik. Endi $\alpha > 0$ sannıń racional dárejesi túsiniǵın keltiremiz.

Hár bir racional san qısqarmaytuǵın $r = \frac{m}{n}$ ($m \in Z, n \in N$) bólshek

kórinisinde anlatılatuǵını málim. $\alpha > 0$ haqıyqıy sannıń r racional dárejesi

$\alpha^r = \alpha^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{\alpha})^m$ kóriniste anıqlanadı.

Meyli, $\alpha, \beta \in R_+$ (R_+ — oń racional sanlar kópligi), $r_1, r_2 \in Q$ sanlar berilgen bolsın. Tómendegi ápiwayı qásiyetler orınlı;

$$1) \alpha^{r_1} \cdot \alpha^{r_2} = \alpha^{r_1+r_2};$$

$$2) (\alpha^{r_1})^{r_2} = \alpha^{r_1 \cdot r_2};$$

$$3) \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^r = \frac{\alpha^r}{\beta^r};$$

$$4) \alpha^{r_1} : \alpha^{r_2} = \alpha^{r_1-r_2};$$

$$5) (\alpha \cdot \beta)^r = \alpha^r \cdot \beta^r;$$

6) $\alpha > 1$ bolsa, $r_1 < r_2 \Rightarrow \alpha^{r_1} < \alpha^{r_2}$;

7) $0 < \alpha < 1$ bolsa, $r_1 < r_2 \Rightarrow \alpha^{r_1} > \alpha^{r_2}$;

$\alpha = 1$ sannın qálegen racional dárejesi de, qálegen haqıyqıy dárejesi de 1 ge teń: $1^\alpha = 1$.

d) Haqıyqıy sannın haqıyqıy dárejesi. $\alpha > 1$ haqıyqıy san berilgen, al $\beta \in \mathbb{R}$ san Q kóplikte orınlangan (B, B') kesim menen anıqlangán oń san bolsın: $\beta = (B, B')$, $\beta > 0$. Hámme teris haqıyqıy sanlar, nol hám α^b ($b \in B$) kórinisindegi oń haqıyqıy sanlardan dúzilgen kóplikti E háribi, al bul kóplikti haqıyqıy sanlar kópligine tolıqtırırwshı kóplikti E' simvolı menen belgileyemiz: $E' = \mathbb{R} \setminus E$. Nátiyjede $\mathbb{R} = E \cup E'$ kórinisinde jazıladı. E hám E' kóplikler $\mathbb{R}$ kóplikte (E, E') kesim orınlaydı. Haqıyqatında da, dúziliwi boyınsha E kóplik bos emes: $E \neq \emptyset$. Soń $\alpha^b < \alpha^{b'}$ ($b \in B, b' \in B'$) bolǵanı ushın E kóplik joqarıdan shegaralangán. Demek, $\sup E = \gamma$ bar. B kópliktiń eń úlken elementi joq, sonlıqtan $\alpha < \gamma$. Onda $\gamma \leq \alpha^{b'}$ hám $\alpha^{b'} \notin E$ boladı. Bunnan $\alpha^{b'} \notin E'$. Demek, $E' \neq \emptyset$. E kópliktiń hár bir elementi E' kópliktiń qálegen elementinen kishi bolatuǵını anıq. Solay etip, E hám E' kóplikler $\mathbb{R}$ kóplikte (E, E') kesim orınlaydı.

12- a n ı q l a m a. (E, E') kesim menen anıqlangán haqıyqıy san α haqıyqıy sannın β – dárejesi dep ataladı hám α^β dep belgilenedi: $\alpha^\beta = (E, E')$.

Eger β – san teris san bolsa, onda $\alpha^\beta = \frac{1}{\alpha^{-\beta}}$ dep qaraymız.

Eger $0 < \alpha < 1$ bolsa, onda $\alpha^\beta = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{-\beta}$ dep alıp joqarıda qaralǵan jaǵdayǵa kelemiz. Oń haqıyqıy sannın haqıyqıy dárejesi túsiniǵinen paydalanıp, mına teoremaǵa kelemiz.

5- t e o r e m a. *Qálegen $\alpha \neq 1$ hám γ oń haqıyqıy sanlar ushın $\alpha^\beta = \gamma$ teńlemenıń sheshimi bar hám jalǵız birew.*

13- a n ı q l a m a. Berilgen $\alpha \neq 1$ hám γ oń haqıyqıy sanlar ushın $\alpha^\beta = \gamma$ teńlemenıń β – sheshimi γ sannıń α tiykarlı logarifmi dep ataladı hám $\beta = \log_\alpha \gamma$ dep belgilenedi.

6-§. Haqıyqıy sannıń moduli hám onıń qásiyetleri

Endi haqıyqıy sannıń moduli (absolyut mánisi) túsiniǵın keltiremiz.

$\alpha \in R$ haqıyqıy sannıń *moduli (absolyut mánisi)*

$$|\alpha| := \begin{cases} \alpha, & \alpha > 0, \\ 0, & \alpha = 0, \\ -\alpha, & \alpha < 0 \end{cases}$$

teńlik penen anıqlanadı.

Haqıyqıy sannıń moduliniń qásiyetleri:

1⁰. $\forall x \in R$ san ushın $|x| \geq 0$, $|x| = |-x|$, $x \leq |x|$, $-x \leq |x|$ qatnaslar orınlı.

2⁰. $\forall x \in R$ san ushın $|x| < M$ ($M > 0$) hám $-M < x < M$ teńsizlikler teń kúshli.

3⁰. $\forall x \in R$ san ushın $|x| \leq M$ ($M > 0$) hám $-M \leq x \leq M$ teńsizlikler teń kúshli.

4⁰. $x, y \in R$ sanlardıń qosındısıń moduli bul sanlardıń modulleriniń qosındısınan kishi emes: $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Bul qásiyet qálegen sandaǵı haqıyqıy sanlar ushın orınlı: *Sanlar qosındısıń moduli usı sanlardıń modulleriniń qosındısınan kishi emes.*

5⁰. $x, y \in R$ sanlardıń kóbeymesiniń moduli bul sanlardıń modulleriniń kóbeymesine teń: $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

7⁰. $x, y \in R$ sanlardıń qatnasınıń moduli bul sanlardıń modulleriniń qatnasına teń: $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0).$

7-§. Haqıyqıy sanlardı geometriyalıq súwretlew

Biz hár bir racional sanǵa sanlar kósherinde bir noqat sáykes keletuǵınıń kórsettik. Sonıń menen birge racional bolmaǵan noqatlar da bar ekenin (mısalı, $\sqrt{2}$ sanı) anıqladıq.

Endi hár bir haqıyqıy sanǵa da sanlar kósherinde bir noqat sáykes keletuǵınıń kórsetemiz. Bunıń ushın hár bir irracional sanǵa sanlar kósherinde bir noqat sáykes keletuǵınıń kórsetiw jetkilikli.

Biz haqıyqıy sanlar kópligi tolıqlıq (úzliksizlik) qásiyetine iye ekenin kórsettik. Tuwrı sıızıq noqatlarınıń kópligi de tolıqlıq qásiyetine iye. Dáslep tuwrı sıızıq noqatlarınıń kópliginde orınlangan kesim anıqlamasın beremiz.

14- a n ı q l a m a. Eger l tuwrı sıızıq noqatlarınıń kópligi tómendegi shártlerdi qanaatlandırıwshı $\mathcal{M}$ hám $\mathcal{P}$ kópliklerge bóleklense, onda $\mathcal{M}$ hám $\mathcal{P}$ kóplikler l kóplikte *kesim* orınlardı dep ayıladı hám bul kesim $(\mathcal{M}, \mathcal{P})$ simvolı menen belgilenedi

$$1^0. \mathcal{M} \neq \emptyset, \mathcal{P} \neq \emptyset.$$

$$2^0. \mathcal{M} \cup \mathcal{P} = l,$$

3⁰. Sanlar kósherinde $\forall M \in \mathcal{M}$ noqat $\forall P \in \mathcal{P}$ noqattan shepte jaylasqan.

Tuwrı sıızıqtıń úzliksizlik qásiyeti. l tuwrı sıızıq noqatlarınıń kópliginde orınlangan hár bir $(\mathcal{M}, \mathcal{P})$ kesim tuwrı sıızıqtıń jalǵız bir M noqatın anıqlap, bul noqat ya $\mathcal{M}$ kópliktiń eń oń noqatı, ya $\mathcal{P}$ kópliktiń eń shep noqatı boladı.

7.1. Irracional sanlardı geometriyalıq súwretlew. Meyli, bazı bir α irracional san berilgen bolıp, bul san Q racional sanalar kópliginde orınlangan (A, A') kesim menen anıqlangán bolsın: $\alpha = (A, A')$. Bunda A kóplikte eń

úlken, al A' kóplikte eń kishi element joq. I tuwrı sıızıqta A hám A' kóplikler dúzgen racional noqatlar kópliklerdi, sáykes túrde, $\overline{A}$ hám $\overline{A'}$ dep belgileymiz.

$\overline{A}$ kóplik noqatları ishinde eń oń noqat, al $\overline{A'}$ kóplik noqatları ishinde eń shep noqat joq ekeni anıq. I tuwrı sıızıqtıń shep tárepinde $\overline{A}$ kópliktiń keminde bir noqatı bar noqatlardan dúzilgen kóplikti C háribi menen, al bul kóplikti I tuwrı sıızıqqa tolıqtırırwshı kóplikti C' simvolı menen belgileymiz: $C' = I \setminus C$. Bul C hám C' kóplikler I tuwrı sıızıqta kesim orınlaydı. Usını kórsetemiz.

$A \neq \emptyset$ bolǵanı ushın $a \in A$ racional san bar. I tuwrı sıızıqta bul sanǵa sáykes keletuǵın P_a noqat $\overline{A}$ kóplikke derek. Demek, $P_a \in C$. Bul $C \neq \emptyset$ ekenin bildiredi. $C' \neq \emptyset$ ekeni de usıǵan uqsas kórsetiledi.

C hám C' kópliklerdiń dúziliwinen $C \cup C' = I$ hám C kópliktiń hár bir noqatı C' kópliktiń qálegen noqatınan shepte jaylasatugını kelip shıǵadı. Demek, C hám C' kóplikler I tuwrı sıızıqta (C, C') kesim orınlaydı. Tuwrı sıızıqtıń qásiyeti boyınsha (C, C') kesim jalǵız bir noqattı anıqlaydı. Bul noqattı P_α dep belgileymiz. $\overline{A}$ kóplikte eń oń noqat bolmaǵanı ushın $P_\alpha \notin \overline{A}$, sonıń menen birge, $\overline{A'}$ kóplikte eń shep noqat bolmaǵanı ushın $P_n \notin \overline{A'}$. Demek, $P_n \notin \overline{A} \cup \overline{A'}$ bolıp, bul noqat racional sanǵa sáykes keliwshi nokat bolmaydı. Usı P_α noqattı α irracional sanǵa sáykes qoyamız.

7.2. Haqıyqıy sanlar kópligi menen tuwrı sıızıq noqatlarınıń kópligi arasındǵı bir mánisli sáykeslik. Biz hár bir $\alpha \in R$ haqıyqıy sanǵa I tuwrı sıızıqta bir P_α noqat sáykes qoyılatuǵının kórdik. Endi kerisinshe, I tuwrı sıızıqta bir noqatına bir haqıyqıy san sáykes qoyılatuǵının kórsetemiz.

Sanlar kósherinde bazı bir P noqat alayıq, bul noqat, meyli, O noqattan ońda jacın. P noqat sanlar kósherinde OP kesindi hasıl qıladı. OE masshtab

kesindisin OP kesindi boylap jaylastıramız. Bunda tómendegi eki jaǵday bolıwı múmkin:

1₁) OE kesindi OP kesindide a_0 (a_0 – pútin san) mártebe tolıq jaylasadı. Bul jaǵdayda OP kesindiniń óń ushı bolǵan P noqatqa usı a_0 pútin san sáykes qoyıladı. a_0 san P noqat *koordinatası (abscissası)* dep ataladı. Demek, bul jaǵdayda P noqatqa a_0 pútin san sáykes qoyıladı.

2₁) OE kesindi OP kesindide a_0 (a_0 – pútin san) mártebe jaylasıp, OP kesindiden SP kesindi artıp qalıwı yaqı OE kesindi OP kesindide $a_0 + 1$ mártebe jaylasqanda OP kesindige PQ kesindi jetpey qalıwı múmkin. Bul jaǵdayda OP kesindiniń óń ushı bolǵan P noqatqa a_0 sandı «kemisi» menen, al $a_0 + 1$ sandı «artıǵı» menen sáykes qoyıw múmkin. P noqatqa sáykes keletuǵın haqıyqıy sandı tabıw maqsetinde OE masshtab kesindisiniń $\frac{1}{10}$ bólegin alıp, onı SP kesindi boylap jaylastıramız. Bunda jáne mına eki jaǵday bolıwı múmkin:

1₂) OE kesindiniń $\frac{1}{10}$ bólegi SP kesindide a_1 (a_1 – pútin san) mártebe jaylasadı, bul jerde $a_1 = 0, 1, 2, \dots, 9$ sanlarınıń biri. Bul jaǵdayda, P noqatqa $a_0 + \frac{a_1}{10}$ san sáykes qoyıladı.

2₂) OE kesindiniń $\frac{1}{10}$ bólegi SP kesindide a_1 (a_1 – pútin san) mártebe jaylasıp, SP kesindiden S_1P kesindi artıp qalıwı yaqı OE kesindiniń $\frac{1}{10}$ bólegi PA kesindide $a_1 + 1$ mártebe jaylasqanda AQ kesindi jetpey qalıwı múmkin. Bul jaǵdayda P noqatqa $a_0, a_1 = a_0 + \frac{a_1}{10}$ san «kemisi» menen, al $a_0, a_1 + \frac{1}{10} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}$ san «artıǵı» menen sáykes qoyıladı.

Bul jaǵdayda P noqatqa sáykes keletuǵın sandı izlew procesi dawam etedi. Bul processti n mártebe tákirarlaǵanda jáne mına eki jaǵday bolıwı múmkin:

1_n) OP kesindide OE kesindi a_0 mártebe, OE kesindiniń $\frac{1}{10}$ bólegi a_1 mártebe, OE kesindiniń $\frac{1}{10^2}$ bólegi a_2 mártebe h. t. b., OE kesindiniń $\frac{1}{10^n}$ bólegi a_n mártebe jaylasadı. Bul jaǵdayda P noqatqa

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n}$$

san sáykes qoyıladı.

2_n) P noqatqa sáykes keletuǵın sandı izlew procesi tamamlanbaydı. Bul jaǵdayda P noqatqa

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n}$$

san «kemisi» menen al

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n + 1}{10^n}$$

san «artıǵı» menen sáykes qoyıladı.

Bul process sheksiz dawam ecin deyik. Onda P noqatqa sáykes keletuǵın sandı tabıw ushın joqarıda alınǵan sanlardan ($\forall n \in N$ ushın)

$$C = \left\{ r : r \in Q, \quad r < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_{n+1}}{10^n} \right\},$$

$$C' = \left\{ r : r \in Q, \quad r > a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} \right\}$$

kópliklerdi dúzemiz. Bul kóplikler Q kóplikte (C, C') kesim orınlaydı hám bul kesim bazı bir α haqıyqıy (irracional) sandı anıqlaydı: $\alpha = (C, C')$. P noqatqa áne usı α sandı sáykes qoyamız.

P noqat O noqattan shepte jatqan jaǵdayda da oǵan sáykes keletuǵın haqıyqıy san tabıladı, bul san teris boladı.

Solay etip, tuwrı sıızıqta alınğan hár bir noqatqa bir haqıyqıy san sáykes qoyıladı eken.

Demek, tuwrı sıızıqta alınğan hár bir noqatqa bir haqıyqıy san hám kerisinshe, hár bir haqıyqıy sanğa tuwrı sıızıqta bir noqat sáykes keledi:

$$P_{\alpha} \rightarrow \alpha, \quad \alpha \rightarrow P_{\alpha} \quad (\alpha \in R, \quad P_{\alpha} \in I).$$

8-§. Shegaralanğan sanlı kóplikler

Bul paragrafta biz qálegen haqıyqıy sanlar kópligin qaraymız, bunday kóplikti $\{x\}$ simvolı menen belgileymiz, al bul kóplikke derek sanlardı bul kópliktiń *elementleri* yaki *noqatlari* dep ataymız. Qaralatuğın $\{x\}$ kópliktiń keminde bir elementke iye bolıwın (bos kóplik bolmawın) talap etemiz.

8.1. Joqarıdan hám tómennen shegaralanğan kóplikler.

1- a n ı q l a m a. Eger $\forall x \in \{x\}$ element $x \leq M$ ($x \geq m$) teńsizlikti qanaatlandıratuğın M sanı (m sanı) tabılsa, onda $\{x\}$ kóplik *joqarıdan* (*tómennen*) *shegaralanğan* dep, al M sanı *joqarğı* shegarası (m sanı *tómengi shegarası*) dep ataladı.

Qálegen joqarıdan (tómennen) shegaralanğan $\{x\}$ kóplik sheksiz kóp joqarğı (tómengi) shegarağa iye. Haqıyqatında da, eger M sanı (m sanı) $\{x\}$ kópliktiń joqarğı (tómengi) shegaralarınıń biri bolsa, onda $\forall M' > M$ ($\forall m' < m$) sanı da kópliktiń joqarı (tómengi) shegarası boladı. Mısalı, hámme teris (oń) haqıyqıy sanlar kópligi joqarıdan (tómennen) shegaralanğan. Bul kópliktiń joqarğı (tómengi) shegarası sıpatında qálegen teris emes (oń emes) sandı alıw múmkin. Natural sanlar (oń emes pútin sanlar) kópligi tómennen (joqarıdan) shegaralanğan. Bul kópliktiń tómengi (joqarğı) shegarası sıpatında qálegen $m \leq 1$ ($M \geq 0$) sandı alıw múmkin.

2- a n ı q l a m a. Hám joqarıdan, hám tómennen shegaralanğan kóplik *shegaralanğan kóplik* dep ataladı.

Basqasha aytqanda, eger $\forall x \in \{x\}$ element $m \leq x \leq M$) teńsizliklerdi qanaatlandıratuǵın M hám m sanları tabılsa, onda $\{x\}$ kóplik *shegaralanǵan kóplik* dep ataladı. Solay etip, sanlar kósherindegi shegaralanǵan kóplik degende tolıǵı menen bazı bir kesindige jaylastırıw múmkin bolǵan kóplikti túsinemiz.

Joqarıdan shegaralanǵan kópliktiń joqarı shegaralarınń ishindegi eń kishisiniń hám tómennen shegaralanǵan kópliktiń tómengi shegaralarınń ishindegi eń úlkeniniń bar bolıwı haqqındaǵı máseleniń qoyılıwı tábiyiy.

3- a n ı q l a m a. Joqarıdan (tómennen) shegaralanǵan $\{x\}$ kópliktiń joqarǵı shegaralarınń eń kishisi (tómengi shegaralarınń eń úlkeni) bul kópliktiń *dál joqarǵı (dál tómengi) shegarası* dep ataladı hám $\sup\{x\}$ ($\inf\{x\}$) simvoli menen belgilenedi.

Bul anıqlamanı basqasha beriwge de boladı: Eger tómendegi eki shárt orınlansa, onda $\bar{x}$ sanı ($\underline{x}$ sanı) joqarıdan (tómennen) shegaralanǵan $\{x\}$ kópliktiń *dál joqarǵı shegarası (dál tómengi shegarası)* dep ataladı:

- 1) $\forall x \in \{x\}$ element $x \leq \bar{x}$ ($x \geq \underline{x}$) teńsizlikti qanaatlandıradı;
- 2) $x' < \bar{x}$ ($x'' > \underline{x}$) shártti qanaatlandıratuǵın qálegen $x' \in \{x\}$ ($x'' \in \{x\}$) element ushın $x > x'$ ($x < x''$) teńsizlikti qanaatlandıratuǵın $x \in \{x\}$ element bar.

Bul anıqlamadaǵı 1) shárt $\bar{x}$ sanı ($\underline{x}$ sanı) $\{x\}$ kópliktiń joqarǵı (tómengi) shegaralarınń biri ekenin, al 2) shárt bul joqarǵı shegaralardıń eń kishisi (tómengi shegaralardıń eń úlkeni) bolıp, onı kishireytiw (úlkeytiw) múmkin emesligin bildiredi.

Kópliktiń dál joqarǵı (dál tómengi) shegarası ózine derek bolıwı da, bolmawı da múmkin.

8.2. Kópliktiń dál shegaralardıń bar bolıwı.

1- t e o r e m a (tiykarǵı teorema). *Joqarıdan (tómennen) shegaralanǵan kópliktiń dál joqarǵı (dál tómengi) shegarası bar.*

D á l i l l e w: Biz qálegen joqarıdan shegaralanǵan kópliktiń dál joqarǵı shegarası bar ekenin dálilleymiz. Hár bir tómennen shegarlanǵan kópliktiń dál tómengi shegarası bar ekeni usıǵan uqsas dálillenedi.

Meyli, $\{x\}$ kóplik joqarıdan shegaralanǵan bolsın, yaǵnıy $\forall x \in \{x\}$ element $x \leq M$ teńsizlikti qanaatlandıratuǵın M sanı tabılsın hám $\{x\}$ kópliktiń elementleri arasında eń úlkeni bar bolsın. Onı x_0 dep belgileyik. Demek, $\forall x \in \{x\}$ ushın $x \leq x_0$ bolıp, x_0 san $\{x\}$ kópliktiń joqarǵı shegaralarınń biri boladı. Biraq $\{x\}$ kópliktiń joqarǵı shegarası bolatuǵın hár bir M san x_0 sannan kishi emes, yaǵnıy $x_0 \leq M$, sebebi $x_0 \in \{x\}$. Al bul x_0 san $\{x\}$ kópliktiń joqarǵı shegaralarınń eń kishisi bolatuǵının bildiredi. Bul jaǵdayda teorema dálillendi.

Endi $\{x\}$ kópliktiń elementleri arasında eń úlkeni joq bolǵan jaǵdaydı qaraymız. $\{x\}$ kópliktiń joqarı shegaralarınan dúzilgen kóplikti F' dep, al F' kóplikke derek bolmaǵan hámme haqıyqıy sanlar kópligin F dep belgileyimiz. $\{x\} \subset F$ boladı. F hám F' kóplikler R haqıyqıy sanlar kópliginde (F, F') kesim orınladı. Dedekind teoreması boyınsha bul kesim bazı bir haqıyqıy sandı anıqlaydı: $\alpha = (F, F')$. Bul san F kópliktiń, demek, $\{x\} \subset F$ bolǵanlıqtan $\{x\}$ kópliktiń de joqarǵı shegarası, yaǵnıy $\alpha \in F'$. Sonıń menen birge bul san F' kópliktiń elementleriniń eń kishisi. Teorema dálillendi.

S a l d a r. *Hár bir shegaralanǵan $\{x\}$ kópliktiń hám dál joqarǵı, hám dál tómengi shegaraları bar hám $\inf \{x\} \leq \sup \{x\}$.*

8.3. Kópliktiń dál joqarǵı hám dál tómengi shegaralarınń qásiyetleri.

1⁰. Eger $\{x\}$ kóplik joqarıdan shegaralanǵan kóplik hám $E \subset \{x\}$ bolsa, onda $\sup E \leq \sup \{x\}$.

D á l i l l e w. Tiýkargı teorema boyınsha $\{x\}$ kópliktiń dál joqargı shegarası bar: $\sup\{x\} = \alpha$. Endi $E \subset \{x\}$ bolǵanlıqtan E kóplik te joqarıdan shegaralanǵan, meyli, $\sup E = \alpha_1$ bolsın. Biz $\alpha_1 \leq \alpha$ bolatuǵının dálilleymiz. Kerisinshe uyǵarayıq, yaǵnıy $\alpha_1 > \alpha$ bolsın. Onda $\alpha_1 > a > \alpha$ bolatuǵın a racional san tabıladı. α_1 san E kópliktiń dál joqarı shegarası bolǵanlıqtan $\alpha_1^* > a$ bolatuǵın $\alpha_1^* \in E$ san tabıladı. Demek, $\alpha_1^* > \alpha$ boladı. Biraq, ekinshi tárepten, $E \subset \{x\}$ hám $\sup\{x\} = \alpha$ bolǵanlıqtan $\alpha_1^* \leq \alpha$ teńsizlik orınlı. Qarama- qarsılıqqa kelemiz. Solay etip, $\alpha_1 \leq \alpha$ yaǵnıy $\sup E \leq \sup\{x\}$ boladı.

2⁰. Eger $\{x\}$ kóplik tómennen shegaralanǵan kóplik hám $E \subset \{x\}$ bolsa, onda

$$\inf E \geq \inf \{x\}.$$

Bul qásiyet 1⁰- qásiyetey dálillenedi.

3⁰. Eger $\{x\}$ kóplik shegaralanǵan kóplik hám $E \subset \{x\}$ bolsa, onda

$$\inf \{x\} \leq \inf E \leq \sup E \leq \sup \{x\}.$$

4⁰. Eger $\forall x \in \{x\}$ ushın $x \leq \alpha$ teńsizlik orınlansa, onda $\sup\{x\} \leq \alpha$ teńsizlik orınlı boladı

D á l i l l e w. $\{x\}$ kópliktiń hámme elementleri menen α sannan E kóplik dúzemiz: $E = \{x\} \cup \{\alpha\}$. Bunnan $\{x\} \subset E$ hám 1⁰- qásiyet boyınsha $\sup\{x\} \leq \sup E$ teńsizlik orınlı. Bul teńsizlikten $\sup E = \alpha$ bolǵanlıqtan $\sup\{x\} \leq \alpha$ teńsizlik kelip shıǵadı.

5⁰. Eger $\forall x \in \{x\}$ ushın $x \geq \beta$ teńsizlik orınlansa, onda $\inf\{x\} \geq \beta$ teńsizlik orınlı boladı.

Bul qásiyet 4⁰- qásiyetey dálillenedi.

6⁰. Eger $\{x\}$ kóplik joqarıdan shegaralanǵan hám $\sup\{x\} = \alpha$ bolsa, onda $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $x' > \alpha - \varepsilon$ bolatuǵın $x' \in \{x\}$ element bar.

D á l i l l e w. Kerisinshe uyǵarayıq, yaǵnıy $\forall x' \in \{x\}$ ushın $x' \leq \alpha - \varepsilon$ bolatuǵın $\varepsilon > 0$ san tabılsın. Onda 4⁰- qásiyet boyınsha $\sup\{x\} \leq \alpha - \varepsilon$, yaǵnıy $\alpha \leq \alpha - \varepsilon$ teńsizlik orınlı boladı. Bul qarama- qarsılıq tastıyıqlawdıń dálili boladı.

7⁰. Eger $\{x\}$ kóplik tómennen shegaralanǵan hám $\inf\{x\} = \beta$ bolsa, onda $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $x'' < \beta + \varepsilon$ bolatuǵın $x'' \in \{x\}$ element bar.

Bul qásiyet 7⁰- qásiyetke uqsas dállillenedi.

R haqıyqıy sanlar kópligine $\forall x \in R$ ushın $x > -\infty$, $x < +\infty$ qásiyetler menen $-\infty$ hám $+\infty$ simvolların biriktirip, $\overline{R} = R \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ kóplikti hasıl kılamız.

Bul simvollarıń kiritiliwi shegaralanbaǵan kópliklerdiń de dál joqarǵı hám dál tómengi shegaraların kiritiwge múmkinlik beredi.

Eger $\{x\}$ kóplik joqarıdan shegaralanbaǵan bolsa $\sup\{x\} = +\infty$, al tómennen shegaralanbaǵan bolsa, $\inf\{x\} = -\infty$ dep alınadı.

8.4. Aralıqlar. Sanlar kósheriniń bir neshe úles kópliklerin qaraymız.

1⁰. $[a, b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$ - $[a, b]$ kesindisi (segmenti);

2⁰. $[a, b) = \{x \in R : a \leq x < b\}$ - (a, b) yarım kesindisi (yarım intervalı, yarım segmenti);

$(a, b] = \{x \in R : a < x \leq b\}$ - $(a, b]$ yarım kesindisi (yarım intervalı, yarım segmenti);

3⁰. $(a, b) = \{x \in R : a < x < b\}$ - (a, b) intervalı;

4⁰. $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) intervalı a noqattıń ε - dógeregi dep ataladı.

5⁰. a noqattı óz ishine alıwshı qálegen interval a noqattıń dógeregi dep ataladı.

6⁰. $[a, +\infty) = \{x \in R : x \geq a\}$ - $[a, +\infty)$ nurı;

7⁰. $(a, +\infty) = \{x \in R : x > a\}$ - $(a, +\infty)$ yarım tuwrı sızıǵı ;

8⁰. $(-\infty, +\infty) = \{x \in R : -\infty < x < +\infty\}$ - sanlar kósheri.

2- BAP

SANLI IZBE-IZLIK HÁM ONÍN LIMITI

1-§. Sanlı izbe- izlik

1.1. Sanlı izbe- izlik túsinigi. 1- a n ı q l a m a. Eger hár bir $n \in N$ natural sanǵa málim nızam boyınsha bazı bir x_n haqıyqıy san sáykes qoyılsa, onda

$$\{x_n\}: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (1)$$

nomerlengen haqıyqıy sanlar kópligi *sanlı izbe- izlik* yaqı *izbe- izlik* dep ataladı. Hár bir x_n can (1) izbe- izliktiń *elementi* dep ataladı.

M ı s a l l a r. 1). $x_n = \frac{1}{n}: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

2) $y_n = (-1)^n: -1, 1, -1, 1, \dots, -1, 1, \dots$

3) $z_n = \frac{(-1)^n}{n}: -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^n}{n}, \dots$

4) $u_n = 1: 1, 1, \dots, 1, \dots$

5) $0,3; 0,33; 0,333; \dots, \underbrace{0,333\dots 3}_n; \dots$

6) $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$

7) $3, 1, 4, \dots$

Keltirilgen mısallardan kórinip turǵanıday ayırım izbe- izliklerdiń ulıwma aǵzaları formulalar arqalı ańlatılıp, olardıń hámme elementleri usı formulalar járdeminde tabılsa, ayırım izbe- izliklerdiń elementlerin málim qaǵıydalar járdeminde tabıw múmkin. Mısalı, 6- mısalda keltirilgen izbe- izliktiń elementleri

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_n = x_{n-2} + x_{n-1} \quad (n \geq 3)$$

qaǵıyda menen tabıladı. Bunday qaǵıydalar, ádette, *rekurrent qaǵıydalar* dep ataladı. Izbe- izlik elementleri *Fibonachchi sanları* dep ataladı.

7- mısalda keltirilgen izbe- izlik π sanınıń, sáykes túrde, birinshi, ekinshi h. t. b. cifraları. π irracional san bolıp, ol sheksiz, periodsız onlıq bólshek

kórinisinde jazılatuǵını málim, izbe- izlik elementlerin tabıwdıń málim qaǵıydası joq.

Izbe- izliktiń elementleriniń sanı sheksiz. bolıp, bul izbe- izlik elementlerinen dúzilgen kóplik sheksiz kóplik te, shekli kóplik te bolıwı múmkin. Mısalı, $x_n = \frac{1}{n}: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ izbe- izliktiń elementlerinen

dúzilgen $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ kóplik- sheksiz kóplik, al

$y_n = (-1)^n: -1, 1, -1, 1, \dots, -1, 1, \dots$ izbe- izliktiń elementlerinen dúzilgen $\{-1, 1\}$ kóplik- shekli kóplik.

(1) izbe- izlik penen birge

$$\{y_n\}: y_1, y_2, \dots, y_n, \dots \quad (2)$$

izbe- izlikti qaraymız. $\{x_n + y_n\}: x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots$ izbe- izlik (1)

hám (2) izbe- izliklerdiń qosındısı, $\{x_n - y_n\}: x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n, \dots$ izbe-

izlik- ayırması, $\{x_n \cdot y_n\}: x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \dots, x_n \cdot y_n, \dots$ izbe- izlik- kóbeymesi hám

$\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}: \frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \dots, \frac{x_n}{y_n}, \dots (\forall n \in N \quad y_n \neq 0)$ izbe- izlik- qatnası dep ataladı.

E s k e r t i w. Eger $\{y_n\}$ izbe- izliktiń tek shekli sandaǵı elementleri nol`ge teń bolsa, onda  $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$  qatnası hámme  $y_n$  elementler nol`den ózgeshe

bolatuǵın nomerden baslap anıqlaw múmkin.

1.2. Shegaralanǵan izbe- izlikler. Hár bir izbe- izliktiń elementleri bazı bir sanlı kóplik dúzedi. Joqarıdan shegaralanǵan, tómennen shegaralanǵan, shegaralanǵan kóplik túsiniklerine tiykarlanıp, biz tómendegi anıqlamalargá kelemiz.

Meyli, bazı bir $\{x_n\}$ izbe- izlik berilgen bolsın.

2- a n ı q l a m a. Eger $\forall n$ nomer ushın $x_n \leq M$ ($x_n \geq m$) teńsizlik orınlı bolatuǵın M sanı (m sanı) tabılsa, onda bunday izbe- izlik *joqarıdan*

(tómennen) shegaralanğan izbe- izlik dep, al M sanı (m sanı) $\{x_n\}$ izbe- izliktiń joqarǵı (tómengi) shegarası dep ataladı.

3- a n ı q l a m a. Hám tómennen, hám joqarıdan shegaralanğan izbe- izlik *shegaralanğan* izbe- izlik dep ataladı.

Basqasha aytqanda, eger $\forall n$ nomer ushın $m \leq x_n \leq M$ teńsizlikler orınlı bolatuǵın m hám M sanları tabılsa, onda bunday izbe- izlik *shegaralanğan* izbe- izlik dep ataladı.

Bul anıqlamanı basqasha formada da beriw múmkin: eger $\forall n$ nomer ushın $|x_n| \leq M$ teńsizlik orınlı bolatuǵın $M > 0$ san tabılsa, onda $\{x_n\}$ *shegaralanğan* izbe- izlik dep ataladı.

Elementlerinen dúzilgen sanlı kóplik joqarıdan shegaralanğan, tómennen shegaralanğan hám shegaralanğan kóplik bolatuǵın izbe- izlik, sáykes túrde, joqarıdan shegaralanğan, tómennen shegaralanğan hám shegaralanğan izbe- izlik boladı.

Shegaralanğan izbe- izlik degende hámme elementlerin bazı bir kesindiniń ishine tolıq jaylastırıw múmkin bolğan izbe- izlikti túsinemiz.

Elementlerinen dúzilgen sanlı kópliktiń dál joqarǵı (dál tómengi) shegarası $\{x_n\}$ izbe- izliktiń dál joqarǵı (dál tómengi) shegarası dep ataladı hám $\sup_n \{x_n\}$ ($\inf_n \{x_n\}$) simvolı menen belgilenedi.

4- a n ı q l a m a. $\forall A > 0$ san ushın (bul san qanday úlken san bolsa da) $\{x_n\}$ izbe- izliktiń $|x_n| > A$ teńsizlikti qanaatlandıratuǵın keminde bir elementi bar bolsa, onda bul izbe- izlik *shegaralanbağan* izbe- izlik dep ataladı.

Bul anıqlama kóz qarasınan tek joqarıdan yaki tek tómennen shegaralanğan hár bir izbe- izlik shegaralanbağan izbe- izlik boladı.

2-§. Izbe- izliktiń limiti

5- a n ı q l a m a. Eger $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $\exists N = N(\varepsilon)$ nomer tabılıp, $n > N$ nomerler ushın $|x_n - a| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı bolsa, a san $\{x_n\}$ izbe- izliktiń *limiti* dep ataladı hám $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ yaki $x_n \rightarrow a$ dep jazıladı.

Shekli limitke iye izbe- izlik *jıynaqlı* izbe- izlik dep ataladı. Jıynaqlı emes (yaǵnıy shekli limitke iye bolmaǵan) izbe-izlik *tarqalıwshı* izbe- izlik dep ataladı.

Ádette, $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ interval a noqattıń ε - dógeregi dep ataladı hám $U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ dep belgilenedi.

$|x_n - a| < \varepsilon$ teńsizlikti $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$ (1) teńsizlik kórinisinde jazıw múmkin. Geometriya tilinde (1) teńsizlik $n > N$ nomerli x_n elementler a noqattıń ε - dógereginde jatatuǵının bildiredi. Bul bizge jıynaqlı izbe- izliktiń jáne bir anıqlamasın beriwge múmkinshilik tuwdıradı.

6- a n ı q l a m a. Qálegen ε - dógereginde $\{x_n\}$ izbe- izliktiń bazı bir nomerden (álbette, $\varepsilon > 0$ sanına ǵárezli) baslap hámme elementleri jatatuǵın a noqat tabılsa, onda a san $\{x_n\}$ izbe- izliktiń *limiti* dep, al $\{x_n\}$ izbe- izlik *jıynaqlı* izbe- izlik dep ataladı.

E s k e r t i w. Jıynaqlı hám tarqalıwshı izbe- izliktiń anıqlamasınan izbe- izliktiń elementlerine qálegen shekli sandaǵı elementlerdi biriktiriw yaki shekli sandaǵı elementlerdi shıǵarıp taslaw bul izbe- izliktiń jıynaqlılıǵına (tarqalıwshılıǵına)) tásir kórsetpeytuǵını kelip shıǵadı.

7- a n ı q l a m a. Eger $\forall a$ san hám $\forall N$ san ushın $\exists \varepsilon > 0$ san hám $\exists n > N$ nomer tabılıp, $|x_n - a| \geq \varepsilon$ teńsizlik orınlı bolsa, $\{x_n\}$ izbe- izlik *limitke iye emes* dep ataladı.

M ı s a l l a r. № 1. $x_n = \frac{1}{n}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ izbe- izliktiń limiti nolge teń ekenin kórsetiń.

Sh e sh i w. Izbe- izliktiń anıqlaması boyınsha $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $n > N$ nomerler ushın $\frac{1}{n} < \varepsilon$ (2) teńsizlik orınlı bolatuǵın $N = N(\varepsilon)$ nomer kórsetiw jetkilikli. (2) teńsizlikten $n > \frac{1}{\varepsilon}$ teńsizlikti alamız. Bunnan $N = N(\varepsilon)$ nomerdi $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$ dep alıwımız múmkin ekeni kelip shıǵadı, bul jerde $[\frac{1}{\varepsilon}] - \frac{1}{\varepsilon}$ oń sannıń pútin bólegi.

№ 2. $x_n = (-1)^n: -1, 1, -1, 1, \dots, -1, 1, \dots$ izbe- izlik limitke iye emesligin kórseting.

Sh e sh i w. Kerisinen dálilleyemiz. Meyli, berilgen izbe- izlik shekli a limitke iye bolsın. Onda izbe- izliktiń anıqlaması boyınsha $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $\exists N = N(\varepsilon)$ nomer tabılıp, $n > N$ nomerler ushın $|(-1)^n - a| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı boladı. Bunnan jup n nomerler ushın $|1 - a| < \varepsilon$ teńsizlik, al taq n nomerler ushın $|-1 - a| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı bolatuǵını kelip shıǵadı. Bul teńsizliklerden

$$2 = |(1 - a) + (-1 - a)| \leq |1 - a| + |-1 - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

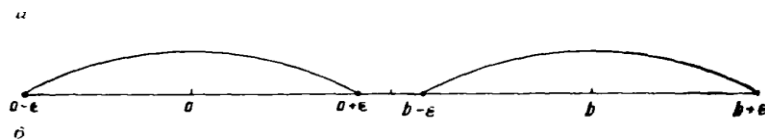
yaǵnıy $2 < 2\varepsilon$ teńsizlikti alamız. Bul teńsizlik tek $\varepsilon > 1$ sanlar ushın orınlı bolıp, $0 < \varepsilon \leq 1$ sanlar ushın orınlı emes. Bul anıqlamadaǵı $\varepsilon > 0$ sannıń qálegen qılıp saylap alınıwına qarama- qarsı. Demek, berilgen izbe- izlik dimitke iye emes.

3-§. Jıynaqlı izbe- izliklerdiń qásiyetleri

1- t e o r e m a. *Jıynaqlı izbe- izlik jalǵız bir limitke iye.*

D á l i l l e w. Bul teoremanı dálillew ushın bizge tómendegi lemma kerek boladı.

L e m m a. $a \neq b$ noqatlardıń $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$ bolǵan $U_\varepsilon(a)$ hám $U_\varepsilon(b)$ dógerekleri bar (1- súwret).



1- súwret

Teoremanı kerisinen dálilleyimiz. Meyli, $\{x_n\}$ izbe- izlik eki shekli limitke iye bolsın: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ ($a \neq b$). Lemma boyınsha a hám b noqatlardıń $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$ bolǵan $U_\varepsilon(a)$ hám $U_\varepsilon(b)$ dógerekleri bar. Izbe- izliktiń limitiniń anıqlaması boyınsha $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $\exists N' = N'(\varepsilon)$ nomer tabılıp, $n > N'$ nomerler ushın $|x_n - a| < \varepsilon$ teńsizlik hám $\exists N'' = N''(\varepsilon)$ nomer tabılıp, $n > N''$ nomerler ushın $|x_n - b| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı boladı. $N = \max(N', N'')$ dep alsaq, $n > N$ nomerler ushın hám $|x_n - a| < \varepsilon$ teńsizlik, hám $|x_n - b| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı boladı. Nátiyjede izbe- izliktiń $n > N$ nomerli elementleri bir waqıtta hám $U_\varepsilon(a)$ dógerekke, hám $U_\varepsilon(b)$ dógerekke derek. Bul $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$ shártke qarama- qarsı. ▲

2- t e o r e m a. *Jıynaqlı izbe- izlik shegaralanǵan.*

D á l i l l e w. Meyli, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ bolsın. Izbe- izliktiń anıqlaması boyınsha $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $\exists N = N(\varepsilon)$ nomer tabılıp, $n > N$ nomerler ushın $|x_n - a| < \varepsilon$, yaǵnıy $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ teńsizlik orınlı. $|a - \varepsilon|, |a + \varepsilon|, |x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|$ sanlardıń eń úlkenin M dep belgilesek, $\forall n$ nomer ushın $|x_n| \leq M$ teńsizlik orınlı boladı. Bul $\{x_n\}$ izbe- izliktiń shegaralanǵanlıǵın bildiredi. ▲

E s k e r t i w. Bul teoremaǵa keri tastıyıqlaw, ulıwma alǵanda, orınlı emes: qálegen shegaralanǵan izbe- izlik jıynaqlı bolıwı shárt emes.

Mısalı, $x_n = (-1)^n$: $-1, 1, -1, 1, \dots, -1, 1, \dots$ izbe- izlik shegaralanǵan, biraq limitke iye emes.

3- t e o r e m a. Eger jıynaqlı izbe- izliktiń hámme elementleri (eń bolmaǵanda bazı bir nomerden baslap) $x_n \geq p$ ($x_n \leq q$) teńsizlikti qanaatlandırsa, onda bul izbe- izliktiń a limiti de usı teńsizlikti qanaatlandıradı: $a \geq p$ ($a \leq q$).

D á l i l l e w. Meyli, $\{x_n\}$ izbe- izliktiń hámme elementleri (eń bolmaǵanda bazı bir N' nomerden baslap) $x_n \geq p$ teńsizlikti qanaatlandırsın hám $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ bolsın, biz bul izbe- izliktiń a limiti ushın $a \geq p$ teńsizlik orınlı bolatuǵının kórsetemiz.

Teoremanı kerisinen dálilleymiz. Meyli, $a < p$ bolsın. Onda izbe- izliktiń limitiniń anıqlaması boyınsha $\varepsilon = p - a$ san ushın $\exists N = N(\varepsilon)$ nomer tabılıp (bul nomerdi N' nomerden úlken bolatuǵın qılıp alamız), $n > N$ nomerler ushın $|x_n - a| < \varepsilon$, yaǵnıy $|x_n - a| < p - a$ teńsizlik orınlı. Bul teńsizlik $-(p - a) < x_n - a < p - a$ teńsizliklerge ekvivalent. Bul teńsizliklerdiń ekinshisinen $n > N$ nomerler ushın $x_n < p$ teńsizlik kelip shıǵadı. Al bul teoremanıń shártine qarama- qarsı. Bul jaǵday ushın teorema dálillendi.

$x_n \leq q$ bolǵan jaǵday da usıǵan uqsas dálillenedi. ▲

E s k e r t i w. Eger jıynaqlı izbe- izliktiń hámme elementleri (eń bolmaǵanda bazı bir nomerden baslap) $x_n > p$ ($x_n < q$) qatal teńsizlikti qanaatlandırsa, onda bul izbe- izliktiń a limiti de $a > p$ ($a < q$) qatal teńsizlikti qanaatlandırıwı shárt emes.

Mısalı, $x_n = 1/n$ izbe- izliktiń hámme elementleri oń sanlar, biraq bul izbe- izliktiń limiti nolge teń: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Mına teorema da 3- teoremaday dálillenedi.

4- t e o r e m a. Eger jıynaqlı izbe- izliktiń a limiti $a > p$ ($a < q$) teńsizlikti qanaatlandırsa, onda bul izbe- izliktiń hámme elementleri (eń

bolmağanda bazı bir nomerden baslap) $x_n > p$ ($x_n < q$) teńsizlikti qanaatlandıradı.

S a l d a r. Eger jıynaqlı izbe- izliktiń limiti oń (teris) bolsa, onda bul izbe- izliktiń hámme elementleri (eń bolmağanda bazı bir nomerden baslap) oń (teris) sanlar boladı.

5- t e o r e m a. Eger jıynaqlı $\{x_n\}$ hám $\{y_n\}$ izbe- izliklerdiń hámme elementleri (eń bolmağanda bazı bir nomerden baslap) $x_n \leq y_n$ ($x_n \geq y_n$) teńsizlikti qanaatlandırsa, onda bul izbe-izliklerdiń limitleri de usı teńsizlikti qanaatlandıradı: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$).

D á l i l l e w. Meyli, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ bolsın. $a \leq b$ bolatuğının dálilleymiz.

Teoremanı kerisinen dálilleymiz. Meyli, teoremanıń shártleri orınlanganda $a > b$ bolsın. Onda $a > c > b$ bolatuğın c san bar. Demek, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ hám $a > c$.

4- teorema boyınsha eń bolmağanda $\exists N'$ nomer tabılıp, $n > N'$ nomerler ushın $x_n > c$. Sonıń menen birge $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ hám $b < c$. 4- teorema boyınsha eń

bolmağanda $\exists N''$ nomer tabılıp, $n > N''$ nomerler ushın $y_n < c$. Eger $N = \max(N', N'')$ dep alsaq, $n > N$ nomerler ushın hám $x_n > c$, hám $y_n < c$ teńsizlik orınlı boladı. Bunnan $n > N$ nomerler ushın $x_n > y_n$ bolatuğın kelip shıǵadı. Bul teoremanıń shártine qarama- qarsı.

$a \geq b$ teńsizlik te usıǵan uqsas dálillenedi. ▲

S a l d a r. Eger jıynaqlı izbe- izliktiń hámme elementleri bazı bir kesindige derek bolsa, onda bul izbe- izliktiń limiti de usı kesindige derek boladı.

6- t e o r e m a. Meyli, $\{x_n\}$ hám $\{y_n\}$ - limitleri a sanǵa teń jıynaqlı izbe- izlikler bolsın. Eger $\{z_n\}$ izbe- izliktiń hámme elementleri (eń bolmağanda bazı

bir nomerden baslap) $x_n \leq z_n \leq y_n$ teńsizliklerdi qanaatlandırsa, onda $\{z_n\}$ izbe- izlik te jıynaqlı bolıp, limiti a sanǵa teń.

D á l i l l e w. Izbe- izliktiń limitiniń anıqlaması boyınsha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N' = N'(\varepsilon) \quad n > N' \quad |x_n - a| < \varepsilon,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N'' = N''(\varepsilon) \quad n > N'' \quad |y_n - a| < \varepsilon.$$

Eger $N = \max(N', N'')$ dep alsaq, onda $n > N$ nomerler ushın hám $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, hám $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$ teńsizlikler orınlı boladı. Teoremaniń shártinen $a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon$ teńsizliklerge iye bolamız. Bul teńsizliklerden $a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$, yaǵnıy $|z_n - a| < \varepsilon$ teńsizlik kelip shıǵadı.

Demek $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ boladı eken. ▲

Bul teorema, ádette, izbe- izlikler ushın *eki jaqlap shegaralaw principini* dep ataladı.

3.1. Sheksiz kishi izbe- izlikler. 8- a n ı q l a m a. Limiti nolge teń izbe- izlik *sheksiz kishi izbe- izlik* dep ataladı.

M ı s a l l a r. № 1. $\alpha_n = \frac{1}{n}$ izbe- izliktiń limiti nolge teń ekenin kórsettik

(2- § № 1- mısál). Demek, bul izbe- izlik sheksiz kishi izbe- izlik.

№ 2. $\alpha_n = q^n$ ($|q| < 1$) izbe- izliktiń sheksiz kishi izbe- izlik ekenin kórsetiń.

Sh e s h i w. $|q| < 1$ teńsizlikten $\frac{1}{|q|} > 1$ ($q \neq 0$) teńsizlik kelip shıǵadı.

Bunnan $\frac{1}{|q|} = 1 + \alpha$ ($\alpha > 0$) hám $\frac{1}{|q|^n} = (1 + \alpha)^n$ ($n \in N$) dep jazıwımız

múmkın. $(1 + \alpha)^n \geq 1 + n \cdot \alpha$ Bernulli teńsizliginen paydalanıp,

$|q|^n \leq \frac{1}{1 + n \cdot \alpha} < \frac{1}{n \cdot \alpha}$ teńsizlikke iye bolamız.

Endi $\forall \varepsilon > 0$ san ushın izbe- izliktiń limitiniń anıqlaması boyınsha $n > N$ nomerler ushın $|q|^n < \varepsilon$ bolatuǵın $N = N(\varepsilon)$ nomerdi kórsetiwimiz kerek.

Bunıń ushın $\frac{1}{n \cdot \alpha} < \varepsilon$ teńsizlikten $n > \frac{1}{\alpha \cdot \varepsilon}$ teńsizlikti alamız hám

$N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\alpha \cdot \varepsilon} \right] + 1 = \left[\frac{|q|}{1 - |q|} \right] + 1$ dep alıw jetkilikli.

Izbe-izliktiń limitiniń anıqlamasınan paydalanıp mına teoremanı dálillew qıyın emes.

7- t e o r e m a. *Eki sheksiz kishi izbe-izliktiń qosındısı (ayırması) sheksiz kishi izbe-izlik.*

S a l d a r. *Shekli sandaǵı sheksiz kishi izbe-izliklerdiń algebralıq qosındısı sheksiz kishi izbe-izlik.*

8- t e o r e m a. *Shegaralanǵan izbe-izliktiń sheksiz kishi izbe-izlikke kóbeymesi sheksiz kishi izbe-izlik.*

D á l i l l e w. Meyli, $\{x_n\}$ - shegaralanǵan, al $\{\alpha_n\}$ sheksiz kishi izbe-izlik bolsın. Shegaralanǵan izbe-izlik anıqlaması boyınsha $\forall n \in N$ ushın $|x_n| \leq M$ teńsizlik orınlanatuǵın $M > 0$ san bar. Sheksiz kishi izbe-izlik anıqlaması boyınsha $\forall \varepsilon > 0$ san alınsa da $\varepsilon/A > 0$ san ushın $\exists N$ nomer tabılıp, $n > N$ nomerler ushın $|\alpha_n| < \varepsilon/A$ teńsizlik orınlı. Kóbeymeniń moduli moduller kóbeymesine teń ekenin esapqa alıp, $n > N$ nomerler ushın $|x_n \cdot \alpha_n| = |x_n \cdot \alpha_n| < A \cdot \frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon$ teńsizlik orınlı bolatuǵının kóremiz. Al bul $\{x_n \cdot \alpha_n\}$ izbe-izlik sheksiz kishi izbe-izlik ekenin bildiredi. ▲

S a l d a r. *Sheksiz kishi izbe-izliklerdiń kóbeymesi sheksiz kishi izbe-izlik.*

9- t e o r e m a. $\{x_n\}$ izbe-izliktiń limiti a sanǵa (shekli) teń bolıwı ushın $\alpha_n = x_n - a$ izbe-izlik sheksiz kishi izbe-izlik bolıwı zárúr hám jetkilikli.

Haqıyqattan da, meyli, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ bolsın. Izbe-izliktiń limitiniń anıqlaması boyınsha $\forall \varepsilon$ san ushın $\exists N = N(\varepsilon)$ nomer tabılıp, $n > N$ nomerler

ushın $|x_n - a| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı. Eger $\alpha_n := x_n - a$ dep belgilesek, onda $|\alpha_n| < \varepsilon$ bolıp, bul $\{\alpha_n\}$ - sheksiz kishi izbe- izlik bolatuǵının bildiredi.

Endi, meyli, $\{x_n\}$ izbe- izlik hám a san berilgen bolıp, $\alpha_n = x_n - a$ izbe- izlik sheksiz kishi izbe- izlik bolsın. Onda $\forall \varepsilon$ san ushın $\exists N = N(\varepsilon)$ nomer tabılıp, $n > N$ nomerler ushın $|\alpha_n| < \varepsilon$ yaǵnıy $|x_n - a| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı. Bul $\{x_n\}$ izbe- izliktiń limiti a sanǵa teń bolatuǵının bildiredi. ▲

Solay etip, limiti a sanǵa (shekli) teń jıynaqlı izbe- izliktiń x_n elementin $x_n = a + \alpha_n$ arnawlı kóriniste jazıw múmkin, bul jerde α_n – bazı bir $\{\alpha_n\}$ sheksiz kishi izbe- izliktiń elementi.

3.2. Jıynaqlı izbe- izlikler ústinde arifmetikalıq ámeller.

10- t e o r e m a. *Jıynaqlı $\{x_n\}$ hám $\{y_n\}$ izbe- izliklerdiń qosındısı jıynaqlı izbe- izlik bolıp, limiti $\{x_n\}$ hám $\{y_n\}$ izbe- izliklerdiń limitleriniń qosındısına teń.*

D á l i l l e w. Meyli, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ hám $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ bolsın. Bul jıynaqlı izbe- izliklerdiń elementlerin arnawlı kóriniste jazıp alamız: $x_n = a + \alpha_n$ hám $y_n = b + \beta_n$, bul jerde α_n hám β_n - sáykes túrde bazı bir $\{\alpha_n\}$ hám $\{\beta_n\}$ sheksiz kishi izbe- izliklerdiń elementleri. Bul teńliklerden $(x_n + y_n) - (a + b) = \alpha_n + \beta_n$ teńligi kelip shıǵadı. Eki sheksiz kishi izbe- izliktiń qosındısı sheksiz kishi izbe- izlik bolǵanlıqtan 9- teorema boyınsha $\{x_n\}$ hám $\{y_n\}$ izbe-izliklerdiń $\{x_n + y_n\}$ qosındısı jıynaqlı izbe- izlik bolıp, limiti $a + b$ qosındıǵa teń boladı. ▲

11- t e o r e m a. *Jıynaqlı $\{x_n\}$ hám $\{y_n\}$ izbe- izliklerdiń ayırması jıynaqlı izbe- izlik bolıp, limiti $\{x_n\}$ hám $\{y_n\}$ izbe- izliklerdiń limitleriniń ayırmasına teń.*

12- t e o r e m a. *Jıynaqlı $\{x_n\}$ hám $\{y_n\}$ izbe- izliklerdiń kóbeymesi jıynaqlı izbe- izlik bolıp, limiti $\{x_n\}$ hám $\{y_n\}$ izbe- izliklerdiń limitleriniń kóbeymesine teń.*

D á l i l l e w. Meyli, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ hám $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ bolsın. Bul jıynaqlı izbe-izliklerdiń elementlerin arnawlı kóriniste jazıp alamız: $x_n = a + \alpha_n$ hám $y_n = b + \beta_n$, bul jerde α_n hám β_n - sáykes túrde bazı bir $\{\alpha_n\}$ hám $\{\beta_n\}$ sheksiz kishi izbe-izliklerdiń elementleri. Bul teńliklerden $(x_n \cdot y_n) - (a \cdot b) = a \cdot \beta_n + b \cdot \alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n$ teńligi kelip shıǵadı. 8- teorema hám onıń saldarı boyınsha bul teńliktiń óń tárepinde sheksiz kishi izbe-izlik elementleri tur. Bunnan 9- teorema boyınsha $\{x_n\}$ hám $\{y_n\}$ izbe-izliklerdiń $\{x_n \cdot y_n\}$ kóbeymesi jıynaqlı izbe-izlik bolıp, limiti $a \cdot b$ kóbeymege teń bolatuǵını kelip shıǵadı. ▲

S a l d a r. Jıynaqlı $\{x_n\}$ izbe-izliktiń $\forall c \in R$ sanǵa kóbeymesi jıynaqlı izbe-izlik bolıp, limiti $\{x_n\}$ izbe-izliktiń limitiniń c sanǵa kóbeymesine teń.

1- l e m m a. Eger $\{y_n\}$ izbe-izliktiń limiti b ($b \neq 0$) sanǵa teń bolsa, onda eń bolmaǵanda bazı bir nomerden baslap $\{1\}$ hám $\{y_n\}$ izbe-izliklerdiń qatnası bolǵan $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ izbe-izlik anıqlanǵan hám bul izbe-izlik shegaralanǵan.

D á l i l l e w. $b \neq 0$ ekenin esapqa alıp, $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$ dep alamız. Izbe-izliktiń limitiniń anıqlaması boyınsha usı $\varepsilon > 0$ san ushın $\exists N = N(\varepsilon)$ nomer tabılıp, $n > N$ nomerler ushın $|y_n - b| < \varepsilon$, yaǵnıy $|y_n - b| < \frac{|b|}{2}$ teńsizlik orınlı. $b \equiv (b - y_n) + y_n$ birdeylikten $|b| \leq |b - y_n| + |y_n| < \frac{|b|}{2} + |y_n|$ teńsizlikke iye bolamız. Bul teńsizlikten $n > N$ nomerler ushın $|y_n| > \frac{|b|}{2}$ teńsizlik kelip shıǵadı. Bul teńsizlik N nomerden baslap $\{y_n\}$ izbe-izliktiń elementleri nolden ózgeshe bolatuǵının hám usı nomerden baslap $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ izbe-izlikti qaraw

múmkın ekenin bildiredi. Bul teńsizlikten jáne $\left| \frac{1}{y_n} \right| < \frac{2}{|b|}$ teńsizlikti alıw

múmkın. Al bul N nomerden baslap alınğan $\left\{ \frac{1}{y_n} \right\}$ izbe- izlik shegaralanğan

izbe- izlik bolatuǵının ańlatadı. ▲

13- t e o r e m a. *Jıynaqlı $\{x_n\}$ hám limiti nolden ózgeshe $\{y_n\}$ izbe- izliklerdiń qatnası eń bolmaǵanda bazı bir nomerden baslap anıqlanğan jıynaqlı izbe- izlik bolıp, limiti $\{x_n\}$ hám $\{y_n\}$ izbe- izliklerdiń limitleriniń qatnasına teń.*

D á l i l l e w. Meyli, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ hám $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq 0$ bolsın. Lemma boyınsha bazı bir N nomerden baslap $\{y_n\}$ izbe- izliktiń elementleri nolden ózgeshe bolıp, $\left\{ \frac{1}{y_n} \right\}$ izbe- izlik anıqlanğan hám bul izbe- izlik shegaralanğan. Biz

$\left\{ \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right\}$ izbe- izlik sheksiz izbe- izlik ekenin kórsetiwimiz jetkilikli. Bunıń

ushın $\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{x_n \cdot b - y_n \cdot a}{y_n \cdot b}$ teńlikten paydalanamız. $\{x_n\}$ hám $\{y_n\}$ izbe-

izliklerdiń elementlerin arnawlı kóriniste jazıp alamız: $x_n = a + \alpha_n$ hám

$y_n = b + \beta_n$. Nátiyjede $x_n \cdot b - y_n \cdot a = (a + \alpha_n) \cdot b - (b + \beta_n) \cdot a = b \cdot \alpha_n - a \cdot \beta_n$

teńlikke iye bolamız. Demek, $\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{y_n} (b \cdot \alpha_n - a \cdot \beta_n)$. Endi $\left\{ \frac{1}{y_n} \right\}$ izbe- izlik

shegaralanğan izbe- izlik, al $\{b \cdot \alpha_n - a \cdot \beta_n\}$ izbe- izlik eki sheksiz kishi izbe-

izliktiń ayırması sıpatında sheksiz kishi izbe- izlik bolǵanlıqtan 8- teorema

boyınsha bul teńliktiń oń jaǵındaǵı ańlatpa sheksiz kishi izbe- izlik elementin

beredi. Bunnan $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$ teńlik kelip shıǵadı. ▲

3.3. Sheksiz úlken izbe- izlikler. 9- a n ı q l a m a. $\forall A > 0$ san ushın (bul san qanday úlken san bolsa da) $\exists N = N(A)$ nomer tabılıp, $n > N$ nomerler ushın $|x_n| > A$ teńsizlik orınlı bolsa, onda bunday $\{x_n\}$ izbe- izlik *sheksiz úlken izbe- izlik* dep ataladı.

Qolaylılıq ushın $\{x_n\}$ sheksiz úlken izbe- izliktiń limiti sheksiz, yaǵnıy $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ dep jazıladı.

Eger $\forall A > 0$ san ushın (bul san qanday úlken san bolsa da) $\exists N = N(A)$ nomer tabılıp, $n > N$ nomerler ushın $x_n > A$ ($x_n < -A$) teńsizlik orınlı bolsa, onda bunday $\{x_n\}$ izbe- izliktiń limiti $+\infty$ ke ($-\infty$ ke) teń dep alınadı hám $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$) dep jazıladı.

Limiti sheksiz izbe- izlik tarqalıwshı izbe- izlik boladı.

E s k e r t i w. Hár bir sheksiz úlken izbe- izlik shegaralanbaǵan izbe- izlik, biraq hár bir shegaralanbaǵan izbe- izlik sheksiz úlken izbe- izlik bolıwı shárt emes. Sebebi, sheksiz úlken izbe- izlik ushın $\forall A > 0$ san alınsa da $|x_n| > A$ teńsizlik usı izbe- izliktiń bazı bir nomerden baslap *hámme elementleri* ushın orınlı, al shegaralanbaǵan izbe- izlik ushın bul izbe- izliktiń usı teńsizlik orınlı bolǵan *bir elementin* kórsetiw jetkilikli. Mısalı, $1, 2, 1, 4, \dots, 1, 2n, \dots$ izbe- izlik shegaralanbaǵan izbe- izlik, biraq sheksiz úlken izbe- izlik emes, sebebi $\forall A > 1$ san ushın izbe- izliktiń taq nomerli elementleri A sannan úlken emes.

M ı s a l l a r. № 1. $x_n = (-1)^n n$: $-1, 2, -3, 4, \dots$ izbe- izlik sheksiz úlken izbe- izlik, sebebi $|(-1)^n n| = n$ bolıp, $\forall A > 0$ san alınsa da $n > A$ teńsizlikti qanaatlandıratuǵın $n \in N$ san hárdayım tabıladı.

№ 2. $x_n = -n$ hám $y_n = n$ izbe- izlikler de sheksiz úlken izbe- izlikler, olardıń limitleri, sáykes túrde, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ hám $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ boladı.

14- t e o r e m a. Eger $\{x_n\}$ - sheksiz úlken izbe- izlik bolsa, onda bazı bir nomerden baslap anıqlanǵan $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ bólshek sheksiz kishi izbe- izlik, al eger $\{\alpha_n\}$ sheksiz kishi izbe- izliktiń hámme elementleri (eń bolmaǵanda bazı bir nomerden

baslap) nolden ózgeshe bolsa, onda $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ bólshek sheksiz úlken izbe- izlik boladı.

D á l i l l e w. Dáslep teoremanıń birinshi bólegin dálilleybiz. $\{x_n\}$ sheksiz úlken izbe- izliktiń tek shekli sandaǵı elementleri ǵana nol`ge teń bolıwı múmkin. Sonıń ushın bazı bir N' nomerden baslap $\{1\}$ hám $\{x_n\}$ izbe- izliklerdiń qatnası bolǵan $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ bólshekti qarawımız múmkin. Usı bólshek sheksiz kishi izbe- izlik bolatuǵının dálilleybiz. $\forall \varepsilon > 0$ san alamız. Sheksiz úlken izbe- izlik anıqlaması boyınsha $\frac{1}{\varepsilon}$ oń san ushın $\exists N$ nomer (bul nomerdi N' nomerden úlken qılıp alamız) tabılıp, $n > N$ nomerler ushın $|x_n| > \frac{1}{\varepsilon}$ teńsizlik orınlı boladı. Bul teńsizlikten $\frac{1}{|x_n|} = \left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$ teńsizlik kelip shıǵadı. Bul $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ izbe- izlik sheksiz kishi izbe- izlik ekenin bildiredi.

Teoremanıń ekinshi bólegin dálillew ushın $\{\alpha_n\}$ sheksiz kishi izbe- izliktiń hámme elementleri (eń bolmaǵanda bazı bir nomerden baslap) nolden ózgeshe dep uyǵaramız. $\forall A > 0$ san alamız. $\{\alpha_n\}$ sheksiz kishi izbe- izlik bolǵanlıqtan $\frac{1}{A}$ oń san ushın $\exists N$ nomer tabılıp, $n > N$ nomerler ushın $|\alpha_n| < \frac{1}{A}$ teńsizlik orınlı. Bunnan $\frac{1}{|\alpha_n|} = \left|\frac{1}{\alpha_n}\right| > A$ teńsizlik kelip shıǵadı. Bul $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ izbe- izlik sheksiz úlken izbe- izlik ekenin bildiredi. ▲

4-§. Monoton izbe-izlikler

Meyli, bazı bir $\{x_n\}$ izbe- izlik berilgen bolsın.

10- a n ı q ı l a m a. Eger izbe- izliktiń hár bir kelesi elementi aldınǵı elementinen kishi (úlken) bolmasa, yaǵnıy $\forall n \in N$ nomer ushın

$x_n \leq x_{n+1}$ ($x_n \geq x_{n+1}$) teńsizlik orınlı bolsa, onda bunday $\{x_n\}$ izbe- izlik *ósiwshi* (*kemiwshi*) izbe- izlik dep ataladı.

Eger izbe- izliktiń hár bir kelesi elementi aldınǵı elementinen úlken (kishi) bolsa, yaǵnıy $\forall n \in N$ nomer ushın $x_n < x_{n+1}$ ($x_n > x_{n+1}$) teńsizlik orınlı bolsa, onda bunday $\{x_n\}$ izbe- izlik *qatal ósiwshi* (*qatal kemiwshi*) izbe- izlik dep ataladı.

Mısalı, $1, 2, 2, 3, 3, 3, \dots, \underbrace{n, n, \dots, n}_n, \dots$ izbe- izlik *ósiwshi*, al $2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n, \dots$ izbe- izlik *qatal ósiwshi* izbe- izlik.

Sunday- aq, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots, \underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}_n, \dots$ izbe- izlik *kemiwshi*, al $x_n = \frac{n+1}{n}: \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots$ izbe- izlik *qatal kemiwshi* izbe- izlik. Haqıyqatında da,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0, \text{ yaǵnıy } x_n > x_{n+1} \text{ teńsizlik orınlı.}$$

Ósiwshi (*qatal ósiwshi*) hám *kemiwshi* (*qatal kemiwshi*) izbe- izlikler, ulıwma atama menen, *monoton izbe- izlikler* dep ataladı.

Hár bir monoton izbe- izlik bir tárepten (yaki joqarıdan, yaki tómennen) shegaralanǵan. Haqıyqatında da hár bir *ósiwshi* (*qatal ósiwshi*) izbe- izlik tómennen shegaralanǵan (tómengi shegarası sıpatında birinshi elementin alıw múmkin), al *kemiwshi* (*qatal kemiwshi*) izbe- izlik joqarıdan shegaralanǵan (joqarǵı shegarası sıpatında birinshi elementin alıw múmkin).

Demek, *ósiwshi* (*qatal ósiwshi*) izbe- izlik shegaralanǵan bolıwı ushın bul izbe- izliktiń joqarıdan shegaralanǵan, al *kemiwshi* (*qatal kemiwshi*) izbe- izlik shegaralanǵan bolıwı ushın bul izbe- izliktiń tómennen shegaralanǵan bolıwı zárúr hám jetkilikli boladı eken.

15- t e o r e m a. *Joqarıdan shegaralanğan ósiwshi (qatal ósiwshi) izbe- izlik jıynaqlı. Eger ósiwshi (qatal ósiwshi) izbe- izlik joqarıdan shegaralanbağan bolsa, onıń limiti $+\infty$ boladı.*

D á l i l l e w. Dáslep teoremanıń birinshi bólimin dálilleybiz. Meyli, $\{x_n\}$ izbe- izlik joqarıdan shegaralanğan ósiwshi (qatal ósiwshi) izbe- izlik bolsın. Bunday izbe- izliktiń elementlerinen dúzilgen kóplik joqarıdan shegaralanğan, sonlıqtan onıń dál joqarǵı shegarası bar, bul shegaranı a dep belgileybiz: $a := \sup_n \{x_n\}$. Usı a san $\{x_n\}$ izbe- izliktiń limiti bolatuǵının kórsetemiz. Birinshiden, kópliktiń joqarǵı shegarasınıń anıqlamasınan $\forall n$ nomer ushın $x_n \leq a$ (1) teńsizlik orınlı. Endi $\forall \varepsilon > 0$ saylap alamız. Kópliktiń dál joqarǵı shegarasınıń anıqlaması boyınsha $\{x_n\}$ izbe- izliktiń $a - \varepsilon < x_N$ (2) teńsizlikti qanaatlandıırıwshı keminde bir x_N element bar. $\{x_n\}$ izbe- izlik ósiwshi (qatal ósiwshi) izbe- izlik ekenin esapqa alıp, $n > N$ nomerler ushın $x_N \leq x_n$ ($x_N < x_n$) bolatuǵının kóremiz. Bul teńsizlikten hám (2) teńsizlikten $n > N$ nomerler ushın $a - \varepsilon < x_n$ teńsizlikti alamız. Bul teńsizlikti (1) teńsizlik penen biriktirip, $a - \varepsilon < x_n \leq a < a + \varepsilon$ teńsizliklerge iye bolamız. Demek, $n > N$ nomerler ushın $|x_n - a| < \varepsilon$ orınlı eken, al bul $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ bolatuǵının kórsetedi.

Endi teoremanıń ekinshi bólegin dálilleybiz Meyli, $\{x_n\}$ - joqarıdan shegaralanbağan ósiwshi (qatal ósiwshi) izbe- izlik bolsın. Onda $\forall A > 0$ san ushın (bul san qanday úlken san bolsa da) $\exists N'$ nomer tabılıp, $x_{N'} > A$ teńsizlik orınlı boladı. $\{x_n\}$ - ósiwshi (qatal ósiwshi) izbe- izlik bolǵanlıqtan $n > N'$ nomerler ushın $x_n \geq x_{N'}$ ($x_n > x_{N'}$), sonlıqtan $x_n > A$ teńsizlik orınlı. Bul $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ bolatuǵının bildiredi. ▲

E s k e r t i w. Ósiwshi (kemiwshi) joqarıdan (tómennen) shegaralanğan izbe- izliktiń elementleri onıń limitinen úlken (kishi) emes.

Mına teorema da 15- teoremaǵa uqsas dlálillenedi.

16- t e o r e m a. *Tómennen shegaralanǵan kemiwshi (qatal kemiwshi) izbe- izlik jıynaqlı. Eger kemiwshi (qatal kemiwshi) izbe- izlik tómennen shegaralanbaǵan bolsa, onıń limiti $-\infty$ boladı.*

S a l d a r. *Monoton izbe- izlik jıynaqlı bolıwı ushın bul izbe- izlik shegaralanǵan bolıwı zárúr hám jetkilikli.*

5-§. Monoton izbe-izliktiń limiti haqqındaǵı teoremalardıń qollanıwları

5.1. e s a n ı. $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ izbe- izlikti qaraymız.

a) Bul izbe- izlik qatal ósiwshi.

Berilgen izbe- izliktiń qońsı elementleriniń qatnasın tabamız:

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} : (1 + \frac{1}{n})^n = \frac{(n+2)^{n+1} \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} (n+1)^n} = \\ &= [\frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}]^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = [1 - \frac{1}{(n+1)^2}]^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}. \end{aligned}$$

Bernulli teńsizligi boyınsha

$$[1 - \frac{1}{(n+1)^2}]^{n+1} > 1 - \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{n}{n+1}.$$

Nátiyjede $\forall n \in N$ ushın $\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = 1$, yaǵnıy $x_{n+1} > x_n$ bolatuǵını

kelip shıǵadı.

b) Bul izbe- izlik shegaralanǵan.

$\forall k \geq 1$ ushın $k! \geq 2^{k-1}$ teńsizlik orınlı. N`yuton binomı boyınsha

$$\begin{aligned} x_n &= (1 + \frac{1}{n})^n = 1 + \sum_{k=1}^n C_n^k \frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^n C_n^k \frac{1}{n^k} = \\ &= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \dots (1 - \frac{k-1}{n}) \leq \\ &\leq 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3 \end{aligned}$$

teńsizlikti alamız. Demek, $\forall n \in \mathbb{N}$ ushın $0 < x_n < 3$.

15- teorema boyınsha berilgen izbe- izlik jıynaqlı.

11- a n ı q l a m a. $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ izbe- izliktiń limiti e sanı dep ataladı:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e.$$

Bul san matematikada áhmiyetli rol` oynaydı.

17- t e o r e m a. e sanı *irrational san*.

Bul teoremanı oqıwshı óz betinshe dálillewi múmkin.

5.2. Biriniń ishine biri jaylasqan kesindiler principı.

12- a n ı q l a m a. Eger $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$ kesindiler izbe- izliginiń hár bir kesindisi kelesi kesindide jaylasqan bolsa, yaǵnıy $\forall n \in \mathbb{N}$ ushın $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ qatnas orınlı bolsa, onda bunday izbe- izlik *biriniń ishine biri jaylasqan kesindiler sisteması* dep ataladı. Eger bul sistema kesindileriniń uzınlıqlarınan dúzilgen izbe- izlik sheksiz kishi izbe- izlik bolsa, onda bunday sistema *tartılıwshı sistema* dep ataladı.

17- t e o r e m a. (Kantordin kesindilerdiń tartılıwshı sisteması haqqındaǵı). *Kesindilerdiń tartılıwshı sistemasınıń hár bir kesindisine derek bolatuǵın noqat bar hám bul noqat jalǵız birew.*

D á l i l l e w. Dáslep tartılıwshı sistemanıń hár bir kesindisine derek bolatuǵın c noqat jalǵız birew bolatuǵının kórsetemiz. Haqıyqatında da, sistemanıń hár bir kesindisine derek bolǵan jáne bir $d \neq c$ noqat tabılsa, onda anıqlıq ushın $d > c$ dep alıp, biz sistemanıń hámme $[a_n, b_n]$ kesindilerine derek bolǵan $[c, d]$ kesindini alamız. Onda $\forall n \in \mathbb{N}$ ushın $b_n - a_n \geq d - c > 0$ teńsizlik orınlı boladı. Bunday bolıwı múmkin emes, sebebi sistema tartılıwshı bolǵanlıqtan $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$. Demek, tartılıwshı sistemanıń hár bir kesindisine derek bolatuǵın c noqat jalǵız birew boladı eken.

Endi sistemanıń hár bir kesindisine derek bolatuǵın c noqat bar ekenin kórsetemiz. Kesindiler sisteması tartılıwshı bolǵanlıqtan sistema kesindileriniń shep shegaralarınıń $\{a_n\}$ izbe- izligi ósiwshi, al óń shegaralarınıń $\{b_n\}$ izbe- izligi kemiwshi. Bul eki izbe- izlik te shegaralangán bolǵanlıqtan (elementleri $[a_1, b_1]$ kesindige derek) jıynaqlı. $\{b_n - a_n\}$ izbe- izlik sheksiz kishi izbe- izlik bolǵanlıqtan $\{a_n\}$ hám $\{b_n\}$ izbe- izlikler ulıwma c limitke iye boladı. 15- teoremaǵa eskertiwden $a_n \leq c \leq b_n$ teńsizlikler kelip shıǵadı, yaǵnıy c noqat sistema kesindileriniń hár birewine derek boladı. ▲

17- teorema *biriniń ishine biri jaylasqan kesindiler principi* dep ataladı.

E s k e r t i w. Biriniń ishine biri jaylasqan intervallar (yaki yarım intervallar) túsiniǵın de kirgiziwimiz múmkin. Biraq bularǵa qarata 17- teorema, ulıwma aytqanda, orınlı emes. Mısalı, $(0,1)$, $(0, \frac{1}{2})$, $(0, \frac{1}{3})$, $\dots$, $(0, \frac{1}{n})$, $\dots$ intervallar biriniń ishine biri jaylasqan intervallardıń tartılıwshı sistemasın dúzedi. Biraq bul sistemanıń hár bir intervalına derek noqat joq (bunday jalǵız noqat 0 noqat bolıwı múmkin edi, biraq 0 noqat sistemanıń hesh bir intervalına derek emes).

6-§. Úles izbe- izlikler. Bol`cano- Veyershtrass teoreması

Bazı bir $\{x_n\}$ izbe- izlikti hám $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ óń pútin sanlardıń qatal ósiwshi izbe- izligin qaraymız. $\{x_n\}$ izbe- izlikten $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ nomerli elementlerdi saylap alamız hám olardı usı nomerlerdiń ósiw tártibi boyınsha jaylastıramız. Nátiyjede jańa $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}, \dots$ izbe- izlik alamız. Bul izbe- izlik $\{x_n\}$ izbe- izliktiń *úles izbe- izligi* dep ataladı hám $\{x_{k_n}\}$ dep belgilenedi. Dara jaǵdayda, $\{x_n\}$ izbe- izliktiń ózi de bul izbe- izliktiń $k_n = n$ nomerli úles izbe- izligi dep karalıwı múmkin.

Izbe- izlik limitiniń anıqlamasınan tikkeley kelip shıǵatuǵın eki tastıyıqlawdı keltiremiz.

1⁰. Eger izbe- izlik limitke iye bolsa, onda onıń qálegen úles izbe- izligii de sol limitke iye boladı.

2⁰. Eger izbe- izliktiń hámme úles izbe- izlikleri jıynaqlı bolsa, onda olardıń bári birdey limitke iye boladı (dara jaǵdayda izbe-izliktiń ózi de sol limitke iye boladı).

E s k e r t i w. Izbe- izliktiń ayırım úles izbe- izlikleriniń limitiniń bar bolıwınan berilgen izbe- izliktiń limitiniń bar bolıwı hárdayım kelip shıǵa bermeydi. Mısalı, $x_n = (-1)^{n+1}$: 1, -1, ... , 1, -1, ... izbe- izliktiń $x_{2k-1} \equiv 1$ hám $x_{2k} \equiv -1$ úles izbe- izlikler jıynaqlı bolıp, sáykes túrde, 1 hám -1 ge teń limitke iye. Biraq berilgen izbe- izliktiń ózi limitke iye emes. Demek, limitke iye emes izbe- izliktiń úles izbe- izlikleri limitke iye bolıwı múmkin eken.

Mına tastıyqlaw da 1⁰ tastıyqlawǵa uqsas dálillenedi: *sheksiz úlken izbe- izliktiń hár bir úles izbe- izligi sheksiz úlken izbe- izlik.*

13- a n ı q l a m a. Eger noqattıń qálegen dógeresinde izbe- izliktiń sheksiz kóp elementleri jaca, onda bul noqat izbe- izliktiń *limit noqatı* dep ataladı.

14- a n ı q l a m a. Eger izbe- izlikten bazı bir noqatqa jıynaqlı úles izbe- izlik ajratıp alıw múmkin bolsa, onda bul noqat izbe- izliktiń *limit noqatı* dep ataladı.

Bul eki anıqlama ekvivalent.

2- l e m m a. *Hár bir jıynaqlı izbe- izlik óziniń limitine teń jalǵız bir limit noqatına iye.*

D á l i l l e w. Meyli, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ bolsın. Izbe- izliktiń limitiniń anıqlaması boyınsha a noqattıń qálegen ε — dógeresinde izbe- izliktiń bazı bir nomerden baslap hámme elementleri (sheksiz kóp) jatadı. Demek, a noqat $\{x_n\}$ izbe- izliktiń limit noqatı. 1⁰- tastıyqlaw boyınsha $\{x_n\}$ izbe- izliktiń

qálegen úles izbe- izligi a noqatqa jıynaqlı. Demek, 14- anıqlama boyınsha $\{x_n\}$ izbe- izliktiń a noqattan basqa limit noqatı joq. ▲

Bul lemma jıynaqlı bolmaǵan izbe- izlikler ushın orınlı emes. Mısalı, shegaralanǵan $\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1-\frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}, \dots$ izbe- izliktiń $x=0$ hám $x=1$, eki limit noqatı bar. Al $[0,1]$ kesindidegi racional sanlar izbe- izligi shegaralanǵan, biraq $\forall x \in [0,1]$ sanı bul izbe- izliktiń limit noqatı boladı.

15- a n ı q l a m a. Izbe- izliktiń eń úlken (eń kishi) limit noqatı usı izbe- izliktiń *joqarǵı (tómengi) limiti* dep ataladı hám $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ ($\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$) simvolı menen belgilenedi.

S a l d a r. *Izbe- izliktiń jıynaqlılıǵı onıń tómengi hám joqarǵı limitleriniń teńligine teń kúshli.*

18- t e o r e m a (Bol`cano-Veyershtrass teoreması). *Hár bir shegaralanǵan izbe- izlikten jıynaqlı úles izbe- izlik ajratıp alıw múmkin.*

D á l i l l e w. Meyli, $\{x_n\}$ izbe- izlik shegaralanǵan bolsın. Onda bul izbe- izliktiń hámme elementleri bazı bir $[a,b]$ kesindige derek dep uyǵarıw múmkin: $\forall n \in N$ ushın $x_n \in [a,b]$.

$[a,b]$ kesindini $[a, \frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}, b]$ kesindilerge bólekleybiz. Bul kesindilerdiń $\{x_n\}$ izbe- izliktiń sheksiz kóp elementi jaylasqanın $[a_1, b_1]$ dep belgileybiz. $[a_1, b_1]$ kesindiniń uzınlıǵı $\frac{b-a}{2}$ ge teń. Endi $[a_1, b_1]$ kesindini $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$, $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ kesindilerge bólekleybiz. Bul kesindilerdiń $\{x_n\}$ izbe- izliktiń sheksiz kóp elementi jaylasqanın $[a_2, b_2]$ dep belgileybiz. $[a_2, b_2]$ kesindiniń uzınlıǵı $\frac{b-a}{2^2}$ na teń. Bul processti dawam etiw nátiyjesinde

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$$

kesindiler izbe- izligin alamız. Bul izbe- izlik kesindileri ushın

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

qatnas orınlı bolıp, $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$ teńlik orınlı, yaǵnıy bul kesindiler tartılıwshı sistema dúzedi. Biriniń ishine biri jaylasqan kesindiler principi boyınsha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c \in [a_n, b_n] \quad (\forall n \in N)$.

Endi $\{x_n\}$ izbe-izliktiń $[a_1, b_1]$ kesindige derek bazı bir x_{k_1} elementin, $[a_2, b_2]$ kesindige derek bazı bir x_{k_2} ($k_1 < k_2$) elementin h. t. b. $[a_n, b_n]$ kesindige derek bazı bir x_{k_n} ($k_1 < k_2 < \dots < k_n$) elementin h. t. b. saylap alamız. Nátiyjede $\{x_n\}$ izbe-izliktiń $\{x_{k_n}\}$ ($k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$) úles izbe-izligi hasıl boladı. Bul izbe-izliktiń elementleri ushın dúziliwi boyınsha $\forall n \in N$ ushın $a_n \leq x_{k_n} \leq b_n$ teńsizlikler orınlı. 6- teorema boyınsha $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = c$ teńlik kelip shıǵadı. ▲

18- teorema qálegen shegaralanǵan izbe-izliktiń limit noqatlarınıń kópligi qalay dúzilgenin túsindirip beredi. Eger $\{x_n\}$ izbe-izliktiń tómengi limitin $\underline{x} := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, al joqarǵı limitin $\bar{x} := \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$ dep belgilesek, onda izbe-izliktiń hámme limit noqatları $[\underline{x}, \bar{x}]$ kesindide jatadı, sonıń menen birge eger izbe-izlik tarqalıwshı bolsa, bul izbe-izlik keminde eki $\underline{x}$ hám $\bar{x}$ limit noqatlarǵa iye boladı. Biz joqarıda qaraǵan $\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}, \dots$ izbe-izlik tek eki $x=0$ hám $x=1$ limit noqatqa iye izbe-izlikke mısál boladı. Al $[0, 1]$ kesindide jatıwshı racional sanlar izbe-izligi limit noqatları $[\underline{x}, \bar{x}]$ kesindisin tolıq qaplaytuǵın izbe-izlikke mısál boladı, bul jerde $\underline{x}=0$, $\bar{x}=1$.

Tómendegi kóplikler limit noqatlarınıń kópligi bolatuǵın izbe-izliklerge mısallardı ańsat qurıw múmkin: 1) aldınnan berilgen shekli sandaǵı $a_1, a_2, \dots, a_n$ sanlar kópligi; 2) aldınnan berilgen sheksiz $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

sanlar izbe- izligi (bul jaǵdayda $\{a_n\}$ izbe- izliktiń hár bir limit noqatı qurılǵan izbe- izliktiń limit noqatı boladı).

Mına tastıyqlaw shegaralanbaǵan izbe- izlik ushın Bol`cano- Veyershtrass teoremasınıń ulıwmalasıwı boladı.

3- l e m m a. *Qálegen shegaralanbaǵan izbe- izlikten sheksiz úlken úles izbe- izlik (dara jaǵdayda, hámme elementleri birdey belgige iye sheksiz úlken úles izbe- izlik) ajıratıp alıw múmkin.*

Bul lemmadan hám Bol`cano- Veyershtrass teoremasınan tómendegi tastıyqlaw kelip shıǵadı.

4- l e m m a. *Qálegen izbe- izlikten yaki jıynaqlı, yaki hámme elementleri birdey belgige iye sheksiz úlken úles izbe- izlik ajıratıp alıw múmkin.*

Eger izbe- izlikten hámme elementleri oń (teris) sheksiz úlken úles izbe- izlik ajıratıp alıw múmkin bolsa, onda $+\infty$ ($-\infty$) bul izbe- izliktiń *limit noqatı* boladı deymiz.

Limit noqat túsiniǵın usılay keńeytirgenimizde 4- lemmadan tómendegi tastıyqlaw kelip shıǵadı: *qálegen izbe- izliktiń keminde bir limit noqatı bar.*

$+\infty$ hám $-\infty$ simvolları qálegen shekli x haqıyqıy sanı menen $-\infty < x < +\infty$ teńsizlikleri arqalı baylanısqa dep esaplap, tómendegi tastıyqlawǵa kelemiz: *qálegen izbe- izliktiń joqarǵı hám tómengi limitleri bar, yaǵnıy eń kishi hám eń úlken limit noqatları bar.*

7-§. Fundamental izbe- izlikler. Izbe- izliktiń jıynaqlılıǵınıń

Koshi kriteriysi

$\{x_n\}$ izbe- izliktiń jıynaqlılıǵı máselesin jıynaqlı izbe- izlik anıqlaması járdeminde úyrengende izbe- izlik elementleri menen izbe- izliktiń boljawlangan limiti arasındaqı $x_n - a$ ayırmanı bahalawǵa tuwra keledi. Basqasha aytqanda bul izbe- izliktiń a limitin aldın ala biliw kerek boladı.

Bul paragrafta izbe- izliktiń jıynaqlılıǵınıń bul haqqında tek onıń elementleri boyınsha juwmaq shıǵarıwǵa múmkinshilik beretuǵın hám izbe- izliktiń boljawlangan limitinen paydalanbaytuǵın «ishki» kriteriysin anıqlaymız. Bunday kriteriydi anıqlaw ushın fundamental izbe- izlik túsinigin kiritemiz.

Meyli, bazı bir $\{x_n\}$ izbe- izlik berilgen bolsın.

16- a n ı q l a m a. Eger $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $\exists N = N(\varepsilon)$ nomer tabılıp, $n > N$ hám $m > N$ nomerler ushın $|x_n - x_m| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı bolsa, onda bunday izbe- izlik *fundamental izbe- izlik* dep ataladı.

M ı s a l l a r. № 1. $x_n = \frac{n}{n+1}$ izbe- izlik fundamental izbe- izlik bolatuǵının kórsetiń.

Sh e sh i w. Berilgen izbe- izlik ushın

$$|x_n - x_m| = \left| \frac{n}{n+1} - \frac{m}{m+1} \right| = \left| \frac{n-m}{(n+1)(m+1)} \right| < \frac{n+m}{nm} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

teńsizlik orınlı. Eger $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $N = \left[\frac{2}{\varepsilon} \right] + 1$ dep alsaq, $n > N$ $m > N$ nomerler ushın $|x_n - x_m| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı. Demek, berilgen izbe- izlik fundamental izbe- izlik eken.

№ 2. $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ izbe- izlik fundamental izbe- izlik bolatuǵının kórsetiń.

Sh e sh i w. Bul jaǵdayda ($n > m$ bolǵanda)

$$|x_n - x_m| = \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

bolıp, bul teńliktiń oń tárepindegi hár bir qosılıwshıǵa $\frac{1}{p^2} < \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$ teńsizlikti qollanıp,

$$|x_n - x_m| < \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) + \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m}$$

teńsizlikke iye bolamız. Eger $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ dep alsaq, $n > m > N$ nomerler ushın $|x_n - x_m| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı. Demek, berilgen izbe-izlik fundamental izbe-izlik boladı eken.

№ 3. Fundamental bolmağan izbe-izlikke mısıl keltiremiz.

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

izbe-izlikti qaraymız. Bul izbe-izlik ushın $\forall m > 1$ nomer alınsa da

$$|x_{2m} - x_m| = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{2m} > m \cdot \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}$$

teńsizlik orınlı. Bunnan berilgen izbe-izlik fundamental emesligi kelip shıǵadı.

19- t e o r e m a (Koshi kriteriysi). *Izbe-izlik jıynaqlı bolıwı ushın bul izbe-izlik fundamental izbe-izlik bolıwı zárúr hám jetkilikli.*

Z á r ú r l i g i. Meyli, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ bolsın. $\{x_n\}$ izbe-izliktiń fundamental izbe-izlik ekenin kórsetemiz. $\forall \varepsilon > 0$ san alamız. Izbe-izliktiń limitiniń anıqlaması boyınsha $\frac{\varepsilon}{2}$ san ushın $\exists N = N(\varepsilon)$ nomer tabılıp, $n > N$ nomerler

ushın $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ teńsizlik orınlı boladı. Usıǵan uqsas $m > N$ nomerler ushın

da $|x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ teńsizlik orınlı. Nátiyjede $n > N$ hám $m > N$ nomerler ushın

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

teńsizlikke iye bolamız. Bul $\{x_n\}$ izbe-izliktiń fundamental izbe-izlik ekenin bildiredi.

J e t k i l i k l i l i g i. Meyli, $\{x_n\}$ izbe-izlik fundamental izbe-izlik bolsın. Bul izbe-izliktiń jıynaqlı izbe-izlik ekenin kórsetemiz. $\forall \varepsilon > 0$ san

saylap alamız. Fundamental izbe- izlik anıqlaması boyınsha $\frac{\varepsilon}{2}$ san ushın

$\exists N = N(\varepsilon)$ nomer tabılıp, $n > N$ hám $m > N$ nomerler ushın $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$

teńsizlik orınlı boladı. Bunnan $m > N$ teńsizlikti qanaatlardırwshı hár bir

tayınlangan m nomer ushın $x_m - \frac{\varepsilon}{2} < x_n < x_m + \frac{\varepsilon}{2}$ teńsizlikler orınlanatúğını

kelip shıǵadı. Bul $\{x_n\}$ izbe- izliktiń shegaralangánlıǵın kórsetedi. Bol'cano-

Veyershtrass teoreması boyınsha bul izbe- izlikten jıynaqlı $\{x_{k_n}\}$ úles izbe- izlik

ajratıp alıw múmkin: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = a$. $\forall \varepsilon > 0$ san alamız. Izbe- izliktiń limitiniń

anıqlaması boyınsha $\frac{\varepsilon}{2}$ san ushın $\exists N = N(\varepsilon)$ nomer tabılıp, $n > N$ nomerler

ushın $|x_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ teńsizlik orınlı boladı. Eger $m = k_n$ bolsa, $|x_n - x_{k_n}| < \frac{\varepsilon}{2}$

teńsizlikti alamız. Bul eki teńsizlikten

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{k_n}) + (x_{k_n} - a)| \leq |x_n - x_{k_n}| + |x_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

teńsizlikke iye bolamız. Bul $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ bolatúǵının bildiredi. ▲

3- BAP

BIR ÓZGERIWSHILI FUNKCIYA HAM ONÍŇ LIMITI

1-§. Funkciya túsini

1.1. Ózgeriwshi shama hám funkciya túsini. Ózgeriw óz-ara baylanısqan eki ózgeriwshi shamanı úyreniw funkciya túsini alıp keledi. Sonıń ushın ózgeriwshi shama túsini anıqlıq kirgiziwden baslaǵanımaız maqul.

Real ózgeriwshi fizikalıq shamalardı úyreniw nátiyjesinde biz bul shamalar mudamı qálegen mánislerdi qabıl qıla bermeydi degen juwmaq shıǵaramız. Mısalı, materiallıq noqat tezligi $3 \cdot 10^{10}$ sm/sek ten, yaǵnıy boslıqtaǵı jarıqlıq tezliginen, aspaydı, dene temperaturası $-273^0 C$ dan kishi bolmaydı, $y = A \cos(\omega t + \delta)$ nızamı boyınsha garmonikalıq terbelis jasawshı materiallıq noqattıń orın almasıw hárketi tek $[-A, A]$ kesindidegi mánislerdi qabıl kılıwı mımkin h. t. b.

Tábiyatta baqlanatuǵın ózgeriwshi shamalardıń fizikalıq qásiyetlerinen abstrakciyalanıp, tek qabıl qılıwı mımkin bolǵan san mánisleri menen xarakterlenetuǵın *matematikalıq ózgeriwshi shama* túsini kelemiz.

Berilgen x ózgeriwshi shamanıń qabıl qılıwı mımkin bolǵan mánisleriniń kópligi $\{x\}$ usı ózgeriwshi shamanıń *ózgeriw oblastı* dep ataladı. Ózgeriw oblastı berilgen ózgeriwshi shama berilgen dep esaplanadı.

Bunnan bılay ózgeriwshi shamalardı kishi $x, y, t, \dots$ latin alfavitiniń háripleri, al bul ózgeriwshi shamalardıń ózgeriw oblastların $\{x\}, \{y\}, \{t\}, \dots$ simvolları menen belgileymiz.

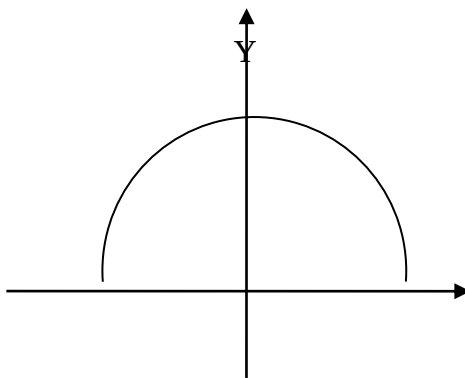
Meyli, ózgeriw oblastı bazı bir $\{x\} \subset R$ kóplik bolǵan x ózgeriwshi shama berilgen bolsın.

1- a n ı q l a m a. Eger x ózgeriwshiniń hár bir $x \in \{x\}$ mánisine málim nızam boyınsha bazı bir y san sáykes qoyılǵan bolsa, onda $\{x\}$ kóplikte $y = y(x)$ yaki $y = f(x)$ *funkciya berilgen* dep aytıladı.

x ózgeriwshi funkciyanıń *argumenti* yaki *erikli ózgeriwshi*, argumenttiń $x \in \{x\}$ mánisine sáykes y san funkciyanıń x *noqattaǵı dara mánisi* dep ataladı. Argumenttiń ózgeriw oblastı bolǵan $\{x\} \subset R$ kóplik funkciyanıń *anıqlanıw oblastı* dep ataladı hám $D(f)$ simvolı menen belgilenedi. Funkciyanıń hámme dara mánisleri *funkciyanıń mánisler kópligi* dep atalatuǵın $\{y\} \subset R$ kóplik dúzedi, bul kóplik $E(f)$ yaki $R(f)$ simvolı menen belgilenedi. $y = f(x)$ jazıwdaǵı f háribi funkciyanıń *xarakteristikası* dep ataladı.

Funkciyanı, onıń argumentin hám xarakteristikasını belgilew ushın hár qıylı simvollardan paydalanıw múmkin.

M ı s a l l a r. 1). $y = \sqrt{4 - x^2}$. Funkciyanıń anıqlanıw oblastı $D(f) = \{x \in R : 4 - x^2 \geq 0\} = [-2, 2]$, al mánisler kópligi $E(f) = [0, 2]$ (1-súwret).



1- súwret

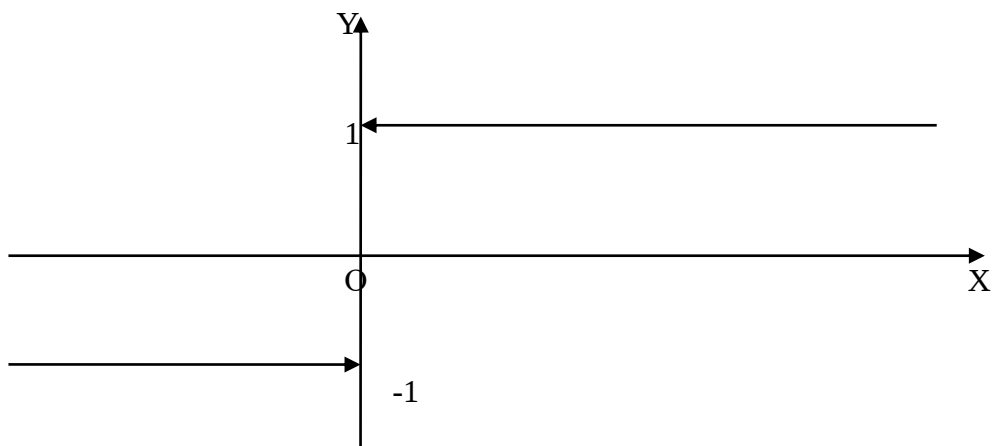
$$2) \quad y = D(x) = \begin{cases} 0, & x - \text{irrac. san}, \\ 1, & x - \text{rac. san}. \end{cases}$$

Bul funkciya *Dirixle funkciyası* dep ataladı. $D(f) = R$, $E(f) = \{0, 1\}$.

$$3) y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}.$$

($\operatorname{sgn} x$ — x sanının belgisi). Funkciyanın grafigi 2- súwrette berilgen.

$$D(f) = R, \quad E(f) = \{1, 0, -1\}.$$

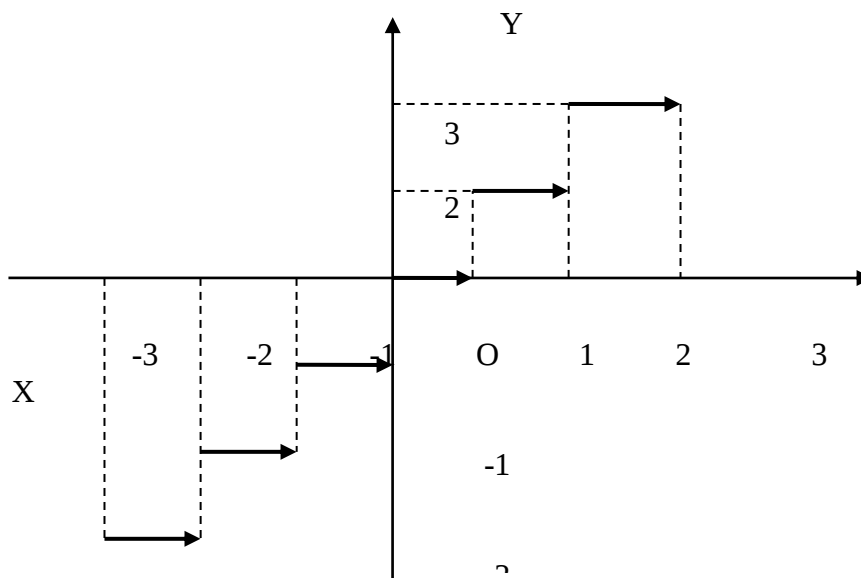


2- súwret

4) $y = [x]$ yaki $y = E(x)$ ($[x]$ yaki $E(x)$ - simvolı menen $x \in R$ sanının *pútin bólegi*, yaǵnıy bul sannan úlken bolmaǵan eń úlken san belgilenedi hám «ant`e x » dep oqıladı). $D(f) = R, \quad E(f) = Z$. Funkciyanın grafigi 3- súwrette berilgen.

5) $y = n!$ ($n!$ simvolı « n faktorial» dep oqıladı, $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$). Funkciyanın anıqlanıw oblastı- hámme natural sanlar kópligi, mánisler kópligi- $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ kórinisindegi natural sanlar kópligi.

Funkciyanın anıqlanıw oblastı hám mánisler kópligi arasında baylanıs ornátıwshı nızam kóbinese formulalar járdeminde beriledi. Funkciyanın beriliwiniń bul usılı *analitikalıq usıl* dep ataladı.



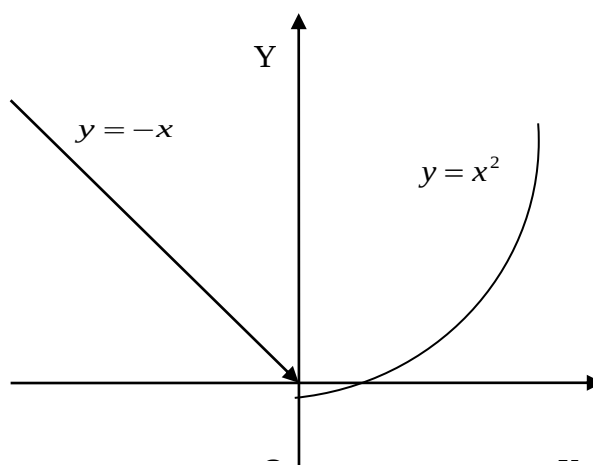
3- súwret

Funkciya óziniń anıqlanıw oblastınıń hár qıylı bóleklerinde hár qıylı formulalar menen beriliwi múmkin.

Mısalı,

$$y = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

funkciya sanlar kósherinde analitikalıq usıl menen (eki formula járdeminde) berilgen (4- súwret).



4- súwret

Argumenttiń ayırım mánisleriniń hám olarǵa sáykes funkciyanıń dara mánisleriniń kestesi beriwden ibarat funkciyanıń beriliwiniń *kestelik usılı* da keń qollanıladı. Funkciyanıń beriliwiniń bul usılında argumenttiń kestede

berilmegen aralıq mánislerine sáykes funkciyanın dara mánislerin juwıq esaplaw múmkin.

Ámeliy ólshew islerinde argument penen funkciya arasındagı sáykeslik grafik járdeminde beriletuǵın funkciyanın beriliwiniń *grafikalıq usılı* keń tarqalǵan.

Solay etip, biz funkciyanın analitikalıq, kestelik hám grafikalıq usıllarda beriliwin kórdik. Funkciyalar tek usı usıllar menen berilip ǵana qalmastan, basqasha, baylanıs nızamı sózler menen ayılıp ta, beriliwi múmkin. Mısalı, hám bir n natural sanǵa bul sannıń bóliwshileriniń sanın sáykes qoyamız. Bul sáykeslikti φ menen belgileymiz. Nátiyjede

$$\varphi(1)=1, \quad \varphi(2)=2, \quad \varphi(3)=2, \quad \varphi(4)=3, \quad \varphi(5)=2, \quad \dots$$

funkciyanı alamız. Ádette, bul funkciya *Eyler funkciyası* dep ataladı.

Eyler funkciyası ushın analitikalıq formula joq, onı keste usılında da, grafik usılında da anıqlap bolmaydı. $\forall p$ ápiwayı san ushın $\varphi(p)=2$ ekeni málím. Jeterli dárejede úlken ápiwayı sanlar bar ekenliginen bul funkciyanıń tábiyatı júdá quramalı ekeni kórinip tur.

Matematikalıq analiz kursında, tiykarınan, analitikalıq usılda berilgen funkciyalar karaladı.

1.2. Shegaralanǵan funkciyalar. Meyli, $f(x)$ funkciya bazı bir $\{x\} \subset R$ kóplikte anıqlanǵan bolsın.

2- a n ı q l a m a. Eger $\forall x \in \{x\}$ noqatta $f(x) \leq M$ ($f(x) \geq m$) teńsizlik orınlı bolatuǵın M sanı (m sanı) tabılsa, onda $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte joqarıdan (tómennen) shegaralanǵan dep ataladı.

$f(x)$ funkciyanıń $\{x\}$ kóplikte joqarıdan (tómennen) shegaralanǵanlıǵı bul funkciyanıń mánislerinen dúzilgen $Y = \{f(x) : x \in \{x\}\}$ kópliktiń joqarıdan (tómennen) shegaralanǵanlıǵın bildiredi.

3- a n ı q l a m a. Eger $f(x)$ funksiya $\{x\}$ kóplikte hám joqarıdan, hám tómennen shegaralanğan bolsa, onda bul funksiya $\{x\}$ kóplikte *shegaralanğan* dep ataladı.

4- a n ı q l a m a. Eger $\forall M$ san ushın (bul san qanday úlken san bolsa da) $f(x_0) > M$ teńsizlikti qapnaatlandıratuǵın bazı bir $x_0 \in \{x\}$ noqat tabılsa, onda $f(x)$ funksiya $\{x\}$ kóplikte *joqarıdan shegaralanbağan* dep ataladı.

5- a n ı q l a m a. Eger $\forall m$ san ushın (bul san qanday kishi san bolsa da) $f(x^*) < m$ teńsizlikti qapnaatlandıratuǵın bazı bir $x^* \in \{x\}$ noqat tabılsa, onda $f(x)$ funksiya $\{x\}$ kóplikte *tómennen shegaralanbağan* dep ataladı.

Keminde bir tárepten (yaki joqarıdan, yaki tómennen) shegaralanbağan funksiya *shegaralanbağan funksiya* dep ataladı.

1.3. Jup hám taq funksiýalar. Dáslep o noqatqa (sanaq basına) qarata simmetriyalıq kóplik túsinigin kiritemiz.

Eger hár bir $x \in \{x\}$ noqat penen birge $-x \in \{x\}$ bolsa, onda $\{x\}$ kóplik o noqatqa (sanaq basına) qarata *simmetriyalıq kóplik* dep ataladı.

Meyli, $f(x)$ funksiya sanaq basına qarata simmetriyalıq $\{x\}$ kóplikte anıqlanğan bolsın.

6- a n ı q l a m a. Eger $x \in \{x\}$ noqatta $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$) teńlik orınlı bolsa, onda $f(x)$ funksiya $\{x\}$ kóplikte *jup (taq) funksiya* dep ataladı.

Eger $f(x)$ hám $g(x)$ funksiýalar $\{x\}$ kóplikte jup funksiýalar bolsa, onda $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$ funksiýalar da $\{x\}$ kóplikte jup funksiýalar boladı.

Eger $f(x)$ hám $g(x)$ funksiýalar $\{x\}$ kóplikte taq funksiýalar bolsa, onda $f(x) \pm g(x)$ funksiýalar $\{x\}$ kóplikte taq, al $f(x) \cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$ funksiýalar jup funksiýalar boladı.

Jup funkciyalardıń grafigi ordinatalar kóshetine qarata, al taq funkciyanıń grafigi koordinatalar basına qarata, simmetriyalıq boladı.

Funkciya hárdayım jum yaqi taq bolıwı shárt emes. Jum ta, taq ta bolmağan funkciyalar júdá kóp ushırasadı. Biraq mına teorema orınlı:

1- t e o r e m a. *Sanaq basına qarata simmetriyalıq kóplikte anıqlanğan hár bir funksiya jum hám taq funkciyalardıń qosındısı sıpatında anlatıladı.*

D á l i l l e w. Meyli, $f(x)$ funksiya sanaq basına qarata simmetriyalıq $\{x\}$ kóplikte anıqlanğan funksiya bolsın. Usı funksiya járdeminde $\varphi(x) := \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ hám $\psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ funkciyalardı dúzemiz. $\varphi(x)$ funksiya $\{x\}$ kóplikte jum, al $\psi(x)$ funksiya taq funksiya boladı. Sonıń menen birge bul funkciyalardıń qurılıwı boyınsha $\varphi(x) + \psi(x) = f(x)$ teńlik orınlı. ▲

1.4. Periodlı funkciyalar. Meyli, $f(x)$ funksiya bazı bir $\{x\} \subset R$ kóplikte anıqlanğan bolsın.

7- a n ı q 1 a m a. Eger $\forall x \in \{x\}$ ushın 1) $x - T \in \{x\}$, $x + T \in \{x\}$; 2) $f(x + T) = f(x)$ bolatuǵın $T \neq 0$ san tabılsa, onda $f(x)$ funksiya *periodlı funksiya* dep, al T san funkciyanıń *periodı* lep ataladı.

Mısalı, $y = \sin x$, $y = \cos x$ funkciyalar $T = 2\pi$ periodlı, al $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ funkciyalar $T = \pi$ periodlı funkciyalar.

Periodlı funkciyalardıń qásiyetleri:

a) Eger $f(x)$ funksiya $T \neq 0$ periodlı funksiya bolsa, onda $T_n = n \cdot T$ ($n \in Z$) sanlar da bul funkciyanıń periodı boladı.

Demek, $\pm T, \pm 2T, \dots$ sanlar $f(x)$ funkciyanıń periodı boladı eken. Bul funkciyanıń oń periodlarınń kópligin $\{T_+\}$ dep belgileybiz. Eger $T_0 = \inf \{T_+\}$ san funkciyanıń periodı bolsa, onda bul san funkciyanıń *eń kishi*

oń periodı (tiykarǵı periodı) dep ataladı. Funkciya eń kishi oń periodqa iye bolıwı da, bolmawı da múmkin.

b) Eger T_1 hám T_2 sanlar $f(x)$ funkciyanıń periodı bolsa, onda $T_1 \pm T_2 \neq 0$ sanlar da bul funkciyanıń periodı boladı.

c) Eger $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalardıń hár biri $T \neq 0$ periodlı funksiya bolsa, onda $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$ ($g(x) \neq 0$) funksiya da T periodlı funksiya boladı.

M ı s a l l a r. № 1. $y = \sin x$, $y = \cos x$ funkciyalardıń periodlar kópligi $\{2k\pi: k \in \mathbb{Z}\}$ bolıp, eń kishi oń periodı $T = 2\pi$, al $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ funkciyalardıń periodlar kópligi $\{n\pi: n \in \mathbb{Z}\}$ bolıp, eń kishi oń periodı $T_0 = \pi$.

№ 2. $f(x) \equiv C - \text{const.}$ funkciyanıń periodı $\forall T \neq 0$ san bolıp, bul funkciyanıń eń kishi oń periodı joq.

№ 3. $f(x) = \{x\}$ ($\{x\}$ – x sannıń bólshek bólegi) funkciyanıń periodlar kópligi $\{m: m = \pm 1, \pm 2, \dots\}$ bolıp, eń kishi oń periodı $T_0 = 1$.

№ 4. $\forall T \neq 0$ racional san

$$D(x) = \begin{cases} 0, & x - \text{irrac. san}, \\ 1, & x - \text{rac. san}. \end{cases}$$

Dirixle funkciyasınıń periodı boladı. Haqıyqatında da, $\forall T \neq 0$ racional san ushın

$$x + T = \begin{cases} \text{irrac. san}, & x - \text{irrac. san}, \\ \text{rac. san}, & x - \text{rac. san}. \end{cases}$$

bolǵanlıqtan

$$D(x + T) = \begin{cases} 0, & x - \text{irrac. san}, \\ 1, & x - \text{rac. san}. \end{cases}$$

boladı. Sonıń ushın $\forall x \in \mathbb{R}$ ushın $D(x + T) = D(x)$ teńlik orınlı. Demek, $D(x)$ - Dirixle funkciyası periodlı funksiya bolıp, $\forall T \neq 0$ racional san onıń periodı boladı. Bul funksiya ushın eń kishi oń period joq.

Endi bazı bir $T \neq 0$ irracional sandı alayıq. x – racional san bolsa da, irracional san bolsa da $x + T$ – irracional san bolıp, $D(x + T) = 0$ teńlik orınlı, yaǵnıy $D(x + T) = D(x)$ teńlik orınlanbaydı. Sonıń ushın $\forall T \neq 0$ irracional san $D(x)$ - Dirixle funkciyasınıń periodı emes.

1.5. Monoton funkciyalar. Meyli, $f(x)$ funkciya bazı bir $\{x\} \subset R$ kóplikte anıqlanǵan bolsın.

8- a n ı q l a m a. Eger $x_1 < x_2$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı $\forall x_1, x_2 \in \{x\}$ noqatlarda $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$) teńsizlik orınlı bolsa, onda $f(x)$ funkciya bazı bir $\{x\}$ kóplikte *ósiwshi (kemiwshi) funkciya* dep ataladı.

9- a n ı q l a m a. Eger $x_1 < x_2$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı $\forall x_1, x_2 \in \{x\}$ noqatlarda $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$) teńsizlik orınlı bolsa, onda $f(x)$ funkciya bazı bir $\{x\}$ kóplikte *qatal ósiwshi (qatal kemiwshi) funkciya* dep ataladı.

Ósiwshi (qatal ósiwshi) hám kemiwshi (qatal kemiwshi) funkciyalar, ulıwma atama menen, *monoton funkciyalar* dep ataladı.

Meyli, $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar $\{x\}$ kóplikte ósiwshi (kemiwshi) funkciyalar, al C – turaqlı san bolsın.

a) $f(x) + C$ funkciya $\{x\}$ kóplikte ósiwshi (kemiwshi) funkciya.

b) $C \cdot f(x)$ funkciya $C > 0$ bolǵanda ósiwshi (kemiwshi), al $C < 0$ bolǵanda kemiwshi (ósiwshi) funkciya.

c) $f(x) + g(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte ósiwshi (kemiwshi) funkciya.

1.6. Keri funkciya. Meyli, $f(x)$ funkciya bazı bir $\{x\} \subset R$ kóplikte anıqlanǵan bolıp, onıń mánisler kópligi $\{y\} = \{f(x) : x \in \{x\}\}$ bolsın.

Eger málim qaǵıyda boyınsha $\forall y \in \{y\}$ noqatqa jalǵız bir $x \in \{x\}$ noqat qoyılsa, onda $\{y\}$ kóplikte $f(x)$ funkciyaǵa *keri funkciya* anıqlanǵan dep aytıladı hám bul funkciya $x = f^{-1}(y)$ dep belgilenedi.

$y = f(x)$ funkciyağa keri funkciyanın grafiği $f(x)$ funkciyanın grafiğın I hám III shereklerdın bissektırsası dógeresinde 180° ğa burıw nátiyjesinde alınadı.

1.7. Quramalı funkciya. Meyli, $y = f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte anıqlanğan bolıp, onıń mánisler kópligi $\{y\} = \{f(x) : x \in \{x\}\}$ bolsın. Óz nábwetinde $\{y\}$ kóplikte $z = \varphi(y)$ funkciya anıqlanğan bolsın. Nátiyjede $\forall x \in \{x\}$ noqatqa bir $y \in \{y\}$ ($f : x \rightarrow y$) noqat, al bul noqatqa óz nábwetinde bir z ($\varphi : y \rightarrow z$) noqat sáykes qoyıladı: $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{\varphi} z$. Demek, $\forall x \in \{x\}$ noqatqa bir z noqat sáykes qoyıladı.

Ádette, bunday jaǵdayda f hám φ funkciyalardıń quramalı funkciyası berilgen dep ayıladı hám $z = \varphi(f(x))$ dep belgilenedi.

2-§. Funkciyanıń limiti

2.1. Kópliktiń limit noqatı. $(a - \delta, a + \delta)$ intervalı $a \in R$ noqattıń $\delta -$ dógeregi dep atalatuǵını hám $U_\delta(a)$ simvolı menen belgilenetuǵını málim: $U_\delta(a) := (a - \delta, a + \delta)$.

Sonıń menen birge $(a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ kóplik $a \in R$ noqattıń oyılğan $\delta -$ dógeregi dep ataladı hám $U_\delta^0(a)$ simvolı menen belgilenendi: $U_\delta^0(a) = U_\delta(a) \setminus \{a\}$.

$$U(\infty) = \{x \in R : |x| > M\}, \quad U(-\infty) = \{x \in R : x < -M\}, \\ U(+\infty) = \{x \in R : x > M\}$$

kóplikler (bul jerde $M > 0$), sáykes túrde, ∞ , $-\infty$, $+\infty$ «noqat»larınıń dógeregi dep ataladı.

10- a n ı q ı l a m a. $a \in R$ noqattıń qálegen $\forall \delta -$ dógeresinde $\{x\}$ kópliktiń a noqattan ózgeshe keminde bir noqatı bar bolsa, onda a noqat $\{x\}$ kópliktiń limit noqatı dep ataladı.

Kópliktin limit noqatı usı kóplikke derek bolıwı da, bolmawı da múmkin.

Q á s i y e t l e r i. 1) *Kópliktin limit noqatının qálegen dógeresinde bul kópliktin sheksiz kóp noqatı bar.*

Kerisinen dálilleybiz. Meyli, a noqattın bazı bir $U_{\sigma}(a)$ dógeresine $\{x\}$ kópliktin shekli sandağı $a_1, a_2, \dots, a_n$ noqatları derek bolsın. Onda, eger $|a - a_1|, |a - a_2|, \dots, |a - a_n|$ hám σ sanlardın eń kishisin δ dep alsaq, a noqattın $U_{\delta}(a)$ dógeresinde $\{x\}$ kópliktin a noqattan ózgeshe hesh bir noqatı bolmaydı. Bul a noqattın $\{x\}$ kópliktin limit noqatı ekenligine qarama- qarsı.



2) *Kópliktin noqatlarınan bul kópliktin limit noqatına jıynaqlı izbe- izlik dúziw múmkin.*

Nolge jıynaqlı $\{\delta_n\}$ oń sanlar izbe- izligin alıp, a noqattın $U_{\delta_n}(a)$ dógerelerin dúzemiz. a noqat $\{x\}$ kópliktin limit noqatı bolğanlıqtan bul dógerelerdin hár birewinde $\{x\}$ kópliktin a noqattan ózgeshe x_n noqatı bar: $x_n \in U_{\delta_n}(a)$ ($x_n \neq a$). Kópliktin limit noqatının 1- qásiyetinen bul x_n noqattı $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ noqatlardan ózgeshe kılıp alıw múmkin. Solay etip, $\forall n \in \mathbb{N}$ ushın $|x_n - a| < \delta_n$ boladı. $\{\delta_n\}$ izbe- izligi sheksiz kishi izbe- izlik bolğanlıqtan $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $\exists N = N(\varepsilon)$ nomer tabılıp, $n > N$ nomerler ushın $|\delta_n| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı boladı. Demek, $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $\exists N = N(\varepsilon)$ nomer tabılıp, $n > N$ nomerler ushın $|x_n - a| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı, al bul $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ bolatuǵının bildiredi. ▲

Tastıyıqlawdın dálillewinen kópliktin elementlerinen usı kópliktin limit noqatına jıynaqlı bolğan júdá kóp izbe- izlik dúziw múmkinligi kórinip tur.

11- a n ı q 1 a m a. Eger $U(\infty)$ ($U(-\infty)$, $U(+\infty)$) dógerekte $\{x\}$ kópliktin keminde bir noqatı tabılsa, onda $-\infty$ «»noqat ($-\infty$ «»noqat. $+\infty$ «»noqat) $\{x\}$ kópliktin limit noqatı dep ataladı.

2.2. Funkciyanıń noqattaǵı limitiniń anıqlamaları. Meyli, $y = f(x)$

funkciya $\{x\}$ kóplikte anıqlanǵan funkciya, al a noqat $\{x\}$ kópliktiń limit noqatı bolsın.

12- a n ı q ı l a m a. (Funkciyanıń noqattaǵı limitiniń Geyne anıqlaması). Eger argumenttiń a noqattan ózgeshe mánislerinen dúzilgen, a noqatqa jıynaqlı $\forall \{x_n\}$ izbe- izlikke sáykes funkciyanıń dara mánislerinen dúzilgen $\{f(x_n)\}$ izbe- izlik b sanına jıynaqlı bolsa, onda $y = f(x)$ funkciyanıń a noqattaǵı ($x \rightarrow a$ daǵı) limiti b sanına teń deymiz hám $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ (yaki $x \rightarrow a$ da $f(x) \rightarrow b$) dep jazamız.

M ı s a l l a r. 1) $f(x) \equiv c$ (c – turaqlı san) funkciya sanlar kósheriniń qálegen noqatında limitke iye hám bul limit c sanına teń.

2) $f(x) = x$ funkciya sanlar kósheriniń $\forall a$ noqatında limitke iye hám bul limit a sanına teń.

3) $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$ funkciyanıń $x = 4$ noqattaǵı limitin tabamız.

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 4$ ($\forall n \in N$ $x_n \neq 4$) bolǵan $\forall \{x_n\}$ izbe- izlik alamız. Bul izbe- izlikke saykes funkciyanıń dara mánislerinen dúzilgen izbe- izlik

$f(x_n) = \frac{x_n^2 - 16}{x_n^2 - 4x_n} = \frac{x_n + 4}{x_n}$ kóriniste bolıp, limiti 2 ge teń. Demek,

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} = 2.$$

13- a n ı q ı l a m a. (Funkciyanıń noqattaǵı limitiniń Koshi anıqlaması). Eger $\forall \varepsilon > 0$ can ushın $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sanı tabılıp, $0 < |x - a| < \delta$ shártin qanaatlandırıwshı $\forall x \in \{x\}$ noqatta $|f(x) - b| < \varepsilon$ teńsizligi orınlı bolsa, onda $y = f(x)$ funkciyanıń a noqattaǵı ($x \rightarrow a$ daǵı) limiti b sanına teń deymiz.

М і с а л. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ функciяның $x = 1$ нoқаттағы limiti 2 ге тең екенін

кórsetеміз. $\forall \varepsilon > 0$ сáн ушын $\delta = \varepsilon$ деп алақ, $|x - 1| < \delta$ ($x \neq 1$) шáртін

қанаатландırıwshı $\forall x \in \{x\}$ нoқатта $\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = |x + 1 - 2| = |x - 1| < \delta = \varepsilon$

теңсизлиги орынлı болadı. Демек, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

1- е с к е р т і w. Гейне аңқламасındaғы $\{x_n\}$ ізбе- изликтің элементлерінің a нoқаттан óзгесhe болıwı hám Koshi аңқламасındaғы аргументтің мánислери $0 < |x - a| < \delta$ шáртін қанаатландırıwı, яғнıy a нoқаттан óзгесhe болıwı, шáртлери úлкен áһмийетке iye. Бул талaptıң қoyılıwı себеби- $y = f(x)$ функciя a нoқатта аңқланбаған болıwı да мýмkin.

2- е с к е р т і w. Гейне аңқламасıның шáртлери қанаатландırıwshı $\{x_n\}$ ізбе- изликлерге сáyкес функciяның дара мánислеринен дýзилген $\{f(x_n)\}$ ізбе- изликлердің бáри бир саңға- b саңına жıyнақлı болıwı керек. Егер бундай болмаса (яғнıy $\{f(x_n)\}$ ізбе- изликлер hár қıylı саңларға жıyнақлı болса), онда функciя a нoқатта limitке iye емес. Мıсallар келтиреміз.

№ 1. $D(x)$ - Диріxле функciyası саңлар кóшерінің hesh бир нoқатında limitке iye емес. Haқıyқатında да, $a \in R$ нoқатına жıyнақлı racional саңлар ізбе- излиги ушын функciяның сáyкес дара мánислерінің ізбе- излигінің limiti 1 ге, ал a нoқатına жıyнақлı irrational саңлар ізбе- излиги ушын функciяның сáyкес дара мánислерінің ізбе- излигінің limiti 0 ге тең.

№ 2. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ функciяның аңқланıw обласı $D(f) = R \setminus \{0\}$ болıp, $x = 0$

нoқат функciяның $D(f)$ аңқланıw обласıның limit нoқатı.

$x = 0$ нoқатқа жıyнақлı $x'_n = \frac{1}{n\pi}$ ($n = 1, 2, \dots$) саңлар ізбе- излигін аламыз.

Бул ізбе- излик элементлеріне сáyкес функciяның дара манислеринен дýзилген

izbe- izlik elementleri $f(x'_n) = \sin(n\pi) = 0$ bolıp, bul izbe- izliktiń limiti nolge teń.

$x = 0$ noqatqa jıynaqlı $x''_n = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi}$ ($n = 1, 2, \dots$) sanlar izbe- izligin alamız. Bul izbe- izlik elementlerine sáykes funkciyanıń dara mánislerinen dúzilgen izbe- izlik elementleri $f(x''_n) = \sin(\pi/2 + 2n\pi) = 1$ bolıp, bul izbe- izliktiń limiti 1 ge teń.

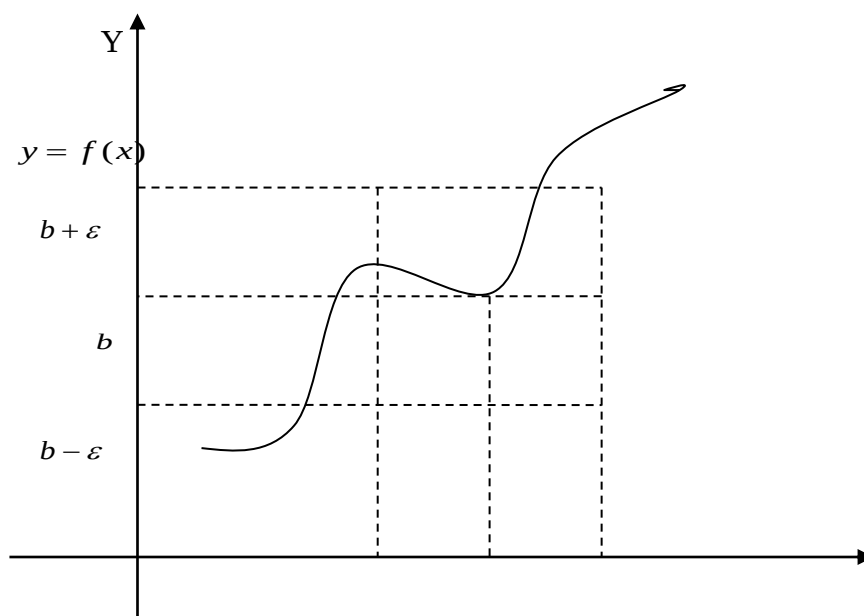
Demek, berilgen funksiya $x = 0$ noqatta limitke iye emes.

3- e s k e r t i w. $y = f(x)$ funksiya anıqlanǵan $\{x\}$ kóplik a noqattıń bazı bir δ – dógeregin tolıq qaplawı shárt emes. Bul kópliktiń a noqattıń qálegen oyılǵan δ – dógereginde keminde bir noqatı bar bolıwı ǵana talap etiledi.

4- e s k e r t i w. Koshi anıqlamasındaǵı $0 < |x - a| < \delta$ shárti $a - \delta < x < a + \delta$, $x \neq a$ qatnaslargá, yaǵnıy $x \in U_\delta^0(a)$ shártine ekvivalent, sonday- aq, $|f(x) - b| < \varepsilon$ teńsizligi $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$ teńsizliklerine, yaǵnıy $f(x) \in U_\varepsilon(b)$ shártine ekvivalent.

5- e s k e r t i w. $f(x)$ funkciyanı aldınnan berilgen $\varepsilon > 0$ anıqlıqta juwıqlastırıw ideyasınan paydalanıp, funkciyanıń noqattaǵı limitiniń Koshi anıqlamasın tómendegishe basqasha aytıwımız da múmkin.

Eger aldınnan berilgen qálegen $\varepsilon > 0$ anıqlıq ushın a noqattıń sonday oyılǵan δ – dógeregin kórsetiw múmkin bolıp, argumenttiń a noqattıń usı kórsetilgen oyılǵan dógereginde derek mánisleri ushın b sanı $f(x)$ funkciyanı $\varepsilon > 0$ anıqlıqta juwıqlastırsa, onda b sanı $f(x)$ funkciyanıń a noqattaǵı limiti dep ataladı (1- súwret).



1- súwret

6- e s k e r t i w. $f(x)$ funkciya a noqatta jalǵız bir limitke iye boladı. Haqıyqatında da, funkciyanıń noqattaǵı limitiniń Geyne anıqlaması ushın bul $\{f(x_n)\}$ izbe- izliginiń limitiniń birden- birliginen, al Koshi anıqlaması ushın tómendegi ekvivalentlik teoremasınan kelip shıǵadı.

2- t e o r e m a. *Funkciyanıń noqattaǵı limitiniń Geyne hám Koshi anıqlamaları óz- ara ekvivalent.*

D á l i l l e w. 1) Dáslep, meyli, b sanı $f(x)$ funkciyanıń a noqattaǵı Koshi anıqlaması boyınsha limiti bolsın. Usı b sanı $f(x)$ funkciyanıń a noqattaǵı Geyne anıqlaması boyınsha da limiti bolatuǵının dálilleymiz. Meyli, $\{x_n\}$ - elementleri a noqattan ózgeshe, a noqatqa jıynaqlı qálegen izbe- izlik bolsın, usı izbe- izlikke sáykes funkciyanıń dara mánislerinen dúzilgen $\{f(x_n)\}$ izbe- izliktiń b noqatqa jıynaqlı ekenin dálillew talap qılınadı.

$\forall \varepsilon > 0$ sanın hám bul san boyınsha $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sanın $0 < |x - a| < \delta$ shártin qanaatlandıırıwshı $\forall x \in \{x\}$ noqatta $|f(x) - b| < \varepsilon$ teńsizligi orınlı bolatuǵınday qılıp saylap alamız.

$\{x_n\}$ izbe- izlik a noqatqa jıynaqlı bolǵanlıqtan saylap alıńan $\delta > 0$ sanı ushın $\exists N$ nomer tabılıp, $n > N$ nomerler ushın $|x_n - a| < \delta$ teńsizlik orınlı

boladı. $\forall n$ nomer ushın $x_n \neq a$ bolǵanlıqtan $n > N$ nomerler ushın $0 < |x_n - a| < \delta$ teńsizlik orınlı hám Koshi anıqlaması boyınsha $n > N$ nomerler ushın $|f(x_n) - b| < \varepsilon$ teńsizlik orınlanadı. Bul $\{f(x_n)\}$ izbe-izliktiń b noqatqa jıynaqlı ekenin bildiredi.

2) Meyli, b sanı $f(x)$ funkciyanıń a noqattaǵı Geyne anıqlaması boyınsha limiti bolsın. Usı b sanı $f(x)$ funkciyanıń a noqattaǵı Koshi anıqlaması boyınsha da limiti bolatuǵının kórsetemiz. Meyli, bunday bolmasın, onda bazı bir $\varepsilon > 0$ hám jetkilikli dárejede kishi $\delta > 0$ san ushın $0 < |x - a| < \delta$ shártti qanaatlandırıwshı keminde bir $x \in \{x\}$ noqat tabılıp, $|f(x) - b| \geq \varepsilon$ teńsizlik orınlı boladı.

Solay etip, biz $\delta_n = \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$) sanlardan dúzilgen izbe-izlik alıwımız hám bul sanlardıń hár biri ushın $0 < |x_n - a| < \delta_n$ shártti qanaatlandırıwshı keminde bir $x_n \in \{x\}$ noqat tabılıp, $|f(x_n) - b| \geq \varepsilon$ teńsizlik orınlı boladı dep tastıyıqlawımız múmkin eken. $0 < |x_n - a| < \delta_n$ teńsizlikler $\{x_n\}$ izbe-izlik elementleri a noqattan ózgeshe, biraq a noqatqa jıynaqlı izbe-izlik ekenin bildiredi. Geyne anıqlaması boyınsha sáykes $\{f(x_n)\}$ izbe-izlik b sanǵa jıynaqlı bolıwı kerek, al buǵan hámme n nomerler ushın orınlı bolǵan $|f(x_n) - b| \geq \varepsilon$ teńsizlik qarama-qarsı keledi. Demek, b sanı $f(x)$ funkciyanıń a noqattaǵı Koshi anıqlaması boyınsha da limiti boladı eken. ▲

2.3. Funkciyanıń bir tárepli limitleri. Funkciyanıń berilgen a noqattaǵı bir tárepli (shep yaki oń) limiti túsinigin kiritemiz. Meyli, $y = f(x)$ funkciyanıń anıqlanıw oblastı bolǵan $\{x\} \subset R$ kóplik $\forall \delta > 0$ ushın a noqattıń $U_\delta^+(a) = (a, a + \delta)$ oń ($U_\delta^-(a) = (a - \delta, a)$ shep) δ – dógereginde keminde bir elementke iye bolsın.

14- a n ı q 1 a m a. (Funkciyanıń noqattaǵı bir tárepli limitiniń Geyne anıqlaması). Eger argumenttiń a sanınan úlken (kishi) mánislerinen dúzilgen

hám a noqatqa jıynaqlı $\forall \{x_n\}$ izbe- izlikke sáykes funkciyanıń dara mánislerinen dúzilgen $\{f(x_n)\}$ izbe- izlik b sanına jıynaqlı bolsa, onda b sanı $f(x)$ funkciyanıń a noqattaǵı óń (shep) limiti dep ataladı hám $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$ ($\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$) yaki $f(a+0) = b$ ($f(a-0) = b$) dep jazıladı.

15- a n ı q 1 a m a. (Funkciyanıń noqattaǵı bir tárepli limitiniń Koshi anıqlaması). Eger $\forall \varepsilon > 0$ can ushın $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ sanı tabılıp, $a < x < a + \delta$ ($a - \delta < x < a$) shártin qanaatlandıırıwshı $\forall x \in \{x\}$ noqatta $|f(x) - b| < \varepsilon$ teńsizligi orınlı bolsa, onda b sanı $f(x)$ funkciyanıń a noqattaǵı óń (shep) limiti dep ataladı.

3- t e o r e m a. Funkciyanıń noqattaǵı bir tárepli limitiniń Geyne hám Koshi anıqlamaları ekvivalent.

M ı s a l. $y = \operatorname{sgn} x$ funksiya $x = 0$ noqatta hám óń, hám shep limitke iye hám $\lim_{x \rightarrow 0+0} \operatorname{sgn} x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0-0} \operatorname{sgn} x = -1$. Bul funksiya $x = 0$ noqatta limitke iye emes. Bul mına teoremadan kelip shıǵadı.

4- t e o r e m a. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ bolıwı ushın $f(x)$ funksiya a noqatta bir tárepli $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ hám $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ limitlerge iye bolıp

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$$

teńlikler orınlı bolıwı zárúr hám jetkilikli.

Bul teorema keltirilgen anıqlamalardan tikkeley kelip shıǵadı.

Funkciyanıń $x \rightarrow \infty$ daǵı limiti túsiniǵın kiritemiz. Bunıń ushın $y = f(x)$ funkciyanıń anıqlanıw oblastı bolǵan $\{x\} \subset R$ kópliktiń $\forall \delta > 0$ ushın $[-\delta, \delta]$ kesindiniń sırtında keminde bir elementi bar bolıwın talap etemiz.

16- a n ı q 1 a m a. (Funkciyanıń $x \rightarrow \infty$ daǵı limitiniń Geyne anıqlaması). Argumenttiń mánisleriniń qálegen sheksiz úlken $\{x_n\}$ izbe- izligi

ushın funkciyanıń sáykes dara mánisleriniń $\{f(x_n)\}$ izbe-izligi b sanına jıynaqlı bolsa, onda b sanı $f(x)$ funkciyanıń $x \rightarrow \infty$ daǵı limiti dep ataladı hám $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ dep jazıladı.

17- a n ı q l a m a. (Funkciyanıń $x \rightarrow \infty$ daǵı limitiniń Koshi anıqlaması). Eger $\forall \varepsilon > 0$ can ushın $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ sanı tabılıp, $|x| > \delta$ shártin qanaatlandırıwshı $\forall x \in \{x\}$ noqatta $|f(x) - b| < \varepsilon$ teńsizligi orınlı bolsa, onda $y = f(x)$ funkciyanıń $x \rightarrow \infty$ daǵı limiti b sanına teń deymiz.

Funkciyanıń argumenti málim belgidegi sheksizlikke umılǵandaǵı limiti túsiniǵin kiritemiz. Bunıń ushın $y = f(x)$ funkciyanıń anıqlanıw oblastı bolǵan $\{x\} \subset R$ kópliktiń $\forall \delta > 0$ ushın δ noqattıń oń tárepinde ($-\delta$ noqattıń shep tárepinde) keminde bir elementi bar bolıwın talap etemiz.

18- a n ı q l a m a. (Funkciyanıń $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) daǵı limitiniń Geyne anıqlaması). Argumenttiń oń (teris) mánisleriniń qálegen sheksiz úlken $\{x_n\}$ izbe-izligi ushın funkciyanıń sáykes dara mánisleriniń $\{f(x_n)\}$ izbe-izligi b sanına jıynaqlı bolsa, onda b sanı $f(x)$ funkciyanıń $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) daǵı limiti dep ataladı hám

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \quad (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b)$$

dep jazıladı.

19- a n ı q l a m a. (Funkciyanıń $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) daǵı limitiniń Koshi anıqlaması). Eger $\forall \varepsilon > 0$ can ushın $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ sanı tabılıp, $x > \delta$ ($x < -\delta$) shártin qanaatlandırıwshı $\forall x \in \{x\}$ noqatta $|f(x) - b| < \varepsilon$ teńsizligi orınlı bolsa, onda $y = f(x)$ funkciyanıń $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) daǵı limiti b sanına teń deymiz.

E s k e r t i w. $\{x_n\}$ sanlı izbe-izliktiń limiti túsiniǵin funkciyanıń $x \rightarrow +\infty$ daǵı limitiniń dara jaǵdayı sıpatında qaraw múmkin. Haqıyqatında da, eger $\{x\} \subset R$ kóplik sıpatında natural sanlar kópligin, al bul kóplikte

anıqlanğan $f(x)$ funkciya sıpatında hár bir n natural sanğa $\{x_n\}$ izbe-izliktiń n -elementin sáykes qoyıwshı funkciyanı alsaq, onda bul funkciyanıń $x \rightarrow +\infty$ daǵı limitiniń 19-anıqlaması sanlı izbe-izliktiń limitiniń anıqlamasın beredi.

2.4. Shekli limitke iye funkciyalardıń qásiyetleri. Shekli limitke iye funkciyalar da jıynaqlı izbe-izlikler sıyaqlı bir qatar qásiyetlerge iye. Olardıń kópshiliginiń dálilleniwı jıynaqlı izbe-izliklerdiń sáykes qásiyetlerine uqsas, sebebi funkciyanıń nokattaǵı limiti túsiniǵı sanlar izbe-izliginiń limiti túsiniǵıne tiykarlanadı (Geyne anıqlaması). Usını itibarǵa alıp, tómende keltiriletuǵın qásiyetlerdiń geyparaların dálilleymiz, qalǵanların oqıwshıǵa óz betinshe dálillewi ushın usınamız.

Meyli, $f(x)$ funkciya $\{x\} \subset R$ kóplikte anıqlanğan, a noqat $\{x\}$ kópliktiń limit noqatı bolsın.

1⁰. Eger $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ bolıp, $b > p$ ($b < q$) bolsa, onda a noqattıń $\exists \overset{0}{U}_\delta(a)$ dógeregi tabılıp, $\forall x \in \overset{0}{U}_\delta(a)$ noqatta $f(x) > p$ ($f(x) < q$) teńsizlik orınlı boladı.

Dara jaǵdayda, eger $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ bolıp, $b > 0$ ($b < 0$) bolsa, onda a noqattıń $\exists \overset{0}{U}_\delta(a)$ dógeregi tabılıp, $\forall x \in \overset{0}{U}_\delta(a)$ noqatta $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) teńsizlik orınlı boladı.

2⁰. Eger $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ bolsa, onda a noqattıń $\exists \overset{0}{U}_\delta(a)$ dógeregi tabılıp, bul dógerekte $f(x)$ funkciya shegaralanğan boladı.

D á l i l l e w. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ bolsa, funkciyanıń noqattaǵı limitiniń Koshi anıqlaması boyınsha argumenttiń $\overset{0}{U}_\delta(a)$ dógerekten alınğan mánislerinde $|f(x) - b| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı. Bul teńsizlik $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$ teńsizliklerge

ekvivalent. Al bul $f(x)$ funkciyanıń a noqattıń $\overset{0}{U}_\delta(a)$ dógeresinde shegaralanǵanlıǵın bildiredi. ▲

E s k e r t i w. Bazı bir noqat dógeresinde shegaralanǵan funksiya bul noqatta shekli limitke iye bolıwı shárt emes. Mısalı, $y = \sin \frac{1}{x}$ funksiya shegaralanǵan (dara jaǵdayda, $x=0$ noqattıń qálegen oyılǵan dógeresinde shegaralanǵan) funksiya, biraq bul funksiya $x=0$ noqatta limitke iye emes.

3⁰. Meyli, $f(x)$ hám $g(x)$ funksiya $\{x\} \subset R$ kóplikte anıqlanǵan, a noqat $\{x\}$ kópliktıń limit noqatı bolsın.

Eger $\forall x \in \overset{0}{U}_\delta(a)$ noqatta $f(x) \leq g(x)$ teńsizlik orınlansa hám $f(x)$ hám $g(x)$ funksiya a noqatta shekli limitke iye bolsa, onda $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ teńsizlik orınlı boladı.

4⁰. Eger $\forall x \in \overset{0}{U}_\delta(a)$ noqatta $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ teńsizlikler orınlansa hám $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ bolsa, onda $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$ boladı.

D á l i l l e w. Meyli, $\{x_n\}$ – elementleri a noqattan ózgeshe, a noqatqa jıynaqlı qálegen izbe- izlik bolsın. Onda funkciyanıń noqattaǵı limitiniń Geyne anıqlaması boyınsha sáykes $\{f(x_n)\}$ hám $\{g(x_n)\}$ izbe- izlikler b sanǵa jıynaqlı. Tastıyıqlawdıń shárti boyınsha $\forall n \in N$ ushın $f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n)$ teńsizlikler orınlı. 3- baptıń 6- teoreması boyınsha $\{h(x_n)\}$ izbe-izlik te b sanǵa jıynaqlı boladı. Al bul óz nábбетinde $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$ bolatuǵının bildiredi. ▲

Shekli limitke iye funksiyaardıń bul qásiyeti funksiya ushın *eki jaqlap shegaralaw principini* dep ataladı.

5- t e o r e m a (Shekli limitke iye funksiya ustinde arifmetikalıq ámeller). Meyli, $f(x), g(x)$ funksiya a noqattıń bazı bir $U(a)$ dógeresinde anıqlanǵan funksiya bolıp, bul noqatta shekli limitke iye

bolsın Onda bul funksiylardıń qosındısı, ayırması, kóbeymesi hám qatnası a noqatta limitke iye bolıp,

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad (\forall x \in U(a) \quad g(x) \neq 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0)$$

teńlikler orınlı.

D á l i l l e w. Meyli, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ bolsın. Elementleri a noqattan ózgeshe, a noqatqa jıynaqlı qálegen $\{x_n\}$ izbe- izlik alamız. Funkciyanıń noqattaǵı limitiniń Geyne anıqlaması boyınsha sáykes $\{f(x_n)\}$ hám $\{g(x_n)\}$ izbe- izlikler, sáykes túrde, b hám c sanlarǵa jıynaqlı. Jıynaqlı izbe- izlikler ústinde arifmetikalıq ámeller haqqındaǵı teorema boyınsha $\{f(x_n) + g(x_n)\}$, $\{f(x_n) - g(x_n)\}$, $\{f(x_n) \cdot g(x_n)\}$, $\{f(x_n)/g(x_n)\}$ izbe- izlikler, sáykes túrde, $b + c$, $b - c$, $b \cdot c$, b/c ($c \neq 0$) sanlarǵa jıynaqlı. Al bul $\{x_n\}$ - elementleri a noqattan ózgeshe, a noqatqa jıynaqlı qálegen izbe- izlik bolǵanlıqtan Geyne anıqlaması boyınsha

$$f(x) + g(x), \quad f(x) - g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad f(x)/g(x)$$

funkciyalar a noqatta, sáykes túrde, $b + c$, $b - c$, $b \cdot c$, b/c ($c \neq 0$) sanlarǵa teń limitke iye bolatuǵının bildiredi. ▲

E s k e r t i w. Qosındısı (ayırması), kóbeymesi hám qatnası noqatta shekli limitke iye eki funksiyanıń hár biri usı noqatta limitke iye bolıwı shárt emes.

Mısalı, $f(x) = 1 - \sin \frac{1}{x}$ hám $g(x) = \sin \frac{1}{x}$ funksiylardıń qosındısı

$f(x) + g(x) \equiv 1$ bolıp, qálegen noqatta (dara jaǵdayda, $x = 0$ noqatta) 1 ge teń limitke iye, biraq $x = 0$ noqatta $f(x)$ funksiya da, $g(x)$ funksiya da limitke iye emes.

2.5. Quramalı funkciyanıń limiti. Meyli, $\{x\} \in R$ kóplikte $t = \varphi(x)$ funkciya anıqlanǵan, al bul funkciyanıń $\{t\} \subset R$ mánisler kópliginde $y = f(t)$ funkciya anıqlanǵan bolıp, bul funkciyalar járdeminde $y = f(\varphi(x))$ quramalı funkciya dúzilgen bolsın. Bul quramalı funkciya $\{x\}$ kóplikte anıqlanǵan. Meyli, a noqat $\{x\}$ kópliktiń limit noqatı bolsın.

6- t e o r e m a. *Eger*

1) $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = c$ hám a noqattıń $\exists \overset{0}{U}_\delta(a)$ dógeregi tabılıp, $\forall x \in \overset{0}{U}_\delta(a)$

noqatta $\varphi(x) \neq c$ bolsa;

2) c noqat $\{t\}$ kópliktiń limit noqatı bolıp, $\lim_{t \rightarrow c} f(t) = b$ bolsa,

onda $y = f(\varphi(x))$ quramalı funkciya a noqatta limitke iye hám $\lim_{x \rightarrow a} f(\varphi(x)) = b$ teńlik orınlı boladı.

D á l i l l e w. Teoremanıń shárti boyınsha $\lim_{t \rightarrow c} f(t) = b$. Funkciyanıń noqattaǵı limitiniń anıqlaması boyınsha $\forall \varepsilon > 0$ ushın $\exists \sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$ tabılıp, $\forall t \in \overset{0}{U}_\sigma(c)$ noqat ushın $f(t) \in U_\varepsilon(b)$ boladı.

Endi teoremanıń shárti boyınsha $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = c$ hám a noqattıń $\exists \overset{0}{U}_\delta(a)$ dógeregi tabılıp, $\forall x \in \overset{0}{U}_\delta(a)$ noqatta $\varphi(x) \neq c$ hám limit anıqlaması boyınsha joqarıdaǵı $\sigma > 0$ san ushın $\exists \delta = \delta(\sigma) > 0$ tabılıp, $\forall x \in \overset{0}{U}_\delta(a)$ noqat ushın $\varphi(x) \in \overset{0}{U}_\sigma(c)$ boladı. Solay etip, $\forall \varepsilon > 0$ ushın $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tabılıp, $\forall x \in \overset{0}{U}_\delta(a)$ noqat ushın $t = \varphi(x) \in \overset{0}{U}_\sigma(c)$ hám $f(t) \in U_\varepsilon(b)$ boladı. Bul $\lim_{t \rightarrow c} f(t) = \lim_{x \rightarrow a} f(\varphi(x)) = b$ teńlik orınlı bolatuǵının bildiredi. ▲

E s k e r t i w. Teoremadaǵı a noqattıń $\overset{0}{U}_\delta(a)$ dógeresinde $\varphi(x) \neq c$ bolıw shártin $f(t)$ funkciya $t = c$ noqatta anıqlanǵan hám $\lim_{t \rightarrow c} f(t) = f(c) = b$ teńlikler orınlı bolıw shárti menen almasıw múmkin.

Haqıyqatında da, eger $\forall x \in U_{\delta}^0(a)$ noqat ushın $\varphi(x) \neq c$ bolsa, teoremanıń dálilleniwi anıq: eger $\varphi(x) = c$ bolsa, $f(\varphi(x)) = f(c) = b$ bolıp, $|f(\varphi(x)) - b| = 0$ boladı. Solay etip, $\forall x \in U_{\delta}(a)$ noqat ushın $f(\varphi(x)) \in U_{\varepsilon}(b)$ boladı.

Usıǵan uqsas, a, c hám b noqatlardıń birewi shekli, ekinshisi sheksiz yaki hámmesi sheksiz bolǵan jaǵdayda da teorema orınlı boladı.

2.6. Monoton funkciyanıń limiti. $\{x\} \subset R$ kóplik berilgen bolıp, a noqat (shekli yaki $+\infty$) bul kópliktiń limit noqatı bolıp, $\forall x \in \{x\}$ ushın $x \leq a$ teńsizlik orınlı bolsın. $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte anıqlanǵan bolsın.

7- t e o r e m a. Meyli, $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte ósiwshi funkciya bolsın. Eger bul funkciya $\{x\}$ kóplikte joqarıdan shegaralanǵan bolsa, onda a noqatta shekli limitke iye, al joqarıdan shegaralanbaǵan bolsa, funkciyanıń a noqattaǵı limiti $+\infty$ boladı.

D á l i l l e w. Meyli, $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte ósiwshi hám shegaralanǵan funkciya bolsın. Onda funkciyanıń mánislerinen dúzilgen $\{y\} = \{f(x) : x \in \{x\}\}$ kóplik joqarıdan shegaralanǵan bolıp, dál joqarǵı shegaraǵa iye boladı: $b := \sup_{x \in \{x\}} f(x)$. Dál joqarǵı shegara qásiyeti boyınsha

$\forall x \in \{x\}$ noqat ushın $f(x) \leq b$ bolıp, $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $\exists x' \in \{x\}$ noqat tabılıp, $f(x') > b - \varepsilon$ teńsizlik orınlı boladı. $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte ósiwshi bolǵanlıqtan $x > x'$ teńsizlikti qanaatlandıırıwshı $\forall x \in \{x\}$ noqat ushın $f(x) > b - \varepsilon$ teńsizlik orınlı. Nátiyjede $b - \varepsilon < f(x) \leq b < b + \varepsilon$ teńsizliklerge kelemiz. Al bul b san $f(x)$ funkciyanıń limiti ekenin bildiredi. Dálillew procesinde eger a shekli san bolsa, $x' = a - \delta$ ($\delta = a - x'$) dep, al a sheksiz bolsa, $x' > M > 0$ dep alınıwı kerek.

Endi $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte ósiwshi hám joqarıdan shegaralanbaǵan funkciya bolsın. $\forall M > 0$ san ushın (bul san qanday úlken san

bolsa da) $\exists x' \in \{x\}$ noqat tabılıp, $f(x') > M$ teńsizlik orınlı boladı. $x > x'$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı $\forall x \in \{x\}$ noqat ushın $f(x) \geq f(x')$ teńsizlik orınlı bolǵanlıqtan, bunday noqatlar ushın $f(x) > M$ teńsizlik orınlı. Bul $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ bolatuǵının bildiredi. ▲

$\{x\} \subset R$ kóplik berilgen bolıp, a noqat (shekli yaki $+\infty$) bul kópliktiń limit noqatı bolıp, $\forall x \in \{x\}$ ushın $x \geq a$ teńsizlik orınlı bolsın. $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte anıqlanǵan bolsın.

8- t e o r e m a. Meyli, $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte kemiwshi funkciya bolsın. Eger bul funkciya $\{x\}$ kóplikte tómennen shegaralanǵan bolsa, onda a noqatta shekli limitke iye, al tómennen shegaralanbaǵan bolsa, funkciyanıń a noqattaǵı limiti $-\infty$ boladı.

Bul teorema 7- teorema sıyaqlı dálillenedi.

2.7. Anıq emeslikler. Biz joqarıda shekli limitke iye funkciyalar ústinde arifmetikalıq ámellerdi kórip óttik. Eger $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalardıń hár birewiniń a noqattaǵı limiti sheksiz yaki $f(x)/g(x)$ funkciyanıń a noqattaǵı limiti qaralǵanda $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ bolsa, onda hár qıylı anıq emeslikler payda boladı.

Meyli, $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar $\{x\} \subset R$ kóplikte anıqlanǵan, a noqat bul kópliktiń limit noqatı bolsın.

1) Eger $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ bolsa, onda $\frac{f(x)}{g(x)}$ bólshek $\frac{0}{0}$

kórinisindegi anıq emeslik dep ataladı.

2) Eger $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalardıń hár birewiniń a noqattaǵı limiti sheksiz bolsa, onda $\frac{f(x)}{g(x)}$ bólshek $\frac{\infty}{\infty}$ *kórinisindegi anıq emeslik* dep ataladı.

3) Eger $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad (-\infty), \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty \quad (+\infty)$ bolsa, onda $f(x) + g(x)$ qosındı $\infty - \infty$ kórinisindegi anıq emeslik dep ataladı.

4) Eger $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ bolsa, onda $f(x) \cdot g(x)$ kóbeyme $0 \cdot \infty$ kórinisindegi anıq emeslik dep ataladı.

5) Eger $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ bolsa, onda $[f(x)]^{g(x)}$ ańlatpa 1^∞ kórinisindegi anıq emeslik dep ataladı.

6) Eger $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ bolsa, onda $[f(x)]^{g(x)}$ ańlatpa 0^0 kórinisindegi anıq emeslik dep ataladı.

7) Eger $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ bolsa, onda $[f(x)]^{g(x)}$ ańlatpa ∞^0 kórinisindegi anıq emeslik dep ataladı.

$f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalardıń óz limitlerine umtılıw qásiyetlerine qarap joqarıdaǵı ańlatpalardıń xarakterin anıqlaw anıq emesliklerdi ashıw dep ataladı.

2.8. Funkciyanıń limitke iye bolıwınıń Koshi kriteriysi. Meyli, $f(x)$ funksiya $\{x\} \subset R$ kóplikte anıqlanǵan, a noqat bul kópliktiń limit noqatı bolsın.

20- a n ı q 1 a m a. Eger $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ san tabılıp, argumenttiń $0 < |x' - a| < \delta, \quad 0 < |x'' - a| < \delta$ teńsizliklerdi qanaatlandırıwshı $\forall x', x'' \in \{x\}$ mánisleri ushın $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı bolsa, onda $f(x)$ funksiya a noqatta Koshi shártin qanaatlandıradı dep aytıladı.

М ı s a l. $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ funksiya $x = 0$ noqatta Koshi shártin qanaatlandıratuǵının kórsetemiz. Haqıyqattan da, $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $\delta = \varepsilon/2$ dep alsaq, argumenttiń $0 < |x'| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 < |x''| < \frac{\varepsilon}{2}$ teńsizliklerdi qanaatlandırıwshı $\forall x', x'' \in \{x\}$ mánisleri ushın

$$|f(x') - f(x'')| = \left| x' \sin \frac{1}{x'} - x'' \sin \frac{1}{x''} \right| \leq \left| x' \sin \frac{1}{x'} \right| + \left| x'' \sin \frac{1}{x''} \right| \leq |x'| + |x''| < \varepsilon.$$

Bul anıqlama boyınsha berilgen funkciya $x=0$ noqatta Koshi shártin qanaatlandıratuǵının bildiredi.

Eger $\forall \delta > 0$ san alınsa da $\exists \varepsilon > 0$ san hám argumenttiń $0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$ teńsizliklerdi qanaatlandırıwshı $x', x'' \in \{x\}$ mánisleri tabılıp, $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$ teńsizlik orınlı bolsa, onda $f(x)$ funkciya ushın a noqatta Koshi shárti orınlanbaydı dep ayıladı.

M ı s a l. $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ funkciya ushın $x=0$ noqatta Koshi shárti orınlanbaydı. Haqıyqattan da, $\forall \delta > 0$ san alǵanıımızda da $0 < \varepsilon < 2$ san hám

$x' = \frac{1}{2k\pi}$, $x'' = \frac{1}{(2k+1)\pi}$ noqatlar ushın ($k > [\frac{1}{2\pi\delta}]$ bolǵanda $|x'| < \delta$, $|x''| < \delta$)

$$|f(x') - f(x'')| = |\cos 2k\pi - \cos(2k+1)\pi| = 2 > \varepsilon$$

boladı. Bul anıqlama boyınsha berilgen funkciya ushın $x=0$ noqatta Koshi shárti orınlanbaytuǵının bildiredi.

9- t e o r e m a. *Funkciya noqatta shekli limitke iye bolıwı ushın bul noqatta Koshi shártin qanaatlandırıwı zárúr hám jetkilikli.*

D á l i l l e w. a) Z á r ú r l i g i. Meyli, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ bolsın. $\forall \varepsilon > 0$ sandı saylap alamız. Funkciyanıń noqattaǵı limitiniń Koshi anıqlaması boyınsha $\varepsilon/2$ san ushın $\exists \delta > 0$ san tabılıp, argumenttiń $0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$ shártlerdi qanaatlandırıwshı $\forall x', x''$ mánisleri ushın, sáykes túrde, $|f(x') - b| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|f(x'') - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ teńsizlikler orınlı boladı.

Bunnan

$$|f(x') - f(x'')| = |(f(x') - b) + (b - f(x''))| \leq |f(x') - b| + |f(x'') - b| < \varepsilon$$

teńsizlik kelip shıǵadı. Al bul $f(x)$ funkciya a noqatta Koshi shártin qanaatlandıratuǵının bildiredi.

b) J e t k i l i k l i g i. Meyli, $f(x)$ funkciya a noqatta Koshi shártin qanaatlandırsın. $f(x)$ funkciya a noqatta shekli limitke iye bolatuǵının

dálillewimiz kerek. Meyli, $\{x_n\}$ - argumenttiń a noqattan ózgeshe mánislerinen dúzilgen, a noqatqa jıynaqlı qálegen izbe- izlik bolsın. Buniń ushın funkciyanıń noqattaǵı limitiniń Geyne anıqlaması boyınsha funkciyanıń sáykes dara mánislerinen dúzilgen $\{f(x_n)\}$ izbe- izlik bazı bir b sanǵa jıynaqlı hám bul san hámme a noqattan ózgeshe noqatlardan dúzilgen, a noqatqa jıynaqlı $\{x_n\}$ izbe- izlikler ushın birdey ekenin dálillew jetkilikli.

Dáslep, argumenttiń a noqattan ózgeshe mánislerinen dúzilgen, a noqatqa jıynaqlı qálegen $\{x_n\}$ izbe- izlik ushın sáykes funkciyanıń mánislerinen dúzilgen $\{f(x_n)\}$ izbe- izlik bazı bir b sanǵa jıynaqlı bolatuǵının dálilleybiz. $\forall \varepsilon > 0$ san hám Koshi shárti boyınsha usı sanǵa sáykes $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ san saylap alamız. $\{x_n\}$ izbe- izlik a noqatqa jıynaqlı hám $x_n \neq a$ bolǵanlıqtan usı $\delta > 0$ san ushın $\exists N$ nomer tabılıp, $n > N$ nomerler ushın $0 < |x_n - a| < \delta$ teńsizlikler orınlı boladı. $\forall p$ natural san hám $n > N$ nomerler ushın $0 < |x_{n+p} - a| < \delta$ teńsizlikler de orınlı bolatuǵını anıq. Solay etip, $\forall p$ natural san hám $n > N$ nomerler ushın $0 < |x_n - a| < \delta$, $0 < |x_{n+p} - a| < \delta$ teńsizlikler orınlı boladı eken. Usı eki teńsizlikten hám Koshi shártinen $\forall p$ natural san hám $n > N$ nomerler ushın $|f(x_{n+p}) - f(x_n)| < \varepsilon$ teńsizlikti alamız. Bul $\{f(x_n)\}$ - fundamental izbe- izlik ekenin bildiredi, al fundamental izbe- izlik jıynaqlı bolǵanlıqtan $\{f(x_n)\}$ izbe- izlik bazı bir b sanǵa jıynaqlı.

Endi argumenttiń a noqattan ózgeshe mánislerinen dúzilgen, a noqatqa jıynaqlı qálegen eki $\{x_n\}$ hám $\{x'_n\}$ izbe- izlik ushın funkciyanıń sáykes dara mánislerinen dúzilgen $\{f(x_n)\}$ hám $\{f(x'_n)\}$ izbe- izlikler birdey b sanǵa jıynaqlı bolatuǵının dálilleybiz. Meyli, $\{f(x_n)\}$ hám $\{f(x'_n)\}$ izbe- izlikler, sáykes túrde, b hám b' sanǵa jıynaqlı bolsın. Argumenttiń a noqattan ózgeshe mánislerinen dúzilgen, a noqatqa jıynaqlı jańa

$$x_1, x'_1, x_2, x'_2, \dots, x_n, x'_n, \dots$$

izbe- izlikti qaraymız. Joqarıda dálillegenimiz boyınsha funkciyanıń sáykes dara mánislerinen dúzilgen

$$f(x_1), f(x'_1), f(x_2), f(x'_2), \dots, f(x_n), f(x'_n), \dots$$

izbe- izlik bazı bir b'' sanǵa jıynaqlı. Bul izbe- izliktiń qálegen úles izbe- izligi de b'' sanǵa jıynaqlı. Demek, taq nomerli elementlerden dúzilgen $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ úles izbe- izlik te, jup nomerli elementlerden dúzilgen $f(x'_1), f(x'_2), \dots, f(x'_n), \dots$ úles izbe- izlik te b'' sanǵa jıynaqlı boladı. Bunnan $b = b' = b''$ bolatuǵını kelip shıǵadı. ▲

E s k e r t i w. a noqattaǵı bir tárepli limitler, $x \rightarrow \infty, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$ daǵı limitler ushın da Koshi shártı hám Koshi kriteriysi joqarıdaǵıǵa uqsas aytıladı hám dálillenedi.

2.9. Bazı bir ájayıp limitler. 10- t e o r e m a. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ funkciya

$x=0$ noqatta shekli limitke iye hám bul limit 1 ge teń, yaǵnıy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

D á l i l l e w. Argumenttiń $0 < x < \frac{\pi}{2}$ mánislerinde $\sin x < x < \operatorname{tg} x$

teńsizlikler orınlı ekeni málim. $\sin x > 0$ bolǵanlıqtan bul teńsizliklerdi

$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ kóriniste jazıp alıw múmkin. Bunnan

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad (1)$$

teńsizliklerdi alamız. (1) teńsizliklerdiń argumenttiń $0 < x < \frac{\pi}{2}$ mánisleri ushın

orınlı bolıwınan bul teńsizliklerdiń $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ mánisler ushın da orınlı ekeni

kelip shıǵadı, sebebi $\frac{\sin x}{x}$ hám $\cos x$ funkciyalar jup funkciyalar. Solay etip,

(1) teńsizlikler $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} (x \neq 0)$ mánisler ushın, yaǵnıy $\forall x \in U_{\pi/2}(0)$

noqatta orınlı boladı eken. $f(x) = \cos x$ hám $g(x) \equiv 1$ funkciyalar $x = 0$ noqatta 1 ge teń limitke iye. Funkciyalar ushın eki jaqlap shegaralaw principini (shekli limitke iye funkciyalardıń 4⁰- qásiyeti) boyınsha $h(x) = \frac{\sin x}{x}$ funkciya da $x = 0$ noqatta shekli limitke iye hám bul limit 1 ge teń. ▲

11- t e o r e m a. $f(x) = (1+x)^{1/x}$ funkciya $x = 0$ noqatta shekli limitke iye hám bul limit e sanına teń.

D á l i l l e w. $f(x) = (1+x)^{1/x}$ funkciya $x = 0$ noqatta hám shep, hám ón limitlerge iye hám bul limitler e sanına teń ekenin dálillew jetkilikli.

1) Dáslep $f(x) = (1+x)^{1/x}$ funkciya $x = 0$ noqatta shekli ón limitke iye bolıp, bul limit e sanına teń ekenin dálilleybiz.

Bunıń ushın funkciyanıń noqattaǵı ón limitiniń Koshi anıqlaması boyınsha $\forall \varepsilon > 0$ ushın $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ san tabılıp, $0 < x < \delta$ shártti qanaatlandıırıwshı $\forall x$ noqatta

$$|(1+x)^{1/x} - e| < \varepsilon \quad (2)$$

teńsizlik orınlı bolatuǵının dálillew jetkilikli.

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ san saylap alamız hám } a_n = (1 + \frac{1}{n+1})^n \text{ hám } b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$$

izbe- izliklerdi alamız. Bul eki izbe- izlik e sanına jıynaqlı. Haqıyqatında da,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n+1})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n+1})} = \frac{e}{1} = e,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n}) = e \cdot 1 = e$$

Eki $\{a_n\}$ hám $\{b_n\}$ izbe- izlik te e sanına jıynaqlı bolǵanlıqtan saylap alıńǵan $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $\exists N_1, N_2$ nomerler tabılıp, $n > N_1$ nomerler ushın $|a_n - e| < \varepsilon$ hám $n > N_2$ nomerler ushın $|b_n - e| < \varepsilon$ teńsizlikler orınlı. Meyli, $N = \max\{N_1, N_2\}$ bolsın. Onda $n > N$ nomerler ushın bir waqıtta

$$|a_n - e| < \varepsilon, \quad |b_n - e| < \varepsilon \quad (3)$$

teńsizlikler orınlı boladı.

Endi dálillewdi aqırına jetkeriw ushın eger $\delta = \frac{1}{N}$ dep alsaq, onda argumenttiń $0 < x < \frac{1}{N}$ shártti qanaatlandırıwshı mánislerinde (2) teńsizlik orınlı bolatuǵının dálilleybiz.

Haqıyqatında da, meyli, x argumenttiń $0 < x < \frac{1}{N}$ shártti qanaatlandırıwshı qálegen mánisi bolsın. Onda $\frac{1}{x} > N$. Endi $n := [\frac{1}{x}]$ dep belgilep, birinshiden, $n > N$ dep, al ekinshiden

$$n \leq \frac{1}{x} < n+1 \quad (4)$$

teńsizlikler orınlı dep aytıwımız múmkin. Bul teńsizliklerden

$$\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \quad \text{hám} \quad 1 + \frac{1}{n+1} < 1+x \leq 1 + \frac{1}{n} \quad (5)$$

teńsizlikler kelip shıǵadı. (4) hám (5) teńsizliklerdiń ekinshisin salıstırıp, tiykırı 1 den úlken kórsetkishli funkciyanıń ósiwshiliginen paydalanıp, $(1 + \frac{1}{n+1})^n < (1+x)^{1/x} < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ yaki $a_n < (1+x)^{1/x} < b_n$ teńsizliklerdi alamız.

Solay etip, argumenttiń $0 < x < \frac{1}{N}$ shártti qanaatlandırıwshı qálegen x mánisi ushın $n > N$ nomerlerde $a_n < (1+x)^{1/x} < b_n$ demek,

$$a_n - e < (1+x)^{1/x} - e < b_n - e \quad (6)$$

teńsizlikler orınlı boladı eken. (6) teńsizlikti $n > N$ nomerler ushın orınlı bolǵan (3) teńsizlikler menen salıstırıp, argumenttiń $0 < x < \frac{1}{N}$ shártti qanaatlandırıwshı mánislerinde (2) teńsizlik orınlı bolatuǵına isenim arttıramız.

2) $f(x) = (1+x)^{1/x}$ funkciya $x=0$ noqatta shekli shep limitke iye bolıp, bul limitte e sanına teń ekenin dálilleybiz.

Funkciyanın noqattağı shep limitiniñ Geyne anıqlaması boyınsha terns sanlardan dúzilgen qálegen sheksiz kishi $\{x_n\}$ izbe- izlikke sáykes funksiyanın dara mánislerinen dúzilgen $f(x_n) = (1 + x_n)^{1/x_n}$ izbe- izlik e sanına jıynaqlı bolatuǵının dálillew jetkilikli.

Meyli, $\{x_n\}$ - teris sanlardan dúzilgen qálegen sheksiz kishi izbe- izlik bolsın. Bul izbe- izlikti hámme x_n elementler moduli boyınsha 1 den úlken bolatuǵın N nomerden baslap qaraymız.

$$y_n = -\frac{x_n}{1 + x_n} \text{ dep belgileymiz, demek } x_n = -\frac{y_n}{1 + y_n}. \text{ Onda } \{y_n\} \text{ .on}$$

sanlardan dúzilgen sheksiz kishi izbe- izlik bolıp,

$$f(x_n) = (1 + x_n)^{1/x_n} = \left(1 - \frac{y_n}{1 + y_n}\right)^{-\frac{1+y_n}{y_n}} = \left(\frac{1}{1 + y_n}\right)^{-\left(\frac{1}{y_n}+1\right)} = (1 + y_n)^{\frac{1}{y_n}+1}$$

teńlik orınlı. Solay etip,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + y_n)^{1/y_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + y_n).$$

$\{y_n\}$ on sanlardan dúzilgen sheksiz kishi izbe- izlik bolǵanlıqtan joqarıda dálillengenı boyınsha $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + y_n)^{1/y_n} = e$, al $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + y_n) = 1$. Demek, $\{f(x_n)\}$ izbe- izlik e sanına jıynaqlı. ▲

2.10. Sheksiz kishi hám sheksiz úlken funksiyaalar. 21- a n ı q l a m a. Noqattağı limiti nolge teń funksiya usı noqatta *sheksiz kishi funksiya* dep ataladı.

Mısalı $\alpha(x) = (x - a)^n$ ($n \in N$) funksiya a noqatta sheksiz kishi funksiya boladı.

Eger $f(x)$ funksiyanın a noqattağı limiti b sanına teń bolsa, onda $\alpha(x) := f(x) - b$ funksiya a noqatta sheksiz kishi funksiya.

Eger $f(x)$ funksiyanın a noqattağı limiti b sanına teń bolsa, onda bul funksiyanı $f(x) = b + \alpha(x)$ kórinisinde jazıw múmkin, bul jerde $\alpha(x) - a$ noqatta sheksiz kishi funksiya.

22- a n ı q l a m a. Noqattağı limiti sheksiz funkciya usı noqatta *sheksiz úlken funkciya* dep ataladı.

Argumenttiń a sanınan úlken (kishi) mánislerinen dúzilgen, a noqatqa jıynaqlı $\forall \{x_n\}$ izbe- izlikke sáykes funkciyanıń dara mánislerinen dúzilgen $\{A(x_n)\}$ izbe- izlik bazı bir nomerden baslap hámme elementi yaki oń, yaki teris sanlar bolǵan sheksiz úlken izbe- izlik bolsa, onda $A(x)$ funkciya a noqatta ońnan (shepten) *sheksiz úlken funkciya* dep ataladı hám $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty$ ($\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty$) yaki $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty$ ($\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty$) dep jazıladı. Geyde

$$A(a+0) = +\infty \quad (A(a-0) = +\infty) \quad \text{yaki} \quad A(a+0) = -\infty \quad (A(a-0) = -\infty)$$

simvollarınan da paydalanıladı.

Sheksiz kishi hám sheksiz úlken funkciyalar da sheksiz kishi hám sheksiz úlken izbe- izliklerdiń qásiyetlerine uqsas qásiyetlerge iye boladı.

1⁰. Noqatta *sheksiz kishi funkciya bolǵan shekli sandaǵı funkciyalardıń qosındısı hám kóbeymesi usı noqatta sheksiz kishi funkciya.*

2⁰. Noqattıń bazı bir dógeresinde shegaralanǵan funkciyanıń usı noqatta *sheksiz kishi funkciyaǵa kóbeymesi usı noqatta sheksiz kishi funkciya.*

3⁰. Eger $\alpha(x)$ funkciya a noqattıń bazı bir dógeresinde anıqlanǵan, usı dógerek noqatlarında nolden ózgeshe, *sheksiz kishi funkciya bolsa, onda $\frac{1}{\alpha(x)}$ funkciya a noqatta sheksiz úlken funkciya.*

4⁰. Eger $A(x)$ funkciya a noqatta *sheksiz úlken funkciya bolsa, onda $\frac{1}{A(x)}$ funkciya a noqatta sheksiz kishi funkciya boladı.*

Berilgen a noqatta sheksiz kishi eki funkciyanı salıstırıw metodikasına toqtalamız. Meyli, $\alpha(x)$ hám $\beta(x)$ funkciyalar a noqattıń bazı bir dógeresinde anıqlanǵan hám a noqatta sheksiz kishi funkciyalar bolsın.

1) Eger $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ bolsa, onda $\alpha(x)$ funksiya a noqatta $\beta(x)$

funkciyağa qarağanda *joqarı tártipli sheksiz kishi funksiya* dep ataladı hám $\alpha(x) = o(\beta(x)) \quad (x \rightarrow a)$ dep jazıladı.

2) Eger $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \quad (c \neq 0, c \neq 1)$ bolsa, onda $\alpha(x)$ hám $\beta(x)$

funkciyalar a noqatta *birdey tártiptegi sheksiz kishi funksiya* dep ataladı.

3) Eger $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ bolsa, onda $\alpha(x)$ hám $\beta(x)$ funksiya a noqatta

ekivalent sheksiz kishi funksiya dep ataladı hám $\alpha(x) \sim \beta(x) \quad (x \rightarrow a)$ dep jazıladı.

12- t e o r e m a. Eger $\alpha(x) \sim \alpha_1(x) \quad (x \rightarrow a)$ hám $\beta(x) \sim \beta_1(x) \quad (x \rightarrow a)$

bolıp, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)}$ *shekli limit bar bolsa, onda* $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ *limit te bar hám*

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ *teńlik orınlı boladı.*

Berilgen a noqatta sheksiz úlken hám ońnan (yaki shepten) sheksiz úlken funksiya da usılay salıstırıladı.

Meyli, $A(x)$ hám $B(x)$ funksiya argumenttiń birdey mánislerinde anıqlanğan funksiya hám anıqlıq ushın

$$\lim_{x \rightarrow a+0} A(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a+0} B(x) = +\infty$$

bolsın.

1). Eger $\frac{A(x)}{B(x)}$ funksiya a noqatta ońnan sheksiz úlken funksiya bolsa,

onda $A(x)$ funksiya a noqatta $B(x)$ funksiyağa salıstırğanda *joqarı ósiw tártibine iye* dep ataladı.

2). Eger $\frac{A(x)}{B(x)}$ funksiyanıń a noqattağı oń limiti nolden ózgeshe shekli

sanğa teń bolsa, onda $A(x)$ hám $B(x)$ funksiyanıń a noqattağı *ósiw tártibi birdey* dep ataladı.

Sheksiz kishi jáne sheksiz úlken funkciyalardı salıstırıw mısalların keltiremiz.

M ı s a l l a r. 1) $\alpha(x) = x^3 - x^5$ hám $\beta(x) = 5x^3 + x^4$ funkciyalar $x = 0$ noqatta birdey tártiptegi sheksiz kishi funkciyalar, sebebi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^5}{5x^3 + x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3(1 - x^2)}{x^3(5 + x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^2}{5 + x} = \frac{1}{5}.$$

2) $\alpha(x) = (x - 2)^2(x - 1)$ hám $\beta(x) = (x - 1)^2$ funkciyalar $x = 2$ noqatta ekvivalent sheksiz kishi funkciyalar, sebebi

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)^2(x - 1)}{(x - 2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 1) = 1.$$

3) $A(x) = \frac{2 + x}{x}$ hám $B(x) = \frac{1}{x}$ funkciyalar $x = 0$ noqatta o'ňnan da, shepten de ósiw tártibi birdey sheksiz úlken funkciyalar, sebebi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{A(x)}{B(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 + x}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (2 + x) = 2.$$

4- BAP

ÚZLIKSIZ FUNKCIYALAR

1-§. Úzliksiz funkciya túsinigi

Funkciyanıń úzliksizligi matematikalıq analizdiń áhmiyetli túsinikleriniń biri bolıp, funkciyanıń limiti túsinigi menen tikkeley baylanısqa.

$f(x)$ funkciya $\{x\} \subset R$ kóplikte anıqlanğan, a noqat $\{x\}$ kópliktiń limit noqatı bolsın.

$f(x)$ funkciyanıń a noqattaǵı limiti ushın tómendegi jaǵdaylardıń birewi orınlı bolıwı múmkin:

1⁰. $f(x)$ funkciya a noqatta shekli limitke iye.

2⁰. $f(x)$ funkciyanıń a noqattaǵı limiti sheksiz.

3⁰. $f(x)$ funkciya a noqatta limitke iye emes.

Biz tómende 1⁰- jaǵdaydın funkciyanıń úzliksizligi dep atalatuǵın áhmiyetli dara jaǵdayın tolıq izertleymiz.

1.1. Úzliksiz funkciya anıqlamaları. Meyli, $f(x)$ funkciya $\{x\} \subset R$ kóplikte anıqlanğan, $a \in \{x\}$ noqat $\{x\}$ kópliktiń limit noqatı bolsın.

1- a n ı q l a m a. (Funkciyanıń noqatta úzliksizliginiń rásmiy anıqlaması). Eger funkciya noqatta shekli limitke iye bolıp, bul limit funkciyanıń usı noqattaǵı dara mánisine teń bolsa, onda bunday funkciya usı *noqatta úzliksiz* dep ataladı.

Basqasha aytqanda, eger $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ bolsa, onda $f(x)$ funkciya a noqatta úzliksiz dep ataladı.

M ı s a l l a r. № 1. $f(x) = x^2 + x + 1$ funkciya $\forall a \in R$ noqatta úzliksiz, sebebi, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + x + 1) = a^2 + a + 1 = f(a)$.

№ 2. $f(x) = (\text{sign} x)^2 = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ funkciyanıń $\forall a \in R$ noqattaǵı limiti

1 ge teń, yaǵnıy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (\text{sign} x)^2 = 1$. Biraq, $f(0) = 0$ bolǵanlıqtan

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$. Demek, berilgen funkciya $x=0$ noqatta úzliksiz emes, qalğan

hámme $a \in R \setminus \{0\}$ noqatlarda úzliksiz, sebebi,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (\operatorname{sign} x)^2 = 1 = f(a).$$

Funkciyanıń noqattaǵı limitiniń Geyne hám Koshi anıqlamalarınan paydalanıp, biz funkciyanıń noqatta úzliksizliginiń Geyne hám Koshi anıqlamalarına kelemiz.

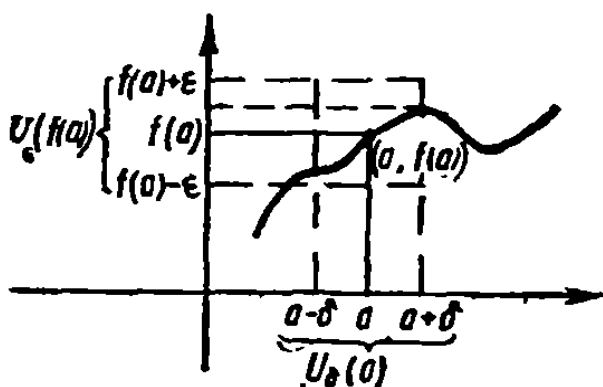
2- a n ı q 1 a m a (Funkciyanıń noqatta úzliksizliginiń Geyne anıqlaması). Eger argumenttiń mánislerinen dúzilgen, a noqatqa jıynaqlı $\forall \{x_n\}$ izbe- izlik ushın funkciyanıń sáykes dara mánislerinen dúzilgen $\{f(x_n)\}$ izbe- izlik $f(a)$ sanǵa jıynaqlı bolsa, onda $f(x)$ funkciya a noqatta úzliksiz dep ataladı.

E s k e r t i w. Funkciyanıń noqattaǵı úzliksizliginiń Geyne anıqlamasında $\{x_n\}$ izbe- izliktiń elementleri a noqattan ózgeshe bolıwı talap etilmeydi, sebebi $f(a)$ sanına jıynaqlı $\{f(x_n)\}$ izbe- izliktiń elementlerine qálegen sandaǵı $f(a)$ sanǵa teń elementlerdi biriktiriw bul izbe- izliktiń $f(a)$ sanǵa jıynaqlılıǵın buzbaydı.

3- a n ı q 1 a m a (Funkciyanıń noqatta úzliksizliginiń Koshi anıqlaması). Eger $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ san tabılıp, argumenttiń $|x - a| < \delta$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı $\forall x$ mánisi ushın $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı bolsa, onda $f(x)$ funkciya a noqatta úzliksiz dep ataladı.

E s k e r t i w. Funkciyanıń noqattaǵı úzliksizliginiń Koshi anıqlamasında argumenttiń mánisleri $0 < |x - a|$ shártin qanaatlandırıwı, yaǵnıy a noqattan ózgeshe bolıwı, talap etilmeydi, sebebi $x = a$ mániste $f(x) - f(a)$ ayırma nol'ge teń hám $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ teńsizlikti qanaatlandıradı. Funkciyanıń noqattaǵı úzliksizliginiń Koshi anıqlamasındaǵı $|x - a| < \delta$ teńsizlik $a - \delta < x < a + \delta$ teńsizliklerge ekvivalent bolıp, $x \in U_\delta(a)$ qatnastı, al $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ teńsizlik $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$

teńsizliklerge ekvivalent bolıp, $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$ qatnastı ańlatadı. Demek, Koshi anıqlaması boyınsha $f(a)$ noqattıń $\forall U_\varepsilon(f(a))$ dógeregi ushın a noqattıń $\exists U_\delta(a)$ dógeregi tabılıp, argumenttiń usı dógerekten alınǵan hár bir mánisine sáykes funkciyanıń mánisi $f(a)$ noqattıń $U_\varepsilon(f(a))$ dógeretine derek bolsa, onda $f(x)$ funksiya a noqatta úzliksiz boladı (1- súwret).



1- súwret

Eger $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı bolsa, onda $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0$ teńlik orınlı boladı.

Funkciyanıń noqatta úzliksizliginiń *úzliksizlik shártiniń ayırmalıq forması* dep atalatuǵın jáne bir anıqlamasın keltiriw múmkin. Ádette, $x - a$ ayırma argumenttiń a noqattaǵı ósimi dep ataladı hám $\Delta x = x - a$ dep, al $f(x) - f(a)$ ayırma argumenttiń a noqattaǵı Δx ósimine sáykes funkciyanıń ósimi dep ataladı hám $\Delta f = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$ dep belgilenedi. Usı ayılǵanlardı esapqa alıp, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ teńlikti $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$ kóriniste jazıw múmkin. Solay etip, $f(x)$ funkciyanıń a noqatta úzliksizligi bul noqatta argumenttiń sheksiz kishi ósimine funkciyanıń da sheksiz kishi ósimi sáykes keliwi sıpatında anıqlanıwı da múmkin.

1- t e o r e m a. *Funkciyanıń noqatta úzliksizliginiń Geyne hám Koshi anıqlamaları ekvivalent.*

Bul teorema funkciyanıń noqattaǵı limitiniń Geyne hám Koshi anıqlamalarınan ekvivalentliginen kelip shıǵadı.

Funkciyanıń noqattaǵı bir tárepli limitleriniń Geyne hám Koshi anıqlamalarınan paydalanıp, funkciyanıń noqattaǵı bir tárepli úzliksizliginiń Geyne hám Koshi anıqlamalarınan alamız.

Meyli, $f(x)$ funksiya $\{x\} \subset R$ kóplikte anıqlanǵan, $a \in \{x\}$ hám $\forall \delta > 0$ ushın $(a, a + \delta)$ intervalda $((a - \delta, a)$ intervalda) $\{x\}$ kópliktiń keminde bir noqatı bolsın.

4- a n ı q l a m a. (Funkciyanıń noqatta bir tárepli úzliksizliginiń rásmiy anıqlaması). Eger funksiya noqatta shekli oń (shep) limitke iye bolıp, bul limit funkciyanıń usı noqattaǵı dara mánisine teń bolsa, onda bunday funksiya usı *noqatta ońnan (shepten) úzliksiz* dep ataladı.

Basqasha aytqanda, eger $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$ ($\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a)$) bolsa, onda $f(x)$ funksiya a noqatta ońnan (shepten) úzliksiz dep ataladı.

5- a n ı q l a m a. (Funkciyanıń noqattaǵı bir tárepli úzliksizliginiń Geyne anıqlaması). Argumenttiń a sanınan úlken (kishi) mánislerinen dúzilgen, a noqatqa jıynaqlı $\forall \{x_n\}$ izbe- izlikke sáykes funkciyanıń dara mánislerinen dúzilgen $\{f(x_n)\}$ izbe- izlik $f(a)$ sanına jıynaqlı bolsa, onda $f(x)$ funksiya a noqatta ońnan (shepten) úzliksiz dep ataladı.

E s k e r t i w. Bul anıqlamadaǵı $\forall \{x_n\}$ izbe- izliktiń elementleri ushın $x_n > a$ ($x_n < a$) shártin $x_n \geq a$ ($x_n \leq a$) shárti menen almasıw múmkin, sebebi $f(a)$ sanına jıynaqlı $\{f(x_n)\}$ izbe- izliktiń elementlerine qálegen sandaǵı $f(a)$ sanına teń elementlerdi biriktiriw bul izbe- izliktiń $f(a)$ sanına jıynaqlılıǵın buzbaydı.

6- a n ı q l a m a. (Funkciyanıń noqattaǵı bir tárepli úzliksizliginiń Koshi anıqlaması). Eger $\forall \varepsilon > 0$ ushın $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ san tabılıp, argumenttiń $a < x < a + \delta$ ($a - \delta < x < a$) shártin qanaatlandırıwshı hámme mánisleri ushın

$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı bolsa, onda $f(x)$ funkciya a noqatta ońnan (shepten) úzliksiz dep ataladı.

E s k e r t i w. Bul anıqlamadaǵı argumenttiń mánisleri ushın $a < x < a + \delta$ ($a - \delta < x < a$) shártin $a \leq x < a + \delta$ ($a - \delta < x \leq a$) shárti menen almasırw múmkin, sebebi $x = a$ mániste $f(x) - f(a)$ ayırma nol`ge teń hám $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ teńsizlikti qanaatlandıradı.

Eger funkciya noqatta hám ońnan, hám shepten úzliksiz bolsa, onda funkciya usı noqatta úzliksiz.

Bul tastıyıqlawǵa keri tastıyıqlaw da orınlı: *Eger funkciya noqatta úzliksiz bolsa, onda bul funkciya usı noqatta hám shepten, hám ońnan úzliksiz.*

Eger funkciya $\{x\}$ kópliktiń hár bir noqatında úzliksiz bolsa, onda bul funkciya usı kóplikte úzliksiz dep ataladı.

Mısalı, intervaldıń hár bir noqatında úzliksiz funkciya usı *intervalda úzliksiz* dep ataladı.

Eger funkciya $[a, b]$ kesindiniń hár bir ishki noqatında úzliksiz, a noqatta ońnan hám b noqatta shepten úzliksiz bolsa, onda bul funkciya usı *kesindide úzliksiz* dep ataladı.

1.2. Úzliksiz funkciyalar ústinde arifmetikalıq ámeller. 2- t e o r e m a. Meyli, $\{x\}$ kóplikte anıqlanǵan $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar $a \in \{x\}$ noqatta úzliksiz bolsın. Onda $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$ ($g(a) \neq 0$) funkciyalar da a noqatta úzliksiz.

D á l i l l e w. a noqatta úzliksiz $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar bul noqatta, sáykes túrde, $f(a)$ hám $g(a)$ sanǵa teń limitlerge iye bolǵanlıqtan, $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$ funkciyalar a noqatta shekli limitke iye hám bul limitler, sáykes túrde, $f(a) \pm g(a)$, $f(a) \cdot g(a)$, $f(a)/g(a)$ sanlarǵa teń. Anıqlama boyınsha bul funkciyalar a noqatta úzliksiz. ▲

E s k e r t i w. Eki funkciyanıń qosındısıń, ayırmasıń, kóbeymesiniń hám qatnasınıń bazı bir noqatta úzliksizliginen bul funkciyalardıń hár birewiniń

usı noqatta úzliksizligi kelip shıǵa bermeydi. Mısalı, $f(x) = x$ hám

$$g(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{funkciyalardıń} \quad \varphi(x) = f(x) \cdot g(x) = x \cdot \cos \frac{1}{x} \quad \text{kóbeymesi}$$

$\forall x \in R$ noqatta úzliksiz, biraq $g(x)$ funkciya $x = 0$ noqatta úzliksiz emes ($g(0) = 0$, biraq $g(x)$ funkciya $x = 0$ noqatta limitke iye emes).

2- teorema shekli sandaǵı úzliksiz funkciyalardıń qosındısı hám kóbeymesi ushın da orınlı bolatuǵının tekseriw qıyın emes.

1.3. Quramalı funkciyanıń úzliksizligi. Meyli, $\{x\} \in R$ kóplikte $t = \varphi(x)$ funkciya anıqlanǵan, al bul funkciyanıń $\{t\} \subset R$ mánisler kópliginde $y = f(t)$ funkciya anıqlanǵan bolıp, bul funkciyalar járdeminde $y = f(\varphi(x))$ quramalı funkciya dúzilgen bolsın.

3- t e o r e m a. Meyli, $t = \varphi(x)$ funkciya $a \in \{x\}$ noqatta, al $y = f(t)$ funkciya $b = \varphi(a) \in \{t\}$ noqatta úzliksiz bolsın. Onda $y = f(\varphi(x))$ quramalı funkciya a noqatta úzliksiz.

D á l i l l e w. Meyli, $\{x_n\}$ - quramalı funkciyanıń argumentiniń mánislerinen dúzilgen, a noqatqa jıynaqlı izbe- izlik bolsın. $t = \varphi(x)$ funkciya a noqatta úzliksiz bolǵanlıqtan Geyne anıqlaması boyınsha funkciyanıń sáykes mánislerinen dúzilgen $\{t_n\} = \{\varphi(x_n)\}$ izbe- izlik $b = \varphi(a)$ sanǵa jıynaqlı. $y = f(t)$ funkciya $b = \varphi(a)$ noqatta úzliksiz bolǵanlıqtan $b = \varphi(a)$ sanǵa jıynaqlı $\{t_n\} = \{\varphi(x_n)\}$ izbe- izlik bul funkciyanıń argumentiniń mánislerinen dúzilgen izbe- izlik bolıp, Geyne anıqlaması boyınsha funkciyanıń sáykes dara mánislerinen dúzilgen $\{y_n\} = \{f(t_n)\} = \{f(\varphi(x_n))\}$ izbe- izlik $f(b) = f(\varphi(a))$ sanǵa jıynaqlı.

Solay etip, quramalı funkciyanıń argumentiniń mánislerinen dúzilgen, a noqatqa jıynaqlı $\forall \{x_n\}$ izbe- izlik ushın funkciyanıń sáykes dara mánislerinen dúzilgen $\{f(\varphi(x_n))\}$ izbe- izlik $f(\varphi(a))$ sanǵa jıynaqlı boladı eken. Bul

Geyne anıqlaması boyınsha $y = f(\varphi(x))$ quramalı funkciyanıń a noqatta úzliksiz ekenin bildiredi. ▲

1.4. Funkciyanıń úzilis noqatları. Funkciya úzliksizlik qásiyetine iye bolmaǵan noqat funkciyanıń *úzilis noqatı* dep ataladı.

1⁰. *Funkciyanıń saplastırılatuǵın úzilis noqatı.* Eger funkciya noqatta shekli limitke iye bolıp, yaki bul limit funkciyanıń noqattaǵı dara mánisine teń bolmasa, yaki funkciya bul noqatta anıqlanbaǵan bolsa, onda bunday noqat funkciyanıń *saplastırılatuǵın úzilis noqatı* dep ataladı.

M ı s a l. $x = 0$ noqat $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ funkciyanıń saplastırılatuǵın úzilis noqatı boladı, sebebi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, al funkciya bul noqatta anıqlanbaǵan.

Eger a noqat $f(x)$ funkciyanıń saplastırılatuǵın úzilis noqatı bolsa, onda funkciyanıń a noqattan basqa noqatlardaǵı mánislerin ózgerterpey bul úzilisti saplastırıw múmkin. Bunıń ushın $f(x)$ funkciyanıń a noqattaǵı mánisin funkciyanıń usı noqattaǵı limitine teń ($f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$) qılıp alıw jetkilikli.

Mısalı, eger qaralǵan mısalda $f(0) = 1$ dep alsaq, berilgen funkciya $x = 0$ noqatta úzliksiz boladı.

2⁰. *Funkciyanıń birinshi túr úzilis noqatı.* Eger funkciya noqatta hám shep, hám oń shekli limitlerge iye bolıp, bul limitler óz-ara teń bolmasa ($\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$), onda bunday noqat funkciyanıń *birinshi túr úzilis noqatı* dep ataladı.

Ádette, funkciyanıń birinshi túr úzilis nokatı *shekli sekiriw noqatı* dep ataladı.

M ı s a l l a r. № 1. $f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ funkciya

$x = 0$ noqatta birinshi túr úziliske iye boladı. Haqıyqatında da,

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \operatorname{sign}(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0-0} \operatorname{sign}(x) = -1.$$

№ 2. $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$ funkciya $x = 0$ noqatta birinshi túr úziliske iye boladı.

Haqıyqatında da, $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin x}{|x|} = - \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x} = -1.$

№ 3. $f(x) = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}}$ funkciya $x = 1$ noqatta birinshi túr úziliske iye boladı.

Haqıyqatında da, eger $\{x_n\}$ elementleri 1 den úlken, $x = 1$ noqatqa jıynaqlı izbe-izlik bolsa, onda $\left\{ \frac{1}{x_n - 1} \right\}$ hám demek, $\left\{ 1 + 2^{\frac{1}{x_n - 1}} \right\}$ - elementleri oń sanlar bolğan

sheksiz úlken izbe-izlik, sonlıqtan $f(x_n) = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x_n - 1}}}$ - sheksiz kishi izbe-izlik,

demek, $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}} = 0.$

Endi, eger $\{x_n\}$ elementleri 1 den kishi, $x = 1$ noqatqa jıynaqlı izbe-izlik bolsa, onda $\left\{ \frac{1}{x_n - 1} \right\}$ - elementleri teris sanlar bolğan sheksiz úlken izbe-izlik,

sonlıqtan $\left\{ 2^{\frac{1}{x_n - 1}} \right\}$ - sheksiz kishi izbe-izlik bolıp, $f(x_n) = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x_n - 1}}}$ izbe-izlik 1

ge jıynaqlı, demek, $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}} = 1.$

№ 4. $f(x) = [x]$ funkciya hár bir n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) noqatta birinshi túr úziliske iye, sebebi $\lim_{x \rightarrow n+0} [x] = n, \quad \lim_{x \rightarrow n-0} [x] = n - 1.$

3⁰. *Funkciyanıń ekinshi túr úzilis noqatı.* Eger funkciya bazı bir noqatta yaki keminde bir bir tárepli limitke iye bolmasa, yaki bul noqattaǵı keminde bir bir tárepli limiti sheksiz bolsa, onda bunday noqat *funkciyanıń ekinshi túr úzilis noqatı* dep ataladı.

M i s a l l a r. № 1. $f(x) = \begin{cases} x \cdot \cos \frac{1}{x}, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ funksiya $x = 0$ nuqatida

ekinshi tur uziliske iye. Haqiqatdan da, funksiya $x = 0$ nuqatida shepten uzliksiz, sebebi $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cos \frac{1}{x} = 0 = f(0)$. Biraq bul funksiya $x = 0$ nuqatida on limitke iye emes, sebebi $y = \sin \frac{1}{x}$ funksiya $x = 0$ nuqatida limitke iye emes.

№ 2. $f(x) = \operatorname{tg} x$ funksiya $x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) nuqatlardın har birewinde ekinshi tur uzitliske iye, sebebi $\lim_{x \rightarrow x_n-0} \operatorname{tg} x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_n+0} \operatorname{tg} x = -\infty$.

№ 3. $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ funksiya $x = 0$ nuqatida ekinshi tur uziliske

iye, sebebi funksiya bul nuqatida shep limitke de, on limitke de iye emes.

№ 4. $D(x)$ - Dirixle funksiyası $\forall x \in \mathbb{R}$ nuqatida ekinshi tur uziliske iye, sebebi funksiya bul nuqatlardın hesh birewinde shep limitke de, on limitke de iye emes.

Solay etip, óz anıqlanıw oblastınıń limit nuqatında funksiya ushın tómendegi jaǵdaylardın birewi orınlı:

- 1) uzliksiz;
- 2) saplastırılatusın uziliske iye;
- 3) birinshi tur uziliske iye;
- 4) ekinshi tur uziliske iye.

Matematikada hám onıń qollanıwlarında jiyy ushırasatusın bólek uzliksiz funksiya túsiniǵın kiritemiz.

$[a, b]$ kesindide anıqlanǵan, bul kesindiniń birinshi tur uziliske iye bolǵan shekli sandaǵı nuqatlarınan basqa hámme ishki nuqatlarında uzliksiz, a nuqatida

o'nan, al b noqatta shepten uzliksiz bolgan funkciya $[a, b]$ kesindide *bólek uzliksiz funkciya* dep ataladi.

Eger funkciya intervalga (tuwri sızıqqa) derek hár bir kesindide bólek uzliksiz bolsa, onda bunday funkciya *intervalda (tuwri sızıqta) bólek uzliksiz* dep ataladi.

Mısalı, $f(x)=[x]$ funkciya pútkil sanlar kósherinde hám sanlar kósherine derek hár bir kesindide bólek uzliksiz.

1.5. Monoton funkciyanıń uzliksizligi hám uzilis noqatlari. Meyli, $f(x)$ funkciya $\{x\} \subset R$ kóplikte anıqlangan bolsın.

4- t e o r e m a (monoton funkciyanıń uzliksizligi haqqındaǵı). *Eger $f(x)$ funkciya $\{x\} \subset R$ kóplikte monoton funkciya bolsa, onda ol bul kópliktiń qálegen noqatında yaki uzliksiz boladi, yaki tek I túr uziliske iye boladı.*

D á l i l l e w. Meyli, $f(x)$ funkciya $\{x\} \subset R$ kóplikte ósiwshi (qatal ósiwshi) funkciya bolsın. $\{x\}$ kóplikten $(a - \delta, a + \delta) \subset X$ bolatuǵınday $a \in \{x\}$ noqat tańlap alamız. Shárt boyınsha $\forall x \in (a - \delta, a)$ noqatta $f(x) \leq f(a)$, al $\forall x \in (a, a + \delta)$ noqatta $f(x) \geq f(a)$ teńsizlik orınlı. Demek, $f(x)$ funkciya $(a - \delta, a)$ intervalda joqarıdan, al $(a, a + \delta)$ intervalda tómennen shegaralanǵan. Monoton funkciyanıń limiti haqqındaǵı teorema boyınsha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) &= f(a-0) \leq f(a), \\ \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) &= f(a+0) \geq f(a) \end{aligned}$$

boladı. Eger $f(a-0) = f(a) = f(a+0)$ bolsa, $f(x)$ funkciya $a \in \{x\}$ noqatta uzliksiz, al eger $f(a-0) < f(a+0)$ bolsa, I túr uziliske iye. Eger a noqat $\{x\}$ kópliktiń shetki noqatı bolsa, onda funkciya bul noqatta bir tárepli limitke iye ekenin kórsetiw jetkilikli. $f(x)$ funkciya $\{x\} \subset R$ kóplikte kemiwshi (qatal kemiwshi) funkciya bolǵan jaǵdayda da dálillew usınday júrgiziledi. ▲

5-teorema. Eger $f(x)$ funksiya $\{x\} \subset R$ kóplikte monoton funksiya bolıp, onıń $\{y\} = \{f(x) : x \in \{x\}\}$ mánisler kópligi bazı bir tutas aralıq bolsa, onda bul funksiya $\{x\}$ kóplikte úzliksiz.

Dáلیلlew. Anıqlıq ushın, meylı, $f(x)$ funksiya $\{x\}$ kóplikte ósiwshi bolsın. Teoremanıń shártlerin qanaatlandıırıwshı $f(x)$ funksiya $\{x\}$ kópliktiń bazı bir a noqatında úziliske iye bolsın. Onda bul funksiya 4-teorema boyınsha a noqatta birinshi túr úziliske iye boladı, yaǵnıy $f(a-0) < f(a+0)$ boladı (eger a noqat $\{x\}$ kópliktiń shetki noqatı bolsa, yaki $f(a-0) \leq f(a)$), yaki $f(a) \leq f(a+0)$ teńsizlik orınlanadı). Nátiyjede $x < a$ bolsa, $f(x) \leq f(a-0)$, al $x > a$ bolsa, $f(x) \geq f(a+0)$ bolıp, $f(x)$ funksiya $(f(a-0), f(a+0))$ intervaldaǵı $f(a)$ mánisten basqa mánislerdi hesh bir $x \in \{x\}$ noqatta qabıl kılmaydı. Bul funksiyanıń $\{y\} = \{f(x) : x \in \{x\}\}$ mánisler kópligi bazı bir tutas aralıq ekenligine qarama-qarsı. Demek, $f(x)$ funksiya a noqatta birinshi túr úziliske iye bola almaydı. ▲

1.6. Funkciyanıń limitin esaplaǵanda úzliksizliginen paydalanıw.

$y = f(x)$ funksiya $\{x\} \subset R$ kóplikte anıqlanǵan, a noqat bul kópliktiń limit noqatı bolsın. $z = \varphi(y)$ funksiya $y = f(x)$ funksiyanıń mánisler kópligi bolǵan $\{y\} = \{f(x) : x \in \{x\}\}$ kóplikte anıqlanǵan bolsın. Onda bul funksiyalardan $\{x\}$ kóplikte anıqlanǵan $z = \varphi(f(x))$ quramalı funksiya dúziw múmkin.

Eger $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = y_0$ bolıp, $z = \varphi(y)$ funksiya y_0 noqatta úzliksiz bolsa, onda $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(f(x)) = \varphi(y_0)$ teńlik orınlı boladı. Haqıyqatında da, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = y_0$ hám $\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = \varphi(y_0)$, sonlıqtan quramalı funksiyanıń limiti haqqındaǵı teorema boyınsha $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = \varphi(y_0)$.

Bul teńliklerden úzliksiz funkciyalar ushın funkciya belgisi astında limitke ótiw formulası kelip shıǵadı: $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(f(x)) = \varphi(\lim_{x \rightarrow a} f(x))$. Dara jaǵdayda, eger $f(x) = x$ bolsa, bul funkciya $\forall a \in R$ noqatta úzliksiz hám $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \varphi(\lim_{x \rightarrow a} x) = \varphi(a)$.

Logarifmlik, kórsetkishli hám dárejeli funkciyalardıń úzliksizliginen paydalanıp tómendegi mısallardı sheshemiz.

M ı s a l l a r. № 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$ ($a > 0, a \neq 1$) teńlikti dálilleybiz. Haqıyqatında da, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x)^{1/x} = \log_a e$. Bul jerde biz $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$ ájayıp limitpen paydalandıq.

Dara jaǵdayda, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ teńlik orınlı.

№ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ ($a > 0, a \neq 1$) teńlikti dálilleybiz. Bunıń ushın $a^x - 1 =: t$ dep belgilesek, $x = \log_a(1+t)$ hám $x \rightarrow 0$ da $t \rightarrow 0$ ekenin esapqa alıp, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a$ teńlikke iye bolamız.

Dara jaǵdayda, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ teńlik orınlı.

№ 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu$ teńlikti dálilleybiz. Bunıń ushın $(1+x)^\mu - 1 =: t$

dep belgilesek, $\mu = \frac{\ln(1+t)}{\ln(1+x)}$ hám $x \rightarrow 0$ da $t \rightarrow 0$ ekenin esapqa alıp,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{t}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} \frac{\ln(1+t)}{\ln(1+x)} \frac{\ln(1+x)}{x} = \mu$$

teńlikke iye bolamız.

2-§. Úzliksiz funkciyalardıń lokal hám global qásiyetleri

Funkciyanıń anıqlanıw oblastınıń bazı bir noqatınıń jeterli dárejede kishi dógereginde orınlı bolatuǵın qásiyetleri *funkciyanıń lokal qásiyetlerine* kiredi.

Bul qásiyetler argumenttiń izertlenip atırǵan noqatqa umılǵandaǵı xarakterin anıqlaydı. Mısalı, funkciyanıń óz anıqlanıw oblastınıń bazı bir noqatındaǵı úzliksizligi bul funkciyanıń lokal qásiyeti boladı.

Funkciyanıń pútkil anıqlanıw oblastı menen baylanıslı bolǵan qásiyetleri onıń *global qásiyetleri* boladı. Mısalı, funkciyanıń kesindidegi monotonlıǵı onıń global qásiyeti.

2.1. Lokal qásiyetleri. Meyli, $f(x)$ funkciya $\{x\} \subset R$ kóplikte anıqlanǵan bolıp, a noqat $\{x\}$ kópliktiń limit noqatı bolsın.

6- t e o r e m a. *Noqatta úzliksiz funkciya usı noqattıń bazı bir dógeresinde shegaralanǵan.*

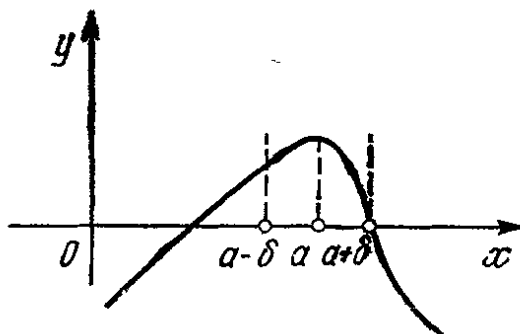
Bul teorema noqatta shekli limitke iye funkciya usı noqattıń bazı bir dógeresinde shegaralanǵanlıǵı qásiyetinen tikkeley kelip shıǵadı.

7- t e o r e m a (Noqatta úzliksiz funkciyanıń belgisiniń saqlanıwı haqqındaǵı). Meyli, $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte anıqlanǵan bolıp, $a \in \{x\}$ noqatta úzliksiz hám $f(a) > 0$ ($f(a) < 0$) bolsın. Onda $\exists \delta > 0$ san tabılıp, $\forall x \in B_\delta = \{x\} \cap U_\delta(a)$ noqatta $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) boladı.

Basqasha aytqanda, noqatta úzliksiz funkciya usı noqattıń bazı bir dógeresinde óz belgisin saqlaydı (2- súwret).

D á l i l l e w. Funkciyanıń noqatta úzliksizliginiń Koshi anıqlaması boyınsha $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ san tabılıp, argumenttiń a noqattıń δ – dógereginen alınǵan mánisleri ushın $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, yaǵnıy $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$ teńsizlikler orınlı boladı. Eger $\varepsilon = \frac{|f(a)|}{2}$ dep alsaq, onda $f(a) - \varepsilon$ hám $f(a) + \varepsilon$ sanlardıń ekewi de $f(a) > 0$ bolsa onı, al $f(a) < 0$ bolsa teris boladı. Sonlıqtan $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$ teńsizlikler argumenttiń a noqattıń δ – dógereginen alınǵan mánisleri ushın $f(x)$

funkciya $f(a) > 0$ bolsa oń, al $f(a) < 0$ bolsa teris anıqlanǵan bolatuǵının bildiredi. ▲



2- súwret

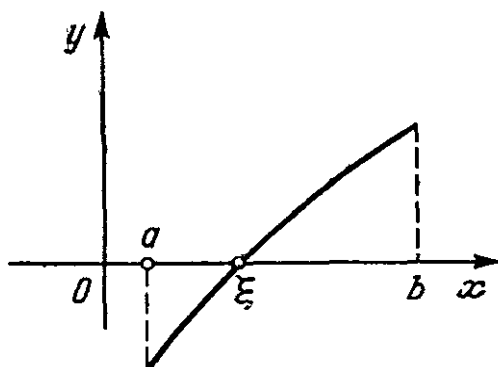
Bul teoremanı $f(x)$ funkciya a noqatta ońnan yaki shepten úzliksiz bolǵan jaǵday ushın mına kóriniste aytıw múmkin.

7*- t e o r e m a. Meyli, $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte anıqlanǵan bolıp, $a \in \{x\}$ noqatta ońnan (shepten) úzliksiz hám $f(a) \neq 0$ bolsın. Onda $\exists \delta > 0$ san tabılıp, $f(x)$ funkciyanıń $B_\delta^+ = \{x\} \cap U_\delta^+(a)$ ($B_\delta^- = \{x\} \cap U_\delta^-(a)$) kópliktegi belgisi $f(a)$ sannıń belgisindey boladı.

E s k e r t i w. Berilgen noqatta úzliksiz funkciyalardıń qosındısınıń, ayırmasınıń, kóbeymesiniń hám qatnasınıń usı noqatta úzliksizligi, sonday- aq, qoramalı funkciyanıń berilgen noqatta úzliksizligi funkciyanıń lokal qásiyetlerine jatadı.

2.2. Global qásiyetleri. **8- t e o r e m a** (Bol`cano- Koshidiń birinshi teoreması). Eger funkciya kesindide úzliksiz bolıp, kesindiniń shetki noqatlarında hár qıylı belgidegi mánislerge iye bolsa, onda kesindiniń kem degende bir ishki noqatındaǵı funkciyanıń dara mánisi nol`ge teń.

Bul teoremanı 3- súwret penen túsindiriw múmkin. Teoremanıń shártin qanaatlandıratuǵın funkciyanıń grafigi keminde bir noqatta (súwrette $(\xi; 0)$ noqatı) abscissalar kósherin kesip ótiwi kerek.



3- súwret

D á l i l l e w. Ulıwmalıqtı sheklemeden, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ dep esaplaw múmkin. Meyli, $X = \{x \in [a, b]: f(x) < 0\}$ bolsın, bul kóplik bos emes (bul kóplikte keminde a noqat bar) hám joqarıdan shegaralangán (mısalı, b sanı menen). Demek, bul kópliktiń dál joqargı shegarası bar, bul noqattı ξ dep belgileymiz.

ξ noqat- $[a, b]$ kesindiniń ishki noqatı, sebebi $f(x)$ funkciyanıń $[a, b]$ kesindide úzliksizliginen hám $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ teńsizliklerden a noqattıń sonday oń δ – yarım dógeregi tabılıp, bul dógerekte $f(x) < 0$ hám b noqattıń sonday shep δ – yarım dógeregi tabılıp, bul dógerekte $f(x) > 0$ boladı.

Endi $f(\xi) = 0$ bolatuǵına isenim arttıramız. Eger bulay bolmasa, ξ noqattıń sonday $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ dógeregi tabılıp, bul dógerekte $f(x)$ funkciya óz belgisin saqlaydı. Biraq bunday bolıwı múmkin emes, sebebi x kópliktiń dál shegarasınıń anıqlaması boyınsha $\forall x \in (\xi - \delta, \xi] \cap X$ noqatta $f(x) < 0$ hám $\forall x \in (\xi, \xi + \delta)$ noqatta $f(x) \geq 0$ boladı. Alınǵan qarama- qarsılıqtan $f(\xi) = 0$ bolatuǵını kelip shıǵadı. ▲

9- t e o r e m a (Bol’cano- Koshidiń II teoreması). Meyli, $f(x)$ funkciya $[a, b]$ kesindide úzliksiz, $f(a) = A$, $f(b) = B$ bolsın. Onda A hám B sanları arasındaǵı qálegen C sanı ushın sonday $\xi \in (a, b)$ noqat tabılıp, $f(\xi) = C$ teńlik orınlı boladı.

Basqasha aytkanda, kesindide úzliksiz funkciya usı kesindide hámme aralıq mánislerdi qabıl etedi.

D á l i l l e w. Tek $A \neq B$ jaǵdaydı qaraymız (keri jaǵdayda $A = B = C$ hám $\xi = a$ yaki $\xi = b$ dep alıw múmkin).

Ulıwmalıqtı sheklemesten, $A < B$, $A < C < B$ dep esaplaw múmkin. $\varphi(x) := f(x) - C$ funkciyanı qaraymız. Bul funkciya $[a, b]$ kesindide úzliksiz hám kesindiniń shetki noqatlarında hár qıylı belgidegi mánislerge iye: $\varphi(a) := A - C < 0$, $\varphi(b) := B - C > 0$. Bolcano- Koshidiń I teoreması boyınsha $\exists \xi \in (a, b)$ noqat tabılıp, $\varphi(\xi) = 0$ teńlik orınlı. Bunnan $\varphi(\xi) := f(\xi) - C = 0 \Rightarrow f(\xi) = C$. ▲

10- t e o r e m a (Veyershtstrasstıń birinshi teoreması). *Kesindide úzliksiz funkciya usı kesindide shegaralanǵan.*

D á l i l l e w. Meyli, $f(x)$ funkciya $[a, b]$ kesindide úzliksiz bolsın. $f(x)$ funkciya $[a, b]$ kesindide joqarıdan shegaralanǵanın dálilleybiz (tómennen shegaralanǵanlıǵı da usınday dálillenedi).

Keriden dálilleybiz, meyli, $f(x)$ funkciya $[a, b]$ kesindide joqarıdan shegaralanbaǵan bolsın. Onda $\forall n$ ($n = 1, 2, \dots$) natural san ushın $f(x_n) > n$ teńsizlik orınlı bolatuǵın keminde bir $x_n \in [a, b]$ noqat tabıladı. $[a, b]$ kesindiniń bul noqatlarınan funkciyanıń sáykes dara mánislerinen dúzilgen $\{f(x_n)\}$ izbe-izlik sheksiz úlken izbe-izlik bolatuǵın $\{x_n\}$ izbe-izlik dúziw múmkin. Bolcano- Veyershttrass teoreması boyınsha $\{x_n\}$ izbe-izlikten bazı bir ξ noqatqa jıynaqlı $\{x_{n_k}\}$ úles izbe-izlik ajratıp alıw múmkin. $\{x_n\}$ izbe-izliktiń hámme elementleri $[a, b]$ kesindiniń noqatları bolǵanlıqtan, $\xi \in [a, b]$. $f(x)$ funkciya $[a, b]$ kesindide úzliksiz, demek, bul funkciya ξ noqatta da úzliksiz. Funkciyanıń noqatta úzliksizliginiń Geyne anıqlaması boyınsha $\{f(x_{n_k})\}$ izbe-izlik $f(\xi)$ mániske jıynaqlı bolıwı kerek. Biraq bul sheksiz úlken izbe-izliktiń

qálegen úles izbe- izligi sheksiz úlken izbe- izlik bolatuǵınlıǵına qarama- qarsı keledi. Bul qarama-qarsılıq teoremanı dálilleydi. ▲

E s k e r t i w. Bul teorema kesindi ushın orınlı bolıp, sanlar kósheriniń basqa kóplikleri (interval, yarım kesindi) ushın, ulıwma aytqanda, orınlı emes, yaǵnıy funkciyanıń intervalda (yarım kesindide) úzliksizliginen bul funkciyanıń usı kóplikte úzliksizligi kelip shıqpaydı. Mısalı, $f(x) = \frac{1}{x}$ funkciya $(0, 1)$ intervalda $((0, 1]$ yarım kesindide) úzliksiz, biraq bul kóplikte shegaralanǵan emes. Haqıyqatında da, $x_n = \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$) izbe- izliktiń elementleri $(0, 1]$ yarım kesindige derek, biraq funkciyanıń sáykes dara mánislerinen dúzilgen $f(x_n) = n$ izbe- izlik sheksiz úlken izbe- izlik.

$\{x\} \subset R$ kóplikte shegaralanǵan $f(x)$ funkciya usı kópliktegi óziniń dál joqarǵı (dál tómengi) shegarasına hámme waqıt erisedime, yaǵnıy $f(x^*) = \sup_{x \in \{x\}} f(x)$ ($f(x_*) = \inf_{x \in \{x\}} f(x)$) bolatuǵın $x^* \in \{x\}$ ($x_* \in \{x\}$) noqat hárdayım tabıla beredime?,- degen soraw tuwıwı tábiyiy.

Tómendegi mısál berilgen kóplikte shegaralanǵan funkciya usı kópliktegi dál shegaralarına erisiwi shárt emesligin kórsetedi.

$[0, 1]$ kesindide anıqlanǵan

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 0, x = 1 \end{cases}$$

funkciya usı kesindide shegaralanǵan hám $\sup_{x \in \{x\}} f(x) = 1$, $\inf_{x \in \{x\}} f(x) = 0$. Biraq $[0, 1]$ kesindiniń hesh bir noqatında funkciyanıń mánisi nolge hám birge teń bolmaydı.

Bul funkciya $[0, 1]$ kesindide úzliksiz emes. Bul shárt úlken áhmiyetke iye.

11- t e o r e m a (Veyershtstrasstnıń ekinshi teoreması). *Kesindide úzliksiz funksiya usı kesindide óziniń eń úlken hám eń kishi mánislerine erisedi.*

D á l i l l e w. Veyershtstrasstnıń I teoreması boyınsha $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesindide shegaralanǵan, demek, onıń bul kesindide M dál joqarǵı hám m dál tómengi shegaraları bar. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesindide M dál joqarǵı shegarasına erisiwin kórsetemiz (m dál tómengi shegarasına erisiwi de usınday dálillenedi).

Meyli, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesindide M dál joqarǵı shegarasına erise almasın, yaǵnıy $\forall x \in [a, b]$ noqatta $f(x) < M$ bolsın. Onda biz $\varphi(x) := \frac{1}{M - f(x)}$ funksiyanı qarawımız múmkin. Bul funksiya $[a, b]$ kesindide úzliksiz hám qatal oń anıqlanǵan. Demek, Veyershtstrasstnıń I teoreması boyınsha bul funksiya $[a, b]$ kesindide shegaralanǵan, yaǵnıy $\exists A > 0$ san tabılıp, $\forall x \in [a, b]$ noqatta $\varphi(x) \leq A$ teńsizlik orınlı boladı. $M - f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesindide úzliksiz hám qatal oń anıqlanǵan funksiya bolǵanlıqtan $\frac{1}{M - f(x)} \leq A$ teńsizlik $f(x) \leq M - \frac{1}{A}$ teńsizlikke ekvivalent, al bul M sanı $f(x)$ funksiyanıń $[a, b]$ kesindidegi dál joqarǵı shegarası ekenligine qarama-qarsı. Bul qarama-qarsılıq teoremanı dálilleydi. ▲

1- e s k e r t i w. $[a, b]$ kesindide úzliksiz $f(x)$ funksiya usı kesindide óziniń dál tómengi hám dál joqarǵı shegarasına erisetuǵın bolǵanlıqtan funksiyanıń kesindidegi dál joqarǵı shegarası bolǵan M sanın (dál tómengi shegarası bolǵan m sanın) $f(x)$ funksiyanıń $[a, b]$ kesindidegi maksimumı (*minimumı*) dep atawımız múmkin. Ádette, $f(x)$ funksiyanıń $[a, b]$ kesindidegi maksimumı (*minimumı*)

$$\max_{a \leq x \leq b} f(x) = \max_{[a, b]} f(x) \quad (\min_{a \leq x \leq b} f(x) = \min_{[a, b]} f(x))$$

simvolları menen belgilenedi.

2- e s k e r t i w. $[a, b]$ kesindi noqatlarında úziliske iye funkciya da usı kóplikte óziniń dál tómengi hám dál joqarǵı shegarasına erisiwi múmkin. Mısalı, $D(x)$ - Dirixle funkciyası $[0, 1]$ kesindiciniń hár bir noqatında úziliske iye, biraq bul kesindide óziniń dál joqarǵı shegarasına da (1 ge teń), dál tómengi shegarasına da (0 ge teń) erisedi.

3- e s k e r t i w. Veyershtrasstıń ekinshi teoreması da kesindi ushın orınlı bolıp, sanlar kósheriniń basqa úles kópliklerinde (interval, yarım kesindi), ulıwma aytqanda, orınlı emes.

Mısalı, $f(x) = x$ funkciya $(0, 1)$ intervalda ($[0, 1]$ hám $(0, 1]$ yarım kesindilerde) úzliksiz, biraq bul kóplikte óziniń dál tómengi hám dál joqarǵı shegaralarına erispeydi ($[0, 1)$ yarım kesindisiniń $x = 0$ noqatında dál tómengi shegarasına erisedi, biraq dál joqarǵı shegarasına erise almaydı, al $(0, 1]$ yarım kesindisiniń $x = 1$ noqatında dál joqarǵı shegarasına erisedi, biraq dál tómengi shegarasına erise almaydı).

Sonıń menen birge intervalda yaki yarım segmentte úzliksiz funkciyanıń dál shegaraları joq bolıwı da múmkin, sebebi bul funkciya kórsetilgen intervalda yaki yarım kesindide shegaralanbaǵan bolıwı da múmkin. Mısalı, $f(x) = \frac{1}{x}$ funkciya $(0, 1)$ intervalda ($(0, 1]$ yarım kesindinde) úzliksiz, biraq bul funkciya $(0, 1)$ intervalda ($(0, 1]$ yarım kesindisinde) tómennen shegaralanǵan bolıp, bul intervalda dál tómengi shegarasına erise almaydı ($(0, 1]$ yarım kesindiniń $x = 1$ noqatında 1 ge teń dál tómengi shegarasına erisedi). Bul funkciya joqarıdan shegaralanbaǵan, dál joqarǵı shegarası joq.

12- t e o r e m a (Bol`cano-Koshi hám Veyershtrass teoremlarınıń saldarı). *Kesindide úzliksiz funkciyanıń mánisler kópligi- tolıq kesindi.*

2.3. Keri funkciyanıń úzliksizligi. 13- t e o r e m a. *Eger $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte anıqlanǵan, úzliksiz hám qatal ósiwshi (qatal kemiwshi) funkciya bolsa, onda bul funkciyanıń $\{y\} = \{f(x) : x \in \{x\}\}$ mánisler kópliginde*

anıqlanğan $f^{-1}(y)$ kerі funkciya bar bolıp, bul funkciya $\{y\}$ kóplikte úzliksiz hám qatal ósiwshi (qatal kemiwshi) funkciya boladı.

D á l i l l e w. Meyli, $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte anıqlanğan, úzliksiz hám qatal ósiwshi funkciya bolsın. $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte úzliksiz bolğanlıqtan onıń mánisleri $\{y\}$ kóplikti tolıq toltıradı. Demek, $\forall y_0 \in \{y\}$ ushın $f(x_0) = y_0$ bolatuǵın $x_0 \in \{x\}$ noqat bar hám bunday noqat jalǵız birew. Haqıyqatında da, eger $x' > x_0$ ($x' < x_0$) bolğan $x' \in \{x\}$ noqat alınatuǵın bolsa, $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte qatal ósiwshi bolğanlıqtan $f(x') > f(x_0)$ ($f(x') < f(x_0)$) boladı. Solay etip, $\{y\}$ kóplikten alınğan $\forall y \in \{y\}$ noqat ushın $f(x) = y$ bolatuǵın jalǵız bir $x \in \{x\}$ noqat bar eken. Demek, $\{y\}$ kóplikte anıqlanğan $x = f^{-1}(y)$ kerі funkciya bar. Endi usı funkciyanıń qatal ósiwshi ekenin kórsetemiz. Bunu kerisinen dálilleymiz. Meyli, $y_1 < y_2$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı $y_1, y_2 \in \{y\}$ noqatlarǵa sáykes $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$ mánisler ushın $x_1 > x_2$ teńsizlik orınlı bolsın. $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte qatal ósiwshi bolğanlıqtan $f(x_1) > f(x_2)$ yaǵnıy $y_1 > y_2$ boladı. Bul $y_1 < y_2$ teńsizlikke qarama qarsı. Demek, $x = f^{-1}(y)$ kerі funkciya $\{y\}$ kóplikte qatal ósiwshi. Monoton funkciyanıń úzliksizligi haqqındaǵı teorema boyınsha $x = f^{-1}(y)$ kerі funkciya $\{y\}$ kóplikte úzliksiz boladı.

$f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte anıqlanğan, úzliksiz hám qatal kemiwshi funkciya bolğan jaǵday da usıǵan uqsas dálillenedi. ▲

2.4. Funkciyanıń teń ólshemli úzliksizligi. Kantor teoreması. Meyli, $f(x)$ funkciya hár bir noqatı limit noqatı bolğan $\{x\} \subset R$ kóplikte anıqlanğan bolsın.

7- a n ı q ı l a m a. Eger $\forall \varepsilon > 0$ ushın $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ san tabılıp, $|x' - x''| < \delta$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı $\forall x', x'' \in \{x\}$ noqatlar ushın

$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı bolsa, onda $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte *teń ólshemli úzliksiz* dep ataladı.

1- e s k e r t i w. Kóplikte teń ólshemli úzliksiz funkciya usı kóplikte úzliksiz.

2- e s k e r t i w. Kóplikte úzliksiz funkciya bul kópliktiń hár bir noqatında úzliksiz. Demek, kópliktiń hár bir a noqatında Koshi anıqlaması orınlı. Bul anıqlama boyınsha funkciyanıń mánisler kópliginen alınǵan hár bir $f(a)$ noqattıń ε – dógeregi ushın a noqattıń $\exists U_\delta(a)$ dógeregi tabılıp, argumenttiń usı dógerekten alınǵan mánislerine sáykes funkciyanıń mánisleri $f(a)$ noqattıń ε – dógeretine derek boladı. Solay etip, Koshi anıqlamasındaǵı $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ san tek ε sanǵa ǵana emes, a noqattıń ózine de ǵárezli boladı: $\delta = \delta(\varepsilon, a)$.

Demek, funkciyanıń teń ólshemli úzliksizliginiń anıqlamasındaǵı tiykarǵı talap: $\forall \varepsilon > 0$ ushın $|x' - x''| < \delta$ teńsizlirni qanaatlandıratuǵın $\forall x_1, x_2 \in \{x\}$ noqatlar ushın $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ teńsizliktiń orınlı bolıwın támiyinleytuǵın universal $\delta > 0$ sanınıń tabılıwı.

Eger $f(x)$ funkciyanıń hár bir $x_0 \in \{x\}$ noqatta úzliksiz bolıwı talap qılınsa, onda $\forall \varepsilon > 0$ san hám $\forall x_0 \in \{x\}$ noqat ushın tek ǵana ε sanǵa emes, $x_0 \in \{x\}$ noqatqa da ǵárezli bolǵan, $|x - x_0| < \delta$ teńsizlikti qanaatlandıratuǵın hámme $x \in \{x\}$ noqatta $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ teńsizliktiń orınlı bolıwın támiyinleytuǵın $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ sanınıń tabılıwına kepillik beriw múmkin. Bunda, ulıwma aytqanda, hámme $x_0 \in \{x\}$ noqatlar ushın kórsetilgen $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ sanlardıń dál tómengi on shegarası bolmawı da múmkin, yaǵnıy funkciyanıń $\forall x \in \{x\}$ noqatta úzliksizliginen, ulıwma aytqanda, bul funkciyanıń $\{x\}$ kóplikte teń ólshemli úzliksizligi kelip shıqpaydı.

3- e s k e r t i w. Funkciyanıń teń ólshemli úzliksizliginiń anıqlamasınan, eger $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte teń ólshemli úzliksiz bolsa, onda bul funkciya usı kópliktiń qálegen úles kópliginde teń ólshemli úzliksiz bolatuǵını kelip shıǵadı.

M ı s a l l a r. 1) $f(x) = \frac{1}{x}$ funkciya $x \geq 1$ yarım tuwrı sızıqta teń ólshemli úzliksiz. Haqıyqatında da, bul yarım sızıqtıń qálegen eki x' hám x'' noqatı ushın

$$|f(x') - f(x'')| = \left| \frac{1}{x'} - \frac{1}{x''} \right| = \left| \frac{x'' - x'}{x' x''} \right| = \frac{|x'' - x'|}{x' x''} \leq |x'' - x'|$$

teńsizlik orınlı. Sonlıqtan, $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $\delta = \varepsilon$ dep alsaq, $|x' - x''| < \delta$ teńsizlikti qanaatlandıratuǵın $\forall x', x'' \in [1, +\infty)$ noqatlar ushın $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı boladı.

2) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ funkciya $(0, 1)$ intervaldıń hár bir noqatında úzliksiz, biraq bul intervalda teń ólshemli úzliksiz emes. Bunı kórsetiw ushın bazı bir $\varepsilon > 0$ hám jeterli dárejede kishi $\forall \delta > 0$ sanı ushın $|x' - x''| < \delta$ teńsizlikti qanaatlandıratuǵın, biraq funkciyanıń sáykes dara mánisleri $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$ teńsizlikti qanaatlandıratuǵın $\exists x', x'' \in (0, 1)$ noqatlar juplıǵı bar ekenin dálillew jetkilikli.

Elementleri $(0, 1)$ intervalǵa derek $x'_n = \frac{1}{n\pi}$ hám

$x''_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ ($n = 1, 2, \dots$) izbe- izliklerdi qaraymız. Bul izbe- izliklerdiń hár

birewi, demek, olardıń ayırması da, sheksiz kishi izbe- izlik. Sonlıqtan jeterli dárejede kishi $\forall \delta > 0$ san ushın $|x'_n - x''_n| < \delta$ teńsizlik orınlanatuǵın n nomer bar. Sonıń menen birge $\forall n$ nomer ushın

$$|f(x'_n) - f(x''_n)| = \left| \sin(\pi n) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \right| = 1.$$

Sonlıqtan qálegen $0 < \varepsilon \leq 1$ san hám jeterli dárejede kishi $\forall \delta > 0$ san ushın $|x'_n - x''_n| < \delta$ teńsizlikti qanaatlandıratuǵın, biraq funkciyanıń sáykes dara mánisleri $|f(x'_n) - f(x''_n)| = 1 \geq \varepsilon$ teńsizlikti qanaatlandıratuǵın, $x'_n, x''_n \in (0, 1)$ noqatlar juplıǵı bar, bul qaralıp atırǵan funksiya $(0, 1)$ intervalda teń ólshemli úzliksiz emesligin bildiredi.

3) $f(x) = x^2$ funksiya $x \geq 1$ yarım tuwrı sıızıqta teń ólshemli úzliksiz emesligin dálilleybiz. $\forall x', x'' \in [1, +\infty)$ noqatlar ushın

$$|f(x') - f(x'')| = |x'^2 - x''^2| = |x' - x''| \cdot |x' + x''| \geq |x' - x''| \cdot x' \quad (*)$$

teńsizlik orınlı. Endi tek bazı bir $\varepsilon > 0$ ushın ǵana emes, hátte $\forall \varepsilon > 0$ ushın da hám jeterli dárejede kishi $\forall \delta > 0$ sanı ushın $|x' - x''| < \delta$ teńsizlikti qanaatlandıratuǵın, biraq funkciyanıń sáykes dara mánisleri $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$ teńsizlikti qanaatlandıratuǵın $\exists x', x'' \in [1, +\infty)$ noqatlar juplıǵı bar ekenin dálilleybiz.

$\forall \varepsilon > 0$ hám $\forall \delta > 0$ sanlardı saylap alıp, x' sanı sıpatında 1 den úlken, $x' > \frac{2\varepsilon}{\delta}$ teńsizligin qanaatlandıratuǵın sandı hám $x'' = x' + \frac{\delta}{2}$ dep alamız.

Bunday x' hám x'' sanlar ushın $|x'' - x'| = \frac{\delta}{2} < \delta$ teńsizlik orınlı. Ekinshi tárepten, (*) teńsizlik boyınsha usı x' hám x'' sanlar ushın

$$|f(x') - f(x'')| \geq \frac{\delta}{2} \cdot \frac{2\varepsilon}{\delta} = \varepsilon$$

teńsizlik orınlı.

Eger berilgen $f(x) = x^2$ funkciyanı $[1, +\infty)$ yarım tuwrı sıızıǵında emes, al $[1, b]$ ($b > 1$) kesindisinde qarasaq, onda bul funksiya usı kesindide teń ólshemli úzliksiz bolatuǵının kóriwimiz qıyın emes.

Bul mına teoremadan túsiniqli boladı.

14- t e o r e m a (Kantor). *Kesindide úzliksiz funkciya usı kesindide teń ólshemli úzliksiz.*

D á l i l l e w. Meyli, $f(x)$ funkciya $[a, b]$ kesindide úzliksiz funkciya bolıp, biraq bul kesindide teń ólshemli úzliksiz bolmasın.

Onda bazı bir $\varepsilon > 0$ hám qálegen jeterli dárejede kishi $\delta > 0$ sanlar ushın $|x' - x''| < \delta$ teńsizligin qanaatlandıratuǵın $\exists x', x'' \in [a, b]$ noqatlar tabılıp, bul noqatlar ushın $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$ teńsizlik orınlı boladı. $\delta_n = 1/n$ ($n = 1, 2, \dots$) sheksiz kishi izbe- izligin saylap alamız. Tańlap alınǵan $\varepsilon > 0$ san hám $\forall n$ nomer ushın $|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}$ (*) teńsizligin qanaatlandıratuǵın $\exists x', x'' \in [a, b]$ noqatlar tabılıp, bul noqatlar ushın $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon$ (**) teńsizlik orınlı boladı dep aytıwımız múmkin. $\{x'_n\}$ izbe- izliktiń elementleri $[a, b]$ kesindiniń noqatları bolǵanlıqtan, bul izbe- izlik shegaralanǵan hám Bolcano- Veyershtass teoreması boyınsha bul izbe- izlikten ξ noqatqa jıynaqlı $\{x'_{n_k}\}$ úles izbe- izlik ajratıp alıw múmkin. Bul ξ limit noqat $[a, b]$ kesindige derek. (*) teńsizlik boyınsha sáykes $\{x''_{n_k}\}$ úles izbe- izlik te ξ noqatqa jıynaqlı.

$f(x)$ funkciya $[a, b]$ kesindide úzliksiz bolǵanlıqtan bul funkciya ξ noqatta da úzliksiz, sonlıqtan funkciyanıń noqatta úzliksizliginiń Geyne anıqlaması boyınsha funkciyanıń sáykes dara mánislerinen dúzilgen $\{f(x'_{n_k})\}$ hám $\{f(x''_{n_k})\}$ úles izbe- izlikler $f(\xi)$ mániske jıynaqlı, yaǵnıy $\{f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})\}$ izbe- izlik sheksiz kishi izbe- izlik boladı. Bul $\forall n$ nomer, demek, $\forall n_k$ nomer ushın orınlı bolǵan (**) teńsizlikke qarama-qarsı. Bul qarama- qarsılıq teoremanı dálilleydi. ▲

3-§. Tiýkarǵı elementar funkciýalar hám

olardıń úzliksizligi

$y = x^a$, $y = a^x$, $y = \log_a x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$,
 $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ funkciýalar tiýkarǵı
(ápiwayı) *elementar funkciýalar* dep ataladı.

Biziń tiýkarǵı maqsetimiz usı tiýkarǵı (ápiwayı) elementar funkciýalardıń úzliksizligin anıqlaw máselesin izertlewden ibarat. Ápiwayı elementar funkciýalardı anıqlaw máselesi onsha ańsat másele emesligin atap ótiw kerek. Mısalı, $y = a^x$ kórsetkishli funkciya argumenttiń racional mánisleri ushın ańsat anıqlanadı, sonıń menen birge bul funkciyanı x argumenttiń qálegen haqıyqıy mánisleri ushın anıqlaw, yaǵnıy haqıyqıy sandı qálegen x haqıyqıy dárejege kóteriwdi anıqlaw kerek boladı. $\sin x$ hám $\cos x$ trigonomeriyalıq funkciýalardı kórgizbeli geometriyalıq pikirlewler járdeminde anıqlaw logikalıq kemshiliklerge iye. Bul funkciýalardı x argumenttiń qálegen haqıyqıy mánisleri ushın anıqlaw múmkinligi birlik sheńber noqatları menen $[0, 2\pi)$ yarım kesindige derek haqıyqıy sanlar arasında bir mánisli sáykes ornatiw múmkinligine keltiriledi.

Usılardıń bári menen bul paragrafta shuǵıllanamız.

3.1. Kórsetkishli funkciýalar. Biz úyreniwdi óń sanlardıń racional dárejesin anıqlawdan baslaymız. x haqıyqıy sandı n natural dárejege kóteriwdi ushın bul sandı ózine ózin n mártebe kóbeytiw kerek. Demek, $\forall n \in \mathbb{N}$ ushın $\forall x \in \mathbb{R}$ mánislerde $y = x^n$ dárejeli funkciya anıqlanǵan dep esaplaw múmkin.

1- t e o r e m a. $y = x^n$ (n – natural san) dárejeli funkciya $x \geq 0$ mánislerde qatal ósiwshi hám úzliksiz.

D á l i l l e w. $y = x^n$ funkciya qatal ósiwshi ekenin kórsetemiz. Meyli, $0 \leq x_1 < x_2$ bolsın. Onda $x_2^n - x_1^n = (x_2 - x_1)(x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_1 + \dots + x_1^{n-1})$. Teńliktiń óń jaǵındaǵı eki kóbeytiwshi de óń, sonlıqtan teńliktiń shep tárepindegi ayırma

da oń, yaǵnıy $x_2^n > x_1^n$. Bul $y = x^n$ funkciya $x \geq 0$ mánislerde qatal ósiwshi ekenin bildiredi.

$y = x^n$ funkciyanıń $x \geq 0$ mánislerde úzliksizligi funkciyanıń úzliksizliginiń anıqlamasınan kelip shıǵadı. ▲

$y = x^n$ dárejeli funkciyanı $[0, N]$ (N – qálegen oń san) kesindide qaraymız. Bul funkciya kórsetilgen kesindide úzliksiz hám qatal ósiwshi bolǵanlıqtan keri funkciyanıń úzliksizligi haqqındaǵı teorema boyınsha $[0, N^n]$ kesindide úzliksiz hám qatal ósiwshi $x = y^{1/n}$ keri funkciyaǵa iye. N sandı qálegenshe úlken qılıp saylap alıw múmkin bolǵanlıqtan N^n sandı da qálegenshe úlken qılıp saylap alıw múmkin. Demek, $x = y^{1/n}$ keri funkciya y ózgeriwshiniń hámme teris emes mánisleri ushın anıqlanǵan. Bul funkciyada argumenti menen funkciyanıń belgilewleriniń orınların almasırap hámme $x \geq 0$ haqıyqıy mánislerde anıqlanǵan $y = x^{1/n}$ funkciyanı alamız.

Endi biz $a > 0$ sannıń $\forall r$ racional dárejesin anıqlawımız múmkin. Dáslep $a^{1/n}$ sandı $y = x^{1/n}$ funkciyanıń a noqattaǵı dara mánisine teń b haqıyqıy san sıpatında anıqlaymız. Bunnan keyin, eger $r = m/n$ (m, n – pútın oń sanlar) bolsa, onda $a^r = a^{m/n} = (a^{1/n})^m$ dep alamız. Bunnan tısqarı, anıqlama boyınsha $a^0 = 1$, $a^{-r} = (\frac{1}{a})^r$ ($r > 0$) dep esaplaymız.

$a > 0$ sannıń $\forall r$ racional dárejesin usılay etip anıqladıq.

On haqıyqıy sanlardıń racional dárejesiniń mına qásiyetleri orınlı:

$$(a^r)^s = a^{rs}, \quad a^r \cdot b^r = (ab)^r, \quad a^r \cdot a^s = a^{r+s}.$$

Eger $a > 1$ bolsa, onda $\forall r > 0$ racional san ushın $a^r > 1$.

Eger $r = \frac{m}{n}$ racional bólshektiń n bólimi taq san bolsa, onda racional

dárejeni teris sanlar ushın $a > 0$ dep alıp,

$$(-a)^r = \begin{cases} a^r, & n = 2k, \\ -a^r, & n = 2k - 1 \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

kóriniste anıqlaw múmkin.

Racional sanlar kópliginde anıqlanğan $y = a^x$ funkciya $a > 1$ bolsa bul kóplikte monoton ósedi.

Haqıyqatında da, meyli, r_1 hám $r_2 - r_1 > 0$ teńsizlikti qanaatlandıratuǵın racional sanlar bolsın. Onda

$$a^{r_2} - a^{r_1} = a^{r_1} (a^{r_2 - r_1} - 1) > 1, \quad (1)$$

sebebi $a > 1$ hám $r_2 - r_1 > 0$. Solay etip, (1) teńliktiń oń tárepi oń anıqlanğan.

Demek, $a^{r_2} - a^{r_1} > 0$, yaǵnıy $a^{r_2} > a^{r_1}$. ▲

Endi $y = a^x$ funkciyanı x argumenttiń tek racional mánisleri ushın emes, qálegen haqıyqıy mánisleri ushın da anıqlaymız. Meyli, x - qálegen haqıyqıy san bolsın.

$$\alpha < x < \beta \quad (2)$$

teńsizliklerdi qanaatlandıratuǵın hámme múmkin bolǵan α hám β racional sanlardı karaymız.

$a > 1$ bolsa a^x sandı (2) teńsizliklerdi qanaatlandırıwshı hámme múmkin bolǵan α hám β racional sanlar ushın

$$a^\alpha < y < a^\beta \quad (3)$$

teńsizliklerdi qanaatlandırıwshı $y \in \mathbb{R}$ san sıpatında anıqlaymız.

2- t e o r e m a. $\forall x \in \mathbb{R}$ hám $a > 1$ haqıyqıy san hám (2) teńsizliklerdi qanaatlandırıwshı hámme múmkin bolǵan α hám β racional sanlar ushın (3) teńsizliklerdi qanaatlandırıwshı $y \in \mathbb{R}$ san bar hám ol jalǵız birew.

Demek, usı jol menen $y = a^x$ funkciya pútkil haqıyqıy sanlar kópliginde anıqlanadı eken.

3- t e o r e m a. $y = a^x$ kórsetkishli funkciya $a > 1$ bolsa pútkil sanlar kósherinde qatal ósiwshi.

D á l i l l e w. Meyli, x_1 hám $x_2 - x_1 < x_2$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı haqıyqıy sanlar bolsın. $x_1 < \alpha < \beta < x_2$ teńsizliklerdi qanaatlandırıwshı α hám β racional sanlar hárdayım tabıladı. $x_1 < \alpha$ hám $\beta < x_2$ bolǵanlıqtan kórsetkishli funkciyanıń anıqlamasınan $a^{x_1} \leq a^\alpha$, $a^\beta \leq a^{x_2}$ teńsizlikler orınlı. Ekinshi tárepten, $\alpha < \beta$ bolǵanlıqtan kórsetkishli funkciyanıń racional sanlar kópiginde ósiwshiliginen $a^\alpha < a^\beta$ teńsizlik kelip shıǵadı. $a^{x_1} \leq a^\alpha$, $a^\alpha < a^\beta$ hám $a^\beta \leq a^{x_2}$ teńsizliklerden $a^{x_1} < a^{x_2}$ teńsizlikti alamız. Bul $y = a^x$ kórsetkishli funkciya $a > 1$ bolsa pútkil sanlar kósherinde qatal ósiwshi funkciya ekenin bildiredi. ▲

4- t e o r e m a. $y = a^x$ ($a > 1$) kórsetkishli funkciya sanlar kósheriniń hár bir noqatında úzliksiz.

D á l i l l e w. Meyli, x — qálegen haqıyqıy san, al $\{x_n\}$ — x sanǵa jıynaqlı qálegen izbe- izlik bolsın. Funkciyanıń úzliksizliginiń Geyne anıqlaması boyınsha sáykes $\{a^{x_n}\}$ izbe- izlik a^x sanǵa jıynaqlı bolatuǵının, yaǵnıy $\forall \varepsilon > 0$ ushın $\exists N = N(\varepsilon)$ nomer tabılıp, $n > N$ nomerler ushın $|a^{x_n} - a^x| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı bolatuǵının, kórsetiw jetkilikli. $\forall \varepsilon > 0$ hám bul sanǵa sáykes $\alpha < x < \beta$ hám $a^\beta - a^\alpha < \varepsilon$ bolatuǵın α hám β racional sanlardı saylap alamız. $\{x_n\}$ — x sanǵa jıynaqlı izbe- izlik hám $\alpha < x < \beta$ bolǵanlıqtan $\exists N$ nomer tabılıp, $n > N$ nomerler ushın $\alpha < x_n < \beta$ teńsizlikler orınlı boladı. Kórsetkishli funkciya monoton ósiwshi bolǵanlıqtan $a^\alpha < a^x < a^\beta$ hám $n > N$ nomerler ushın $a^\alpha < a^{x_n} < a^\beta$ teńsizlikler orınlı.

Solay etip, a^x hám a^{x_n} sanlar $n > N$ nomerler ushın ayırması ε sannan kishi a^α hám a^β sanlar arasında jaylasqan. Bunnan $n > N$ nomerler ushın $|a^{x_n} - a^x| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı bolatuǵını kelip shıǵadı. Bul $y = a^x$ kórsetkishli funkciya x noqatta úzliksiz ekenin bildiredi. ▲

1- s a l d a r. $y = a^x$ ($a > 1$) kórsetkishli funkciya sanlar kósheride óń anıqlanǵan

2- s a l d a r. $y = a^x$ ($a > 1$) kórsetkishli funkciya ushın

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

teńlikler orınlı.

3- s a l d a r. $y = a^x$ ($a > 1$) kórsetkishli funkciyanıń mánisleri $y > 0$ óń yarım kósherdi tolıq toltıradı.

4- s a l d a r. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sanlar ushın

$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}, \quad a^x \cdot b^x = (ab)^x \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}.$$

teńlikler orınlı boladı.

1- súwrette $y = a^x$ kórsetkishli funkciyanıń grafigi $a > 1$ (1- a súwret) hám $0 < a < 1$ (1- b súwret) jaǵlaylar ushın súwretlengen.

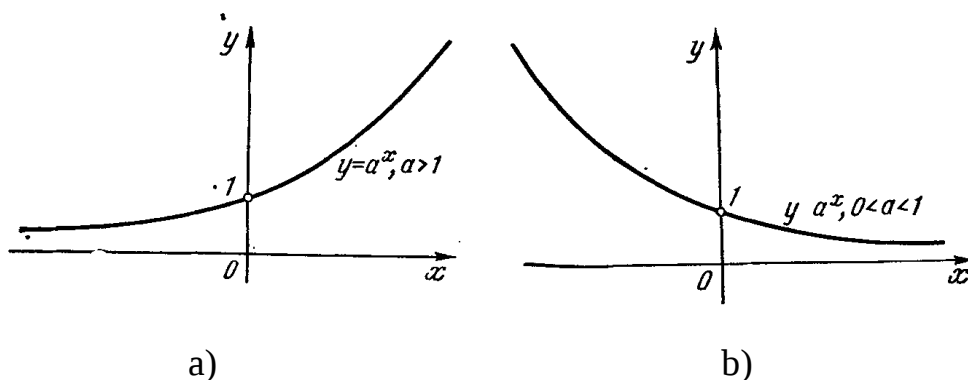
E s k e r t i w. Kórsetkishli funkciyanı málim shártlerdi qanaatlandırıwshı bazı bir funkcionallıq teńlemenıń sheshimi sıpatında anıqlaw múmkin. Pútkil sanlar kósherinde anıqlanǵan hám tómendegi úsh shártti qanaatlandırıwshı $f(x)$ funkciya bar hám ol jalǵız birew ekenin dálillew múmkin:

$$1^0. \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ sanlar ushın } f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2).$$

$$2^0. f(0) = 1, \quad f(1) = a.$$

$$3^0. f(x) \text{ funkciya } x = 0 \text{ noqatta úzliksiz.}$$

Bul funkciya biz joqarıda qurǵan kórsetkishli funkciya boladı.



1- súwret

3.2. Logarifmlik funksiya. Logarifmlik funksiyanı kórsetkishli funksiyaǵa keri funksiya sıpatında anıqlaymız. Meyli, $[c, d]$ – sanlar kósheriniń qálegen kesindisi bolsın. Bul kesindide $y = a^x$ ($a > 1$) kórsetkishli funksiya ósiwshi hám úzliksiz. Sonıń ushın keri funksiyanıń úzliksizligi haqqındaǵı teorema boyınsha $y = f(x) = a^x$ funksiya $[a^c, a^d]$ kesindide ósiwshi hám úzliksiz $x = f^{-1}(y)$ keri funksiyaǵa iye, bul funksiya *logarifmlik funksiya* dep ataladı hám $x = f^{-1}(y) = \log_a y$ dep belgilenedi. Bul jerde argument hám funksiyanıń belgileniwleriniń orınların almasırap, bul funksiyanı bizge úyrenshikli $y = \log_a x$ kóriniste jazamız.

$0 < a < 1$ jaǵday usıǵan uqsas qaraladı.

Logarifmlik funksiyanıń qásiyetleri:

1) *Logarifmlik funksiya argumenttiń oń mánislerinde anıqlanǵan.*

Haqıyqatında da, logarifmlik funksiyanıń argumenti kórsetkishli funksiyanıń mánisleri bolıp, tek oń mánisler boladı hám $x > 0$ yarım kósherdi tolıq toltıradı.

2) *Logarifmlik funksiya $x > 0$ yarım kósherde $a > 1$ bolsa úzliksiz hám ósiwshi, al $0 < a < 1$ bolsa úzliksiz hám kemiwshi bolıp,*

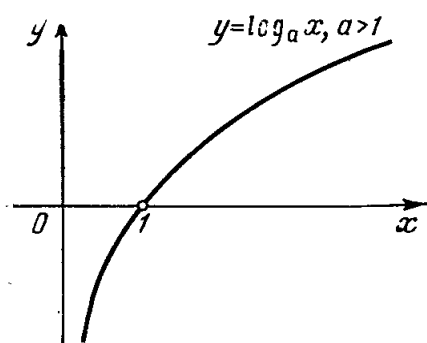
$$\begin{aligned} a > 1: \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \log_a x &= -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty, \\ 0 < a < 1: \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \log_a x &= +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty \end{aligned}$$

teńlikler orınlı.

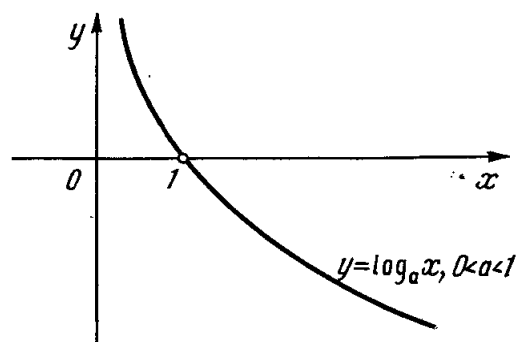
3) $\forall x_1, x_2$ oń sanlar ushın $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$ *teńlik orınlı.*

E s k e r t i w. $y = \log_e x =: \ln x$ funksiya *natural logarifm* dep ataladı.

2- súwrette $y = \log_a x$ logarifmlik funksiyanıń grafigi $a > 1$ (2- a súwret) hám $0 < a < 1$ (2- b súwret) jaǵlaylar ushın súwretlengen.



a)



b)

2- súwret

3.3. Dárejeli funkciya. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ kórsetkishli dárejeli funkciyanı logarifmlik hám kórsetkishli funkciyanıń superpoziciyası (quramalı funkciyası) sıpatında anıqlaymız. Meyli, $x > 0$ bolsın. Onda ulıwma *dárejeli funkciya*

$$y = x^\alpha = (a^{\log_a x})^\alpha = a^{\alpha \cdot \log_a x}$$

kóriniste anıqlanadı, bul jerde a — qálegen san, anıqlıq ushın $a > 1$ dep alamız.

Usı anıqlama boyınsha hám $a > 1$ bolsa logarifmlik funkciya $x > 0$ yarım kósherde, al kórsetkishli funkciya pútkil sanlar kósherinde ósetuǵınlıǵınan $y = x^\alpha$ *dárejeli funkciya* $x > 0$ yarım kósherde $\alpha > 0$ bolsa ósetuǵını, al $\alpha < 0$ bolsa kemeyetuǵını kelip shıǵadı.

Dárejeli funkciyanıń qásiyetleri:

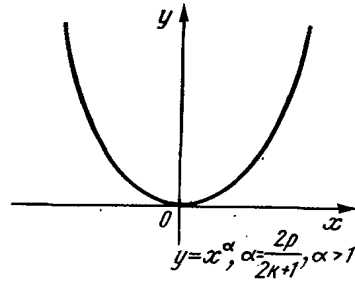
1) Eger $\alpha > 0$ bolsa, $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^\alpha = 0$, al $\alpha < 0$ bolsa, $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^\alpha = +\infty$ *teńlik orınlı.*

2) Dárejeli funkciya $x > 0$ yarım kósherdiń hár bir noqatında úzliksiz.

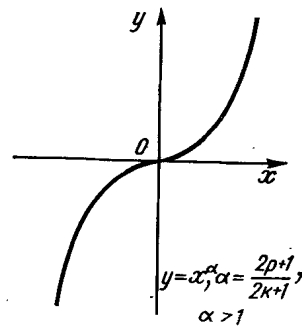
E s k e r t i w. Eger dárejeli funkciyanıń kórsetkishi bólimi taq san bolǵan $\frac{m}{n}$ racional bólshek bolsa, onda dárejeli funkciyanı $x < 0$ mánisler ushın

$$y = x^\alpha = \begin{cases} |x|^\alpha, & n = 2k, \\ -|x|^\alpha, & n = 2k - 1 \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

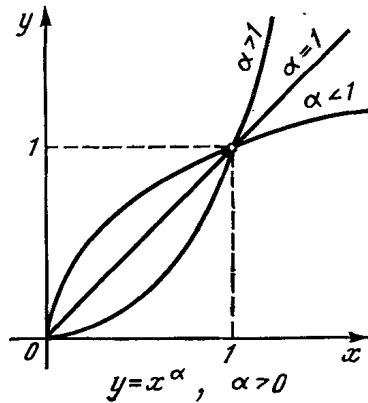
dep alıp, pútkil sanlar kósherinde anıqlaw múmkin.



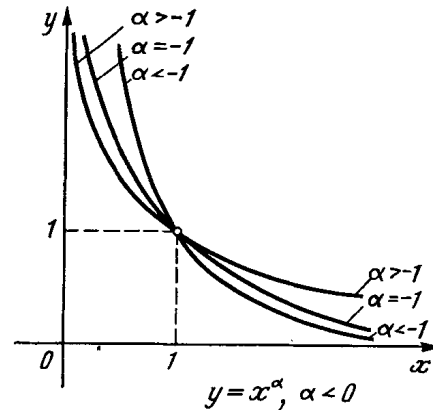
a)



b)



c)



d)

3- súwret

3- súwrette $y = x^\alpha$ dárejeli funkciyanıń α dáreje kórsetkishiniń hár qıylı mánisleri ushın grafikleri súwretlengen.

3.4. Trigonometriyalıq funkciyalar. Biz joqarıda $y = \sin x$ hám $y = \cos x$ funkciyalardı kórgizbeli geometriyalıq pikirlewler járdeminde anıqlaǵanda bazı bir logikalıq kemshiliklerdiń payda bolatuǵını haqqında aytıp óttik. Bul funkciyalardı logikalıq kemshiliklersiz bazı bir funkcionallıq teńlemeler sistemasınıń sheshimi sıpatında anıqlaw múmkin. Tómenдеgi tastıyıqlaw orınlı: x argumenttiń hámme haqıyqıy mánislerinde anıqlanǵan hám tómendegi shártlerdi qanaatlandıırıwshı $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar juplıǵı bar hám bul juplıq jalǵız birew:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot g(x_2) + g(x_1) \cdot f(x_2),$$

$$1) \quad g(x_1 + x_2) = g(x_1) \cdot g(x_2) - f(x_1) \cdot f(x_2),$$

$$f^2(x) + g^2(x) = 1;$$

$$2) \quad f(0)=0, \quad g(0)=1, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1, \quad g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0;$$

$$3) \quad \text{argumenttiń} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{teńsizlikti qanaatlandırwshı mánislerinde}$$

$$0 < f(x) < x < \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{teńsizlikler orınlı boladı.}$$

Kórsetilgen 1)- 3) shártlerden $y = \sin x$ hám $y = \cos x$ funkciyalardıń bizge málim basqa qásiyetlerin de keltirip shıǵarıw múmkin. Bul 1)- 3) shártler jalǵız bir $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar juplıǵın anıqlaytuǵınlıǵınan hám kórgizbeli geometriyalıq pikirlewler járdeminde kiritilgen $f(x) = \sin x$ hám $g(x) = \cos x$ funkciyalar bul úsh qásiyetke iye bolatuǵınlıǵınan kelip shıǵadı.

Mısal sıpatında 1)- 3) shártler járdeminde $f(x) = \sin x$ hám $g(x) = \cos x$ funkciyalardıń úzliksizligin dálillew hám olardıń monotonlıq aralıqların anıqlaw ushın kerek bolatuǵın bir neshe qásiyetlerin keltiremiz.

$$a) \quad 1) \quad \text{shárttiń} \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{teńliginen} \quad \sin^2 x \leq 1, \quad \cos^2 x \leq 1, \quad \text{yaǵnıy}$$

$$|\sin x| \leq 1, \quad |\cos x| \leq 1 \quad (4)$$

teńsizlikler kelip shıǵadı.

$$b) \quad 1) \quad \text{hám} \quad 2) \quad \text{shártlerdiń dáslepki eki teńliklerinen}$$

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x \quad (5)$$

teńliklerdi alamız, yaǵnıy $f(x) = \sin x$ taq funkciyanı, al $g(x) = \cos x$ jup funkciyanı anıqlaydı.

$$c) \quad 1) \quad \text{shártten}$$

$$\begin{aligned} \sin(x_1 - x_2) &= \sin x_1 \cos x_2 - \cos x_1 \sin x_2, \\ \cos(x_1 - x_2) &= \cos x_1 \cos x_2 + \sin x_1 \sin x_2 \end{aligned} \quad (6)$$

teńlikler kelip shıǵadı.

$$d) \quad 1) \quad \text{shártten hám alıńǵan (6) teńliklerdiń birinshisinen}$$

$$\begin{aligned}\sin x_2 + \sin x_1 &= 2 \sin \frac{x_1 + x_2}{2} \cos \frac{x_1 - x_2}{2}, \\ \sin x_2 - \sin x_1 &= 2 \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \sin \frac{x_1 - x_2}{2}\end{aligned}\quad (7)$$

teńlikler kelip shıǵadı.

e) (6) teńliklerdiń birinshisinen hám 2) shárttıń sońǵı eki teńliginen

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad (8)$$

teńlik kelip shıǵadı.

f) 1) shárttıń dáslepki eki teńliginen $x_1 = x_2 = x$ bolǵan jaǵdayda

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad (9)$$

teńlikler kelip shıǵadı. Sonıń menen birge $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ teńlikler de orınlı boladı, yaǵnıy $y = \sin x$ hám $y = \cos x$ funkciyalar 2π periodlı funkciyalar.

g) $\forall x \in R$ ushın

$$|\sin x| \leq |x| \quad (10)$$

teńsizlik orınlı.

$y = \sin x$ hám $y = \cos x$ funkciyalardıń qásiyetleri:

1⁰. $\sin x$ hám $\cos x$ funkciyalar sanlar kósheriniń hár bir noqatında úzliksiz.

D á l i l l e w. Tek $f(x) = \sin x$ funkciyanıń $\forall x$ noqatta úzliksizligin dálillew jetkilikli, sebebi $g(x) = \cos x$ funkciyanıń $\forall x$ noqatta úzliksizligi (8) teńlik hám quramalı funkciyanıń úzliksizligi haqqındaǵı teoremadan kelip shıǵadı.

Dáslep $\sin x$ funkciyanıń $x = 0$ noqatta úzliksizligin dálilleybiz. 2) shárttıń birinshi teńligi boyınsha $\sin 0 = 0$ bolǵanlıqtan funkciyanıń úzliksizliginiń Geyne anıqlaması boyınsha $\forall \{x_n\}$ sheksiz kishi izbe- izlik ushın

sáykes $\{\sin x_n\}$ izbe- izlik te sheksiz kishi izbe- izlik bolatuǵının dálillew jetkilikli.

(10) teńsizlikten hám $|\sin x| \geq 0$ shártten $0 \leq |\sin x| \leq |x|$ kelip shıǵadı. Demek, $0 \leq |\sin x_n| \leq |x_n|$. Bul teńsizlikler izbe-izlikler ushın eki jaqlap shegaralaw principini boyınsha $\{\sin x_n\}$ izbe-izlik, demek, $\{\sin x_n\}$ izbe-izlik sheksiz kishi izbe-izlik ekenin bildiredi. $\sin x$ funkciyanıń $x = 0$ noqatta úzliksizligi dálillendi.

Endi $\sin x$ funksiya sanlar kósheriniń $\forall x$ noqatında úzliksizligin dálilleymiz. Meyli, $\{x_n\}$ — x noqatqa jıynaqlı qálegen izbe- izlik bolsın. Sáykes $\{\sin x_n\}$ izbe- izlik $\sin x$ noqatqa jıynaqlı bolatuǵının dálillew jetkilikli.

(6) teńliklerdiń ekinshisinde $x_2 = x_n$, $x_1 = x$ dep alsaq,

$$\sin x_n - \sin x = 2 \cos \frac{x_n + x}{2} \sin \frac{x_n - x}{2} \quad (11)$$

teńlikke iye bolamız. Bul teńliktiń oń tárepinde sheksiz kishi izbe- izlik elementi turǵanın kórsetiw jetkilikli, al bul $\sin x$ funkciyanıń $x = 0$ noqatta úzliksizligi boyınsha $\left\{ \sin \frac{x_n - x}{2} \right\}$ izbe- izlik sheksiz kishi izbe- izlik ekeninen hám (4) teńsizlik boyınsha $\left\{ 2 \cos \frac{x_n + x}{2} \right\}$ izbe- izlik shegaralangán izbe-izlik ekeninen kelip shıǵadı. ▲

2⁰. $\sin x$ funksiya $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ kesindilerdiń hár birewinde ósedi hám $\left[-\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi\right]$ kesindilerdiń hár birewinde kemeyedi; $\cos x$ funksiya $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$ kesindilerdiń hár birewinde kemeyedi hám $[-\pi + 2k\pi, 2k\pi]$ kesindilerdiń hár birewinde ósedi (bul jerde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

D á l i l l e w. Dálillewdi $\sin x$ funkciyası ushın júrgiziw jetkilikli, sebebi bul funkciyanıń monotonlıq aralıqların tapqannan soń $\cos x$ funkciyanıń monotonlıq aralıqları (8) teńlikten paydalanıp tabılıwı múmkin.

$\sin x$ funkciyası 2π periodlı funkciya bolǵanlıqtan onıń bir periodı shegarasındagı, yaǵnıy, mısalı, $[-\frac{\pi}{2}, 2\pi - \frac{\pi}{2}]$ kesindidegi, monotonlıq aralıqların tabıw jetkilikli.

Dáslep $\sin x$ funkciyası $[0, \frac{\pi}{2}]$ kesindide ósetuǵınlıǵın dálilleymiz.

Meyli, x_1 hám $x_2 - x_2 > x_1$ teńsizlikti qanaatlandıırıwshı usı kesindi noqatları bolsın. Onda $\frac{x_1 + x_2}{2}$ hám $\frac{x_2 - x_1}{2}$ noqatlar $(0, \frac{\pi}{2})$ intervalǵa derek bolıp, (7) teńliklerdiń ekinshisi boyınsha

$$\sin x_2 - \sin x_1 = 2 \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \sin \frac{x_2 - x_1}{2}. \quad (12)$$

bul teńliktiń oń tárepindegi ańlatpa oń anıqlanǵanın dálillew, al bunıń ushın $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$ noqatta $\sin x$ hám $\cos x$ funkciyaları oń mánislerdi qabıl qılatuǵınlıǵına isenim arttırıw, jetkilikli. $\sin x$ funkciyası ushın bul 3) qásiyetinen, al $\cos x$ funkciyası ushın (8) teńlikten kelip shıǵadı.

Solay etip, $\sin x$ funkciyası $[0, \frac{\pi}{2}]$ kesindide ósetuǵınlıǵı dálillendi.

$\sin x$ funkciyasınıń taqlıǵınan bul funkciyanıń $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ kesindide ósetuǵınlıǵı kelip shıǵadı. Nátiyjede $\sin x$ funkciyası $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ kesindide ósetuǵınlıǵı dálillendi, Bul funkciyanıń $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \pi]$ kesindidegi xarakterin anıqlaw qaladı.

Biz e) punktte $\sin \pi = 0$ hám $\cos \pi = -1$ bolatuǵının kórdik, al bul teńliklerden hám 1) shártti birinshi teńliginen $\sin(x + \pi) = -\sin x$ bolatuǵını

kelip shıǵadı. Bul teńlik $\sin x$ funkciyası $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ kesindide ósetuǵınlıǵınan bul funksiya $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \pi]$ kesindide kemeyedi degen juwmaq shıǵarıwǵa mǘmkinshilik beredi.

$\sin x$ hám $\cos x$ funkciyalarınıń monotonlıq aralıqların izertlew usı menen tamamlanadı. ▲

$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{hám} \quad ctgx = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{formulalardan hám úzliksiz funkciyalar}$$

ústinde ámeller haqqındaǵı teorema boyınsha tgx funksiya $\forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ noqatta, al $ctgx$ funksiya $\forall x \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ noqatta úzliksiz.

$$\sin(x + \pi) = -\sin x, \quad \cos(x + \pi) = -\cos x$$

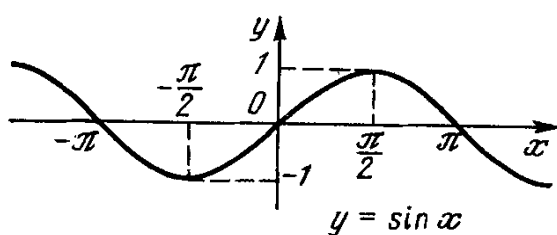
teńliklerden $tg(x + \pi) = \frac{\sin x}{\cos x} = tgx$ hám $ctg(x + \pi) = \frac{\cos x}{\sin x} = ctgx$ teńliklerdi alamız. Bul tgx hám $ctgx$ funkciyalar π periodlı funkciyalar ekenin bildiredi. Demek, bul funkciyalardıń monotonlıq aralıqların izertlewdi tek π uzınlıqtaǵı aralıqlar shegarasında ótkeriw jetkilikli boladı eken.

$$tgx_2 - tgx_1 = \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_1 \cos x_2} \quad (13)$$

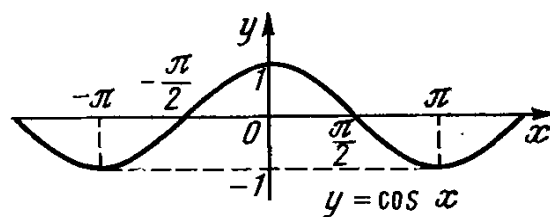
teńlikten hám $\sin x$ funkciyası $(0, \frac{\pi}{2})$ intervalda, al $\cos x$ funkciyası $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ intervalda tek óń mánislerdi qabıl qılatuǵınlıǵınan tgx funksiya $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ intervalda ósetuǵınlıǵı kelip shıǵadı ($x_2 > x_1$ teńsizlikti qanaatlandıırıwshı $\forall x_1, x_2 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ noqatlarda (13) teńliktiń óń tárepi óń anıqlanǵan).

$ctgx$ funksiyanıń $(0, \pi)$ intervalda kemiwshiligi usıǵan uqsas anıqlanadı.

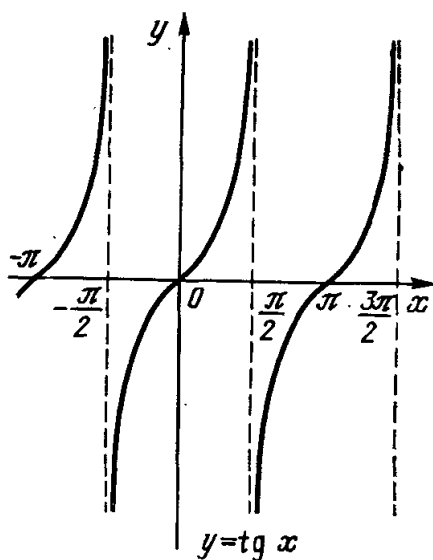
Trigonometriyalıq funkciyalardıń grafikleri 4- súwrette súwretlengen.



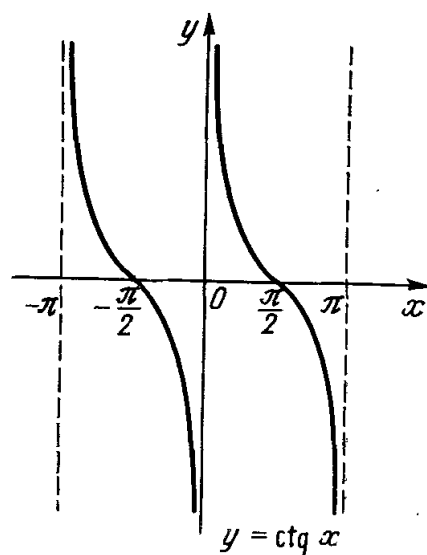
a)



b)



c)



d)

4- súwret

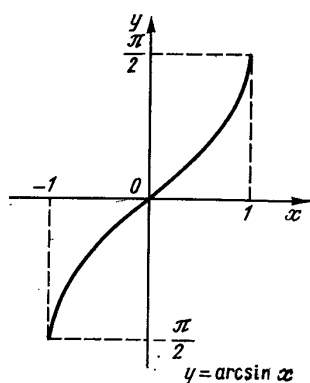
3.5. Keri trigonometriyalıq funkciyalar. Keri trigonometriyalıq funkciyalardı anıqlaw hám olardıń úzliksizlik hám monotonlıq qásiyetleri haqqındaǵı máselelerge toqtalamız.

$y = \arcsin x$ funkciyanı anıqlaw ushın $y = \sin x$ funkciyanı $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ kesindide qaraymız. Bul kesindide $y = \sin x$ funkciya ósiwshi hám úzliksiz. Onıń mánisler kópligi $[-1, 1]$ kesindi. Keri funkciyanıń úzliksizligi haqqındaǵı teorema boyınsha $[-1, 1]$ kesindide -1 noqatta $-\frac{\pi}{2}$, al 1 noqatta $\frac{\pi}{2}$ mánis qabıllaytuǵın

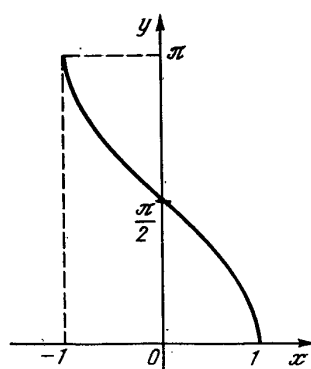
úzlksiz ósiwshi kerı funksiya bar. Bul funksiya $x = \arcsin y$ dep belgilenedi, argument hám funksiyanıń belgileniwleriniń orınların almasırap, $y = \arcsin x$ dep belgilew múmkin.

$[-1, 1]$ kesindide $[0, \pi]$ kesindide úzlksiz hám kemiwshi $x = \cos y$ funksiyaǵa kerı $y = \arccos x$ funksiya da usıǵan uqsas anıqlanadı. Bul funksiya $[-1, 1]$ kesindide úzlksiz hám kemiwshi funksiya bolıp, -1 noqatta π , al 1 noqatta 0 mánis qabıllaydı.

$y = \arctg x$ hám $y = \operatorname{arcctg} x$ funksiylar sáykes túrde, $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ hám $(0, \pi)$ intervalda anıqlanǵan $tg x$ hám $ctg x$ funksiylarǵa kerı funksiylar. Bul funksiylar pútkil sanlar kósherinde anıqlanǵan hám monoton funksiylar. 5-súwrette kerı trigonometriyalıq funksiylardıń grafikleri súwretlengen.

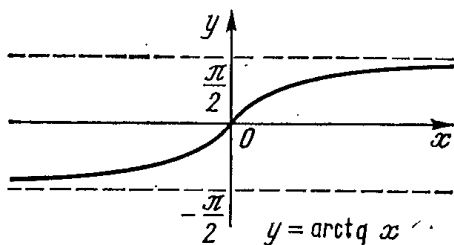


a)

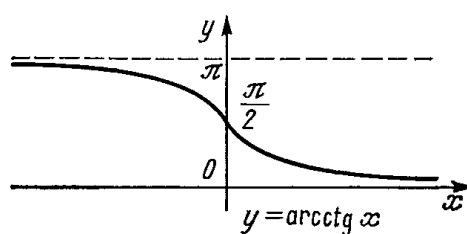


$$y = \arccos x$$

b)



c)



d)

5- súwret

3.6. Giperbolalıq funkciyalar. $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

funkciyalar, sáykes túrde, *giperbolalıq kosinus* hám *giperbolalıq sinus* dep ataladı.

Giperbolalıq tangens hám *giperbolalıq kotangens*, sáykes túrde,

$$thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad cthx = \frac{chx}{shx} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

formulalar menen anıqlanadı.

Giperbolalıq funkciyaların anıqlamasınan giperbolalıq sinus, giperbolalıq kosinus hám giperbolalıq tangens pútkil sanlar kósherinde, al giperbolalıq kotangens sanlar kósheriniń $x=0$ noqatınan basqa hámme noqatlarında anıqlanǵanı kelip shıǵadı.

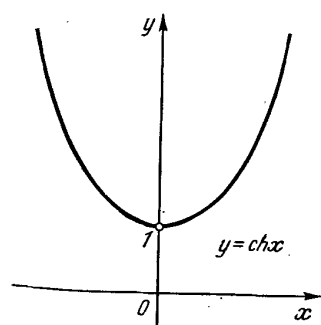
Giperbolalıq funkciyalar óz anıqlanıw oblastınıń hár bir noqatında úzliksiz.

Giperbolalıq funkciyalar trigonometriyalıq funkciyalardıń qásiyetlerine uqsas bir qatar qásiyetlerge iye. Mısalı, giperbolalıq funkciyalar ushın trigonometriyalıq funkciyalardı qosıw haqqındaǵı teoremaǵa uqsas teorema orınlı:

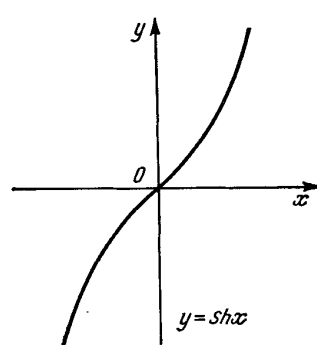
$$\begin{aligned} sh(x+y) &= shx \cdot chy + chx \cdot shy, \\ ch(x+y) &= chx \cdot chy + shx \cdot shy. \end{aligned}$$

Bunnan tısqarı, $sh2x = shx \cdot chx$, $ch^2x - sh^2x = 1$ teńliklerdiń orınlı bolıwın tikkeley tekseriw jolı menen kórsetiw múmkin. «Giperbolalıq funkciyalar» dep atalıwı sebebi- $x = a \cdot cht$, $y = a \cdot sht$ teńlemeler giperbolanı beredi.

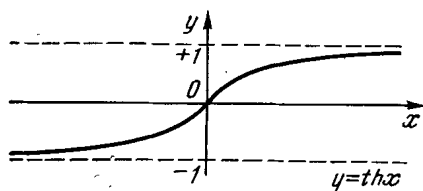
Giperbolalıq funkciyalardıń grafikleri 6- súwrette súwretlengen.



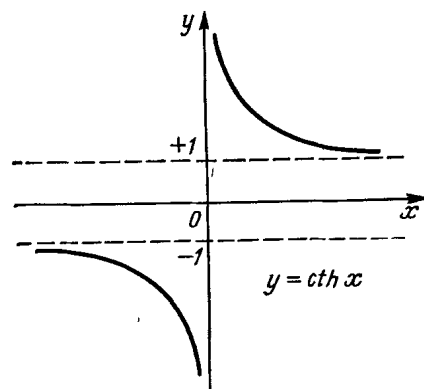
a)



b)



c)



d)

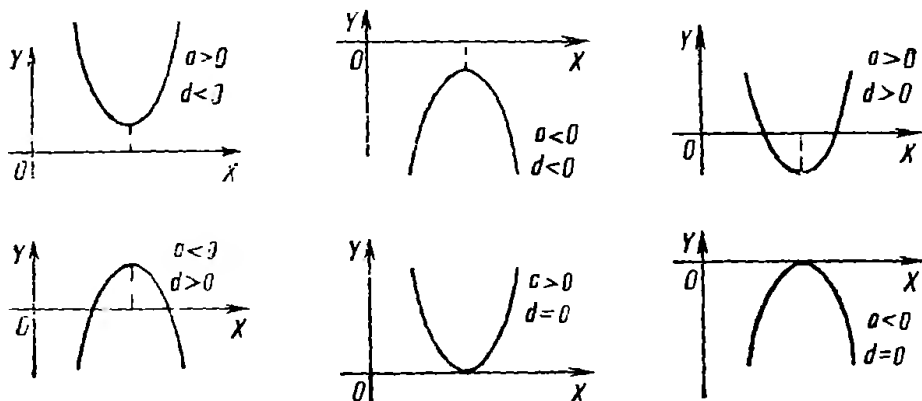
6- súwret

3.7. Pútin hám bólshek racional funkciyalar. Ápiwayı elementar funkciyalar ústinde izbe-iz orınlanǵan shekli sandaǵı tórt arifmetikalıq ámel hám superpoziciyalar (quramalı funkciya) arqalı ańlatılatuǵın funkciya *elementar funkciya* dep atalatuǵını málim. Biz bir áhmiyetli elementar funkciyalar klasın qarap ótemiz.

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

kórinistegi funkciya, bul jerde $n \in \mathbb{N}$ hám $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ – turaqlı sanlar, *pútin racional funkciya* dep ataladı. Bul funkciya n – *dárejeli kópaǵzalı* dep te ataladı. Pútin racional funkciya $\mathbb{R}$ – pútkil haqıyqıy sanlar kópliginde anıqlanǵan. Dara jaǵdayda, $y = ax + b$ – sızıqlı funkciya hám $y = ax^2 + bx + c$ – kvadrat úshaǵzalı pútin racional funkciya boladı. Sızıqlı funkciyanıń grafigi tuwrı sızıq, al kvadrat úshaǵzalınıń grafigi parabola bolatuǵını málim. Kvadrat úshaǵzalınıń grafigi a koefficientke hám

$D = b^2 - 4ac$ diskriminantın belgisine g rezli boladı. 7- s wretde parabolanın tegislikte h r qıylı jaylasıw jaǵdayları qaralǵan.



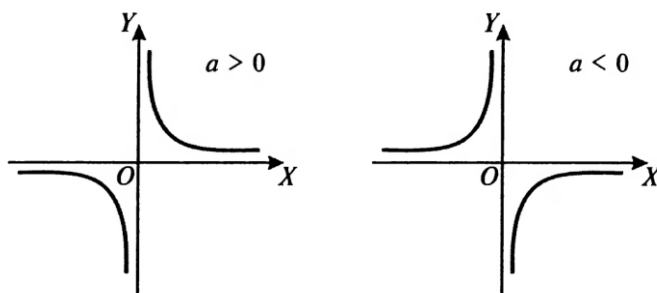
7- súwret

Eki p tın racional funkciyanıń qatnasınan dúzilgen

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m}$$

funkciya *bólshek racional funkciya* dep ataladı. Bul funkciya $R \setminus \{x : b_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m = 0\}$ kóplikte, yaǵnıy sanlar kósheriniń bólshektiń b limin nolge aylandırıwshı noqatlarınan basqa h mme noqatlarınan dúzilgen kóplikte anıqlanǵan. Dara jaǵdayda, $y = \frac{a}{x}$ h m $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ funkciyalar bólshek racional funkciyalar boladı.

$y = \frac{a}{x}$ funkciyanıń grafigi teń qaptallı giperbola boladı (8- súwret). Bul grafikti jasawdı bilgen oqıwshı $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ funkciyanıń da grafigin  nsat jasaydı.



8- súwret

5- BAP

BIR ÓZGERIWSHILI FUNKCIYALAR USHÍN

DIFFERENCIAL ESAP

1-§. Funkciyanıń tuwındısı

1.1. Tuwındınıń anıqlaması. Meyli, $y = f(x)$ funkciya $\{x\} \subset R$ kóplikte anıqlanğan, $x_0 \in \{x\}$ bolsın. $\Delta x \neq 0$ sanın $x_0 + \Delta x \in \{x\}$ bolatuǵınday qılıp saylap alamız. Ádette, Δx sanı *argumenttiń x_0 noqattaǵı ósimi*, al $\Delta f := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ sanı *funkciyanıń x_0 noqattaǵı ósimi* dep ataladı.

$\Delta x \neq 0$ dep esaplap $y = f(x)$ funkciyanıń berilgen x_0 noqattaǵı Δf ósiminiń argumenttiń sáykes Δx ósimin qaraymız:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} / \quad (1)$$

Bul teńlik berilgen x_0 noqattaǵı *ayırmalıq qatnas* dep ataladı. (1) teńlik Δx ósimniń funkciyası bolıp, Δx argumenttiń $\Delta x = 0$ noqattıń bazı bir jetkilikli dárejede kishi δ – dógeresine derek, $\Delta x = 0$ noqattıń ózinen basqa hámme mánislerinde, yaǵnıy $\Delta x = 0$ noqattıń bazı bir jetkilikli dárejede kishi oyılǵan δ – dógeresinde anıqlanğan. Bul bizge (1) qatnastıń $\Delta x \rightarrow 0$ daǵı limitiniń bar bolıw máselesin qaraw huqıqın beredi.

1- a n ı q l a m a. Eger $y = f(x)$ funkciyanıń x_0 noqattaǵı ósiminiń argumenttiń usı noqattaǵı ósimine qatnasınıń $\Delta x \rightarrow 0$ daǵı limiti bar bolsa, onda bul limit $f(x)$ *funkciyanıń x_0 noqatta tuwındısı* dep ataladı, bul tuwındı

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (2)$$

kóriniste jazıladı.

1- e s k e r t i w. Eger $y = f(x)$ funkciya hár bir $x \in \{x\}$ noqatta shekli tuwındıǵa iye bolsa, onda bul funkciyanıń $f'(x)$ tuwındısı $\{x\}$ kóplikte anıqlanğan bazı bir funkciya boladı.

2- e s k e r t i w. Eger $x_0 + \Delta x =: x$ dep belgilense, onda $\Delta x = x - x_0$ hám $\Delta x \rightarrow 0$ shártti $x \rightarrow x_0$ shárt penen almasıw múmkin bolıp, (2) teńlik

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (3)$$

kóriniste jazıladı. Funkciyanıń noqattaǵı tuwındısınıń bul jazılıw formasınan tuwındınnıń ámeliy qollanıwlarında keń paydalanıladı.

Tuwındılardı esaplawdıń eki trivial mısaldıń keltiremiz.

1. $f(x) \equiv C$ (C – turaqlı san) funksiya R haqıyqıy sanlar kópliginde anıqlanǵan, $\forall x \in R$ noqatta shekli tuwındıǵa iye hám $f'(x) = 0$, sebebi $\forall x \in R$ noqatta $\forall \Delta x$ ósim ushın $\Delta f := f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$.

2. $f(x) = x$ funksiya R haqıyqıy sanlar kópliginde anıqlanǵan, $\forall x \in R$ noqatta shekli tuwındıǵa iye hám $f'(x) = 1$, sebebi $\forall x \in R$ noqatta $\forall \Delta x$ ósim ushın

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

1.2. Funkciyanıń bir tárepli tuwındıları. 2- a n ı q 1 a m a. Eger $y = f(x)$ funksiyanıń x_0 noqattaǵı ósiminiń argumenttiń usı noqattaǵı ósimine qatnasınıń $\Delta x \rightarrow 0$ daǵı oń (shep) limiti bar bolsa, onda bul limit $f(x)$ funksiyanıń x_0 noqatta oń (shep) tuwındısı dep ataladı, bul tuwındı

$$\begin{aligned} f'(x_0 + 0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \\ (f'(x_0 - 0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}) \end{aligned} \quad (2)$$

kóriniste jazıladı.

Funkciyanıń berilgen noqattaǵı limiti hám bir tárepli limitleri arasındǵı baylanıstan tómendegi tastıyıqlawlar kelip shıǵadı:

1⁰. Eger $f(x)$ funksiya x_0 noqatta shekli $f'(x_0)$ tuwindıǵa iye bolsa, onda bul funksiya x_0 noqatta hám oń, hám shep tuwindılarǵa iye bolıp, $f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0)$ teńlikler orınlı boladı.

2⁰. Eger $f(x)$ funksiya x_0 noqatta hám oń, hám shep tuwindılarǵa iye bolıp, bul tuwindılar óz-ara teń bolsa, onda bul funksiya x_0 noqatta shekli $f'(x_0)$ tuwindıǵa iye bolıp, $f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0)$ teńlikler orınlı boladı.

E s k e r t i w. Eger funksiya noqatta hám shep, hám oń tuwindılarǵa iye bolıp, bul tuwindılar bir-birine teń bolmasa, onda funksiya bunday noqatta tuwindıǵa iye emes.

Mısalı,

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

funksiya $x = 0$ noqatta hám shep, hám oń tuwindılarǵa iye:

$$\begin{aligned} f'(0 - 0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{(-\Delta x)}{\Delta x} = -1, \\ f'(0 + 0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{(\Delta x)}{\Delta x} = 1, \end{aligned}$$

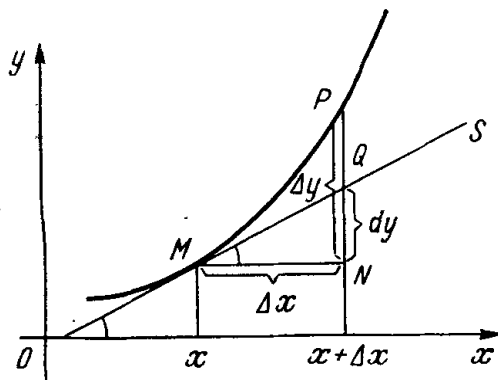
sonlıqtan bul funksiya $x = 0$ noqatta tuwindıǵa iye emes.

1.3. Tuwindınıń geometriyalıq hám mexanikalıq maǵanası.

a) *Tuwindınıń geometriyalıq maǵanası.* (a, b) intervalda anıqlanǵan hám úziksiz $y = f(x)$ funksiyanıń grafigin qaraymız.

$\forall x \in (a, b)$ noqattı hám x argumenttiń $\Delta x \neq 0$ ósimin $x + \Delta x \in (a, b)$ bolatuǵınday kılıp saylap alamız. Meyli, M hám P noqatlar $y = f(x)$ funksiyanıń grafiginiń abscissalari, sáykes túrde, x hám $x + \Delta x$ sanlar bolǵan noqatlar bolsın (1- súwret). Bul noqatlardıń koordinataları $M(x, f(x))$ hám $P(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ kóriniste boladı. M hám P noqatlardan ótiwshi tuwrı

sızıq $y = f(x)$ funkciyanıń grafiginiń *kesiwshisi* dep ataladı. MP kesiwshisiniń Ox kósheri menen jasaǵan múyeshi Δx ósimniń funkciyası boladı, onı $\varphi(\Delta x)$ simvolı menen belgileymiz.



1- súwret

3- a n ı q l a m a. Eger $y = f(x)$ funkciyanıń grafiginiń MP kesiwshisiniń P noqat grafik boylap M noqatqa umılǵandaǵı (yaǵnıy $\Delta x \rightarrow 0$ daǵı) limit jaǵdayı bar bolsa, onda bul limit jaǵday funkciyanıń grafigine $M(x, f(x))$ noqatta júrgizilgen urınba dep ataladı.

Bul anıqlamadan $y = f(x)$ funkciyanıń grafigine $M(x, f(x))$ noqatta júrgizilgen urınba bar bolıwı ushın $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x) = \varphi_0$ limittiń bar bolıwı jetkilikli ekeni kelip shıǵadı, bul jerde φ_0 – urınbanıń Ox kósheri menen jasaǵan múyeshi.

1- t e o r e m a. Eger $y = f(x)$ funkciya x noqatta shekli tuwındıǵa iye bolsa, onda bul funkciyanıń grafigine $M(x, f(x))$ noqatta júrgizilgen urınbası bar bolıp, bul urınbanıń múyeshlik koefficienti funkciyanıń x noqattaǵı $f'(x)$ tuwındısına teń.

D á l i l l e w. M hám P noqatlardan Ox kósherine perpendikulyar tuwrı sızıqlar júrgizemiz (1- súwret). M noqat arqalı Ox kósherine parallel tuwrı sızıq júrgizemiz hám bul tuwrı sızıqtıń P noqattan júrgizilgen perpendikulyar menen kesilisiw noqatın N háribi menen belgileymiz. MNP úshmúyeshliginen

$$\operatorname{tg} \varphi(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Solay etip,

$$\varphi(\Delta x) = \operatorname{arctg} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (3)$$

Bul teńliktiń oń tárepi (demek, shep tárepi de) $\Delta x \rightarrow 0$ da shekli limitke iye. Haqıyqatında da, $f(x)$ funkciya x noqatta shekli $f'(x)$ tuwındıǵa iye bolǵanlıqtan $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ shekli limit bar. Bunnan hám *arctgu* funkciyanıń $\forall u$ mánis ushın úzliksizliginen (3) teńliktiń oń tárepiniń $\operatorname{arctg} f'(x)$ sanǵa teń limiti bar.

Solay etip, biz $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x) = \operatorname{arctg} f'(x)$ shekli limit bar ekenin kórsettik.

Bul kesiwshiniń limit jaǵdayı bar ekenin, yaǵnıy funkciyanıń grafigine $M(x, f(x))$ noqatta júrgizilgen urınbası bar bolıp, bul urınbanıń O_x kósheri menen jasaǵan múyeshi $\varphi_0 = \operatorname{arctg} f'(x)$ bolatuǵının bildiredi.

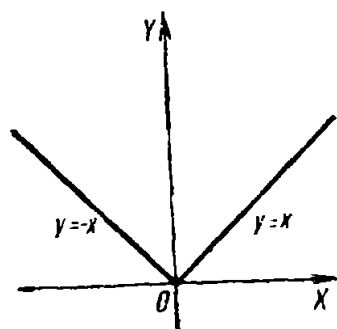
Demek, bul urınbanıń múyeshlik koefficienti funkciyanıń x noqattaǵı $f'(x)$ tuwındısına teń boladı eken. ▲

$y = f(x)$ funkciyanıń grafigine $M(x_0, f(x_0))$ noqatta júrgizilgen urınbanıń teńlemesi $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ kóriniste boladı.

Eger $f(x)$ funkciya $x_0 \in (a, b)$ noqatta bir- birine teń bolmaǵan $f'(x_0 - 0)$ hám $f'(x_0 + 0)$ bir tárepli tuwındılardıǵa iye bolsa, onda bul funkciya grafigine $M(x_0, f(x_0))$ noqatta bir tárepli urınbalar júrgiziw múmkin hám bul urınbalar betlespeydi. Bunday jaǵdayda $f(x)$ funkciyanıń grafigi $M(x_0, f(x_0))$ noqatta «sınadı» dep aytıw múmkin.

Mısalı, $f(x) = |x|$ funkciyanıń $x = 0$ noqattaǵı bir tárepli tuwındıları $f'(0 - 0) = -1$ hám $f'(0 + 0) = 1$ boladı. Bul funkciyanıń $O(0; 0)$ noqattaǵı bir

tárepli urınbaları $y = -x$ hám $y = x$ tuwrı sıızıqlar bolıp, funkciyanın grafigi $O(0; 0)$ noqatta «sınadı» (2- súwret).



2- súwret

Eger $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ qatnastırn $\Delta x \rightarrow 0$ dağı limiti belgisi anıq sheksizlik bolsa, onda $f(x)$ funkciyanın x_0 noqattağı tuwındısı $+\infty$ ($-\infty$) dep ayıladı.

Meyli, $y = f(x)$ funkciyanın x_0 noqattağı tuwındısı $+\infty$, yaǵnıy $f'(x_0) = +\infty$ bolsın. Onda $\varphi(\Delta x) = \arctg \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ekenin esapqa alıp,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \arctg \frac{\Delta y}{\Delta x} = \arctg (f'(x_0)) = \arctg (+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

teńlikke iye bolamız. Bul $y = f(x)$ funkciyanın grafigine $M(x_0, f(x_0))$ noqatta júrgizilgen urınba Ox kóshetine perpendikulyar bolatuǵının kórsetedi.

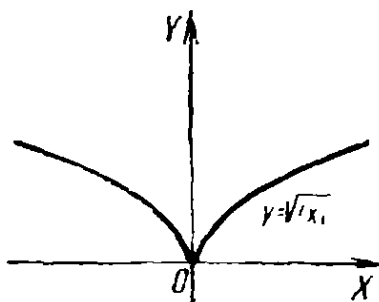
Usıǵan uqsas, $y = f(x)$ funkciyanın x_0 noqattağı tuwındısı $-\infty$, yaǵnıy $f'(x_0) = -\infty$ bolsa da funkciyanın grafigine $M(x_0, f(x_0))$ noqatta júrgizilgen urınba Ox kóshetine perpendikulyar boladı.

Mısalı, $f(x) = \sqrt{|x|}$ funkciyanın $x = 0$ noqattağı oń hám shep tuwındısı

$$f'(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty,$$

$$f'(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = -\infty$$

boladı. Demek, berilgen funkciyanıń grafigine $O(0;0)$ noqatta júrgizilgen urınba Oy kósheri boladı eken (3- súwret).



3- súwret

b) *Tuwındınıń mexanikalıq maǵanası.* Meyli, materiallıq noqat $s = s(t)$ nızam menen háreketlenip atırǵan bolsın, bul jerde t – jumsalǵan waqıt, s – usı waqıt aralıǵında basıp ótilgen jol (qashıqlıq). Usı materiallıq noqattıń t_0 waqıt momentindegi tezligin tabıw máselesin qaraymız. Waqıttıń t_0 mánisi menen birge $t_0 + \Delta t$ ($\Delta t > 0$) mánisin de alıp, $s = s(t)$ funkciyanıń bul mánislerge sáykes $s(t_0)$ hám $s(t_0 + \Delta t)$ mánislerin tabamız. Materiallıq noqat Δt waqıtta $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ aralıqtı basıp ótedi hám onıń $[t_0, t_0 + \Delta t]$ waqıt aralıǵındaǵı ortasha tezligi

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

formula menen tabıladı. Bul bólshektiń $\Delta t \rightarrow 0$ daǵı limiti materiallıq noqattıń t_0 waqıt momentindegi v tezligin ańlatadı:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Tuwındınıń anıqlaması boyınsha

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = s'(t_0).$$

Demek, $s = s(t)$ funkciyanıń t_0 noqattaǵı tuwındısı mexanikalıq kóz qarastan $s = s(t)$ nızam menen háreketlenip atırǵan materiallıq noqattıń t_0 waqıt momentindegi tezligin bildiredi eken.

2-§. Funkciyanıń differenciallanıwshılıǵı

2.1. Funkciyanıń differenciallanıwshılıǵınıń anıqlaması. Meyli, $y = f(x)$ funksiya $\{x\} \subset R$ kóplikte anıqlanǵan, $x \in \{x\}$, al Δx – argumenttiń $x + \Delta x \in \{x\}$ bolatuǵınday qılıp saylap alınǵan ósimi, $\Delta f := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – argumenttiń x noqattaǵı Δx ósimine sáykes funksiyanıń ósimi bolsın.

4- a n ı q l a m a. Eger argumenttiń x noqattaǵı Δx ósimine sáykes $y = f(x)$ funksiyanıń ósimin

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \quad (1)$$

kóriniste jazıw múmkin bolsa, bul jerde A – argumenttiń x noqattaǵı Δx ósimine ǵárezsiz bazı bir turaqlı san, al $\alpha(\Delta x) - \Delta x = 0$ noqatta sheksiz kishi funksiya, onda $y = f(x)$ funksiya x noqatta *differenciallanıwshı funksiya* dep ataladı.

$\alpha(\Delta x)$ funksiya $\Delta x = 0$ noqattıń ózinde, ulıwma aytqanda, anıqlanbaǵan hám oǵan bul noqatta qálegen mánis beriw múmkin. Bunnan bılay, qolaylı bolıwı ushın, $\alpha(0) = 0$ dep alıw múmkin. Bunday kelisimde $\alpha(\Delta x)$ funksiya $\Delta x = 0$ noqatta úzliksiz boladı hám (1) teńlik $\Delta x = 0$ noqatta da orınlı dep esaplaw múmkin.

E s k e r t i w. (1) teńliktiń oń tárepindegi ekinshi $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ qosılıwshını $o(\Delta x)$ ($\Delta x \rightarrow 0$) kóriniste jazıw múmkin. Haqıyqatında da, $\alpha(\Delta x)$ funksiya hám Δx ósimlerdiń hár birewi $\Delta x = 0$ noqatta sheksiz kishi bolǵanlıqtan olardıń $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ kóbeymesi de $\Delta x = 0$ noqatta Δx ósimge qaraǵanda joqarı tártipli sheksiz kishi funksiya bolıwı tábiyiy. Solay etip, (1) teńlikti

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

kóriniste de jazıw múmkin.

2- t e o r e m a. *Funksiya noqatta differenciallanıwshı bolıwı ushın bul noqatta shekli tuwındıǵa iye bolıwı zárúr hám jetkilikli.*

D á l i l l e w. 1) *Zárúrligi*. Meyli, $y = f(x)$ funkciya x noqatta differenciallanıwshı, yaǵnıy onıń argumenttiń x noqattaǵı Δx ósimine sáykes ósimin (1) kóriniste jazıw múmkin bolsın. $\Delta x \neq 0$ dep esaplap hám (1) teńliktiń eki tárepini de Δx ósimge bólip,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x) \quad (2)$$

teńlikke iye bolamız. Bul teńliktiń oń tárepi (demek, shep tárepi de) $\Delta x = 0$ noqatta A sanǵa teń shekli limitke iye. (2) teńliktiń shep tárepindegi bólshektiń $\Delta x = 0$ noqattaǵı limit (eger bul limit bar bolsa) anıqlama boyınsha $f'(x)$ tuwındıǵa teń.

Solay etip, biz eger $f(x)$ funkciya ushın (1) teńlik orınlı bolsa, onda bul funkciya x noqatta shekli tuwındıǵa iye bolıp, $f'(x) = A$ bolatuǵının dálilledik.

2) *Jetkilikliliği*. Meyli, $f(x)$ funkciya x noqatta $f'(x)$ shekli tuwındıǵa iye, yaǵnıy

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \quad (3)$$

shekli limit bar bolsın.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) =: \alpha(\Delta x) \quad (4)$$

dep belgileymiz. (3) limittiń bar bolıwınan (4) teńlik penen anıqlanǵan $\alpha(\Delta x)$ funkciya ushın $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$ teńlik kelip shıǵadı. (4) teńlikti Δx ósimge kóbeytip, $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ teńlikke kelemiz, bul teńlik $f'(x) = A$ bolsa (1) teńlikti beredi.

Solay etip, shekli $f'(x)$ tuwındınıń bar bolıwınan $y = f(x)$ funkciyanıń x noqatta differenciallanıwshılıǵı kelip shıǵıp, (1) differenciallanıwshılıq shártindegi A san $f'(x)$ tuwındıǵa teń bolatuǵını dálillendi. ▲

Dálillengen teorema bunnan bılay funkciyanıń berilgen noqatta differenciallanıwshılıǵı túsiniǵın bul funkciyanıń usı noqatta shekli tuwındıǵa iye bolıwı túsiniǵı menen teńlestiriw múmkinligi kelip shıǵadı. Basqasha aytqanda, «*funkciya berilgen noqatta shekli tuwındıǵa iye*» hám «*funkciya berilgen noqatta differenciallanıwshı*» terminleri ekvivalent terminler.

Funkciyanıń tuwındısın tabıw ámeli, ádette, *differenciallaw* ámeli dep ataladı.

2.2. Differenciallanıwshılıq hám úzliksizlik. 3- t e o r e m a. *Noqatta differenciallanıwshı funkciya usı noqatta úzliksiz.*

D á l i l l e w. Meyli, $y = f(x)$ funkciya x noqatta differenciallanıwshı bolsın. Onda onıń x noqattaǵı Δy ósimi ushın (1) teńlik orınlı, bunnan $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ teńlik kelip shıǵadı. Bul teńlik, óz nábvetinde, funkciyanıń noqatta úzliksizliginiń ayırmalıq forması boyınsha $y = f(x)$ funkciya x noqatta úzliksizligin bildiredi. ▲

E s k e r t i w. Bul teoremaǵa keri tastıyıqlaw, ulıwma aytqanda, orınlı emes, yaǵnıy berilgen noqatta úzliksiz funkciya usı noqatta differenciallanıwshı bolıwı shárt emes. Mısalı, $y = |x|$ funkciya $x = 0$ noqatta úzliksiz, biraq bul noqatta tuwındıǵa iye emes.

Bazı bir intervaldıń hár bir noqatında úzliksiz, biraq bul intervaldıń hesh bir noqatında differenciallanıwshı bolmaǵan funkciyalar da bar. Bunday funkciyalarǵa eń dáslep Veyershrass mısál keltirgen.

2.3. Funkciyanıń differencialı. Meyli, $y = f(x)$ funkciya x noqatta differenciallanıwshı bolsın. Onda onıń x noqattaǵı Δy ósimi ushın (1) teńlik orınlı boladı.

(1) teńlikte funkciyanıń ósimi eki qosılıwshınıń qosındısı sıpatında jazıladı. Bul qosılıwshılardıń birinshisi $A \cdot \Delta x$ kóbeyme bolıp, bul kóbeyme Δx ósimge qarata sızıqlı, al ekinshisi $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ kóbeyme bolıp, bul

kóbeyme $\Delta x = 0$ noqatta Δx ósimge qaraǵanda joqarı tártipli sheksiz kishi funksiya.

Eger 2- teorema boyınsha $f'(x)$ tuwındıǵa teń A san nolden ózgeshe bolsa, onda birinshi qosındı bolǵan $A \cdot \Delta x = f'(x) \cdot \Delta x$ kóbeyme differenciallanıwshı $y = f(x)$ funksiyanıń Δy ósiminiń *bas bólegi* boladı. Funksiyanıń ósiminiń usı bas bólegi Δx argumenttiń sızıqlı bir tekli funksiya boladı hám $y = f(x)$ funksiyanıń x noqattaǵı *differencialı* dep ataladı hám dy simvolı menen belgilenedi.

$A = f'(x) = 0$ bolǵan jaǵdayda funksiyanıń differencialı anıqlama boyınsha nolge teń dep esaplanadı.

Solay etip,

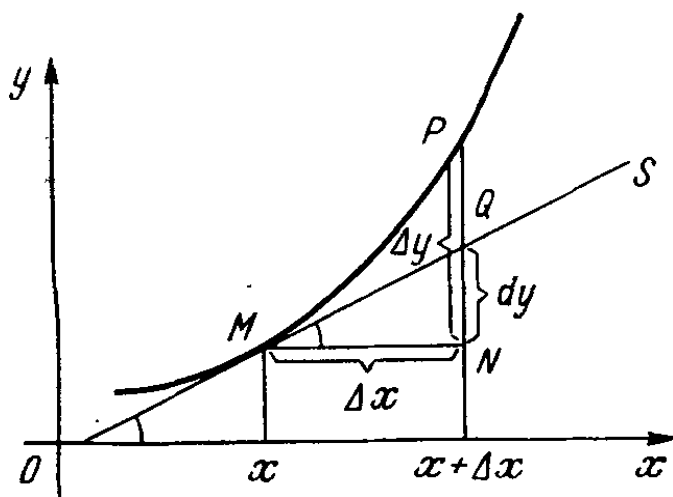
$$dy = f'(x) \cdot \Delta x \quad (5)$$

san $y = f(x)$ funksiyanıń argumenttiń x noqattaǵı Δx ósimine sáykes *differencialı* dep ataladı.

$f'(x) \neq 0$ bolǵan jaǵdayda bul san $y = f(x)$ funksiyanıń Δy ósiminiń Δx ósimge qarata sızıqlı hám bir tekli bas bólegi boladı.

$y = f(x)$ funksiyanıń argumenttiń berilgen x noqattaǵı Δx ósimine sáykes dy differencialı hám Δy ósimi, ulıwma aytqanda, bir- birine teń emes ekenin atap ótemiz.

Bunı $y = f(x)$ funksiyanıń grafigi boyınsha ańsat túsiniw alıw múmkin (4- súwret). Meyli, M hám P – $y = f(x)$ funksiyanıń grafiginiń argumenttiń x hám $x + \Delta x$ mánislerine sáykes noqatları, MS – funksiyanıń grafigine M noqatta júrgizilgen urınba, $MN \parallel O_x$, $NP \parallel O_y$, Q – MS urınbanıń NP tuwrı sızıǵı menen kesiliw noqatı bolsın.



4- súwret

Onda $y = f(x)$ funkciyanıń argumenttiń x noqattaǵı Δx ósimine sáykes Δy ósimi NP kesindi uzınlıǵına teń, al bul funkciyanıń argumenttiń x noqattaǵı sol Δx ósimine sáykes dy differencialı NQ kesindi uzınlıǵına teń. Bul kesindilerdiń uzınlıqları, ulıwma aytqanda, hár qıylı bolatuǵını anıq.

Argumenttiń differencialı túsiniǵın kiritemiz. Bunıń ushın eki jaǵdaydı qaraymız: 1) argument- erikli ózgeriwshi; 2) argument- jańa ózgeriwshiniń differenciallanıwshı funkciyası.

Birinshi, x argument erikli ózgeriwshi bolǵan, jaǵdayda argumenttiń dx differencialı Δx ósimge teń, yaǵnıy $dx = \Delta x$ dep alıwdı kelisip alamız. Bul kelisim logikaǵa qarsı kelmeydi. Mısalı, $y = x$ funkciyanıń $\forall x \in R$ noqattaǵı differencialı (5) formula boyınsha $dy = dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$.

Bul jaǵdayda $y = f(x)$ funkciyanıń x noqattaǵı differencialı

$$dy = f'(x) \cdot dx \quad (6)$$

kóriniste jazıladı. Solay etip, argument erikli ózgeriwshi bolǵan jaǵdayda funkciyanıń *berilgen noqattaǵı differencialı funkciyanıń usı noqattaǵı tuwındısı menen argumenttiń differencialınıń kóbeymesine teń*.

2.4. Quramalı funkciyanı differenciallaw. $x = \varphi(t)$ hám $y = f(x)$ funkciyalardıń superpoziciyası bolǵan $y = f[\varphi(t)]$ quramalı funkciyanıń tuwındısı tabıw qádesin anıqlaymız.

4- t e o r e m a. Meyli, $x = \varphi(t)$ funkciya t noqatta, al $y = f(x)$ funkciya sáykes $x = \varphi(t)$ noqatta differenciallanıwshı bolsın. Onda $y = f[\varphi(t)]$ quramalı funkciya t noqatta differenciallanıwshı hám onıń bul noqattaǵı tuwındısı

$$\{f[\varphi(t)]\}' = f'(x) \cdot \varphi'(t) = f'[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) \quad (7)$$

formula menen esaplanadı.

D á l i l l e w. $x = \varphi(t)$ funkciyanıń argumentine berilgen t noqatta $\Delta t \neq 0$ ósim beremiz. Bul ósimge funkciyanıń $\Delta x = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)$ ósimi sáykes kelip, bul ósim nolge teń bolıwı da mu:mkin.

Óz nábvetinde Δx ósimge $y = f(x)$ funkciyanıń sáykes $x = \varphi(t)$ noqattaǵı $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ ósimi juwap beredi. Bul funkciya $x = \varphi(t)$ noqatta differenciallanıwshı bolǵanlıqtan onıń bul noqattaǵı ósimin

$$\Delta y = f'(x) \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x \quad (8)$$

kóriniste jazıw múmkin, bul jerde $\alpha(\Delta x) - \Delta x \rightarrow 0$ da sheksiz kishi funkciya. Bul teńlik $\Delta x = 0$ bolǵan jaǵdayda da orınlı.

(8) teńlikti $\Delta t \neq 0$ ósimge bólip,

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x) \frac{\Delta x}{\Delta t} + \alpha(\Delta x) \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (9)$$

teńlikke iye bolamız. Bul teńliktiń oń (demek, shep) tárepi $\Delta t \rightarrow 0$ da limitke iye bolıp, bul limit (7) teńliktiń oń tárepindegi ańlatpaǵa teń bolatuǵının kórsetemiz. Nátiyjede biz quramalı funkciyanıń differenciallanıwshılıǵın hám onıń tuwındısı ushın (7) formula orınlı ekenin dálilleymiz.

$x = \varphi(t)$ funkciya t noqatta differenciallanıwshı bolǵanlıqtan $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \varphi'(t)$. $\alpha(\Delta x) - \Delta t \rightarrow 0$ da sheksiz kishi funkciya, sebebi $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$ hám t noqatta differenciallanıwshı $x = \varphi(t)$ funkciya usı noqatta úzliksiz bolǵanlıqtan $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta x = 0$. Solay etip, (9) teńliktiń óń tárepi $\Delta t \rightarrow 0$ da limitke iye bolıp, bul limit (7) teńliktiń óń tárepindegi ańlatpaǵa teń boladı. ▲

1- e s k e r t i w. Teorema hám ondaǵı (7) formula úsh hám onnan da kóp funkciyalardıń superpoziciyası bolǵan funkciyalar ushın da ańsat kóshiriledi. Mısalı, úsh funkciyanıń superpoziciyası bolǵan $y = F[f(\varphi(t))]$ funkciya ushın differenciallaw qaǵıydası

$$y' = \{F[f(\varphi(t))]\}' = F'[f(\varphi(t))] f'(\varphi(t)) \varphi'(t)$$

kóriniste bolıp, bul formula $x = \varphi(t)$ funkciya berilgen t noqatta, $u = f(x)$ funkciya sáykes $x = \varphi(t)$ noqatta, al $y = F(u)$ funkciya sáykes $u = f(x) = f(\varphi(t))$ noqatta differenciallanıwshı funkciyalar bolǵanda orınlı boladı.

2- e s k e r t i w. Teoremada $y = f(x)$, $x = \varphi(t)$ kórinisindegi quramalı funkciyanı qaradıq, yaǵnıy x simvolı menen aralıq ózgeriwshini belgiledik. Bul simvolıkanı, álbette, ózgartiriw múmkin. Kóbinese x simvolı menen sońǵı ózgeriwshini belgilew, yaǵnıy $y = f[\varphi(x)]$ kórinisindegi quramalı funkciyanı qaraw qolaylı boladı. Bul belgilewlerde quramalı funkciyanı differenciallaw qaǵıydası

$$y' = \{f[\varphi(x)]\}' = f'[\varphi(x)] \varphi'(x)$$

kóriniste boladı.

2.5. Keri funkciyanı differenciallaw. 5- t e o r e m a. Meyli, $y = f(x)$ funkciya x noqattıń bazı bir dógeresinde qatal ósiwshi (qatal kemiwshi) hám

úzlksiz funksiya bolsın. Meyli, bunnan tısqarı, bul funksiya x noqatta differenciallanıwshı bolıp, onıń tuwındısı nol'den ózgeshe bolsın. Onda sáykes $y = f(x)$ noqattıń bazı bir dógeresinde berilgen funksiyaǵa keri $x = f^{-1}(y)$ funksiya bar bolıp, bul keri funksiya sáykes $y = f(x)$ noqatta differenciallanıwshı hám bul noqattaǵı tuwındısı

$$\{f^{-1}(y)\}' = \frac{1}{f'(x)} \quad (10)$$

formula menen esaplanadı.

D á l i l l e w. $y = f(x)$ funksiya x noqattıń bazı bir dógeresinde qatal monoton hám úzlksiz funksiya bolǵanlıqtan keri funksiyanıń úzlksizligi haqqındaǵı teorema boyınsha $x = f^{-1}(y)$ keri funksiya sáykes $y = f(x)$ noqattıń bazı bir dógeresinde qatal monoton hám úzlksiz.

Bul keri funksiyanıń argumentine kórsetilgen y noqatta qálegen jetkilikli dárejede kishi nolden ózgeshe Δy ósim beremiz. Bul ósimge keri funksiyanıń sáykes $y = f(x)$ noqattaǵı $\Delta x = f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)$ ósimi juwap berip, keri funksiyanıń qatal monotonlıǵı sebepli bul ósim nolden ózgeshe.

Bul bizge

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} \quad (11)$$

birdeylikti jazıw huqıqın beredi.

Endi, meyli, (11) birdeylikte Δy ósim nolge umtılsın. Onda $x = f^{-1}(y)$ keri funksiyanıń sáykes $y = f(x)$ noqatta úzlksizlik shártiniń ayırmalıq forması boyınsha bul funksiyanıń Δx ósimi de nolge umtıladı. Bunday jaǵdayda (11) teńliktiń oń tárepiniń limiti bar bolıp, bul limit (10) teńliktiń oń tárepine teń bolatuǵının kórsetemiz. Nátiyjede (11) teńliktiń shep tárepi de sol limitke iye bolatuǵını, yaǵnıy keri funksiya sáykes $y = f(x)$ noqatta tuwındıǵa iye hám bul tuwındı ushın (10) teńlik orınlı bolatuǵını dálillenedi.

Solay etip, teoremanı dálillewdi tamamlaw ushın (11) teńliktiń oń tárepindegi bólshek $\Delta x \rightarrow 0$ da $1/f'(x)$ bólshekke teń limitke iye bolatuǵının dálillew kerek.

$$x = f^{-1}(y), \quad \Delta x = f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)$$

bolǵanlıqtan

$$x + \Delta x = f^{-1}(y + \Delta y),$$

$$\text{yaǵnıy } y + \Delta y = f(x + \Delta x) \quad \text{hám} \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

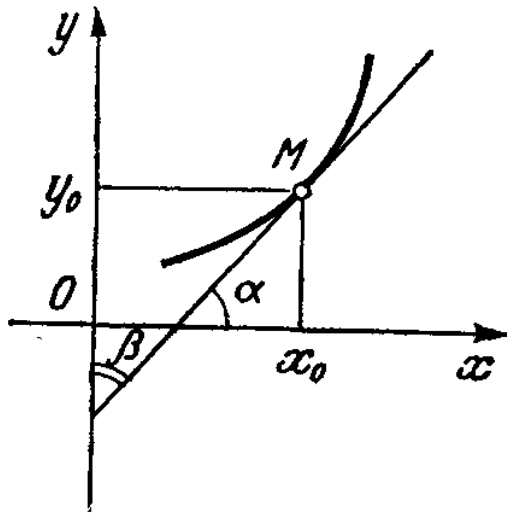
Bunnan (11) teńliktiń oń tárepin

$$\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

kóriniste jazıw múmkinligi kelip shıǵadı. Bul teńlikten $f'(x)$ tuwındınıń anıqlaması hám $f'(x) \neq 0$ shártinen $\Delta x \rightarrow 0$ da (11) teńliktiń oń tárepi shekli limitke iye bolıp, bul limit $1/f'(x)$ bólshekke teń bolatuǵını kelip shıǵadı. ▲

E s k e r t i w. Bul teorema ápiwayı geometriyalıq maǵanaǵa iye. Meyli, M noqat $y = f(x)$ funkciyanıń grafiginde argumenttiń berilgen x mánisine juwap beretuǵın noqat bolsın (5-súwret). Onda $f'(x)$ tuwındı funkciyanıń grafigine M noqatta júrgizilgen urınbanıń Ox kósheri menen jasaǵan α múyeshiniń tangensine teń, al keri funkciyanıń sáykes $y = f(x)$ noqattaǵı $\{f^{-1}(y)\}'$ tuwındısı col urınbanıń Oy kósheri menen jasaǵan β múyeshiniń tangensine teń, α hám β múyeshleriniń qosındısı $\frac{\pi}{2}$ ge teń bolǵanlıqtan (10) formula bizge mektep kursınan málim mına faktti ańlatadı:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \quad \text{bolsa, onda} \quad tg\beta = \frac{1}{tg\alpha} \quad \text{teńlik orınlı.}$$



5- súwret

2.6. Birinshi differential formasınıń invariantlıǵı. Differenciallanıwshı $y = f(x)$ funkciyanıń x argumenti erikli ózgeriwshi bolǵan jaǵdayda bul funkciyanıń differentialı

$$dy = f'(x) dx \quad (12)$$

formula menen esaplanadı. Bul formula universal hám funkciyanıń x argumenti bazı bir erikli t ózgeriwshiniń $x = \varphi(t)$ kórinistegi differenciallanıwshı funkciyası bolǵan jaǵdayda da orınlı ekenin dálilleybiz. Funkciyanıń differentialınıń bul qásiyeti *differencialdın formasınıń invariantlıǵı* dep ataladı.

Solay etip, meyli, $y = f(x)$ differenciallanıwshı funkciyanıń x argumenti bazı bir erikli t ózgeriwshiniń $x = \varphi(t)$ kórinistegi differenciallanıwshı funkciyası bolsın. Bul jaǵdayda $y = f(x)$ funkciyanı t ózgeriwshiniń $y = f[\varphi(t)]$ quramalı funkciyası sıpatında qaraw múmkin. Bul t ózgeriwshi erikli ózgeriwshi bolǵanlıqtan kórsetilgen $y = f[\varphi(t)]$ quramalı funkciya hám $x = \varphi(t)$ funkciya ushın differentciallar (12) kóriniste jazıladı:

$$dy = \{f[\varphi(t)]\}' dt, \quad dx = \varphi'(t) dt. \quad (13)$$

Quramalı funkciyanı differentciallaw qádesi boyınsha

$$\{f[\varphi(t)]\}' = f'(x) \cdot \varphi'(t)dt. \quad (14)$$

(14) teńlikten hám (13) teńliklerdiń birinshisinen $dy = f'(x) \cdot \varphi'(t)dt$, al ekinshisinen paydalanıp, $dy = f'(x)dx$ teńlikti alamız. Birinshi differencialdın formasınıń invariantlıq qásiyeti dálillendi.

E s k e r t i w. Birinshi differencialdın formasınıń invariantlıq qásiyetiniń (12) teńliktiń universallıǵınan kelip shıǵatuǵın basqa ekvivalent aytıluwın da beriw múmkin: *differenciallanıwshı $y = f(x)$ funkciyanıń tuwındısı x argument erikli ózgeriwshi bolǵan jaǵdayda da, bazı bir t erikli ózgeriwshiniń differenciallanıwshı $x = \varphi(t)$ funkciyası bolǵan jaǵdayda da bul funkciyanıń dy differencialınıń argumenttiń dx differencialına qatnasına teń yaǵnıy $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ teńlik penen anıqlanadı.*

2.7. Differenciallanıwshı funkciyalar ústinde arifmetikalıq ámeller.

6- t e o r e m a. *Eger $u(x)$ hám $v(x)$ funkciyaları x noqatta differenciallanıwshı bolsa, onda bul funkciyalardıń qosındısı, ayırması, kóbeymesi hám qatnası usı noqatta differenciallanıwshı hám*

$$\begin{aligned} [u(x) \pm v(x)]' &= u'(x) \pm v'(x), \\ [u(x) \cdot v(x)]' &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x), \\ \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \quad (v(x) \neq 0) \end{aligned}$$

formulalar orınlı.

D á l i l l e w. Qosındı (ayırma), kóbeyme hám bólshek jaǵdayların dara-dara qaraymız.

1⁰. Meyli, $y(x) = u(x) \pm v(x)$. bolsın. $u(x)$, $v(x)$, $y(x)$ funkciyalardıń argumenttiń x noqattaǵı Δx ósimine sáykes ósimlerin, sáykes túrde, Δu , Δv , Δy simvolları menen belgileyemiz. Sonda

$$\begin{aligned} \Delta y &= y(x + \Delta x) - y(x) = [u(x + \Delta x) \pm v(x + \Delta x)] - [u(x) \pm v(x)] = \\ &= [u(x + \Delta x) - u(x)] \pm [v(x + \Delta x) - v(x)] = \Delta u \pm \Delta v. \end{aligned}$$

Solay etip,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}. \quad (15)$$

Endi $\Delta x \rightarrow 0$ da (15) teńlikte limitke ótemiz. $u(x)$ hám $v(x)$ funkciyaları x noqatta differenciallanıwshı bolǵanlıqtan (15) teńliktiń oń tárepiniń $u'(x) \pm v'(x)$ qosındıǵa (ayırmaǵa) teń limiti bar. Demek, bul teńliktiń shep tárepiniń de limiti bar. Tuwındınıń anıqlaması boyınsha bul limit $y'(x)$ tuwındıǵa teń hám biz talap etilip atırǵan $y'(x) = u'(x) \pm v'(x)$ teńlikke kelemiz.

2⁰. Meyli, $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ bolsın. Onda

$$\begin{aligned} \Delta y &= y(x + \Delta x) - y(x) = u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x) = \\ &= [u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x + \Delta x) \cdot v(x)] + [u(x + \Delta x) \cdot v(x) - \\ &- u(x) \cdot v(x)] = u(x + \Delta x) \cdot [v(x + \Delta x) - v(x)] + v(x)[u(x + \Delta x) - \\ &- u(x)] = u(x + \Delta x) \cdot \Delta v + v(x) \cdot \Delta u. \end{aligned}$$

Solay etip,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u(x + \Delta x) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}. \quad (16)$$

Endi $\Delta x \rightarrow 0$ da (16) teńlikte limitke ótemiz. $u(x)$ hám $v(x)$ funkciyaları x noqatta differenciallanıwshı bolǵanlıqtan (16) teńliktiń oń tárepindegi $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ hám $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ bólsheklerdiń, sáykes túrde, $u'(x)$ hám $v'(x)$ tuwındılarǵa teń limitleri bar $u(x)$ funkciya x noqatta differenciallanıwshı bolǵanlıqtan bul noqatta úzliksiz, sonlıqtan $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} u(x + \Delta x) = u(x)$.

Demek, (16) teńliktiń shep tárepiniń de limiti bar. Tuwındınıń anıqlaması boyınsha bul limit $y'(x)$ tuwındıǵa teń hám biz talap etilip atırǵan $y'(x) = u'(x) \cdot v(x) \pm u(x) \cdot v'(x)$ teńlikti alamız.

3⁰. Meyli, $y(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ bolsın. Onda $v(x)$ funkciya x noqatta

differenciallanıwshı hám $v(x) \neq 0$ bolǵanlıqtan úzliksiz funkciyanıń belgisiniń

saqlanıwı haqqındaǵı teorema boyınsha jetkilikli dárejede kishi $\forall \Delta x$ ushin $v(x + \Delta x) \neq 0$ hám

$$\begin{aligned} \Delta y &= y(x + \Delta x) - y(x) = \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x) - v(x + \Delta x) \cdot u(x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} = \\ &= \frac{[u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x)] - [v(x + \Delta x) \cdot u(x) - u(x) \cdot v(x)]}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} = \\ &= \frac{v(x) \cdot [u(x + \Delta x) - u(x)] - u(x) \cdot [v(x + \Delta x) - v(x)]}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} = \frac{v(x) \cdot \Delta u - u(x) \cdot \Delta v}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)}. \end{aligned}$$

Solay etip,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v(x) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)}. \quad (17)$$

Endi $\Delta x \rightarrow 0$ da (15) teńlikte limitke ótemiz. $u(x)$ hám $v(x)$ funkciyaları x noqatta differenciallanıwshı (hám demek, úzliksiz) bolǵanlıqtan

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x), \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'(x), \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x) = v(x).$$

Solay etip, $v(x) \neq 0$ bolǵanlıqtan (17) teńliktiń oń tárepi $\frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$ bólshekke teń limitke iye boladı. Demek, (17) teńliktiń

shep tárepiniń de limiti bar. Tuwındınıń anıqlaması boyınsha bul limit $y'(x)$ tuwındıǵa teń hám biz talap etilip atırǵan $y'(x) = \frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$

teńlikke iye bolamız. ▲

1- s a l d a r. Eger Eger $u(x)$ hám $v(x)$ funkciyaları x noqatta differenciallanıwshı bolsa, onda bul funkciyalardıń qosındısı, ayırması, kóbeymesi hám qatnası usı noqatta differenciallanıwshı hám x noqatta differenciallar ushin

$$\begin{aligned} d(u \pm v) &= du \pm dv, \\ d(u \cdot v) &= v \cdot du + u \cdot dv, \\ d\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{n \cdot du - u \cdot dv}{v^2} \end{aligned}$$

teńlikler orınlı.

2- s a l d a r. Eger $f(x)$ funksiya x noqatta differenciallanıwshı bolsa, onda $\forall c$ –turaqlı san ushın $c \cdot f(x)$ funksiya x noqatta differenciallanıwshı hám $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$ teńlik orınlı.

3- s a l d a r. Eger $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ funksiya x noqatta differenciallanıwshı bolsa, onda $\forall c_1, c_2, \dots, c_n$ turaqlı sanlar ushın $c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x) + \dots + c_n \cdot f_n(x)$ funksiya da x noqatta differenciallanıwshı hám

$(c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x) + \dots + c_n \cdot f_n(x))' = c_1 \cdot f_1'(x) + c_2 \cdot f_2'(x) + \dots + c_n \cdot f_n'(x)$ teńlik orınlı.

3-§. Ápiwayı elementar funksiylardıń tuwındıları

1⁰. Dárejeli funksiyanıń tuwındısı. Meyli, $y = x^\alpha$ bolsın, bul jerde $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Onda

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = \\ &= x^{\alpha-1} \frac{(1 + \frac{\Delta x}{x})^\alpha - 1}{\frac{\Delta x}{x}}. \end{aligned}$$

Bul teńlikte $\Delta x \rightarrow 0$ da limitke ótip, $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ teńlikke iye bolamız.

2⁰. Kórsetkishli funksiyanıń tuwındısı. Meyli, $y = a^x$ bolsın, bul jerde $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$. Onda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Bul teńlikte $\Delta x \rightarrow 0$ da limitke ótip, $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ teńlikti alamız.

Dara jaǵdayda, $(e^x)' = e^x$.

3⁰. Logarifmlik funksiyanıń tuwındısı. Meyli, $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$) bolsın. Onda

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \\ &= \frac{1}{\Delta x} \cdot \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \cdot \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \cdot \log_a\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right].\end{aligned}$$

Bul teńlikte $\Delta x \rightarrow 0$ da limitke ótip, $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$ teńlikke iye bolamız.

$$\text{Dara jaǵdayda, } (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

4⁰. *Trigonometriyalıq funkciyalardıń tuwındıları.* a) Meyli, $y = \sin x$ ($x \in R$) bolsın. Onda

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \\ &= \frac{2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.\end{aligned}$$

Bul teńlikte $\Delta x \rightarrow 0$ da limitke ótip, $(\sin x)' = \cos x$ teńlikke iye bolamız.

b) Meyli, $y = \cos x$ ($x \in R$) bolsın. Onda

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \\ &= -\frac{2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = -\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.\end{aligned}$$

Bul teńlikte $\Delta x \rightarrow 0$ da limitke ótip, $(\cos x)' = -\sin x$ teńlikti alamız.

c) Meyli, $y = \operatorname{tg} x$ ($x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$) bolsın. Differenciallanıwshı

funkciyalardıń qatnasın differenciallaw qádesi boyınsha

$$\begin{aligned}(\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

d) Meyli, $y = \operatorname{ctgx} \quad (x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z})$ bolsın. Differenciallanıwshı funkciyalardıń qatnasın differenciallaw qádesi boyınsha

$$\begin{aligned} (tgx)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

5⁰. *Keri trigonometriyalıq funkciyalardıń tuwındıları.* a) $(-1, 1)$ intervalda anıqlanǵan $y = \arcsin x$ funkciya $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ intervalda anıqlanǵan $x = \sin y$ funkciyaǵa keri funkciya boladı. $x = \sin y$ funkciya ushın $\forall y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ noqattıń dógerinde keri funkciyanı differenciallaw haqqındaǵı teoremanıń shártleri orınlanǵan, sonlıqtan bul teorema boyınsha $y = \arcsin x$ funkciya $\forall x = \sin y$ noqatta differenciallanıwshı hám onıń tuwındısı ushın

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} \quad (18)$$

formula orınlı ($\forall y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ noqatta $\cos y > 0$ bolǵanlıqtan túbir aldında «+» belgi aldıq).

$\sin y = x$ bolǵanlıqtan (18) teńlikten $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ formulanı alamız.

b) $(-1, 1)$ intervalda anıqlanǵan $y = \arcsin x$ funkciya $(0, \pi)$ intervalda anıqlanǵan $x = \cos y$ funkciyaǵa keri funkciya boladı. $x = \cos y$ funkciya ushın $\forall y \in (0, \pi)$ noqattıń dógerinde keri funkciyanı differenciallaw haqqındaǵı teoremanıń shártleri orınlanǵan, sonlıqtan bul teorema boyınsha $y = \arccos x$ funkciya $\forall x = \cos y$ noqatta differenciallanıwshı hám onıń tuwındısı ushın

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} \quad (19)$$

formula orınlı ($\forall y \in (0, \pi)$) noqatta $\sin y > 0$ bolǵanlıqtan túbir aldında «-» belgi aldıq).

$$\cos y = x \quad \text{bolǵanlıqtan} \quad (19) \quad \text{teńlikten} \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

formulaǵa iye bolamız.

c) Pútkil sanlar kósherinde anıqlanǵan $y = \arctg x$ funkciya $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ intervalda anıqlanǵan $x = tgy$ funkciyaǵa keri funkciya boladı.

$x = tgy$ funkciya ushın $\forall y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ noqattın dógeresinde keri funkciyanı differenciallaw haqqındaǵı teoremanın shártleri orınlanǵan, sonlıqtan bul teorema boyınsha $y = \arctg x$ funkciya $\forall x = tgy$ noqatta differenciallanıwshı hám onıń tuwındısı ushın

$$(\arctg x)' = \frac{1}{(tgy)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + tg^2 y}$$

teńlik orınlı. $tgy = x$ bolǵanlıqtan bul teńlikten $(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$ formulanı alamız.

d) Pútkil sanlar kósherinde anıqlanǵan $y = \text{arcctg} x$ funkciya $(0, \pi)$ intervalda anıqlanǵan $x = ctgy$ funkciyaǵa keri funkciya boladı. $x = ctgy$ funkciya ushın $\forall y \in (0, \pi)$ noqattın dógeresinde keri funkciyanı differenciallaw haqqındaǵı teoremanın shártleri orınlanǵan, sonlıqtan bul teorema boyınsha $y = \text{arcctg} x$ funkciya $\forall x = ctgy$ noqatta differenciallanıwshı hám onıń tuwındısı ushın

$$(\text{arcctg} x)' = \frac{1}{(ctgy)'} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1 + ctg^2 y}$$

formula orınlı. $ctgy = x$ bolǵanlıqtan bul teńlikten $(\text{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

formulaǵa iye bolamız.

6⁰. Ápiwayı elementar funkciyalardıń tuwındılarınıń kestesi

Funkciya	Tuwındısı	Funkciya	Tuwındısı
$x^\alpha \quad (x > 0)$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$\log_a x$ ($a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0$)	$1/(x \cdot \ln a)$
		$\ln x$	$1/x$
$a^x \quad (0 < a \neq 1)$	$a^x \ln a$	$\sin x$	$\cos x$
e^x	e^x	$\cos x$	$-\sin x$
tgx	$1/\cos^2 x$	$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$ctgx$	$-1/\sin^2 x$	$\arccos x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
$arctgx$	$1/(1+x^2)$	$arcctgx$	$-1/(1+x^2)$
shx	chx	thx	$1/ch^2 x$
chx	shx	$cth x$	$-1/sh^2 x \quad (x \neq 0)$

7⁰. Ápiwayı elementar funkciyalardıń differenciallarınıń kestesi

Funkciya	Differencial	Funkciya	Differencialı
	1		
$x^\alpha \quad (x > 0)$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1} dx$	$\log_a x$ ($a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0$)	$dx/(x \cdot \ln a)$
		$\ln x$	dx/x
$a^x \quad (0 < a \neq 1)$	$a^x \ln a dx$	$\sin x$	$\cos x dx$
e^x	$e^x dx$	$\cos x$	$-\sin x dx$
tgx	$dx/\cos^2 x$	$\arcsin x$	$dx/\sqrt{1-x^2}$
$ctgx$	$-dx/\sin^2 x$	$\arccos x$	$-dx/\sqrt{1-x^2}$
$arctgx$	$1/(1+x^2)$	$arcctgx$	$-1/(1+x^2)$
shx	$chx dx$	thx	$dx/ch^2 x$
chx	$shx dx$	$cth x$	$-dx/sh^2 x \quad (x \neq 0)$

8⁰. Logarifmlik tuwındı. Dárejeli- kórsetkishli funkciyanıń tuwındısı.

Meyli, $y = f(x)$ funkciya berilgen x noqatta oń anıqlanğan hám

differentiállanıwshı bolsın. Onda x argumenttiń $\varpi = \ln y$, $y = f(x)$ quramalı funkciyası da quramalı funkciyanı differentiállaw qádesi boyınsha x noqatta differentiállanıwshı bolıp, bul funkciyanıń tuwındısı ushın

$$[\ln f(x)]' = (\ln y)' \cdot y' = \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad (20)$$

formula orınlı. (20) shama $y = f(x)$ funkciyanıń berilgen x noqattaǵı *logarifmlik tuwındısı* dep ataladı.

Logarifmlik tuwındı ápiwayı elementar funkciya bolmaǵan geypara funkciyalardıń tuwındısın esaplaw ushın qollanıwı múmkin.

Mısal retinde dárejeli- kórsetkishli funkciya dep atalıwshı funkciyanıń, yaǵnıy $y = u(x)^{v(x)}$ kórinistegi funkciyanıń, bul jerde $u(x)$ hám $v(x)$ – berilgen x noqatta differentiállanıwshı funkciyalar, $u(x)$ funkciya bul noqatta oń anıqlanǵan

Usı shártlerdi $\varpi = \ln y = v(x) \cdot \ln u(x)$ quramalı funkciya berilgen x noqatta differentiállanıwshı boladı. Bul funkciyanıń tuwındısı

$$\begin{aligned} (\ln y)' &= v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot [\ln u(x)]' = \\ &= v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}. \end{aligned} \quad (21)$$

(20) hám (21) teńliklerden

$$\frac{y'}{y} = v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}. \quad (22)$$

Endi $y = u(x)^{v(x)}$ ekenin esapqa alıp, dárejeli- kórsetkishli funkciyanıń tuwındısı ushın

$$(u(x)^{v(x)})' = u(x)^{v(x)} \cdot [v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}]$$

formiulaǵa iye bolamız.

4-§. Joqarı tártipli tuwındı hám differentiallar

4.1. Joqarı tártipli tuwındı túsiniǵı. (a, b) intervalda anıqlanǵan hám differentiallyanılshı $y = f(x)$ funkciyanıń $f'(x)$ tuwındısı da usı intervalda anıqlanǵan funksiya boladı. Usı $f'(x)$ funksiya bazı bir $x \in (a, b)$ noqatta differentiallyanılshı bolıwı múmkin, onda onıń tuwındısı $y = f(x)$ funkciyanıń x noqattaǵı *ekinshi tártipli tuwındısı* dep ataladı hám $f''(x)$ dep belgilenedi. Ekinshi tártipli tuwındı túsiniǵı kiritilgennen keyin izbe-iz úshinshi tártipli, tórtinshi tártipli h. t. b. tuwındı túsiniǵın kiritiw múmkin. Eger usınday qılıp $y = f(x)$ funkciyanıń x noqattaǵı $n-1$ ($n > 1$ – natural san)-tártipli tuwındısı túsiniǵı kiritilgen bolsa, onda bul funkciyanıń usı noqattaǵı n – tártipli tuwındısı $f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$ formula menen esaplanadı.

Solay etip, biz n – tártipli tuwındı túsiniǵın induktiv, birinshi tártipli tuwındıdan kelesi tártipli tuwındıǵa izbe-iz ótip, kiritemiz. n – tártipli tuwındını anıqlawshı formula

$$y^{(n)} = [y^{(n-1)}]' \quad (23)$$

kóriniste jazıladı.

Solay etip, $y = f(x)$ funkciyanıń x noqatta n – tártipli tuwındısı bar bolsa, onda bul funkciyanıń usı noqat dógereginde birinshi, ekinshi h. t. b. $(n-1)$ – tártipli tuwındıları da bar. Biraq, bul tuwındılardıń bar bolıwınan n – tártipli tuwındınıń bar bolıwı, ulıwma aytqanda, kelip shıqqaydı. Mısalı, $y = \frac{x \cdot |x|}{2}$ funkciyanıń tuwındısı $y' = |x|$ bolıp, bul funksiya $x = 0$ noqatta tuwındıǵa iye emes, yaǵnıy berilgen funksiya $x = 0$ noqatta birinshi tártipli tuwındıǵa iye, biraq ekinshi tártipli tuwındıǵa iye emes.

1- a n ı q l a m a. $\{x\} \subset R$ kóplikte shekli n – tártipli tuwındıǵa iye funksiya bul kóplikte *n mártebe differentiallyanılshı funksiya* dep ataladı.

Joqarı tártipli tuwındı túsiniǵı ilim hám texnikanıń júdá kóp tarawlarında keń qollanıladı. Bul jerde biz *ekinshi tártipli tuwındınıń mexanikalıq maǵanasın* túsindiriw menen sheklenemiz. Eger $y = f(x)$ funkciya materiallıq noqattıń O_y kósheri boylap háreketleniw nızamın anıqlasa onda $f'(x)$ birinshi tártipli tuwındı háreketleniwshi materiallıq noqattıń x waqıt momentindegi tezligin beredi. Olay bolsa, $f''(x)$ ekinshi tártipli tuwındı tezliktiń ózgeriw tezligine, yaǵnıy háreketleniwshi materiallıq noqattıń x waqıt momentindegi *tezleniwine* teń boladı.

Joqarı tártipli tuwındılardı esaplaw metodikası tek *birinshi tártipli tuwındılardı esaplaw* uqıplılıǵın talap etedi, sebebi (23) formuladan izbe-iz paydalanıw ushın tek birinshi tártipli tuwındılardı kóp mártebe esaplawdı biliw talap etiledi. Mısal retinde bmr neshe ápiwayı elementar funkciyalardıń n — tártipli tuwındıların esaplaymız.

4.2. Ayırım funkciyalardıń n — tártipli tuwındıları.

1⁰. $y = x^\alpha$ ($\alpha \in R$, $x > 0$) dárejeli funkciyanıń n — tártipli tuwındısı

$$y^{(n)} = (x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1) x^{\alpha-n}$$

formula menen esaplanadı.

Dara jaǵdayda, eger $\alpha = m$ (m — natural san) bolsa, onda

$$(x^m)^{(n)} = \begin{cases} m!, & n = m, \\ 0, & n > m. \end{cases}$$

Solay etip, m — dárejeli kópaǵzalınıń n — tártipli tuwındısı $n > m$ bolǵanda nolge teń.

Eger $y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) bolsa, bul funkciyanıń n — tártipli tuwındısı

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

formula menen esaplanadı.

Bunnan $y = \ln x$ ($x > 0$) logarifmlik funkciyanın n – tártipli tuwındısın esaplaw formulası kelip shıǵadı:

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

2⁰. $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1, x \in R$) kórsetkishli funkciyanın n – tártipli tuwındısı

$$y^{(n)} = (a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a$$

formula menen esaplanadı.

Dara jaǵdayda, $(e^x)^{(n)} = e^x$

3⁰. $y = \sin x$ funkciyanın n – tártipli tuwındısı

$$y^{(n)} = (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$$

formula menen esaplanadı.

4⁰ $y = \cos x$ funkciyanın n – tártipli tuwındısı

$$y^{(n)} = (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$$

formula menen esaplanadı.

5⁰. $y = \arctg x$ funkciyanın n – tártipli tuwındısı

$$y^{(n)} = (\arctg x)^{(n)} = \frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{n/2}} \sin\left[n \left(\arctg x + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

formula menen esaplanadı.

6⁰. $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (a, b, c, d – bazı bir turaqlı sanlar) funkciyanın n – tártipli tuwındısı

$$y^{(n)} = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{(n)} = (ad-bc)(-1)^{n-1} c^{n-1} n! (cx+d)^{-(n+2)}$$

formula menen esaplanadı.

Meyli, $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar $\{x\} \subset R$ kóplikte anıqlanǵan bolıp, $x \in \{x\}$ noqatta shekli $f^{(n)}(x)$ hám $g^{(n)}(x)$ tuwındılarǵa iye bolsın. Onda

$$1) \quad \forall c - \text{turaqlı san ushın} \quad (c \cdot f(x))^{(n)} = c \cdot f^{(n)}(x);$$

$$2) \quad (f(x) \pm g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x);$$

$$3) \quad (f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x) \quad (C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}). \quad \text{Bul teńlik}$$

Leybnic formulası dep ataladı.

4.3. Joqarı tártipli differenciallar. Meyli, $f(x)$ funkciya (a, b) intervalda anıqlanğan bolıp, $x \in (a, b)$ noqatta eki mártebe differenciallanıwshı bolsın. $f(x)$ funkciyanıń x noqattaǵı differencialı $df = f'(x) dx$ formula menen anıqlanatuǵını málim, bul jerde $dx = \Delta x$ - argumenttiń x noqattaǵı ósimi.

2- a n ı q l a m a. $f(x)$ funkciyanıń x noqattaǵı df differencialınıń differencialı funkciyanıń usı noqattaǵı *ekinshi tártipli differencialı* dep ataladı hám $d^2 f := d(df)$ dep belgilenedi.

Differenciallaw qádesinen paydalanıp, funkciyanıń ekinshi tártipli differencialı ushın

$$d^2 f := d(df) = d(f'(x)dx) = f''(x)(dx)^2$$

formulanı alamız.

Usıǵan uqsas, $x \in (a, b)$ noqatta n mártebe differenciallanıwshı $f(x)$ funkciya ushın bul funkciyanıń usı noqattaǵı n — tártipli differencialı $(n-1)$ — differencialdıń differencialı sıpatında anıqlanadı: $d^n f := d(d^{n-1} f)$. Bul differencial $d^n f = f^{(n)}(x) \cdot (dx)^n$ formula menen esaplanadı.

Solay etip, argument erikli ózgeriwshı bolǵan jaǵdayda funkciyanıń berilgen noqattaǵı n — tártipli differencialı funkciyanıń usı noqattaǵı n — tártipli tuwındısınıń argumenttiń differencialınıń n — dárejesine kóbeymesine teń boladı.

Argument bazı bir t ózgeriwshiniń sáykes mártebe differenciallanıwshı funkciyası bolǵan jaǵdayda funkciyanıń ekinshi hám keyingi tártipli differencialları pútkilley basqa kóriniste boladı.

Meyli, $y = f(x)$ funkciya berilgen x noqatta eki mártebe differenciallanıwshı, al onıń argumenti bazı bir t ózgeriwshiniń eki mártebe differenciallanıwshı $x = \varphi(t)$ funkciyası bolsın. Nátiyjede $y = f[\varphi(t)]$ quramalı funkciyanı alamız. Quramalı funkciyanı differenciallaw qádesi boyınsha

$$\begin{aligned} d^2 y &= d^2 f[\varphi(t)] = d(d(f[\varphi(t)])) = d(f'[\varphi(t)] \cdot d\varphi(t)) = \\ &= d(f'[\varphi(t)]) \cdot d\varphi(t) + f'[\varphi(t)] \cdot d(d\varphi(t)) = f''[\varphi(t)] \cdot (d\varphi(t))^2 + \\ &+ f'[\varphi(t)] \cdot d^2 \varphi(t) = f''(x) \cdot (dx)^2 + f'(x) \cdot d^2 x \end{aligned}$$

teńlikke iye bolamız. Bul funkciyanıń ekinshi tártipli differencialınıń forması invariantlıq qásiyetke iye emesligin kórsetedi. Kelesi tártipli differenciallardıń forması da invariantlıq qásiyetke iye emesligi óz-ózinen málim.

5-§. Parametrli kóriniste berilgen funkciyanı differenciallaw

3- a n ı q ı l a m a. Eger x hám y ózgeriwshiler bazı bir úshinshi t ózgeriwshiniń funkciyası sıpatında $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ($t \in \{t\} \subset R$) kóriniste anıqlanǵan bolsa, onda y ózgeriwshi x ózgeriwshiniń funkciyası sıpatında *parametrlik kóriniste berilgen* dep ataladı.

Ádette, t ózgeriwshi *parametr* dep ataladı.

Biz $\varphi(t)$ hám $\psi(t)$ funkciyalar $\{t\}$ kóplikte kerekli tártipli tuwındılarǵa iye dep alamız.

Bunnan tısqarı, $x = \varphi(t)$ funkciya qaralıp atırǵan $t = t_0$ noqattıń dógerinde $t = \varphi^{-1}(x)$ keri funkciyaǵa iye dep esaplaymız, sebebi bul bizge y ózgeriwshini x ózgeriwshiniń funkciyası sıpatında qarawǵa múmkinshilik beredi.

Usınday anıqlanǵan $y = y(x)$ funkciyanıń x argumenti boyınsha tuwındıların esaplaw máselesin qaraymız.

Birinshi differencialdın invariantlıq qásiyeti boyınsha

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad dy = \psi'(x) dt, \quad dx = \varphi'(x) dt.$$

Bul teńliklerden

$$y'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

teńlik kelip shıǵadı.

Ekinshi tuwındını esaplaw ushın, birinshi differencialdın invariantlıq qásiyeti boyınsha

$$y''(x) = \frac{d[y'(x)]}{dx}$$

teńlikti jazamız, bunnan

$$y''(x) = \frac{\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right]' dt}{\varphi'(t) dt} = \frac{\psi''(t) \varphi'(t) - \varphi''(t) \psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}$$

teńlikke iye bolamız.

M 1 s a l. Tómenдеgi parametrlik kóriniste berilgen funkciyanıń birinshi hám ekinshi tártipli tuwındıların tabamız:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad t \in R.$$

Bul funkciyanıń grafigi *cikloida* dep ataladı. Bul iymek sızıq-tuwrı sızıq boylap sırǵanamastan jumalaytuǵın radiusı a sanına teń sheńberdiń bazı bir tayınlanǵan noqatınıń traektoriyası (t parametr bul sheńberdiń radiusınıń burılıw múyeshine teń).

Joqarıdaǵı formulalardan paydalanıp, funkciyanıń birinshi hám ekinshi tártipli tuwındıları ushın

$$y'(x) = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2},$$

$$y''(x) = \frac{(\operatorname{ctg} \frac{t}{2})'}{a(1 - \cos t)} = -\frac{1}{4a \sin^4 \frac{t}{2}} \quad (t \neq 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z})$$

formulalarğa iye bolamız.

6-§. Differenciallanıwshı funkciyalar haqqındaǵı

tiykarǵı teoremlar

Bul paragrafta differencial esaptıń tiykarǵı teoremların keltiremiz. Bul teoremlar keleside, ásirese funkciyalardı teksergende, áhmiyetli rol oynaydı.

6.1. Ferma teoreması. Saylap alınǵan c noqattıń bazı bir dógeresinde anıqlanǵan $y = f(x)$ funkciyanı qaraymız.

4- a n ı q l a m a. c noqattıń $\exists U_\delta(c)$ dógeri tabılıp, $f(c)$ mánis funkciyanıń usı dógerektegi mánisleri ishindegi eń úlkeni (eń kishisi) bolsa, onda $y = f(x)$ funkciya c noqatta lokal maksimumǵa (lokal minimumǵa) iye deymiz.

Funkciyanıń noqattaǵı lokal maksimumı hám lokal minimumı, ulıwma atama menen, funkciyanıń *lokal ekstremumı* dep ataladı.

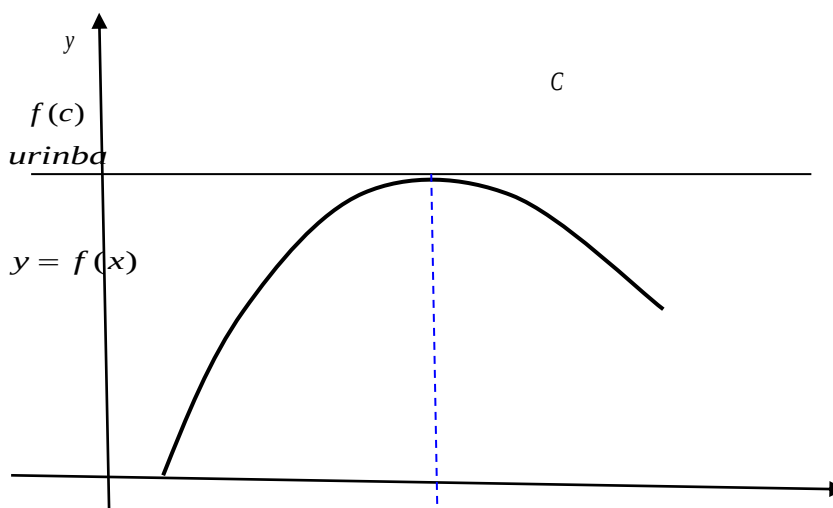
7- t e o r e m a (berilgen noqatta differenciallanıwshı funkciyanıń lokal ekstremumınıń zárúr shárti). Eger $y = f(x)$ funkciya c noqatta differenciallanıwshı bolıp, bul noqatta lokal ekstremumǵa iye bolsa, onda $f'(c) = 0$ teńlik orınlı boladı.

D á l i l l e w. Meyli, $f(x)$ funkciya c noqatta lokal maksimumǵa erissin, yaǵnıy $\forall x \in U_\delta(c)$ noqatta $f(x) \leq f(c)$ teńsizlik orınlı hám funkciya c noqatta shekli $f'(c)$ tuwındıǵa iye bolsın. Onda

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

$U_{\delta}(c)$ dógerektiń $x > c$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı noqatlarında $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$ hám $\lim_{x \rightarrow c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$ teńsizlik, al $x < c$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı noqatlarında $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$ hám $\lim_{x \rightarrow c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$ teńsizlik orınlı. Bunnan $f'(c) = 0$ teńlik kelip shıǵadı. ▲

Bul teorema Ferma teoreması dep te ataladı. Bul teorema júdá ápiwayı geometriyalıq maǵanaǵa iye: eger $y = f(x)$ funkciyanıń grafigine $C(c; f(c))$ noqatta urınba júrgiziw múmkin bolsa, onda bul urınba abscissalar kósherine parallel boladı (6- súwret).



6- súwret

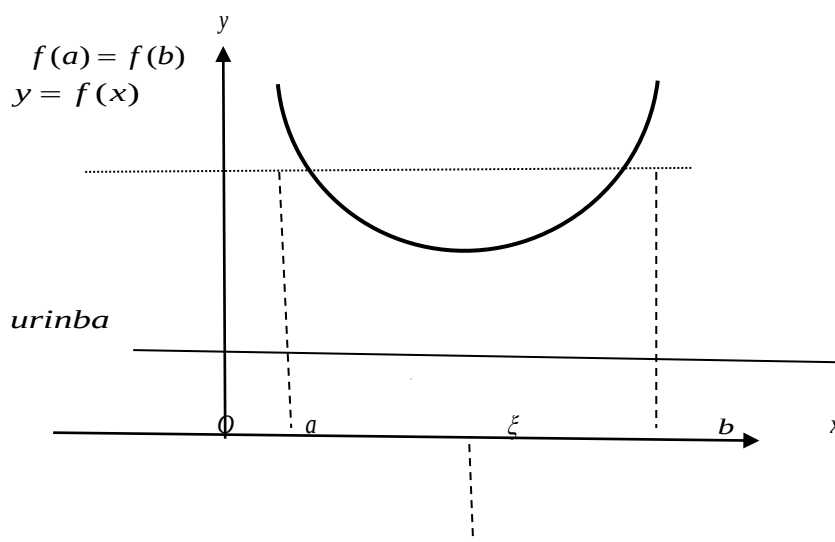
E s k e r t i w. Tuwındıń nol'ge teń bolıwı lokal ekstremumnıń zárúr shárti bolıp, jetkilikli shárti bolmaydı. Mısalı, $y = x^3$ funkciyanıń $x = 0$ noqattaǵı tuwındısı nolge teń, biraq funkciya bul noqatta lokal ekstremumǵa iye emes.

8- t e o r e m a (Roll). Meyli, $y = f(x)$ funkciya $[a, b]$ kesindide úzliksiz hám bul kesindiniń hámme ishki noqatlarında differenciallanıwshı bolsın. Bunnan tısqarı, meyli, $f(a) = f(b)$ bolsın. Onda $[a, b]$ kesindiniń $f'(\xi) = 0$ bolatuǵın ξ ishki noqatı bar.

Basqasha aytqanda, differenciallanıwshı funkciyanıń teń mánisleri arasında bul funkciyanıń tuwındısınıń noli álbette jatadı.

D a l i l l e w. $f(x)$ funkciya $[a, b]$ kesindide úzliksiz bolǵanlıqtan Veyershtrasstıń II teoreması boyınsha bul kesindide óziniń $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ hám $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ mánislerine erisedi. Eki jaǵday bolıwı múmkin 1) $m = M$. Bul jaǵdayda $f(x) \equiv m = M$ - turaqlı funkciya bolıp, bul funkciyanıń tuwındısı $[a, b]$ kesindiniń qálegen ishki noqatında nolge teń; 2) $m < M$. Bul jaǵdayda $f(a) = f(b)$ bolǵanlıqtan funkciya m hám M mánislerdiń keminde birewine bazı bir $\xi \in (a, b)$ ishki noqatta erisedi. Onda bul noqatta funkciya lokal ekstremumǵa iye boladı. 7- teorema boyınsha $f'(\xi) = 0$. ▲

Roll teoreması júdá ápiwayı geometriyalıq maǵanaǵa iye: eger $f(x)$ funkciya Roll teoremasınıń shártlerin qanaatlandırsa, onda funkciyanıń grafiginde urınbası abscissalar kósherine parallel bolatuǵın noqat bar (7- súwret).



7- súwret

1- e s k e r t i w. Rol'l teoremasında $y = f(x)$ funkciya $[a, b]$ kesindide úzliksiz hám bul kesindiniń hámme ishki noqatlarında

differentiallanıwshı bolıwı talap etiledi. Funkciyanıń kesindiniń ishki noqatlarında differentiallanıwshılıǵınan bul noqatlarda úzliksizligi kelip shıǵadı, sonlıqtan $y = f(x)$ funkciya $[a, b]$ kesindide úzliksizligin talap qılıwdıń ornına bul funkciyanıń a noqatta ońnan hám b noqatta shepten úzliksizligin talap qılıw jetkilikli.

2- e s k e r t i w. Roll teoremasınıń hámme shártleri áhmiyetli. Eger teoremanıń shártleriniń ayırımları orınlanbasa teoremanıń tastıyqlawı orınlı bolmawı da múmkin. Mısallar keltiremez. 1) $f(x) = 1 - |x|$ funkciya $[-1, 1]$ kesindide úzliksiz, $f(-1) = f(1) = 0$, biraq bul funkciyanıń tuwındısı $(-1, 1)$ intervaldıń hesh bir noqatında nolge teń emes, sebebi berilgen funkciya $(-1, 1)$ intervaldıń $x = 0$ noqatında tuwındıǵa iye emes. Bul funkciya ushın funkciyanıń kesindiniń hámme ishki noqatında differentiallanıwshı bolıwı shárti buzılǵan.

2) $f(x) = x$ funkciya $[0, 1]$ kesindide úzliksiz, kesindiniń hámme ishki noqatlarında differentiallanıwshı hám $\forall x \in (0, 1)$ noqatta $f'(x) = 1$. Bul funkciya ushın Roll teoremasınıń tastıyqlawı orınlı emes, sebebi $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ bolıp, kesindiniń shetki noqatlarında funkciyanıń mánisleri birdey bolıwı shárti buzılǵan.

6.2. Lagranj teoreması. 9- t e o r e m a (Lagranj). Eger $y = f(x)$ funkciya $[a, b]$ kesindide úzliksiz hám bul kesindiniń hámme ishki noqatlarında differentiallanıwshı bolsa, onda $[a, b]$ kesindiniń

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a) \quad (24)$$

teńlik orınlı bolatuǵın ξ ishki noqatı bar.

(24) formula, ádette, *Lagranj formulası* yaki *shekli ósimler formulası* dep ataladı.

D á l i l l e w. $[a, b]$ kesindide

$$F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

járdemshi funkciyanı qaraymız. Bul funkciya $[a, b]$ kesindide úzliksiz ($f(x)$ hám sızıqlı funkciyanıń ayırması sıpatında), kesindiniń hár bir ishki noqatında

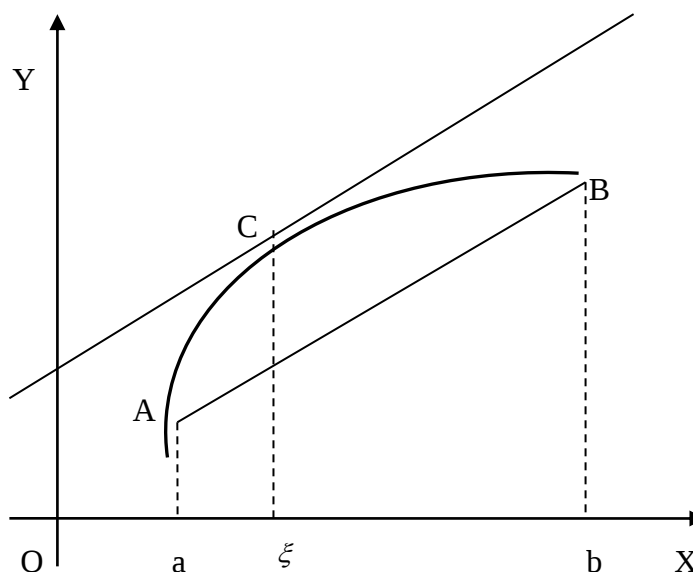
$$F'(x) := f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

tuwındıǵa iye hám $F(a) = F(b) = 0$, yaǵnıy Roll teoremasınıń hámme shártlerin qanaatlandıradı. Onda Roll teoreması boyınsha $\exists \xi \in (a, b)$ noqat tabılıp,

$$F'(\xi) := f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

boladı. Bunnan (24) formula kelip shıǵadı. ▲

E s k e r t i w. Lagranj teoreması Roll teoremasınıń saldarı sıpatında alınadı. Sonıń menen birge Roll teoreması Lagranj teoremasınıń $f(a) = f(b)$ bolǵandaǵı dara jaǵdayı.



8- súwret

Lagranj teoremasınıń geometriyalıq maǵanasın anıqlaw ushın $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ shama $y = f(x)$ funkciyanıń grafiginiń $A(a; f(a))$ hám $B(b; f(b))$ noqatlarınan ótiwshi kesiwshisiniń, al $f'(\xi)$ sanı funkciyanıń grafigine $C(\xi; f(\xi))$ noqatta júrgizilgen urınbanıń múyeshlik koefficienti

ekenin esletip ótemiz. (24) Lagranj formulası $y = f(x)$ funkciyanıń grafiginiń A hám B noqatları arasında $\exists C$ noqat tabılıp, funkciyanıń grafigine bul noqatta júrgizilgen urınba AB kesiwshige parallel bolatuǵının bildiredi (8-súwret).

6.3. Lagranj teoremasınıń geypara saldarları.

1⁰. *Intervalda tuwındısı nol`ge teń funkciyanıń turaqlılıǵı.*

10- t e o r e m a t. Eger $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda differenciallanıwshı bolıp, bul intervaldıń hámme noqatlarında $f'(x) = 0$ bolsa, onda bul funksiya usı intervalda turaqlı funksiya.

D á l i l l e w. Meyli, $x_0 \in (a, b)$ - saylap alınǵan noqat, al $x \in (a, b)$ - qálegen noqat bolsın.

$[x_0, x]$ yaki $[x, x_0]$ kesindi (a, b) intervalǵa derek boladı. Sonlıqtan $f(x)$ funksiya bul kesindide differenciallanıwshı (demek, úzliksiz de). Bul bizge $f(x)$ funksiyaǵa Lagranj teoremasın qollanıw huqıqın beredi. Bul teorema boyınsha kesindiniń $\exists \xi$ ishki noqatı tabılıp,

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) \quad (25)$$

teńlik orınlı boladı. Teoremanıń shárti boyınsha (a, b) intervaldıń hámme noqatlarında $f'(x) = 0$. Demek, $f'(\xi) = 0$. Sonlıqtan (25) teńlikten $f(x) = f(x_0)$ teńlikke iye bolamız. Bul teńlik $f(x)$ funkciyanıń $\forall x \in (a, b)$ noqattaǵı mánisi $f(x_0)$ sanǵa teń bolatuǵının bildiredi. Bunnan $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda turaqlı funksiya ekeni kelip shıǵadı. ▲

Bul teorema ápiwayı geometriyalıq maǵanaǵa iye: eger $y = f(x)$ funkciyanıń grafiginiń bazı bir bóleginiń hár bir noqatındaǵı urınbası abscissalar kósherine parallel bolsa, onda funkciyanıń grafiginiń bul bóleginiń ózi abscissalar kósherine parallel kesindi boladı.

2⁰. *Funkciyanıń intervalda monotonlıq shártleri.*

11- t e o r e m a. (a, b) intervalda differenciallanıwshı $f(x)$ funkciya usı intervalda ósiwshi (kemiwshi) funkciya bolıwı ushın bul funkciyanıń tuwındısı usı intervalda teris emes (oń emes) anıqlanǵan bolıwı zárúr hám jetkilikli.

D á l i l l e w. 1) **J e t e r l i l i g i.** Meyli, (a, b) intervalda $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) bolsın. $f(x)$ funkciyanıń (a, b) intervalda ósiwshi (kemiwshi) funkciya bolatuǵının dálillew kerek. Meyli, $x_1, x_2 \in (a, b)$ noqatlar $x_1 < x_2$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı qálegen noqatlar bolsın. $f(x)$ funkciyanıń $[x_1, x_2] \subset (a, b)$ kesindide differenciallanıwshı, demek, úzliksiz funkciya. Sonlıqtan bul funkciyaǵa $[x_1, x_2]$ kesindide Lagranj teoremasın qollanıw múmkin, nátiyjede

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2) \quad (26)$$

teńlikke iye bolamız, bul jerde $\xi \in (x_1, x_2)$ - bazı bir noqat.

Shárt boyınsha $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$). Sonlıqtan (26) teńliktiń oń tárepi (demek, shep tárepi de) teris emes (oń emes), bul $f(x)$ funkciyanıń (a, b) intervalda ósiwshi (kemiwshi) funkciya ekenin kórsetedi. ▲

2) **Z á r ú r l i g i.** Meyli, $f(x)$ funkciya (a, b) intervalda differenciallanıwshı hám bul intervalda ósiwshi (kemiwshi) funkciya bolsın. (a, b) intervalda $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) bolatuǵının dálillew kerek. $f(x)$ funkciya (a, b) intervalda kemimeytuǵın (óspeytuǵın) funkciya bolǵanlıqtan bul funkciya (a, b) intervaldın hesh bir noqatında kemiwi (ósiwi) múmkin emes. Onda funkciyanıń $f'(x)$ tuwındısı bul intervaldın hesh bir noqatında teris (oń) anıqlanǵan bolıwı múmkin emes. ▲

12- t e o r e m a. (a, b) intervalda differenciallanıwshı $f(x)$ funkciya usı intervalda qatal óciwshi (qatal kemiwshi) bolıwı ushın bul funkciyanıń tuwındısı usı intervalda oń (teris) anıqlanǵan bolıwı jetkilikli.

D á l i l l e w. 11- teoremanıń jetkilikliligin dálillew sxeması boyınsha júrgiziledi. Meyli, $x_1, x_2 \in (a, b)$ noqatlar $x_1 < x_2$ teńsizlikti

qanaatlandırıwshı qálegen noqatlar bolsın. $f(x)$ funkciyanıń $[x_1, x_2] \subset (a, b)$ kesindide differenciallanıwshı, demek, úzliksiz funkciya. Sonlıqtan bul funkciyaǵa $[x_1, x_2]$ kesindide Lagranj teoremasın qollanıw múmkin, nátiyjede

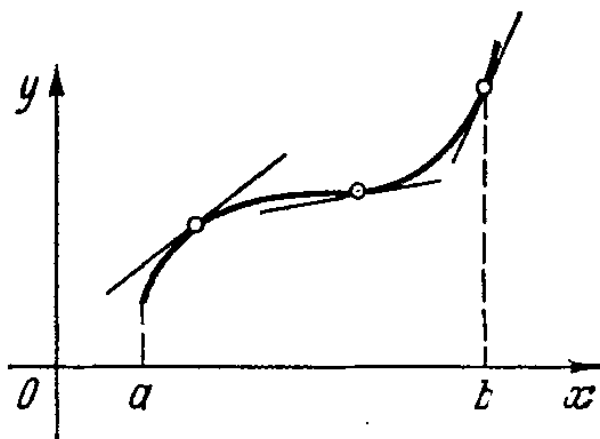
$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2) \quad (27)$$

teńlikke iye bolamız, bul jerde $\xi \in (x_1, x_2)$ - bazı bir noqat.

Shárt boyınsha $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$). Sonlıqtan (27) teńliktiń óń tárepi (demek, shep tárepi de) óń (teris), bul $f(x)$ funkciyanıń (a, b) intervalda qatal ósiwshi (qatal kemiwshi) funkciya ekenin kórsetedi. ▲

1- e s k e r t i w. $f(x)$ tuwındınıń (a, b) intervalda óń (teris) anıqlanǵan bolıw shárti bul funkciyanıń usı intervalda qatal ósiwiniń (qatal kemiwiniń) zárúr shárti bolmaydı. Mısalı, $y = x^3$ funkciya $(-1, 1)$ intervalda qatal ósiwshi, biraq onıń $f'(x) = 3x^2$ tuwındısı bul intervaldıń hámme noqatlarında óń anıqlanǵan emes ($x = 0$ noqatta nolge teń). Ulıwma, eger $f(x)$ funkciyanıń $f'(x)$ tuwındısı intervaldıń bul tuwındı nolge aylanatuǵın shekli sandaǵı noqatlarınan basqa hámme noqatlarında óń (teris) anıqlanǵan bolsa, onda bul funkciya usı intervalda qatal ósedi (qatal kemeyedi).

2- e s k e r t i w. Tuwındınıń belgisi menen funkciyanıń ózgeriw baǵıtı arasındaǵı 12-teorema járdeminde anıqlanǵan baylanıstı geometriyalıq pikirlewler arqalı túsiniw ańsat. Tuwındı $y = f(x)$ funkciyanıń grafiginiń urınbasınıń múyeshlik koefficientine teń bolǵanlıqtan tuwındınıń belgisi urınbanıń joqarı yarım tegislikti jatıwshı nurı Ox kósherdiń óń baǵıtı menen qanday múyesh (súyir yaki doǵal) jasaytuǵının kórsetedi. Eger (a, b) intervalda $f'(x) > 0$ bolsa, onda urınbanıń joqarı yarım tegislikti jatıwshı nurı Ox kósherdiń óń baǵıtı menen súyir múyesh jasaydı, demek, $y = f(x)$ funkciyanıń grafigi bul intervalda joqarı qaray baǵıtlanadı (9 -súwret).



9- súwret

3- e s k e r t i w. Lagranj teoreması járdeminde geypara júdá paydalı teńsizliklerdi dálillew múmkin. Mısal retinde tómendegi eki teńsizlikti dálilleybiz:

$$|\sin x_1 - \sin x_2| \leq |x_1 - x_2|, \quad (28)$$

$$|\arctg x_1 - \arctg x_2| \leq |x_1 - x_2| \quad (29)$$

(bul jerde x_1, x_2 — argumenttiń qálegen mánisleri).

(28) teńsizlikti dálillew ushın Lagranj teoremasın $[x_1, x_2]$ kesindide $f(x) = \sin x$ funkciyaǵa qollanıp,

$$\sin x_1 - \sin x_2 = (x_1 - x_2) \cdot (\sin x)'_{x=\xi} \quad (30)$$

teńlikke iye bolamız. $\forall \xi$ noqatta $|(\sin x)'_{x=\xi}| = |\cos \xi| \leq 1$ bolǵanlıqtan, (30)

teńlikte modullerge ótip, (28) teńsizlikti alamız.

(29) teńsizlikti dálillew ushın Lagranj teoremasın $[x_1, x_2]$ kesindide $f(x) = \arctg x$ funkciyaǵa qollanıp, $\forall \xi$ noqatta $f'(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2} \leq 1$ teńsizliktiń

orınlı bolıwın esapqa alıw jetkilikli.

6.4. Koshi teoreması. 13- t e o r e m a (Koshi). Eger $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalardıń hár birewi $[a, b]$ kesindide úzliksiz, bul kesindiniń hámme ishki noqatlarında differenciallanıwshı hám bunnan tısqarı, $g'(x)$ tuwındı kesindiniń hámme ishki noqatlarında nolden ózgeshe bolsa, onda $[a, b]$ kesindiniń

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (31)$$

teńlik orınlı bolatuǵın ξ ishki noqatı bar.

(31) formula, ádette, *Koshi formulası* yaqı ulıwmalasqan shekli ósimler formulası dep ataladı.

D á l i l l e w. $g(a) \neq g(b)$, sonlıqtan biz

$$F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} [g(x) - g(a)]$$

járdemshi funkciyanı qarawımız múmkin. Bul funkciya teoremanıń shártleri boyınsha $[a, b]$ kesindide úzliksiz, bul kesindiniń hámme ishki noqatlarında differenciallanıwshı hám $F(a) = F(b) = 0$, yaǵnıy Roll teoremasınıń hámme shártlerin qanaatlandıradı. Bul teorema boyınsha $\exists \xi \in (a, b)$ noqat tabılıp, $F'(\xi) = 0$ boladı. $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} g'(x)$ bolǵanlıqtan,

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} g'(\xi) = 0 \text{ teńlik orınlı. Bunnan (31) formulanı}$$

alamız. ▲

1- e s k e r t i w. $g(a) \neq g(b)$, sebebi, eger bunday bolmaǵanda, $g(x)$ funkciya ushın Roll teoremasınıń hámme shártleri orınlanadı hám bul teorema boyınsha $[a, b]$ kesindiniń bazı bir ξ ishki noqatında $g'(\xi) = 0$ boladı, bul teoremanıń shártine qarama- qarsı.

2- e s k e r t i w. Lagranj formulası Koshi formulasınıń $g(x) = x$ bolǵan dara jaǵdayı.

7-§. Lopital qádesi

7.1. $\frac{0}{0}$ kórinistegi anıq emesliklerdi ashıw. Eger

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ bolsa, onda a noqat dógereginde anıqlanǵan $f(x)$ hám

$g(x)$ funkciyalardıń $\frac{f(x)}{g(x)}$ qatnası $x \rightarrow a$ da $\frac{0}{0}$ kórinisindegi anıq emeslik

dep ataladı.

Bul anıq emeslikti ashıw- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limitti esaplaw (álbette, eger bul limit bar bolsa).

14- t e o r e m a (Lopital qádesi). Meyli, $\overset{0}{U}_{\delta}(a) - a$ noqattıń oyılǵan $\delta -$ dógeregi, $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar $\overset{0}{U}_{\delta}(a)$ dógerekte anıqlanǵan hám differenciallanıwshı, $g'(x)$ tuwındı $\overset{0}{U}_{\delta}(a)$ dógerekte nolden ózgeshe hám

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

bolsın. Onda, eger $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ limit (shekli, sheksiz) bar bolsa, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limit te bar hám

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (32)$$

teńlik orınlı.

Bul teorema $\frac{0}{0}$ kórinisindegi anıq emeslikti ashıwdıń eki funkciyanıń qatnasınıń a noqattaǵı limitin esaplawdı bul funkciyalardıń tuwındılarınıń qatnasınıń a noqattaǵı limitin esaplawǵa keltiriwshi qádesin beredi.

D á l i l l e w. Meyli, $\{x_n\}$ – argumenttiń a noqattan ózgeshe mánislerinen dúzilgen, a noqatqa jıynaqlı qálegen izbe-izlik bolsın. $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalardı $x = a$ noqatta nolge teń dep tolıqtırıp anıqlap alamız. Usınday kılıp anıqlaǵanıımızda $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar a noqattıń $U_{\delta}(a)$ dógereginde úzliksiz boladı. Haqıyqattanda da, bul funkciyalardıń $\overset{0}{U}_{\delta}(a)$ dógerekte úzliksizligi bul funkciyalardıń usı dógerekte differenciallanıwshılıǵınan, al $x = a$ noqatta úzliksizligi biziń bul funkciyalardı usı noqatta tolıqtırıp anıqlawımızdan kelip shıǵadı.

$\{x_n\}$ izbe- izliktiń hámme elementleri $\overset{0}{U}_{\delta}(a)$ dógerекke derek bolǵanlıqtan a hám x_n noqatlar menen shegaralanǵan qálegen kesindini

qaraymız. Joqarıda ayılğanlardan $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar bul kesindide úzliksiz, bunnan tısqarı bul kesindiniń ishki hámme noqatlarında bul funkciyalar differenciallanıwshı hám $g'(x)$ tuwındı nolden ózgeshe bolıp, a hám x_n noqatlar menen shegaralanğan kesindide Koshi teoremasınıń hámme shártlerin qanaatlandıradı. Sonlıqtan bul teorema boyınsha a hám x_n noqatlar arasında $\exists \xi_n$ noqat tabılıp,

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$$

teńlik orınlı boladı. Biziń tolıqtırıp anıqlawımız boyınsha $f(a) = g(a) = 0$ ekenin esapqa alıp, bul teńlikti

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \quad (33)$$

kóriniste jazamız.

(33) teńlikte $n \rightarrow \infty$ da limitke ótemiz, sonda $\{x_n\} \rightarrow a$. Kosha teoremasınıń tastıyqlawı boyınsha ξ_n noqat a hám x_n noqatlar arasında jatkanlıqtan $\{\xi_n\} \rightarrow a$. Teoremanıń shárti boyınsha $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ limit bar

bolğanlıqtan (33) teńliktiń oń tárepindegi bólshek Geyne anıqlaması boyınsha $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ shamaǵa teń limitke iye. $\{x_n\}$ - a noqatqa jıynaqlı qálegen izbe-izlik

bolğanlıqtan hám Geyne anıqlaması boyınsha (33) teńliktiń shep tárepindegi bólshektiń $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ shamaǵa teń limitke iye bolıwı $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limittiń de usı shamaǵa teń ekenin bildiredi.

Solay etip, $n \rightarrow \infty$ da (32) teńlikti alamız. ▲

1- e s k e r t i w. Lopital` qaǵıydası hámme waqıtta da durıs bola bermeydi, yaǵnıy *funkciyalardıń qatnasınıń limiti tuwındılardıń qatnası limitke*

iye bolmağan jaǵdaylarda da bar bolıwı múmkin. Mısalı, $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ hám

$g(x) = \sin x$ funkciyalardıń $x = 0$ noqattaǵı limitleri nolge teń hám

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cos \frac{1}{x} = 0$$

Biraq, $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x \cdot \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}}{\cos x}$ bólshek $x = 0$ noqatta limitke iye emes,

sebebi, $y = \sin \frac{1}{x}$ funksiya $x = 0$ noqatta limitke iye emes.

2- e s k e r t i w. Eger 14- teoremanıń shártlerine $f'(x)$ hám $g'(x)$ tuwındıların a noqatta úziksiz bolıw shárti qosılsa, onda $g'(a) \neq 0$ teńsizlik orınlanganda (32) teńlikti $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$ kóriniste jazıw múmkin.

3- e s k e r t i w. Eger $f'(x)$ hám $g'(x)$ tuwındılar $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalargá qoyılǵan talaplargá juwap berse, onda Lopital` qádesinen tákirarlap paydalanıw múmkin, yaǵnıy $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalardıń birinshi tártipli tuwındılarınıń qatnasınıń limitin bul funkciyalardıń ekinshi tártipli tuwındılarınıń qatnasınıń limitine almasırw múmkin. Nátiyjede

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

teńliklerge iye bolamız.

M ı s a l l a r. 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}.$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^2 + 2\cos x - 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3}{2x - 2\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12x^2}{2 - 2\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{24x}{2\sin x} = 12.$

4) $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x^\delta}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\delta \cdot x^{\delta-1}}{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \delta \cdot x^{\delta-1} \cdot (1+x) = 0.$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{4} - \arctg(1 - \frac{1}{x})}{\sin \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} - \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + (1 - \frac{1}{x})^2}}{-\frac{1}{x^2} \cdot \cos \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + (1 - \frac{1}{x})^2}}{\cos \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}.$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}}{e^x} = \dots \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

Bul jerde Lopital` qağıydasınan n mártebe paydalandıq.

7.2. $\frac{\infty}{\infty}$ kórinistegi anıq emesliklerdi ashıw. Eger

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad (+\infty, -\infty), \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty \quad (+\infty, -\infty)$ bolsa, onda a noqat

dógereginde anıqlanğan $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalardıń $\frac{f(x)}{g(x)}$ qatnası $x \rightarrow a$

da $\frac{\infty}{\infty}$ kórinisindegi anıq emeslik dep ataladı.

15- t e o r e m a ((Lopitaldıń ekinshi qádesi). Meyli, $\overset{0}{U}_{\delta}(a) - a$ noqattıń oyılğan $\delta -$ dógeregi, $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar $\overset{0}{U}_{\delta}(a)$ dógerekte anıqlanğan hám differenciallanıwshı, $g'(x)$ tuwındı $\overset{0}{U}_{\delta}(a)$ dógerekte nolden ózgeshe hám

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad (+\infty, -\infty), \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty \quad (+\infty, -\infty)$$

bolsın. Onda, eger $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ limit (shekli, sheksiz) bar bolsa, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limit te

bar hám

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (33)$$

teńlik orınlı.

E s k e r t i w. 14- teorema da, 15- teorema da tómendegi jaǵdaylardıń hár birewinde orınlı:

1) bul teoremalarda $\overset{0}{U}_{\delta}(a)$ dógerek sıpatında $(a, a + \delta)$ intervalı $((a - \delta, a)$ intervalı), al limitler $x \rightarrow a + 0$ da $(x \rightarrow a - 0)$ da alınadı;

2) $\overset{0}{U}_{\delta}(a)$ dógerek sıpatında sanlar kósheriniń $[-\delta, \delta]$ kesindiden sırtqı bólegi, al limitler $x \rightarrow \infty$ da alınadı.

3) $\overset{0}{U}_{\delta}(a)$ dógerek sıpatında $(\delta, +\infty)$ yarım tuwrı sızıǵı $((-\infty, \delta)$ yarım tuwrı sızıǵı), al limitler $x \rightarrow +\infty$ da ($x \rightarrow -\infty$ da) alınadı;

7.3. Basqa kórinistegi anıq emesliklerdi ashıw. $\frac{0}{0}$ hám $\frac{\infty}{\infty}$ kórinistegi anıq emesliklerden tısqarı $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^{∞} , 0^0 , ∞^0 kórinistegi anıq emeslikler de jiýi ushırasadı. Bul anıq emeslikler algebralıq túrlendiriwler járdeminde joqarıda qaralǵan eki anıq emesliklerdiń birewine alıp kelinedi.

M ı s a l l a r.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0+0} \sqrt{x} \cdot \ln x = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln x}{x^{-1/2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}} =$$

$$= -2 \lim_{x \rightarrow 0+0} \sqrt{x} = 0.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0+0} x^x = (0^0) = \lim_{x \rightarrow 0+0} e^{x \ln x} = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 0+0} e^{\frac{\ln x}{1/x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+0} e^{\frac{1/x}{-1/x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} e^{-x} = 1.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}} = (1^{\infty}) = \lim_{x \rightarrow 0} [(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}] e^{\frac{x^2}{e^x-1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{x^2}{e^x-1-x}} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{2x}{e^x-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{2}{e^x}} = e^2.$$

8-§. Teylor formulası

Bul paragrafta biz ilim hám texnikanıń júdá kóp tarawlarında keń qollanılatuǵın matematikalıq analizdiń áhmiyetli formulalarınıń birewin anıqlaymız.

8.1. Teylor teoreması. 16- t e o r e m a (Teylor). Meyli, $f(x)$ funkciya a noqattıń bazı bir dógereginde $n+1$ — tártipli tuwındıǵa iye, x - qaralıp

atırǵan dógerektiń qálegen noqatı, p – qálegen oń san bolsın. Onda a hám x noqatlardı arasında jatıwshı $\exists \xi$ noqat tabılıp,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x) \quad (34)$$

formula orınlı, bul jerde

$$R_{n+1}(x) = \left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi). \quad (35)$$

E s k e r t i w. ξ noqat a hám x noqatlardı arasında jatqanı sebepli $\frac{x-a}{x-\xi}$

bólshek oń anıqlanǵan, sonlıqtan $\forall p > 0$ san ushın $\left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p$ dáreje anıqlanǵan.

(34) formula orayı a noqat bolǵan Teylor formulası dep, al $R_{n+1}(x)$ ańlatpa Teylor formulasınıń qaldıq aǵzası dep ataladı. Teylor formulasınıń qaldıq aǵzası tek (35) kóriniste emes, basqa kóriniste de jazılıwı múmkin. (35) kóriniste jazılǵan qaldıq aǵza ulıwma formadaǵı qaldıq aǵza dep ataladı.

D á l i l l e w. (34) teńliktiń oń tárepindegi n – dárejeli kópaǵzalını $\varphi(x, a)$ dep belgileymiz:

$$\varphi(x, a) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \quad (36)$$

Soń $f(x)$ funkciya menen $\varphi(x, a)$ kópaǵzalınıń ayırmasın $R_{n+1}(x)$ dep belgileymiz:

$$R_{n+1}(x) = f(x) - \varphi(x, a). \quad (37)$$

Eger $R_{n+1}(x)$ ayırma (35) formula menen anıqlanatuǵının kórsecek teorema dálillenedi.

Teoremada kórsetilgen dógerekten $\forall x$ noqat saylap alamız, anıqlıq ushın $x > a$ dep esaplaymız. Ózgeriw oblastı $[a, x]$ kesindi bolǵan ózgeriwshini t dep belgileymiz hám tómendegi kórinistegi járdemshi funkciyanı qaraymız:

$$\psi(t) = f(x) - \varphi(x, t) - (x - t)^p \cdot Q(x), \quad (38)$$

bul jerde

$$Q(x) = \frac{R_{n+1}(x)}{(x - a)^p}. \quad (39)$$

Járdemshi funkciyanı

$$\begin{aligned} \psi(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x - t) + \frac{f''(t)}{2!}(x - t)^2 - \dots - \\ - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n - (x - t)^p Q(x) \end{aligned} \quad (40)$$

kóriniste jazıw múmkin. Bizin maqsetimiz- kiritilgen járdemshi $\psi(x)$ funkciyanın qásiyetlerinen paydalanıp $Q(x)$ funkciyanı ańlatıw.

(40) formuladan hám $f(x)$ funkciyaǵa qoyılǵan shártlerden $\psi(t)$ funkciya $[a, x]$ kesindide úzliksiz hám bul kesindiniń hámme ishki noqatlarında differenciallanıwshı. $\psi(a) = \psi(x) = 0$ bolatuǵının kórsetemiz. (38) formulada $t = a$ dep alıp hám (39) teńlikti itibarǵa alıp, $\psi(a) = f(x, a) - \varphi(x, a) - R_{n+1}(x)$ teńlikke iye bolamız. Bunnan (37) teńlik tiykarında $\psi(a) = 0$ teńlikti alamız. $\psi(x) = 0$ teńlik (40) formuladan kelip shıǵadı.

Solay etip, $\psi(t)$ funkciya ushın $[a, x]$ kesindide Roll teoremasınıń shártleri orınlangan. Bul teorema boyınsha $[a, x]$ kesindiniń $\exists \xi$ ishki noqatı tabılıp,

$$\psi'(\xi) = 0 \quad (41)$$

teńlik orınlı boladı. (40) teńlikti differenciallap, $\psi(t)$ funkciyanın tuwındısı ushın

$$\begin{aligned} \psi'(t) = & -f'(t) + f'(t) - f''(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2!} 2 \cdot (x-t) - \dots \\ & \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!} n \cdot (x-t)^{n-1} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n + p(x-t)^{p-1} Q(x) \end{aligned} \quad (42)$$

teńlikke iye bolamız. (42) teńliktiń keyingi eki aǵzasınan basqaları óz-ara jesip ketetuǵının kóriw qıyın emes. Solay etip,

$$\psi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n + p(x-t)^{p-1} Q(x).$$

Bul teńlikte $t = \xi$ dep alıp hám (41) teńlikten paydalanıp,

$$Q(x) = \frac{(x-\xi)^{n-p+1}}{n! \cdot p} f^{(n+1)}(\xi)$$

teńlikti alamız. Alınǵan bul teńlikten hám (39) teńlikten paydalanıp,

$$R_{n+1}(x) = (x-a)^p \cdot Q(x) = \left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n! \cdot p} f^{(n+1)}(\xi)$$

teńlikke iye bolamız. Solay etip, $R_{n+1}(x)$ ayırma (35) formula menen anıqlanadı eken. ▲

Eń ápiwayı funkciyanıń- n — dárejeli algebralıq kópaǵzalınıń- Teylor formulası boyınsha jikleniwın qaraymız. Meyli,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

kópaǵzalı berilgen bolsın. $P^{(n+1)}(x) \equiv 0$ bolǵanlıqtan qaldıq aǵza $R_{n+1}(x) \equiv 0$ hám (34) Teylor formulası

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \frac{P''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

kóriniste jazıladı, bul jerde a noqat sıpatında sanlar kósheriniń qálegen noqatın alıw múmkin. Solay etip, Teylor formulası qálegen kópaǵzalını $x-a$ (a — qálegen san) ayırmanıń dárejesi boyınsha kópaǵzalı kórinisinde jazıwǵa múmkinshilik beredi.

Meyli, $f(x)$ — Teylor teoremasınıń shártlerin qanaatlandırıwshı bazı bir funksiya bolsın. Bul funksiya ushın Teylor formulasında qatnasatuǵın $\varphi(x, a)$

kópaǵzalı qanday qásiyetlerge iye bolatuǵının anıqlaymız. $\varphi^{(n)}(x, a)$ simvolı menen bul kópaǵzalınıń n — tártipli tuwındısın belgileymiz. (36) formulanı x ózgeriwshi boyınsha differenciallap hám keyin $x = a$ dep alıp,

$$\begin{cases} \varphi(a, a) = f(a), \\ \varphi'(a, a) = f'(a), \\ \varphi''(a, a) = f''(a), \\ \dots \dots \dots \\ \varphi^{(n)}(a, a) = f^{(n)}(a) \end{cases} \quad (43)$$

teńliklerdi alamız. Solay etip, $f(x)$ funkciya ushın Teylor formulasında qatnasatuǵın $\varphi(x, a)$ kópaǵzalı mına qásiyetke iye: *bul kópaǵzalınıń ózi hám onıń n — tártipke deyingi tuwındıları $x = a$ noqatta, sáykes túrde, $f(x)$ funkciyanıń hám bul funkciyanıń n — tártipke deyingi tuwındılarınıń usı noqattaǵı mánislerine teń.*

8.2. Lagranj, Koshi hám Peano formasındaǵı qaldıq aǵzalar.

Joqarıda biz ulıwma formadaǵı kaldıq aǵzalı Teylor formulasın anıqladıq. Endi basqa formadaǵı qaldıq aǵzaları da qaraymız. Olardıń dáslepki ekewi ulıwma formadaǵı qaldıq aǵzanıń dara jaǵdayı sıpatında alınıwı múmkin.

Dáslep qaldıq aǵza ushın (35) formulanı túrlendirip jazamız. ξ noqat a hám x noqatlar arasında jatqanlıqtan $\xi - a = \theta \cdot (x - a)$ teńlik orınlı bolatuǵın $\theta \in (0, 1)$ noqat bar. Bunnan $\xi = a + \theta \cdot (x - a)$ hám $x - \xi = (1 - \theta) \cdot (x - a)$ teńlikler kelip shıǵadı. Solay etip,

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x - a)^{n+1} (1 - \theta)^{n-p+1}}{n! \cdot p} f^{(n+1)}[a + \theta(x - a)]$$

kóriniste jazıw múmkin. Bul formulanıń eki áhmiyetli dara jaǵdayın qaraymız.

1) $p = n + 1$. Bul jaǵdayda *Lagranj formasındaǵı* qaldıq aǵza dep atalatuǵın

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x - a)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x - a)] \quad (0 < \theta < 1)$$

formulanı alamız. Bul qaldıq aǵza Teylor formulasınıń kelesi aǵzasın esletedi, biraq funkciyanıń $(n+1)$ – tuwındısı a noqatta emes, a hám x noqatlar arasında jatatuǵın $\xi = a + \theta \cdot (x - a)$ noqatta esaplanadı.

2) $p = 1$. Bul jaǵdayda *Koshi formasındaǵı* qaldıq aǵza dep atalatuǵın

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)] \quad (0 < \theta < 1)$$

formulanı alamız.

Lagranj hám Koshi formasındaǵı qaldıq aǵzalar p ózgeriwshiniń hár qıylı mánislerine sáykes keletuǵınlıǵı, al θ ózgeriwshi p sanǵa ǵárezli bolǵanlıqtan, θ ózgeriwshiniń Lagranj hám Koshi formasındaǵı qaldıq aǵzalar formulalarındaǵı mánisleri, ulıwma aytqanda, hár qıylı. Ayırım funkciyalardı bahalaw ushın Koshi forması Lagranj formasına qaraǵanda abzalıraq boladı. Eki formadaǵı qaldıq aǵzalar, ádette, x ózgeriwshiniń a noqattan ózgeshe birdey mánislerinde $f(x)$ funkciyanıń mánislerin juwıq esaplaw talap etiletuǵın jaǵdaylarda qollanıladı.

$f(x)$ funkciyanı $\varphi(x, a)$ kópaǵzalı menen juwıq almastırıw hám bunda jol qoyılǵan qátelikti bahalaw tábiyiy másele. Usınıń menen bir qatarda kórsetilgen qáteliktiń sanlı shaması emes, tek onıń $x - a$ sheksiz kishi shamaǵa qarata tártibi qızıqtıratuǵın máseleler de ushırasadı. Bul maqset ushın basqa formadaǵı (Peano formasındaǵı) qaldıq aǵza júdá qolaylı boladı.

Meyli, $f(x)$ funkciya a noqattıń bazı bir dógereginde $(n-1)$ mártebe differenciallanıwshı, a noqattıń ózinde shekli n – tártipli tuwındıǵa iye bolsın. (36) formula penen anıqlanǵan $\varphi(x, a)$ kópaǵzalını qaraymız. (33) Teylor formulasınıń $R_{n+1}(x) = f(x) - \varphi(x, a)$ qaldıq aǵzası ushın

$$R_{n+1}(x) = o[(x-a)^n] \quad (44)$$

formula orınlı bolatuǵının dálilleymiz. Ádette, bul formula *Peano formasındaǵı* qaldıq aǵza dep ataladı.

$\varphi(x, a)$ kópaǵzalınıń (43) teńlikler menen ańlatılatuǵın qásiyetlerinen paydalanıp,

$$R_{n+1}(a) = 0, \quad R'_{n+1}(a) = 0, \quad \dots, \quad R_{n+1}^{(n)}(a) = 0 \quad (45)$$

teńliklerdi alamız. Endi (45) teńliklerden (44) formula kelip shıǵatuǵının dálillewimiz kerek. Bunı matematikalıq indukciya usılı menen orınlaymız.

Dáslep, $n = 1$ bolsa (45) teńliklerden (44) formula kelip shıǵatuǵının kórsetemiz. Bul jaǵdayda (45) teńlikler $R_2(a) = 0, \quad R'_2(a) = 0$ eki teńlik kórinisinde bolıp, bul teńliklerden

$$R'_2(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{R_2(x) - R_2(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{R_2(x)}{x - a} = 0$$

teńlik kelip shıǵadı, al bul teńlik $R_2(x) = o(x - a) \quad (x \rightarrow a)$ bolatuǵının bildiredi, yaǵnıy $n = 1$ bolǵan jaǵdayda (45) teńliklerden (44) formula kelip shıǵadı.

Endi, meyli, bazı bir $n \geq 1$ nomer ushın (45) teńliklerden (44) formula kelip shıqsın. Kelesi $n + 1$ nomer ushın (45) teńliklerden (44) formula kelip shıǵatuǵının kórsetemiz. Bul nomer ushın

$$R_{n+2}(a) = 0, \quad R'_{n+2}(a) = 0, \quad \dots, \quad R_{n+2}^{(n+1)}(a) = 0 \quad (45^*)$$

teńlikler orınlı. Uyǵarıwımız boyınsha n nomer ushın (45) teńliklerden (44) formula kelip shıǵadı, sonlıqtan (45*) teńliklerdiń birinshisin taslap ketip, $R'_{n+2}(a) = 0, \quad \dots, \quad R_{n+2}^{(n+1)}(a) = 0$ teńliklerden

$$R'_{n+1}(x) = o[(x - a)^n] \quad (46)$$

teńlikke iye bolamız.

Ekinshi tárepten, $\forall n \geq 1$ nomer ushın $R_{n+2}(x)$ funkciya $[a, x]$ kesindide Lagranj teoremasınıń shártlerin qanaatlandıradı, sonlıqtan (45*) teńliklerdiń birinshisin esapqa alıp a hám x noqatlar arasında jatatuǵın $\exists \xi$ noqat tabılıp,

$$R_{n+2}(x) = R_{n+2}(x) - R_{n+2}(a) = R'_{n+2}(\xi)(x-a) \quad (47)$$

teńlik orınly boladı dep tastıyıqlawımız múmkin. (46) formuladan hám $o[(\xi - a)^n] = o[(x - a)^n]$ teńlikten (ξ noqat a hám x noqatlar arasında jatqanlıqtan) paydalanıp, (47) formuladan $R_{n+2}(x) = o[(x - a)^{n+1}]$ teńlikke iye bolamız, al bul teńlik $n + 1$ nomer ushın alınǵan (44) formula.

Solay etip, indukciya orınladı hám Peano formasındaǵı qaldıq aǵza ushın (44) formula dálillendi.

Peano formasındaǵı qaldıq aǵzalı Teylor formulası

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o[(x-a)^n]$$

kóriniste jazıladı.

8.3. Makloren formulası. Orayı $a = 0$ noqatta bolǵan (34) Teylor formulası *Makloren formulası* dep ataladı. Qálegen $f(x)$ funkciya ushın Lagranj, Koshi hám Peano formasındaǵı qaldıq aǵzalı Makloren formulasın jazamız:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + R_{n+1}(x), \quad (47)$$

bul jerde qaldıq aǵza tómendegi kóriniste boladı:

1) Lagranj formasındaǵı

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta \cdot x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1);$$

2) Koshi formasındaǵı

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta \cdot x)}{n!} (1-\theta)^n x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1);$$

3) Peano formasındaǵı

$$R_{n+1}(x) = o(x)^n \quad (x \rightarrow 0).$$

Solay etip, biz joqarıda $f(x)$ funkciyası ushın Teylor formulasınıń hár túrli formadaǵı qaldıq aǵzaların qaradıq. Sheshiletuǵın máseleniń talabına qarap, Teylor formulasınıń málim bir formadaǵı qaldıq aǵzası paydalanıladı. Mısalı, eger argumenttiń berilgen x_0 noqat dógeregindegi mánislerinde $f(x)$ funkciyanıń mánislerin juwıq esaplaw kerek bolsa, Lagranj yaqı Koshi formasındaǵı qaldıq aǵzalı Teylor formulasınan paydalanǵan maqul, al eger $x \rightarrow x_0$ da qaldıq aǵzanıń nolge umtılıw tártibin anıqlaw talap etilse, onda Peano formasındaǵı qaldıq aǵzalı Teylor formulasınan paydalanıw maqsetke muwapıq boladı.

Ádette, Lagranj yaqı Koshi formasındaǵı qaldıq aǵzalı Teylor formulası ámeliy máselelerdi sheshkende, al Peano formasındaǵı qaldıq aǵzalı Teylor formulası teoriyalıq izertlewlerde qollanıladı.

8.4. Geypara elementar funkciyalardı Makloren formulası boyınsha jiklew. 1⁰. $f(x) = e^x$ funkciyanı qaraymız. $\forall n$ nomer ushın $f^{(n)}(x) = e^x$ hám $f^{(n)}(0) = 1$ bolǵanlıqtan (47) Makloren formulası

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x)$$

kóriniste jazıladı, bul jerde Lagranj formasındaǵı qaldıq aǵza

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

kóriniske iye. $\forall [-r, r]$ ($r > 0$) kesindide $e^{\theta x} < e^r$ bolǵanlıqtan qaldıq aǵza ushın tómendegi bahanı alamız:

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{e^r}{(n+1)!} r^{n+1}.$$

2⁰. $f(x) = \sin x$ funkciyanı qaraymız. $\forall n$ nomer ushın

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \text{ hám}$$

$$f^{(n)}(0) = \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2m, \\ (-1)^{(n-1)/2}, & n = 2m-1 \end{cases}$$

bolǵanlıqtan (47) Makloren formulası

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{(n-1)/2} \frac{x^n}{n!} + R_{n+2}(x)$$

kóriniste (n — taq san) jazıladı, bul jerde Lagranj formasındaǵı qaldıq aǵza

$$R_{n+2}(x) = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} \sin\left(\theta \cdot x + n \frac{\pi}{2} + \pi\right) \quad (0 < \theta < 1)$$

kóriniske iye. $\forall [-r, r] \quad (r > 0)$ kesindide qaldıq aǵza ushın tómendegi baha orınlı:

$$|R_{n+2}(x)| < \frac{r^{n+2}}{(n+2)!}.$$

3⁰. $f(x) = \cos x$ funkciyanı qaraymız. $\forall n$ nomer ushın

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n \frac{\pi}{2}\right) \text{ hám}$$

$$f^{(n)}(0) = \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2m-1, \\ (-1)^{n/2}, & n = 2m \end{cases}$$

bolǵanlıqtan (47) Makloren formulası

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^{n/2} \frac{x^n}{n!} + R_{n+2}(x)$$

kóriniste (n — jup san) jazıladı, bul jerde Lagranj formasındaǵı qaldıq aǵza

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} \cos\left(\theta \cdot x + n \frac{\pi}{2} + \pi\right) \quad (0 < \theta < 1)$$

kóriniske iye. $\forall [-r, r] \quad (r > 0)$ kesindide qaldıq aǵza ushın tómendegi baha orınlı:

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{r^{n+2}}{(n+2)!}.$$

4⁰. $f(x) = \ln(1+x)$ funkciyanı qaraymız. $\forall n$ nomer ushın

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \text{ hám } f(0) = 0, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)! \text{ bolǵanlıqtan}$$

(47) Makloren formulası

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x)$$

kóriniste jazıladı, bul jerde qaldıq aǵzanı Lagranj hám Koshi formasında jazamız:

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta \cdot x)^{n+1}} \quad (0 < \theta < 1) \text{ (Lagranj formasındaǵı)},$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(1+\theta \cdot x)^{n+1}} (1-\theta)^n \quad (0 < \theta < 1) \text{ (Koshi formasındaǵı)}.$$

Argumenttiń $[0, 1]$ kesindige derek mánislerinde $\ln(1+x)$ funkciyanı bahalaw ushın Lagranj formasındaǵı qaldıq aǵzaǵa tiykarlangan maqul boladı. Lagranj formasındaǵı qaldıq aǵza ushın $[0, 1]$ kesindide

$$|R_{n+1}(x)| = \left| \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta \cdot x)^{n+1}} \right| < \frac{1}{n+1}$$

baha orınlı. Bul bahadan $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0 \quad (\forall x \in [0, 1])$ bolatuǵını kórinip tur.

Endi $\ln(1+x)$ funkciyanı argumenttiń $[-r, 0]$ ($0 < r < 1$) kesindige derek mánislerinde bahalaymız. Bunıń ushın Koshi formasındaǵı qaldıq aǵzaǵa tiykarlanamız. Bul kaldıq aǵzanı

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(1+\theta \cdot x)} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta \cdot x} \right)^n \quad (0 < \theta < 1)$$

kóriniste jazıp alamız. Argumenttiń qaralıp atırǵan mánislerinde $\frac{1-\theta}{1+\theta \cdot x} < 1$

teńsizlik orınlı bolatuǵının esapqa alıp, Koshi formasındaǵı qaldıq aǵza ushın $[-r, 0]$ ($0 < r < 1$) kesindide

$$|R_{n+1}(x)| = \left| \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(1+\theta \cdot x)} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta \cdot x} \right)^n \right| < \frac{r^{n+1}}{1-r}$$

baha alamız. Bul bahadan $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0 \quad (\forall x \in [-r, 0] \quad (0 < r < 1))$

bolatugının kóriw qıyın emes.

5⁰. $f(x) = (1+x)^\alpha$ (α – bazı bir haqıyqıy san) funkciyanı qaraymız.

$\forall n$ nomer ushın

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1) \cdot (1+x)^{\alpha-n},$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)$$

bolǵanlıqtan (47) Makloren formulası

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha \cdot x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_{n+1}(x)$$

kóriniste jazıladı, bul jerde Lagranj formasındaǵı qaldıq aǵza

$$R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!} (1+\theta \cdot x)^{\alpha-(n+1)} \cdot x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

kóriniske iye.

Dara jaǵdayda, eger $\alpha = n$ (n – natural san) bolsa, $R_{n+1}(x) = 0$ hám biz hámmege málim N`yuton binomı formulasın alamız:

$$(1+x)^n = 1 + n \cdot x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots + x^n.$$

Eger $(1+x)^n$ funkciyanıń emes, al $(a+x)^n$ funkciyanıń Makloren formulası boyınsha jikleniwın alıw kerek bolsa, onda

$$(a+x)^n = a^n \left(1 + \frac{x}{a}\right)^n = a^n \left[1 + n \cdot \left(\frac{x}{a}\right) + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x}{a}\right)^n\right]$$

formuladan paydalanamız.

GLOSSARIY

Abscissa- noqattıń dekart koordinatalarınan birinshisi.

Analiz - belgisizden anıqlıqtı, belgiliden anıq pikir tiykarında dálillewshi usıl.

Anıq emes integral -differensiallawğa keri matematikalıq ámel.

Argument-erikli ózgeriwshi.

Arifmetika-sanlar hám olar ústinde orınlanatuǵın ámeller haqqındaǵı pán.

Arksinus-sinusqa keri funkciya.

Arktangens-tangenske keri funkciya.

Sáwlelendiriw- kóplikler sáykesliginiń qandayda bir qaǵıyda yamasa nızamı.

Bir japıraqlı funkciya – birdey mánisler qabıl etpeytuǵın hám bazı bir oblastta anıqlanǵan analitikalıq funkciyaǵa ayıladı.

Bir baylamlı oblast –tómendegi qásiyetke iye bolǵan oblast: oblastta jatqan hár qanday jabıq konturdı oblasttan sırtqa shıqpastan úzliksiz túrde tartıp noqatqa aylandırıw múmkin.

Grafik – funkciyanı súwretlew usıllarınan biri.

Dárejeye kóteriw- $\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ ma'rite}} = a^n$ kóbeymeni tabıwdan ibarat.

Differencial – funkciya ósiminiń sıızıqlı bas bólegi.

Differencial esap – funkciyanı tuwındı hám differenciall túsiniqleri járdeminde tekseriwshi matematikanıń bólimi.

Dóngelek- orayı **O** hám radiusı **r** bolǵan dóngelek-tegislikde **O** noqattan aralıqları **r** den úlken bolmaǵan noqatlardıń geometriyalıq orını.

Jeterli shárt – shártten juwmaq kelip shıǵadı.

Zárúrli hám jeterli shártler – teoremalardı jazıw hám bayan etiw túri.

Zárúrli shárt - juwmaqтан shárt kelip shıǵadı.

Integral esap – matematikalıq analizdiń integrallar, olardıń qásiyetleri, esaplaw usılları hám jaǵdayların úyrenetuǵın bólimi.

Dálil– tastıyqlawdıń durıslıǵı anıqlanatuǵın pikirler shınjırı.

Ishki noqat-usı noqattı óz ishine alatuǵın qandayda bir dógerek penen birge kóplikke tiyisli bolǵan noqat.

Kóp baylamlı oblast -bir baylamlı bolmağan oblast.

Koordinatalar-belgili tártipte alıńan hám noqattıń sıızıqtaǵı, tegisliktegi, betliktegi yamasa keńisliktegi awhalın xarakterleytuǵın sanlar.

Koordinatalar bası- koordinata kósherleriniń kesilisiw noqatı.

Lemma-bir yamasa bir neshe teoremanı dálillew ushın qollanılatuǵın járdemshi pikir.

Limit – eger ózgeriwshi shama óziniń ózgeriw payıtında a sanına sheksiz jıynalsa, onda a sanı x ózgeriwshiniń limiti.

Limit noqat - eger a noqattıń hár qanday dógeresinde E kópliktiń a dan ózgeshe keminde bir noqatı bar bolsa, onda a noqatqa E kópliktiń limit noqatı dep ataladı.

Teorema – dálil talap etiwshi pikir.

Teńsizlik- teńsizlik belgisi menen ańlatılǵan eki algebrlıq ańlatpa.

Kópliktiń shegarası -bul kóplik shegaralıq noqatlarınıń toparı.

Menshiksiz integral – shegarası sheksiz yamasa integral astındaǵı funkciya ekinshi túr úziliske iye bolǵan integral.

Óz-ara bir mánisli sáykeslik – eki kóplik elementleri arasındaǵı sonday sáykeslik, bunda birinshi kópliktiń hár bir elementine ekinshi kópliktiń tek bir elementine sáykes keledi hám kerisinshe.

Funkciyanıń mánisler kópligi – ǵárezsiz ózgeriwshiniń qabıl qılatuǵın mánisler kópligi.

Haqıyqıy sanlar-barlıq racional hám irracional sanlar.

ÁDEBIYATLAR

1. Azlarov. T., Mansurov. X., Matematik analiz. T.: «O'zbekiston». 1 t: 1994 y.-416 b.
2. Xudayberganov G., Vorisov A., Mansurov X., Shoimqulov B. Matematik analizdan maruzalar. I T.: «Voris-nashriyot». 2010 y. – 374 b.
3. Toshmetov Ó., Turgunbayev R., Saydamatov E., Madirimov M. Matematik analiz, I-qism. T.: “Extremum-Press”, 2015. -408 b.
4. Sa'dullaev A. va boshq. Matematik analiz kursidan misol va masalalar to'plami. I qism. T.,«O'zbekiston». 2000 y.-400b.
5. Turgunbaev R.M. Matematikalıq analiz. I tom. T.: “Abu matbuot-konsalt”, 2014.-344b.
6. В.А.Ильин, В.А.Садовничий, Бл.Х.Сендов. Математический анализ. 1-ч.М. 1985.
7. Claudia Canuto, Anita Tabacco Mathematical analysis. I. Springer-Verlag. Italia, Milan. 2008.-435p.
8. Gaziyeв A., Israilov I., Yaxshibayev M. “Matematik analizdan misol va masalalar” T.: “Yangi asr avlodi” 2006 y.
9. Toshmetov O', Turgunbayev R. Matematik analizdan misol va masalalar to'plami. 1-q. TDPU. 2006 y.-140 b.
10. Turgunbayev R.M., Koshnazarov R.A., Raximov I.K. Matematik analiz. Mustaqil ta'lim uchun metodik ko'rsatmalar. I semestr. T.: TDPU. 2013 y. – 56 b.

Internet saytları

1. <http://vilenin.narod.ru/Mm/Books/>
2. <http://www.allmath.ru/>

MAZMUNÍ

Kirisiw.....	3
1- BAP. HAQÍYQÍY SANLAR.....	11
1- §. Kóplik. Kóplikler ústinde ámeler.....	11
2- §. Racional sanlar hám olardıń qásiyetleri.....	18
3- §. Haqıyqıy sanlar. Haqıyqıy sanlar kópliginiń qásiyetleri.....	24
4- §. Haqıyqıy sanlar kópliginiń tolıqlıǵı. Dedekind teoreması.....	27
5- §. Haqıyqıy sanlar ústinde arifmetikalıq ámeler hám olardıń qásiyetleri..	28
6- §. Haqıyqıy sannıń moduli hám onıń qásiyetleri.....	36
7- §. Haqıyqıy sanlardı geometriyalıq súwretlew.....	37
8- §. Shegaralanǵan sanlı kóplikler.....	41
2- BAP. SANLÍ IZBE- IZLIK HÁM ONÍN LIMITI.....	46
1- §. Sanlı izbe- izlik.....	46
2- §. Izbe- izliktiń limiti.....	49
3- §. Jıynaqlı izbe- izliklerdiń qásiyetleri.....	50
4- §. Monoton izbe-izlikler.....	60
5- §. Monoton izbe-izliktiń limiti haqqındaǵı teoremalardıń qollanıwları.	63
6- §. Úles izbe- izlikler. Bol`cano- Veyershtrass teoreması.....	65
7- §. Fundamental izbe- izlikler. Izbe- izliktiń jıynaqlılıǵınıń Koshi kriteriysi.....	69
3- BAP. BIR ÓZGERIWSHILI FUNKCIYA HAM ONÍN LIMITI.....	73
1- §. Funkciya túsinigi.....	73
2- §. Funkciyanıń limiti.....	82
4- BAP. ÚZLIKSIZ FUNKCIYALAR.....	107
1- §. Úzliksiz funksiya túsinigi.....	107
2- §. Úzliksiz funksiylardıń lokal hám global qásiyetleri.....	118
3- §. Tiýkargı elementar funksiylar hám olardıń úzliksizligi.....	131
5- BAP. BIR ÓZGERIWSHILI FUNKCIYALAR USHÍN	149

DIFFERENCIAL ESAP	
1- §. Funkciyanın tuwındısı	149
2- §. Funkciyanın differenciallanıwshılıǵı.....	156
3- §. Ápiwayı elementar funkciyalardıń tuwındıları.....	169
4- §. Joqarı tártipli tuwındı hám differenciallar.....	175
5- §. Parametrli kóriniste berilgen funkciyanı differenciallaw.....	179
6- §. Differenciallanıwshı funkciyalar haqqındaǵı tiykargı teoremlar.....	181
7- §. Lopital qádesi.....	190
8- §. Teylor formulası.....	195
GLOSSARIY.....	207
ÁDEBIYATLAR.....	209

Z.B.Saparov, B.B. Prenov, B.M. Narekeev,
D.E. Mirzanova, A.G. Xodjaniyazov

MATEMATIKALÍQ ANALIZ

Redaktori: A.Abdujalilov
Ko'rkem redaktori: S. Abduvaliyev
Tex. Redaktori: U. Vohidov
Operatori: D. O'rinova

Licenziya: AI №190, berilgen waqti 10.05.2011
Original-maketten bosiwğa ruqsat etildi 02.10.2019-j.
Formatı 60x84 $\frac{1}{16}$. Kegli 11,5. «Times New Roman»
garniturası. Ofset usılında basıldı. Kólemi 14,0 b.t.
13,02 shártli b.t. Nusqası 100 dana. Buyırtpa 03/10.

«Tafakkur-bo'stoni» baspası. 100190. Tashkent qalasi,
Yunusobod-9, 13-54. E-mail: yunusali_1987@mail.ru

«Tafakkur-bo'stoni» MCHJ baspa-poligrafiyasında
chop etildi. Tashkent qalasi, Chilonzor koshesi, 1.
Telefon: (890) 000-33-93