

**ÓZBEKSTAN RESPUBLIKASI JOQARI HÁM ORTA
ARNAWLI BILIMLENDIRIW MINISTRLIGI**

**ÁJINIYAZ ATINDAǴI NÓKIS MÁMLEKETLIK
PEDAGOGIKALIQ INSTITUTI**

**Z.B.Saparov, B.B. Prenov, B.M. Narekeev,
D.E. Mirzanova, A.G. Xodjaniyazov**

MATEMATIKALÍQ ANALIZ

1-bólim

**5110100 – «Matematika oqıtıw metodikası» bakalavr tálim
baǵdarı talabaları ushın oqıwlıq**

**«Tafakkur bo‘stoni» baspası
Tashkent – 2019**

UDK 124.4(075.8)

BBK 81.2Qor-5

S-74

Dúziwshiler: Z.B.Saparov, B.B. Prenov, B.M. Narekeev,
D.E. Mirzanova, A.G.Xodjaniyazov **Matematikalıq analiz.**
«Tafakkur-bo‘stoni», 2019. 224 bet.

Oqıwlıq «Matematika oqıtıw metodikası» tálim baǵdarı ushın oqıw baǵdarlaması tiykarında jazılǵan.

Oqıwlıqqa kóplikler teoriyasınıń elementleri, izbe-izlikler hám funkciyalardıń shekleri, úzliksiz funkciyalar, differenciallanıwshı funkciyalar teoriyası kiritilgen.

Oqıwlıqtan joqarı oqıw orınlarınıń talabaları, magistrantlar, professor-oqıtıwshılar, ilimiy xızmetkerler, sonday-aq akademiyalıq licey, kásip-óner kolledjleri hám orta bilim beriw mektepleriniń oqıwshıları hám muǵallimleri paydalanıwı múmkin.

Juwaplı redaktor:

Z.B.Saparov – Ájiniyaz atındaǵı Nókis mámleketlik pedagogikalıq institutınıń «Matematika oqıtıw metodikası» kafedrasınıń úlken oqıtıwshısı, fizika-matematika ilimleriniń kandidatı.

Pikir bildiriwshiler:

O.D.Nurjanov – Berdaq atındaǵı Qaraqalpaq mámleketlik universitetiniń «Matematikalıq analiz» kafedrasınıń docenti fizika-matematika ilimleriniń kandidatı.

S.A. Tańirbergenov – Ájiniyaz atındaǵı Nókis mámleketlik pedagogikalıq institutınıń «Matematika oqıtıw metodikası» kafedrasınıń docenti fizika-matematika ilimleriniń kandidatı.

Ózbekstan Respublikası Joqarı hám orta arnawlı bilimlendiriw ministrliǵı janındaǵı Muwapıqlastırıwshı keńesi tárepinen 2018-jıl «14» iyun kúńi 531-sanlı buyrıǵına muwapıq oqıw qollanba sıpatında baspaǵa usınılǵan.

ISBN 978-9943-993-53-2

© «Tafakkur bo‘stoni» baspası, 2019

KIRISIW

Matematika pání muǵdarlar haqqındaǵı anıq abstrakt pán bolıp, átirapımızdı qorshap turgan materiallıq dúnyanın muǵdarlıq qatnasların hám keńislik formaların úyrenedi. Onıń anıqlıǵı qollanılatuǵın metodlarınıń qatal logikalıq pikirlerge tiykarlanganlıǵı hám shıǵarılǵan juwmaqlarınıń qatal logikalıq formada jámlengenligi, al abstraktlıǵı túsiniqleriniń tábiyiy (fizikalıq, ximiyalıq, biologiyalıq, ekonomikalıq h. t. b.) processti analiz qılıw maqsetinde qurılǵan logikalıq modeller ekenligi menen xarakterlenedi.

Matematikaniń pán sıpatında qalıplesiwinde hám tariyxıy rawajlanıwı procesinde geometriya menen fizikanıń, ásirese, mexanikanıń xızmetleri oǵada úlken bolǵan. Bunıń dálili sıpatında tiykarǵı matematikalıq túsiniqlerdiń kelip shıǵıwına bir názer taslaw jetkilikli. Nárselerdi sanaw, geometriyalıq hám fizikalıq shamalardı ólshew procesinde *san* túsiniǵı, al materiallıq noqattıń mexanikalıq háreketin úyreniw procesinde *funkciya* túsiniǵı payda bolǵan. Háreketdegi materiallıq noqattıń tezligin anıqlaw máselesi *tuwındı* túsiniǵına, al tuwındılardı esaplaw máselesi *funkciya limiti* hám *úzliksizligi* túsiniqlerine alıp keldi. Háreketdegi materiallıq noqattıń tezligi boyınsha onıń háreket nızamın tiklew máselesi *dáslepki funkciya* hám *anıq emes integral* túsiniqleriniń, iymek sıızqlı trapeciyanıń maydanın esaplaw hám háreketdegi materiallıq noqattıń berilgen waqıt aralıǵında basıp ótken jolın esaplaw máselesi *anıq integral* túsiniǵiniń payda bolıwına sebepker boldı. Oqıwshılar bul túsiniqler menen ulıwma bilim beriw mektebiniń, akademiyalıq licey hám kolledjlerdiń matematika kursında tanısқан.

Joqarı oqıw orınlarında oqıtılatuǵın fizika hám astronomiyaǵa derek pánler joqarıda aytlıǵan matematikalıq túsiniqlerdi jetik biliwdi hám basqa bir qatar jańa matematikalıq túsiniqlerdi hám matematikalıq metodlardı úyreniwdi talap qıladı.

Matematikalıq analizde funkciyalar hám olardıń ulıwmalasıwları (funkcionallar, operatorlar h. t. b.) limitler metodı (sheksiz kishiler metodı) járdeminde analiz qılınadı. Úyreniletuǵın matematikalıq analiz kursı kóplikler hám olar ústinde ámeller, haqıyqıy sanlar teoriiyası, limitler teoriiyası, differenciallıq hám integrallıq esap, qatarlar teoriiyası, ádettegi differencial teńlemeler, kompleks ózgeriwshili funkciyalar teoriiyası elementleri, Fure qatarları hám integralları sıyaqlı tiykarǵı baplardan dúzilgen. Onı oqıtıwda kózde tutılǵan tiykarǵı maqset, birinshiden, talabalarda fizika hám astronomiyanıń hár qıylı oblastlarında differenciallıq hám integrallıq esaplardan paydalanıw kónlikpelerin hasıl qılıw, ekinshiden, talabalardı matematikanıń matematikalıq fizika metodları, kompleks analiz, funkcionallıq analiz, differencial hám integral teńlemeler teoriiyası, itimallıqlar teoriiyası sıyaqlı áhmiyetli bólimlerin úyreniwge tayarlawdan ibarat.

Biz bayanlawdı matematikalıq analizdi úyrengende ushırasıwǵa tuwra keletuǵın túsinipler hám mashqalalardı anıqlawdan baslaymız. Bul kirisiw bóliminde keltiriletuǵın formulirovkalar dáslepki maǵlıwmat xarakterine iye bolıp, anıqlıqlar kiritiwdi talap qılatuǵının eskertemiz.

Matematikalıq analizdiń tiykarǵı túsinipleri.

a) Haqıyqıy sanlar - sheksiz onlıq bólshekler.

b) Eń ápiwayı kórinistegi háreketti- materiallıq noqatın tuwrı sıziq boylap háreketin, qaraymız hám bunday háreketti táriplegende qanday matematikalıq túsinipler payda bolatuǵının anıqlawǵa háreket qılamız.

Meyli, materiallıq noqat OY kósherin boylap háreket qılsın, al x - bazı bir dáslepki momentten baslap esaplanatuǵın waqıt bolsın. Bunday hárekettiń xarakteristikası ushın hár bir x waqıt momenti ushın háreketleniwshi noqatın usı waqıt momentindegi y koordinatasın sáykes qoyatuǵın qaǵıydanı biliw kerek. Bunday qaǵıyda *háreket nızamı* dep ataladı.

x hám y ózgeriwshiniń fizikalıq maǵanasınan abstraktlanıp, biz ulıwma bilimlendiriw mektep kursınan bizge málim hám pútkil matematikanıń áhmiyetli túsiniqleriniń bir bolǵan funkciya túsinigine kelemiz.

Funkciyanıń anıqlanıw oblastı hám mánisler kópligi bolǵan kópliklerdiń hám funkciyanıń xarakteristikasınıń tábiyatına qarap analizdiń hár qıylı tarawlarında qaralıp atırǵan funkciya sáwlelendiriw, operator, funkcional h. t. b. dep ataladı. Eger qaralıp atırǵan sáwlelendiriwde hár bir y mánis argumenttiń jalǵız bir x mánisine juwap berse, onda bul sáwlelendiriw óz-ara bir mánisli sáwlelendiriw dep ataladı. Óz-ara bir mánisli sáwlelendiriwde hár bir y mániske málim bir x mánisti (atap aytqanda, argumenttiń tuwrı sáwlelendiriwde berilgen y mánis juwap beretuǵın mánisin) sáykes qoyıwshı keri sáwlelendiriw bar boladı.

x argumentiniń ózi bazı bir jańa t ózgeriwshiniń $x = \varphi(t)$ kórinisindegi funkciyası bolǵan $y = f(x)$ funkciyalardı jiyi qarawǵa tuwra keledi. Bunday jaǵdayda y ózgeriwshı t argumenttiń *quramalı funkciyası* dep, al x ózgeriwshı *aralıq argument* dep ataladı. Bul quramalı funkciya f hám φ funkciyalardıń *superpoziciyası* dep te ataladı. Bul funkciyanı belgilew ushın $y = f[\varphi(t)]$ simvolınan paydalanıladı.

c) Fizika kursınan materiallıq noqattıń hár bir x waqıt momentindegi tezligi onıń háreketiniń áhmiyetli xarakteristikası ekeni málim. Tezlik fizikalıq túsiniǵı fundamentallıq matematikalıq tuwındı túsinigine alıp keledi.

Funkciyanıń tuwındısın esaplawda funkciyanıń limiti túsiniǵı fundamental rol oynaydı. Oqıwshı akademiyalıq licey hám kásip-óner kolledjleri kursınan funkciyanıń limiti (tuwındısı) haqqındaǵı dáslepki túsiniqke iye boladı. Matematikanıń áhmiyetli túsiniqleriniń biri bolǵan, matematikalıq analiz kursında

puxta úyreniletuǵın *úzliksizlik* túsiniǵı de limit túsiniǵine tiykarlanǵanın esletip ótemiz.

Biraq, limit túsiniǵin qatal hám izbe-iz úyreniw tek qatal haqıyqıy sanlar teoriiyası bazasında ǵana múmkin ekenin atap ótemiz. Mısalı, qatal haqıyqıy sanlar teoriiyasız $y = \sin x$ hám $y = \log_a x$ funkciyalardıń tuwındısın esaplaǵanda payda bolatuǵın áhmiyetli $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}$ hám $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t}$ ájayıp limitlerdiń bar (yaǵnıy shekli sanǵa teń) bolıwın anıqlaw múmkin emes.

Solay etip, tuwındınıń bar bolıwı hám onı esaplaw haqqındaǵı másele qatal haqıyqıy sanlar teoriiyasın hám onıń bazasında limitler teoriiyasın rawajlandırıwǵa keledi.

Ápiwayı elementar funkciyalardıń tuwındıların esaplaǵanda ayırıqsha qıyınshılıqlar payda bolmaydı. Bul tuwındılardı esaplaw ushın tek limitke ótiw ámeliniń arifmetikalıq qásiyetleri, eki áhmiyetli limit hám bul funkciyalardıń óz anıqlanıw oblastına derek noqatlarda *úzliksizligi* ǵana kerek boladı.

Ápiwayı funkciyalardıń tuwındılarınıń kestesin qatal tiykarlaw matematikalıq analizdiń *differenciallıq esap* dep atalatuǵın bóliminiń áhmiyetli máseleleriniń biri.

Klassikalıq differenciallıq esaptıń tradiciyalıq máselesi ápiwayı elementar funkciyalardan shekli sandaǵı tórt arifmetikalıq ámel hám shekli sandaǵı superpoziciyalar orınlaw jolı menen alınatuǵın funkciyalardıń tuwındısın esaplaw. Ádette bunday funkciyalar *elementar funkciya* dep ataladı.

Qálegen elementar funkciyanıń tuwındısın esaplaw ushın ápiwayı elementar funkciyalardıń tuwındılarınıń kestesine eki qaǵıydanı biriktiriw kerek: 1) quramalı funkciyanı differenciallaw qaǵıydası; 2) funkciyalardıń qosındısın, ayırmasın, kóbeymesin hám qatnasın differenciallaw qaǵıydası.

Hár bir elementar funkciyanıń tuwındısı elementar funkciya boladı, yaǵnıy differenciallaw ámeli bizdi elementar funkciyalar

klasınan sırtqa shıǵarmaydı. Bul elementar funkciyalar klasın klassikalıq analizdiń tradiciyalıq ob`ekti sıpatında kiritiwge múmkinshilik beredi.

d) Jáne materiallıq noqattıń tuwrı sıızıq- OY kósheri, boylap háreket qılıwı haqqındaǵı mexanikalıq máseleni qaraymız. Bul ret hárekettegi noqattıń qálegen x waqıt momentindegi $f(x)$ tezligi málim dep boljaw qılınadı hám bul noqattıń háreket nızamın tabıw talap etiledi.

$f(x)$ tezlik háreket nızamın anıqlaytuǵın $y = F(x)$ funkciyanıń tuwındısı bolǵanlıqtan, másele berilgen $f(x)$ funkciya boyınsha $F'(x)$ tuwındısı $f(x)$ funkciyaǵa teń bolǵan $y = F(x)$ funkciyanı tabıwǵa keltiriledi. $f(x)$ hám $y = F(x)$ funkciyalardıń mexanikalıq mánislerinen abstrakciyalanıp, biz dáslepki funkciya hám anıq emes integral túsiniǵine kelemiz.

Funkciyanıń dáslepki funkciyasınıń anıqlamasında qaysı kóplikte $F'(x)$ tuwındısı $f(x)$ funkciyaǵa teń bolatuǵının anıq aytıw kerek. Bul kóplikler teoriyasın rawajlandırıw zárúrligin jáne bir mártebe ayırıqsha atap kórsetedi.

Materiallıq noqattıń OY kósheri boylap háreket qılıwı nızamın onıń x waqıt momentindegi $f(x)$ tezligi boyınsha anıqlaw haqqındaǵı máselege qaytıp, bul háreket nızamı $F(x) + C$ (C – turaqlı san) funkciya menen anıqlanadı dep tastıyıqlawımız múmkin, bul jerde $F(x) - f(x)$ funkciyanıń qálegen dáslepki funkciyası.

Kórip turǵanıımızday, qosımsha shártlersiz tezlik boyınsha háreket nızamı bir mánisli anıqlanbay, C turaqlı qosılıwshı anıqlıǵında anıqlanadı. Bul turaqlını anıqlaw ushın qosımsha shártler qoyılıwı kerek.

e) Eki fundamentallıq másele *anıq integral* túsiniǵi menen baylanısqan: $f(x)$ tezlikte háreketleniwshı materiallıq noqattıń

$x = a$ dan $x = b$ ğa deyingi waqıt aralıǵında basıp ótken jolı haqqındaǵı fizikalıq másele hám $f(x)$ funkciyanıń grafigi, $x = a$ hám $x = b$ tuwrı sıızıqları hám O_x kósheri menen shegaralanǵan iymek sıızılıq trapeciyanıń maydanın esaplaw haqqındaǵı geometriyalıq másele.

$f(x)$ funkciyanıń $[a, b]$ kesindisi boyınsha anıq integralın esaplaw máselesin bul funkciyanıń qálegen $\Phi(x)$ dáslepki funkciyasınıń $x = a$ hám $x = b$ noqatlardaǵı mánisleriniń ayırmasın esaplawǵa keltiretuǵın N'yuton- Leybnic formulasın qatal tiykarlaw matematikalıq analizdiń tiykarǵı máseleleriniń biri.

f) Dáslepki funkciyası ushın anıq analitikalıq ańlatpanı tek tar funkciyalar klası ushın ğana alıw múmkin ekenin atap ótemiz. Sonıń ushın N'yuton- Leybnic formulası menen bir qatarda anıq integraldı esaplawdıń juwıq usıllarınan paydalanıwǵa tuwrı keledi.

Integraldı juwıq esaplaw usıllarınan (tuwrımúyeshlikler, trapeciyalar hám parabolalar (Simpson)) komp'yuterde effektiv paydalanıw múmkin.

g) Anıq integrallardı juwıq esaplaw usılları menen bir qatarda hár qıylı teńlemelerdi sheshiwdiń juwıq usılları da (ápiwayı iteraciya, N'yuton) házirgi zaman matematikasında úlken áhmiyetke iye.

Matematikalıq analizdi rawajlandırıwdıń áhmiyetli máselesi kóp ózgeriwshili funkciyanıń differenciallıq hám integrallıq esapların qurıwdan ibarat.

Júdá keń maǵanada túsiniletuǵın matematikalıq analiz differencial teńlemeler (yaǵnıy belgisiz funkciyalar tuwındıları menen kiretuǵın teńlemeler) teoriyasın óz ishine aladı.

Keyingi waqıtları funkciya túsiniǵın, tuwındı hám funkciyalardıń tuwındıların baylanıstırıwshı differencial teńlemenıń sheshimi túsiniǵın ulıwmalastırıwǵa tiykarlanǵan teoriya keń rawajlanıp atır.

Matematikalıq analizdi qurıw insan aqlınıń eń áhmiyetli jetiskenlikleriniń biri. Ol dara bólek-bólek fizikalıq hám geometriyalıq máselelerdi (deneniń awırılıq kúshi tásirinde qulawı, málim iymek sıızıq penen shegaralanǵan figura maydanın esaplaw h. t. b.) qarawdan úlken máseleler klassların sheshiw usılların rawajlandırıwǵa ótiwge múminshilik berdi. Matematikalıq analizdiń rawajlanıwı, óz nábette, ilim hám texnika progresine úlken tásir kórsetti.

Klassikalıq matematikalıq analiz biz hámme dáslepki shamalardıń anıq mánislerine iyemiz hám hámme esaplanatuǵın shamalardıń anıq mánislerin taba alamız degen isenimge tiykarlanǵan júdá qolaylı ideallaştırılǵan model.

Sonıń menen birge usı modelge tiykarlanıp, biz, ádette, dáslepki shamalar bazı bir qátelik penen berilgenligi hám hámme esaplawlar tek málim anıqlıq penen ǵana esaplanatuǵınlıǵı sebepli payda bolatuǵın qátelikti bahalawımız múmin bolatuǵının aytıp ótemiz.

Solay etip, matematikalıq analiz apparatı sanlı usıllardı qurıw hám qáteliklerdi bahalaw ushın qollanıwı múmin.

Sózimizdi juwmaqlap, biz júrgizgen dáslepki izertlewler nátiyjesinde anıqlanǵan birinshi nábettegi hám eń áhmiyetli mashqalalardı tártiplestiremiz.

1. Háqıyqıy san, kóplik hám funkciya túsiniqlerine anıqlıqlar kirgiziw.

2. Limitler teoriyasın hám bul teoriya menen baylanısqan funkciyanıń úzliksizligi túsiniǵın rawajlandırıw.

3. Differenciallıq hám integrallıq esap apparatı qurıw.

4. Arnawlı túrdegi qosındılardıń limiti sıpatındaǵı anıq integral teoriyasın qurıw.

5. Anıq integrallardı juwıq esaplaw hám teńlemelerdi sheshiwdiń juwıq usılların rawajlandırıw.

6. Geypara geometriyalıq túsiniqlerdi (mısalı, tegis figuranıń maydanı, doǵa uzınlıǵı) anıqlaw.

Matematikalıq belgiler. Ayırım jaǵdaylarda matematikada jazıwdı qısqartıw maqsetinde tez-tez ushırasatuǵın sóz hám sóz birikpeleriniń ornına arnawlı belgiler qollanıladı.

«Eger ... bolsa, onda ... boladı» tastıyıqlawı « $\Rightarrow$ »-implikaciya belgisi arqalı jazıladı.

Eki ekvivalent tastıyıqlawdı jazıwda « $\Leftrightarrow$ » yaki « $\sim$ »-ekvivalentlik belgisi qollanıladı.

«Hár bir», «qálegen», «hámmesi ushın» sózleriniń ornına « $\forall$ »-ulıwmalıq kvantori belgisinen paydalanıladı.

«Bar boladı», «tabıladı» sózleriniń ornına « $\exists$ »-bar bolıw kvantori belgisi qollanıladı.

Matematikalıq belgilerdiń qollanıw mazmunın qolaylılıq ushın mına kestede beremiz.

№	Matematikalıq belgiler	Matematikalıq belgilerdiń qollanıw mazmunı
1.	$\in$	dereklilik belgisi- a element A kóplik elementi bolsa, $a \in A$ dep jazıladı.
2.	$\notin$	derek emeslik belgisi- b element B kóplik elementi bolmasa, $b \notin B$ dep jazıladı.
3.	$\subset$	úleslik belgisi. A kóplik B kópliktiń úles kópligi bolsa, $A \subset B$ dep jazıladı.
4.	$\forall$	ulıwmalıq kvantori belgisi. «Hár bir», «qálegen», «hámmesi ushın» sózleriniń ornına qollanıladı.
5.	$\exists$	bar bolıw kvantori belgisi. «Bar boladı», «tabıladı» sózleriniń ornına qollanıladı.
6.	$\Rightarrow$	implikaciya belgisi. «Eger ... bolsa, onda ... boladı» tastıyıqlawınıń ornına paydalanıladı.
7.	$\Leftrightarrow$	ekvivalentlik belgisi.

1- BAP HAQÍYQÍY SANLAR

Matematikanıń dáslepki, sonıń menen birge tiykarǵı, túsinipleriniń biri san túsiniǵi. Oqıwshılar mektep matematika kursında natural san, nol sanı, pútin san, racional san, haqıyqıy san túsinipleri menen tanısadı hám olardıń qásiyetleri menen ámeliy qollanıwların úyrenedi. Biraq san haqqındaǵı bul maǵlıwmatlar matematikalıq analiz kursın úyreniw ushın kemlik qıladı. Matematikalıq analizdiń funkciya, limit, jıynaqlılıq, úzliksizlik, tuwındı, integral sıyaqlı túsinipleri haqqında tolıq bilimge iye bolıw ushın dáslep haqıyqıy sanlar teoriyasın jaqsı biliw kerek.

1-§. Kóplik. Kóplikler ústinde ámeller

1. **Kóplik túsiniǵi.** Hár bir pándi úyreniw dáslep onıń tiykarǵı túsinipleri menen tanısıwdan baslanadı. Kóplik túsiniǵi matematikanıń baslanǵısh túsinipleriniń biri bolıp, ol mısallar járdeminde túsindiriledi. Mısalı, shkaftaǵı kitaplar, hámme durıs bólshekler, Quyash sistemasındaǵı planetalar, berilgen noqattan ótiwshi tuwrı sızıqlar kópligi haqqında aytıw múmkin.

Kóplikti dúziwshi nárseler (predmetler) onıń *elementleri* dep ataladı.

Ádette kóplikler latin yaki grek alfavitiniń bas háribi menen, al onıń elementleri kishi háripler menen belgilenedi. Mısalı, $A, B, \dots, E, F, \dots$ háripler menen kópliklerdi, al $a, b, c, \dots$ háripler menen kópliktiń elementlerin belgileybiz.

Eger $a - A$ kópliktiń elementi bolsa, $a \in A$ dep jazıladı hám « a element A kóplikke derek» dep oqıladı. Keri jaǵdayda $a \notin A$ dep jazıladı hám « a element A kóplikke derek emes» dep oqıladı. Mısalı, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ bolsa, onda $6 \in A, 7 \notin A$.

Shekli sandaǵı elementlerden dúzilgen kóplik *shekli kóplik* dep ataladı. Mısalı, joqarıda keltirilgen kópliklerden shkaftaǵı kitaplar kópligi shekli kóplikti dúzedi.

Matematikada kóbinese shekli bolmaǵan kópliklerdi- *sheksiz kópliklerdi* qarawǵa tuwra keledi. Mısalı, hámme durıs bólshekler, hámme natural sanlar, berilgen noqattan ótiwshi hámme tuwrı sıızqlar kópligi sheksiz kópliklerge misal boladı.

Hámme natural sanlardan dúzilgen kóplik N háribi menen belgilenedi hám

$$N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\} \text{ yaki } N = \{n: 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

dep jazıladı. $B = \{x: x^2 - 5x + 6 = 0\}$ kóplikti jáne bir misal sıpatında keltireyik. Bul kóplik $x^2 - 5x + 6 = 0$ teńlemenin sheshimlerinden dúzilgen.

Joqarıda biz kóplik onıń hámme elementleri ushın xarakterli bolǵan qásiyetti, qaǵıydanı beriw menen beriliwin, sonday- aq, onıń hámme elementlerin tikkeley kórsetiw menen beriliwin kórdik. Geyde kóplik qanday qásiyetlerge iye elementlerden dúziliwi kerekligi málim bolsa da, bunday qásiyetke iye elementler tabılmaslıǵı múmkin. Mısalı, A kóplik $m + x = n$ ($n, m \in N, n < m$) teńlemenin natural sanlar kópligindegi sheshimlerinden dúzilgen dep shárt qoyılsa, bul kópliktiń hesh bir elementi joq ekeni málim boladı. Buǵan sebep-berilgen teńlemenin natural sanlar kópliginde sheshimge iye emesligi. Bunnan elementke iye bolmaǵan kópliklerdi qurıwǵa tuwra keletuǵını kórinip tur.

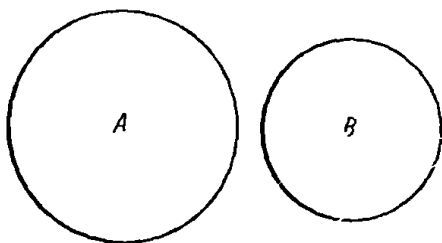
Hesh bir elementke iye bolmaǵan kóplik *bos kóplik* dep ataladı hám $\emptyset$ simvol menen belgilenedi.

Kóplikti anıqlaǵanda onı dúziwshi elementler arasında bir-birine teń bolǵan elementler kópliktiń elementi sıpatında tek bir mártebe alınatuǵının aytıp ótiwimiz kerek. Mısalı, B kóplik $x^3 - 3x + 2 = 0$ teńlemenin sheshimlerinden dúzilgen bolsın. Bul teńlemenin sheshimleri $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -2$ bolıp,

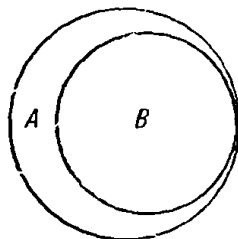
olardan dúzilgen B kóplik degende biz 1 hám -2 sanlardan dúzilgen $B = \{1, -2\}$ kóplikti túsinemiz.

Kóplikler, shekli yaki sheksiz bolıwına qaramay, simvolikalıq túrde kóbinese tegislikte bazı bir figura, mısalı, dóńgelekler menen súwretlenedi. Al bul kóplikler ústinde orınlangan ámellerdi kóz aldımızǵa keltirgenimizde, olar arasındaǵı qatnaslardı úyrengenimizde júdá qolaylı boladı (1- súwret).

Eger B kópliktiń hár bir elementi A kópliktiń de elementi bolsa, onda B kóplik A kópliktiń *úles kópligi* dep ataladı hám $B \subset A$ dep belgilenedi (2- súwret). Mısalı, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ bolsa, $B \subset A$ ekenin kóriw qıyın emes.



1- súwret



2- súwret

Bos kóplik hár bir kópliktiń úles kópligi dep esaplanadı.

Bazı bir A kóplik berilgen bolsın. Bul kópliktiń hámme úles kópliklerinen dúzilgen kóplikti $\mathcal{F}(A)$ simvolı menen belgileybiz. $\emptyset \in \mathcal{F}(A)$, $A \in \mathcal{F}(A)$ bolatuǵını óz-ózinen málim. $\mathcal{F}(A)$ kópliktiń elementleriniń ózi kóplik. Mısalı, $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ kóplikler ushın

$$\mathcal{F}(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \emptyset\},$$

$$\mathcal{F}(B) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \emptyset\}$$

boladı. Ulıwma, elementler sanı n bolǵan kópliktiń hámme úles kópliklerinen dúzilgen kópliktiń elementleriniń sanı 2^n ne teń.

Eger kóplik sheksiz kóplik bolsa, onda úles kópliklerinen dúzilgen kópliktiń elementleri de sheksiz kóp boladı.

1-anıqlama. Eger A kóplik B kópliktiń úles kópligi, al B kóplik A kópliktiń úles kópligi bolsa, onda A hám B kóplikler *teń kóplikler* dep ataladı hám $A = B$ dep jazıladı.

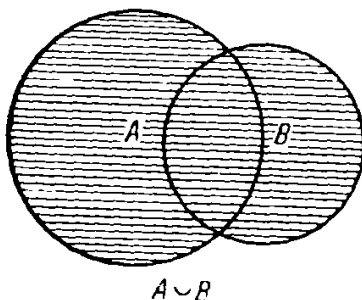
Mısalı, A kóplik $k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) kórinistegi sanlardan dúzilgen, yaǵnıy $A = \{a : a = k\pi \text{ } (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)\}$, al B kóplik $\sin x = 0$ teńlemeniniń sheshimlerinen dúzilgen, yaǵnıy $B = \{x : \sin x = 0\}$ bolsın. Eger $\sin x = 0$ teńlemeniniń sheshimleri $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) kóriniste jazılatuǵın esapqa alsaq, $A = B$ bolatuǵının kóremiz.

2-anıqlama. Eger $a \notin B$ bolatuǵın $a \in A$ element hám $b \notin A$ bolatuǵın $b \in B$ element tabılsa, onda A hám B kóplikler *teń emes kóplikler* dep ataladı hám $A \neq B$ dep jazıladı.

Mısalı, $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ kóplikler teń emes.

2. Kóplikler ústinde ámeller. Biz tómende kóplikler ústinde orınlanatuǵın ámellerdi keltiremiz.

3-anıqlama. A hám B kópliklerdiń hámme elementlerinen dúzilgen C kóplik A hám B kópliklerdiń *qosındısı* (*birikpesi*) dep ataladı hám $C = A \cup B$ dep belgilenedi (3- súwret).



3- súwret

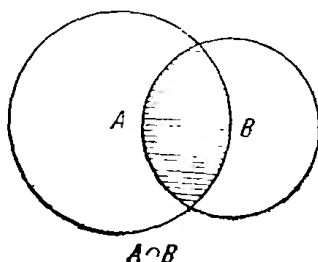
Mısalı,

$A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$, $D = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ bolsa, onda olardıń qosındıları (birikpeleri) tómendegi kóplikler boladı:

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$, $E \cup D = \{1, 2, 3, 4, \dots\} = N$, $A \cup E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$.

Joqarıda keltirilgen anıqlamadan $A \cup A = A$, $A \cup B = B \cup A$ bolıwı, sonday- aq, eger $A \subset B$ bolsa, $A \cup B = B$ bolıwı kelip shıǵadı.

4-anıqlama. A hám B kópliklerdiń ulıwma elementlerinen dúzilgen D kóplik A hám B kópliklerdiń *kóbeymesi* (*kesilispesi*) dep ataladı hám $D = A \cap B$ dep belgilenedi (4-súwret).



4- súwret

Mısalı, $A = \{2; 4; 6; 8\}$, $B = \{1; 2; 3; 4\}$ kópliklerdiń kóbeymesi $D = A \cap B = \{2, 4\}$ kóplik boladı. Kópliklerdiń kóbeymesiniń anıqlamasınan $A \cap A = A$, $A \cap B = B \cap A$ bolıwı, sonday- aq, eger $A \subset B$ bolsa, $A \cap B = A$ bolıwı kelip shıǵadı.

A hám B kópliklerdiń kóbeymesi bos kóplik, yaǵnıy $A \cap B = \emptyset$ bolsa, onda A hám B kóplik *kesilispeytuǵın kóplikler* dep ataladı. Mısalı, $E = \{2, 4, 6, \dots\}$, $F = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ kóplikler kesilispeytuǵın kóplikler, sebebi $E \cap F = \emptyset$.

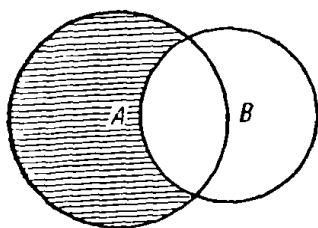
Biz kópliklerdiń qosındısı hám kóbeymesi anıqlamaların eki kóplik ushın berdik. $A_1, A_2, \dots, A_n$ kópliklerdiń $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ qosındısı hám $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ kóbeymesi joqarıdaǵıǵa uqsas anıqlanadı.

5-anıqlama. A kópliktiń B kóplikke derek bolmaǵan hámme elementlerinen dúzilgen E kóplik A kóplikten B kópliktiń *ayırması* dep ataladı hám $E = A \setminus B$ dep belgilenedi (5- súwret).

Mısalı, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 6, 9, 12\}$ bolsa, $A \setminus B = \{1, 2, 4, 5\}$ hám $B \setminus A = \{6, 9, 12\}$ boladı.

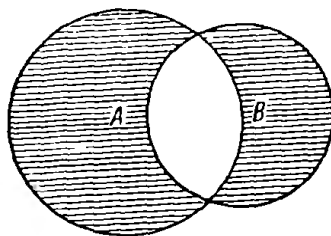
Eger A kóplik S kópliktiń úles kópligi (yaǵnıy $A \subset S$) bolsa, onda $S \setminus A$ ayırma A kóplikti S kóplikke *tolıqtırwshı kóplik* dep ataladı hám $C_S A = S \setminus A$ dep jazıladı.

6-anıqlama. A kópliktiń B kóplikke derek bolmaǵan hám B kópliktiń A kóplikke derek bolmaǵan elementlerinen dúzilgen kóplik A hám B kópliklerdiń *simmetriyalıq ayırması* dep ataladı hám $A \Delta B$ dep belgilenedi (6- súwret).



$A \setminus B$

5- súwret



$A \Delta B$

6- súwret

Anıqlama boyınsha

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Mısalı, eger $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ bolsa, onda bul kópliklerdiń simmetriyalıq ayırması

$$A \Delta B = \{1, 2, 3, 7, 8, 9\}.$$

Eki A hám B kóplik berilgen bolsın. Birinshi elementi A kóplikke, al ekinshi elementi B kóplikke derek bolğan tártiplengen (a, b) juplıqlardı qarayıq: $a \in A, b \in B$.

7-anıqlama. Hámme (a, b) kórinistegi juplıqlardan dúzilgen kóplik A hám B kópliklerdiń *Dekart kóbeymesi* dep ataladı hám $A \times B$ dep belgilenedi.

Ádette $A \times A$ kóplik A^2 dep belgilenedi: $A \times A = A^2$. Mısalı, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4\}$ bolsın. Bul kópliklerdiń Dekart kóbeymesi

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4)\}$$

kóplik boladı. Ulıwma aytqanda, $A \times B \neq B \times A$.

3. **U n i v e r s a l k ó p l i k.** Joqarıda kiritilgen ámeller qálegen kóplikler ushın, kópliklerdiń tábiyatına hesh qanday shárt qoymastan, anıqlandı. Biraq bunday «ulıwmalıq» geyde konkret jaǵdaylarda maǵananıń joǵalıwına alıp keliwi de múmkin. Mısalı, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, al B kóplik Quyash sistemasındaǵı planetalar kópligi bolsa, olardıń qosındısı hám kóbeymesin rásmiy túrde ayta alsaqta, tábiyilikke qarama- qarsı keliwimiz anıq. Bunday mánissizlikke jol qoymaw ushın ádette hámme ámeller bazı bir *universal kóplik* dep atalatuǵın kópliktiń úles kóplikleri ústinde orınlanadı dep esaplanadı. Bul universal kóplik U yaki Ω háribi menen belgilenedi. Mısalı, joqarıda qaralǵan mısallarda universal kóplik sıpatında $U = N = \{1, 2, 3, \dots\}$ natural sanlar kópligi, al Eyler-Vien diagrammaları ushın U kóplik sıpatında tegislik noqatlarınıń kópligi alınıwı múmkin.

Matematikalıq analiz kursı dawamında universal kóplik sıpatında, tiykarınan, R haqıyqıy sanlar kópligi (2- bab, 4- §) qaraladı.

4. Kópliklerdi bóleklew. Bazı bir A kóplik berilgen bolıp, $A_1, A_2, \dots, A_n$ kóplikler onıń úles kóplikleri bolsın: $A_k \subset A$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$).

Eger $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ úles kóplikler sisteması ushın

$$1^0. A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A,$$

$$2^0. A_k \cap A_i = \emptyset \quad (k \neq i; \quad k, i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

shártler orınlansa, $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ sistema A kóplikte *bóleklew orınlağan* yaki A kóplik $A_1, A_2, \dots, A_n$ kópliklerge *bóleklengen* dep ataladı.

Birinshi shárt $A_1, A_2, \dots, A_n$ kóplikler qosındısı A kóplik bolıwın, al ekinshi shárt bul kópliklerdiń jup- juptan kesilispeytuǵının bildiredi. Eki shárt birgelikte A kópliktegi hár bir element bóleklewdiń bir hám tek bir elementine derek bolıwın támiyinleydi.

Geyde $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ sistema A kópliktegi *bóleklew*, al A_i kóplikler *bóleklewdiń elementleri* dep ataladı.

Bir A kóplikte bir neshe bóleklewler orınlangan bolıwı múmkinligi hám hár bir $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ bóleklew $\mathcal{F}(A)$ kópliktiń úles kópligi bolıwı tábiyiy.

Mısallar. № 1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kóplik berilgen bolıp, $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3, 4\}$, $A_3 = \{5, 6\}$ bolsın.

$A_1 \subset A$, $A_2 \subset A$, $A_3 \subset A$ bolıp,

$$1) A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = A,$$

$$2) A_1 \cap A_2 = \emptyset, A_1 \cap A_3 = \emptyset, A_2 \cap A_3 = \emptyset$$

bolatuǵını anıq. Demek, A kóplik A_1, A_2, A_3 kópliklerge *bóleklengen* ($\{A_1, A_2, A_3\}$ sistema A kópliktegi *bóleklew*).

№2. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ bolıp,

$$A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\}, A_3 = \{3\}, A_4 = \{4\}, A_5 = \{5\},$$

$$A_6 = \{6\} \text{ bolsın. Bul jaǵdayda da } \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$$

sistema ushın joqarıdaǵı $1^0 - 2^0$ shártler orınlanadı, demek, bul

sistema A kópliktegi *bóleklew* boladı.

2-§. Racional sanlar hám olardıń qásiyetleri

2.1. Natural sanlar. $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ sanlar *natural sanlar* dep ataladı. Natural sanlar kópligi N háribi menen belgilenedi: $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$.

Bul kóplik sheksiz kóplik bolıp, onda salıstırıw qaǵıydası anıqlanǵan. Bul kóplikten alınǵan qálegen m, n, p sanlar ushın mına eki tastıyıqlaw orınlı:

1^0 . $n < m, n = m, n > m$ qatnastıń birewi hám tek birewi orınlı.

2^0 . $n < m, m < p$ teńsizliklerden $n < p$ teńsizlik kelip shıǵadı.

Eger qanday da bir E kópliktiń elementleri ushın 1^0 - 2^0 qatnaslar orınlı bolsa, onda E kóplik *tártiplengen kóplik* dep ataladı. Natural sanlar kópligi tártiplengen kóplikke dáslepki misal boladı.

Eger E kóplik tártiplengen kóplik bolıp, onda $\forall x \in E$ ushın $x = x_0$ yaki $x > x_0$ ($x > x_0$) bolatuǵın x_0 element tabılsa, onda bul element E kópliktiń *eń kishi (eń úlken) elementi* dep ataladı. Tártiplengen kópliktiń eń kishi (eń úlken) elementi bolıwı da, bolmawı da múmkin. Natural sanlar kópliginiń eń kishi elementi bar (1 ge teń), eń úlken elementi joq.

Natural sanlar kópliginde qosıw hám kóbeytiw ámelleri anıqlanǵan hám olar mına qásiyetlerge iye ($n, m, p \in N$):

1^0 . Kommutativlik: $n + m = m + n, n \cdot m = m \cdot n$.

2^0 . Associativlik: $(n + m) + p = n + (m + p), (n \cdot m) \cdot p = n \cdot (m \cdot p)$.

3^0 . Distributivlik: $(n + m) \cdot p = n \cdot p + m \cdot p$.

4^0 . Natural sanlar kópliginde $k \cdot n = n \cdot k = n$ teńliklerdi qanaatlandıratuǵın element bar. Bul element $k = 1$.

Matematikalıq indukciya usılı járdeminde dálillew principi natural sanlar kópliginiń mına ájayıp qásiyetine tiykarlanǵan:

1-teorema (indukciya aksioması). Eger

1^0 . $A \subset N$,

$$2^0. 1 \in A,$$

$$3^0. k \in A \Rightarrow k + 1 \in A$$

shártler orınlansa, onda $A = N$.

2.2. Pútin sanlar. Natural sanlar, bul sanlarǵa karama qarsı $-1, -2, -3, \dots, -n, \dots$ sanlar hám 0 (nol) sanı *pútin sanlar* dep ataladı. Natural sanlar *oń pútin sanlar*, $-1, -2, -3, \dots, -n, \dots$ sanlar *teris pútin sanlar*, al $0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots$ sanlar *teris emes pútin sanlar* dep ataladı. Pútin sanlar kópligi Z háribi, al teris emes pútin sanlar kópligi Z_0 háribi menen belgilenedi. Z kópligi sheksiz kóplik bolıp, onda salıstırıw qaǵıydası anıqlanǵan. $N \subset Z_0 \subset Z$ qatnaslar orınlı.

Pútin sanlar kópligi tártiplengen kóplik. Pútin sanlar kópliginiń eń kishi elementi de, eń úlken elementi de joq.

Pútin sanlar kópliginde qosıw, alıw hám kóbeytiw ámelleri anıqlanǵan bolıp, bul ámellerge qarata 1.1- punkttegi $1^0 - 4^0$ qásiyetler menen birge mına qásiyetler de orınlı:

$5^0. \forall q \in Z$ element ushın $q + (-q) = 0$ bolatuǵın $-q$ element bar.

$$6^0. \forall q \in Z \text{ element ushın } q + 0 = 0 + q = q.$$

$$7^0. \forall q \in Z \text{ element ushın } q \cdot 0 = 0 \cdot q = 0.$$

2.3. Racional sanlar. $\frac{m}{n}$ ($m \in Z, n \in N$) qısqarmaytuǵın

bólshek kórinisinde anlatılatuǵın san *racional san* dep ataladı. Racional sanlar kópligi Q háribi menen belgilenedi:

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} (m \in Z, n \in N; (m, n) = 1) \right\}.$$

Racional sannıń berilgen anıqlamasına ekvivalent jáne bir anıqlamasın keltiremiz: sheksiz periodlı onlıq bólshek kórinisinde jazılatuǵın san *racional san* dep ataladı.

Hár bir natural san hám pútin san racional san, sonlıqtan $N \subset Z \subset Q$.

Racional sanlar kópłigi de tártiplengen kópłık. Racional sanlar kópłiginiń eń kishi elementi de, eń úlken elementi de joq.

Racional sanlar kópłiginde qosıw, alıw, kóbeytiw ámelleri menen birge bóliw ámeli de (nolden ózgeshe sanǵa) anıqlanǵan bolıp, bul ámellerge qarata mına qásiyetler orınlı ($r, t, s \in Q$)

1⁰. Kommutativlik: $r + t = t + r, \quad r \cdot t = t \cdot r.$

2⁰. Associativlik: $(r + t) + s = r + (t + s), \quad (r \cdot t) \cdot s = r \cdot (t \cdot s).$

3⁰. Distributivlik: $(r + t) \cdot s = r \cdot s + t \cdot s.$

4⁰. Nol sanınıń qásiyeti: $r + 0 = 0, \quad r \cdot 0 = 0.$

5⁰. Bir sanınıń qásiyeti: $r \cdot 1 = r.$

6⁰. Qarama- qarsı elementtiń bar bolıwı: $\forall r \in Q$ san ushın $r + (-r) = 0$ teńlik orınlı bolatuǵın $-r \in Q$ element bar.

7⁰. Keri elementtiń bar bolıwı: $\forall r \in Q \quad (r \neq 0)$ san ushın $r \cdot r^{-1} = 1$ teńlik orınlı bolatuǵın $r^{-1} \in Q$ element bar.

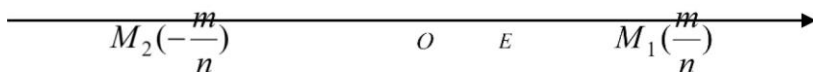
8⁰. $\forall r \in Q, t \in Q, s \in Q$ sanlar ushın $r > t$ teńsizlikten $r + s > t + s$ teńsizlik kelip shıǵadı.

9⁰. $\forall r \in Q, t \in Q, s \in Q (s > 0)$ sanlar ushın $r > t$ teńsizlikten $r \cdot s > t \cdot s$ teńsizlik kelip shıǵadı.

10⁰. Qálegen eki oń r hám t racional sanlar ushın $n \cdot r > t$ bolatuǵın n natural san bar. Bul qásiyet, ádette, *Arximed aksioması* dep ataladı.

2.4. Racional sanlar kópłigin keńeytiw zárúrliǵı. Málim bir O noqat (sanaq bası), uzınlıǵın 1 ge teń dep qabıl qılınatuǵın OE masshtab kesindisi hám oń baǵıt (ádette O noqattan E noqatqa qarap) saylap alınǵan tuwrı sızıqtı *sanlar kósheri* dep ataymız. *Sanlar kósherinde hár bir racional sanǵa málim bir noqat sáykes qoyıladı.* Haqıyqatında da, mektep matematika kursınan uzınlıǵı OE masshtab kesindisiniń uzınlıǵınıń $1/n$ (n – qálegen natural san) bólegin quraytuǵın kesindini qurıw jolı málim, demek, uzınlıǵı masshtab kesindisiniń uzınlıǵına m/n (m, n – qálegen

natural sanlar) qatnasta bolğan kesindini de qurıwımız múmkin. Usınday kesindini O noqattan ońǵa (shepke) jaylastırıp, biz $\frac{m}{n}$ ($-\frac{m}{n}$) racional sanǵa sáykes keletuǵın M_1 (M_2) noqatı alamız (1- súwret).



1- súwret

Endi, *sanlar kósheriniń hár bir noqatına racional san sáykes kele bermeytuǵının* atap ótemiz. Mısalı, eger M noqat OM kesindiniń uzınlıǵı tárepi OE masshtab kesindisi bolğan kvadrattıń diagonalınıń uzınlıǵına teń bolatuǵınday qılıp saylap alınsa, onda OM kesindiniń x uzınlıǵı $x^2 = 2$ tenlemenıń sheshimi bolıp, racional san bolmaydı. Bul kórsetilgen M noqatqa racional san sáykes kelmeytuǵının bildiredi.

Racional sanlar kópligin sanlar kósheriniń hár bir noqatına keńirek bolğan kóplikten bazı bir san sáykes keletuǵınday (yaki usı keńirek sanlar kópliginiń járdeminde sanlar kósheriniń hár bir OM kesindisiniń uzınlıǵın ańlatıw múmkin bolatuǵınday) qılıp keńeytiw hám usı keńirek bolğan sanlar kópligin úyreniw talabı tábiyiy ráwishte hasıl boladı.

Racional sanlar kópligin keńeytiwdiń bir- birine ekvivalent bolğan bir neshe usılları (Koshi, Kantor, Veyershtass hám Dedekind usılları) bar. Biz Dedekind usılın keltiremiz.

2.5. Racional sanlar kópligindegi kesim. Q racional sanlar kópliginde orınlangan kesim túsiniǵı menen tanısamız.

1-anıqlama. Eger Q racional sanlar kópligi tómendegi shártlerdi qanaatlandıratuǵın A hám B kópliklerge bóleklense, onda A hám B kóplikler Q racional sanlar kópliginde *kesim orınladı* dep aytıladı

- 1) $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset,$
- 2) $A \cup B = Q,$
- 3) $\forall x \in A, \forall y \in B \Rightarrow x < y.$

Bul anıqlamadağı birinshi shárt A hám B kóplikler bos emesligin, ekinshi shárt hár bir racional san yaki A kóplikke, yaki B kóplikke derek bolıwın, al úshinshi shárt A kóplikke derek hár bir x racional san B kóplikke derek hár bir y racional sannan kishi ekenin anlatadı.

Ádette kesim (A, B) simvolı menen belgilenip, A kóplik kesimniń *tómengi klası*, al B kóplik kesimniń *joqarǵı klası* dep ataladı.

Kesim anıqlamasınan tikkeley tómendegishe juwmaq shıǵarıwımız múmkin:

1⁰. (A, B) kesim Q kóplikte orınlangan kesim bolıp, $a \in A$ bolsa, onda $a_1 < a$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı $\forall a_1 \in Q$ san kesimniń tómengi klası bolǵan A kóplikke derek boladı.

2⁰. (A, B) kesim Q kóplikte anıqlangán kesim bolıp, $b \in B$ bolsa, onda $b_1 > b$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı $\forall b_1 \in Q$ san kesimniń joqarǵı klası bolǵan B kóplikke derek boladı.

Q kóplikte orınlangan (A, B) kesim tek úsh túrli bolıwı múmkin:

1. Kesimniń A tómengi klasınıń eń úlken elementi (r_0 – racional san) bar, al B joqarı klasınıń eń kishi elementi joq. Bul jaǵdayda r_0 san A kópliktiń tuyıqlawshı elementi boladı.

2. Kesimniń A tómengi klasınıń eń úlken elementi joq, al B joqarı klasınıń eń kishi elementi (r'_0 – racional san) bar. Bul jaǵdayda r'_0 san B kópliktiń tuyıqlawshı elementi boladı.

3. Kesimniń A tómengi klasınıń eń úlken elementi joq, al B joqarı klasınıń eń kishi elementi joq. Bul jaǵdayda A kópliktiń de, B kópliktiń de tuyıqlawshı elementi joq.

Q kóplikte hám A tómengi klasınıń eń úlken elementi bar, hám B joqarı klasınıń eń kishi elementi bar bolǵan (A, B) kesim joq. Bunı dálilleymiz.

Meyli, Q kóplikte usınday (A, B) kesim bar bolsın. a_0 – A kópliktiń eń úlken elementi, al b_0 – B kópliktiń eń kishi elementi bolsın. Onda kesimniń anıqlaması boyınsha $a_0 < b_0$.

$a_0 < \frac{a_0 + b_0}{2} < b_0$ teńsizlik orınlı. $\frac{a_0 + b_0}{2}$ racional san A kóplikke derek emes, sebebi a_0 – A kópliktiń eń úlken elementi hám $a_0 < \frac{a_0 + b_0}{2}$. Tap usınday $\frac{a_0 + b_0}{2}$ racional san B kóplikke derek emes, sebebi b_0 – B kópliktiń eń kishi elementi hám $\frac{a_0 + b_0}{2} < b_0$. Demek, $\frac{a_0 + b_0}{2}$ racional san A kóplikke de, B kóplikke de derek emes. Bul kesim anıqlamasına qarama- qarsı. Solay etip, tómengi klasınıń eń úlken elementi bar, joqarǵı klasınıń eń kishi elementi bar kesim joq eken.

Joqarıdaǵı birinshi hám ekinshi túr kesimlerde tómengi yaki joqarǵı klassları tuyıq bolıp, tuyıqlawshı elementlerdi bir klasstan ekinshisine ótkizip, hámme waqıt bir túrdegi kesimge-tómengi klası ashıq, al joqarǵı klası tuyıq bolǵan kesimge keltiriw múmkin. Bunnan bılay biz bir túrdegi kesimdi, tómengi klasınıń eń úlken elementi joq (ashıq klass), al joqarǵı klasınıń eń kishi elementi bar (tuyıq klass) kesimdi, qaraymız. Bunday kesimler *racional kesim* dep ataladı.

Hár bir $r \in Q$ racional san ushın Q kóplikte A kóplik ashıq klass, B kóplik tuyıq klass, tuyıqlawshı element r sannıń ózi bolǵan (A, B) kesimdi hár dayım orınlaw múmkin. Demek, Q kóplikten alınǵan hár bir racional sanǵa bul kóplikte orınlangan racional kesim sáykes keledi.

Kerisinshe, Q kóplikte A kóplik ashıq klass, B kóplik tuyıq klass, tuyıqlawshı element r san bolǵan (A, B) kesim orınlangan bolsa, bul kesim r racional sandı ańlatadı. Demek, Q kóplikte orınlangan hár bir racional kesim bir racional sandı anıqlaydı.

Solay etip, Q kóplik elementleri menen Q kóplikte orınlangan racional kesimler kópligi elementleri arasında bir mánisli sáykeslik ornatıladı.

Racional sanlar kópliginde orınlangan úshinshi túrdegi kesim- hám tómengi klası, hám joqarǵı klası ashıq bolǵan kesim, *irrational kesim* dep ataladı.

2-anıqlama. Racional sanlar kópliginde orınlangan irrational kesim *irrational sandı anıqlaydı* dep ayıladı.

3-§. Haqıyqıy sanlar. Haqıyqıy sanlar kópliginiń qásiyetleri

Racional sanlar kópliginde orınlangan kesim eki túrde- racional hám irrational kesimler bolıp, racional kesim racional sandı, al irrational kesim irrational sandı anıqlaytuǵının biz joqarıda kórdik.

3-anıqlama. Racional hám irrational sanlar ulıwma atama menen *haqıyqıy sanlar* dep ataladı.

Haqıyqıy sanlar kópligi R háribi menen belgilenedi.

Usı kópliktiń qásiyetlerin qaraymız.

1⁰. *Haqıyqıy sanlar kópligi tártiplengen kóplik.* Dáslep haqıyqıy sanlar kópliginde teń, úlken hám kishi túsinikleri kirgizemiz. Meyli, $x, y \in R$ sanlar berilgen bolsın. Hár bir

haqiqiy san racional sanlar kópiginde orınlangan kesim menen anıqlanadı. Demek, x hám y sanlardı anıqlawshı kesimler orınlangan: $x = (A, B)$, $y = (A', B')$. Bul kesimlerdiń tómengi klassları ushın ya $A = A'$ (bul jaǵdayda álbette $B = B'$ boladı), ya $A \neq A'$ (bul jaǵdayda $B \neq B'$) qatnaslardıń biri orınlı.

Eger $A = A'$ bolsa, (A, B) hám (A', B') kesimler óz-ara teń dep ataladı: $(A, B) = (A', B')$. Bul jaǵdayda kesimler anıqlaǵan sanlar da bir-birine teń dep ataladı: $x = y$.

Endi, meyli, $A \neq A'$ bolsın. Bul jaǵdayda ya A klassqa derek, biraq A' klassqa derek bolmaǵan $r_1 \in Q$ element bar, ya A klassqa derek bolmaǵan, biraq A' klassqa derek bolǵan $r_2 \in Q$ element bar. Birinshi jaǵdayda $r_1 \in A \cap B'$ hám kesim anıqlaması boyınsha $A' \subset A$. Al ekinshi jaǵdayda $r_2 \in B \cap A'$ hám $A \subset A'$.

Solay etip, $A \neq A'$ bolǵanda ya $A' \subset A$, ya $A \subset A'$ boladı eken.

Eger $A \subset A'$ bolsa, (A, B) kesim (A', B') kesimnen kishi dep, al sáykes x haqiqiy san y sannan kishi dep ataladı: $x < y$.

Eger $A \supset A'$ bolsa, (A, B) kesim (A', B') kesimnen úlken dep, al sáykes x haqiqiy san y sannan úlken dep ataladı: $x > y$.

Solay etip, qálegen eki x hám y haqiqiy sanlar ushın $x < y$, $x = y$, $x > y$ qatnaslardıń birewi hám tek birewi orınlı boladı.

Endi $x, y, z \in R$ haqiqiy sanlar ushın $x < y$, $y < z$ teńsizliklerden $x < z$ teńsizlik kelip shıǵıwın dálilleymiz. Meyli, bul kesimlerdi anıqlawshı kesimler

$$x = (A, B), \quad y = (A', B'), \quad z = (A'', B'') \quad \text{bolsın.}$$

Anıqlama boyınsha

$$x < y \Rightarrow A \subset A', \quad y < z \Rightarrow A' \subset A''.$$

Biz kópplikler teoriyasınan $A \subset A', \quad A' \subset A'' \Rightarrow A \subset A''$ bolatuǵının bilemiz. Bul $x < z$ bolatuǵının bildiredi. Demek, haqıyqıy sanlar kóppligi tártiplengen kópplik.

Haqıyqıy sanlar arasındaǵı teń, kishi hám úlken túsinipleri, dara jaǵdayda, bul sanlar racional sanlar bolǵanda racional sanlar arasındaǵı teń, kishi hám úlken túsinipleri menen birdey boladı.

2⁰. *Haqıyqıy sanlar kóppligi tıǵız kópplik.* Meyli, $x, y \in R, \quad x < y$ bolsın. $x < r < y$ teńsizliklerdi qanaatlandırıwshı r racional san bar ekenin dálilleymiz. Q racional sanlar kópliginde orınlangan $(A, B), \quad (A', B')$ kesimler x hám y sanlardı anıqlasın: $x = (A, B), \quad y = (A', B')$. Onda $x < y$ teńsizlikten $A \subset A'$ qatnas kelip shıǵadı. Demek, A' kóplikte $r_0 \in A', \quad r_0 \notin A$ bolatuǵın r_0 racional san bar. Onda $r_0 \in B$ boladı hám demek, $x \leq r_0$ teńsizlik orınlı boladı. Ekinshi tárepten, $y = (A', B'), \quad r_0 \in A'$ bolǵanlıqtan hám A' kópliktiń eń úlken elementi joqlıǵı sebepli $r_0 < r$ hám $r < y$ bolatuǵın $r \in A'$ racional san bar. Nátiyjede $x \leq r_0 < r < y$ teńsizliklerge iye bolamız. Bunnan $x < r < y$ teńsizlikler orınlı bolatuǵını kelip shıǵadı. Usı usıl menen $x, y \in R, \quad x > y$ bolǵanda $x > r > y$ teńsizliklerdi qanaatlandırıwshı r racional san bar ekeni de dálillenedi. Solay etip, *bir- birine teń bolmaǵan eki haqıyqıy san arasında keminde bir haqıyqıy san bar.* Al bunnan olar arasında sheksiz kóp haqıyqıy san bar ekeni kelip shıǵadı. Demek, haqıyqıy sanlar kóppligi tıǵız kópplik.

Racional sanlar kópiginin tıǵızlıǵı mına tastıyqlaw menen anıqlanadı: *bir- birine teń bolmagan eki racional san arasında keminde bir racional san bar.*

4-§. Haqıyqıy sanlar kópiginin tolıqlıǵı.

Dedekind teoreması

Eger haqıyqıy sanlar kópiginde kesim túsiniǵı kiritilse racional sanlar kópigindeǵidey haqıyqıy sanlar kópigin de keńeytiw zárurlıǵı payda boladıma degen sorawdıń qoyılıwı tábiyiy.

4-anıqlama. R haqıyqıy sanlar kópigi tómendegi shártlerdi qanaatlandıırıwshı E hám E' kópiklerge bólinse, onda bul kópikler R kópikte *kesim orınlaydı* dep ataladı

1) $E \neq \emptyset, E' = \emptyset,$

2) $E \cup E' = R,$

3) $\forall x \in E, \forall x' \in E' \Rightarrow x < x'.$

Ádette bul kesim (E, E') simvolı menen belgilenedi. E kópik kesimniń *tómengi klası*, al E' kópik kesimniń *joqarǵı klası* dep ataladı.

Racional sanlar kópigindegi sıyaqlı haqıyqıy sanlar kópiginde de tómengi klasınıń eń úlken elementi bar, joqarǵı klasınıń eń kishi elementi bar kesim orınlanbaǵan. Basqasha aytqanda, R kópikte hám tómengi klası, hám joqarǵı klası tuyıq kesim joq.

2-teorema (Dedekind). *Haqıyqıy sanlar kópiginde orınlanǵan hár bir kesim ushın tómendegi eki jaǵdaydıń tek birewi orınlı:*

a) *kesimniń tómengi klasınıń eń úlken elementi bar, joqarǵı klasınıń eń kishi elementi joq.*

b) *kesimniń tómengi klasınıń eń úlken elementi joq, joqarǵı klasınıń eń kishi elementi bar.*

Bul teoremanı oqıwshı óz betinshe dálillewi múmkin.

E hám E' kópiklerdiń tuyıqlawshı elementlerin birewinen ekinshisine ótkiziw jolı menen teoremada kórsetilgen eki túrdegi

kesimdi bir túrge keltiriw múmkin. Biz R kópikte orınlangan hár bir kesimdi tómengi klasınıń eń úlken elementi joq, al joqarǵı klasınıń eń kishi elementi bar kesim dep qaraymız. Bul Dedekind teoremasın tómendegishe aytıw múmkinshiligin beredi.

3-teorema. *Haqıyqıy sanlar kópliginde orınlangan hár bir kesim jalǵız bir haqıyqıy sandı anıqlaydı.*

$\forall \alpha \in R$ san járdeminde haqıyqıy sanlar kópliginde bul san joqarǵı klasına derek bolıp, bul klass elementleriniń eń kishisi bolǵan (E, E') kesim orınlaw múmkin. Kerisinshe, R kópikte (E, E') kesim orınlangan bolsa, bul kesimniń E' joqarı klasınıń eń kishi elementi bar bolıp, kesim usı sandı anılatadı.

Demek, R kópik hám bul kópikte orınlangan kesimler kópligi arasında bir mánisli sáykeslik bar.

Solay etip, R kópikti keńeytiw zárurlıǵı joq eken. Bul qásiyet haqıyqıy sanlar kópliginiń *tolıqlıq qásiyeti* dep ataladı.

5-§. Haqıyqıy sanlar ústinde arifmetikalıq ámeller hám olardıń qásiyetleri

5.1. Haqıyqıy sanlardıń qosındısı.

$\alpha, \beta \in R$ sanlar Q racional sanlar kópliginde orınlangan $(A, A'), (B, B')$ kesimler menen anıqlangan bolsın: $\alpha = (A, A'), \beta = (B, B')$. Kesimlerdiń A hám B tómengi klasslarınan sáykes túrde α hám β sanlardı alıp, olardıń $c := \alpha + \beta$ qosındısını dúzemiz. Usınday qosındılardan dúzilgen kópikti $C = \{c : c = \alpha + \beta, \alpha \in A, \beta \in B\}$ dep, bul kópiktiń Q kópikke toltırıwshısını $C' := Q \setminus C$ dep belgileyміз. Qurılıwı boyınsha $Q = C \cup C'$.

C hám C' kópikler Q racional sanlar kópliginde (C, C') kesim orınlauıǵının kórsetemiz. $\alpha = (A, A'), \beta = (B, B')$ kesimler Q kópikte orınlangan kesimler bolǵanı ushın

$$A \neq \emptyset, A' \neq \emptyset, A \cup A' = Q, \quad a \in A, \quad a' \in A' \Rightarrow a < a', \\ B \neq \emptyset, B' \neq \emptyset, B \cup B' = Q, \quad b \in B, \quad b' \in B' \Rightarrow b < b'.$$

Bunnan $C \neq \emptyset$. Soń $a + b < a' + b'$ bolǵanı ushın C kópplik joqarıdan shegaralanǵan bolıp, bul kóppliktiń dál joqarǵı shegarası bar: $\sup C =: \gamma$. A hám B kóppliklerdiń eń úlken elementi joq, sonlıqtan $a + b < \gamma$ ($a \in A, b \in B$). Onda $a' + b' \geq \gamma$ ($a' \in A', b' \in B'$) bolıp, $a' + b' \notin C$. Bunnan $a' + b' \notin Q \setminus C = C'$. Demek, $C' \neq \emptyset$. Sonıń menen birge $c = a + b \in C$ hám $c < c' = a' + b' \in Q \setminus C = C'$

Solay etip, C hám C' kópplikler Q racional sanlar kópliginde (C, C') kesim orınladı eken.

5-anıqlama. (C, C') kesim menen anıqlanatuǵın γ haqıyqıy san α hám β sanlardıń qosındısı dep ataladı hám $\gamma = \alpha + \beta$ dep belgilenedi.

Endi haqıyqıy sanlardı qosıw ámeliniń qásiyetlerin keltiremiz. Meyli, $\alpha, \beta, \gamma \in R$ bolsın. Tómenдеgi teńlikler orınlı:

$$1^0. \alpha + \beta = \beta + \alpha;$$

$$2^0. (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma);$$

$$3^0. \text{Nol sanı ushın } \alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha.$$

Bul qásiyetler ańsat dálillenedi. Bul qásiyetlerdi oqıwshı óz betinshe dálillewi múmkin.

Qosıw ámeliniń kelesi qásiyetin keltiriwden aldın $\alpha \in R$ sanǵa qarama- qarsı sandı anıqlaymız.

$\alpha \in R$ san Q racional sanlar kópliginde (A, A') kesim menen anıqlanǵan bolsın: $\alpha = (A, A')$. Racional sanlardıń $-A' = \{-a' : a' \in A'\}$, $-A = \{-a : a \in A\}$ kóppliklerin karaymız. Bul kópplikler Q kóplikte $(-A', -A)$ kesim orınladı.

6-anıqlama. $(-A', -A)$ kesim menen anıqlanatuǵın haqıyqıy san $\alpha \in R$ sanǵa qarama- qarsı san dep ataladı hám $-\alpha := (-A', -A)$ dep belgilenedi.

4^0 . $\forall \alpha \in R$ san ushın $\alpha + (-\alpha) = 0$ teńlik orınlı.

5^0 . Eger $\alpha, \beta \in R$ sanlar ushın $\alpha > \beta$ teńsizlik orınlı bolsa, onda $\forall \gamma \in R$ san ushın $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ teńsizlik orınlı.

Bul qásiyetlerdi oqıwshı óz betinshe dálillewi múmkin.

Berilgen haqıyqıy sanǵa qarama- qarsı sannıń anıqlanıwı eki haqıyqıy sannıń ayırması túsiniǵın kirgiziwge múmkinshilik beredi.

7-anıqlama. $\alpha + (-\beta)$ san α hám β sanlardıń *ayırması* dep ataladı hám $\alpha - \beta := \alpha + (-\beta)$ dep belgilenedi.

5.2. Haqıyqıy sanlardıń kóbeymesi. $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ haqıyqıy sanlar Q racional sanlar kópliginde orınlanǵan $(A, A'), (B, B')$ kesimler menen anıqlanǵan bolsın: $\alpha = (A, A'), \beta = (B, B')$. A hám B kópliklerdiń teris emes a hám b elementlerinen

$$\{a \cdot b : a \in A (a \geq 0), b \in B (b \geq 0)\}$$

kóplikti dúzemiz. Soń racional sanlardıń

$$C := Q_- \cup \{a \cdot b : a \in A (a \geq 0), b \in B (b \geq 0)\},$$

$$C' = Q \setminus C$$

kópliklerin qaraymız (bul jerde Q_- – teris racional sanlar kópligi). Bul C hám C' kóplikler Q kóplikte kesim dúzetuǵının tekseriw qıyın emes.

8-anıqlama. (C, C') kesim menen anıqlanatuǵın haqıyqıy san α hám β sanlardıń *kóbeymesi* dep ataladı hám $\alpha \cdot \beta$ dep belgilenedi: $\alpha \cdot \beta = (C, C')$.

$\forall \alpha, \beta \in R$ sanlar ushın bul sanlardıń kóbeymesi α hám β sanlardıń belgileri hár qıylı bolsa $-(\lceil \alpha \rceil \cdot \lceil \beta \rceil)$ kóbeyme kórinisinde, al birdey bolsa $\lceil \alpha \rceil \cdot \lceil \beta \rceil$ kóbeyme kórinisinde anıqlanadı.

Endi haqıyqıy sanlardı kóbeytiw ámeliniń qásiyetlerin keltiremiz. Meyli, $\alpha, \beta, \gamma \in R$ bolsın.

$$1^0. \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha,$$

$$2^0. (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma),$$

$$3^0. \alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha.$$

Bul qásiyetlerdi dálillew qıyın emes, olardı oqıwshı óz betinshe dálillewi múmkin.

Haqıyqıy sanlardı kóbeytiw ámeliniń kelesi qásiyetin keltiriwden aldın haqıyqıy sanǵa keri sandı anıqlaymız.

$0 < \alpha \in R$ san Q kóplikte orınlangan (A, A') kesim menen anıqlangan bolsın.

$$C := Q_- \cup \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{a'} : a' \in A' \right\},$$

$$C' = Q \setminus C$$

racional sanlar kópliklerin qaraymız. Bul kóplikler Q kóplikte (C, C') kesim orınlaytuǵının kóriw qıyın emes. Bunı oqıwshı óz betinshe dálillewi múmkin.

9-anıqlama. (C, C') kesim menen anıqlangan haqıyqıy san

$0 < \alpha \in R$ sanǵa keri san dep ataladı hám $\frac{1}{\alpha}$ dep belgilenedi:

$$\frac{1}{\alpha} = (C, C')$$

Eger $\alpha < 0$ bolsa, onda bul sanǵa keri san $\frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{|\alpha|}$ kóriniste anıqlanadı.

4⁰. Nolden ózgeshe $\forall \alpha \in R$ sanǵa keri $\frac{1}{\alpha}$ san bar hám

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1 \text{ teńlik orınlı.}$$

4-teorema. Eger $\alpha, \beta \in R$ ($\alpha \neq 0$) sanlar berilgen bolsa, onda $\alpha \cdot x = \beta$ teńlemenı qanaatlandırırwshı jalǵız bir haqıyqıy san bar.

10-anıqlama. $\beta \cdot \frac{1}{\alpha}$ san α hám β sanlardıń qatnası dep ataladı hám $\frac{\beta}{\alpha}$ dep belgilenedi.

5⁰. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in R$ sanlar ushın $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$ teńlik orınlı.

6⁰. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in R$ ($\gamma > 0$) sanlar berilgen bolsa, $\alpha > \beta$ teńsizlikten $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ teńsizlik kelip shıǵadı.

4- teoremanı hám 5⁰- 6⁰ qásiyetlerdi oqırwshı óz betinshe dálillewi múmkin.

5.3. Haqıyqıy sannıń dárejesi. Dáslep tómendegi eki lemmanı dálillewsiz keltiremiz.

1-lemma. Meyli, $(A, A') - Q$ kóplikte orınlanǵan qálegen kesim bolsın. $\forall \varepsilon > 0$ racional san berilse de, $a' - a < \varepsilon$ teńsizlikti qanaatlandıratuǵın $a \in A$, $a' \in A'$ racional sanlar bar.

2-lemma. $\alpha, \beta \in R$ sanlar berilgen bolsın. $\forall \varepsilon > 0$ racional san berilse de, $\exists a, a' \in Q$, $a < a'$ sanlar tabılıp,

$$\begin{aligned} a &\leq \alpha \leq a', \\ a &\leq \alpha \leq a', \text{ teńsizlikler orınlı bolsa, onda } \alpha = \beta \text{ boladı.} \\ a' - a &< \varepsilon \end{aligned}$$

a) Haqıyqıy sannıń pútın dárejesi. Biz joqarıda eki haqıyqıy sannıń kóbeymesiniń anıqlamasın berdik. n dana $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ haqıyqıy sanlardıń $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n$

kóbeymesi de usı jol menen anıqlanadı. Eger $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$ bolsa, onda $\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_n$ kóbeyme α sannıń n - dárejesi dep

ataladı hám α^n dep belgilenedi: $\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_n = \alpha^n$.

Bul keltirilgen anıqlamadan hám haqıyqıy sanlar ústindegi ámellerdiń qásiyetlerinen tómendegiler kelip shıǵadı. $\alpha, \beta \in R$ hám $n, m \in N$ bolsın.

$$\alpha^n \cdot \alpha^m = \alpha^{n+m},$$

1) Tómendegi teńsizlikler orınlı:

$$\alpha^n \cdot \beta^n = (\alpha \cdot \beta)^n,$$

$$(\alpha^n)^m = \alpha^{n \cdot m},$$

$$\frac{\alpha^n}{\alpha^m} = \alpha^{n-m} \quad (n > m);$$

2) eger $n > m$ hám $\alpha > 1$ bolsa, $\alpha^n > \alpha^m$ bolıp, al eger $0 < \alpha < 1$ bolsa, $\alpha^n < \alpha^m$ boladı.

3) eger $\alpha > \beta > 0$ bolsa, onda $\alpha^n > \beta^n$ boladı.

$\forall \alpha \in R \quad (\alpha \neq 0)$ san ushın bul sanǵa keri $\frac{1}{\alpha}$ san bar ekeni málim. $\underbrace{\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\alpha}}_n$ kóbeyme α sannıń $-n$ - dárejesi dep

ataladı hám α^{-n} dep belgilenedi: $\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}$.

$\alpha \neq 0$ sannıń nolınshi dárejesi 1 ge teń: $\alpha^0 = 1$.

b) Haqıyqıy sannan alınǵan túbir. Meyli $0 < \alpha \in R$ hám bazı bir $n \in N$ san berilgen bolsın.

11-anıqlama. $\xi^n = \alpha$ (*) teńlemenıń oń sheshimi α sannan alınǵan n - túbir dep ataladı hám ol $\sqrt[n]{\alpha}$ dep belgilenedi.

Bul anıqlamanıń korrektiligin, yaǵnıy (*) teńlemenıń ξ sheshimi barlıǵın hám jalǵız birew ekenin kórsetemiz.

Bunıń ushın Q kóplikti

$$A_n = Q_- \cup \{0\} \cup \{r : r \in Q, r > 0, r^n < \alpha\},$$

$$A'_n = \{r' : r' \in Q, r' > 0, r'^n > \alpha\}$$

kóplikler járdeminde jazıp alamız: $Q = A_n \cup A'_n$. Usılay dúzilgen A_n hám A'_n kóplikler Q kóplikte (A_n, A'_n) kesim dúzetuǵının kóriw qıyın emes. Bul kesim anıqlaytuǵın haqıyqıy sandı ξ dep belgileybiz: $\xi = (A_n, A'_n)$.

Joqarıdaǵı 1- lemmadan $\forall \varepsilon > 0$ racional san ushın $r' - r < \varepsilon$ teńsizlikti qanaatlandıratuǵın $r \in A_n$ hám $r' \in A'_n$ sanlar bar. Bul sanlardıń alınıwınan $0 < r < \xi < r'$ hám demek, $r^n < \xi^n < r'^n$ teńsizlikler orınlı.

A'_n kóplikte $0 < r < r' < r_0$ bolǵan r_0 sandı (bunday san hámme waqıt tabıladı) alsaq

$$r'^n - r^n = (r' - r)(r'^{n-1} + r \cdot r'^{n-2} + \dots + r^{n-2} \cdot r' + r^{n-1}) <$$

$$< (r' - r) \cdot n \cdot r_0^{n-1} < \varepsilon \cdot n \cdot r_0^{n-1}$$

teńsizlik orınlı boladı. Bunnan $\forall \varepsilon > 0$ racional san ushın (

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{n r_0^{n-1}} \text{ san boyınsha) sonday } r \in A_n \text{ hám } r' \in A'_n$$

sanlar tabılıp, $r^n < \xi^n < r'^n$ hám $r'^n - r^n < \varepsilon$ teńsizlikler orınlı boladı.

Ekinshi tárepten, (A_n, A'_n) kesimniń dúziliwi boyınsha $r^n < \alpha < r'^n$ teńsizlikler orınlı. Solay etip, 2- lemmanıń hámme shártleriniń orınlanatuǵının kórsettik. Usı lemma boyınsha $\xi^n = \alpha$ boladı.

Solay etip, (A_n, A'_n) kesim menen anıqlanǵan ξ san (*) teńlemenıń sheshimi boladı. Bul teńlemenıń sheshimi jalǵız

birew. Haqıyqatında da, eger ξ_1, ξ_2 sanlar (*) teńlemenin sheshimi bolsa, yaǵnıy $\xi_1^n = \alpha$, $\xi_2^n = \alpha$ bolsa, onda

$$\xi_1^n - \xi_2^n = (\xi_1 - \xi_2)(\xi_1^{n-1} + \xi_2 \xi_1^{n-2} + \dots + \xi_2^{n-2} \xi_1 + \xi_2^{n-1}) = 0$$

teńlikten $\xi_1 - \xi_2 = 0$, yaǵnıy $\xi_1 = \xi_2$ ekenligi kelip shıǵadı.

c) Haqıyqıy sannın racional dárejesi. Biz $\alpha \in R$ sannın pútın dárejesiniń, sonın menen birge $\alpha > 0$ sannan alınǵan n — dárejeli túbirdin anıqlamasın berdik. Endi $\alpha > 0$ sannın racional dárejesi túsinigin keltiremiz. Hár bir racional san qısqarmaytuǵın $r = \frac{m}{n}$ ($m \in Z, n \in N$) bólshek kórinisinde

ańlatılatuǵını málim. $\alpha > 0$ haqıyqıy sannın r racional dárejesi $\alpha^r = \alpha^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{\alpha})^m$ kóriniste anıqlanadı.

Meyli, $\alpha, \beta \in R_+$ (R_+ — oń racional sanlar kópłigi), $r_1, r_2 \in Q$ sanlar berilgen bolsın. Tómenдеgi ápiwayı qásiyetler orınlı;

$$1) \alpha^{r_1} \cdot \alpha^{r_2} = \alpha^{r_1+r_2};$$

$$2) (\alpha^{r_1})^{r_2} = \alpha^{r_1 \cdot r_2};$$

$$3) \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^r = \frac{\alpha^r}{\beta^r};$$

$$4) \alpha^{r_1} : \alpha^{r_2} = \alpha^{r_1-r_2};$$

$$5) (\alpha \cdot \beta)^r = \alpha^r \cdot \beta^r;$$

$$6) \alpha > 1 \text{ bolsa, } r_1 < r_2 \Rightarrow \alpha^{r_1} < \alpha^{r_2};$$

$$7) 0 < \alpha < 1 \text{ bolsa, } r_1 < r_2 \Rightarrow \alpha^{r_1} > \alpha^{r_2};$$

$\alpha = 1$ sannın qálegen racional dárejesi de, qálegen haqıyqıy dárejesi de 1 ge teń: $1^\alpha = 1$.

d) Haqıyqıy sannın haqıyqıy dárejesi. $\alpha > 1$ haqıyqıy san berilgen, al $\beta \in R$ san Q kópłikte orınlangan (B, B') kesim menen anıqlangán oń san bolsın: $\beta = (B, B')$, $\beta > 0$. Hámme teris haqıyqıy sanlar, nol hám α^b ($b \in B$) kórinisindegi oń haqıyqıy

sanlardan dúzilgen kóplicki E háribi, al bul kóplicki haqıyqıy sanlar kópligine tolıqtırırwshı kóplicki E' simvolı menen belgileymiz: $E' = R \setminus E$. Nátiyjede $R = E \cup E'$ kórinisinde jazıladı. E hám E' kóplickler R kóplickte (E, E') kesim orınlaydı. Haqıyqatında da, dúziliwi boyınsha E kóplick bos emes: $E \neq \emptyset$. Soń $\alpha^b < \alpha^{b'}$ ($b \in B, b' \in B'$) bolǵanı ushın E kóplick joqarıdan shegaralanǵan. Demek, $\sup E = \gamma$ bar. B kóplicktiń eń úlken elementi joq, sonlıqtan $\alpha < \gamma$. Onda $\gamma \leq \alpha^{b'}$ hám $\alpha^{b'} \notin E$ boladı. Bunnan $\alpha^{b'} \notin E'$. Demek, $E' \neq \emptyset$. E kóplicktiń hár bir elementi E' kóplicktiń qálegen elementinen kishi bolatuǵını anıq. Solay etip, E hám E' kóplickler R kóplickte (E, E') kesim orınlaydı.

12-anıqlama. (E, E') kesim menen anıqlanǵan haqıyqıy san α haqıyqıy sannıń β – dárejesi dep ataladı hám α^β dep belgilenedi: $\alpha^\beta = (E, E')$.

Eger β – san teris san bolsa, onda $\alpha^\beta = \frac{1}{\alpha^{-\beta}}$ dep qaraymız.

Eger $0 < \alpha < 1$ bolsa, onda $\alpha^\beta = (\frac{1}{\alpha})^{-\beta}$ dep alıp joqarıda qaralǵan jaǵdayǵa kelemiz. Oń haqıyqıy sannıń haqıyqıy dárejesi túsiniǵinen paydalanıp, mına teoremaǵa kelemiz.

5-teorema. Qálegen $\alpha \neq 1$ hám γ oń haqıyqıy sanlar ushın $\alpha^\beta = \gamma$ teńlemenıń sheshimi bar hám jalǵız birew.

13-anıqlama. Berilgen $\alpha \neq 1$ hám γ oń haqıyqıy sanlar ushın $\alpha^\beta = \gamma$ teńlemenıń β – sheshimi γ sannıń α tiykarlı logarifmi dep ataladı hám $\beta = \log_\alpha \gamma$ dep belgilenedi.

6-§. Haqıyqıy sannıń moduli hám onıń qásiyetleri

Endi haqıyqıy sannıń moduli (absolyut mánisi) túsiniǵin keltiremiz.

$\alpha \in R$ haqiqiy sanniń *moduli* (*absolyut mánisi*)

$$|\alpha| := \begin{cases} \alpha, & \alpha > 0, \\ 0, & \alpha = 0, \\ -\alpha, & \alpha < 0 \end{cases}$$

teńlik penen anıqlanadı.

Haqiqiy sanniń moduliniń qásiyetleri:

1⁰. $\forall x \in R$ san ushın $|x| \geq 0$, $|x| = |-x|$, $x \leq |x|$, $-x \leq |x|$ qatnaslar orınlı.

2⁰. $\forall x \in R$ san ushın $|x| < M$ ($M > 0$) hám $-M < x < M$ teńsizlikler teń kúshli.

3⁰. $\forall x \in R$ san ushın $|x| \leq M$ ($M > 0$) hám $-M \leq x \leq M$ teńsizlikler teń kúshli.

4⁰. $x, y \in R$ sanlardıń qosındısıń moduli bul sanlardıń modulleriniń qosındısınan kishi emes: $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Bul qásiyet qálegen sandaǵı haqiqiy sanlar ushın orınlı: *Sanlar qosındısıń moduli usı sanlardıń modulleriniń qosındısınan kishi emes.*

5⁰. $x, y \in R$ sanlardıń kóbeymesiniń moduli bul sanlardıń modulleriniń kobeymesine teń: $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

7⁰. $x, y \in R$ sanlardıń qatnasınıń moduli bul sanlardıń modulleriniń qatnasına teń: $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$ ($y \neq 0$).

7-§. Haqiqiy sanlardı geometriyalıq súwretlew

Biz hár bir racional sanǵa sanlar kósherinde bir noqat sáykes keletuǵının kórsettik. Sonıń menen birge racional bolmaǵan noqatlar da bar ekenin (mısalı, $\sqrt{2}$ sanı) anıqladıq.

Endi hár bir haqiqiy sanǵa da sanlar kósherinde bir noqat sáykes keletuǵının kórsetemiz. Bunıń ushın hár bir irracional sanǵa sanlar kósherinde bir noqat sáykes keletuǵının kórsetiw jetkilikli.

Biz haqiqiy sanlar kópligi tolıqlıq (úzliksizlik) qásiyetine iye ekenin kórsettik. Tuwrı sızıq noqatlarınıń kópligi de tolıqlıq qásiyetine iye. Dáslep tuwrı sızıq noqatlarınıń kópliginde orınlangan kesim anıqlamasın beremiz.

14-anıqlama. Eger l tuwrı sızıq noqatlarınıń kópligi tómendegi shártlerdi qanaatlandırıwshı $\mathcal{M}$ hám $\mathcal{P}$ kópliklerge bóleklense, onda $\mathcal{M}$ hám $\mathcal{P}$ kóplikler l kóplikte *kesim* orınlaydı dep ayıladı hám bul kesim $(\mathcal{M}, \mathcal{P})$ simvolı menen belgilenedi

$$1^0. \mathcal{M} \neq \emptyset, \mathcal{P} \neq \emptyset.$$

$$2^0. \mathcal{M} \cup \mathcal{P} = l,$$

3⁰. Sanlar kósherinde $\forall M \in \mathcal{M}$ noqat $\forall P \in \mathcal{P}$ noqattan shepte jaylasqan.

Tuwrı sızıqtıń úzliksizlik qásiyeti. l tuwrı sızıq noqatlarınıń kópliginde orınlangan hár bir $(\mathcal{M}, \mathcal{P})$ kesim tuwrı sızıqtıń jalğız bir M noqatın anıqlap, bul noqat ya $\mathcal{M}$ kópliktiń eń oń noqatı, ya $\mathcal{P}$ kópliktiń eń shep noqatı boladı.

7.1. Irracional sanlardı geometriyalıq súwretlew. Meyli, bazı bir α irracional san berilgen bolıp, bul san Q racional sanalar kópliginde orınlangan (A, A') kesim menen anıqlangán bolsın: $\alpha = (A, A')$. Bunda A kóplikte eń úlken, al A' kóplikte eń kishi element joq. l tuwrı sızıqta A hám A' kóplikler dúzgen racional noqatlar kópliklerdi, sáykes túrde, $\overline{A}$ hám $\overline{A'}$ dep belgileymiz.

$\overline{A}$ kóplik noqatları ishinde eń oń noqat, al $\overline{A'}$ kóplik noqatları ishinde eń shep noqat joq ekeni anıq. l tuwrı sızıqtıń shep tárepinde $\overline{A}$ kópliktiń keminde bir noqatı bar noqatlardan dúzilgen kóplikti C háribi menen, al bul kóplikti l tuwrı sızıqqa tolıqtırırıwshı kóplikti C' simvolı menen belgileymiz: $C' = l \setminus C$.

Bul C hám C' kópplikler I tuwrı sızıqta kesim orınlaydı. Usını kórsetemiz.

$A \neq \emptyset$ bolǵanı ushın $a \in A$ racional san bar. I tuwrı sızıqta bul sanǵa sáykes keletuǵın P_α noqat $\bar{A}$ kóplikke derek. Demek, $P_\alpha \in C$. Bul $C \neq \emptyset$ ekenin bildiredi. $C' \neq \emptyset$ ekeni de usıǵan uqsas kórsetiledi.

C hám C' kóppliklerdiń dúziliwinen $C \cup C' = I$ hám C kópliktiń hár bir noqatı C' kópliktiń qálegen noqatınan shepte jaylasatugını kelip shıǵadı. Demek, C hám C' kópplikler I tuwrı sızıqta (C, C') kesim orınlaydı. Tuwrı sızıqtıń qásiyeti boyınsha (C, C') kesim jalǵız bir noqattı anıqlaydı. Bul noqattı P_α dep belgileymiz. $\bar{A}$ kóplikte eń oń noqat bolmaǵanı ushın $P_\alpha \notin \bar{A}$, sonıń menen birge, $\bar{A}'$ kóplikte eń shep noqat bolmaǵanı ushın $P_n \notin \bar{A}'$. Demek, $P_n \notin \bar{A} \cup \bar{A}'$ bolıp, bul noqat racional sanǵa sáykes keliwshi noqat bolmaydı. Usı P_α noqattı α irracional sanǵa sáykes qoyamız.

7.2. Haqıyqıy sanlar kópligi menen tuwrı sızıq noqatlarınń kópligi arasındǵı bir mánisli sáykeslik. Biz hár bir $\alpha \in R$ haqıyqıy sanǵa I tuwrı sızıqta bir P_α noqat sáykes qoyılatuǵının kórdik. Endi kerisinshe, I tuwrı sızıqta bir noqatına bir haqıyqıy san sáykes qoyılatuǵının kórsetemiz.

Sanlar kósherinde bazı bir P noqat alayıq, bul noqat, meyli, O noqattan ońda jatsın. P noqat sanlar kósherinde OP kesindi hasıl qıladı. OE masshtab kesindisin OP kesindi boylap jaylastıramız. Bunda tómendegi eki jaǵday bolıwı múmkin:

1) OE kesindi OP kesindide a_0 (a_0 — pútın san) mártebe tolıq jaylasadı. Bul jaǵdayda OP kesindiniń oń ushı bolǵan P noqatqa usı a_0 pútın san sáykes qoyıladı. a_0 san P noqat

koordinatası (abscissası) dep ataladı. Demek, bul jaǵdayda p noqatqa a_0 pútın san sáykes qoyıladı.

2₁) OE kesindi OP kesindide a_0 (a_0 – pútın san) mártebe jaylasıp, OP kesindiden SP kesindi artıp qalıwı yaqı OE kesindi OP kesindide $a_0 + 1$ mártebe jaylasqanda OP kesindige PQ kesindi jetpey qalıwı múmkin. Bul jaǵdayda OP kesindiniń ón ushı bolǵan p noqatqa a_0 sandı «kemisi» menen, al $a_0 + 1$ sandı «artıǵı» menen sáykes qoyıw múmkin. p noqatqa sáykes keletuǵın haqıyqıy sandı tabıw maqsetinde OE masshtab kesindisiniń $\frac{1}{10}$ bólegin alıp, onı SP kesindi boylap jaylastıramız.

Bunda jáne mına eki jaǵday bolıwı múmkin:

1₂) OE kesindiniń $\frac{1}{10}$ bólegi SP kesindide a_1 (a_1 – pútın san) mártebe jaylasadı, bul jerde $a_1 = 0, 1, 2, \dots, 9$ sanlarınń biri. Bul jaǵdayda, p noqatqa $a_0 + \frac{a_1}{10}$ san sáykes qoyıladı.

2₂) OE kesindiniń $\frac{1}{10}$ bólegi SP kesindide a_1 (a_1 – pútın san) mártebe jaylasıp, SP kesindiden S_1P kesindi artıp qalıwı yaqı OE kesindiniń $\frac{1}{10}$ bólegi PA kesindide $a_1 + 1$ mártebe jaylasqanda AQ kesindi jetpey qalıwı múmkin. Bul jaǵdayda p noqatqa $a_0, a_1 = a_0 + \frac{a_1}{10}$ san «kemisi» menen, al

$a_0, a_1 + \frac{1}{10} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}$ san «artıǵı» menen sáykes qoyıladı.

Bul jaǵdayda p noqatqa sáykes keletuǵın sandı izlew procesi dawam etedi. Bul processti n mártebe tákirarlaǵanda jáne mına eki jaǵday bolıwı múmkin:

1_n) OP kesindide OE kesindi a_0 mártebe, OE kesindiniń $\frac{1}{10}$ bólegi a_1 mártebe, OE kesindiniń $\frac{1}{10^2}$ bólegi a_2 mártebe h. t. b., OE kesindiniń $\frac{1}{10^n}$ bólegi a_n mártebe jaylasadı. Bul jaǵdayda P noqatqa

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n}$$

san sáykes qoyıladı.

2_n) P noqatqa sáykes keletuǵın sandı izlew procesi tamamlanbaydı. Bul jaǵdayda P noqatqa

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n}$$

san «kemisi» menen al

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n + 1}{10^n}$$

san «artıǵı» menen sáykes qoyıladı.

Bul process sheksiz dawam etsin deyik. Onda P noqatqa sáykes keletuǵın sandı tabıw ushın joqarıda alınǵan sanlardan ($\forall n \in N$ ushın)

$$C = \left\{ r : r \in Q, \quad r < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} \right\},$$

$$C' = \left\{ r : r \in Q, \quad r > a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} \right\}$$

kópliklerdi dúzemiz. Bul kóplikler Q kóplikte (C, C') kesim orınlaydı hám bul kesim bazı bir α haqıyqıy (irrational) sandı anıqlaydı: $\alpha = (C, C')$. P noqatqa áne usı α sandı sáykes qoyamız.

P noqat O noqattan shepte jatqan jaǵdayda da oǵan sáykes keletuǵın haqıyqıy san tabıladı, bul san teris boladı.

Solay etip, tuwrı sıızıqta alınǵan hár bir noqatqa bir haqıyqıy san sáykes qoyıladı eken.

Demek, tuwrı sıziqta alınğan hár bir noqatqa bir haqıyqıy san hám kerisinshe, hár bir haqıyqıy sanğa tuwrı sıziqta bir noqat sáykes keledi: $P_\alpha \rightarrow \alpha, \quad \alpha \rightarrow P_\alpha \quad (\alpha \in R, \quad P_\alpha \in I).$

8-§. Shegaralanğan sanlı kóplikler

Bul paragrafta biz qálegen haqıyqıy sanlar kópligin qaraymız, bunday kóplikti $\{x\}$ simvolı menen belgileymiz, al bul kóplikke derek sanlardı bul kópliktiń *elementleri* yaki *noqatları* dep ataymız. Qaralatuǵın $\{x\}$ kópliktiń keminde bir elementke iye bolıwın (bos kóplik bolmawın) talap etemiz.

8.1. Joqarıdan hám tómennen shegaralanğan kóplikler.

1-anıqlama. Eger $\forall x \in \{x\}$ element $x \leq M$ ($x \geq m$) teńsizlikti qanaatlandıratuǵın M sanı (m sanı) tabılsa, onda $\{x\}$ kóplik *joqarıdan (tómennen) shegaralanğan* dep, al M sanı *joqarǵı shegarası* (m sanı *tómengi shegarası*) dep ataladı.

Qálegen joqarıdan (tómennen) shegaralanğan $\{x\}$ kóplik sheksiz kóp joqarǵı (tómengi) shegaraǵa iye. Haqıyqatında da, eger M sanı (m sanı) $\{x\}$ kópliktiń joqarǵı (tómengi) shegaralarınıń biri bolsa, onda $\forall M' > M$ ($\forall m' < m$) sanı da kópliktiń joqarı (tómengi) shegarası boladı. Mısalı, hámme teris (oń) haqıyqıy sanlar kópligi joqarıdan (tómennen) shegaralanğan. Bul kópliktiń joqarǵı (tómengi) shegarası sıpatında qálegen teris emes (oń emes) sandı alıw múmkin. Natural sanlar (oń emes pütün sanlar) kópligi tómennen (joqarıdan) shegaralanğan. Bul kópliktiń tómengi (joqarǵı) shegarası sıpatında qálegen $m \leq 1$ ($M \geq 0$) sandı alıw múmkin.

2-anıqlama. Hám joqarıdan, hám tómennen shegaralanğan kóplik *shegaralanğan kóplik* dep ataladı.

Basqasha aytqanda, eger $\forall x \in \{x\}$ element $m \leq x \leq M$) teńsizliklerdi qanaatlandıratuǵın M hám m sanları tabılsa,

onda $\{x\}$ kóplik *shegaralanğan kóplik* dep ataladı. Solay etip, sanlar kósherindegi shegaralanğan kóplik degende tolıǵı menen bazı bir kesindige jaylastırıw múmkin bolğan kóplikti túsinemiz.

Joqarıdan shegaralanğan kópliktiń joqarı shegaralarınıń ishindegi eń kishisiniń hám tómennen shegaralanğan kópliktiń tómengi shegaralarınıń ishindegi eń úlkeniniń bar bolıwı haqqındaǵı mäseleniń qoyılıwı tábiyiy.

3-anıqlama. Joqarıdan (tómennen) shegaralanğan $\{x\}$ kópliktiń joqarǵı shegaralarınıń eń kishisi (tómengi shegaralarınıń eń úlkeni) bul kópliktiń *dál joqarǵı (dál tómengi) shegarası* dep ataladı hám $\sup\{x\}$ ($\inf\{x\}$) simvolı menen belgilenedi.

Bul anıqlamanı basqasha beriwge de boladı: Eger tómendegi eki shárt orınlansa, onda $\bar{x}$ sanı ($\underline{x}$ sanı) joqarıdan (tómennen) shegaralanğan $\{x\}$ kópliktiń *dál joqarǵı shegarası (dál tómengi shegarası)* dep ataladı:

1) $\forall x \in \{x\}$ element $x \leq \bar{x}$ ($x \geq \underline{x}$) teńsizlikti qanaatlandıradı;

2) $x' < \bar{x}$ ($x'' > \underline{x}$) shártti qanaatlandıratuǵın qálegen $x' \in \{x\}$ ($x'' \in \{x\}$) element ushın $x > x'$ ($x < x''$) teńsizlikti qanaatlandıratuǵın $x \in \{x\}$ element bar.

Bul anıqlamadaǵı 1) shárt $\bar{x}$ sanı ($\underline{x}$ sanı) $\{x\}$ kópliktiń joqarǵı (tómengi) shegaralarınıń biri ekenin, al 2) shárt bul joqarǵı shegaralardıń eń kishisi (tómengi shegaralardıń eń úlkeni) bolıp, onı kishireytiw (úlkeytiw) múmkin emesligin bildiredi.

Kópliktiń dál joqarǵı (dál tómengi) shegarası ózine derek bolıwı da, bolmawı da múmkin.

8.2. Kópliktiń dál shegaralardıń bar bolıwı.

1-teorema (tiykarǵı teorema). *Joqarıdan (tómennen) shegaralanğan kópliktiń dál joqarǵı (dál tómengi) shegarası bar.*

Dálillew: Biz qálegen joqarıdan shegaralanğan kópliktiń dál joqarǵı shegarası bar ekenin dálilleybiz. Hár bir tómennen shegaralanğan kópliktiń dál tómengi shegarası bar ekeni usıǵan uqsas dálillenedi.

Meyli, $\{x\}$ kóplik joqarıdan shegaralanğan bolsın, yaǵnıy $\forall x \in \{x\}$ element $x \leq M$ teńsizlikti qanaatlandıratuǵın M sanı tabılsın hám $\{x\}$ kópliktiń elementleri arasında eń úlkeni bar bolsın. Onı x_0 dep belgileyik. Demek, $\forall x \in \{x\}$ ushın $x \leq x_0$ bolıp, x_0 san $\{x\}$ kópliktiń joqarǵı shegaralarınıń biri boladı. Biraq $\{x\}$ kópliktiń joqarǵı shegarası bolatuǵın hár bir M san x_0 sannan kishi emes, yaǵnıy $x_0 \leq M$, sebebi $x_0 \in \{x\}$. Al bul x_0 san $\{x\}$ kópliktiń joqarǵı shegaralarınıń eń kishisi bolatuǵının bildiredi. Bul jaǵdayda teorema dálillendi.

Endi $\{x\}$ kópliktiń elementleri arasında eń úlkeni joq bolǵan jaǵdaydı qaraymız. $\{x\}$ kópliktiń joqarı shegaralarından dúzilgen kóplikti F' dep, al F' kóplikke derek bolmaǵan hámme haqıyqıy sanlar kópligin F dep belgileybiz. $\{x\} \subset F'$ boladı. F hám F' kóplikler R haqıyqıy sanlar kópliginde (F, F') kesim orınladı. Dedekind teoreması boyınsha bul kesim baǵı bir haqıyqıy sandı anıqlaydı: $\alpha = (F, F')$. Bul san F kópliktiń, demek, $\{x\} \subset F$ bolǵanlıqtan $\{x\}$ kópliktiń de joqarǵı shegarası, yaǵnıy $\alpha \in F'$. Sonıń menen birge bul san F' kópliktiń elementleriniń eń kishisi. Teorema dálillendi.

Saldar. *Hár bir shegaralanğan $\{x\}$ kópliktiń hám dál joqarǵı, hám dál tómengi shegaraları bar hám $\inf \{x\} \leq \sup \{x\}$.*

8.3. Kópliktiń dál joqarǵı hám dál tómengi shegaralarınıń qásiyetleri.

1^0 . Eger $\{x\}$ kóplik joqarıdan shegaralanğan kóplik hám $E \subset \{x\}$ bolsa, onda $\sup E \leq \sup \{x\}$.

Dálillew. Tiykargı teorema boyınsha $\{x\}$ kópliktiń dál joqarǵı shegarası bar: $\sup\{x\} = \alpha$. Endi $E \subset \{x\}$ bolǵanlıqtan E kóplik te joqarıdan shegaralangán, meyli, $\sup E = \alpha_1$ bolsın. Biz $\alpha_1 \leq \alpha$ bolatuǵının dálilleybiz. Kerisinshe uyǵarayıq, yaǵnıy $\alpha_1 > \alpha$ bolsın. Onda $\alpha_1 > a > \alpha$ bolatuǵın a racional san tabıladı. α_1 san E kópliktiń dál joqarı shegarası bolǵanlıqtan $\alpha_1^* > a$ bolatuǵın $\alpha_1^* \in E$ san tabıladı. Demek, $\alpha_1^* > \alpha$ boladı. Biraq, ekinshi tárepten, $E \subset \{x\}$ hám $\sup\{x\} = \alpha$ bolǵanlıqtan $\alpha_1^* \leq \alpha$ teńsizlik orınlı. Qarama-qarsılıqqa kelemiz. Solay etip, $\alpha_1 \leq \alpha$ yaǵnıy $\sup E \leq \sup\{x\}$ boladı.

2⁰. Eger $\{x\}$ kóplik tómennen shegaralangán kóplik hám $E \subset \{x\}$ bolsa, onda: $\inf E \geq \inf\{x\}$.

Bul qásiyet 1⁰- qásiyetey dálillenedi.

3⁰. Eger $\{x\}$ kóplik shegaralangán kóplik hám $E \subset \{x\}$ bolsa, onda

$$\inf\{x\} \leq \inf E \leq \sup E \leq \sup\{x\}.$$

4⁰. Eger $\forall x \in \{x\}$ ushın $x \leq \alpha$ teńsizlik orınlansa, onda $\sup\{x\} \leq \alpha$ teńsizlik orınlı boladı

Dálillew. $\{x\}$ kópliktiń hámme elementleri menen α sannan E kóplik dúzemiz: $E = \{x\} \cup \{\alpha\}$. Bunnan $\{x\} \subset E$ hám 1⁰- qásiyet boyınsha $\sup\{x\} \leq \sup E$ teńsizlik orınlı. Bul teńsizlikten $\sup E = \alpha$ bolǵanlıqtan $\sup\{x\} \leq \alpha$ teńsizlik kelip shıǵadı.

5⁰. Eger $\forall x \in \{x\}$ ushın $x \geq \beta$ teńsizlik orınlansa, onda $\inf\{x\} \geq \beta$ teńsizlik orınlı boladı.

Bul qásiyet 4⁰- qásiyetey dálillenedi.

6⁰. Eger $\{x\}$ kóplik joqarıdan shegaralanğan hám $\sup\{x\} = \alpha$ bolsa, onda $\forall \varepsilon > 0$ san ushin $x' > \alpha - \varepsilon$ bolatuǵın $x' \in \{x\}$ element bar.

Dálillew. Kerisinshe uyǵarayıq, yaǵnıy $\forall x' \in \{x\}$ ushin $x' \leq \alpha - \varepsilon$ bolatuǵın $\varepsilon > 0$ san tabılsın. Onda 4⁰- qásiyet boyınsha $\sup\{x\} \leq \alpha - \varepsilon$, yaǵnıy $\alpha \leq \alpha - \varepsilon$ teńsizlik orınlı boladı. Bul qarama- qarsılıq tastıyqlawdıń dálili boladı.

7⁰. Eger $\{x\}$ kóplik tómennen shegaralanğan hám $\inf\{x\} = \beta$ bolsa, onda $\forall \varepsilon > 0$ san ushin $x'' < \beta + \varepsilon$ bolatuǵın $x'' \in \{x\}$ element bar.

Bul qásiyet 7⁰- qásiyetke uqsas dállillenedi.

R haqıyqıy sanlar kópligine $\forall x \in R$ ushin $x > -\infty$, $x < +\infty$ qásiyetler menen $-\infty$ hám $+\infty$ simvolların biriktirip, $\bar{R} = R \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ kóplikti hasıl qılamız.

Bul simvollarıń kiritiliwi shegaralanbağan kópliklerdiń de dál joqarǵı hám dál tómengi shegaraların kiritiwge múmkinlik beredi.

Eger $\{x\}$ kóplik joqarıdan shegaralanbağan bolsa $\sup\{x\} = +\infty$, al tómennen shegaralanbağan bolsa, $\inf\{x\} = -\infty$ dep alınadı.

8.4. Aralıqlar. Sanlar kósheriniń bir neshe úles kópliklerin qaraymız.

1⁰. $[a, b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$ - $[a, b]$ kesindisi (segmenti);

2⁰. $[a, b) = \{x \in R : a \leq x < b\}$ - (a, b) yarım kesindisi (yarım intervalı, yarım segmenti);

$(a, b] = \{x \in R : a < x \leq b\}$ - $(a, b]$ yarım kesindisi (yarım intervalı, yarım segmenti);

3⁰. $(a, b) = \{x \in R : a < x < b\}$ - (a, b) intervalı;

4⁰. $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) intervalı a noqattıń ε -
dógeregi dep ataladı.

5⁰. a noqattı óz ishine alıwshı qálegen interval a noqattıń
dógeregi dep ataladı.

6⁰. $[a, +\infty) = \{x \in R : x \geq a\}$ - $[a, +\infty)$ nurı;

7⁰. $(a, +\infty) = \{x \in R : x > a\}$ - $(a, +\infty)$ yarım tuwrı sızıǵı;

8⁰. $(-\infty, +\infty) = \{x \in R : -\infty < x < +\infty\}$ - sanlar kósheri.

2- BAP

SANLÍ IZBE-IZLIK HÁM ONÍN LIMITI

1-§. Sanlı izbe-izlik

1.1. Sanlı izbe-izlik túsini. 1-anıqlama. Eger hár bir $n \in N$ natural sanğa málim nızam boyınsha bazı bir x_n haqıyqıy san sáykes qoyılsa, onda

$$\{x_n\}: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (1)$$

nomerlengen haqıyqıy sanlar kópligi *sanlı izbe-izlik* yaqı *izbe-izlik* dep ataladı. Hár bir x_n can (1) izbe-izliktiń *elementi* dep ataladı.

Mısallar. 1). $x_n = \frac{1}{n}: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

2) $y_n = (-1)^n: -1, 1, -1, 1, \dots, -1, 1, \dots$

3) $z_n = \frac{(-1)^n}{n}: -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^n}{n}, \dots$

4) $u_n = 1: 1, 1, \dots, 1, \dots$

5) $0,3; 0,33; 0,333; \dots, \underbrace{0,333\dots 3}_n; \dots$

6) $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$

7) $3, 1, 4, \dots$

Keltirilgen mısallardan kórinip turǵanıday ayırım izbe-izliklerdiń ulıwma aǵzaları formulalar arqalı ańlatılıp, olardıń hámme elementleri usı formulalar járdeminde tabılsa, ayırım izbe-izliklerdiń elementlerin málim qaǵıydalar járdeminde tabıw múmkin. Mısalı, 6- mısalda keltirilgen izbe-izliktiń elementleri

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_n = x_{n-2} + x_{n-1} \quad (n \geq 3)$$

qaǵıyda menen tabıladı. Bunday qaǵıydalar, ádette, *rekurrent qaǵıydalar* dep ataladı. Izbe-izlik elementleri *Fibonachchi sanları* dep ataladı.

7- mısalda keltirilgen izbe-izlik π sanınıń, sáykes túrde, birinshi, ekinshi h. t. b. cifraları. π irracional san bolıp, ol sheksiz, periodsız onlıq bólshek kórinisinde jazılatuǵını málim, izbe-izlik elementlerin tabıwdıń málim qaǵıydası joq.

Izbe-izliktiń elementleriniń sanı sheksiz. bolıp, bul izbe-izlik elementlerinen dúzilgen kóplik sheksiz kóplik te, shekli kóplik te bolıwı múmkin. Mısalı, $x_n = \frac{1}{n}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ izbe-izliktiń elementlerinen dúzilgen $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ kóplik-sheksiz kóplik, al $y_n = (-1)^n$: $-1, 1, -1, 1, \dots, -1, 1, \dots$ izbe-izliktiń elementlerinen dúzilgen $\{-1, 1\}$ kóplik-shekli kóplik.

(1) izbe-izlik penen birge

$$\{y_n\}: y_1, y_2, \dots, y_n, \dots \quad (2)$$

izbe-izlikti qaraymız.
 $\{x_n + y_n\}: x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots$ izbe-izlik (1) hám (2)
 izbe-izliklerdiń qosındısı,
 $\{x_n - y_n\}: x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n, \dots$ izbe-izlik- ayırması,
 $\{x_n \cdot y_n\}: x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \dots, x_n \cdot y_n, \dots$ izbe-izlik- kóbeymesi
 hám $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}: \frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \dots, \frac{x_n}{y_n}, \dots (\forall n \in N \quad y_n \neq 0)$ izbe-izlik-
qatnası dep ataladı.

Eskertiw. Eger $\{y_n\}$ izbe-izliktiń tek shekli sandaǵı elementleri nol'ge teń bolsa, onda $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ qatnası hámme y_n

elementler nol'den ózgeshe bolatuǵın nomerden baslap anıqlaw múmkin.

1.2. Shegaralangán izbe-izlikler. Hár bir izbe-izliktiń elementleri bazı bir sanlı kóplik dúzedi. Joqarıdan shegaralangán,

tómennen shegaralanğan, shegaralanğan kópik túsiniqlerine tiykarlanıp, biz tómendegi anıqlamalarğa kelemiz.

Meyli, bazı bir $\{x_n\}$ izbe-izlik berilgen bolsın.

2-anıqlama. Eger $\forall n$ nomer ushın $x_n \leq M$ ($x_n \geq m$) teńsizlik orınlı bolatuǵın M sanı (m sanı) tabılsa, onda bunday izbe-izlik *joqarıdan (tómennen) shegaralanğan* izbe-izlik dep, al M sanı (m sanı) $\{x_n\}$ izbe-izliktiń *joqarǵı (tómengi) shegarası* dep ataladı.

3-anıqlama. Hám tómennen, hám joqarıdan shegaralanğan izbe-izlik *shegaralanğan* izbe-izlik dep ataladı.

Basqasha aytqanda, eger $\forall n$ nomer ushın $m \leq x_n \leq M$ teńsizlikler orınlı bolatuǵın m hám M sanları tabılsa, onda bunday izbe-izlik *shegaralanğan* izbe-izlik dep ataladı.

Bul anıqlamanı basqasha formada da beriw múmkin: eger $\forall n$ nomer ushın $|x_n| \leq M$ teńsizlik orınlı bolatuǵın $M > 0$ san tabılsa, onda $\{x_n\}$ *shegaralanğan* izbe-izlik dep ataladı.

Elementlerinen dúzilgen sanlı kópik joqarıdan shegaralanğan, tómennen shegaralanğan hám shegaralanğan kópik bolatuǵın izbe-izlik, sáykes túrde, joqarıdan shegaralanğan, tómennen shegaralanğan hám shegaralanğan izbe-izlik boladı.

Shegaralanğan izbe-izlik degende hámme elementlerin bazı bir kesindiniń ishine tolıq jaylastırıw múmkin bolğan izbe-izlikti túsinemiz.

Elementlerinen dúzilgen sanlı kópiktiń dál joqarǵı (dál tómengi) shegarası $\{x_n\}$ izbe-izliktiń dál joqarǵı (dál tómengi) shegarası dep ataladı hám $\sup_n \{x_n\}$ ($\inf_n \{x_n\}$) simvolı menen belgilenedi.

4-anıqlama. $\forall A > 0$ san ushın (bul san qanday úlken san bolsa da) $\{x_n\}$ izbe-izliktiń $|x_n| > A$ teńsizlikti qanaatlandıratuǵın keminde bir elementi bar bolsa, onda bul izbe-izlik *shegaralanbaǵan* izbe-izlik dep ataladı.

Bul anıqlama kóz qarasınan tek joqarıdan yaki tek tómennen shegaralanǵan hár bir izbe-izlik shegaralanbaǵan izbe-izlik boladı.

2-§. Izbe-izliktiń limiti

5-anıqlama. Eger $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $\exists N = N(\varepsilon)$ nomer tabılıp, $n > N$ nomerler ushın $|x_n - a| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı bolsa, a san $\{x_n\}$ izbe-izliktiń *limiti* dep ataladı hám $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ yaki $x_n \rightarrow a$ dep jazıladı.

Shekli limitke iye izbe-izlik *jıynaqlı* izbe-izlik dep ataladı. Jıynaqlı emes (yaǵnıy shekli limitke iye bolmaǵan) izbe-izlik *tarqalıwshı* izbe-izlik dep ataladı.

Ádette, $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ interval a noqattıń ε - dógeregi dep ataladı hám $U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ dep belgilenedi.

$|x_n - a| < \varepsilon$ teńsizlikti $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$ (1) teńsizlik kórinisinde jazıw múmkin. Geometriya tilinde (1) teńsizlik $n > N$ nomerli x_n elementler a noqattıń ε - dógereginde jatatuǵının bildiredi. Bul bizge jıynaqlı izbe-izliktiń jáne bir anıqlamasın beriwge múmkinshilik tuwdıradı.

6-anıqlama. Qálegen ε - dógereginde $\{x_n\}$ izbe-izliktiń baǵı bir nomerden (álbette, $\varepsilon > 0$ sanına ǵárezli) baslap hámme elementleri jatatuǵın a noqat tabılса, onda a san $\{x_n\}$ izbe-izliktiń *limiti* dep, al $\{x_n\}$ izbe-izlik *jıynaqlı* izbe-izlik dep ataladı.

Eskertiw. Jıynaqlı hám tarqalıwshı izbe-izliktiń anıqlamasınan izbe-izliktiń elementlerine qálegen shekli sandaǵı

elementlerdi biriktiriw yaki shekli sandaǵı elementlerdi shıǵarıp taslaw bul izbe-izliktiń jıynaqlılıǵına (tarqalıwshılıǵına)) tásir kórsetpeytuǵını kelip shıǵadı.

7-anıqlama. Eger $\forall a$ san hám $\forall N$ san ushın $\exists \varepsilon > 0$ san hám $\exists n > N$ nomer tabılıp, $|x_n - a| \geq \varepsilon$ teńsizlik orınlı bolsa, $\{x_n\}$ izbe-izlik *limitke iye emes* dep ataladı.

Mısallar. № 1. $x_n = \frac{1}{n}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ izbe-izliktiń limiti nolge teń ekenin kórsetiń.

Sh e sh i w. Izbe-izliktiń anıqlaması boyınsha $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $n > N$ nomerler ushın $\frac{1}{n} < \varepsilon$ (2) teńsizlik orınlı bolatuǵın $N = N(\varepsilon)$ nomer kórsetiw jetkilikli. (2) teńsizlikten $n > \frac{1}{\varepsilon}$ teńsizlikti alamız. Bunnan $N = N(\varepsilon)$ nomerdi $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$ dep alıwımız múmkin ekeni kelip shıǵadı, bul jerde $[\frac{1}{\varepsilon}] = \frac{1}{\varepsilon}$ oń sannıń pútın bólegi.

№ 2. $x_n = (-1)^n$: $-1, 1, -1, 1, \dots, -1, 1, \dots$ izbe-izlik limitke iye emesligin kórsetiń.

Sh e sh i w. Kerisinen dálilleymiz. Meyli, berilgen izbe-izlik shekli a limitke iye bolsın. Onda izbe-izliktiń anıqlaması boyınsha $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $\exists N = N(\varepsilon)$ nomer tabılıp, $n > N$ nomerler ushın $|(-1)^n - a| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı boladı. Bunnan jup n nomerler ushın $|1 - a| < \varepsilon$ teńsizlik, al taq n nomerler ushın $|1 + a| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı bolatuǵını kelip shıǵadı. Bul teńsizliklerden

$$2 = |(1 - a) + (1 + a)| \leq |1 - a| + |1 + a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

yaǵnıy $2 < 2\varepsilon$ teńsizlikti alamız. Bul teńsizlik tek $\varepsilon > 1$ sanlar ushın orınlı bolıp, $0 < \varepsilon \leq 1$ sanlar ushın orınlı emes. Bul

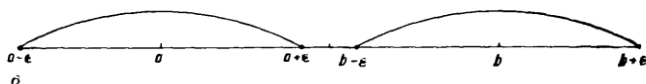
anıqlamadağı $\varepsilon > 0$ sannıń qálegen qılıp saylap alınıwına qarama- qarsı. Demek, berilgen izbe-izlik dimitke iye emes.

3-§. Jıynaqlı izbe-izliklerdiń qásiyetleri

1-teorema. *Jıynaqlı izbe-izlik jalǵız bir limitke iye.*

Dálillew. Bul teoremanı dálillew ushın bizge tómendegi lemma kerek boladı.

L e m m a. *$a \neq b$ noqatlardıń $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$ bolǵan $U_\varepsilon(a)$ hám $U_\varepsilon(b)$ dógerekleri bar (1- súwret).*



1- súwret

Teoremanı kerisinen dálilleymiz. Meyli, $\{x_n\}$ izbe-izlik eki shekli limitke iye bolsın: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ ($a \neq b$). Lemma boyınsha a hám b noqatlardıń $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$ bolǵan $U_\varepsilon(a)$ hám $U_\varepsilon(b)$ dógerekleri bar. Izbe-izliktiń limitiniń anıqlaması boyınsha $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $\exists N' = N'(\varepsilon)$ nomer tabılıp, $n > N'$ nomerler ushın $|x_n - a| < \varepsilon$ teńsizlik hám $\exists N'' = N''(\varepsilon)$ nomer tabılıp, $n > N''$ nomerler ushın $|x_n - b| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı boladı. $N = \max(N', N'')$ dep alsaq, $n > N$ nomerler ushın hám $|x_n - a| < \varepsilon$ teńsizlik, hám $|x_n - b| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı boladı. Nátiyjede izbe-izliktiń $n > N$ nomerli elementleri bir waqıtta hám $U_\varepsilon(a)$ dógerekke, hám $U_\varepsilon(b)$ dógerekke derek. Bul $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$ shártke qarama- qarsı. ▲

2-teorema. *Jıynaqlı izbe-izlik shegaralanǵan.*

Dálillew. Meyli, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ bolsın. Izbe-izliktiń anıqlaması boyınsha $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $\exists N = N(\varepsilon)$ nomer tabılıp, $n > N$

nomerler ushın $|x_n - a| < \varepsilon$, yaǵnıy $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ teńsizlik orınlı. $|a - \varepsilon|, |a + \varepsilon|, |x_1|, |x_1|, \dots, |x_N|$ sanlardıń eń úlkenin M dep belgilesek, $\forall n$ nomer ushın $|x_n| \leq M$ teńsizlik orınlı boladı. Bul $\{x_n\}$ izbe-izliktiń shegaralanǵanlıǵın bildiredi. ▲

Eskertiw. Bul teoremaǵa keri tastıyıqlaw, ulıwma alǵanda, orınlı emes: qálegen shegaralanǵan izbe-izlik jıynaqlı bolıwı shárt emes.

Mısalı, $x_n = (-1)^n$: $-1, 1, -1, 1, \dots, -1, 1, \dots$ izbe-izlik shegaralanǵan, biraq limitke iye emes.

3-teorema. *Eger jıynaqlı izbe-izliktiń hámme elementleri (eń bolmaǵanda bazı bir nomerden baslap) $x_n \geq p$ ($x_n \leq q$) teńsizlikti qanaatlandırısa, onda bul izbe-izliktiń a limiti de usı teńsizlikti qanaatlandıradı: $a \geq p$ ($a \leq q$).*

Dálillew. Meyli, $\{x_n\}$ izbe-izliktiń hámme elementleri (eń bolmaǵanda bazı bir N' nomerden baslap) $x_n \geq p$ teńsizlikti qanaatlandırısn hám $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ bolsın, biz bul izbe-izliktiń a limiti ushın $a \geq p$ teńsizlik orınlı bolatuǵının kórsetemiz.

Teoremanı kerisinen dálilleymiz. Meyli, $a < p$ bolsın. Onda izbe-izliktiń limitiniń anıqlaması boyınsha $\varepsilon = p - a$ san ushın $\exists N = N(\varepsilon)$ nomer tabılıp (bul nomerdi N' nomerden úlken bolatuǵın qılıp alamız), $n > N$ nomerler ushın $|x_n - a| < \varepsilon$, yaǵnıy $|x_n - a| < p - a$ teńsizlik orınlı. Bul teńsizlik $-(p - a) < x_n - a < p - a$ teńsizliklerge ekvivalent. Bul teńsizliklerdiń ekinshisinen $n > N$ nomerler ushın $x_n < p$ teńsizlik kelip shıǵadı. Al bul teoremanıń shártine qarama- qarsı. Bul jaǵday ushın teorema dálillendi.

$x_n \leq q$ bolǵan jaǵday da usıǵan uqsas dálillenedi. ▲

Eskertiw. Eger jıynaqlı izbe-izliktiń hámme elementleri (eń bolmaǵanda bazı bir nomerden baslap) $x_n > p$ ($x_n < q$) qatal teńsizlikti qanaatlandırsa, onda bul izbe-izliktiń a limiti de $a > p$ ($a < q$) qatal teńsizlikti qanaatlandırıwı shárt emes.

Mısalı, $x_n = 1/n$ izbe-izliktiń hámme elementleri oń sanlar, biraq bul izbe-izliktiń limiti nolge teń: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Mına teorema da 3- teoremaday dálillenedi.

4-teorema. Eger jıynaqlı izbe-izliktiń a limiti $a > p$ ($a < q$) teńsizlikti qanaatlandırsa, onda bul izbe-izliktiń hámme elementleri (eń bolmaǵanda bazı bir nomerden baslap) $x_n > p$ ($x_n < q$) teńsizlikti qanaatlandıradı.

Saldar. Eger jıynaqlı izbe-izliktiń limiti oń (teris) bolsa, onda bul izbe-izliktiń hámme elementleri (eń bolmaǵanda bazı bir nomerden baslap) oń (teris) sanlar boladı.

5-teorema. Eger jıynaqlı $\{x_n\}$ hám $\{y_n\}$ izbe-izliklerdiń hámme elementleri (eń bolmaǵanda bazı bir nomerden baslap) $x_n \leq y_n$ ($x_n \geq y_n$) teńsizlikti qanaatlandırsa, onda bul izbe-izliklerdiń limitleri de usı teńsizlikti qanaatlandıradı:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n).$$

Dálillew. Meyli, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ bolsın. $a \leq b$ bolatuǵının dálilleymiz.

Teoremanı kerisinen dálilleymiz. Meyli, teoremanıń shártleri orınlanǵanda $a > b$ bolsın. Onda $a > c > b$ bolatuǵın c san bar. Demek, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ hám $a > c$. 4- teorema boyınsha eń

bolmaǵanda $\exists N'$ nomer tabılıp, $n > N'$ nomerler ushın $x_n > c$. Sonıń menen birge $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ hám $b < c$. 4- teorema boyınsha

eń bolmaǵanda $\exists N''$ nomer tabılıp, $n > N''$ nomerler ushın $y_n < c$. Eger $N = \max(N', N'')$ dep alsaq, $n > N$ nomerler

ushın hám $x_n > c$, hám $y_n < c$ teńsizlik orınlı boladı. Bunnan $n > N$ nomerler ushın $x_n > y_n$ bolatuǵını kelip shıǵadı. Bul teoremanıń shártine qarama- qarsı.

$a \geq b$ teńsizlik te usıǵan uqsas dálillenedi. ▲

Saldar. Eger jıynaqlı izbe-izliktiń hámme elementleri bazı bir kesindige derek bolsa, onda bul izbe-izliktiń limiti de usı kesindige derek boladı.

6-teorema. Meyli, $\{x_n\}$ hám $\{y_n\}$ - limitleri a sanǵa teń jıynaqlı izbe-izlikler bolsın. Eger $\{z_n\}$ izbe-izliktiń hámme elementleri (eń bolmaǵanda bazı bir nomerden baslap) $x_n \leq z_n \leq y_n$ teńsizliklerdi qanaatlandırısa, onda $\{z_n\}$ izbe-izlik te jıynaqlı bolıp, limiti a sanǵa teń.

Dálillew. Izbe-izliktiń limitiniń anıqlaması boyınsha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N' = N'(\varepsilon) \quad n > N' \quad |x_n - a| < \varepsilon,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N'' = N''(\varepsilon) \quad n > N'' \quad |y_n - a| < \varepsilon.$$

Eger $N = \max(N', N'')$ dep alsaq, onda $n > N$ nomerler ushın hám $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, hám $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$ teńsizlikler orınlı boladı. Teoremanıń shártinen $a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon$ teńsizliklerge iye bolamız. Bul teńsizliklerden $a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$, yaǵnıy $|z_n - a| < \varepsilon$ teńsizlik kelip shıǵadı. Demek $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ boladı eken. ▲

Bul teorema, ádette, izbe-izlikler ushın *eki jaqlap shegaralaw principini* dep ataladı.

3.1. Sheksiz kishi izbe-izlikler. 8-anıqlama. Limiti nolge teń izbe-izlik *sheksiz kishi izbe-izlik* dep ataladı.

Mısallar. № 1. $\alpha_n = \frac{1}{n}$ izbe-izliktiń limiti nolge teń ekenin

kórsettik (2- § № 1- mısál). Demek, bul izbe-izlik sheksiz kishi izbe-izlik.

№ 2. $\alpha_n = q^n$ ($|q| < 1$) izbe-izliktiń sheksiz kishi izbe-izlik ekenin kórsetiń.

Sh e sh i w. $|q| < 1$ teńsizlikten $\frac{1}{|q|} > 1$ ($q \neq 0$) teńsizlik kelip shıǵadı. Bunnan $\frac{1}{|q|} = 1 + \alpha$ ($\alpha > 0$) hám $\frac{1}{|q|^n} = (1 + \alpha)^n$ ($n \in N$) dep jazıwımız múmkin. $(1 + \alpha)^n \geq 1 + n \cdot \alpha$ Bernulli teńsizliginen paydalanıp, $|q|^n \leq \frac{1}{1 + n \cdot \alpha} < \frac{1}{n \cdot \alpha}$ teńsizlikke iye bolamız.

Endi $\forall \varepsilon > 0$ san ushın izbe-izliktiń limitiniń anıqlaması boyınsha $n > N$ nomerler ushın $|q|^n < \varepsilon$ bolatuǵın $N = N(\varepsilon)$ nomerdi kórsetiwimiz kerek. Bunıń ushın $\frac{1}{n \cdot \alpha} < \varepsilon$ teńsizlikten $n > \frac{1}{\alpha \cdot \varepsilon}$ teńsizlikti alamız hám $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\alpha \cdot \varepsilon} \right] + 1 = \left[\frac{|q|}{1 - |q|} \right] + 1$ dep alıw jetkilikli.

Izbe-izliktiń limitiniń anıqlamasınan paydalanıp mına teoremanı dálillew qıyın emes.

7-teorema. *Eki sheksiz kishi izbe-izliktiń qosındısı (ayırması) sheksiz kishi izbe-izlik.*

Saldar. *Shekli sandaǵı sheksiz kishi izbe-izliklerdiń algebralıq qosındısı sheksiz kishi izbe-izlik.*

8-teorema. *Shegaralanǵan izbe-izliktiń sheksiz kishi izbe-izlikke kóbeymesi sheksiz kishi izbe-izlik.*

Dálillew. Meyli, $\{x_n\}$ - shegaralanǵan, al $\{\alpha_n\}$ sheksiz kishi izbe-izlik bolsın. Shegaralanǵan izbe-izlik anıqlaması boyınsha $\forall n \in N$ ushın $|x_n| \leq M$ teńsizlik orınlanatuǵın $M > 0$ san bar. Sheksiz kishi izbe-izlik anıqlaması boyınsha $\forall \varepsilon > 0$ san alınsa da $\varepsilon/A > 0$ san ushın $\exists N$ nomer tabılıp, $n > N$ nomerler ushın $|\alpha_n| < \varepsilon/A$ teńsizlik orınlı. Kóbeymeniń moduli moduller

kóbeymesine teń ekenin esapqa alıp, $n > N$ nomerler ushın $|x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < A \cdot \frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon$ teńsizlik orınlı bolatuǵının kóremiz. Al bul $\{x_n \cdot \alpha_n\}$ izbe-izlik sheksiz kishi izbe-izlik ekenin bildiredi. ▲

Saldar. *Sheksiz kishi izbe-izliklerdiń kóbeymesi sheksiz kishi izbe-izlik.*

9-teorema. *$\{x_n\}$ izbe-izliktiń limiti a sanǵa (shekli) teń bolıwı ushın $\alpha_n = x_n - a$ izbe-izlik sheksiz kishi izbe-izlik bolıwı zárúr hám jetkilikli.*

Haqıyqattan da, meyli, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ bolsın. Izbe-izliktiń limitiniń anıqlaması boyınsha $\forall \varepsilon$ san ushın $\exists N = N(\varepsilon)$ nomer tabılıp, $n > N$ nomerler ushın $|x_n - a| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı. Eger $\alpha_n := x_n - a$ dep belgilesek, onda $|\alpha_n| < \varepsilon$ bolıp, bul $\{\alpha_n\}$ -sheksiz kishi izbe-izlik bolatuǵının bildiredi.

Endi, meyli, $\{x_n\}$ izbe-izlik hám a san berilgen bolıp, $\alpha_n = x_n - a$ izbe-izlik sheksiz kishi izbe-izlik bolsın. Onda $\forall \varepsilon$ san ushın $\exists N = N(\varepsilon)$ nomer tabılıp, $n > N$ nomerler ushın $|\alpha_n| < \varepsilon$ yaǵnıy $|x_n - a| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı. Bul $\{x_n\}$ izbe-izliktiń limiti a sanǵa teń bolatuǵının bildiredi. ▲

Solay etip, limiti a sanǵa (shekli) teń jıynaqlı izbe-izliktiń x_n elementin $x_n = a + \alpha_n$ arnawlı kóriniste jazıw múmkin, bul jerde α_n – bazı bir $\{\alpha_n\}$ sheksiz kishi izbe-izliktiń elementi.

3.2. Jıynaqlı izbe-izlikler ústinde arifmetikalıq ámeller.

10-teorema. *Jıynaqlı $\{x_n\}$ hám $\{y_n\}$ izbe-izliklerdiń qosındısı jıynaqlı izbe-izlik bolıp, limiti $\{x_n\}$ hám $\{y_n\}$ izbe-izliklerdiń limitleriniń qosındısına teń.*

Dálillew. Meyli, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ hám $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ bolsın. Bul jıynaqlı izbe-izliklerdiń elementlerin arnawlı kóriniste jazıp

alamız: $x_n = a + \alpha_n$ hám $y_n = b + \beta_n$, bul jerde α_n hám β_n - sáykes túrde bazı bir $\{\alpha_n\}$ hám $\{\beta_n\}$ sheksiz kishi izbe-izliklerdiń elementleri. Bul teńliklerden $(x_n + y_n) - (a + b) = \alpha_n + \beta_n$ teńligi kelip shıǵadı. Eki sheksiz kishi izbe-izliktiń qosındısı sheksiz kishi izbe-izlik bolǵanlıqtan 9- teorema boyınsha $\{x_n\}$ hám $\{y_n\}$ izbe-izliklerdiń $\{x_n + y_n\}$ qosındısı jıynaqlı izbe-izlik bolıp, limiti $a + b$ qosındıǵa teń boladı. ▲

11-teorema. *Jıynaqlı $\{x_n\}$ hám $\{y_n\}$ izbe-izliklerdiń ayırması jıynaqlı izbe-izlik bolıp, limiti $\{x_n\}$ hám $\{y_n\}$ izbe-izliklerdiń limitleriniń ayırmasına teń.*

12-teorema. *Jıynaqlı $\{x_n\}$ hám $\{y_n\}$ izbe-izliklerdiń kóbeymesi jıynaqlı izbe-izlik bolıp, limiti $\{x_n\}$ hám $\{y_n\}$ izbe-izliklerdiń limitleriniń kóbeymesine teń.*

Dálillew. Meyli, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ hám $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ bolsın. Bul jıynaqlı izbe-izliklerdiń elementlerin arnawlı kóriniste jazıp alamız: $x_n = a + \alpha_n$ hám $y_n = b + \beta_n$, bul jerde α_n hám β_n - sáykes túrde bazı bir $\{\alpha_n\}$ hám $\{\beta_n\}$ sheksiz kishi izbe-izliklerdiń elementleri. Bul teńliklerden $(x_n \cdot y_n) - (a \cdot b) = a \cdot \beta_n + b \cdot \alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n$ teńligi kelip shıǵadı. 8- teorema hám onıń saldarı boyınsha bul teńliktiń oń tárepinde sheksiz kishi izbe-izlik elementi tur. Bunnan 9- teorema boyınsha $\{x_n\}$ hám $\{y_n\}$ izbe-izliklerdiń $\{x_n \cdot y_n\}$ kóbeymesi jıynaqlı izbe-izlik bolıp, limiti $a \cdot b$ kóbeymege teń bolatuǵını kelip shıǵadı. ▲

Saldar. *Jıynaqlı $\{x_n\}$ izbe-izliktiń $\forall c \in R$ sanǵa kóbeymesi jıynaqlı izbe-izlik bolıp, limiti $\{x_n\}$ izbe-izliktiń limitiniń c sanǵa kóbeymesine teń.*

1-lemma. *Eger $\{y_n\}$ izbe-izliktiń limiti b ($b \neq 0$) sanǵa teń bolsa, onda eń bolmaǵanda bazı bir nomerden baslap $\{1\}$ hám*

$\{y_n\}$ izbe-izliklerdiń qatnası bolǵan $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ izbe-izlik anıqlanǵan

hám bul izbe-izlik shegaralanǵan.

Dálillew. $b \neq 0$ ekenin esapqa alıp, $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$ dep alamız. Izbe-izliktiń limitiniń anıqlaması boyınsha usı $\varepsilon > 0$ san ushın $\exists N = N(\varepsilon)$ nomer tabılıp, $n > N$ nomerler ushın $|y_n - b| < \varepsilon$, yaǵnıy $|y_n - b| < \frac{|b|}{2}$ teńsizlik orınlı. $b \equiv (b - y_n) + y_n$ birdeylikten $|b| \leq |b - y_n| + |y_n| < \frac{|b|}{2} + |y_n|$ teńsizlikke iye bolamız. Bul teńsizlikten $n > N$ nomerler ushın $|y_n| > \frac{|b|}{2}$ teńsizlik kelip shıǵadı. Bul teńsizlik N nomerden baslap $\{y_n\}$ izbe-izliktiń elementleri nolden ózgeshe bolatuǵının hám usı nomerden baslap $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ izbe-izlikti qaraw múmkin ekenin bildiredi. Bul teńsizlikten jáne $\left|\frac{1}{y_n}\right| < \frac{2}{|b|}$ teńsizlikti alıw múmkin. Al bul N nomerden baslap alınǵan $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ izbe-izlik

shegaralanǵan izbe-izlik bolatuǵının ańlatadı. ▲

13-teorema. *Jıynaqlı $\{x_n\}$ hám limiti nolden ózgeshe $\{y_n\}$ izbe-izliklerdiń qatnası eń bolmaǵanda bazı bir nomerden baslap anıqlanǵan jıynaqlı izbe-izlik bolıp, limiti $\{x_n\}$ hám $\{y_n\}$ izbe-izliklerdiń limitleriniń qatnasına teń.*

Dálillew. Meyli, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ hám $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq 0$ bolsın. Lemma boyınsha bazı bir N nomerden baslap $\{y_n\}$ izbe-izliktiń elementleri nolden ózgeshe bolıp, $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ izbe-izlik anıqlanǵan hám bul izbe-izlik shegaralanǵan. Biz $\left\{\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right\}$ izbe-izlik sheksiz

izbe-izlik ekenin kórsetiwimiz jetkilikli. Bunıń ushın $\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{x_n \cdot b - y_n \cdot a}{y_n \cdot b}$ teńlikten paydalanamız. $\{x_n\}$ hám $\{y_n\}$

izbe-izliklerdiń elementlerin arnawlı kóriniste jazıp alamız:

$$x_n = a + \alpha_n \quad \text{hám} \quad y_n = b + \beta_n. \quad \text{Nátıyjede}$$

$$x_n \cdot b - y_n \cdot a = (a + \alpha_n) \cdot b - (b + \beta_n) \cdot a = b \cdot \alpha_n - a \cdot \beta_n$$

teńlikke iye bolamız. Demek, $\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{y_n} (b \cdot \alpha_n - a \cdot \beta_n)$. Endi

$\left\{ \frac{1}{y_n} \right\}$ izbe-izlik shegaralanğan izbe-izlik, al $\{b \cdot \alpha_n - a \cdot \beta_n\}$ izbe-

izlik eki sheksiz kishi izbe-izliktiń ayırması sıpatında sheksiz kishi izbe-izlik bolğanlıqtan 8- teorema boyınsha bul teńliktiń oń jaǵındaǵı ańlatpa sheksiz kishi izbe-izlik elementin beredi.

Bunnan $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$ teńlik kelip shıǵadı. ▲

3.3. Sheksiz úlken izbe-izlikler. 9-anıqlama. $\forall A > 0$ san ushın (bul san qanday úlken san bolsa da) $\exists N = N(A)$ nomer tabılıp, $n > N$ nomerler ushın $|x_n| > A$ teńsizlik orınlı bolsa, onda bunday $\{x_n\}$ izbe-izlik *sheksiz úlken izbe-izlik* dep ataladı.

Qolaylılıq ushın $\{x_n\}$ sheksiz úlken izbe-izliktiń limiti sheksiz, yaǵnıy $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ dep jazıladı.

Eger $\forall A > 0$ san ushın (bul san qanday úlken san bolsa da) $\exists N = N(A)$ nomer tabılıp, $n > N$ nomerler ushın $x_n > A$ ($x_n < -A$) teńsizlik orınlı bolsa, onda bunday $\{x_n\}$ izbe-izliktiń limiti $+\infty$ ke ($-\infty$ ke) teń dep alınadı hám $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$) dep jazıladı.

Limiti sheksiz izbe-izlik tarqalıwshı izbe-izlik boladı.

Eskertiw. Hár bir sheksiz úlken izbe-izlik shegaralanbağan izbe-izlik, biraq hár bir shegaralanbağan izbe-izlik sheksiz úlken

izbe-izlik bolıwı shárt emes. Sebebi, sheksiz úlken izbe-izlik ushın $\forall A > 0$ san alınsa da $|x_n| > A$ teńsizlik usı izbe-izliktiń bazı bir nomerden baslap *hámme elementleri* ushın orınlı, al shegaralanbaǵan izbe-izlik ushın bul izbe-izliktiń usı teńsizlik orınlı bolǵan *bir elementin* kórsetiw jetkilikli. Mısalı, 1, 2, 1, 4, ... , 1, 2n, ... izbe-izlik shegaralanbaǵan izbe-izlik, biraq sheksiz úlken izbe-izlik emes, sebebi $\forall A > 1$ san ushın izbe-izliktiń taq nomerli elementleri A sannan úlken emes.

Mısallar. № 1. $x_n = (-1)^n n$: -1, 2, -3, 4, ... izbe-izlik sheksiz úlken izbe-izlik, sebebi $|(-1)^n n| = n$ bolıp, $\forall A > 0$ san alınsa da $n > A$ teńsizlikti qanaatlandıratuǵın $n \in N$ san hárdayım tabıladı.

№ 2. $x_n = -n$ hám $y_n = n$ izbe-izlikler de sheksiz úlken izbe-izlikler, olardıń limitleri, sáykes túrde, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ hám $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ boladı.

14-teorema. Eger $\{x_n\}$ - sheksiz úlken izbe-izlik bolsa, onda bazı bir nomerden baslap anıqlanǵan $\left\{ \frac{1}{x_n} \right\}$ bólshek sheksiz kishi izbe-izlik, al eger $\{\alpha_n\}$ sheksiz kishi izbe-izliktiń *hámme elementleri* (eń bolmaǵanda bazı bir nomerden baslap) nolden ózgeshe bolsa, onda $\left\{ \frac{1}{\alpha_n} \right\}$ bólshek sheksiz úlken izbe-izlik boladı.

Dálillew. Dáslep teoremanıń birinshi bólegin dálilleymiz. $\{x_n\}$ sheksiz úlken izbe-izliktiń tek shekli sandaǵı elementleri ǵana nol'ge teń bolıwı múmkin. Sonıń ushın bazı bir N' nomerden baslap $\{1\}$ hám $\{x_n\}$ izbe-izliklerdiń qatnası bolǵan $\left\{ \frac{1}{x_n} \right\}$ bólshekti qarawımız múmkin. Usı bólshek sheksiz kishi izbe-izlik bolatuǵının dálilleymiz. $\forall \varepsilon > 0$ san alamız. Sheksiz úlken

izbe-izlik anıqlaması boyınsha $\frac{1}{\varepsilon}$ oń san ushın $\exists N$ nomer (bul nomerdi N' nomerden úlken qılıp alamız) tabılıp, $n > N$ nomerler ushın $|x_n| > \frac{1}{\varepsilon}$ teńsizlik orınlı boladı. Bul teńsizlikten

$\frac{1}{|x_n|} = \left| \frac{1}{x_n} \right| < \varepsilon$ teńsizlik kelip shıǵadı. Bul $\left\{ \frac{1}{x_n} \right\}$ izbe-izlik sheksiz kishi izbe-izlik ekenin bildiredi.

Teoremanıń ekinshi bólegin dálillew ushın $\{\alpha_n\}$ sheksiz kishi izbe-izliktiń hámme elementleri (eń bolmaǵanda bazı bir nomerden baslap) nolden ózgeshe dep uyǵaramız. $\forall A > 0$ san alamız. $\{\alpha_n\}$ sheksiz kishi izbe-izlik bolǵanlıqtan $\frac{1}{A}$ oń san ushın $\exists N$ nomer tabılıp, $n > N$ nomerler ushın $|\alpha_n| < \frac{1}{A}$ teńsizlik orınlı.

Bunnan $\frac{1}{|\alpha_n|} = \left| \frac{1}{\alpha_n} \right| > A$ teńsizlik kelip shıǵadı. Bul $\left\{ \frac{1}{\alpha_n} \right\}$ izbe-izlik sheksiz úlken izbe-izlik ekenin bildiredi. ▲

4-§. Monoton izbe-izlikler

Meyli, bazı bir $\{x_n\}$ izbe-izlik berilgen bolsın.

10-anıqlama. Eger izbe-izliktiń hár bir kelesi elementi aldınǵı elementinen kishi (úlken) bolmasa, yaǵnıy $\forall n \in N$ nomer ushın $x_n \leq x_{n+1}$ ($x_n \geq x_{n+1}$) teńsizlik orınlı bolsa, onda bunday $\{x_n\}$ izbe-izlik *ósiwshi* (*kemiwshi*) izbe-izlik dep ataladı.

Eger izbe-izliktiń hár bir kelesi elementi aldınǵı elementinen úlken (kishi) bolsa, yaǵnıy $\forall n \in N$ nomer ushın $x_n < x_{n+1}$ ($x_n > x_{n+1}$) teńsizlik orınlı bolsa, onda bunday $\{x_n\}$ izbe-izlik *qatal ósiwshi* (*qatal kemiwshi*) izbe-izlik dep ataladı.

Misalı, $1, 2, 2, 3, 3, 3, \dots, \underbrace{n, n, \dots, n}_n, \dots$

izbe-izlik ósiwshi, al $2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n, \dots$ izbe-izlik qatal ósiwshi izbe-izlik.

Sonday- aq, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots, \underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}_n, \dots$ izbe-

izlik kemiwshi, al $x_n = \frac{n+1}{n}$; $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots$ izbe-

izlik qatal kemiwshi izbe-izlik. Haqıyqatında da, $x_{n+1} - x_n = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0$, yaǵnıy $x_n > x_{n+1}$

teńsizlik orınlı.

O`siwshi (qatal ósiwshi) hám kemiwshi (qatal kemiwshi) izbe-izlikler, ulıwma atama menen, *monoton izbe-izlikler* dep ataladı.

Hár bir monoton izbe-izlik bir tárepten (yaki joqarıdan, yaki tómennen) shegaralanǵan. Haqıyqatında da hár bir ósiwshi (qatal ósiwshi) izbe-izlik tómennen shegaralanǵan (tómengi shegarası sıpatında birinshi elementin alıw múmkin), al kemiwshi (qatal kemiwshi) izbe-izlik joqarıdan shegaralanǵan (joqarǵı shegarası sıpatında birinshi elementin alıw múmkin).

Demek, ósiwshi (qatal ósiwshi) izbe-izlik shegaralanǵan bolıwı ushın bul izbe-izliktiń joqarıdan shegaralanǵan, al kemiwshi (qatal kemiwshi) izbe-izlik shegaralanǵan bolıwı ushın bul izbe-izliktiń tómennen shegaralanǵan bolıwı zárúr hám jetkilikli boladı eken.

15-teorema. *Joqarıdan shegaralanǵan ósiwshi (qatal ósiwshi) izbe-izlik jıynaqlı. Eger ósiwshi (qatal ósiwshi) izbe-izlik joqarıdan shegaralanbaǵan bolsa, onıń limiti $+\infty$ boladı.*

Dálillew. Dáslep teoremanıń birinshi bólimin dálilleymiz. Meyli, $\{x_n\}$ izbe-izlik joqarıdan shegaralanǵan ósiwshi (qatal ósiwshi) izbe-izlik bolsın. Bunday izbe-izliktiń elementlerinen

dúzilgen kópplik joqarıdan shegaralanğan, sonlıqtan onıń dál joqarǵı shegarası bar, bul shegaranı a dep belgileybiz: $a := \sup_n \{x_n\}$. Usı a san $\{x_n\}$ izbe-izliktiń limiti bolatuǵının

kórsetemiz. Birinshiden, kópliktiń joqarǵı shegarasınıń anıqlamasınan $\forall n$ nomer ushın $x_n \leq a$ (1) teńsizlik orınlı. Endi $\forall \varepsilon > 0$ saylap alamız. Kópliktiń dál joqarǵı shegarasınıń anıqlaması boyınsha $\{x_n\}$ izbe-izliktiń $a - \varepsilon < x_N$ (2) teńsizlikti qanaatlandırıwshı keminde bir x_N element bar. $\{x_n\}$ izbe-izlik ósiwshi (qatal ósiwshi) izbe-izlik ekenin esapqa alıp, $n > N$ nomerler ushın $x_N \leq x_n$ ($x_N < x_n$) bolatuǵının kóremiz. Bul teńsizlikten hám (2) teńsizlikten $n > N$ nomerler ushın $a - \varepsilon < x_n$ teńsizlikti alamız. Bul teńsizlikti (1) teńsizlik penen biriktirip, $a - \varepsilon < x_n \leq a < a + \varepsilon$ teńsizliklerge iye bolamız. Demek, $n > N$ nomerler ushın $|x_n - a| < \varepsilon$ orınlı eken, al bul $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ bolatuǵının kórsetedi.

Endi teoremanıń ekinshi bólegin dálilleybiz Meyli, $\{x_n\}$ -joqarıdan shegaralanbağan ósiwshi (qatal ósiwshi) izbe-izlik bolsın. Onda $\forall A > 0$ san ushın (bul san qanday úlken san bolsa da) $\exists N'$ nomer tabılıp, $x_{N'} > A$ teńsizlik orınlı boladı. $\{x_n\}$ -ósiwshi (qatal ósiwshi) izbe-izlik bolǵanlıqtan $n > N'$ nomerler ushın $x_n \geq x_{N'}$ ($x_n > x_{N'}$), sonlıqtan $x_n > A$ teńsizlik orınlı. Bul $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ bolatuǵının bildiredi. ▲

Eskertiw. Ósiwshi (kemiwshi) joqarıdan (tómennen) shegaralanğan izbe-izliktiń elementleri onıń limitinen úlken (kishi) emes.

Mına teorema da 15- teoremaǵa uqsas dálillenedi.

16-teorema. *Tómennen shegaralanğan kemiwshi (qatal kemiwshi) izbe-izlik jıynaqlı. Eger kemiwshi (qatal kemiwshi)*

izbe-izlik tómenнен shegaralanbaǵan bolsa, onıń limiti $-\infty$ boladı.

Saldar. Monoton izbe-izlik jıynaqlı bolıwı ushın bul izbe-izlik shegaralanǵan bolıwı zárúr hám jetkilikli.

5-§. Monoton izbe-izliktiń limiti haqqındaǵı teoremlardıń qollanıwları

5.1. e sanı. $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ izbe-izlikti qaraymız.

a) Bul izbe-izlik qatal ósiwshi.

Berilgen izbe-izliktiń qońsı elementleriniń qatnasın tabamız:

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} : (1 + \frac{1}{n})^n = \frac{(n+2)^{n+1} \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} (n+1)^n} = \\ &= [\frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}]^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = [1 - \frac{1}{(n+1)^2}]^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}. \end{aligned}$$

Bernulli teńsizligi boyınsha

$$[1 - \frac{1}{(n+1)^2}]^{n+1} > 1 - \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{n}{n+1}.$$

Nátiyjede $\forall n \in \mathbb{N}$ ushın $\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = 1$, yaǵnıy

$x_{n+1} > x_n$ bolatuǵını kelip shıǵadı.

b) Bul izbe-izlik shegaralanǵan.

$\forall k \geq 1$ ushın $k! \geq 2^{k-1}$ teńsizlik orınlı. N'yuton binomi boyınsha

$$\begin{aligned} x_n &= (1 + \frac{1}{n})^n = 1 + \sum_{k=1}^n C_n^k \frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^n C_n^k \frac{1}{n^k} = \\ &= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \dots (1 - \frac{k-1}{n}) \leq \\ &\leq 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3 \end{aligned}$$

teńsizlikti alamız. Demek, $\forall n \in \mathbb{N}$ ushın $0 < x_n < 3$.

15- teorema boyınsha berilgen izbe-izlik jıynaqlı.

11-anıqlama. $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ izbe-izliktiń limiti e sanı dep

ataladı: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$.

Bul san matematikada áhmiyetli rol` oynaydı.

17-teorema. e sanı *irrational san*.

Bul teoremanı oqıwshı óz betinshe dálillewi múmkin.

5.2. Biriniń ishine biri jaylasqan kesindiler principi.

12-anıqlama. Eger $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$ kesindiler izbe-izliginiń hár bir kesindisi kelesi kesindide jaylasqan bolsa, yaǵnıy $\forall n \in N$ ushın $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ qatnas orınlı bolsa, onda bunday izbe-izlik *biriniń ishine biri jaylasqan kesindiler sisteması* dep ataladı. Eger bul sistema kesindileriniń uzınlıqlarınan dúzilgen izbe-izlik sheksiz kishi izbe-izlik bolsa, onda bunday sistema *tartılıwshı* sistema dep ataladı.

17-teorema. (Kantordıń kesindilerdiń tartılıwshı sisteması haqqındaǵı). *Kesindilerdiń tartılıwshı sistemasınıń hár bir kesindisine derek bolatuǵın noqat bar hám bul noqat jalǵız birew.*

Dálillew. Dáslep tartılıwshı sistemanıń hár bir kesindisine derek bolatuǵın C noqat jalǵız birew bolatuǵının kórsetemiz. Haqıyqatında da, sistemanıń hár bir kesindisine derek bolǵan jáne bir $d \neq c$ noqat tabılsa, onda anıqlıq ushın $d > c$ dep alıp, biz sistemanıń hámme $[a_n, b_n]$ kesindilerine derek bolǵan $[c, d]$ kesindini alamız. Onda $\forall n \in N$ ushın $b_n - a_n \geq d - c > 0$ teńsizlik orınlı boladı. Bunday bolıwı múmkin emes, sebebi sistema tartılıwshı bolǵanlıqtan $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$. Demek,

tartılıwshı sistemanıń hár bir kesindisine derek bolatuǵın C noqat jalǵız birew boladı eken.

Endi sistemanıń hár bir kesindisine derek bolatuǵın C noqat bar ekenin kórsetemiz. Kesindiler sisteması tartılıwshı

bolğanlıqtan sistema kesindileriniń shep shegaralariniń $\{a_n\}$ izbe-izligi ósiwshi, al oń shegaralariniń $\{b_n\}$ izbe-izligi kemiwshi. Bul eki izbe-izlik te shegaralanğan bolğanlıqtan (elementleri $[a_1, b_1]$ kesindige derek) jıynaqlı. $\{b_n - a_n\}$ izbe-izlik sheksiz kishi izbe-izlik bolğanlıqtan $\{a_n\}$ hám $\{b_n\}$ izbe-izlikler ulıwma C limitke iye boladı. 15- teoremaǵa eskertiwden $a_n \leq c \leq b_n$ teńsizlikler kelip shıǵadı, yaǵnıy C noqat sistema kesindileriniń hár birewine derek boladı. ▲

17- teorema *biriniń ishine biri jaylasqan kesindiler principi* dep ataladı.

Eskertiw. Biriniń ishine biri jaylasqan intervallar (yaki yarım intervallar) túsiniǵın de kirgiziwimiz múmkin. Biraq bularǵa qarata 17- teorema, ulıwma aytqanda, orınlı emes. Mısalı, $(0,1)$, $(0, \frac{1}{2})$, $(0, \frac{1}{3})$, ... , $(0, \frac{1}{n})$, ... intervallar biriniń ishine biri jaylasqan intervallardıń tartılıwshı sistemasın dúzedi. Biraq bul sistemaniń hár bir intervalına derek noqat joq (bunday jalǵız noqat 0 noqat bolıwı múmkin edi, biraq 0 noqat sistemaniń hesh bir intervalına derek emes).

6-§. Úles izbe-izlikler. Bol`cano- Veyershtrass teoreması

Bazı bir $\{x_n\}$ izbe-izlikti hám $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ oń pútin sanlardıń qatal ósiwshi izbe-izligin qaraymız. $\{x_n\}$ izbe-izlikten $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ nomerli elementlerdi saylap alamız hám olardı usı nomerlerdiń ósiw tártibi boyınsha jaylastıramız. Nátiyjede jańa $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}, \dots$ izbe-izlik alamız. Bul izbe-izlik $\{x_n\}$ izbe-izliktiń *úles izbe-izligi* dep ataladı hám $\{x_{k_n}\}$ dep belgilenedi. Dara jaǵdayda, $\{x_n\}$ izbe-izliktiń ózi de bul izbe-izliktiń $k_n = n$ nomerli úles izbe-izligi dep qaralıwı múmkin.

Izbe-izlik limitiniń anıqlamasınan tikkeley kelip shıǵatuǵın eki tastırıqlawdı keltiremiz.

1⁰. Eger izbe-izlik limitke iye bolsa, onda onıń qálegen úles izbe-izligi de sol limitke iye boladı.

2⁰. Eger izbe-izliktiń hámme úles izbe-izlikleri jıynaqlı bolsa, onda olardıń bári birdey limitke iye boladı (dara jaǵdayda izbe-izliktiń ózi de sol limitke iye boladı).

Eskertiw. Izbe-izliktiń ayırım úles izbe-izlikleriniń limitiniń bar bolıwınan berilgen izbe-izliktiń limitiniń bar bolıwı hárdayım kelip shıǵa bermeydi. Mısalı, $x_n = (-1)^{n+1}$: 1, -1, ..., 1, -1, ... izbe-izliktiń $x_{2k-1} \equiv 1$ hám $x_{2k} \equiv -1$ úles izbe-izlikler jıynaqlı bolıp, sáykes túrde, 1 hám -1 ge teń limitke iye. Biraq berilgen izbe-izliktiń ózi limitke iye emes. Demek, limitke iye emes izbe-izliktiń úles izbe-izlikleri limitke iye bolıwı múmkin eken.

Mına tastıyıqlaw da 1⁰ tastıyıqlawǵa uqsas dálillenedi: *sheksiz úlken izbe-izliktiń hár bir úles izbe-izligi sheksiz úlken izbe-izlik.*

13-anıqlama. Eger noqattıń qálegen dógeresinde izbe-izliktiń sheksiz kóp elementleri jatsa, onda bul noqat izbe-izliktiń *limit noqatı* dep ataladı.

14-anıqlama. Eger izbe-izlikten bazı bir noqatqa jıynaqlı úles izbe-izlik ajratıp alıw múmkin bolsa, onda bul noqat izbe-izliktiń *limit noqatı* dep ataladı.

Bul eki anıqlama ekvivalent.

2-lemma. *Hár bir jıynaqlı izbe-izlik óziniń limitine teń jalǵız bir limit noqatına iye.*

Dálillew. Meyli, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ bolsın. Izbe-izliktiń limitiniń anıqlaması boyınsha a noqattıń qálegen $\mathcal{E}$ — dógeresinde izbe-izliktiń bazı bir nomerden baslap hámme elementleri (sheksiz kóp) jatadı. Demek, a noqat $\{x_n\}$ izbe-izliktiń limit noqatı. 1⁰-tastıyıqlaw boyınsha $\{x_n\}$ izbe-izliktiń qálegen úles izbe-izligi a noqatqa jıynaqlı. Demek, 14- anıqlama boyınsha $\{x_n\}$ izbe-izliktiń a noqattan basqa limit noqatı joq. ▲

Bul lemma jıynaqlı bolmaǵan izbe-izlikler ushın orınlı emes. Mısalı, shegaralanǵan $\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1-\frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}, \dots$ izbe-izliktiń $x=0$ hám $x=1$, eki limit noqatı bar. Al $[0,1]$ kesindidegi racional sanlar izbe-izligi shegaralanǵan, biraq $\forall x \in [0,1]$ sanı bul izbe-izliktiń limit noqatı boladı.

15-anıqlama. Izbe-izliktiń eń úlken (eń kishi) limit noqatı usı izbe-izliktiń *joqarǵı (tómengi) limiti* dep ataladı hám $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$) simvolı menen belgilenedi.

Saldar. Izbe-izliktiń jıynaqlılıǵı onıń tómengi hám joqarǵı limitleriniń teńligine teń kúshli.

18-teorema (Bol`cano-Veyershtass teoreması). *Hár bir shegaralanǵan izbe-izlikten jıynaqlı úles izbe-izlik ajratıp alıw múmkin.*

Dálillew. Meyli, $\{x_n\}$ izbe-izlik shegaralanǵan bolsın. Onda bul izbe-izliktiń hámme elementleri bazı bir $[a,b]$ kesindige derek dep uyǵarıw múmkin: $\forall n \in N$ ushın $x_n \in [a,b]$.

$[a,b]$ kesindini $[a, \frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}, b]$ kesindilerge bólekleymiz. Bul kesindilerdiń $\{x_n\}$ izbe-izliktiń sheksiz kóp elementi jaylasqanın $[a_1, b_1]$ dep belgileyemiz. $[a_1, b_1]$ kesindiniń uzınlıǵı $\frac{b-a}{2}$ ge teń. Endi $[a_1, b_1]$ kesindini $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$, $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ kesindilerge bólekleymiz. Bul kesindilerdiń $\{x_n\}$ izbe-izliktiń sheksiz kóp elementi jaylasqanın $[a_2, b_2]$ dep belgileyemiz. $[a_2, b_2]$ kesindiniń uzınlıǵı $\frac{b-a}{2^2}$ na teń. Bul processti dawam etiw nátiyjesinde

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$$

kesindiler izbe-izligin alamız. Bul izbe-izlik kesindileri ushın

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

qatnas orınlı bolıp, $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$ teńlik orınlı,

yaǵnıy bul kesindiler tartılıwshı sistema dúzedi. Biriniń ishine biri jaylasqan kesindiler principi boyınsha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c \in [a_n, b_n] \quad (\forall n \in N)^*$$

Endi $\{x_n\}$ izbe-izliktiń $[a_1, b_1]$ kesindige derek bazı bir x_{k_1} elementin, $[a_2, b_2]$ kesindige derek bazı bir x_{k_2} ($k_1 < k_2$) elementin h. t. b. $[a_n, b_n]$ kesindige derek bazı bir x_{k_n} ($k_1 < k_2 < \dots < k_n$) elementin h. t. b. saylap alamız. Nátiyjede $\{x_n\}$ izbe-izliktiń $\{x_{k_n}\}$ ($k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$) úles izbe-izligi hasıl boladı. Bul izbe-izliktiń elementleri ushın dúziliwi boyınsha $\forall n \in N$ ushın $a_n \leq x_{k_n} \leq b_n$ teńsizlikler orınlı. 6- teorema boyınsha $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = c$ teńlik kelip shıǵadı. ▲

18-teorema qálegen shegaralanǵan izbe-izliktiń limit noqatlarınń kópligi qalay dúzilgenin túsindirip beredi. Eger $\{x_n\}$ izbe-izliktiń tómengi limitin $\underline{x} := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, al joqarǵı limitin

$\bar{x} := \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$ dep belgilesek, onda izbe-izliktiń hámme limit noqatları

$[\underline{x}, \bar{x}]$ kesindide jatadı, sonıń menen birge eger izbe-izlik tarqalıwshı bolsa, bul izbe-izlik keminde eki $\underline{x}$ hám $\bar{x}$ limit noqatlarǵa iye boladı. Biz joqarıda qaraǵan $\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}, \dots$ izbe-izlik tek eki $x = 0$ hám $x = 1$ limit noqatqa iye izbe-izlikke mısál boladı. Al $[0, 1]$ kesindide jatiwshı racional sanlar izbe-izligi limit noqatları $[\underline{x}, \bar{x}]$ kesindisin tolıq qaplaytuǵın izbe-izlikke mısál boladı, bul jerde $\underline{x} = 0$, $\bar{x} = 1$.

Tómendegi kópikler limit noqatlarınıń kópligi bolatuǵın izbe-izliklerge mısallardı ańsat qurıw múmkin: 1) aldınnan berilgen shekli sandaǵı $a_1, a_2, \dots, a_n$ sanlar kópligi; 2) aldınnan berilgen sheksiz $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ sanlar izbe-izligi (bul jaǵdayda $\{a_n\}$ izbe-izliktiń hár bir limit noqatı qurılǵan izbe-izliktiń limit noqatı boladı).

Mına tastıyqlaw shegaralanbaǵan izbe-izlik ushın Bol`cano-Veyershtass teoremasınıń ulıwmalasıwı boladı.

3-lemma. *Qálegen shegaralanbaǵan izbe-izlikten sheksiz úlken úles izbe-izlik (dara jaǵdayda, hámme elementleri birdey belgige iye sheksiz úlken úles izbe-izlik) ajratıp alıw múmkin.*

Bul lemmadan hám Bol`cano-Veyershtass teoremasınan tómendegi tastıyqlaw kelip shıǵadı.

4-lemma. *Qálegen izbe-izlikten yaki jıynaqlı, yaki hámme elementleri birdey belgige iye sheksiz úlken úles izbe-izlik ajratıp alıw múmkin.*

Eger izbe-izlikten hámme elementleri oń (teris) sheksiz úlken úles izbe-izlik ajratıp alıw múmkin bolsa, onda $+\infty$ ($-\infty$) bul izbe-izliktiń *limit noqatı* boladı deymiz.

Limit noqat túsiniǵın usılay keńeytirgenimizde 4- lemmadan tómendegi tastıyqlaw kelip shıǵadı: *qálegen izbe-izliktiń keminde bir limit noqatı bar.*

$+\infty$ hám $-\infty$ simvolları qálegen shekli x haqıyqıy sanı menen $-\infty < x < +\infty$ teńsizlikleri arqalı baylanısqa dep esaplap, tómendegi tastıyqlawǵa kelemiz: *qálegen izbe-izliktiń joqarǵı hám tómengi limitleri bar, yaǵnıy eń kishi hám eń úlken limit noqatları bar.*

7-§. Fundamental izbe-izlikler. Izbe-izliktiń jıynaqlılıǵınıń Koshi kriteriysi

$\{x_n\}$ izbe-izliktiń jıynaqlılıǵı máselesin jıynaqlı izbe-izlik anıqlaması járdeminde úyrenden izbe-izlik elementleri menen

izbe-izliktiń boljawlangan limiti arasındaǵı $x_n - a$ ayırmanı bahalawǵa tuwra keledi. Basqasha aytqanda bul izbe-izliktiń a limitin aldın ala biliw kerek boladı.

Bul paraqrafta izbe-izliktiń jıynaqlılıǵınıń bul haqqında tek onıń elementleri boyınsha juwmaq shıǵarıwǵa múmkinshilik beretuǵın hám izbe-izliktiń boljawlangan limitinen paydalanbaytuǵın «ishki» kriteriysin anıqlaymız. Bunday kriteriydi anıqlaw ushın fundamental izbe-izlik túsiniǵin kiritemiz.

Meyli, bazı bir $\{x_n\}$ izbe-izlik berilgen bolsın.

16-anıqlama. Eger $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $\exists N = N(\varepsilon)$ nomer tabılıp, $n > N$ hám $m > N$ nomerler ushın $|x_n - x_m| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı bolsa, onda bunday izbe-izlik *fundamental izbe-izlik* dep ataladı.

Mısallar. № 1. $x_n = \frac{n}{n+1}$ izbe-izlik fundamental izbe-izlik

bolatuǵının kórsetiń.

Sh e sh i w. Berilgen izbe-izlik ushın

$$|x_n - x_m| = \left| \frac{n}{n+1} - \frac{m}{m+1} \right| = \left| \frac{n-m}{(n+1)(m+1)} \right| < \\ < \frac{n+m}{nm} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

teńsizlik orınlı. Eger $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $N = \left[\frac{2}{\varepsilon} \right] + 1$ dep alsaq,

$n > N$ $m > N$ nomerler ushın $|x_n - x_m| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı.

Demek, berilgen izbe-izlik fundamental izbe-izlik eken.

№ 2. $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ izbe-izlik fundamental izbe-izlik

bolatuǵının kórsetiń.

Sh e sh i w. Bul jaǵdayda ($n > m$ bolǵanda)

$$|x_n - x_m| = \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

bolıp, bul teńliktiń oń tárepindegi hár bir qosılıwshıǵa teńsizlikti qollanıp,

$$\frac{1}{p^2} < \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$$

$$|x_n - x_m| < \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) + \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m}$$

teńsizlikke iye bolamız. Eger $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

dep alsaq, $n > m > N$ nomerler ushın $|x_n - x_m| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı. Demek, berilgen izbe-izlik fundamental izbe-izlik boladı eken.

№ 3. Fundamental bolmaǵan izbe-izlikke mısıl keltiremiz.

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

izbe-izlikti qaraymız. Bul izbe-izlik ushın $\forall m > 1$ nomer alınsa da

$$|x_{2m} - x_m| = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{2m} > m \cdot \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}$$

teńsizlik orınlı. Bunnan berilgen izbe-izlik fundamental emesligi kelip shıǵadı.

19-teorema (Koshi kriteriysi). *Izbe-izlik jıyınalı bolıwı ushın bul izbe-izlik fundamental izbe-izlik bolıwı zárúr hám jetkilikli.*

Zárúrligi. Meyli, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ bolsın. $\{x_n\}$ izbe-izliktiń fundamental izbe-izlik ekenin kórsetemiz. $\forall \varepsilon > 0$ san alamız.

Izbe-izliktiń limitiniń anıqlaması boyınsha $\frac{\varepsilon}{2}$ san ushın

$\exists N = N(\varepsilon)$ nomer tabılıp, $n > N$ nomerler ushın $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ teńsizlik orınlı boladı. Usıǵan uqsas $m > N$ nomerler ushın da $|x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ teńsizlik orınlı. Nátiyjede $n > N$ hám $m > N$ nomerler ushın

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

teńsizlikke iye bolamız. Bul $\{x_n\}$ izbe-izliktiń fundamental izbe-izlik ekenin bildiredi.

Jetkilikliliği. Meyli, $\{x_n\}$ izbe-izlik fundamental izbe-izlik bolsın. Bul izbe-izliktiń jıynaqlı izbe-izlik ekenin kórsetemiz. $\forall \varepsilon > 0$ san saylap alamız. Fundamental izbe-izlik anıqlaması

boyınsha $\frac{\varepsilon}{2}$ san ushın $\exists N = N(\varepsilon)$ nomer tabılıp, $n > N$ hám

$m > N$ nomerler ushın $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ teńsizlik orınlı boladı.

Bunnan $m > N$ teńsizlikti qanaatlandıırwshı hár bir tayınlangán

m nomer ushın $x_m - \frac{\varepsilon}{2} < x_n < x_m + \frac{\varepsilon}{2}$ teńsizlikler orınlanatuǵını

kelip shıǵadı. Bul $\{x_n\}$ izbe-izliktiń shegaralangánlıǵın kórsetedi. Bol'cano- Veyershtrass teoreması boyınsha bul izbe-izlikten jıynaqlı $\{x_{k_n}\}$ úles izbe-izlik ajıratıp alıw múmkin:

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = a$. $\forall \varepsilon > 0$ san alamız. Izbe-izliktiń limitiniń

anıqlaması boyınsha $\frac{\varepsilon}{2}$ san ushın $\exists N = N(\varepsilon)$ nomer tabılıp,

$n > N$ nomerler ushın $|x_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ teńsizlik orınlı boladı. Eger

$m = k_n$ bolsa, $|x_n - x_{k_n}| < \frac{\varepsilon}{2}$ teńsizlikti alamız. Bul eki teńsizlikten

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{k_n}) + (x_{k_n} - a)| \leq |x_n - x_{k_n}| + |x_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

teńsizlikke iye bolamız. Bul $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ bolatuǵının bildiredi. ▲

3- BAP

BIR ÓZGERIWSHILI FUNKCIYA HAM ONÍŇ LIMITI

1-§. Funkciya túsini

1.1. Ózgeriwshi shama hám funkciya túsini. Ózgeriwshi óz-ara baylanısqan eki ózgeriwshi shamanı úyreniw funkciya túsini alıp keledi. Sonıń ushın ózgeriwshi shama túsini anıqlıq kirgiziwden baslaǵanımız maqul.

Real ózgeriwshi fizikalıq shamalardı úyreniw nátiyjesinde biz bul shamalar mudamı qálegen mánislerdi qabıl qıla bermeydi degen juwmaq shıǵaramız. Mısalı, materiallıq noqat tezligi $3 \cdot 10^{10} \text{ sm/sek}$ ten, yaǵnıy boslıqtaǵı jarıqlıq tezliginen, aspaydı, dene temperaturası $-273^0 C$ dan kishi bolmaydı, $y = A \cos(\omega t + \delta)$ nızamı boyınsha garmonikalıq terbelis jasawshi materiallıq noqatın orın almasıw háreketi tek $[-A, A]$ kesindidegi mánislerdi qabıl qılıwı múmkin h. t. b.

Tábiyatta baqlanatuǵın ózgeriwshi shamalardıń fizikalıq qásiyetlerinen abstrakciyalanıp, tek qabıl qılıwı múmkin bolǵan san mánisleri menen xarakterlenetuǵın *matematikalıq ózgeriwshi shama* túsini kelemiz.

Berilgen x ózgeriwshi shamalıń qabıl qılıwı múmkin bolǵan mánisleriniń kópligi $\{x\}$ usı ózgeriwshi shamalıń *ózgeriw oblasti* dep ataladı. Ózgeriw oblasti berilgen ózgeriwshi shama berilgen dep esaplanadı.

Bunnan bılay ózgeriwshi shamalardı kishi $x, y, t, \dots$ latin alfavitiniń háripleri, al bul ózgeriwshi shamalardıń ózgeriw oblastların $\{x\}, \{y\}, \{t\}, \dots$ simvolları menen belgileybiz.

Meyli, ózgeriw oblasti bazı bir $\{x\} \subset R$ kóplik bolǵan x ózgeriwshi shama berilgen bolsın.

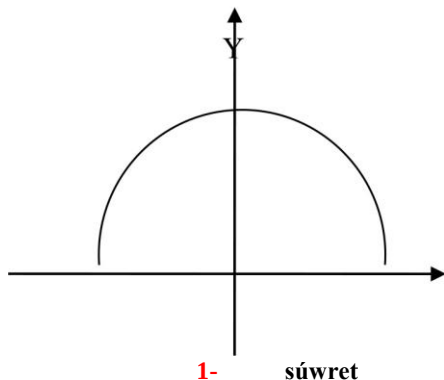
1-anıqlama. Eger x ózgeriwshiniń hár bir $x \in \{x\}$ mánisine málim nızam boyınsha bazı bir y san sáykes qoyılǵan

bolsa, onda $\{x\}$ kópikte $y = y(x)$ yaki $y = f(x)$ funkciya berilgen dep ayıladı.

x ózgeriwshi funkciyanıń argumenti yaki erikli ózgeriwshi, argumenttiń $x \in \{x\}$ mánisine sáykes y san funkciyanıń x noqattaǵı dara mánisi dep ataladı. Argumenttiń ózgeriw oblastı bolǵan $\{x\} \subset R$ kópik funkciyanıń anıqlanıw oblastı dep ataladı hám $D(f)$ simvolı menen belgilenedi. Funkciyanıń hámme dara mánisleri funkciyanıń mánisler kópligi dep atalatuǵın $\{y\} \subset R$ kópik dúzedi, bul kópik $E(f)$ yaki $R(f)$ simvolı menen belgilenedi. $y = f(x)$ jazıwdaǵı f háribi funkciyanıń xarakteristikası dep ataladı.

Funkciyanı, onıń argumentin hám xarakteristikasını belgilew ushın hár qıylı simvollarıdan paydalanıw múmkin.

Mısallar. 1). $y = \sqrt{4 - x^2}$. Funkciyanıń anıqlanıw oblastı $D(f) = \{x \in R : 4 - x^2 \geq 0\} = [-2, 2]$, al mánisler kópligi $E(f) = [0, 2]$ (1- súwret).

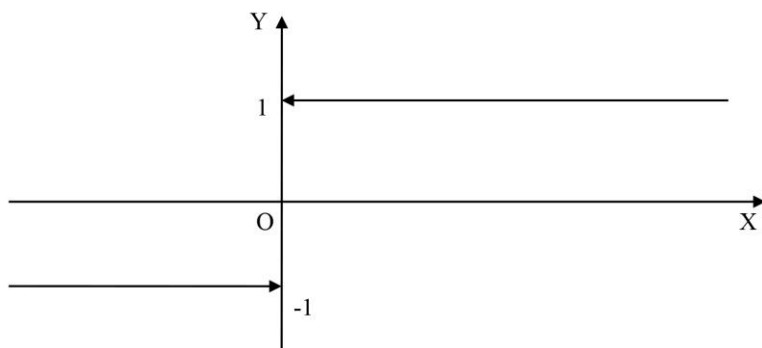


$$2) y = D(x) = \begin{cases} 0, & x - \text{irrac. san}, \\ 1, & x - \text{rac. san}. \end{cases}$$

Bul funksiya *Dirixle funksiya* dep ataladı.
 $D(f) = R, \quad E(f) = \{0, 1\}.$

$$3) \quad y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}.$$

(**sgn** x — x sanının belgisi). Funkciyanın grafiği 2-súwrette berilgen. $D(f) = R, \quad E(f) = \{1, 0, -1\}.$

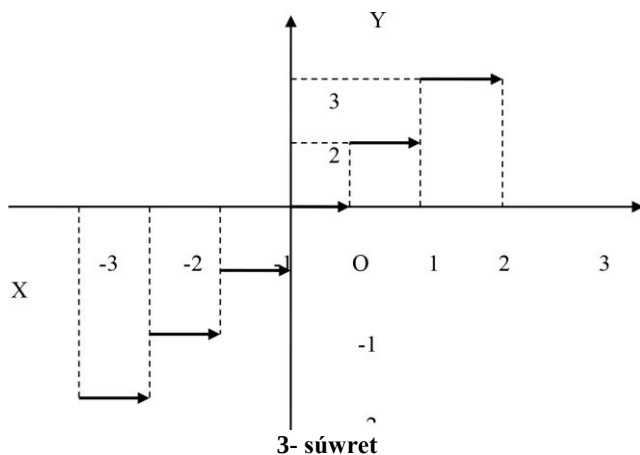


2- súwret

4) $y = [x]$ yaki $y = E(x)$ ($[x]$ yaki $E(x)$ - simvolı menen $x \in R$ sanının *pútin bólegi*, yaǵnıy bul sannan úlken bolmaǵan eń úlken san belgilenedi hám «ant`e x » dep oqıladı). $D(f) = R, \quad E(f) = Z$. Funkciyanın grafiği 3- súwrette berilgen.

5) $y = n!$ ($n!$ simvolı « n faktorial» dep oqıladı, $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$). Funkciyanın anıqlanıw oblastı- hámme natural sanlar kópligi, mánisler kópligi- $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ kórinisindegi natural sanlar kópligi.

Funkciyanın anıqlanıw oblastı hám mánisler kópligi arasında baylanıs ornátıwshı nızam kóbinese formulalar járdeminde beriledi. Funkciyanın beriliwiniń bul usılı *analitikalıq usıl* dep ataladı.

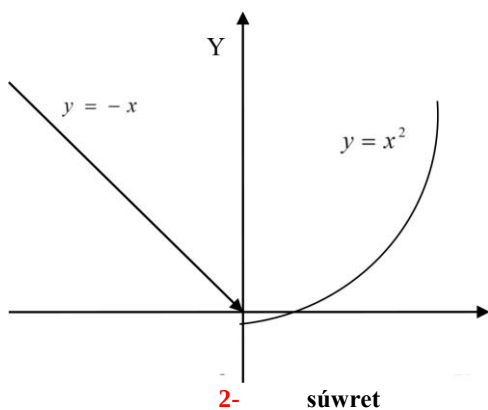


Funkciya óziniń anıqlanıw oblastınıń hár qıylı bóleklerinde hár qıylı formulalar menen beriliwi múmkin.

Mısalı,

$$y = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

funkciya sanlar kósherinde analitikalıq usıl menen (eki formula járdeminde) berilgen (4- súwret).



Argumenttiń ayırım mánisleriniń hám olarǵa sáykes funkciyanıń dara mánisleriniń kesetin beriwden ibarat

funkciyanıń beriliwiniń *kestelik usılı* da keń qollanıladı. Funkciyanıń beriliwiniń bul usılında argumenttiń keste de berilmegen aralıq mánislerine sáykes funkciyanıń dara mánislerin juwıq esaplaw múmkin.

Ámeliy ólshew islerinde argument penen funkciya arasındagı sáykeslik grafik járdeminde beriletuǵın funkciyanıń beriliwiniń *grafikalıq usılı* keń tarqalǵan.

Solay etip, biz funkciyanıń analitikalıq, kestelik hám grafikalıq usıllarda beriliwin kórdik. Funkciyalar tek usı usıllar menen berilip ǵana qalmastan, basqasha, baylanıs nızamı sózler menen aytılp ta, beriliwi múmkin. Mısalı, hám bir n natural sanǵa bul sannıń bóliwshileriniń sanın sáykes qoyamız. Bul sáykeslikti φ menen belgileymiz. Nátiyjede

$\varphi(1)=1, \quad \varphi(2)=2, \quad \varphi(3)=2, \quad \varphi(4)=3, \quad \varphi(5)=2, \quad \dots$
funkciyanı alamız. Ádette, bul funkciya *Eyler funkciyası* dep ataladı.

Eyler funkciyası ushın analitikalıq formula joq, onı keste usılında da, grafik usılında da anıqlap bolmaydı. $\forall p$ ápiwayı san ushın $\varphi(p)=2$ ekeni málím. Jeterli dárejede úlken ápiwayı sanlar bar ekenliginen bul funkciyanıń tábiyatı júdá quramalı ekeni kórinip tur.

Matematikalıq analiz kursında, tiykarınan, analitiqalıq usılda berilgen funkciyalar qaraladı.

1.2. Shegaralanǵan funkciyalar. Meyli, $f(x)$ funkciya bazı bir $\{x\} \subset R$ kóplikte anıqlanǵan bolsın.

2-anıqlama. Eger $\forall x \in \{x\}$ noqatta $f(x) \leq M$ ($f(x) \geq m$) teńsizlik orınlı bolatuǵın M sanı (m sanı) tabılsa, onda $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte joqarıdan (tómennen) shegaralanǵan dep ataladı.

$f(x)$ funkciyanıń $\{x\}$ kóplikte joqarıdan (tómennen) shegaralanǵanlıǵı bul funkciyanıń mánislerinen dúzilgen

$Y = \{f(x): x \in \{x\}\}$ kópliktiń joqarıdan (tómennen) shegaralanǵanlıǵın bildiredi.

3-anıqlama. Eger $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte hám joqarıdan, hám tómennen shegaralanǵan bolsa, onda bul funkciya $\{x\}$ kóplikte shegaralanǵan dep ataladı.

4-anıqlama. Eger $\forall M$ san ushın (bul san qanday úlken san bolsa da) $f(x_0) > M$ teńsizlikti qapnaatlandıratuǵın bazı bir $x_0 \in \{x\}$ noqat tabılsa, onda $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte joqarıdan shegaralanbaǵan dep ataladı.

5-anıqlama. Eger $\forall m$ san ushın (bul san qanday kishi san bolsa da) $f(x^*) < m$ teńsizlikti qapnaatlandıratuǵın bazı bir $x^* \in \{x\}$ noqat tabılsa, onda $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte tómennen shegaralanbaǵan dep ataladı.

Keminde bir tárepten (yaki joqarıdan, yaki tómennen) shegaralanbaǵan funkciya *shegaralanbaǵan funkciya* dep ataladı.

1.3. Jup hám taq funkciyalar. Dáslep o noqatqa (sanaq basına) qarata simmetriyalıq kóplik túsiniǵın kiritemiz.

Eger hár bir $x \in \{x\}$ noqat penen birge $-x \in \{x\}$ bolsa, onda $\{x\}$ kóplik o noqatqa (sanaq basına) qarata simmetriyalıq kóplik dep ataladı.

Meyli, $f(x)$ funkciya sanaq basına qarata simmetriyalıq $\{x\}$ kóplikte anıqlanǵan bolsın.

6-anıqlama. Eger $x \in \{x\}$ noqatta $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$) teńlik orınlı bolsa, onda $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte *jup (taq) funkciya* dep ataladı.

Eger $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar $\{x\}$ kóplikte jup funkciyalar bolsa, onda $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$ funkciyalar da $\{x\}$ kóplikte jup funkciyalar boladı.

Eger $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar $\{x\}$ kóplikte taq funkciyalar bolsa, onda $f(x) \pm g(x)$ funkciyalar $\{x\}$ kóplikte taq, al $f(x) \cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$ funkciyalar jup funkciyalar boladı.

Jup funkciyalardıń grafigi ordinatalar kósherine qarata, al taq funkciyanıń grafigi koordinatalar basına qarata, simmetriyalıq boladı.

Funkciya hárdayım jup yaki taq bolıwı shárt emes. Jup ta, taq ta bolmağan funkciyalar júdá kóp ushırasadı. Biraq mına teorema orınlı:

1-teorema. *Sanaq basına qarata simmetriyalıq kóplikte anıqlanğan hár bir funkciya jup hám taq funkciyalardıń qosındısı sıpatında anılatıladı.*

Dálillew. Meyli, $f(x)$ funkciya sanaq basına qarata simmetriyalıq $\{x\}$ kóplikte anıqlanğan funkciya bolsın. Usı funkciya járdeminde $\varphi(x) := \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ hám $\psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ funkciyalardı dúzemiz. $\varphi(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte jup, al $\psi(x)$ funkciya taq funkciya boladı. Sonıń menen birge bul funkciyalardıń qurılıwı boyınsha $\varphi(x) + \psi(x) = f(x)$ teńlik orınlı. ▲

1.4. Periodlı funkciyalar. Meyli, $f(x)$ funkciya bazı bir $\{x\} \subset R$ kóplikte anıqlanğan bolsın.

7-anıqlama. Eger $\forall x \in \{x\}$ ushın 1) $x - T \in \{x\}$, $x + T \in \{x\}$; 2) $f(x + T) = f(x)$ bolatuğın $T \neq 0$ san tabılsa, onda $f(x)$ funkciya *periodlı funkciya* dep, al T san funkciyanıń *periodı* lep ataladı.

Mısalı, $y = \sin x$, $y = \cos x$ funkciyalar $T = 2\pi$ periodlı, al $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ funkciyalar $T = \pi$ periodlı funkciyalar.

Periodlı funkciyalardıń qásiyetleri:

a) Eger $f(x)$ funkciya $T \neq 0$ periodli funkciya bolsa, onda $T_n = n \cdot T$ ($n \in \mathbb{Z}$) sanlar da bul funkciyanın periodı boladı.

Demek, $\pm T, \pm 2T, \dots$ sanlar $f(x)$ funkciyanın periodı boladı eken. Bul funkciyanın ón periodlarının kópigin $\{T_+\}$ dep belgileymiz. Eger $T_0 = \inf \{T_+\}$ san funkciyanın periodı bolsa, onda bul san funkciyanın *eń kishi ón periodı (tiykarǵı periodı)* dep ataladı. Funkciya eń kishi ón periodqa iye bolıwı da, bolmawı da múmkin.

b) Eger T_1 hám T_2 sanlar $f(x)$ funkciyanın periodı bolsa, onda $T_1 \pm T_2 \neq 0$ sanlar da bul funkciyanın periodı boladı.

c) Eger $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalardıń hár biri $T \neq 0$ periodlı funkciya bolsa, onda $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$ ($g(x) \neq 0$) funkciyalar da T periodlı funkciya boladı.

Misallar. № 1. $y = \sin x$, $y = \cos x$ funkciyalardıń periodlar kópigi $\{2k\pi: k \in \mathbb{Z}\}$ bolıp, eń kishi ón periodı $T = 2\pi$, al $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ funkciyalardıń periodlar kópigi $\{n\pi: n \in \mathbb{Z}\}$ bolıp, eń kishi ón periodı $T_0 = \pi$.

№ 2. $f(x) \equiv C - \text{const.}$ funkciyanın periodı $\forall T \neq 0$ san bolıp, bul funkciyanın eń kishi ón periodı joq.

№ 3. $f(x) = \{x\}$ ($\{x\}$ – x sannıń bólshek bólegi) funkciyanın periodlar kópigi $\{m: m = \pm 1, \pm 2, \dots\}$ bolıp, eń kishi ón periodı $T_0 = 1$.

№ 4. $\forall T \neq 0$ racional san

$$D(x) = \begin{cases} 0, & x - \text{irrac. san,} \\ 1, & x - \text{rac. san.} \end{cases}$$

Dirixle funkciyasınıń periodı boladı. Haqıyqatında da, $\forall T \neq 0$ racional san ushın

$$x + T = \begin{cases} \text{irrac. san,} & x - \text{irrac. san,} \\ \text{rac. san,} & x - \text{rac. san.} \end{cases}$$

bolǵanlıqtan

$$D(x + T) = \begin{cases} 0, & x - \text{irrac. san,} \\ 1, & x - \text{rac. san.} \end{cases}$$

boladı. Sonıń ushın $\forall x \in R$ ushın $D(x + T) = D(x)$ teńlik orınlı. Demek, $D(x)$ - Dirixle funkciyası periodlı funkciya bolıp, $\forall T \neq 0$ racional san onın periodı boladı. Bul funkciya ushın eń kishi ón period joq.

Endi bazı bir $T \neq 0$ irracional sandı alayıq. x - racional san bolsa da, irracional san bolsa da $x + T$ - irracional san bolıp, $D(x + T) = 0$ teńlik orınlı, yaǵnıy $D(x + T) = D(x)$ teńlik orınlanbaydı. Sonıń ushın $\forall T \neq 0$ irracional san $D(x)$ - Dirixle funkciyasının periodı emes.

1.5. Monoton funkciyalar. Meyli, $f(x)$ funkciya bazı bir $\{x\} \subset R$ kóplikte anıqlanǵan bolsın.

8-anıqlama. Eger $x_1 < x_2$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı $\forall x_1, x_2 \in \{x\}$ noqatlarda $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$) teńsizlik orınlı bolsa, onda $f(x)$ funkciya bazı bir $\{x\}$ kóplikte ósiwshi (kemiwshi) funkciya dep ataladı.

9-anıqlama. Eger $x_1 < x_2$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı $\forall x_1, x_2 \in \{x\}$ noqatlarda $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$) teńsizlik orınlı bolsa, onda $f(x)$ funkciya bazı bir $\{x\}$ kóplikte qatal ósiwshi (qatal kemiwshi) funkciya dep ataladı.

Ósiwshi (qatal ósiwshi) hám kemiwshi (qatal kemiwshi) funkciyalar, ulıwma atama menen, *monoton funkciyalar* dep ataladı.

Meyli, $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar $\{x\}$ kóplikte ósiwshi (kemiwshi) funkciyalar, al C - turaqlı san bolsın.

a) $f(x) + C$ funkciya $\{x\}$ kóplikte ósiwshi (kemiwshi) funkciya.

b) $C \cdot f(x)$ funkciya $C > 0$ bolǵanda ósiwshi (kemiwshi), al $C < 0$ bolǵanda kemiwshi (ósiwshi) funkciya.

c) $f(x) + g(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte ósiwshi (kemiwshi) funkciya.

1.6. Keri funkciya. Meyli, $f(x)$ funkciya bazı bir $\{x\} \subset R$ kóplikte anıqlanǵan bolıp, onıń mánisler kópligi $\{y\} = \{f(x) : x \in \{x\}\}$ bolsın.

Eger málim qaǵıyda boyınsha $\forall y \in \{y\}$ noqatqa jalǵız bir $x \in \{x\}$ noqat qoyılsa, onda $\{y\}$ kóplikte $f(x)$ funkciyaǵa *keri funkciya* anıqlanǵan dep ayıladı hám bul funkciya $x = f^{-1}(y)$ dep belgilenedi.

$y = f(x)$ funkciyaǵa keri funkciyanıń grafigi $f(x)$ funkciyanın grafigin I hám III shereklerdiń bissektrisası dógeresinde 180° ǵa buriw nátiyjesinde alınadı.

1.7. Quramalı funkciya. Meyli, $y = f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte anıqlanǵan bolıp, onıń mánisler kópligi $\{y\} = \{f(x) : x \in \{x\}\}$ bolsın. Óz nábwetinde $\{y\}$ kóplikte $z = \varphi(y)$ funkciya anıqlanǵan bolsın. Nátiyjede $\forall x \in \{x\}$ noqatqa bir $y \in \{y\}$ ($f : x \rightarrow y$) noqat, al bul noqatqa óz nábwetinde bir z ($\varphi : y \rightarrow z$) noqat sáykes qoyıladı: $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{\varphi} z$. Demek, $\forall x \in \{x\}$ noqatqa bir z noqat sáykes qoyıladı.

Ádette, bunday jaǵdayda f hám φ funkciyalardıń quramalı funkciyası berilgen dep ayıladı hám $z = \varphi(f(x))$ dep belgilenedi.

2-§. Funkciyanıń limiti

2.1. Kópliktiń limit noqatı. $(a - \delta, a + \delta)$ intervalı $a \in R$ noqattıń δ – dógeregi dep atalatuǵını hám $U_\delta(a)$ simvoli menen belgilenetuǵını málim: $U_\delta(a) := (a - \delta, a + \delta)$.

Sonıń menen birge $(a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ kóplik $a \in R$ noqattıń oyılǵan δ – dógeregi dep ataladı hám $U_\delta^0(a)$ simvoli menen belgilenendi: $U_\delta^0(a) = U_\delta(a) \setminus \{a\}$.

$$U(\infty) = \{x \in R : |x| > M\}, \quad U(-\infty) = \{x \in R : x < -M\},$$

$$U(+\infty) = \{x \in R : x > M\}$$

kóplikler (bul jerde $M > 0$), sáykes túrde, ∞ , $-\infty$, $+\infty$ «noqat»larınıń dógeregi dep ataladı.

10-anıqlama. $a \in R$ noqattıń qálegen $\forall \delta$ – dógereginde $\{x\}$ kópliktiń a noqattan ózgeshe keminde bir noqatı bar bolsa, onda a noqat $\{x\}$ kópliktiń limit noqatı dep ataladı.

Kópliktiń limit noqatı usı kóplikke derek bolıwı da, bolmawı da múmkin.

Q á s i y e t l e r i. 1) Kópliktiń limit noqatınıń qálegen dógereginde bul kópliktiń sheksiz kóp noqatı bar.

Kerisinen dálilleybiz. Meyli, a noqattıń bazı bir $U_\sigma(a)$ dógeregine $\{x\}$ kópliktiń shekli sandaǵı $a_1, a_2, \dots, a_n$ noqatları derek bolsın. Onda, eger $|a - a_1|, |a - a_2|, \dots, |a - a_n|$ hám σ sanlardıń eń kishisin δ dep alsaq, a noqattıń $U_\delta(a)$ dógereginde $\{x\}$ kópliktiń a noqattan ózgeshe hesh bir noqatı bolmaydı. Bul a noqattıń $\{x\}$ kópliktiń limit noqatı ekenligine qarama- qarsı. ▲

2) Kópliktiń noqatlarınan bul kópliktiń limit noqatına jıynaqlı izbe-izlik dúziw múmkin.

Nolge jıynaqlı $\{\mathcal{S}_n\}$ oń sanlar izbe-izligin alıp, a noqattıń $U_{\delta_n}(a)$ dógerекlerin dúzemiz. a noqat $\{x\}$ kópliktiń limit noqatı

bolǵanlıqtan bul dógereklerdiń hár birewinde $\{x\}$ kópliktiń a noqattan ózgeshe x_n noqatı bar: $x_n \in U_{\delta_n}(a)$ ($x_n \neq a$). Kópliktiń limit noqatınıń 1- qásiyetinen bul x_n noqatı $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ noqatlardan ózgeshe kılıp alıw múmkin. Solay etip, $\forall n \in N$ ushın $|x_n - a| < \delta_n$ boladı. $\{\delta_n\}$ izbe-izligi sheksiz kishi izbe-izlik bolǵanlıqtan $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $\exists N = N(\varepsilon)$ nomer tabılıp, $n > N$ nomerler ushın $|\delta_n| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı boladı. Demek, $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $\exists N = N(\varepsilon)$ nomer tabılıp, $n > N$ nomerler ushın $|x_n - a| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı, al bul $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ bolatuǵının bildiredi. ▲

Tastıyqlawdıń dálillewinen kópliktiń elementlerinen usı kópliktiń limit noqatına jıynaqlı bolǵan júdá kóp izbe-izlik dúziw múmkinligi kórinip tur.

11-anıqlama. Eger $U(\infty)$ ($U(-\infty)$, $U(+\infty)$) dógerekte $\{x\}$ kópliktiń keminde bir noqatı tabılsa, onda ∞ «»noqat ($-\infty$ «»noqat. $+\infty$ «»noqat) $\{x\}$ kópliktiń limit noqatı dep ataladı.

2.2. Funkciyanıń noqattaǵı limitiniń anıqlamaları. Meyli, $y = f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte anıqlanǵan funkciya, al a noqat $\{x\}$ kópliktiń limit noqatı bolsın.

12-anıqlama. (Funkciyanıń noqattaǵı limitiniń Geyne anıqlaması). Eger argumenttiń a noqattan ózgeshe mánislerinen dúzilgen, a noqatqa jıynaqlı $\forall \{x_n\}$ izbe-izlikke sáykes funkciyanıń dara mánislerinen dúzilgen $\{f(x_n)\}$ izbe-izlik b sanına jıynaqlı bolsa, onda $y = f(x)$ funkciyanıń a noqattaǵı ($x \rightarrow a$ daǵı) limiti b sanına teń deymiz hám $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ (yaki $x \rightarrow a$ da $f(x) \rightarrow b$) dep jazamız.

Misallar. 1) $f(x) \equiv c$ (c – turaqlı san) funkciya sanlar kósheriniń qálegen noqatında limitke iye hám bul limit c sanına teń.

2) $f(x) = x$ funkciya sanlar kósheriniń $\forall a$ noqatında limitke iye hám bul limit a sanına teń.

3) $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$ funkciyanıń $x = 4$ noqattaǵı limitin tabamız. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 4$ ($\forall n \in N \quad x_n \neq 4$) bolǵan $\forall \{x_n\}$ izbe-izlik alamız. Bul izbe-izlikke saykes funkciyanıń dara mánislerinen dúzilgen izbe-izlik $f(x_n) = \frac{x_n^2 - 16}{x_n^2 - 4x_n} = \frac{x_n + 4}{x_n}$ kóriniste bolıp, limiti 2 ge teń. Demek, $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} = 2$.

13-anıqlama. (Funkciyanıń noqattaǵı limitiniń Koshi anıqlaması). Eger $\forall \varepsilon > 0$ can ushın $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sanı tabılıp, $0 < |x - a| < \delta$ shártin qanaatlandıırıwshı $\forall x \in \{x\}$ noqatta $|f(x) - b| < \varepsilon$ teńsizligi orınlı bolsa, onda $y = f(x)$ funkciyanıń a noqattaǵı ($x \rightarrow a$ daǵı) limiti b sanına teń deymiz.

Misal. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ funkciyanıń $x = 1$ noqattaǵı limiti 2 ge teń ekenin kórsetemiz. $\forall \varepsilon > 0$ can ushın $\delta = \varepsilon$ dep alsaq, $|x - 1| < \delta$ ($x \neq 1$) shártin qanaatlandıırıwshı $\forall x \in \{x\}$ noqatta $\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = |x + 1 - 2| = |x - 1| < \delta = \varepsilon$ teńsizligi orınlı boladı.

Demek, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

1- Eskertiw. Geyne anıqlamasındaǵı $\{x_n\}$ izbe-izliktiń elementleriniń a noqattan ózgeshe bolıwı hám Koshi

anıqlamasındağı argumenttiń mánisleri $0 < |x - a| < \delta$ shártin qanaatlandırıwı, yaǵnıy a noqattan ózgeshe bolıwı, shártleri úlken áhmiyetke iye. Bul talaptıń qoyılıwı sebebi- $y = f(x)$ funkciya a noqatta anıqlanbaǵan bolıwı da múmkin.

2- Eskertiw. Geyne anıqlamasınıń shártlerin qanaatlandırıwshı $\{x_n\}$ izbe-izliklerge sáykes funkciyanıń dara mánislerinen dúzilgen $\{f(x_n)\}$ izbe-izliklerdiń bári bir sanǵa- b sanına jıynaqlı bolıwı kerek. Eger bunday bolmasa (yaǵnıy $\{f(x_n)\}$ izbe-izlikler hár qıylı sanlarǵa jıynaqlı bolsa), onda funkciya a noqatta limitke iye emes. Mısallar keltiremiz.

№ 1. $D(x)$ - Dirixle funkciyası sanlar kósheriniń hesh bir noqatında limitke iye emes. Haqıyqatında da, $a \in R$ noqatına jıynaqlı racional sanlar izbe-izligi ushın funkciyanıń sáykes dara mánisleriniń izbe-izliginiń limiti 1 ge, al a noqatına jıynaqlı irracional sanlar izbe-izligi ushın funkciyanıń sáykes dara mánisleriniń izbe-izliginiń limiti 0 ge teń.

№ 2. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ funkciyanıń anıqlanıw oblastı $D(f) = R \setminus \{0\}$ bolıp, $x = 0$ noqat funkciyanıń $D(f)$ anıqlanıw oblastınıń limit noqatı.

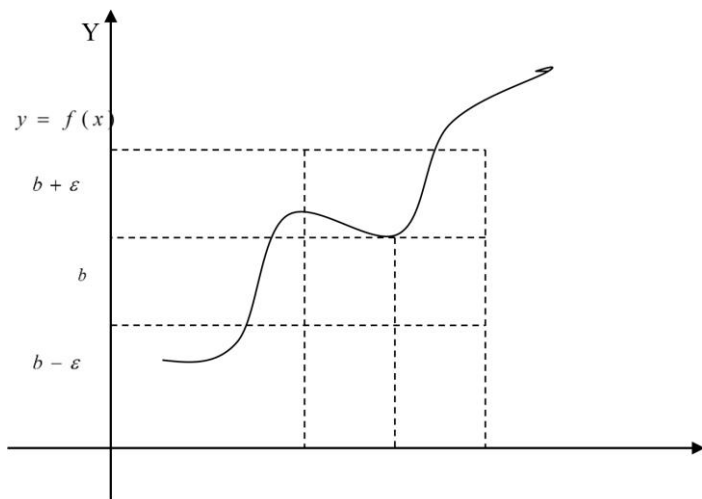
$x = 0$ noqatqa jıynaqlı $x'_n = \frac{1}{n\pi}$ ($n=1, 2, \dots$) sanlar izbe-izligin alamız. Bul izbe-izlik elementlerine sáykes funkciyanıń dara mánislerinen dúzilgen izbe-izlik elementleri $f(x'_n) = \sin(n\pi) = 0$ bolıp, bul izbe-izliktiń limiti nolge teń.

$x = 0$ noqatqa jıynaqlı $x''_n = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi}$ ($n=1, 2, \dots$) sanlar izbe-izligin alamız. Bul izbe-izlik elementlerine sáykes funkciyanıń dara mánislerinen dúzilgen izbe-izlik elementleri $f(x''_n) = \sin(\pi/2 + 2n\pi) = 1$ bolıp, bul izbe-izliktiń limiti 1 ge teń.

Demek, berilgen funkciya $x = 0$ noqatta limitke iye emes.

3- Eskertiw. $y = f(x)$ funkciya anıqlanğan $\{x\}$ kóplik a noqattıń bazı bir δ – dógeregin tolıq qaplawı shárt emes. Bul kópliktiń a noqattıń qálegen oyılğan δ – dógereginde keminde bir noqatı bar bolıwı ǵana talap etiledi.

4- Eskertiw. Koshi anıqlamasındaǵı $0 < |x - a| < \delta$ shártı $a - \delta < x < a + \delta$, $x \neq a$ qatnaslarǵa, yaǵnıy $x \in U_\delta^0(a)$ shártine ekvivalent, sonday- aq, $|f(x) - b| < \varepsilon$ teńsizligi $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$ teńsizliklerine, yaǵnıy $f(x) \in U_\varepsilon(b)$ shártine ekvivalent.



1-súwret

5- Eskertiw. $f(x)$ funkciyanı aldınnan berilgen $\varepsilon > 0$ anıqlıqta juwıqlastırıw ideyasınan paydalanıp, funkciyanıń noqattaǵı limitiniń Koshi anıqlamasın tómendegishe basqasha aytıwımız da múmkin.

Eger aldınnan berilgen qálegen $\varepsilon > 0$ anıqlıq ushın a noqattıń sonday oyılğan δ – dógeregin kórsetiw múmkin bolıp,

argumenttiń a noqattıń usı kórsetilgen oyılǵan dógeresine derek mánisleri ushın b sanı $f(x)$ funkciyanı $\varepsilon > 0$ anıqlıqta juwıqlastırsa, onda b sanı $f(x)$ funkciyanıń a noqattaǵı limiti dep ataladı (1- súwret).

6- Eskertiw. $f(x)$ funkciya a noqatta jalǵız bir limitke iye boladı. Haqıyqatında da, funkciyanıń noqattaǵı limitiniń Geyne anıqlaması ushın bul $\{f(x_n)\}$ izbe-izliginiń limitiniń birden-birliginen, al Koshi anıqlaması ushın tómendegi ekvivalentlik teoremasınan kelip shıǵadı.

2-teorema. *Funkciyanıń noqattaǵı limitiniń Geyne hám Koshi anıqlamaları óz-ara ekvivalent.*

Dálillew. 1) Dáslep, meyli, b sanı $f(x)$ funkciyanıń a noqattaǵı Koshi anıqlaması boyınsha limiti bolsın. Usı b sanı $f(x)$ funkciyanıń a noqattaǵı Geyne anıqlaması boyınsha da limiti bolatuǵının dálilleymiz. Meyli, $\{x_n\}$ -elementleri a noqattan ózgeshe, a noqatqa jıynaqlı qálegen izbe-izlik bolsın, usı izbe-izlikke sáykes funkciyanıń dara mánislerinen dúzilgen $\{f(x_n)\}$ izbe-izliktiń b noqatqa jıynaqlı ekenin dálillew talap qılınadı.

$\forall \varepsilon > 0$ sanın hám bul san boyınsha $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sanın $0 < |x - a| < \delta$ shártin qanaatlandırıwshı $\forall x \in \{x\}$ noqatta $|f(x) - b| < \varepsilon$ teńsizligi orınlı bolatuǵınday qılıp saylap alamız.

$\{x_n\}$ izbe-izlik a noqatqa jıynaqlı bolǵanlıqtan saylap alınǵan $\delta > 0$ sanı ushın $\exists N$ nomer tabılıp, $n > N$ nomerler ushın $|x_n - a| < \delta$ teńsizlik orınlı boladı. $\forall n$ nomer ushın $x_n \neq a$ bolǵanlıqtan $n > N$ nomerler ushın $0 < |x_n - a| < \delta$ teńsizlik orınlı hám Koshi anıqlaması boyınsha $n > N$ nomerler ushın $|f(x_n) - b| < \varepsilon$ teńsizlik orınlanadı. Bul $\{f(x_n)\}$ izbe-izliktiń b noqatqa jıynaqlı ekenin bildiredi.

2) Meyli, b sanı $f(x)$ funkciyanıń a noqattaǵı Geyne anıqlaması boyınsha limiti bolsın. Usı b sanı $f(x)$ funkciyanıń a noqattaǵı Koshi anıqlaması boyınsha da limiti bolatuǵının kórsetemiz. Meyli, bunday bolmasın, onda bazı bir $\varepsilon > 0$ hám jetkilikli dárejede kishi $\delta > 0$ san ushın $0 < |x - a| < \delta$ shárttı qanaatlandırıwshı keminde bir $x \in \{x\}$ noqat tabılıp, $|f(x) - b| \geq \varepsilon$ teńsizlik orınlı boladı.

Solay etip, biz $\delta_n = \frac{1}{n}$ ($n=1, 2, \dots$) sanlardan dúzilgen izbe-izlik alıwımız hám bul sanlardıń hár biri ushın $0 < |x_n - a| < \delta_n$ shárttı qanaatlandırıwshı keminde bir $x_n \in \{x\}$ noqat tabılıp, $|f(x_n) - b| \geq \varepsilon$ teńsizlik orınlı boladı dep tastıyıqlawımız múmkin eken. $0 < |x_n - a| < \delta_n$ teńsizlikler $\{x_n\}$ izbe-izlik elementleri a noqattan ózgeshe, biraq a noqatqa jıynaqlı izbe-izlik ekenin bildiredi. Geyne anıqlaması boyınsha sáykes $\{f(x_n)\}$ izbe-izlik b sanǵa jıynaqlı bolıwı kerek, al buǵan hámme n nomerler ushın orınlı bolǵan $|f(x_n) - b| \geq \varepsilon$ teńsizlik qarama-qarsı keledi. Demek, b sanı $f(x)$ funkciyanıń a noqattaǵı Koshi anıqlaması boyınsha da limiti boladı eken. ▲

2.3. Funkciyanıń bir tárepli limitleri. Funkciyanıń berilgen a noqattaǵı bir tárepli (shep yaki oń) limiti túsiniǵin kiritemiz. Meyli, $y = f(x)$ funkciyanıń anıqlanıw oblastı bolǵan $\{x\} \subset R$ kóplik $\forall \delta > 0$ ushın a noqattıń $U_{\delta}^{+}(a) = (a, a + \delta)$ oń ($U_{\delta}^{-}(a) = (a - \delta, a)$ shep) δ — dógeresinde keminde bir elementke iye bolsın.

14-anıqlama. (Funkciyanıń noqattaǵı bir tárepli limitiniń Geyne anıqlaması). Eger argumenttiń a sanınan úlken (kishi) mánislerinen dúzilgen hám a noqatqa jıynaqlı $\forall \{x_n\}$ izbe-izlikke sáykes funkciyanıń dara mánislerinen dúzilgen $\{f(x_n)\}$ izbe-

izlik b sanına jıynaqlı bolsa, onda b sanı $f(x)$ funkciyanıń a noqattaǵı oń (shep) limiti dep ataladı hám $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$ ($\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$) yaki $f(a+0) = b$ ($f(a-0) = b$) dep jazıladı.

15-anıqlama. (Funkciyanıń noqattaǵı bir tárepli limitiniń Koshi anıqlaması). Eger $\forall \varepsilon > 0$ can ushın $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ sanı tabılıp, $a < x < a + \delta$ ($a - \delta < x < a$) shártin qanaatlandırıwshı $\forall x \in \{x\}$ noqatta $|f(x) - b| < \varepsilon$ teńsizligi orınlı bolsa, onda b sanı $f(x)$ funkciyanıń a noqattaǵı oń (shep) limiti dep ataladı.

3-teorema. Funkciyanıń noqattaǵı bir tárepli limitiniń Geyne hám Koshi anıqlamaları ekvivalent.

Mısal. $y = \operatorname{sgn} x$ funkciya $x = 0$ noqatta hám oń, hám shep limitke iye hám $\lim_{x \rightarrow 0+0} \operatorname{sgn} x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0-0} \operatorname{sgn} x = -1$. Bul funkciya $x = 0$ noqatta limitke iye emes. Bul mına teoremadan kelip shıǵadı.

4-teorema. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ bolıwı ushın $f(x)$ funkciya a noqatta bir tárepli $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ hám $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ limitlerge iye bolıp $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$ teńlikler orınlı bolıwı zárúr hám jetkilikli.

Bul teorema keltirilgen anıqlamalardan tikkeley kelip shıǵadı.

Funkciyanıń $x \rightarrow \infty$ daǵı limiti túsiniǵin kiritemiz. Bunıń ushın $y = f(x)$ funkciyanıń anıqlanıw oblastı bolǵan $\{x\} \subset R$ kópliktiń $\forall \delta > 0$ ushın $[-\delta, \delta]$ kesindiniń sırtında keminde bir elementi bar bolıwın talap etemiz.

16-anıqlama. (Funkciyanıń $x \rightarrow \infty$ daǵı limitiniń Geyne anıqlaması). Argumenttiń mánisleriniń qálegen sheksiz úlken $\{x_n\}$ izbe-izligi ushın funkciyanıń sáykes dara mánisleriniń $\{f(x_n)\}$ izbe-izligi b sanına jıynaqlı bolsa, onda b sanı

$f(x)$ *funkciyanıń* $x \rightarrow \infty$ *dağı limiti* dep ataladı hám $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ dep jazıladı.

17-anıqlama. (Funkciyanıń $x \rightarrow \infty$ dağı limitiniń Koshi anıqlaması). Eger $\forall \varepsilon > 0$ can ushın $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ sanı tabılıp, $|x| > \delta$ shártin qanaatlandırıwshı $\forall x \in \{x\}$ noqatta $|f(x) - b| < \varepsilon$ teńsizligi orınlı bolsa, onda $y = f(x)$ *funkciyanıń* $x \rightarrow \infty$ *dağı limiti* **b** *sanına teń* deymiz.

Funkciyanıń argumenti málim belgidegi sheksizlikke umtılgandağı limiti túsiniyin kiritemiz. Bunıń ushın $y = f(x)$ *funkciyanıń* anıqlanıw oblastı bolğan $\{x\} \subset R$ kópliktiń $\forall \delta > 0$ ushın δ noqattıń oń tárepinde ($-\delta$ noqattıń shep tárepinde) keminde bir elementi bar bolıwın talap etemiz.

18-anıqlama. (Funkciyanıń $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) dağı limitiniń Geyne anıqlaması). Argumenttiń oń (teris) mánisleriniń qálegen sheksiz úlken $\{x_n\}$ izbe-izligi ushın *funkciyanıń* sáykes dara mánisleriniń $\{f(x_n)\}$ izbe-izligi **b** sanına jıynaqlı bolsa, onda **b** sanı $f(x)$ *funkciyanıń* $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) *dağı limiti* dep ataladı hám

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \quad (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b)$$

dep jazıladı.

19-anıqlama. (Funkciyanıń $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) dağı limitiniń Koshi anıqlaması). Eger $\forall \varepsilon > 0$ can ushın $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ sanı tabılıp, $x > \delta$ ($x < -\delta$) shártin qanaatlandırıwshı $\forall x \in \{x\}$ noqatta $|f(x) - b| < \varepsilon$ teńsizligi orınlı bolsa, onda $y = f(x)$ *funkciyanıń* $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) *dağı limiti* **b** *sanına teń* deymiz.

Eskertiw. $\{x_n\}$ sanlı izbe-izliktiń limiti túsiniyin *funkciyanıń* $x \rightarrow +\infty$ dağı limitiniń dara jaǵdayı sıpatında qaraw múmkin.

Haqiqatında da, eger $\{x\} \subset R$ kópik sıpatında natural sanlar kópigin, al bul kópikte anıqlanğan $f(x)$ funkciya sıpatında hár bir n natural sanğa $\{x_n\}$ izbe-izliktiń n - elementin sáykes qoyıwshı funkciyanı alsaq, onda bul funkciyanıń $x \rightarrow +\infty$ dağı limitiniń 19- anıqlaması sanlı izbe-izliktiń limitiniń anıqlamasın beredi.

2.4. Shekli limitke iye funkciyalardıń qásiyetleri. Shekli limitke iye funkciyalar da jıynaqlı izbe-izlikler sıyaqlı bir qatar qásiyetlerge iye. Olardıń kópshiliginiń dálilleniwi jıynaqlı izbe-izliklerdiń sáykes qásiyetlerine uqsas, sebebi funkciyanıń noqattağı limiti túsiniği sanlar izbe-izliginiń limiti túsinigine tiykarlanadı (Geyne anıqlaması). Usını itibarğa alıp, tómende keltiriletuǵın qásiyetlerdiń geyparaların dálilleymiz, qalǵanların oqıwshıǵa óz betinshe dálillewi ushın usınamız.

Meyli, $f(x)$ funkciya $\{x\} \subset R$ kópikte anıqlanğan, a noqat $\{x\}$ kópiktiń limit noqatı bolsın.

1⁰. Eger $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ bolıp, $b > p$ ($b < q$) bolsa, onda a noqattıń $\exists \overset{0}{U}_\delta(a)$ dógeregi tabılıp, $\forall x \in \overset{0}{U}_\delta(a)$ noqatta $f(x) > p$ ($f(x) < q$) teńsizlik orınlı boladı.

Dara jaǵdayda, eger $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ bolıp, $b > 0$ ($b < 0$) bolsa, onda a noqattıń $\exists \overset{0}{U}_\delta(a)$ dógeregi tabılıp, $\forall x \in \overset{0}{U}_\delta(a)$ noqatta $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) teńsizlik orınlı boladı.

2⁰. Eger $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ bolsa, onda a noqattıń $\exists \overset{0}{U}_\delta(a)$ dógeregi tabılıp, bul dógerekte $f(x)$ funkciya shegaralanğan boladı.

Dálillew. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ bolsa, funkciyanıń noqattağı limitiniń Koshi anıqlaması boyınsha argumenttiń $\overset{0}{U}_\delta(a)$ dógerekten

alınğan mánislerinde $|f(x) - b| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı. Bul teńsizlik $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$ teńsizliklerge ekvivalent. Al bul $f(x)$ funkciyanıń a noqatın $U_\delta^0(a)$ dógeresinde shegaralanǵanlıǵın bildiredi. ▲

Eskertiw. Bazı bir noqat dógeresinde shegaralanǵan funksiya bul noqatta shekli limitke iye bolıwı shárt emes. Mısalı,

$$y = \sin \frac{1}{x} \text{ funksiya shegaralanǵan (dara jaǵdayda, } x = 0$$

noqatın qálegen oyılǵan dógeresinde shegaralanǵan) funksiya, biraq bul funksiya $x = 0$ noqatta limitke iye emes.

3⁰. Meyli, $f(x)$ hám $g(x)$ funksiya $\{x\} \subset R$ kóplikte anıqlanǵan, a noqat $\{x\}$ kópliktiń limit noqatı bolsın.

Eger $\forall x \in U_\delta^0(a)$ noqatta $f(x) \leq g(x)$ teńsizlik orınlansa hám $f(x)$ hám $g(x)$ funksiya a noqatta shekli limitke iye bolsa, onda $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ teńsizlik orınlı boladı.

4⁰. Eger $\forall x \in U_\delta^0(a)$ noqatta $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ teńsizlikler orınlansa hám $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ bolsa, onda $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$ boladı.

Dálillew. Meyli, $\{x_n\}$ — elementleri a noqattan ózgeshe, a noqatqa jıynaqlı qálegen izbe-izlik bolsın. Onda funkciyanıń noqattaǵı limitiniń Geyne anıqlaması boyınsha sáykes $\{f(x_n)\}$ hám $\{g(x_n)\}$ izbe-izlikler b sanǵa jıynaqlı. Tastıyıqlawdıń shárti boyınsha $\forall n \in N$ ushın $f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n)$ teńsizlikler orınlı. 3- baptıń 6- teoreması boyınsha $\{h(x_n)\}$ izbe-izlik te b sanǵa jıynaqlı boladı. Al bul óz náwbetinde $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$ bolatuǵının bildiredi. ▲

Shekli limitke iye funkciyalardıń bul qásiyeti funkciyalar ushın *eki jaqlap shegaralaw principini* dep ataladı.

5-teorema (Shekli limitke iye funkciyalar ústinde arifmetikalıq ámeller). Meyli, $f(x), g(x)$ funkciyalar a noqattıń bazı bir $U(a)$ dógeresinde anıqlanǵan funkciyalar bolıp, bul noqatta shekli limitke iye bolsın Onda bul funkciyalardıń qosındısı, ayırması, kóbeymesi hám qatnası a noqatta limitke iye bolıp,

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad (\forall x \in U(a) \quad g(x) \neq 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0)$$

teńlikler orınlı.

Dálillew. Meyli, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ bolsın.

Elementleri a noqattan ózgeshe, a noqatqa jıynaqlı qálegen $\{x_n\}$ izbe-izlik alamız. Funkciyanıń noqattaǵı limitiniń Geyne anıqlaması boyınsha sáykes $\{f(x_n)\}$ hám $\{g(x_n)\}$ izbe-izlikler, sáykes túrde, b hám c sanlarǵa jıynaqlı. Jıynaqlı izbe-izlikler ústinde arifmetikalıq ámeller haqqındaǵı teorema boyınsha $\{f(x_n) + g(x_n)\}, \{f(x_n) - g(x_n)\}, \{f(x_n) \cdot g(x_n)\}, \{f(x_n)/g(x_n)\}$ izbe-izlikler, sáykes túrde, $b + c, b - c, b \cdot c, b/c$ ($c \neq 0$) sanlarǵa jıynaqlı. Al bul $\{x_n\}$ - elementleri a noqattan ózgeshe, a noqatqa jıynaqlı qálegen izbe-izlik bolǵanlıqtan Geyne anıqlaması boyınsha

$f(x) + g(x), f(x) - g(x), f(x) \cdot g(x), f(x)/g(x)$
funkciyalar a noqatta, sáykes túrde, $b + c, b - c, b \cdot c, b/c$ ($c \neq 0$) sanlarǵa teń limitke iye bolatuǵının bildiredi. ▲

Eskertiw. Qosındısı (ayırması), kóbeymesi hám qatnası noqatta shekli limitke iye eki funkciyanıń hár biri usı noqatta limitke iye bolıwı shárt emes. Mısalı, $f(x) = 1 - \sin \frac{1}{x}$ hám

$g(x) = \sin \frac{1}{x}$ funkciyalardıń qosındısı $f(x) + g(x) \equiv 1$ bolıp,

qálegen noqatta (dara jaǵdayda, $x = 0$ noqatta) 1 ge teń limitke iye, biraq $x = 0$ noqatta $f(x)$ funkciya da, $g(x)$ funkciya da limitke iye emes.

2.5. Quramalı funkciyanıń limiti. Meyli, $\{x\} \in R$ kóplikte $t = \varphi(x)$ funkciya anıqlanǵan, al bul funkciyanıń $\{t\} \subset R$ mánisler kópliginde $y = f(t)$ funkciya anıqlanǵan bolıp, bul funkciyalar járdeminde $y = f(\varphi(x))$ quramalı funkciya dúzilgen bolsın. Bul quramalı funkciya $\{x\}$ kóplikte anıqlanǵan. Meyli, a noqat $\{x\}$ kópliktiń limit noqatı bolsın.

6-teorema. Eger

1) $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = c$ hám a noqattıń $\exists U_{\delta}^0(a)$ dógeregi tabılıp,

$\forall x \in U_{\delta}^0(a)$ noqatta $\varphi(x) \neq c$ bolsa;

2) c noqat $\{t\}$ kópliktiń limit noqatı bolıp, $\lim_{t \rightarrow c} f(t) = b$ bolsa,

onda $y = f(\varphi(x))$ quramalı funkciya a noqatta limitke iye hám $\lim_{x \rightarrow a} f(\varphi(x)) = b$ teńlik orınlı boladı.

Dálillew. Teoremanıń shártı boyınsha $\lim_{t \rightarrow c} f(t) = b$.

Funkciyanıń noqattaǵı limitiniń anıqlaması boyınsha $\forall \varepsilon > 0$ ushın $\exists \sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$ tabılıp, $\forall t \in U_{\sigma}^0(c)$ noqat ushın $f(t) \in U_{\varepsilon}(b)$ boladı.

Endi teoremanıń shártı boyınsha $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = c$ hám a noqattıń $\exists U_{\delta}(a)$ dógeregi tabılıp, $\forall x \in U_{\delta}(a)$ noqatta

$\varphi(x) \neq c$ hám limit anıqlaması boyınsha joqarıdağı $\sigma > 0$ san ushın $\exists \delta = \delta(\sigma) > 0$ tabılıp, $\forall x \in \overset{0}{U}_\delta(a)$ noqat ushın $\varphi(x) \in \overset{0}{U}_\sigma(c)$ boladı. Solay etip, $\forall \varepsilon > 0$ ushın $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tabılıp, $\forall x \in \overset{0}{U}_\delta(a)$ noqat ushın $t = \varphi(x) \in \overset{0}{U}_\sigma(c)$ hám $f(t) \in U_\varepsilon(b)$ boladı. Bul $\lim_{t \rightarrow c} f(t) = \lim_{x \rightarrow a} f(\varphi(x)) = b$ teńlik orınlı bolatuǵının bildiredi. ▲

Eskertiw. Teorema dağı a noqattıń $\overset{0}{U}_\delta(a)$ dógeresinde $\varphi(x) \neq c$ bolıw shártin $f(t)$ funkciya $t = c$ noqatta anıqlanǵan hám $\lim_{t \rightarrow c} f(t) = f(c) = b$ teńlikler orınlı bolıw shárti

menen almasıruw múmkin. Haqıyqatında da, eger $\forall x \in \overset{0}{U}_\delta(a)$ noqat ushın $\varphi(x) \neq c$ bolsa, teoremanıń dálilleniwi anıq: eger $\varphi(x) = c$ bolsa, $f(\varphi(x)) = f(c) = b$ bolıp, $|f(\varphi(x)) - b| = 0$ boladı. Solay etip, $\forall x \in \overset{0}{U}_\delta(a)$ noqat ushın $f(\varphi(x)) \in U_\varepsilon(b)$ boladı.

Usıǵan uqsas, a, c hám b noqatlardıń birewi shekli, ekinshisi sheksiz yaki hámmesi sheksiz bolǵan jaǵdayda da teorema orınlı boladı.

2.6. Monoton funkciyanıń limiti. $\{x\} \subset R$ kóplik berilgen bolıp, a noqat (shekli yaki $+\infty$) bul kópliktiń limit noqatı bolıp, $\forall x \in \{x\}$ ushın $x \leq a$ teńsizlik orınlı bolsın. $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte anıqlanǵan bolsın.

7-teorema. Meyli, $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte ósiwshi funkciya bolsın. Eger bul funkciya $\{x\}$ kóplikte joqarıdan shegaralanǵan bolsa, onda a noqatta shekli limitke iye, al joqarıdan shegaralanbaǵan bolsa, funkciyanıń a noqattaǵı limiti $+\infty$ boladı.

Dálillew. Meyli, $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte ósiwshi hám shegaralanǵan funkciya bolsın. Onda funkciyanıń mánislerinen dúzilgen $\{y\} = \{f(x) : x \in \{x\}\}$ kóplik joqarıdan shegaralanǵan bolıp, dál joqarǵı shegaraǵa iye boladı: $b := \sup_{x \in \{x\}} f(x)$. Dál joqarǵı shegara qásiyeti boyınsha $\forall x \in \{x\}$ noqat ushın $f(x) \leq b$ bolıp, $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $\exists x' \in \{x\}$ noqat tabılıp, $f(x') > b - \varepsilon$ teńsizlik orınlı boladı. $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte ósiwshi bolǵanlıqtan $x > x'$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı $\forall x \in \{x\}$ noqat ushın $f(x) > b - \varepsilon$ teńsizlik orınlı. Nátiyjede $b - \varepsilon < f(x) \leq b < b + \varepsilon$ teńsizliklerge kelemiz. Al bul b san $f(x)$ funkciyanıń limiti ekenin bildiredi. Dálillew procesinde eger a shekli san bolsa, $x' = a - \delta$ ($\delta = a - x'$) dep, al a sheksiz bolsa, $x' > M > 0$ dep alınıwı kerek.

Endi $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte ósiwshi hám joqarıdan shegaralanbaǵan funkciya bolsın. $\forall M > 0$ san ushın (bul san qanday úlken san bolsa da) $\exists x' \in \{x\}$ noqat tabılıp, $f(x') > M$ teńsizlik orınlı boladı. $x > x'$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı $\forall x \in \{x\}$ noqat ushın $f(x) \geq f(x')$ teńsizlik orınlı bolǵanlıqtan, bunday noqatlar ushın $f(x) > M$ teńsizlik orınlı. Bul $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ bolatuǵının bildiredi. ▲

$\{x\} \subset R$ kóplik berilgen bolıp, a noqat (shekli yaki $+\infty$) bul kópliktiń limit noqatı bolıp, $\forall x \in \{x\}$ ushın $x \geq a$ teńsizlik orınlı bolsın. $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte anıqlanǵan bolsın.

8-teorema. Meyli, $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte kemiwshi funkciya bolsın. Eger bul funkciya $\{x\}$ kóplikte tómennen shegaralanǵan bolsa, onda a noqatta shekli limitke iye, al

tómennen shegaralanbağan bolsa, funkciyanıń a noqattaǵı limiti — ∞ boladı.

Bul teorema 7- teorema sıyaqlı dálillenedi.

2.7. Anıq emeslikler. Biz joqarıda shekli limitke iye funkciyalar ústinde arifmetikalıq ámellderdi kórip óttik. Eger $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalardıń hár birewiniń a noqattaǵı limiti sheksiz yaki $f(x)/g(x)$ funkciyanıń a noqattaǵı limiti qaralǵanda $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ bolsa, onda hár qıylı anıq emeslikler payda boladı.

Meyli, $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar $\{x\} \subset R$ kóplikte anıqlanǵan, a noqat bul kópliktiń limit noqatı bolsın.

1) Eger $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ bolsa, onda $\frac{f(x)}{g(x)}$ bólshek $\frac{0}{0}$

kórinisindegi anıq emeslik dep ataladı.

2) Eger $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalardıń hár birewiniń a noqattaǵı limiti sheksiz bolsa, onda $\frac{f(x)}{g(x)}$ bólshek $\frac{\infty}{\infty}$ *kórinisindegi anıq emeslik* dep ataladı.

3) Eger $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ($-\infty$), $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ ($+\infty$)

bolsa, onda $f(x) + g(x)$ qosındı $\infty - \infty$ *kórinisindegi anıq emeslik* dep ataladı.

4) Eger $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ bolsa, onda $f(x) \cdot g(x)$ kóbeyme $0 \cdot \infty$ *kórinisindegi anıq emeslik* dep ataladı.

5) Eger $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ bolsa, onda $[f(x)]^{g(x)}$ ańlatpa 1^∞ *kórinisindegi anıq emeslik* dep ataladı.

6) Eger $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ bolsa, onda $[f(x)]^{g(x)}$ ańlatpa 0^0 *kórinisindegi anıq emeslik* dep ataladı.

7) Eger $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ bolsa, onda $[f(x)]^{g(x)}$ ańlatpa ∞^0 *kórinisindegi anıq emeslik* dep ataladı.

$f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalardıń óz limitlerine umtıılıw qásiyetlerine qarap joqarıdaǵı ańlatpalardıń xarakterin anıqlaw anıq emesliklerdi ashıw dep ataladı.

2.8. Funkciyanıń limitke iye bolıwınıń Koshi kriteriysi. Meyli, $f(x)$ funkciya $\{x\} \subset R$ kóplikte anıqlanǵan, a noqat bul kópliktiń limit noqatı bolsın.

20-anıqlama. Eger $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ san tabılıp, argumenttiń $0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$ teńsizliklerdi qanaatlandırıwshı $\forall x', x'' \in \{x\}$ mánisleri ushın $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı bolsa, onda $f(x)$ funkciya a noqatta *Koshi shártin qanaatlandıradı* dep ayıladı.

Mısal. $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ funkciya $x = 0$ noqatta Koshi shártin qanaatlandıratuǵının kórsetemiz. Haqıyqattan da, $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $\delta = \varepsilon/2$ dep alsaq, argumenttiń $0 < |x'| < \frac{\varepsilon}{2}$, $0 < |x''| < \frac{\varepsilon}{2}$ teńsizliklerdi qanaatlandırıwshı $\forall x', x'' \in \{x\}$ mánisleri ushın

$$|f(x') - f(x'')| = \left| x' \sin \frac{1}{x'} - x'' \sin \frac{1}{x''} \right| \leq \left| x' \sin \frac{1}{x'} \right| + \left| x'' \sin \frac{1}{x''} \right| \leq |x'| + |x''| < \varepsilon$$

Bul anıqlama boyınsha berilgen funkciya $x = 0$ noqatta Koshi shártin qanaatlandıratuǵının bildiredi.

Eger $\forall \delta > 0$ san alınsa da $\exists \varepsilon > 0$ san hám argumenttiń $0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$ teńsizliklerdi qanaatlandırıwshı $x', x'' \in \{x\}$ mánisleri tabılıp, $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$ teńsizlik orınlı bolsa, onda $f(x)$ funkciya ushın a noqatta *Koshi shárti orınlanbaydı* dep ayıladı.

Misal. $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ funksiya ushın $x = 0$ noqatta Koshi shártı orınlanbaydı. Haqıyqattan da, $\forall \delta > 0$ san alǵanıımızda da $0 < \varepsilon < 2$ san hám $x' = \frac{1}{2k\pi}$, $x'' = \frac{1}{(2k+1)\pi}$ noqatlar ushın ($k > [\frac{1}{2\pi\delta}]$ bolǵanda $|x'| < \delta$, $|x''| < \delta$)

$$|f(x') - f(x'')| = |\cos 2k\pi - \cos(2k+1)\pi| = 2 > \varepsilon$$

boladı. Bul anıqlama boyınsha berilgen funksiya ushın $x = 0$ noqatta Koshi shártı orınlanbaytuǵının bildiredi.

9-teorema. *Funksiya noqatta shekli limitke iye bolıwı ushın bul noqatta Koshi shártin qanaatlandırıwı zárúr hám jetkilikli.*

Dálillew. a) **Zárúrligi.** Meyli, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ bolsın. $\forall \varepsilon > 0$ sandı saylap alamız. Funkciyanıń noqattaǵı limitiniń Koshi anıqlaması boyınsha $\varepsilon/2$ san ushın $\exists \delta > 0$ san tabılıp, argumenttiń $0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$ shártlerdi qanaatlandırıwshı $\forall x', x''$ mánisleri ushın, sáykes túrde, $|f(x') - b| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|f(x'') - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ teńsizlikler orınlı boladı. Bunnan $|f(x') - f(x'')| = |(f(x') - b) + (b - f(x''))| \leq |f(x') - b| + |f(x'') - b| < \varepsilon$ teńsizlik kelip shıǵadı. Al bul $f(x)$ funksiya a noqatta Koshi shártin qanaatlandıratuǵının bildiredi.

b) **Jetkilikligi.** Meyli, $f(x)$ funksiya a noqatta Koshi shártin qanaatlandırsın. $f(x)$ funksiya a noqatta shekli limitke iye bolatuǵının dálillewimiz kerek. Meyli, $\{x_n\}$ - argumenttiń a noqattan ózgeshe mánislerinen dúzilgen, a noqatqa jıynaqlı qálegen izbe-izlik bolsın. Bunıń ushın funksiyanıń noqattaǵı limitiniń Geyne anıqlaması boyınsha funksiyanıń sáykes dara mánislerinen dúzilgen $\{f(x_n)\}$ izbe-izlik bazı bir b sanǵa jıynaqlı hám bul san hámme a noqattan ózgeshe noqatlardan

dúzilgen, a noqatqa jıynaqlı $\{x_n\}$ izbe-izlikler ushın birdey ekenin dálillew jetkilikli.

Dáslep, argumenttiń a noqattan ózgeshe mánislerinen dúzilgen, a noqatqa jıynaqlı qálegen $\{x_n\}$ izbe-izlik ushın sáykes funkciyanıń mánislerinen dúzilgen $\{f(x_n)\}$ izbe-izlik bazı bir b sanǵa jıynaqlı bolatuǵının dálilleybiz. $\forall \varepsilon > 0$ san hám Koshi shárti boyınsha usı sanǵa sáykes $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ san saylap alamız. $\{x_n\}$ izbe-izlik a noqatqa jıynaqlı hám $x_n \neq a$ bolǵanlıqtan usı $\delta > 0$ san ushın $\exists N$ nomer tabılıp, $n > N$ nomerler ushın $0 < |x_n - a| < \delta$ teńsizlikler orınlı boladı. $\forall p$ natural san hám $n > N$ nomerler ushın $0 < |x_{n+p} - a| < \delta$ teńsizlikler de orınlı bolatuǵını anıq. Solay etip, $\forall p$ natural san hám $n > N$ nomerler ushın $0 < |x_n - a| < \delta$, $0 < |x_{n+p} - a| < \delta$ teńsizlikler orınlı boladı eken. Usı eki teńsizlikten hám Koshi shártinen $\forall p$ natural san hám $n > N$ nomerler ushın $|f(x_{n+p}) - f(x_n)| < \varepsilon$ teńsizlikti alamız. Bul $\{f(x_n)\}$ -fundamental izbe-izlik ekenin bildiredi, al fundamental izbe-izlik jıynaqlı bolǵanlıqtan $\{f(x_n)\}$ izbe-izlik bazı bir b sanǵa jıynaqlı.

Endi argumenttiń a noqattan ózgeshe mánislerinen dúzilgen, a noqatqa jıynaqlı qálegen eki $\{x_n\}$ hám $\{x'_n\}$ izbe-izlik ushın funkciyanıń sáykes dara mánislerinen dúzilgen $\{f(x_n)\}$ hám $\{f(x'_n)\}$ izbe-izlikler birdey b sanǵa jıynaqlı bolatuǵının dálilleybiz. Meyli, $\{f(x_n)\}$ hám $\{f(x'_n)\}$ izbe-izlikler, sáykes túrde, b hám b' sanǵa jıynaqlı bolsın. Argumenttiń a noqattan ózgeshe mánislerinen dúzilgen, a noqatqa jıynaqlı jańa

$$x_1, x'_1, x_2, x'_2, \dots, x_n, x'_n, \dots$$

izbe-izlikti qaraymız. Joqarıda dálillegenimiz boyınsha funkciyanıń sáykes dara mánislerinen dúzilgen

$f(x_1), f(x'_1), f(x_2), f(x'_2), \dots, f(x_n), f(x'_n), \dots$

izbe-izlik bazı bir b'' sanǵa jıynaqlı. Bul izbe-izliktiń qálegen úles izbe-izligi de b'' sanǵa jıynaqlı. Demek, taq nomerli elementlerden dúzilgen $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ úles izbe-izlik te, jup nomerli elementlerden dúzilgen $f(x'_1), f(x'_2), \dots, f(x'_n), \dots$ úles izbe-izlik te b'' sanǵa jıynaqlı boladı. Bunnan $b = b' = b''$ bolatuǵını kelip shıǵadı. ▲

Eskertiw. a noqattaǵı bir tárepli limitler, $x \rightarrow \infty, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$ daǵı limitler ushın da Koshi shártı hám Koshi kriteriysi joqarıdaǵıǵa uqsas ayıladı hám dálillenedi.

2.9. Bazı bir ájayıp limitler. 10-teorema. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

funkciya $x=0$ noqatta shekli limitke iye hám bul limit 1 ge teń, yaǵnıy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Dálillew. Argumenttiń $0 < x < \frac{\pi}{2}$ mánislerinde $\sin x < x < \operatorname{tg} x$

teńsizlikler orınlı ekeni málim. $\sin x > 0$ bolǵanlıqtan bul teńsizliklerdi $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ kóriniste jazıp alıw múmkin. Bunnan

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad (1)$$

teńsizliklerdi alamız. (1) teńsizliklerdiń argumenttiń $0 < x < \frac{\pi}{2}$ mánisleri ushın orınlı bolıwınan bul teńsizliklerdiń

$-\frac{\pi}{2} < x < 0$ mánisler ushın da orınlı ekeni kelip shıǵadı, sebebi

$\frac{\sin x}{x}$ hám $\cos x$ funkcıyalar jup funkcıyalar. Solay etip, (1)

teńsizlikler $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ($x \neq 0$) mánisler ushın, yaǵnıy

$\forall x \in \overset{0}{U}_{\pi/2}(0)$ noqatta orınlı boladı eken. $f(x) = \cos x$ hám $g(x) \equiv 1$ funkciyalar $x = 0$ noqatta 1 ge teń limitke iye. Funkciyalar ushın eki jaqlap shegaralaw principı (shekli limitke iye funkciyalardıń 4⁰- qásiyeti) boyınsha $h(x) = \frac{\sin x}{x}$ funksiya da

$x = 0$ noqatta shekli limitke iye hám bul limit 1 ge teń. ▲

11-teorema. $f(x) = (1+x)^{1/x}$ funksiya $x = 0$ noqatta shekli limitke iye hám bul limit e sanına teń.

Dálillew. $f(x) = (1+x)^{1/x}$ funksiya $x = 0$ noqatta hám shep, hám oń limitlerge iye hám bul limitler e sanına teń ekenin dálillew jetkilikli.

1) Dáslep $f(x) = (1+x)^{1/x}$ funksiya $x = 0$ noqatta shekli oń limitke iye bolıp, bul limit e sanına teń ekenin dálilleymiz.

Bunıń ushın funksiyanıń noqattaǵı oń limitiniń Koshi anıqlaması boyınsha $\forall \varepsilon > 0$ ushın $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ san tabılıp, $0 < x < \delta$ shártti qanaatlandıırıwshı $\forall x$ noqatta

$$|(1+x)^{1/x} - e| < \varepsilon \quad (2)$$

teńsizlik orınlı bolatuǵının dálillew jetkilikli.

$\forall \varepsilon > 0$ san saylap alamız hám $a_n = (1 + \frac{1}{n+1})^n$ hám

$b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ izbe-izliklerdi alamız. Bul eki izbe-izlik e sanına jıynaqlı. Haqıyqatında da,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n+1})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n+1})} = \frac{e}{1} = e,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n}) = e \cdot 1 = e$$

Eki $\{a_n\}$ hám $\{b_n\}$ izbe-izlik te ε sanına jıynaqlı bolǵanlıqtan saylap alınǵan $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $\exists N_1, N_2$ nomerler tabılıp, $n > N_1$ nomerler ushın $|a_n - e| < \varepsilon$ hám $n > N_2$ nomerler ushın $|b_n - e| < \varepsilon$ teńsizlikler orınlı. Meyli, $N = \max\{N_1, N_2\}$ bolsın. Onda $n > N$ nomerler ushın bir waqıtta

$$|a_n - e| < \varepsilon, |b_n - e| < \varepsilon \quad (3)$$

teńsizlikler orınlı boladı.

Endi dálillewdi aqırına jetkeriw ushın eger $\delta = \frac{1}{N}$ dep alsaq, onda argumenttiń $0 < x < \frac{1}{N}$ shártti qanaatlandırıwshı mánislerinde

(2) teńsizlik orınlı bolatuǵının dálilleymiz.

Haqıyqatında da, meyli, x argumenttiń $0 < x < \frac{1}{N}$ shártti qanaatlandırıwshı qálegen mánisi bolsın. Onda $\frac{1}{x} > N$. Endi $n := [\frac{1}{x}]$ dep belgilep, birinshiden, $n > N$ dep, al ekinshiden

$$n \leq \frac{1}{x} < n+1 \quad (4)$$

teńsizlikler orınlı dep aytıwımız múmkin. Bul teńsizliklerden

$$\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \text{ hám } 1 + \frac{1}{n+1} < 1+x \leq 1 + \frac{1}{n} \quad (5)$$

teńsizlikler kelip shıǵadı. (4) hám (5) teńsizliklerdiń ekinshisin salıstırıp, tiykarı 1 den úlken kórsetkishli funkciyanıń ósiwshiliginen paydalanıp, $(1 + \frac{1}{n+1})^n < (1+x)^{1/x} < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ yaki

$a_n < (1+x)^{1/x} < b_n$ teńsizliklerdi alamız.

Solay etip, argumenttiń $0 < x < \frac{1}{N}$ shártti qanaatlandırıwshı qálegen x mánisi ushın $n > N$ nomerlerde $a_n < (1+x)^{1/x} < b_n$ demek,

$$a_n - e < (1+x)^{1/x} - e < b_n - e \quad (6)$$

teńsizlikler orınlı boladı eken. (6) teńsizlikti $n > N$ nomerler ushın orınlı bolğan (3) teńsizlikler menen salıstırıp, argumenttiń $0 < x < \frac{1}{N}$ shártti qanaatlandırıwshı mánislerinde (2) teńsizlik orınlı bolatuǵına isenim arttıramız.

2) $f(x) = (1+x)^{1/x}$ funkciya $x = 0$ noqatta shekli shep limitke iye bolıp, bul limitte e sanına teń ekenin dálilleymiz.

Funkciyanıń noqattaǵı shep limitiniń Geyne anıqlaması boyınsha terns sanlardan dúzilgen qálegen sheksiz kishi $\{x_n\}$ izbe-izlikke sáykes funkciyanıń dara mánislerinen dúzilgen $f(x_n) = (1+x_n)^{1/x_n}$ izbe-izlik e sanına jıynaqlı bolatuǵının dálillew jetkilikli.

Meyli, $\{x_n\}$ - teris sanlardan dúzilgen qálegen sheksiz kishi izbe-izlik bolsın. Bul izbe-izlikti hámme x_n elementler moduli boyınsha 1 den úlken bolatuǵın N nomerden baslap qaraymız.

$$y_n = -\frac{x_n}{1+x_n} \text{ dep belgileymiz, demek } x_n = -\frac{y_n}{1+y_n}. \text{ Onda}$$

$\{y_n\}$.oń sanlardan dúzilgen sheksiz kishi izbe-izlik bolıp,

$$f(x_n) = (1+x_n)^{1/x_n} = \left(1 - \frac{y_n}{1+y_n}\right)^{-\frac{1+y_n}{y_n}} = \left(\frac{1}{1+y_n}\right)^{-\left(\frac{1}{y_n}+1\right)} = (1+y_n)^{\frac{1}{y_n}+1}$$

teńlik orınlı. Solay etip,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+y_n)^{1/y_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (1+y_n).$$

$\{y_n\}$ oń sanlardan dúzilgen sheksiz kishi izbe-izlik bolğanlıqtan joqarıda dálillengenı boyınsha $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+y_n)^{1/y_n} = e$,

al $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+y_n) = 1$. Demek, $\{f(x_n)\}$ izbe-izlik e sanına jıynaqlı. ▲

2.10. Sheksiz kishi hám sheksiz úlken funksiýalar. 21-anıqlama. Noqattaǵı limiti nolge teń funksiya usı noqatta *sheksiz kishi funksiya* dep ataladı.

Mısalı $\alpha(x) = (x - a)^n$ ($n \in N$) funksiya a noqatta sheksiz kishi funksiya boladı.

Eger $f(x)$ funksiyanıń a noqattaǵı limiti b sanına teń bolsa, onda $\alpha(x) := f(x) - b$ funksiya a noqatta sheksiz kishi funksiya.

Eger $f(x)$ funksiyanıń a noqattaǵı limiti b sanına teń bolsa, onda bul funksiyanı $f(x) = b + \alpha(x)$ kórinisinde jazıw múmkin, bul jerde $\alpha(x) - a$ noqatta sheksiz kishi funksiya.

22-anıqlama. Noqattaǵı limiti sheksiz funksiya usı noqatta *sheksiz úlken funksiya* dep ataladı.

Argumenttiń a sanınan úlken (kishi) mánislerinen dúzilgen, a noqatqa jıynaqlı $\forall \{x_n\}$ izbe-izlikke sáykes funksiyanıń dara mánislerinen dúzilgen $\{A(x_n)\}$ izbe-izlik bazı bir nomerden baslap hámme elementi yaki oń, yaki teris sanlar bolǵan sheksiz úlken izbe-izlik bolsa, onda $A(x)$ funksiya a noqatta *ońnan (shepten) sheksiz úlken funksiya* dep ataladı hám

$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty$ ($\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty$) yaki

$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty$ ($\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty$) dep jazıladı. Geyde

$$A(a+0) = +\infty \quad (A(a-0) = +\infty) \text{ yaki}$$

$$A(a+0) = -\infty \quad (A(a-0) = -\infty)$$

simvollarınan da paydalanıladı.

Sheksiz kishi hám sheksiz úlken funksiýalar da sheksiz kishi hám sheksiz úlken izbe-izliklerdiń qásiyetlerine uqsas qásiyetlerge iye boladı.

1⁰. Noqatta sheksiz kishi funksiya bolgan shekli sandagi funksiyalarning qosindisi ham kobeymesi usi noqatta sheksiz kishi funksiya.

2⁰. Noqatning bazi bir dogereginde shegaralangan funksiyaning usi noqatta sheksiz kishi funksiyaqa kobeymesi usi noqatta sheksiz kishi funksiya.

3⁰. Eger $\alpha(x)$ funksiya a noqatning bazi bir dogereginde aniqlangan, usi dogerek noqatlarinda nolden ozgeshe, sheksiz kishi funksiya bolsa, onda $\frac{1}{\alpha(x)}$ funksiya a noqatta sheksiz ulken funksiya.

4⁰. Eger $A(x)$ funksiya a noqatta sheksiz ulken funksiya bolsa, onda $\frac{1}{A(x)}$ funksiya a noqatta sheksiz kishi funksiya boladi.

Berilgen a noqatta sheksiz kishi eki funksiyanı salıstırıw metodikasına toqtalamız. Meyli, $\alpha(x)$ ham $\beta(x)$ funksiyalar a noqatning bazi bir dogereginde aniqlangan ham a noqatta sheksiz kishi funksiyalar bolsın.

1) Eger $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ bolsa, onda $\alpha(x)$ funksiya a noqatta $\beta(x)$ funksiyaqa qarağanda joqari tartipli sheksiz kishi funksiya dep ataladı ham $\alpha(x) = o(\beta(x)) \quad (x \rightarrow a)$ dep jazıladı.

2) Eger $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \quad (c \neq 0, c \neq 1)$ bolsa, onda $\alpha(x)$ ham $\beta(x)$ funksiyalar a noqatta birdey tartiptegi sheksiz kishi funksiyalar dep ataladı.

3) Eger $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ bolsa, onda $\alpha(x)$ hám $\beta(x)$

funkciyalar a noqatta *ekvivalent sheksiz kishi funkciyalar* dep ataladı hám $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ($x \rightarrow a$) dep jazıladı.

12-teorema. Eger $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ ($x \rightarrow a$) hám $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ ($x \rightarrow a$) bolıp, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ shekli limit bar bolsa, onda

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \text{ limit te bar hám } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \text{ teńlik orınlı}$$

boladı.

Berilgen a noqatta sheksiz úlken hám ońnan (yaki shepten) sheksiz úlken funkciyalar da usılay salıstırıladı.

Meyli, $A(x)$ hám $B(x)$ funkciyalar argumenttiń birdey mánislerinde anıqlanğan funkciyalar hám anıqlıq ushın

$$\lim_{x \rightarrow a+0} A(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a+0} B(x) = +\infty$$

bolsın.

1). Eger $\frac{A(x)}{B(x)}$ funkciya a noqatta ońnan sheksiz úlken

funkciya bolsa, onda $A(x)$ funkciya a noqatta $B(x)$ funkciyağa salıstırğanda *joqarı ósiw tártibine iye* dep ataladı.

2). Eger $\frac{A(x)}{B(x)}$ funkciyanıń a noqattağı oń limiti nolden

ózgeshe shekli sanğa teń bolsa, onda $A(x)$ hám $B(x)$ funkciyalardıń a noqattağı *ósiw tártibi birdey* dep ataladı.

Sheksiz kishi jáne sheksiz úlken funkciyalardı salıstırw mısalların keltiremiz.

Mısallar. 1) $\alpha(x) = x^3 - x^5$ hám $\beta(x) = 5x^3 + x^4$ funkciyalar $x = 0$ noqatta birdey tártiptegi sheksiz kishi funkciyalar, sebebi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^5}{5x^3 + x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3(1 - x^2)}{x^3(5 + x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^2}{5 + x} = \frac{1}{5}.$$

2) $\alpha(x) = (x - 2)^2(x - 1)$ hám $\beta(x) = (x - 1)^2$ funkciyalar $x = 2$ noqatta ekvivalent sheksiz kishi funkciyalar, sebebi

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)^2(x - 1)}{(x - 2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 1) = 1.$$

3) $A(x) = \frac{2 + x}{x}$ hám $B(x) = \frac{1}{x}$ funkciyalar $x = 0$ noqatta o'nnan da, shepten de ósiw tártibi birdey sheksiz úlken funkciyalar, sebebi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{A(x)}{B(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 + x}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (2 + x) = 2.$$

4- BAP

ÚZLIKSIZ FUNKCIYALAR

1-§. Úzliksiz funkciya túsiniǵı

Funkciyanıń úzliksizligi matematikalıq analizdiń áhmiyetli túsiniqleriniń biri bolıp, funkciyanıń limiti túsiniǵı menen tikkeley baylanısqa.

$f(x)$ funkciya $\{x\} \subset R$ kóplikte anıqlanǵan, a noqat $\{x\}$ kópliktiń limit noqatı bolsın.

$f(x)$ funkciyanıń a noqattaǵı limiti ushın tómendegi jaǵdaylardıń birewi orınlı bolıwı múmkin:

- 1⁰. $f(x)$ funkciya a noqatta shekli limitke iye.
- 2⁰. $f(x)$ funkciyanıń a noqattaǵı limiti sheksiz.
- 3⁰. $f(x)$ funkciya a noqatta limitke iye emes.

Biz tómende 1⁰- jaǵdaydın funkciyanıń úzliksizligi dep atalatuǵın áhmiyetli dara jaǵdayın tolıq izertleymiz.

1.1. Úzliksiz funkciya anıqlamaları. Meyli, $f(x)$ funkciya $\{x\} \subset R$ kóplikte anıqlanǵan, $a \in \{x\}$ noqat $\{x\}$ kópliktiń limit noqatı bolsın.

1-anıqlama. (Funkciyanıń noqatta úzliksizliginiń rásmiy anıqlaması). Eger funkciya noqatta shekli limitke iye bolıp, bul limit funkciyanıń usı noqattaǵı dara mánisine teń bolsa, onda bunday funkciya usı *noqatta úzliksiz* dep ataladı.

Basqasha aytqanda, eger $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ bolsa, onda $f(x)$ funkciya a noqatta úzliksiz dep ataladı.

Mısallar. № 1. $f(x) = x^2 + x + 1$ funkciya $\forall a \in R$ noqatta úzliksiz, sebebi, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + x + 1) = a^2 + a + 1 = f(a)$.

$$\text{№ 2. } f(x) = (\operatorname{sign} x)^2 = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ funkciyanıń } \forall a \in R$$

noqattaǵı limiti 1 ge teń, yaǵnıy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (\operatorname{sign} x)^2 = 1$.

Biraq, $f(0)=0$ bolğanlıqtan $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$. Demek, berilgen funksiya $x=0$ noqatta úzliksiz emes, qalğan hámme $a \in R \setminus \{0\}$ noqatlarda úzliksiz, sebebi, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (\operatorname{sign} x)^2 = 1 = f(a)$.

Funkciyanıń noqattaǵı limitiniń Geyne hám Koshi anıqlamalarınan paydalanıp, biz funksiyanıń noqatta úzliksizliginiń Geyne hám Koshi anıqlamalarına kelemiz.

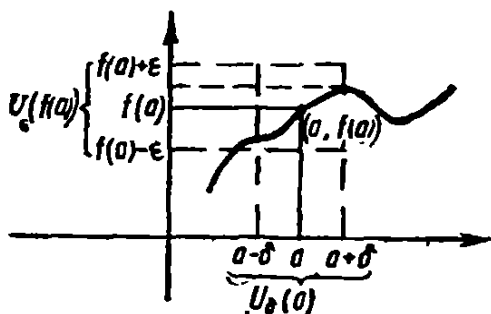
2- a n ı q l a m a (Funkciyanıń noqatta úzliksizliginiń Geyne anıqlaması). Eger argumenttiń mánislerinen dúzilgen, a noqatqa jıynaqlı $\forall \{x_n\}$ izbe-izlik ushın funksiyanıń sáykes dara mánislerinen dúzilgen $\{f(x_n)\}$ izbe-izlik $f(a)$ sanǵa jıynaqlı bolsa, onda $f(x)$ funksiya a noqatta úzliksiz dep ataladı.

Eskertiw. Funkciyanıń noqattaǵı úzliksizliginiń Geyne anıqlamasında $\{x_n\}$ izbe-izliktiń elementleri a noqattan ózgeshe bolıwı talap etilmeydi, sebebi $f(a)$ sanına jıynaqlı $\{f(x_n)\}$ izbe-izliktiń elementlerine qálegen sandaǵı $f(a)$ sanǵa teń elementlerdi biriktiriw bul izbe-izliktiń $f(a)$ sanǵa jıynaqlılıǵın buzbaydı.

3- a n ı q l a m a (Funkciyanıń noqatta úzliksizliginiń Koshi anıqlaması). Eger $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ san tabılıp, argumenttiń $|x - a| < \delta$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı $\forall x$ mánisi ushın $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı bolsa, onda $f(x)$ funksiya a noqatta úzliksiz dep ataladı.

Eskertiw. Funkciyanıń noqattaǵı úzliksizliginiń Koshi anıqlamasında argumenttiń mánisleri $0 < |x - a|$ shártin qanaatlandırıwı, yaǵnıy a noqattan ózgeshe bolıwı, talap etilmeydi, sebebi $x = a$ mániste $f(x) - f(a)$ ayırma nol'ge teń hám $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ teńsizlikti qanaatlandıradı. Funkciyanıń noqattaǵı úzliksizliginiń Koshi

anıqlamasındaǵı $|x - a| < \delta$ teńsizlik $a - \delta < x < a + \delta$ teńsizliklerge ekvivalent bolıp, $x \in U_\delta(a)$ qatnastı, al $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ teńsizlik $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$ teńsizliklerge ekvivalent bolıp, $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$ qatnastı ańlatadı. Demek, Koshi anıqlaması boyınsha $f(a)$ noqattıń $\forall U_\varepsilon(f(a))$ dógeregi ushın a noqattıń $\exists U_\delta(a)$ dógeregi tabılıp, argumenttiń usı dógerekten alınǵan hár bir mánisine sáykes funkciyanıń mánisi $f(a)$ noqattıń $U_\varepsilon(f(a))$ dógerigine derek bolsa, onda $f(x)$ funksiya a noqatta úzliksiz boladı (1- súwret).



1- súwret

Eger $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı bolsa, onda $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0$ teńlik orınlı boladı.

Funkciyanıń noqatta úzliksizliginiń *úzliksizlik shártiniń ayırmalıq forması* dep atalatuǵın jáne bir anıqlamasın keltiriw múmkin. Ádette, $x - a$ ayırma argumenttiń a noqattaǵı ósimi dep ataladı hám $\Delta x = x - a$ dep, al $f(x) - f(a)$ ayırma argumenttiń a noqattaǵı Δx ósimine sáykes funkciyanıń ósimi dep ataladı hám $\Delta f = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$ dep belgilenedi. Usı ayılǵanlardı esapqa alıp, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ teńlikti

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$ kóriniste jazıw múmkin. Solay etip, $f(x)$

funkciyanıń a noqatta úzliksizligi bul noqatta argumenttiń sheksiz kishi ósimine funkciyanıń da sheksiz kishi ósimi sáykes keliwi sıpatında anıqlanıwı da múmkin.

1-teorema. *Funkciyanıń noqatta úzliksizliginiń Geyne hám Koshi anıqlamaları ekvivalent.*

Bul teorema funkciyanıń noqattaǵı limitiniń Geyne hám Koshi anıqlamalarınan ekvivalentliginen kelip shıǵadı.

Funkciyanıń noqattaǵı bir tárepli limitleriniń Geyne hám Koshi anıqlamalarınan paydalanıp, funkciyanıń noqattaǵı bir tárepli úzliksizliginiń Geyne hám Koshi anıqlamaların alamız.

Meyli, $f(x)$ funkciya $\{x\} \subset R$ kóplikte anıqlanǵan, $a \in \{x\}$ hám $\forall \delta > 0$ ushın $(a, a + \delta)$ intervalda $(a - \delta, a)$ intervalda $\{x\}$ kópliktiń keminde bir noqatı bolsın.

4-anıqlama. (Funkciyanıń noqatta bir tárepli úzliksizliginiń rásmiy anıqlaması). Eger funkciya noqatta shekli oń (shep) limitke iye bolıp, bul limit funkciyanıń usı noqattaǵı dara mánisine teń bolsa, onda bunday funkciya usı *noqatta ońnan (shepten) úzliksiz* dep ataladı.

Basqasha aytqanda, eger $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$ ($\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a)$) bolsa, onda $f(x)$ funkciya a noqatta ońnan (shepten) úzliksiz dep ataladı.

5-anıqlama. (Funkciyanıń noqattaǵı bir tárepli úzliksizliginiń Geyne anıqlaması). Argumenttiń a sanınan úlken (kishi) mánislerinen dúzilgen, a noqatqa jıynaqlı $\forall \{x_n\}$ izbe-izlikke sáykes funkciyanıń dara mánislerinen dúzilgen $\{f(x_n)\}$ izbe-izlik $f(a)$ sanına jıynaqlı bolsa, onda $f(x)$ funkciya a *noqatta ońnan (shepten) úzliksiz* dep ataladı.

Eskertiw. Bul anıqlamadaǵı $\forall \{x_n\}$ izbe-izliktiń elementleri ushın $x_n > a$ ($x_n < a$) shártin $x_n \geq a$ ($x_n \leq a$) shárti menen

almastırıw múmkin, sebebi $f(a)$ sanına jıynaqlı $\{f(x_n)\}$ izbe-izliktiń elementlerine qálegen sandaǵı $f(a)$ sanına teń elementlerdi biriktiriw bul izbe-izliktiń $f(a)$ sanına jıynaqlılıǵın buzbaydı.

6-anıqlama. (Funkciyanıń noqattaǵı bir tárepli úzliksizliginiń Koshi anıqlaması). Eger $\forall \varepsilon > 0$ ushın $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ san tabılıp, argumenttiń $a < x < a + \delta$ ($a - \delta < x < a$) shártin qanaatlandırıwshı hámme mánisleri ushın $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı bolsa, onda $f(x)$ funkciya a noqatta ońnan (shepten) úzliksiz dep ataladı.

Eskertiw. Bul anıqlamadaǵı argumenttiń mánisleri ushın $a < x < a + \delta$ ($a - \delta < x < a$) shártin $a \leq x < a + \delta$ ($a - \delta < x \leq a$) shárti menen almasıw múmkin, sebebi $x = a$ mániste $f(x) - f(a)$ ayırma nol`ge teń hám $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ teńsizlikti qanaatlandıradı.

Eger funkciya noqatta hám ońnan, hám shepten úzliksiz bolsa, onda funkciya usı noqatta úzliksiz.

Bul tastıyıqlawǵa keri tastıyıqlaw da orınlı: *Eger funkciya noqatta úzliksiz bolsa, onda bul funkciya usı noqatta hám shepten, hám ońnan úzliksiz.*

Eger funkciya $\{x\}$ kópliktiń hár bir noqatında úzliksiz bolsa, onda bul funkciya usı kóplikte úzliksiz dep ataladı.

Mısalı, intervaldıń hár bir noqatında úzliksiz funkciya usı intervalda úzliksiz dep ataladı.

Eger funkciya $[a, b]$ kesindiniń hár bir ishki noqatında úzliksiz, a noqatta ońnan hám b noqatta shepten úzliksiz bolsa, onda bul funkciya usı kesindide úzliksiz dep ataladı.

1.2. Úzliksiz funkciyalar ústinde arifmetikalıq ámeller. 2-teorema. Meyli, $\{x\}$ kóplikte anıqlanǵan $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar $a \in \{x\}$ noqatta úzliksiz bolsın. Onda

$f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$ ($g(a) \neq 0$) *funkciyalar* da a *noqatta* *úzliksiz*.

Dálillew. a *noqatta* *úzliksiz* $f(x)$ hám $g(x)$ *funkciyalar* bul *noqatta*, *sáykes túrde*, $f(a)$ hám $g(a)$ sanǵa teń *limitlerge iye bolǵanlıqtan*, $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$ *funkciyalar* a *noqatta* *shekli limitke iye hám bul limitler*, *sáykes túrde*, $f(a) \pm g(a)$, $f(a) \cdot g(a)$, $f(a)/g(a)$ *sanlarǵa teń*. *Anıqlama boyınsha bul funkciyalar* a *noqatta* *úzliksiz*. ▲

Eskertiw. Eki *funkciyanıń qosındısınıń*, *ayırmasınıń*, *kóbeymesiniń hám qatnasınıń* bazı bir *noqatta* *úzliksizliginen* bul *funkciyalardıń hár birewiniń usı noqatta* *úzliksizligi kelip shıǵa bermeydi*. Mısalı, $f(x) = x$ hám $g(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ *funk-*

ciyalardıń $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x) = x \cdot \cos \frac{1}{x}$ *kóbeymesi* $\forall x \in R$

noqatta *úzliksiz*, biraq $g(x)$ *funkciya* $x = 0$ *noqatta* *úzliksiz emes*

($g(0) = 0$, biraq $g(x)$ *funkciya* $x = 0$ *noqatta* *limitke iye emes*).

2- *teorema shekli sandaǵı* *úzliksiz funkciyalardıń qosındısı hám kóbeymesi ushın da orınlı bolatuǵının tekseriw qıyın emes*.

1.3. Qoramalı funkciyanıń úzliksizligi. Meyli, $\{x\} \in R$ *kóplikte* $t = \varphi(x)$ *funkciya anıqlanǵan*, al bul *funkciyanıń* $\{t\} \subset R$ *mánisler kópliginde* $y = f(t)$ *funkciya anıqlanǵan bolıp*, bul *funkciyalar járdeminde* $y = f(\varphi(x))$ *qoramalı funkciya dúzilgen bolsın*.

3-teorema. Meyli, $t = \varphi(x)$ *funkciya* $a \in \{x\}$ *noqatta*, al $y = f(t)$ *funkciya* $b = \varphi(a) \in \{t\}$ *noqatta* *úzliksiz bolsın*. Onda $y = f(\varphi(x))$ *qoramalı funkciya* a *noqatta* *úzliksiz*.

Dálillew. Meyli, $\{x_n\}$ - qoramalı funkciyanıń argumentiniń mánislerinen dúzilgen, a noqatqa jıynaqlı izbe-izlik bolsın. $t = \varphi(x)$ funkciya a noqatta úzliksiz bolǵanlıqtan Geyne anıqlaması boyınsha funkciyanıń sáykes mánislerinen dúzilgen $\{t_n\} = \{\varphi(x_n)\}$ izbe-izlik $b = \varphi(a)$ sanǵa jıynaqlı. $y = f(t)$ funkciya $b = \varphi(a)$ noqatta úzliksiz bolǵanlıqtan $b = \varphi(a)$ sanǵa jıynaqlı $\{t_n\} = \{\varphi(x_n)\}$ izbe-izlik bul funkciyanıń argumentiniń mánislerinen dúzilgen izbe-izlik bolıp, Geyne anıqlaması boyınsha funkciyanıń sáykes dara mánislerinen dúzilgen $\{y_n\} = \{f(t_n)\} = \{f(\varphi(x_n))\}$ izbe-izlik $f(b) = f(\varphi(a))$ sanǵa jıynaqlı.

Solay etip, qoramalı funkciyanıń argumentiniń mánislerinen dúzilgen, a noqatqa jıynaqlı $\forall \{x_n\}$ izbe-izlik ushın funkciyanıń sáykes dara mánislerinen dúzilgen $\{f(\varphi(x_n))\}$ izbe-izlik $f(\varphi(a))$ sanǵa jıynaqlı boladı eken. Bul Geyne anıqlaması boyınsha $y = f(\varphi(x))$ qoramalı funkciyanıń a noqatta úzliksiz ekenin bildiredi. ▲

1.4. Funkciyanıń úzilis noqatları. Funkciya úzliksizlik qásiyetine iye bolmaǵan noqat funkciyanıń *úzilis noqatı* dep ataladı.

1⁰. *Funkciyanıń saplastırılatuǵın úzilis noqatı.* Eger funkciya noqatta shekli limitke iye bolıp, yaki bul limit funkciyanıń noqattaǵı dara mánisine teń bolmasa, yaki funkciya bul noqatta anıqlanbaǵan bolsa, onda bunday noqat funkciyanıń *saplastırılatuǵın úzilis noqatı* dep ataladı.

Mısal. $x = 0$ noqat $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ funkciyanıń saplastırılatuǵın úzilis noqatı boladı, sebebi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, al funkciya bul noqatta anıqlanbaǵan.

Eger a noqat $f(x)$ funkciyanıń saplastırılatusın úzilis noqatı bolsa, onda funkciyanıń a noqattan basqa noqatlardağı mánislerin ózgerťpey bul úzilisti saplastırıw múmkin. Bunıń ushın $f(x)$ funkciyanıń a noqattağı mánisin funkciyanıń usı noqattağı limitine teń ($f(a)=\lim_{x \rightarrow a} f(x)$) qılıp alıw jetkilikli. Mısalı, eger qaralǵan mısalda $f(0)=1$ dep alsaq, berilgen funkciya $x=0$ noqatta úziksiz boladı.

2⁰. *Funkciyanıń birinshi túr úzilis noqatı.* Eger funkciya noqatta hám shep, hám oń shekli limitlerge iye bolıp, bul limitler óz-ara teń bolmasa

($\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$), onda bunday noqat funkciyanıń *birinshi túr úzilis noqatı* dep ataladı.

Ádette, funkciyanıń birinshi túr úzilis noqatı *shekli sekiriw noqatı* dep ataladı.

Mısallar. № 1.
$$f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad \text{funkciya}$$

$x=0$ noqatta birinshi túr úziliske iye boladı. Haqıyqatında da,

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \text{sign}(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0-0} \text{sign}(x) = -1.$$

№ 2. $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$ funkciya $x=0$ noqatta birinshi túr úziliske iye

boladı. Haqıyqatında da,

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin x}{|x|} = - \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x} = -1.$$

№ 3. $f(x) = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}}$ funkciya $x=1$ noqatta birinshi túr

úziliske iye boladı. Haqıyqatında da, eger $\{x_n\}$ elementleri 1 den

úlken, $x=1$ noqatqa jıynaqlı izbe-izlik bolsa, onda $\left\{\frac{1}{x_n-1}\right\}$ hám

demek, $\left\{1+2^{\frac{1}{x_n-1}}\right\}$ - elementleri oń sanlar bolǵan sheksiz úlken

izbe-izlik, sonlıqtan $f(x_n) = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x_n-1}}}$ - sheksiz kishi izbe-izlik,

demek, $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}} = 0$.

Endi, eger $\{x_n\}$ elementleri 1 den kishi, $x=1$ noqatqa jıynaqlı izbe-izlik bolsa, onda $\left\{\frac{1}{x_n-1}\right\}$ - elementleri teris sanlar

bolǵan sheksiz úlken izbe-izlik, sonlıqtan $\left\{2^{\frac{1}{x_n-1}}\right\}$ - sheksiz kishi

izbe-izlik bolıp, $f(x_n) = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x_n-1}}}$ izbe-izlik 1 ge jıynaqlı, demek,

$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}} = 1$.

№ 4. $f(x)=[x]$ funkciya hár bir n ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) noqatta birinshi túr úziliske iye, sebebi $\lim_{x \rightarrow n+0} [x] = n, \lim_{x \rightarrow n-0} [x] = n-1$.

3°. *Funkciyanıń ekinshi túr úzilis noqatı*. Eger funkciya bazı bir noqatta yaki keminde bir bir tárepli limitke iye bolmasa, yaki bul noqattaǵı keminde bir bir tárepli limiti sheksiz bolsa, onda bunday noqat *funkciyanıń ekinshi túr úzilis noqatı* dep ataladı.

Mısallar. № 1.
$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \cos \frac{1}{x}, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$
 funkciya $x=0$ noqatta

ekinshi túr úziliske iye. Haqıyqattan da, funkciya $x=0$ noqatta

shepten úzliksiz, sebebi $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cos \frac{1}{x} = 0 = f(0)$. Biraq

bul funksiya $x = 0$ noqatta oń limitke iye emes, sebebi $y = \sin \frac{1}{x}$

funkciya $x = 0$ noqatta limitke iye emes.

№ 2. $f(x) = tg x$ funksiya $x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$

noqatlardıń hár birewinde ekinshi túr úzitliske iye, sebebi

$$\lim_{x \rightarrow x_n - 0} tg x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_n + 0} tg x = -\infty.$$

№ 3. $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ funksiya $x = 0$ noqatta ekinshi

túr úziliske iye, sebebi funksiya bul noqatta shep limitke de, oń limitke de iye emes.

№ 4. $D(x)$ – Dirixle funksiya $\forall x \in \mathbb{R}$ noqatta ekinshi túr úziliske iye, sebebi funksiya bul noqatlardıń hesh birewinde shep limitke de, oń limitke de iye emes.

Solay etip, óz anıqlanıw oblastınıń limit noqatında funksiya ushın tómendegi jaǵdaylardıń birewi orınlı:

- 1) úzliksiz;
- 2) saplastırılatuǵın úziliske iye;
- 3) birinshi túr úziliske iye;
- 4) ekinshi túr úziliske iye.

Matematikada hám onıń qollanıwlarında jiyy ushırasatuǵın *bólek úzliksiz funksiya* túsiniǵın kiritemiz.

$[a, b]$ kesindide anıqlanǵan, bul kesindiniń birinshi túr úziliske iye bolǵan shekli sandaǵı noqatlarınan basqa hámme ishki noqatlarında úzliksiz, a noqatta ońnan, al b noqatta shepten úzliksiz bolǵan funksiya $[a, b]$ kesindide *bólek úzliksiz funksiya* dep ataladı.

Eger funksiya intervalǵa (tuwrı sıızıqqa) derek hár bir kesindide bólek úzliksiz bolsa, onda bunday funksiya *intervalda (tuwrı sıızıqta) bólek úzliksiz* dep ataladı.

Misali, $f(x)=[x]$ funkciya pútkil sanlar kósherinde hám sanlar kósherine derek hár bir kesindide bólek úzliksiz.

1.5. Monoton funkciyanıń úzliksizligi hám úzilis noqatlari. Meyli, $f(x)$ funkciya $\{x\} \subset R$ kóplikte anıqlanğan bolsın.

4-teorema (monoton funkciyanıń úzliksizligi haqqındaǵı). *Eger $f(x)$ funkciya $\{x\} \subset R$ kóplikte monoton funkciya bolsa, onda ol bul kópliktiń qálegen noqatında yaki úzliksiz boladi, yaki tek I túr úziliske iye boladi.*

Dálillew. Meyli, $f(x)$ funkciya $\{x\} \subset R$ kóplikte ósiwshi (qatal ósiwshi) funkciya bolsın. $\{x\}$ kóplikten $(a - \delta, a + \delta) \subset X$ bolatuǵınday $a \in \{x\}$ noqat tańlap alamız. Shárt boyınsha $\forall x \in (a - \delta, a)$ noqatta $f(x) \leq f(a)$, al $\forall x \in (a, a + \delta)$ noqatta $f(x) \geq f(a)$ teńsizlik orınlı. Demek, $f(x)$ funkciya $(a - \delta, a)$ intervalda joqarıdan, al $(a, a + \delta)$ intervalda tómennen shegaralanğan. Monoton funkciyanıń limiti haqqındaǵı teorema boyınsha

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0) \leq f(a),$$

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0) \geq f(a)$$

boladı. Eger $f(a-0) = f(a) = f(a+0)$ bolsa, $f(x)$ funkciya $a \in \{x\}$ noqatta úzliksiz, al eger $f(a-0) < f(a+0)$ bolsa, I túr úziliske iye. Eger a noqat $\{x\}$ kópliktiń shetki noqatı bolsa, onda funkciya bul noqatta bir tárepli limitke iye ekenin kórsetiw jetkilikli. $f(x)$ funkciya $\{x\} \subset R$ kóplikte kemiwshi (qatal kemiwshi) funkciya bolğan jaǵdayda da dálillew usınday júrgiziledi. ▲

5-teorema. *Eger $f(x)$ funkciya $\{x\} \subset R$ kóplikte monoton funkciya bolıp, onıń $\{y\} = \{f(x) : x \in \{x\}\}$ mánisler kópligi bazı bir tutas aralıq bolsa, onda bul funkciya $\{x\}$ kóplikte úzliksiz.*

Dálillew. Anıqlıq ushın, meyli, $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte ósiwshi bolsın. Teoremanıń shártlerin qanaatlandıırıwshı $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kópliktiń bazı bir a noqatında úziliske iye bolsın. Onda bul funkciya 4- teorema boyınsha a noqatta birinshi túr úziliske iye boladı, yaǵnıy $f(a-0) < f(a+0)$ boladı (eger a noqat $\{x\}$ kópliktiń shetki noqatı bolsa, yaki $f(a-0) \leq f(a)$), yaki $f(a) \leq f(a+0)$ teńsizlik orınlanadı). Nátiyjede $x < a$ bolsa, $f(x) \leq f(a-0)$, al $x > a$ bolsa, $f(x) \geq f(a+0)$ bolıp, $f(x)$ funkciya $(f(a-0), f(a+0))$ intervaldaǵı $f(a)$ mánisten basqa mánislerdi hesh bir $x \in \{x\}$ noqatta qabıl qılmaydı. Bul funkciyanıń $\{y\} = \{f(x) : x \in \{x\}\}$ mánisler kópligi bazı bir tutas aralıq ekenligine qarama-qarsı. Demek, $f(x)$ funkciya a noqatta birinshi túr úziliske iye bola almaydı. ▲

1.6. Funkciyanıń limitin esaplaǵanda úzliksizliginen paydalanıw. $y = f(x)$ funkciya $\{x\} \subset R$ kóplikte anıqlanǵan, a noqat bul kópliktiń limit noqatı bolsın. $z = \varphi(y)$ funkciya $y = f(x)$ funkciyanıń mánisler kópligi bolǵan $\{y\} = \{f(x) : x \in \{x\}\}$ kóplikte anıqlanǵan bolsın. Onda bul funkciyalardan $\{x\}$ kóplikte anıqlanǵan $z = \varphi(f(x))$ quramalı funkciya dúziw múmkin.

Eger $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = y_0$ bolıp, $z = \varphi(y)$ funkciya y_0 noqatta úzliksiz bolsa, onda $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(f(x)) = \varphi(y_0)$ teńlik orınlı boladı. Haqıyqatında da, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = y_0$ hám $\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = \varphi(y_0)$, sonlıqtan quramalı funkciyanıń limiti haqqındaǵı teorema boyınsha $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = \varphi(y_0)$.

Bul teńliklerden úzliksiz funkciyalar ushın funkciya belgisi astında limitke ótiw formulası kelip shıǵadı:

$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(f(x)) = \varphi(\lim_{x \rightarrow a} f(x))$. Dara jaǵdayda, eger $f(x) = x$ bolsa, bul funksiya $\forall a \in R$ noqatta úzliksiz hám $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \varphi(\lim_{x \rightarrow a} x) = \varphi(a)$.

Logarifmlik, kórsetkishli hám dárejeli funksiylardıń úliksizliginen paydalanıp tómendegi mısallardı sheshemiz.

Mısallar. № 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$ ($a > 0, a \neq 1$) teńlikti dálilleybiz. Haqıyqatında da,

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x)^{1/x} = \log_a e$. Bul jerde biz $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$ ájayıp limitpen paydalandıq.

Dara jaǵdayda, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ teńlik orınlı.

№ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ ($a > 0, a \neq 1$) teńlikti dálilleybiz.

Bunıń ushın $a^x - 1 =: t$ dep belgilesek, $x = \log_a(1+t)$ hám $x \rightarrow 0$ da $t \rightarrow 0$ ekenin esapqa alıp, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a$ teńlikke iye bolamız.

Dara jaǵdayda, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ teńlik orınlı.

№ 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu$ teńlikti dálilleybiz. Bunıń ushın

$(1+x)^\mu - 1 =: t$ dep belgilesek, $\mu = \frac{\ln(1+t)}{\ln(1+x)}$ hám $x \rightarrow 0$ da

$t \rightarrow 0$ ekenin esapqa alıp,

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{t}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} \frac{\ln(1+t)}{\ln(1+x)} \frac{\ln(1+x)}{x} = \mu$

teńlikke iye bolamız.

2-§. Úzliksiz funkciyaların lokal hám global qásiyetleri

Funkciyanıń anıqlanıw oblastınıń bazı bir noqatınıń jeterli dárejede kishi dógeresinde orınlı bolatuǵın qásiyetleri *funkciyanıń lokal qásiyetlerine* kiredi. Bul qásiyetler argumenttiń izertlenip atırǵan noqatqa umtılgandaǵı xarakterin anıqlaydı. Mısalı, funkciyanıń óz anıqlanıw oblastınıń bazı bir noqatındaǵı úzliksizligi bul funkciyanıń lokal qásiyeti boladı.

Funkciyanıń pútkil anıqlanıw oblastı menen baylanıslı bolǵan qásiyetleri onıń *global qásiyetleri* boladı. Mısalı, funkciyanıń kesindidegi monotonlıǵı onıń global qásiyeti.

2.1. Lokal qásiyetleri. Meyli, $f(x)$ funkciya $\{x\} \subset R$ kóplikte anıqlanǵan bolıp, a noqat $\{x\}$ kópliktiń limit noqatı bolsın.

6-teorema. *Noqatta úzliksiz funkciya usı noqattıń bazı bir dógeresinde shegaralanǵan.*

Bul teorema noqatta shekli limitke iye funkciya usı noqattıń bazı bir dógeresinde shegaralanǵanlıǵı qásiyetinen tikkeley kelip shıǵadı.

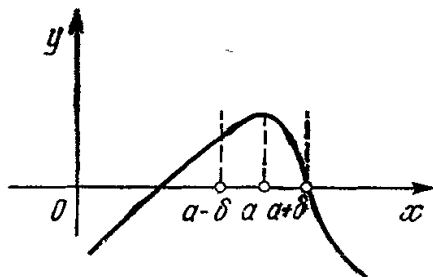
7-teorema (Noqatta úzliksiz funkciyanıń belgisiniń saqlanıwı haqqındaǵı). Meyli, $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte anıqlanǵan bolıp, $a \in \{x\}$ noqatta úzliksiz hám $f(a) > 0$ ($f(a) < 0$) bolsın. Onda $\exists \delta > 0$ san tabılıp, $\forall x \in B_\delta = \{x\} \cap U_\delta(a)$ noqatta $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) boladı.

Basqasha aytqanda, noqatta úzliksiz funkciya usı noqattıń bazı bir dógeresinde óz belgisin saqlaydı (2- súwret).

Dálillew. Funkciyanıń noqatta úzliksizliginiń Koshi anıqlaması boyınsha $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ san tabılıp, argumenttiń a noqattıń δ — dógereginen alınǵan mánisleri ushın $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, yaǵnıy $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$ teńsizlikler orınlı boladı. Eger $\varepsilon = \frac{|f(a)|}{2}$ dep alsaq, onda

$f(a) - \varepsilon$ hám $f(a) + \varepsilon$ sanlardıń ekewi de $f(a) > 0$ bolsa

oń, al $f(a) < 0$ bolsa teris boladı. Sonlıqtan $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$ teńsizlikler argumenttiń a noqattıń δ – dógereginen alıńǵan mánisleri ushın $f(x)$ funkciya $f(a) > 0$ bolsa oń, al $f(a) < 0$ bolsa teris anıqlanǵan bolatuǵının bildiredi. ▲



2- súwret

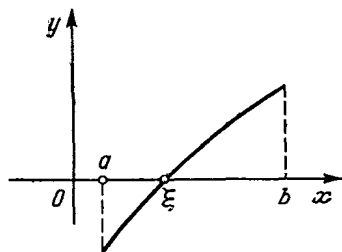
Bul teoremanı $f(x)$ funkciya a noqatta ońnan yaki shepten úzliksiz bolǵan jaǵday ushın mına kóriniste aytıw múmkin.

7*-teorema. Meyli, $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte anıqlanǵan bolıp, $a \in \{x\}$ noqatta ońnan (shepten) úzliksiz hám $f(a) \neq 0$ bolsın. Onda $\exists \delta > 0$ san tabılıp, $f(x)$ funkciyanıń $B_\delta^+ = \{x\} \cap U_\delta^+(a)$ ($B_\delta^- = \{x\} \cap U_\delta^-(a)$) kópliktegi belgisi $f(a)$ sannıń belgisindey boladı.

Eskertiw. Berilgen noqatta úzliksiz funkciyalardıń qosındısıń, ayırmasıń, kóbeymesiniń hám qatnasınıń usı noqatta úzliksizligi, sonday-aq, quramalı funkciyanıń berilgen noqatta úzliksizligi funkciyanıń lokal qásiyetlerine jatadı.

2.2. Global qásiyetleri. 8-teorema (Bol`cano- Koshidiń birinshi teoreması). Eger funkciya kesindide úzliksiz bolıp, kesindiniń shetki noqatlarında hár qıylı belgidegi mánislerge iye bolsa, onda kesindiniń kem degende bir ishki noqatındaǵı funkciyanıń dara mánisi nol`ge teń.

Bul teoremanı 3- súwret penen túsindiriw múmkin. Teoremanıń shártın qanaatlandıratuǵın funkciyanıń grafigi keminde bir noqatta (súwrette $(\xi; 0)$ noqatı) abscissalar kósherin kesip ótiwi kerek.



3- súwret

Dálillew. Ulıwmalıqtı sheklemeden, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ dep esaplaw múmkin. Meyli, $X = \{x \in [a, b]: f(x) < 0\}$ bolsın, bul kópplik bos emes (bul kóplikte keminde a noqat bar) hám joqarıdan shegaralangán (mısalı, b sanı menen). Demek, bul kópliktiń dál joqarǵı shegarası bar, bul noqattı ξ dep belgileybiz.

ξ noqat- $[a, b]$ kesindiniń ishki noqatı, sebebi $f(x)$ funkciyanıń $[a, b]$ kesindide úzliksizliginen hám $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ teńsizliklerden a noqattıń sonday oń δ — yarım dógeregi tabılıp, bul dógerekte $f(x) < 0$ hám b noqattıń sonday shep δ — yarım dógeregi tabılıp, bul dógerekte $f(x) > 0$ boladı.

Endi $f(\xi) = 0$ bolatuǵına isenim arttıramız. Eger bulay bolmasa, ξ noqattıń sonday $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ dógeregi tabılıp, bul dógerekte $f(x)$ funkciya óz belgisin saqlaydı. Biraq bunday bolıwı múmkin emes, sebebi x kópliktiń dál shegarasınıń anıqlaması boyınsha $\forall x \in (\xi - \delta, \xi] \cap X$ noqatta $f(x) < 0$ hám $\forall x \in (\xi, \xi + \delta)$ noqatta $f(x) \geq 0$

boladı. Alınğan qarama- qarsılıqtan $f(\xi) = 0$ bolatúğını kelip shıǵadı. ▲

9-teorema (Bol'cano- Koshidiń II teoreması). Meyli, $f(x)$ funkciya $[a, b]$ kesindide úzliksiz, $f(a) = A$, $f(b) = B$ bolsın. Onda A hám B sanları arasındaǵı qálegen C sanı ushın sonday $\xi \in (a, b)$ noqat tabılıp, $f(\xi) = C$ teńlik orınlı boladı.

Basqasha aytqanda, kesindide úzliksiz funkciya usı kesindide hámme aralıq mánislerdi qabıl etedi.

Dálillew. Tek $A \neq B$ jaǵdaydı qaraymız (keri jaǵdayda $A = B = C$ hám $\xi = a$ yaqı $\xi = b$ dep alıw múmkin).

Ulıwmalıqtı sheklemeden, $A < B$, $A < C < B$ dep esaplaw múmkin. $\varphi(x) := f(x) - C$ funkciyanı qaraymız. Bul funkciya $[a, b]$ kesindide úzliksiz hám kesindiniń shetki noqatlarında hár qıylı belgidegi mánislerge iye: $\varphi(a) := A - C < 0$, $\varphi(b) := B - C > 0$. Bolcano- Koshidiń I teoreması boyınsha $\exists \xi \in (a, b)$ noqat tabılıp, $\varphi(\xi) = 0$ teńlik orınlı. Bunnan $\varphi(\xi) := f(\xi) - C = 0 \Rightarrow f(\xi) = C$. ▲

10-teorema (Veyershtasstıń birinshi teoreması). Kesindide úzliksiz funkciya usı kesindide shegaralanǵan.

Dálillew. Meyli, $f(x)$ funkciya $[a, b]$ kesindide úzliksiz bolsın. $f(x)$ funkciya $[a, b]$ kesindide joqarıdan shegaralanǵanın dálilleymiz (tómennen shegaralanǵanlıǵı da usınday dállillenedi).

Keriden dállilleymiz, meyli, $f(x)$ funkciya $[a, b]$ kesindide joqarıdan shegaralanbaǵan bolsın. Onda $\forall n$ ($n = 1, 2, \dots$) natural san ushın $f(x_n) > n$ teńsizlik orınlı bolatúǵın keminde bir $x_n \in [a, b]$ noqat tabıladı. $[a, b]$ kesindiniń bul noqatlarınan funkciyanıń sáykes dara mánislerinen dúzilgen $\{f(x_n)\}$ izbe-izlik sheksiz úlken izbe-izlik bolatúǵın $\{x_n\}$ izbe-izlik dúziw múmkin. Bolcano- Veyershtass teoreması boyınsha

$\{x_n\}$ izbe-izlikten bazı bir ξ noqatqa jıynaqlı $\{x_{n_k}\}$ úles izbe-izlik ajıratıp alıw múmkin. $\{x_n\}$ izbe-izliktiń hámme elementleri $[a, b]$ kesindiniń noqatları bolǵanlıqtan, $\xi \in [a, b]$. $f(x)$ funkciya $[a, b]$ kesindide úzliksiz, demek, bul funkciya ξ noqatta da úzliksiz. Funkciyanıń noqatta úzliksizliginiń Geyne anıqlaması boyınsha $\{f(x_{n_k})\}$ izbe-izlik $f(\xi)$ mániske jıynaqlı bolıwı kerek. Biraq bul sheksiz úlken izbe-izliktiń qálegen úles izbe-izligi sheksiz úlken izbe-izlik bolatuǵınlıǵına qarama- qarsı keledi. Bul qarama-qarsılıq teoremanı dálilleydi. ▲

Eskertiw. Bul teorema kesindi ushın orınlı bolıp, sanlar kósheriniń basqa kóplikleri (interval, yarım kesindi) ushın, ulıwma aytqanda, orınlı emes, yaǵnıy funkciyanıń intervalda (yarım kesindide) úzliksizliginen bul funkciyanıń usı kóplikte úzliksizligi kelip shıqpaydı. Mısalı, $f(x) = \frac{1}{x}$ funkciya $(0, 1)$ intervalda $((0, 1]$ yarım kesindide) úzliksiz, biraq bul kóplikte shegaralanǵan emes. Haqıyqatında da, $x_n = \frac{1}{n}$ ($n=1, 2, \dots$) izbe-izliktiń elementleri $(0, 1]$ yarım kesindige derek, biraq funkciyanıń sáykes dara mánislerinen dúzilgen $f(x_n) = n$ izbe-izlik sheksiz úlken izbe-izlik.

$\{x\} \subset R$ kóplikte shegaralanǵan $f(x)$ funkciya usı kópliktegi óziniń dál joqarǵı (dál tómengi) shegarasına hámme waqıt erisedime, yaǵnıy $f(x^*) = \sup_{x \in \{x\}} f(x)$ ($f(x_*) = \inf_{x \in \{x\}} f(x)$) bolatuǵın $x^* \in \{x\}$ ($x_* \in \{x\}$) noqat hárdayım tabıla beredime?,– degen soraw tuwıwı tábiyiy.

Tómendegi mısál berilgen kóplikte shegaralanǵan funkciya usı kópliktegi dál shegaralarına erisiwi shárt emesligin kórsetedi.

$[0, 1]$ kesindide anıqlanǵan

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 0, x = 1 \end{cases}$$

funkciya usı kesindide shegaralanğan hám $\sup_{x \in \{x\}} f(x) = 1$, $\inf_{x \in \{x\}} f(x) = 0$. Biraq $[0, 1]$ kesindiniñ hesh bir noqatında funkciyanıñ mánisi nolge hám birge teñ bolmaydı.

Bul funkciya $[0, 1]$ kesindide úzliksiz emes. Bul shárt úlken áhmiyetke iye.

11-teorema (Veyershtasstıń ekinshi teoreması). *Kesindide úzliksiz funkciya usı kesindide óziniñ eñ úlken hám eñ kishi mánislerine erisedi.*

Dálillew. Veyershtasstıń I teoreması boyınsha $f(x)$ funkciya $[a, b]$ kesindide shegaralanğan, demek, onıñ bul kesindide M dál joqarǵı hám m dál tómengi shegaraları bar. $f(x)$ funkciya $[a, b]$ kesindide M dál joqarǵı shegarasına erisiwin kórsetemiz (m dál tómengi shegarasına erisiwi de usınday dállillenedi).

Meyli, $f(x)$ funkciya $[a, b]$ kesindide M dál joqarǵı shegarasına erise almasın, yaǵnıy $\forall x \in [a, b]$ noqatta $f(x) < M$ bolsın. Onda biz $\varphi(x) := \frac{1}{M - f(x)}$ funkciyanı

qarawımız múmkin. Bul funkciya $[a, b]$ kesindide úzliksiz hám qatal oń anıqlanğan. Demek, Veyershtasstıń I teoreması boyınsha bul funkciya $[a, b]$ kesindide shegaralanğan, yaǵnıy $\exists A > 0$ san tabılıp, $\forall x \in [a, b]$ noqatta $\varphi(x) \leq A$ teńsizlik orınlı boladı. $M - f(x)$ funkciya $[a, b]$ kesindide úzliksiz hám qatal oń anıqlanğan funkciya bolǵanlıqtan $\frac{1}{M - f(x)} \leq A$ teńsizlik $f(x) \leq M - \frac{1}{A}$ teńsizlikke ekvivalent, al bul M sanı $f(x)$ funkciyanıñ $[a, b]$ kesindidegi dál joqarǵı

shegarası ekenligine qarama- qarsı. Bul qarama-qarsılıq teoremanı dälilleydi. ▲

1- Eskertiw. $[a, b]$ kesindide úzliksiz $f(x)$ funkciya usı kesindide óziniń dál tómengi hám dál joqarǵı shegarasına erisetuǵın bolǵanlıqtan funkciyanıń kesindidegi dál joqarǵı shegarası bolǵan M sanın (dál tómengi shegarası bolǵan m sanın) $f(x)$ funkciyanıń $[a, b]$ kesindidegi maksimumı (minimumı) dep atawımız múmkin. Ádette, $f(x)$ funkciyanıń $[a, b]$ kesindidegi maksimumı (minimumı)

$$\max_{a \leq x \leq b} f(x) = \max_{[a, b]} f(x) \quad (\min_{a \leq x \leq b} f(x) = \min_{[a, b]} f(x))$$

simvolları menen belgilenedi.

2- Eskertiw. $[a, b]$ kesindi noqatlarında úziliske iye funkciya da usı kóplikte óziniń dál tómengi hám dál joqarǵı shegarasına erisiwi múmkin. Mısalı, $D(x)$ - Dirixle funkciyası $[0, 1]$ kesindiciniń hár bir noqatında úziliske iye, biraq bul kesindide óziniń dál joqarǵı shegarasına da (1 ge teń), dál tómengi shegarasına da (0 ge teń) erisedi.

3- Eskertiw. Veyershtasstıń ekinshi teoreması da kesindi ushın orınlı bolıp, sanlar kósheriniń basqa úles kópliklerinde (interval, yarım kesindi), ulıwma aytqanda, orınlı emes.

Mısalı, $f(x) = x$ funkciya $(0, 1)$ intervalda $([0, 1)$ hám $(0, 1]$ yarım kesindilerde) úzliksiz, biraq bul kóplikte óziniń dál tómengi hám dál joqarǵı shegaralarına erispeydi ($[0, 1)$ yarım kesindisiniń $x = 0$ noqatında dál tómengi shegarasına erisedi, biraq dál joqarǵı shegarasına erise almaydı, al $(0, 1]$ yarım kesindisiniń $x = 1$ noqatında dál joqarǵı shegarasına erisedi, biraq dál tómengi shegarasına erise almaydı).

Sonıń menen birge intervalda yaki yarım segmentte úzliksiz funkciyanıń dál shegaraları joq bolıwı da múmkin, sebebi bul funkciya kórsetilgen intervalda yaki yarım kesindide

shegaralanbağan bolıwı da múmkin. Mısalı, $f(x) = \frac{1}{x}$ funkciya $(0, 1)$ intervalda $((0, 1]$ yarım kesindinde) úzliksiz, biraq bul funkciya $(0, 1)$ intervalda $(0, 1]$ yarım kesindisinde) tómennen shegaralanğan bolıp, bul intervalda dál tómengi shegarasına erise almaydı $((0, 1]$ yarım kesindiniń $x = 1$ noqatında 1 ge teń dál tómengi shegarasına erisedi). Bul funkciya joqarıdan shegaralanbağan, dál joqarǵı shegarası joq.

12-teorema (Bol`cano-Koshi hám Veyershtass teoremlarınıń saldarı). *Kesindide úzliksiz funkciyanıń mánisler kópligi- tolıq kesindi.*

2.3. Keri funkciyanıń úzliksizligi. 13-teorema. *Eger $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte anıqlanğan, úzliksiz hám qatal ósiwshi (qatal kemiwshi) funkciya bolsa, onda bul funkciyanıń $\{y\} = \{f(x) : x \in \{x\}\}$ mánisler kópliginde anıqlanğan $f^{-1}(y)$ keri funkciya bar bolıp, bul funkciya $\{y\}$ kóplikte úzliksiz hám qatal ósiwshi (qatal kemiwshi) funkciya boladı.*

Dálillew. Meyli, $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte anıqlanğan, úzliksiz hám qatal ósiwshi funkciya bolsın. $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte úzliksiz bolğanlıqtan onıń mánisleri $\{y\}$ kóplikti tolıq toltıradı. Demek, $\forall y_0 \in \{y\}$ ushın $f(x_0) = y_0$ bolatuǵın $x_0 \in \{x\}$ noqat bar hám bunday noqat jalǵız birew. Haqıyqatında da, eger $x' > x_0$ ($x' < x_0$) bolğan $x' \in \{x\}$ noqat alınatuǵın bolsa, $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte qatal ósiwshi bolğanlıqtan $f(x') > f(x_0)$ ($f(x') < f(x_0)$) boladı. Solay etip, $\{y\}$ kóplikten alınğan $\forall y \in \{y\}$ noqat ushın $f(x) = y$ bolatuǵın jalǵız bir $x \in \{x\}$ noqat bar eken. Demek, $\{y\}$ kóplikte anıqlanğan $x = f^{-1}(y)$ keri funkciya bar. Endi usı funkciyanıń qatal ósiwshi ekenin kórsetemiz. Bunı kerisinen dálilleymiz.

Meyli, $y_1 < y_2$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı $y_1, y_2 \in \{y\}$ noqatlarga sıykes $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$ mánisler ushın $x_1 > x_2$ teńsizlik orınlı bolsın. $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte qatal ósiwshi bolǵanlıqtan $f(x_1) > f(x_2)$ yaǵnıy $y_1 > y_2$ boladı. Bul $y_1 < y_2$ teńsizlikke qarama qarsı. Demek, $x = f^{-1}(y)$ keri funkciya $\{y\}$ kóplikte qatal ósiwshi. Monoton funkciyanıń úzliksizligi haqqındaǵı teorema boyınsha $x = f^{-1}(y)$ keri funkciya $\{y\}$ kóplikte úzliksiz boladı.

$f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte anıqlanǵan, úzliksiz hám qatal kemiwshi funkciya bolǵan jaǵday da usıǵan uqsas dálillenedi. ▲

2.4. Funkciyanıń teń ólshemli úzliksizligi. Kantor teoreması. Meyli, $f(x)$ funkciya hár bir noqatı limit noqatı bolǵan $\{x\} \subset R$ kóplikte anıqlanǵan bolsın.

7-anıqlama. Eger $\forall \varepsilon > 0$ ushın $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ san tabılıp, $|x' - x''| < \delta$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı $\forall x', x'' \in \{x\}$ noqatlar ushın $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı bolsa, onda $f(x)$ funkciya $\{x\}$ kóplikte *teń ólshemli úzliksiz* dep ataladı.

1- Eskertiw. Kóplikte teń ólshemli úzliksiz funkciya usı kóplikte úzliksiz.

2- Eskertiw. Kóplikte úzliksiz funkciya bul kópliktiń hár bir noqatında úzliksiz. Demek, kópliktiń hár bir a noqatında Koshi anıqlaması orınlı. Bul anıqlama boyınsha funkciyanıń mánisler kópliginen alınǵan hár bir $f(a)$ noqattıń ε — dógeregi ushın a noqattıń $\exists U_\delta(a)$ dógeregi tabılıp, argumenttiń usı dógerekten alınǵan mánislerine sıykes funkciyanıń mánisleri $f(a)$ noqattıń ε — dógeretine derek boladı. Solay etip, Koshi anıqlamasındaǵı $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ san tek ε sanǵa ǵana emes, a noqattıń ózine de ǵárezli boladı: $\delta = \delta(\varepsilon, a)$.

Demek, funksiyanıń teń ólshemli úzliksizliginiń anıqlamasındaǵı tiykargı talap: $\forall \varepsilon > 0$ ushın $|x' - x''| < \delta$ teńsizlirni qanaatlandıratuǵın $\forall x_1, x_2 \in \{x\}$ noqatlar ushın $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ teńsizliktiń orınlı bolıwın támiyinleytuǵın universal $\delta > 0$ sanınıń tabılıwı.

Eger $f(x)$ funksiyanıń hár bir $x_0 \in \{x\}$ noqatta úzliksiz bolıwı talap qılınsa, onda $\forall \varepsilon > 0$ san hám $\forall x_0 \in \{x\}$ noqat ushın tek ǵana ε sanǵa emes, $x_0 \in \{x\}$ noqatqa da ǵárezli bolǵan, $|x - x_0| < \delta$ teńsizlikti qanaatlandıratuǵın hámme $x \in \{x\}$ noqatta $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ teńsizliktiń orınlı bolıwın támiyinleytuǵın $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ sanınıń tabılıwına kepillik beriw múmkin. Bunda, ulıwma aytqanda, hámme $x_0 \in \{x\}$ noqatlar ushın kórsetilgen $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ sanlardıń dál tómengi oń shegarası bolmawı da múmkin, yaǵnıy funksiyanıń $\forall x \in \{x\}$ noqatta úzliksizliginen, ulıwma aytqanda, bul funksiyanıń $\{x\}$ kóplikte teń ólshemli úzliksizligi kelip shıqpaydı.

3- Eskertiw. Funkciyanıń teń ólshemli úzliksizliginiń anıqlamasınan, eger $f(x)$ funksiya $\{x\}$ kóplikte teń ólshemli úzliksiz bolsa, onda bul funksiya usı kópliktiń qálegen úles kópliginde teń ólshemli úzliksiz bolatuǵını kelip shıǵadı.

Mısallar. 1) $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiya $x \geq 1$ yarım tuwrı sızıqtı teń ólshemli úzliksiz. Haqıyqatında da, bul yarım sızıqtıń qálegen eki x' hám x'' noqatı ushın

$$|f(x') - f(x'')| = \left| \frac{1}{x'} - \frac{1}{x''} \right| = \left| \frac{x'' - x'}{x' x''} \right| = \frac{|x'' - x'|}{x' x''} \leq |x'' - x'|$$

teńsizlik orınlı. Sonlıqtan, $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $\delta = \varepsilon$ dep alsaq, $|x' - x''| < \delta$ teńsizlikti qanaatlandıratuǵın $\forall x', x'' \in [1, +\infty)$ noqatlar ushın $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı boladı.

2) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ funkciya $(0, 1)$ intervaldın hár bir noqatında úzliksiz, biraq bul intervalda teń ólsheмли úzliksiz emes. Bunu kórsetiw ushın bazı bir $\varepsilon > 0$ hám jeterli dárejede kishi $\forall \delta > 0$ sanı ushın $|x' - x''| < \delta$ teńsizlikti qanaatlandıratuǵın, biraq funkciyanıń sáykes dara mánisleri $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$ teńsizlikti qanaatlandıratuǵın $\exists x', x'' \in (0, 1)$ noqatlar juplıǵı bar ekenin dálillew jetkilikli.

Elementleri $(0, 1)$ intervalǵa derek $x'_n = \frac{1}{n\pi}$ hám $x''_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ ($n=1, 2, \dots$) izbe-izliklerdi qaraymız. Bul izbe-

izliklerdın hár birewi, demek, olardıń ayırması da, sheksiz kishi izbe-izlik. Sonlıqtan jeterli dárejede kishi $\forall \delta > 0$ san ushın $|x'_n - x''_n| < \delta$ teńsizlik orınlanatuǵın n nomer bar. Sonıń menen birge $\forall n$ nomer ushın

$$|f(x'_n) - f(x''_n)| = \left| \sin(\pi n) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \right| = 1$$

Sonlıqtan qálegen $0 < \varepsilon \leq 1$ san hám jeterli dárejede kishi $\forall \delta > 0$ san ushın $|x'_n - x''_n| < \delta$ teńsizlikti qanaatlandıratuǵın, biraq funkciyanıń sáykes dara mánisleri $|f(x'_n) - f(x''_n)| = 1 \geq \varepsilon$ teńsizlikti qanaatlandıratuǵın, $x'_n, x''_n \in (0, 1)$ noqatlar juplıǵı bar, bul qaralıp atırǵan funkciya $(0, 1)$ intervalda teń ólsheмли úzliksiz emesligin bildiredi.

3) $f(x) = x^2$ funkciya $x \geq 1$ yarım tuwrı sızıqta teń ólsheмли úzliksiz emesligin dálilleymiz. $\forall x', x'' \in [1, +\infty)$ noqatlar ushın

$$|f(x') - f(x'')| = |x'^2 - x''^2| = |x' - x''| \cdot |x' + x''| \geq |x' - x''| \cdot x'$$

(*)

teńsizlik orınlı. Endi tek bazı bir $\varepsilon > 0$ ushın ǵana emes, hátte $\forall \varepsilon > 0$ ushın da hám jeterli dárejede kishi $\forall \delta > 0$ sanı ushın $|x' - x''| < \delta$ teńsizlikti qanaatlandıratuǵın, biraq funkciyanıń sáykes dara mánisleri $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$ teńsizlikti qanaatlandıratuǵın $\exists x', x'' \in [1, +\infty)$ noqatlar juplıǵı bar ekenin dálilleybiz.

$\forall \varepsilon > 0$ hám $\forall \delta > 0$ sanlardı saylap alıp, x' sanı sıpatında 1 den úlken, $x' > \frac{2\varepsilon}{\delta}$ teńsizligin qanaatlandıratuǵın sandı hám $x'' = x' + \frac{\delta}{2}$ dep alamız. Bunday x' hám x'' sanlar ushın $|x'' - x'| = \frac{\delta}{2} < \delta$ teńsizlik orınlı. Ekinshi tárepten, (*) teńsizlik boyınsha usı x' hám x'' sanlar ushın

$$|f(x') - f(x'')| \geq \frac{\delta}{2} \cdot \frac{2\varepsilon}{\delta} = \varepsilon$$

teńsizlik orınlı.

Eger berilgen $f(x) = x^2$ funkciyanı $[1, +\infty)$ yarım tuwrı sızıǵında emes, al $[1, b]$ ($b > 1$) kesindisinde qarasaq, onda bul funksiya usı kesindide teń ólshemli úzliksiz bolatuǵının kóriwimiz qıyın emes.

Bul mına teoremadan túsiniqli boladı.

14-teorema (Kantor). *Kesindide úzliksiz funksiya usı kesindide teń ólshemli úzliksiz.*

Dálillew. Meyli, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesindide úzliksiz funksiya bolıp, biraq bul kesindide teń ólshemli úzliksiz bolmasın.

Onda bazı bir $\varepsilon > 0$ hám qálegen jeterli dárejede kishi $\delta > 0$ sanlar ushın $|x' - x''| < \delta$ teńsizligin qanaatlandıratuǵın $\exists x', x'' \in [a, b]$ noqatlar tabılıp, bul noqatlar ushın $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$ teńsizlik orınlı boladı. $\delta_n = 1/n$ ($n = 1, 2, \dots$) sheksiz kishi izbe-izligin saylap alamız. Tańlap alınǵan $\varepsilon > 0$

san hám $\forall n$ nomer ushın $|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}$ (*) teńsizligin qanaatlandıratuǵın $\exists x', x'' \in [a, b]$ noqatlar tabılıp, bul noqatlar ushın $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon$ (**) teńsizlik orınly boladı dep aytıwımız múmkin. $\{x'_n\}$ izbe-izliktiń elementleri $[a, b]$ kesindiniń noqatları bolǵanlıqtan, bul izbe-izlik shegaralanǵan hám Bolcano- Veyershtrass teoreması boyınsha bul izbe-izlikten ξ noqatqa jıynaqlı $\{x'_{n_k}\}$ úles izbe-izlik ajıratıp alıw múmkin. Bul ξ limit noqat $[a, b]$ kesindige derek. (*) teńsizlik boyınsha sáykes $\{x''_{n_k}\}$ úles izbe-izlik te ξ noqatqa jıynaqlı.

$f(x)$ funkciya $[a, b]$ kesindide úzliksiz bolǵanlıqtan bul funkciya ξ noqatta da úzliksiz, sonlıqtan funkciyanıń noqatta úzliksizliginiń Geyne anıqlaması boyınsha funkciyanıń sáykes dara mánislerinen dúzilgen $\{f(x'_{n_k})\}$ hám $\{f(x''_{n_k})\}$ úles izbe-izlikler $f(\xi)$ mániske jıynaqlı, yaǵnıy $\{f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})\}$ izbe-izlik sheksiz kishi izbe-izlik boladı. Bul $\forall n$ nomer, demek, $\forall n_k$ nomer ushın orınly bolǵan (**) teńsizlikke qarama-qarsı. Bul qarama- qarsılıq teoremanı dálilleydi. ▲

3-§. Tiykarǵı elementar funkciyalar hám olardıń úzliksizligi

$y = x^a$, $y = a^x$, $y = \log_a x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ funkciyalar tiykarǵı (ápiwayı) elementar funkciyalar dep ataladı.

Biziń tiykarǵı maqsetimiz usı tiykarǵı (ápiwayı) elementar funkciyalardıń úzliksizligin anıqlaw máselesin izertlewden ibarat. Ápiwayı elementar funkciyalardı anıqlaw máselesi onsha ańsat másele emesligin atap ótiw kerek. Mısalı, $y = a^x$ kórsetkishli funkciya argumenttiń racional mánisleri ushın ańsat anıqlanadı, sonıń menen birge bul funkciyanı x argumenttiń qálegen haqıyqıy

mánisleri ushın anıqlaw, yaǵnıy haqıyqıy sandı qálegen x haqıyqıy dárejege kóteriwdi anıqlaw kerek boladı. $\sin x$ hám $\cos x$ trigonometriyalıq funkciyalardı kórgizbeli geometriyalıq pikirlewler járdeminde anıqlaw logikalıq kemshiliklerge iye. Bul funkciyalardı x argumenttiń qálegen haqıyqıy mánisleri ushın anıqlaw múmkinligi birlik sheńber noqatları menen $[0, 2\pi)$ yarım kesindige derek haqıyqıy sanlar arasında bir mánisli sáykes ornatiw múmkinligine keltiriledi.

Usıların bári menen bul paraqrafta shuǵıllanamız.

3.1. Kórsetkishli funkciyalar. Biz úyreniwdi ón sanlardıń racional dárejesin anıqlawdan baslaymız. x haqıyqıy sandı n natural dárejege kóteriw ushın bul sandı ózine ózin n mártebe kóbeytiw kerek. Demek, $\forall n \in \mathbb{N}$ ushın $\forall x \in \mathbb{R}$ mánislerde $y = x^n$ dárejeli funkciya anıqlanǵan dep esaplaw múmkin.

1-teorema. $y = x^n$ (n – natural san) dárejeli funkciya $x \geq 0$ mánislerde qatal ósiwshi hám úzliksiz.

Dálillew. $y = x^n$ funkciya qatal ósiwshi ekenin kórsetemiz. Meyli, $0 \leq x_1 < x_2$ bolsın. Onda $x_2^n - x_1^n = (x_2 - x_1)(x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_1 + \dots + x_1^{n-1})$. Teńliktiń ón jaǵındaǵı eki kóbeytiwshi de ón, sonlıqtan teńliktiń shep tárepindegi ayırma da ón, yaǵnıy $x_2^n > x_1^n$. Bul $y = x^n$ funkciya $x \geq 0$ mánislerde qatal ósiwshi ekenin bildiredi.

$y = x^n$ funkciyanıń $x \geq 0$ mánislerde úzliksizligi funkciyanıń úzliksizliginiń anıqlamasınan kelip shıǵadı. ▲

$y = x^n$ dárejeli funkciyanı $[0, N]$ (N – qálegen ón san) kesindide qaraymız. Bul funkciya kórsetilgen kesindide úzliksiz hám qatal ósiwshi bolǵanlıqtan keri funkciyanıń úzliksizligi haqqındaǵı teorema boyınsha $[0, N^n]$ kesindide úzliksiz hám qatal ósiwshi $x = y^{1/n}$ keri funkciyaǵa iye. N sandı qálegenshe úlken qılıp saylap alıw múmkin bolǵanlıqtan N^n sandı da

qálegenshe úlken qılıp saylap alıw múmkin. Demek, $x = y^{1/n}$ kerі funkciya y ózgeriwshiniń hámme teris emes mánisleri ushın anıqlanǵan. Bul funkciyada argumenti menen funkciyanıń belgilewleriniń orınların almasıwıp hámme $x \geq 0$ haqıyqıy mánislerde anıqlanǵan $y = x^{1/n}$ funkciyanı alamız.

Endi biz $a > 0$ sannıń $\forall r$ racional dárejesin anıqlawımız múmkin. Dáslep $a^{1/n}$ sandı $y = x^{1/n}$ funkciyanıń a noqattaǵı dara mánisine teń b haqıyqıy san sıpatında anıqlaymız. Bunnan keyin, eger $r = m/n$ (m, n – pútın oń sanlar) bolsa, onda $a^r = a^{m/n} = (a^{1/n})^m$ dep alamız. Bunnan tısqarı, anıqlama boyınsha $a^0 = 1$, $a^{-r} = (\frac{1}{a})^r$ ($r > 0$) dep esaplaymız.

$a > 0$ sannıń $\forall r$ racional dárejesin usılay etip anıqladıq.

On haqıyqıy sanlardıń racional dárejesiniń mına qásiyetleri orınlı:

$$(a^r)^s = a^{rs}, \quad a^r \cdot b^r = (ab)^r, \quad a^r \cdot a^s = a^{r+s}.$$

Eger $a > 1$ bolsa, onda $\forall r > 0$ racional san ushın $a^r > 1$.

Eger $r = \frac{m}{n}$ racional bólshektiń n bólimi taq san bolsa, onda racional dárejeni teris sanlar ushın $a > 0$ dep alıp,

$$(-a)^r = \begin{cases} a^r, & n = 2k, \\ -a^r, & n = 2k - 1 \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

kóriniste anıqlaw múmkin.

Racional sanlar kópliginde anıqlanǵan $y = a^x$ funkciya $a > 1$ bolsa bul kóplikte monoton ósedi.

Haqıyqatında da, meyli, r_1 hám r_2 — $r_2 > r_1$ teńsizlikti qanaatlandıratuǵın racional sanlar bolsın. Onda

$$a^{r_2} - a^{r_1} = a^{r_1} (a^{r_2 - r_1} - 1) > 1, \quad (1)$$

sebebi $a > 1$ hám $r_2 - r_1 > 0$. Solay etip, (1) teńliktiń oń tárepi oń anıqlanǵan. Demek, $a^{r_2} - a^{r_1} > 0$, yaǵnıy $a^{r_2} > a^{r_1}$. ▲

Endi $y = a^x$ funkciyanı x argumenttiń tek racional mánisleri ushın emes, qálegen haqıyqıy mánisleri ushın da anıqlaymız. Meyli, x - qálegen haqıyqıy san bolsın.

$$\alpha < x < \beta \quad (2)$$

teńsizliklerdi qanaatlandıratuǵın hámme múmkin bolǵan α hám β racional sanlardı qaraymız.

$a > 1$ bolsa a^x sandı (2) teńsizliklerdi qanaatlandırıwshı hámme múmkin bolǵan α hám β racional sanlar ushın

$$a^\alpha < y < a^\beta \quad (3)$$

teńsizliklerdi qanaatlandırıwshı $y \in \mathbb{R}$ san sıpatında anıqlaymız.

2-teorema. $\forall x \in \mathbb{R}$ hám $a > 1$ haqıyqıy san hám (2) teńsizliklerdi qanaatlandırıwshı hámme múmkin bolǵan α hám β racional sanlar ushın (3) teńsizliklerdi qanaatlandırıwshı $y \in \mathbb{R}$ san bar hám ol jalǵız birew.

Demek, usı jol menen $y = a^x$ funkciya pútkil haqıyqıy sanlar kópliginde anıqlanadı eken.

3-teorema. $y = a^x$ kórsetkishli funkciya $a > 1$ bolsa pútkil sanlar kósherinde qatal ósiwshı.

Dálillew. Meyli, x_1 hám $x_2 - x_1 < x_2$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı haqıyqıy sanlar bolsın. $x_1 < \alpha < \beta < x_2$ teńsizliklerdi qanaatlandırıwshı α hám β racional sanlar hárdayım tabıladı. $x_1 < \alpha$ hám $\beta < x_2$ bolǵanlıqtan kórsetkishli funkciyanıń anıqlamasınan $a^{x_1} \leq a^\alpha$, $a^\beta \leq a^{x_2}$ teńsizlikler orınlı. Ekinshi tárepten, $\alpha < \beta$ bolǵanlıqtan kórsetkishli funkciyanıń racional sanlar kópliginde ósiwshiliginen $a^\alpha < a^\beta$ teńsizlik kelip

shıǵadı. $a^{x_1} \leq a^\alpha$, $a^\alpha < a^\beta$ hám $a^\beta \leq a^{x_2}$ teńsizliklerden $a^{x_1} < a^{x_2}$ teńsizlikti alamız. Bul $y = a^x$ kórsetkishli funkciya $a > 1$ bolsa pútkil sanlar kósherinde qatal ósiwshi funkciya ekenin bildiredi.



4-teorema. $y = a^x$ ($a > 1$) kórsetkishli funkciya sanlar kósheriniń hár bir noqatında úzliksiz.

Dálillew. Meyli, x — qálegen haqıyqıy san, al $\{x_n\}$ — x sanǵa jıynaqlı qálegen izbe-izlik bolsın. Funkciyanıń úzliksizliginiń Geyne anıqlaması boyınsha sáykes $\{a^{x_n}\}$ izbe-izlik a^x sanǵa jıynaqlı bolatuǵının, yaǵnıy $\forall \varepsilon > 0$ ushın $\exists N = N(\varepsilon)$ nomer tabılıp, $n > N$ nomerler ushın $|a^{x_n} - a^x| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı bolatuǵının, kórsetiw jetkilikli. $\forall \varepsilon > 0$ hám bul sanǵa sáykes $\alpha < x < \beta$ hám $a^\beta - a^\alpha < \varepsilon$ bolatuǵın α hám β racional sanlardı saylap alamız. $\{x_n\}$ — x sanǵa jıynaqlı izbe-izlik hám $\alpha < x < \beta$ bolǵanlıqtan $\exists N$ nomer tabılıp, $n > N$ nomerler ushın $\alpha < x_n < \beta$ teńsizlikler orınlı boladı. Kórsetkishli funkciya monoton ósiwshi bolǵanlıqtan $a^\alpha < a^x < a^\beta$ hám $n > N$ nomerler ushın $a^\alpha < a^{x_n} < a^\beta$ teńsizlikler orınlı.

Solay etip, a^x hám a^{x_n} sanlar $n > N$ nomerler ushın ayırması ε sannan kishi a^α hám a^β sanlar arasında jaylasqan. Bunnan $n > N$ nomerler ushın $|a^{x_n} - a^x| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı bolatuǵını kelip shıǵadı. Bul $y = a^x$ kórsetkishli funkciya x noqatta úzliksiz ekenin bildiredi. ▲

1- Saldar. $y = a^x$ ($a > 1$) kórsetkishli funkciya sanlar kósheride oń anıqlanǵan

2- Saldar. $y = a^x$ ($a > 1$) kórsetkishli funkciya ushın

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

teńlikler orınlı.

3- Saldar. $y = a^x$ ($a > 1$) kórsetkishli funkciyanıń mánisleri $y > 0$ oń yarım kósherdi tolıq toltıradı.

4- Saldar. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sanlar ushın

$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}, \quad a^x \cdot b^x = (ab)^x \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}.$$

teńlikler orınlı boladı.

1- súwrette $y = a^x$ kórsetkishli funkciyanıń grafigi $a > 1$ (1- a súwret) hám $0 < a < 1$ (1- b súwret) jaǵlaylar ushın súwretlengen.

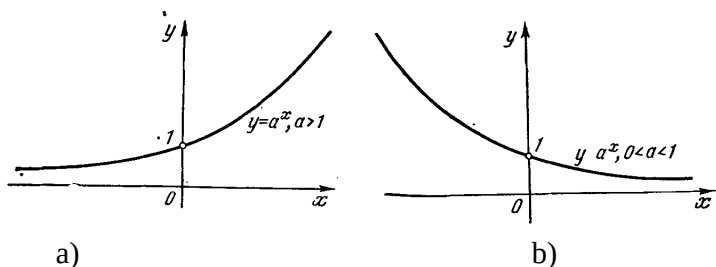
Eskertiw. Kórsetkishli funkciyanı málim shártlerdi qanaatlandırıwshı bazı bir funkcionallıq teńlemenıń sheshimi sıpatında anıqlaw múmkin. Pútkil sanlar kósherinde anıqlanǵan hám tómendegi úsh shártti qanaatlandırıwshı $f(x)$ funkciya bar hám ol jalǵız birew ekenin dálillew múmkin:

$$1^0. \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ sanlar ushın } f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2).$$

$$2^0. \quad f(0) = 1, \quad f(1) = a.$$

$$3^0. \quad f(x) \text{ funkciya } x = 0 \text{ noqatda úzliksiz.}$$

Bul funkciya biz joqarıda qurǵan kórsetkishli funkciya boladı.



1- súwret

3.2. Logarifmlik funkciya. Logarifmlik funkciyanı kórsetkishli funkciyaǵa keri funkciya sıpatında anıqlaymız.

Meyli, $[c, d]$ – sanlar kósheriniń qálegen kesindisi bolsın. Bul kesindide $y = a^x$ ($a > 1$) kórsetkishli funkciya ósiwshi hám úzliksiz. Sonıń ushın kerı funkciyanıń úzliksizligi haqqındaǵı teorema boyınsha $y = f(x) = a^x$ funkciya $[a^c, a^d]$ kesindide ósiwshi hám úzliksiz $x = f^{-1}(y)$ kerı funkciyaǵa iye, bul funkciya *logarifmlik funkciya* dep ataladı hám $x = f^{-1}(y) = \log_a y$ dep belgilenedi. Bul jerde argument hám funkciyanıń belgileniwleriniń orınların almasırtıp, bul funkciyanı bizge úyrenshikli $y = \log_a x$ kóriniste jazamız.

$0 < a < 1$ jaǵday usıǵan uqsas qaraladı.

Logarifmlik funkciyanıń qásiyetleri:

1) *Logarifmlik funkciya argumenttiń óń mánislerinde anıqlanǵan.*

Haqıyqatında da, logarifmlik funkciyanıń argumenti kórsetkishli funkciyanıń mánisleri bolıp, tek óń mánisler boladı hám $x > 0$ yarım kósherdi tolıq toltıradı.

2) *Logarifmlik funkciya $x > 0$ yarım kósherde $a > 1$ bolsa úzliksiz hám ósiwshi, al $0 < a < 1$ bolsa úzliksiz hám kemiwshi bolıp,*

$$a > 1: \lim_{x \rightarrow 0+0} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty,$$

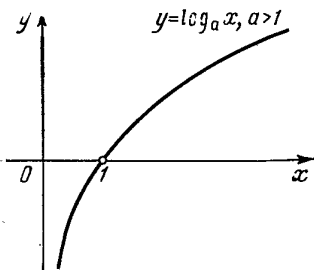
$$0 < a < 1: \lim_{x \rightarrow 0+0} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$$

teńlikler orınlı.

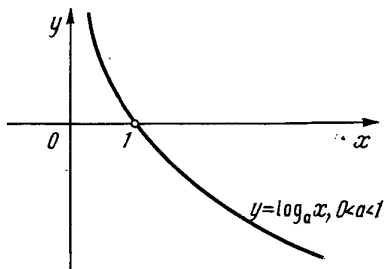
3) $\forall x_1, x_2$ *óń sanlar ushın* $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$ *teńlik orınlı.*

Eskertiw. $y = \log_e x =: \ln x$ funkciya *natural logarifm* dep ataladı.

2- súwrette $y = \log_a x$ logarifmlik funkciyanıń grafigi $a > 1$ (2- a súwret) hám $0 < a < 1$ (2- b súwret) jaǵlaylar ushın súwretlengen.



a)



b)

2- súwret

3.3. Dárejeli funksiya. $\forall \alpha \in R$ kórsetkishli dárejeli funksiyanı logarifmlik hám kórsetkishli funksiyanıń superpoziciyası (quramalı funksiya) sıpatında anıqlaymız. Meyli, $x > 0$ bolsın. Onda ulıwma *dárejeli funksiya*

$$y = x^\alpha = (a^{\log_a x})^\alpha = a^{\alpha \cdot \log_a x}$$

kóriniste anıqlanadı, bul jerde a — qálegen san, anıqlıq ushın $a > 1$ dep alamız.

Usı anıqlama boyınsha hám $a > 1$ bolsa logarifmlik funksiya $x > 0$ yarım kósherde, al kórsetkishli funksiya pútkil sanlar kósherinde ósetuǵınlıǵınan $y = x^\alpha$ *dárejeli funksiya* $x > 0$ yarım kósherde $\alpha > 0$ bolsa ósetuǵını, al $\alpha < 0$ bolsa kemeyetuǵını kelip shıǵadı.

Dárejeli funksiyanıń qásiyetleri:

1) Eger $\alpha > 0$ bolsa, $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^\alpha = 0$, al $\alpha < 0$ bolsa,

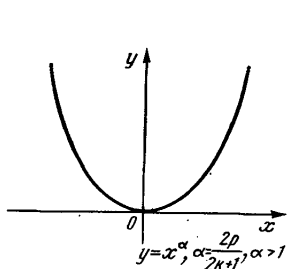
$$\lim_{x \rightarrow 0+0} x^\alpha = +\infty \text{ teńlik orınlı.}$$

2) Dárejeli funksiya $x > 0$ yarım kósherdiń hár bir noqatında úzliksiz.

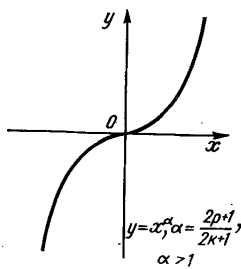
Eskertiw. Eger dárejeli funksiyanıń kórsetkishi bólimi taq san bolǵan $\frac{m}{n}$ racional bólshek bolsa, onda dárejeli funksiyanı $x < 0$ mánisler ushın

$$y = x^\alpha = \begin{cases} |x|^\alpha, & n = 2k, \\ -|x|^\alpha, & n = 2k - 1 \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

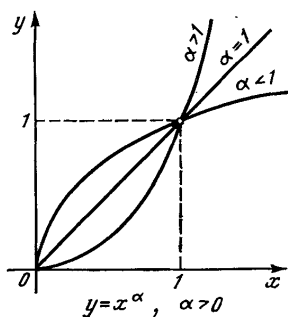
dep alıp, pútkil sanlar kósherinde anıqlaw múmkin.



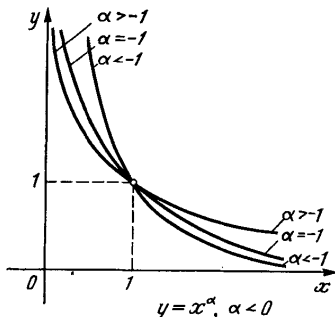
a)



b)



c)



d)

3- súwret

3- súwrette $y = x^\alpha$ dárejeli funkciyanıń α dáreje kórsetkishiniń hár qıylı mánisleri ushın grafikleri súwretlengen.

3.4. Trigonometriyalıq funkciyalar. Biz joqarıda $y = \sin x$ hám $y = \cos x$ funkciyalardı kórgizbeli geometriyalıq pikirlewler járdeminde anıqlaǵanda bazı bir logikalıq kemshiliklerdiń payda bolatuǵını haqqında aytıp óttik. Bul funkciyalardı logikalıq kemshiliklersiz bazı bir funkcionallıq teńlemeler sistemasiniń sheshimi sıpatında anıqlaw múmkin.

Tóمندegi tastıyıqlaw orınlı: x argumenttiń hámme haqıyqıy mánislerinde anıqlanǵan hám tómendegi shártlerdi qanaatlandırıwshı $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar juplıǵı bar hám bul juplıq jalǵız birew:

$$1) \begin{aligned} f(x_1 + x_2) &= f(x_1) \cdot g(x_2) + g(x_1) \cdot f(x_2), \\ g(x_1 + x_2) &= g(x_1) \cdot g(x_2) - f(x_1) \cdot f(x_2), \\ f^2(x) + g^2(x) &= 1; \end{aligned}$$

$$2) f(0)=0, \quad g(0)=1, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1, \quad g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0;$$

3) argumenttiń $0 < x < \frac{\pi}{2}$ teńsizlikte qanaatlandırıwshı mánislerinde $0 < f(x) < x < \frac{f(x)}{g(x)}$ teńsizlikler orınlı boladı.

Kórsetilgen 1)-3) shártlerden $y = \sin x$ hám $y = \cos x$ funkciyalardıń bizge málım basqa qásiyetlerin de keltirip shıǵarıw múmkin. Bul 1)- 3) shártler jalǵız bir $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar juplıǵın anıqlaytuǵınlıǵınan hám kórgizbeli geometriyalıq pikirlewler járdeminde kiritilgen $f(x) = \sin x$ hám $g(x) = \cos x$ funkciyalar bul úsh qásiyetke iye bolatuǵınlıǵınan kelip shıǵadı.

Mısal sıpatında 1)- 3) shártler járdeminde $f(x) = \sin x$ hám $g(x) = \cos x$ funkciyalardıń úzliksizligin dálillew hám olardıń monotonlıq aralıqların anıqlaw ushın kerek bolatuǵın bir neshe qásiyetlerin keltiremiz.

a) 1) shárttiń $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ teńliginen $\sin^2 x \leq 1, \cos^2 x \leq 1$, yaǵnıy

$$|\sin x| \leq 1, \quad |\cos x| \leq 1 \quad (4)$$

teńsizlikler kelip shıǵadı.

b) 1) hám 2) shártlerdiń dáslepki eki teńliklerinen

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x \quad (5)$$

teńliklerdi alamız, yaǵnıy $f(x) = \sin x$ taq funkciyanı, al $g(x) = \cos x$ jup funkciyanı anıqlaydı.

c) 1) shártten

$$\begin{aligned} \sin(x_1 - x_2) &= \sin x_1 \cos x_2 - \cos x_1 \sin x_2, \\ \cos(x_1 - x_2) &= \cos x_1 \cos x_2 + \sin x_1 \sin x_2 \end{aligned} \quad (6)$$

teńlikler kelip shıǵadı.

d) 1) shártten hám alınǵan (6) teńliklerdiń birinshisinen

$$\begin{aligned} \sin x_2 + \sin x_1 &= 2 \sin \frac{x_1 + x_2}{2} \cos \frac{x_1 - x_2}{2}, \\ \sin x_2 - \sin x_1 &= 2 \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \end{aligned} \quad (7)$$

teńlikler kelip shıǵadı.

e) (6) teńliklerdiń birinshisinen hám 2) shárttiń sońǵı eki teńliginen

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad (8)$$

teńlik kelip shıǵadı.

f) 1) shárttiń dáslepki eki teńliginen $x_1 = x_2 = x$ bolǵan jaǵdayda

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad (9)$$

teńlikler kelip shıǵadı. Sonıń menen birge $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ teńlikler de orınlı boladı, yaǵnıy $y = \sin x$ hám $y = \cos x$ funkciyalar 2π periodlı funkciyalar.

g) $\forall x \in R$ ushın

$$|\sin x| \leq |x| \quad (10)$$

teńsizlik orınlı.

$y = \sin x$ hám $y = \cos x$ funkciyalardıń qásiyetleri:

1⁰. **$\sin x$ hám $\cos x$ funkciyalar sanlar kósheriniń hár bir noqatında úzliksiz.**

Dálillew. Tek $f(x) = \sin x$ funkciyanıń $\forall x$ noqatta úzliksizligin dálillew jetkilikli, sebebi $g(x) = \cos x$ funkciyanıń $\forall x$ noqatta úzliksizligi (8) teńlik hám quramalı funkciyanıń úzliksizligi haqqındaǵı teoremadan kelip shıǵadı.

Dáslep **$\sin x$** funkciyanıń $x = 0$ noqatta úzliksizligin dálilleymiz. 2) shárttiń birinshi teńligi boyınsha $\sin 0 = 0$ bolǵanlıqtan funkciyanıń úzliksizliginiń Geyne anıqlaması boyınsha $\forall \{x_n\}$ sheksiz kishi izbe-izlik ushın sáykes $\{\sin x_n\}$ izbe-izlik te sheksiz kishi izbe-izlik bolatuǵının dálillew jetkilikli.

(10) teńsizlikten hám $|\sin x| \geq 0$ shártten $0 \leq |\sin x| \leq |x|$ kelip shıǵadı. Demek, $0 \leq |\sin x_n| \leq |x_n|$. Bul teńsizlikler izbe-izlikler ushın eki jaqlap shegaralaw principini boyınsha $\{|\sin x_n|\}$ izbe-izlik, demek, $\{\sin x_n\}$ izbe-izlik sheksiz kishi izbe-izlik ekenin bildiredi. **$\sin x$** funkciyanıń $x = 0$ noqatta úzliksizligi dálillendi.

Endi **$\sin x$** funkciya sanlar kósheriniń $\forall x$ noqatında úzliksizligin dálilleymiz. Meyli, $\{x_n\}$ — x noqatqa jıynaqlı qálegen izbe-izlik bolsın. Sáykes $\{\sin x_n\}$ izbe-izlik **$\sin x$** noqatqa jıynaqlı bolatuǵının dálillew jetkilikli.

(6) teńliklerdiń ekinshisinde $x_2 = x_n$, $x_1 = x$ dep alsaq,

$$\sin x_n - \sin x = 2 \cos \frac{x_n + x}{2} \sin \frac{x_n - x}{2} \quad (11)$$

teńlikke iye bolamız. Bul teńliktiń oń tárepinde sheksiz kishi izbe-izlik elementi turǵanın kórsetiw jetkilikli, al bul $\sin x$ funkciyanıń $x = 0$ noqatta úzliksizligi boyınsha $\left\{ \sin \frac{x_n - x}{2} \right\}$ izbe-izlik sheksiz kishi izbe-izlik ekeninen hám (4) teńsizlik boyınsha $\left\{ 2 \cos \frac{x_n + x}{2} \right\}$ izbe-izlik shegaralanǵan izbe-izlik ekeninen kelip shıǵadı. ▲

2°. $\sin x$ funkciya $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$ kesindilerdiń hár birewinde ósedi hám $[-\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi]$ kesindilerdiń hár birewinde kemeyedi; $\cos x$ funkciya $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$ kesindilerdiń hár birewinde kemeyedi hám $[-\pi + 2k\pi, 2k\pi]$ kesindilerdiń hár birewinde ósedi (bul jerde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Dálillew. Dálillewdi $\sin x$ funkciyası ushın júrgiziw jetkilikli, sebebi bul funkciyanıń monotonlıq aralıqların tapqannan soń $\cos x$ funkciyanıń monotonlıq aralıqları (8) teńlikten paydalanıp tabılıwı múmkin.

$\sin x$ funkciyası 2π periodlı funkciya bolǵanlıqtan onıń bir periodı shegarasındaǵı, yaǵnıy, mısalı, $[-\frac{\pi}{2}, 2\pi - \frac{\pi}{2}]$ kesindidegi, monotonlıq aralıqların tabıw jetkilikli.

Dáslep $\sin x$ funkciyası $[0, \frac{\pi}{2}]$ kesindide ósetuǵınlıǵın dálilleymiz. Meyli, x_1 hám $x_2 - x_2 > x_1$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı usı kesindi noqatları bolsın. Onda $\frac{x_1 + x_2}{2}$ hám $\frac{x_2 - x_1}{2}$ noqatlar $(0, \frac{\pi}{2})$ intervalǵa derek bolıp, (7) teńliklerdiń ekinshisi boyınsha

$$\sin x_2 - \sin x_1 = 2 \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \sin \frac{x_2 - x_1}{2}. \quad (12)$$

bul teńliktiń oń tárepindegi ańlatpa oń anıqlanǵanın dálillew, al bunnıń ushın $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$ noqatta **sin x** hám **cos x** funkciyaları oń mánislerdi qabıl qılatuǵınlıǵına isenim arttırıw, jetkilikli. **sin x** funkciyası ushın bul 3) qásiyetinen, al **cos x** funkciyası ushın (8) teńlikten kelip shıǵadı.

Solay etip, **sin x** funkciyası $[0, \frac{\pi}{2}]$ kesindide ósetuǵınlıǵı dálillendi. **sin x** funkciyasınıń taqlıǵınan bul funkciyanıń $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ kesindide ósetuǵınlıǵı kelip shıǵadı. Nátiyjede **sin x** funkciyası $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ kesindide ósetuǵınlıǵı dálillendi, Bul funkciyanıń $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \pi]$ kesindidegi xarakterin anıqlaw qaladı. Biz e) punktte **sin** $\pi = 0$ hám **cos** $\pi = -1$ bolatuǵının kórdik, al bul teńliklerden hám 1) shártti birinshi teńliginen **sin**($x + \pi$) = -**sin x** bolatuǵını kelip shıǵadı. Bul teńlik **sin x** funkciyası $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ kesindide ósetuǵınlıǵınan bul funkciya $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \pi]$ kesindide kemeyedi degen juwmaq shıǵarıwǵa múmkinshilik beredi.

sin x hám **cos x** funkciyalarınıń monotonlıq aralıqların izertlew usı menen tamamlanadı. ▲

$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{hám} \quad ctgx = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{formulalardan hám úzliksiz}$$

funkciyalar ústinde ámeller haqqındaǵı teorema boyınsha **tgx**

funkciya $\forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) noqatta, al $ctgx$ funkciya

$\forall x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) noqatta úzliksiz.

$$\sin(x + \pi) = -\sin x, \quad \cos(x + \pi) = -\cos x$$

teńliklerden $tg(x + \pi) = \frac{\sin x}{\cos x} = tgx$ hám $ctg(x + \pi) = \frac{\cos x}{\sin x} = ctgx$

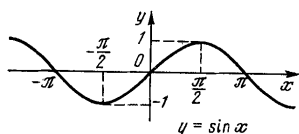
teńliklerdi alamız. Bul tgx hám $ctgx$ funkciyalar π periodlı funkciyalar ekenin bildiredi. Demek, bul funkciyalardıń monotonlıq aralıqların izertlewdi tek π uzınlıqtaǵı aralıqlar shegarasında ótkeriw jetkilikli boladı eken.

$$tgx_2 - tgx_1 = \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_1 \cos x_2} \quad (13)$$

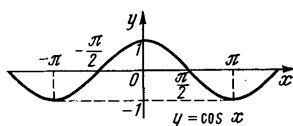
teńlikten hám $\sin x$ funkciyası $(0, \frac{\pi}{2})$ intervalda, al $\cos x$ funkciyası $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ intervalda tek oń mánislerdi qabıl qılatuǵınlıǵınan tgx funkciya $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ intervalda ósetuǵınlıǵı kelip shıǵadı ($x_2 > x_1$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı $\forall x_1, x_2 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ noqatlarda (13) teńliktiń oń tárepi oń anıqlanǵan).

$ctgx$ funkciyanıń $(0, \pi)$ intervalda kemiwshiligi usıǵan uqsas anıqlanadı.

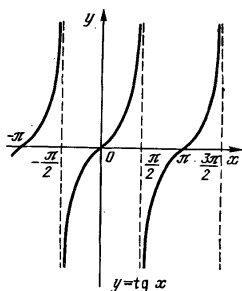
Trigonometriyalıq funkciyalardıń grafikleri 4- súwrette súwretlengen.



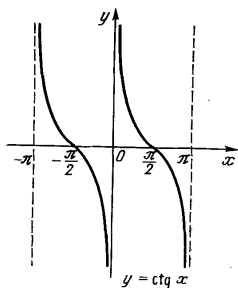
a)



b)



c)



d)

4- súwret

3.5. Keri trigonometriyalıq funkciyalar. Keri trigonometriyalıq funkciyalardı anıqlaw hám olardıń úzliksizlik hám monotonlıq qásiyetleri haqqındaǵı máselelerge toqtalamız.

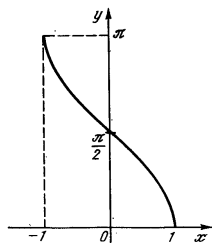
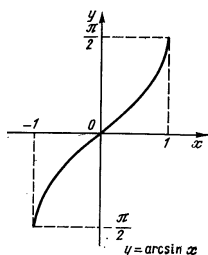
$y = \arcsin x$ funkciyanı anıqlaw ushın $y = \sin x$ funkciyanı $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ kesindide qaraymız. Bul kesindide $y = \sin x$ funkciya ósiwshi hám úzliksiz. Onıń mánisler kópłigi $[-1, 1]$ kesindi. Keri funkciyanıń úzliksizligi haqqındaǵı teorema boyınsha $[-1, 1]$ kesindide -1 noqatta $-\frac{\pi}{2}$, al 1 noqatta $\frac{\pi}{2}$ mánis qabıllaytuǵın

úzliksiz ósiwshi keri funkciya bar. Bul funkciya $x = \arcsin y$ dep belgilenedi, argument hám funkciyanıń belgileniwleriniń orınların almasırtıp, $y = \arcsin x$ dep belgilew múmkin.

$[-1, 1]$ kesindide $[0, \pi]$ kesindide úzliksiz hám kemiwshi $x = \cos y$ funkciyaǵa keri $y = \arccos x$ funkciya da usıǵan uqsas anıqlanadı. Bul funkciya $[-1, 1]$ kesindide úzliksiz hám kemiwshi funkciya bolıp, -1 noqatta π , al 1 noqatta 0 mánis qabıllaydı.

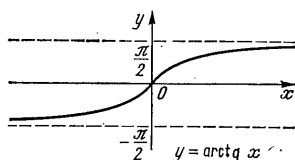
$y = \arctg x$ hám $y = \text{arcctg} x$ funkciyalar sáykes túrde, $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ hám $(0, \pi)$ intervalda anıqlanǵan $tg x$ hám

$ctgx$ funkciyalarga kerı funkciyalar. Bul funkciyalar pútkil sanlar kóshesinde anıqlangán hám monoton funkciyalar. 5-súwrette kerı trigonometriyalıq funkciyalardıń grafikleri súwretlengen.



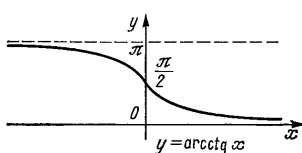
$$y = \arccos x$$

a)



c)

b)



d)

5- súwret

3.6. Giperbolalıq funkciyalar.

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

funksiya, saykes túrde, *giperbolalıq kosinus* hám *giperbolalıq sinus* dep ataladı.

Giperbolalıq tangens hám *giperbolalıq kotangens*, saykes túrde,

$$thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad cthx = \frac{chx}{shx} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

formular menen anıqlanadı.

Giperbolalıq funkciyalardıń anıqlamasınan giperbolalıq sinus, giperbolalıq kosinus hám giperbolalıq tangens pútkil sanlar kóshesinde, al giperbolalıq kotangens sanlar kósheriniń $x = 0$ noqtatınan basqa hámme noqtatlarında anıqlanganı kelip shıǵadı.

Giperbolalıq funkciyalar óz anıqlanıw oblastınıń hár bir noqatında úzliksiz.

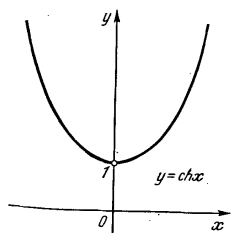
Giperbolalıq funkciyalar trigonometriyalıq funkciyalardıń qásiyetlerine uqsas bir qatar qásiyetlerge iye. Mısalı, giperbolalıq funkciyalar ushın trigonometriyalıq funkciyalardı qosıw haqqındaǵı teoremaǵa uqsas teorema orınlı:

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh}x \cdot \operatorname{ch}y + \operatorname{ch}x \cdot \operatorname{sh}y,$$

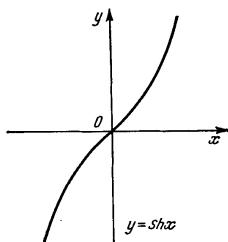
$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}x \cdot \operatorname{ch}y + \operatorname{sh}x \cdot \operatorname{sh}y.$$

Bunnan tısqarı, $\operatorname{sh}2x = \operatorname{sh}x \cdot \operatorname{ch}x$, $\operatorname{ch}^2x - \operatorname{sh}^2x = 1$ teńliklerdiń orınlı bolıwın tikkeley tekseriw jolı menen kórsetiw múmkin. «Giperbolalıq funkciyalar» dep atalıwı sebebi- $x = a \cdot \operatorname{cht}$, $y = a \cdot \operatorname{sht}$ teńlemeler giperbolanı beredi.

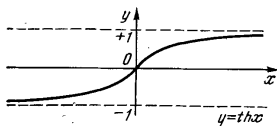
Giperbolalıq funkciyalardıń grafikleri 6-súwrette súwretlengen.



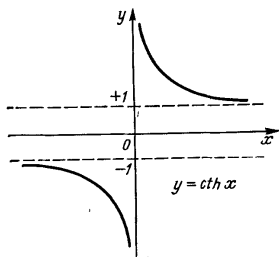
a)



b)



c)



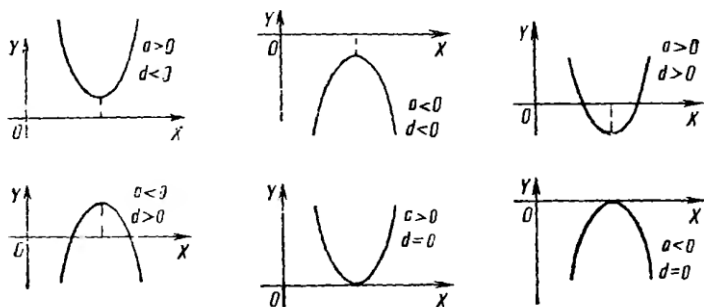
d)

6- súwret

3.7. Pütün hám bólshek racional funkciyalar. Ápiwayı elementar funkciyalar ústinde izbe-iz orınlangan shekli sandağı tórt arifmetikalıq ámel hám superpoziciyalar (quramalı funkciya) arqalı ańlatılatuǵın funkciya *elementar funkciya* dep atalatuǵını málim. Biz bir áhmiyetli elementar funkciyalar klasın qarap ótemiz.

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

kórinistegi funkciya, bul jerde $n \in N$ hám $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ — turaqlı sanlar, *pütün racional funkciya* dep ataladı. Bul funkciya **n** — *dárejeli kópaǵzalı* dep te ataladı. Pütün racional funkciya **R** — pútkil haqıyqıy sanlar kópiginde anıqlanǵan. Dara jaǵdayda, $y = ax + b$ — sıızqlı funkciya hám $y = ax^2 + bx + c$ — kvadrat úshaǵzalı pütün racional funkciya boladı. Sıızqlı funkciyanıń grafigi tuwrı sıızıq, al kvadrat úshaǵzalınıń grafigi parabola bolatuǵını málim. Kvadrat úshaǵzalınıń grafigi a koefficientke hám $D = b^2 - 4ac$ diskriminanttıń belgisine ǵárezli boladı. 7- súwretde parabolanıń tegislikte hár qıylı jaylasıw jaǵdayları qaralǵan.



7- súwret

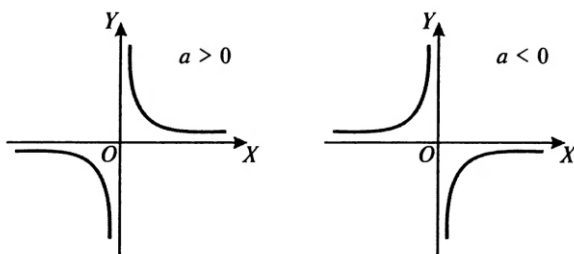
Eki pütün racional funkciyanıń qatnasınan dúzilgen

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m}$$

funkciya *bólshek racional funkciya* dep ataladı. Bul funkciya $R \setminus \{x: b_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m = 0\}$ kóplikte, yaǵnıy sanlar kósheriniń bólshektiń bólimin nolge aylandıırwshı noqatlarınan basqa hámme noqatlarınan dúzilgen kóplikte anıqlanǵan. Dara jaǵdayda, $y = \frac{a}{x}$ hám $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ funkciyalar bólshek racional funkciyalar boladı.

$y = \frac{a}{x}$ funkciyanıń grafigi teń qaptallı giperbola boladı (8-

súwret). Bul grafikti jasawdı bilgen oqıwshı $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ funkciyanıń da grafigin ańsat jasaydı.



8- súwret

5- BAP

BIR ÓZGERIWSHILI FUNKCIYALAR USHÍN DIFFERENCIAL ESAP

1-§. Funkciyanıń tuwındısı

1.1. Tuwındıń anıqlaması. Meyli, $y = f(x)$ funkciya $\{x\} \subset R$ kóplikte anıqlanğan, $x_0 \in \{x\}$ bolsın. $\Delta x \neq 0$ sanın $x_0 + \Delta x \in \{x\}$ bolatuǵınday qılıp saylap alamız. Ádette, Δx sanı *argumenttiń* x_0 *noqattaǵı ósimi*, al $\Delta f := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ sanı *funkciyanıń* x_0 *noqattaǵı ósimi* dep ataladı.

$\Delta x \neq 0$ dep esaplap $y = f(x)$ funkciyanıń berilgen x_0 noqattaǵı Δf ósiminiń argumenttiń sáykes Δx ósimin qaraymız:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1)$$

Bul teńlik berilgen x_0 noqattaǵı *ayırmaıq qatnas* dep ataladı. (1) teńlik Δx ósimniń funkciyası bolıp, Δx argumenttiń $\Delta x = 0$ noqattıń bazı bir jetkilikli dárejede kishi δ – dógeresine derek, $\Delta x = 0$ noqattıń ózinen basqa hámme mánislerinde, yaǵnıy $\Delta x = 0$ noqattıń bazı bir jetkilikli dárejede kishi oyılǵan δ – dógeresinde anıqlanǵan. Bul bizge (1) qatnastıń $\Delta x \rightarrow 0$ daǵı limitiniń bar bolıw máselesin qaraw huqıqın beredi.

1-anıqlama. Eger $y = f(x)$ funkciyanıń x_0 noqattaǵı ósiminiń argumenttiń usı noqattaǵı ósimine qatnasınıń $\Delta x \rightarrow 0$ daǵı limiti bar bolsa, onda bul limit $f(x)$ *funkciyanıń* x_0 *noqatta tuwındısı* dep ataladı, bul tuwındı

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (2)$$

kóriniste jazıladı.

1- **Eskertiw.** Eger $y = f(x)$ funkciya hár bir $x \in \{x\}$ noqatta shekli tuwındıǵa iye bolsa, onda bul funkciyanıń $f'(x)$ tuwındısı $\{x\}$ kóplikte anıqlanǵan bazı bir funkciya boladı.

2- **Eskertiw.** Eger $x_0 + \Delta x =: x$ dep belgilense, onda $\Delta x = x - x_0$ hám $\Delta x \rightarrow 0$ shártti $x \rightarrow x_0$ shárt penen almasıw múmkin bolıp, (2) teńlik

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (3)$$

kóriniste jazıladı. Funkciyanıń noqattaǵı tuwındısınnıń bul jazılıw formasınan tuwındınnıń ámeliy qollanıwlarında keń paydalanıladı.

Tuwındılardı esaplawdıń eki trivial mısaldıń keltiremiz.

1. $f(x) = C$ (C – turaqlı san) funkciya R haqıyqiy sanlar kópliginde anıqlanǵan, $\forall x \in R$ noqatta shekli tuwındıǵa iye hám $f'(x) = 0$, sebebi $\forall x \in R$ noqatta $\forall \Delta x$ ósim ushın $\Delta f := f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$.

2. $f(x) = x$ funkciya R haqıyqiy sanlar kópliginde anıqlanǵan, $\forall x \in R$ noqatta shekli tuwındıǵa iye hám $f'(x) = 1$, sebebi $\forall x \in R$ noqatta $\forall \Delta x$ ósim ushın

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

1.2. Funkciyanıń bir tárepli tuwındıları. 2-anıqlama. Eger $y = f(x)$ funkciyanıń x_0 noqattaǵı ósiminiń argumenttiń usı noqattaǵı ósimine qatnasınıń $\Delta x \rightarrow 0$ daǵı oń (shep) limiti bar bolsa, onda bul limit $f'(x)$ funkciyanıń x_0 noqatta oń (shep) tuwındısı dep ataladı, bul tuwındı

$$\begin{aligned} f'(x_0 + 0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \\ (f'(x_0 - 0)) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \end{aligned} \quad (2)$$

kóriniste jazıladı.

Funkciyanıń berilgen noqattaǵı limiti hám bir tárepli limitleri arasındaǵı baylanıstan tómendegi tastıyıqlawlar kelip shıǵadı:

1⁰. Eger $f(x)$ funkciya x_0 noqatta shekli $f'(x_0)$ tuwındıǵa iye bolsa, onda bul funkciya x_0 noqatta hám oń, hám shep tuwındılarǵa iye bolıp, $f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0)$ teńlikler orınlı boladı.

2⁰. Eger $f(x)$ funkciya x_0 noqatta hám oń, hám shep tuwındılarǵa iye bolıp, bul tuwındılar óz-ara teń bolsa, onda bul funkciya x_0 noqatta shekli $f'(x_0)$ tuwındıǵa iye bolıp, $f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0)$ teńlikler orınlı boladı.

Eskertiw. Eger funkciya noqatta hám shep, hám oń tuwındılarǵa iye bolıp, bul tuwındılar bir-birine teń bolmasa, onda funkciya bunday noqatta tuwındıǵa iye emes.

Mısalı,

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

funkciya $x = 0$ noqatta hám shep, hám oń tuwındılarǵa iye:

$$f'(0 - 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0 - 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0 - 0} \frac{(-\Delta x)}{\Delta x} = -1, \quad ,$$

$$f'(0 + 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0 + 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0 + 0} \frac{(\Delta x)}{\Delta x} = 1,$$

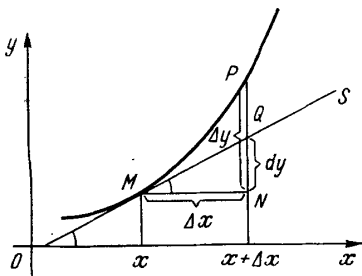
sonlıqtan bul funkciya $x = 0$ noqatta tuwındıǵa iye emes.

1.3. Tuwındınıń geometriyalıq hám mexanikalıq maǵanası.

a) *Tuwındınıń geometriyalıq maǵanası.* (a, b) intervalda anıqlanǵan hám úzliksiz $y = f(x)$ funkciyanıń grafigin qaraymız.

$\forall x \in (a, b)$ noqattı hám x argumenttiń $\Delta x \neq 0$ ósimin $x + \Delta x \in (a, b)$ bolatuǵınday kılıp saylap alamız. Meyli, M

hám P noqatlar $y = f(x)$ funkciyanıń grafiginiń abscissalari, sáykes túrde, x hám $x + \Delta x$ sanlar bolǵan noqatlar bolsın (1-súwret). Bul noqatlardıń koordinataları $M(x, f(x))$ hám $P(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ kóriniste boladı. M hám P noqatlardan ótiwshi tuwrı sızıq $y = f(x)$ funkciyanıń grafiginiń kesiwshisi dep ataladı. MP kesiwshisiniń Ox kósheri menen jasaǵan múyeshi Δx ósimniń funkciyası boladı, onı $\varphi(\Delta x)$ simvolı menen belgileybiz.



1- súwret

3-anıqlama. Eger $y = f(x)$ funkciyanıń grafiginiń MP kesiwshisiniń P noqat grafik boylap M noqatqa umılǵandaǵı (yaǵnıy $\Delta x \rightarrow 0$ daǵı) limit jaǵdayı bar bolsa, onda bul limit jaǵday funkciyanıń grafigine $M(x, f(x))$ noqatta júrgizilgen urınba dep ataladı.

Bul anıqlamadan $y = f(x)$ funkciyanıń grafigine $M(x, f(x))$ noqatta júrgizilgen urınba bar bolıwı ushın $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x) = \varphi_0$ limitniń bar bolıwı jetkilikli ekeni kelip shıǵadı, bul jerde φ_0 – urınbanıń Ox kósheri menen jasaǵan múyeshi.

1-teorema. Eger $y = f(x)$ funkciya x noqatta shekli tuwındıǵa iye bolsa, onda bul funkciyanıń grafigine $M(x, f(x))$ noqatta júrgizilgen urınbası bar bolıp, bul urınbanıń múyeshlik koefficienti funkciyanıń x noqattaǵı $f'(x)$ tuwındısına teń.

Dálillew. M hám P noqatlardan O_x kósherine perpendikulyar tuwrı sızıqlar júrgizemiz (1- súwret). M noqat arqalı O_x kósherine parallel tuwrı sızıq júrgizemiz hám bul tuwrı sızıqtıń P noqattan júrgizilgen perpendikulyar menen kesilisiw noqatın N háribi menen belgileymiz. MNP úshmúyeshliginen

$$\operatorname{tg} \varphi(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Solay etip,

$$\varphi(\Delta x) = \operatorname{arctg} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (3)$$

Bul teńliktiń oń tárepi (demek, shep tárepi de) $\Delta x \rightarrow 0$ da shekli limitke iye. Haqıyqatında da, $f(x)$ funkciya x noqatta shekli $f'(x)$ tuwındıǵa iye bolǵanlıqtan $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ shekli limit bar. Bunnan hám *arctgu* funkciyanıń $\forall u$ mánis ushın úzliksizliginen (3) teńliktiń oń tárepiniń $\operatorname{arctg} f'(x)$ sanǵa teń limiti bar.

Solay etip, biz $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x) = \operatorname{arctg} f'(x)$ shekli limit bar ekenin kórsettik. Bul kesiwshiniń limit jaǵdayı bar ekenin, yaǵnıy funkciyanıń grafigine $M(x, f(x))$ noqatta júrgizilgen urınbası bar bolıp, bul urınbanıń O_x kósheri menen jasaǵan múyeshi $\varphi_0 = \operatorname{arctg} f'(x)$ bolatuǵının bildiredi.

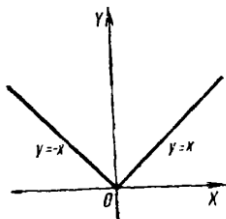
Demek, bul urınbanıń múyeshlik koefficienti funkciyanıń x noqattaǵı $f'(x)$ tuwındısına teń boladı eken. ▲

$y = f(x)$ funkciyanıń grafigine $M(x_0, f(x_0))$ noqatta júrgizilgen urınbanıń teńlemesi $y = f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ kóriniste boladı.

Eger $f(x)$ funkciya $x_0 \in (a, b)$ noqatta bir- birine teń bolmaǵan $f'(x_0 - 0)$ hám $f'(x_0 + 0)$ bir tárepli tuwındılarǵa iye bolsa, onda bul funkciya grafigine

$M(x_0, f(x_0))$ noqatta bir tárepli urınbalar júrgiziw múmkin hám bul urınbalar betlespeydi. Bunday jaǵdayda $f(x)$ funkciyanıń grafigi $M(x_0, f(x_0))$ noqatta «sınadı» dep aytıw múmkin.

Mısalı, $f(x) = |x|$ funkciyanıń $x = 0$ noqattaǵı bir tárepli tuwındıları $f'(0-0) = -1$ hám $f'(0+0) = 1$ boladı. Bul funkciyanıń $O(0;0)$ noqattaǵı bir tárepli urınbaları $y = -x$ hám $y = x$ tuwrı sıızıqlar bolıp, funkciyanın grafigi $O(0;0)$ noqatta «sınadı» (2- súwret).



2- súwret

Eger $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ qatnastır $\Delta x \rightarrow 0$ daǵı limiti belgisi anıq sheksizlik bolsa, onda $f(x)$ funkciyanıń x_0 noqattaǵı tuwındısı $+\infty$ ($-\infty$) dep aytıladı.

Meyli, $y = f(x)$ funkciyanıń x_0 noqattaǵı tuwındısı $+\infty$, yaǵnıy $f'(x_0) = +\infty$ bolsın. Onda $\varphi(\Delta x) = \arctg \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ekenin esapqa alıp,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \arctg \frac{\Delta y}{\Delta x} = \arctg(f'(x_0)) = \arctg(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

teńlikke iye bolamız. Bul $y = f(x)$ funkciyanıń grafigine $M(x_0, f(x_0))$ noqatta júrgizilgen urınba Ox kósherine perpendikulyar bolatuǵının kórsetedi.

Usıǵan uqsas, $y = f(x)$ funkciyanıń x_0 noqattaǵı tuwındısı $-\infty$, yaǵnıy $f'(x_0) = -\infty$ bolsa da funkciyanıń

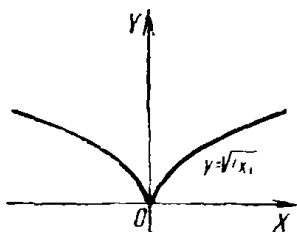
grafigine $M(x_0, f(x_0))$ noqatta júrgizilgen urınba Ox kósherine perpendikulyar boladı.

Mısalı, $f(x) = \sqrt{|x|}$ funkciyanıń $x = 0$ noqattaǵı oń hám shep tuwındısı

$$f'(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty,$$

$$f'(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = -\infty$$

boladı. Demek, berilgen funkciyanıń grafigine $O(0; 0)$ noqatta júrgizilgen urınba Oy kósheri boladı eken (3- súwret).



3- súwret

b) *Tuwındınıń mexanikalıq maǵanası.* Meyli, materiallıq noqat $s = s(t)$ nızam menen háreketlenip atırǵan bolsın, bul jerde t – jumsalǵan waqıt, s — usı waqıt aralıǵında basıp ótilgen jol (qashıqlıq). Usı materiallıq noqattıń t_0 waqıt momentindegi tezligin tabıw máselesin qaraymız. Waqıttıń t_0 mánisi menen birge $t_0 + \Delta t$ ($\Delta t > 0$) mánisin de alıp, $s = s(t)$ funkciyanıń bul mánislerge sáykes $s(t_0)$ hám $s(t_0 + \Delta t)$ mánislerin tabamız. Materiallıq noqat Δt waqıtta $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ aralıqtı basıp ótedi hám onıń $[t_0, t_0 + \Delta t]$ waqıt aralıǵındaǵı ortasha tezligi

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

formula menen tabıladı. Bul bólshektiń $\Delta t \rightarrow 0$ daǵı limiti materiallıq noqattıń t_0 waqıt momentindegi v tezligin ańlatadı:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Tuwındınıń anıqlaması boyınsha

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = s'(t_0).$$

Demek, $s = s(t)$ funkciyanıń t_0 noqattaǵı tuwındısı mexanikalıq kóz qarastan $s = s(t)$ nızam menen háreketlenip atırǵan materiallıq noqattıń t_0 waqıt momentindegi tezligin bildiredi eken.

2-§. Funkciyanıń differenciallanıwshılıǵı

2.1. Funkciyanıń differenciallanıwshılıǵınıń anıqlaması.

Meyli, $y = f(x)$ funkciya $\{x\} \subset R$ kóplikte anıqlanǵan, $x \in \{x\}$, al Δx – argumenttiń $x + \Delta x \in \{x\}$ bolatuǵınday qılıp saylap alınǵan ósimi, $\Delta f := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ - argumenttiń x noqattaǵı Δx ósimine sáykes funkciyanıń ósimi bolsın.

4-anıqlama. Eger argumenttiń x noqattaǵı Δx ósimine sáykes $y = f(x)$ funkciyanıń ósimin

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \quad (1)$$

kóriniste jazıw múmkin bolsa, bul jerde A – argumenttiń x noqattaǵı Δx ósimine ǵárezsiz bazı bir turaqlı san, al $\alpha(\Delta x) - \Delta x = 0$ noqatta sheksiz kishi funkciya, onda $y = f(x)$ funkciya x noqatta *differenciallanıwshı funkciya* dep ataladı.

$\alpha(\Delta x)$ funkciya $\Delta x = 0$ noqattıń ózinde, ulıwma aytqanda, anıqlanbaǵan hám oǵan bul noqatta qálegen mánis beriw múmkin. Bunnan bılay, qolaylı bolıwı ushın, $\alpha(0) = 0$ dep alıw múmkin. Bunday kelisimde $\alpha(\Delta x)$ funkciya $\Delta x = 0$

noqatta úzliksiz boladı hám (1) teńlik $\Delta x = 0$ noqatta da orınlı dep esaplaw múmkin.

Eskertiw. (1) teńliktiń oń tárepindegi ekinshi $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ qosılıwshını $o(\Delta x)$ ($\Delta x \rightarrow 0$) kóriniste jazıw múmkin. Haqıyqatında da, $\alpha(\Delta x)$ funkciya hám Δx ósimlerdiń hár birewi $\Delta x = 0$ noqatta sheksiz kishi bolǵanlıqtan olardıń $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ kóbeymesi de $\Delta x = 0$ noqatta Δx ósimge qaraǵanda joqarı tártipli sheksiz kishi funkciya bolıwı tábiyiy. Solay etip, (1) teńlikti

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

kóriniste de jazıw múmkin.

2-teorema. *Funkciya noqatta differenciallanıwshı bolıwı ushın bul noqatta shekli tuwındıǵa iye bolıwı zárúr hám jetkilikli.*

Dálillew. 1) *Zárúrligi.* Meyli, $y = f(x)$ funkciya x noqatta differenciallanıwshı, yaǵnıy onıń argumenttiń x noqattaǵı Δx ósimine sáykes ósimin (1) kóriniste jazıw múmkin bolsın. $\Delta x \neq 0$ dep esaplap hám (1) teńliktiń eki tárepinde Δx ósimge bólip,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x) \quad (2)$$

teńlikke iye bolamız. Bul teńliktiń oń tárepi (demek, shep tárepi de) $\Delta x = 0$ noqatta A sanǵa teń shekli limitke iye. (2) teńliktiń shep tárepindegi bólshektiń $\Delta x = 0$ noqattaǵı limit (eger bul limit bar bolsa) anıqlama boyınsha $f'(x)$ tuwındıǵa teń.

Solay etip, biz eger $f(x)$ funkciya ushın (1) teńlik orınlı bolsa, onda bul funkciya x noqatta shekli tuwındıǵa iye bolıp, $f'(x) = A$ bolatuǵının dálilledik.

2) *Jetkilikliliği.* Meyli, $f(x)$ funkciya x noqatta $f'(x)$ shekli tuwındıǵa iye, yaǵnıy

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \quad (3)$$

shekli limit bar bolsın.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) =: \alpha(\Delta x) \quad (4)$$

dep belgileymiz. (3) limittiń bar bolıwınan (4) teńlik penen anıqlanǵan $\alpha(\Delta x)$ funkciya ushın $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$ teńlik kelip

shıǵadı. (4) teńlikti Δx ósimge kóbeytip, $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ teńlikke kelemiz, bul teńlik $f'(x) = A$ bolsa (1) teńlikti beredi.

Solay etip, shekli $f'(x)$ tuwındıń bar bolıwınan $y = f(x)$ funkciyanıń X noqatta differenciallanıwshılıǵı kelip shıǵıp, (1) differenciallanıwshılıq shártindegi A san $f'(x)$ tuwındıǵa teń bolatuǵını dálillendi. ▲

Dálillengen teorema bunnan bılay funkciyanıń berilgen noqatta differenciallanıwshılıǵı túsiniǵın bul funkciyanıń usı noqatta shekli tuwındıǵa iye bolıwı túsiniǵı menen teńlestiriw múmkinligi kelip shıǵadı. Basqasha aytqanda, «*funkciya berilgen noqatta shekli tuwındıǵa iye*» hám «*funkciya berilgen noqatta differenciallanıwshı*» terminleri ekvivalent terminler.

Funkciyanıń tuwındısın tabıw ámeli, ádette, *differenciallaw* ámeli dep ataladı.

2.2. Differenciallanıwshılıq hám úzliksizlik. 3-teorema. *Noqatta differenciallanıwshı funkciya usı noqatta úzliksiz.*

Dálillew. Meyli, $y = f(x)$ funkciya x noqatta differenciallanıwshı bolsın. Onda onıń x noqattaǵı Δy ósimi ushın (1) teńlik orınlı, bunnan $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ teńlik kelip shıǵadı. Bul teńlik, óz nábwetinde, funkciyanıń noqatta úzliksizliginiń ayırmalıq forması boyınsha $y = f(x)$ funkciya x noqatta úzliksizligin bildiredi. ▲

Eskertiw. Bul teoremaǵa keri tastıyıqlaw, ulıwma aytqanda, orınlı emes, yaǵnıy berilgen noqatta úzliksiz funkciya usı noqatta

differentiallanıwshı bolıwı shárt emes. Mısalı, $y = |x|$ funksiya $x = 0$ noqatta úzliksiz, biraq bul noqatta tuwındıǵa iye emes.

Bazı bir intervaldın hár bir noqatında úzliksiz, biraq bul intervaldın hesh bir noqatında differentiallanıwshı bolmaǵan funksiya da bar. Bunday funksiylarǵa eń dáslep Veyershtass mısál keltirgen.

2.3. Funkciyanın differencialı. Meyli, $y = f(x)$ funksiya x noqatta differentiallanıwshı bolsın. Onda onıń x noqattaǵı Δy ósimi ushın (1) teńlik orınlı boladı.

(1) teńlikte funksiyanın ósimi eki qosılıwshınıń qosındısı sıpatında jazıladı. Bul qosılıwshılardıń birinshisi $A \cdot \Delta x$ kóbeyme bolıp, bul kóbeyme Δx ósimge qarata sızıqlı, al ekinshisi $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ kóbeyme bolıp, bul kóbeyme $\Delta x = 0$ noqatta Δx ósimge qaraǵanda joqarı tártipli sheksiz kishi funksiya.

Eger 2- teorema boyınsha $f'(x)$ tuwındıǵa teń A san nolden ózgeshe bolsa, onda birinshi qosındı bolǵan $A \cdot \Delta x = f'(x) \cdot \Delta x$ kóbeyme differentiallanıwshı $y = f(x)$ funksiyanın Δy ósiminiń *bas bólegi* boladı. Funkciyanın ósiminiń usı bas bólegi Δx argumenttiń sızıqlı bir tekli funksiya boladı hám $y = f(x)$ funksiyanın x noqattaǵı *differencialı* dep ataladı hám dy simvoli menen belgilenedi.

$A = f'(x) = 0$ bolǵan jaǵdayda funksiyanın differencialı anıqlama boyınsha nolge teń dep esaplanadı.

Solay etip,

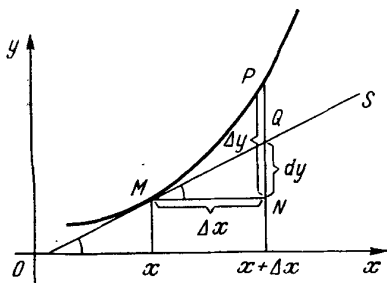
$$dy = f'(x) \cdot \Delta x \quad (5)$$

san $y = f(x)$ funksiyanın argumenttiń x noqattaǵı Δx ósimine sáykes *differencialı* dep ataladı.

$f'(x) \neq 0$ bolǵan jaǵdayda bul san $y = f(x)$ funksiyanın Δy ósiminiń Δx ósimge qarata sızıqlı hám bir tekli bas bólegi boladı.

$y = f(x)$ funkciyanıń argumenttiń berilgen x noqattaǵı Δx ósimine sáykes dy differencialı hám Δy ósimi, ulıwma aytqanda, bir- birine teń emes ekenin atap ótemiz.

Bunı $y = f(x)$ funkciyanıń grafigi boyınsha ańsat túsiniń alıw múmkin (4- súwret). Meyli, M hám $P - y = f(x)$ funkciyanıń grafiginiń argumenttiń x hám $x + \Delta x$ mánislerine sáykes noqatları, MS – funkciyanıń grafigine M noqatta júrgizilgen urınba, $MN \parallel OX$, $NP \parallel OY$, Q – MS urınbanıń NP tuwrı sızıǵı menen kesiliw noqatı bolsın.



4- súwret

Onda $y = f(x)$ funkciyanıń argumenttiń x noqattaǵı Δx ósimine sáykes Δy ósimi NP kesindi uzınlıǵına teń, al bul funkciyanıń argumenttiń x noqattaǵı sol Δx ósimine sáykes dy differencialı NQ kesindi uzınlıǵına teń. Bul kesindilerdiń uzınlıqları, ulıwma aytqanda, hár qıylı bolatuǵını anıq.

Argumenttiń differencialı túsiniǵin kiritemiz. Bunıń ushın eki jaǵdaydı qaraymız: 1) argument- erikli ózgeriwshi; 2) argument- jańa ózgeriwshiniń differenciallanıwshı funkciyası.

Birinshi, x argument erikli ózgeriwshi bolǵan, jaǵdayda argumenttiń dx differencialı Δx ósimge teń, yaǵnıy $dx = \Delta x$ dep alıwdı kelisip alamız. Bul kelisim logikaǵa qarsı kelmeydi. Mısalı, $y = x$ funkciyanıń $\forall x \in R$ noqattaǵı differencialı (5) formula boyınsha $dy = dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$.

Bul jaǵdayda $y = f(x)$ funkciyanıń x noqattaǵı differencialı

$$dy = f'(x) \cdot dx \quad (6)$$

kóriniste jazıladı. Solay etip, argument erikli ózgeriwshi bolǵan jaǵdayda funkciyanıń *berilgen noqattaǵı differencialı funkciyanıń usı noqattaǵı tuwındısı menen argumenttiń differencialınıń kóbeymesine teń*.

2.4. Quramalı funkciyanı differenciallaw. $x = \varphi(t)$ hám $y = f(x)$ funkciyalardıń superpoziciyası bolǵan $y = f[\varphi(t)]$ quramalı funkciyanıń tuwındısın tabıw qádesin anıqlaymız.

4-teorema. Meyli, $x = \varphi(t)$ funkciya t noqatta, al $y = f(x)$ funkciya sáykes $x = \varphi(t)$ noqatta differenciallanıwshı bolsın. Onda $y = f[\varphi(t)]$ quramalı funkciya t noqatta differenciallanıwshı hám onıń bul noqattaǵı tuwındısı

$$\{f[\varphi(t)]\}' = f'(x) \cdot \varphi'(t) = f'[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) \quad (7)$$

formula menen esaplanadı.

Dálillew. $x = \varphi(t)$ funkciyanıń argumentine berilgen t noqatta $\Delta t \neq 0$ ósim beremiz. Bul ósimge funkciyanıń $\Delta x = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)$ ósimi sáykes kelip, bul ósim nolge teń bolıwı da mu:mkin.

Óz nábetinde Δx ósimge $y = f(x)$ funkciyanıń sáykes $x = \varphi(t)$ noqattaǵı $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ ósimi juwap beredi. Bul funkciya $x = \varphi(t)$ noqatta differenciallanıwshı bolǵanlıqtan onıń bul noqattaǵı ósimin

$$\Delta y = f'(x) \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x \quad (8)$$

kóriniste jazıw múmkin, bul jerde $\alpha(\Delta x) - \Delta x \rightarrow 0$ da sheksiz kishi funksiya. Bul teńlik $\Delta x = 0$ bolǵan jaǵdayda da orınlı.

(8) teńlikti $\Delta t \neq 0$ ósimge bólip,

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x) \frac{\Delta x}{\Delta t} + \alpha(\Delta x) \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (9)$$

teńlikke iye bolamız. Bul teńliktiń oń (demek, shep) tárepi $\Delta t \rightarrow 0$ da limitke iye bolıp, bul limit (7) teńliktiń oń tárepindegi ańlatpaǵa teń bolatuǵının kórsetemiz. Nátiyjede biz quramalı funksiyanıń differenciallanıwshılıǵın hám onıń tuwındısı ushın (7) formula orınlı ekenin dálilleymiz.

$x = \varphi(t)$ funksiya t noqatta differenciallanıwshı bolǵanlıqtan $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \varphi'(t) \cdot \alpha(\Delta x) - \Delta t \rightarrow 0$ da sheksiz

kishi funksiya, sebebi $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$ hám t noqatta differenciallanıwshı $x = \varphi(t)$ funksiya usı noqatta úziksiz bolǵanlıqtan $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta x = 0$. Solay etip, (9) teńliktiń oń tárepi

$\Delta t \rightarrow 0$ da limitke iye bolıp, bul limit (7) teńliktiń oń tárepindegi ańlatpaǵa teń boladı. ▲

1- Eskertiw. Teorema hám ondaǵı (7) formula úsh hám onnan da kóp funksiylardıń superpoziciyası bolǵan funksiylar ushın da ańsat kóshiriledi. Mısalı, úsh funksiyanıń superpoziciyası bolǵan $y = F[f(\varphi(t))]$ funksiya ushın differenciallaw qaǵıydası

$$y' = \{F[f(\varphi(t))]\}' = F'[f(\varphi(t))] f'(\varphi(t)) \varphi'(t)$$

kóriniste bolıp, bul formula $x = \varphi(t)$ funksiya berilgen t noqatta, $u = f(x)$ funksiya sáykes $x = \varphi(t)$ noqatta, al $y = F(u)$ funksiya sáykes $u = f(x) = f(\varphi(t))$ noqatta differenciallanıwshı funksiylar bolǵanda orınlı boladı.

2- Eskertiw. Teoremda $y = f(x)$, $x = \varphi(t)$ kórinisindegi quramalı funkciyanı qaradıq, yaǵnıy X simvoli menen aralıq ózgeriwshini belgiledik. Bul simvolikanı, álbette, ózgertiriw múmkin. Kóbinese X simvoli menen soǵı ózgeriwshini belgilew, yaǵnıy $y = f[\varphi(x)]$ kórinisindegi quramalı funkciyanı qaraw qolaylı boladı. Bul belgilewlerde quramalı funkciyanı differenciallaw qaǵıydası

$$y' = \{f[\varphi(x)]\}' = f'[\varphi(x)] \varphi'(x)$$

kóriniste boladı.

2.5. Keri funkciyanı differenciallaw. 5-teorema. Meyli, $y = f(x)$ funkciya x noqattıń bazı bir dógeresinde qatal ósiwshi (qatal kemiwshi) hám úzliksiz funkciya bolsın. Meyli, bunnan tisqari, bul funkciya x noqatta differenciallanıwshı bolıp, onıń tuwındısı nol`den ózgeshe bolsın. Onda sáykes $y = f(x)$ noqattıń bazı bir dógeresinde berilgen funkciyaǵa keri $x = f^{-1}(y)$ funkciya bar bolıp, bul keri funkciya sáykes $y = f(x)$ noqatta differenciallanıwshı hám bul noqattaǵı tuwındısı

$$\{f^{-1}(y)\}' = \frac{1}{f'(x)} \quad (10)$$

formula menen esaplanadı.

Dálillew. $y = f(x)$ funkciya x noqattıń bazı bir dógeresinde qatal monoton hám úzliksiz funkciya bolǵanlıqtan keri funkciyanıń úzliksizligi haqqındaǵı teorema boyınsha $x = f^{-1}(y)$ keri funkciya sáykes $y = f(x)$ noqattıń bazı bir dógeresinde qatal monoton hám úzliksiz.

Bul keri funkciyanıń argumentine kórsetilgen y noqatta qálegen jetkilikli dárejede kishi nolden ózgeshe Δy ósim beremiz. Bul ósimge keri funkciyanıń sáykes $y = f(x)$

noqattaǵı $\Delta x = f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)$ ósimi juwap berip, keri funkciyanıń qatal monotonlıǵı sebepli bul ósim nolden ózgeshe.

Bul bizge

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} \quad (11)$$

birdeylikti jazıw huqıqın beredi.

Endi, meyli, (11) birdeylikte Δy ósim nolge umtılsın. Onda $x = f^{-1}(y)$ keri funkciyanıń sáykes $y = f(x)$ noqatta úzliksizlik shártiniń ayırmalıq forması boyınsha bul funkciyanıń Δx ósimi de nolge umtıladı. Bunday jaǵdayda (11) teńliktiń oń tárepiniń limiti bar bolıp, bul limit (10) teńliktiń oń tárepine teń bolatuǵının kórsetemiz. Nátiyjede (11) teńliktiń shep tárepi de sol limitke iye bolatuǵını, yaǵnıy keri funkciya sáykes $y = f(x)$ noqatta tuwındıǵa iye hám bul tuwındı ushın (10) teńlik orınlı bolatuǵını dálillenedi.

Solay etip, teoremanı dálillewdi tamamlaw ushın (11) teńliktiń oń tárepindegi bólshek $\Delta x \rightarrow 0$ da $1/f'(x)$ bólshekke teń limitke iye bolatuǵının dálillew kerek.

$$x = f^{-1}(y), \quad \Delta x = f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)$$

bolǵanlıqtan

$$x + \Delta x = f^{-1}(y + \Delta y),$$

yaǵnıy

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

hám

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

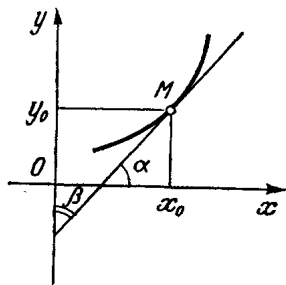
Bunnan (11) teńliktiń oń tárepin

$$\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

kóriniste jazıw múmkinligi kelip shıǵadı. Bul teńlikten $f'(x)$ tuwındınıń anıqlaması hám $f'(x) \neq 0$ shártinen $\Delta x \rightarrow 0$ da (11)

teñliktiń oń tárepi shekli limitke iye bolıp, bul limit $1/f'(x)$ bólshekke teń bolatuǵını kelip shıǵadı. ▲

Eskertiw. Bul teorema ápiwayı geometriyalıq maǵanaǵa iye. Meyli, M noqat $y = f(x)$ funkciyanıń grafiginde argumenttiń berilgen x mánisine juwap beretuǵın noqat bolsın (5-súwret). Onda $f'(x)$ tuwındı funkciyanıń grafigine M noqatta júrgizilgen urınbanıń Ox kósheri menen jasaǵan α múyeshiniń tangensine teń, al kerı funkciyanıń sáykes $y = f(x)$ noqattaǵı $\{f^{-1}(y)\}'$ tuwındısı col urınbanıń Oy kósheri menen jasaǵan β múyeshiniń tangensine teń, α hám β múyeshleriniń qosındısı $\frac{\pi}{2}$ ge teń bolǵanlıqtan (10) formula bizge mektep kursınan málim mına faktti ańlatadı: $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ bolsa, onda $tg\beta = \frac{1}{tg\alpha}$ teńlik orınlı.



5-súwret

2.6. Birinshi differential formasınıń invariantlıǵı. Differenciallanıwshı $y = f(x)$ funkciyanıń x argumenti erikli ózgeriwshi bolǵan jaǵdayda bul funkciyanıń differentialı

$$dy = f'(x) dx \quad (12)$$

formula menen esaplanadı. Bul formula universal hám funkciyanıń x argumenti bazı bir erikli t ózgeriwshiniń $x = \varphi(t)$ kórinistegi differenciallanıwshı funkciyası bolǵan jaǵdayda da orınlı ekenin

dálilleymiz. Funkciyanın differencialının bul qásiyeti *differencialdın formasının invariantlıǵı* dep ataladı.

Solay etip, meyli, $y = f(x)$ differenciallanıwshı funkciyanın x argumenti bazı bir erikli t ózgeriwshiniń $x = \varphi(t)$ kórinistegi differenciallanıwshı funkciyası bolsın. Bul jaǵdayda $y = f(x)$ funkciyanı t ózgeriwshiniń $y = f[\varphi(t)]$ quramalı funkciyası sıpatında qaraw múmkin. Bul t ózgeriwshi erikli ózgeriwshi bolǵanlıqtan kórsetilgen $y = f[\varphi(t)]$ quramalı funkciya hám $x = \varphi(t)$ funkciya ushın differenciallar (12) kóriniste jazıladı:

$$dy = \{f[\varphi(t)]\}' dt, \quad dx = \varphi'(t)dt. \quad (13)$$

Quramalı funkciyanı differenciallaw qádesi boyınsha

$$\{f[\varphi(t)]\}' = f'(x) \cdot \varphi'(t)dt. \quad (14)$$

(14) teńlikten hám (13) teńliklerdiń birinshisinen $dy = f'(x) \cdot \varphi'(t)dt$, al ekinshisinen paydalanıp, $dy = f'(x)dx$ teńlikti alamız. Birinshi differencialdın formasının invariantlıq qásiyeti dálillendi.

Eskertiw. Birinshi differencialdın formasının invariantlıq qásiyetiniń (12) teńliktiń universallıǵınan kelip shıǵatuǵın basqa ekvivalent ayılıwın da beriw múmkin: *differenciallanıwshı $y = f(x)$ funkciyanıń tuwındısı x argument erikli ózgeriwshi bolǵan jaǵdayda da, bazı bir t erikli ózgeriwshiniń differenciallanıwshı $x = \varphi(t)$ funkciyası bolǵan jaǵdayda da bul funkciyanıń dy differencialınıń argumenttiń dx differencialına qatnasına teń yaǵnıy $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ teńlik penen anıqlanadı.*

2.7. Differenciallanıwshı funkciyalar ústinde arifmetikalıq ámeller.

6-teorema. Eger $u(x)$ hám $v(x)$ funkciyaları x noqatta differenciallanıwshı bolsa, onda bul funkciyalardıń qosındısı,

ayırması, kóbeymesi hám qatnası usı noqatta differenciallanıwshı hám

$$[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x),$$

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x),$$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \quad (v(x) \neq 0)$$

formulalar orınlı.

Dálillew. Qosındı (ayırma), kóbeyme hám bólshek jaǵdayların dara- dara qaraymız.

1⁰. Meyli, $y(x) = u(x) \pm v(x)$ bolsın. $u(x)$, $v(x)$, $y(x)$ funkciyaların argumenttiń x noqattaǵı Δx ósimine sáykes ósimlerin, sáykes túrde, Δu , Δv , Δy simvolları menen belgileyміз. Sonda

$$\begin{aligned} \Delta y &= y(x + \Delta x) - y(x) = [u(x + \Delta x) \pm v(x + \Delta x)] - [u(x) \pm v(x)] = \\ &= [u(x + \Delta x) - u(x)] \pm [v(x + \Delta x) - v(x)] = \Delta u \pm \Delta v. \end{aligned}$$

Solay etip,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}. \quad (15)$$

Endi $\Delta x \rightarrow 0$ da (15) teńlikte limitke ótemiz. $u(x)$ hám $v(x)$ funkciyaları x noqatta differenciallanıwshı bolǵanlıqtan (15) teńliktiń oń tárepiniń $u'(x) \pm v'(x)$ qosındıǵa (ayırmaǵa) teń limiti bar. Demek, bul teńliktiń shep tárepiniń de limiti bar. Tuwındınıń anıqlaması boyınsha bul limit $y'(x)$ tuwındıǵa teń hám biz talap etilip atırǵan $y'(x) = u'(x) \pm v'(x)$ teńlikke kelemiz.

2⁰. Meyli, $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ bolsın. Onda

$$\begin{aligned} \Delta y &= y(x + \Delta x) - y(x) = u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x) = \\ &= [u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x + \Delta x) \cdot v(x)] + [u(x + \Delta x) \cdot v(x) - \\ &\quad - u(x) \cdot v(x)] = u(x + \Delta x) \cdot [v(x + \Delta x) - v(x)] + v(x)[u(x + \Delta x) - \\ &\quad - u(x)] = u(x + \Delta x) \cdot \Delta v + v(x) \cdot \Delta u. \end{aligned}$$

Solay etip,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u(x + \Delta x) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}. \quad (16)$$

Endi $\Delta x \rightarrow 0$ da (15) teńlikte limitke ótemiz. $u(x)$ hám $v(x)$ funkciyaları x noqatta differenciallanıwshı bolǵanlıqtan (16) teńliktiń oń tárepindegi $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ hám $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ bólsheklerdiń, sáykes túrde, $u'(x)$ hám $v'(x)$ tuwındılargá teń limitleri bar $u(x)$ funkciya x noqatta differenciallanıwshı bolǵanlıqtan bul noqatta úzliksiz, sonlıqtan $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} u(x + \Delta x) = u(x)$.

Demek, (16) teńliktiń shep tárepiniń de limiti bar. Tuwındınıń anıqlaması boyınsha bul limit $y'(x)$ tuwındıǵa teń hám biz talap etilip atırǵan $y'(x) = u'(x) \cdot v(x) \pm u(x) \cdot v'(x)$ teńlikti alamız.

3⁰. Meyli, $y(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ bolsın. Onda $v(x)$ funkciya x noqatta differenciallanıwshı hám $v(x) \neq 0$ bolǵanlıqtan úzliksiz funkciyanıń belgisiniń saqlanıwı haqqındaǵı teorema boyınsha jetkilikli dárejede kishi $\forall \Delta x$ ushın $v(x + \Delta x) \neq 0$ hám

$$\begin{aligned} \Delta y &= y(x + \Delta x) - y(x) = \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x) - v(x + \Delta x) \cdot u(x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} = \\ &= \frac{[u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x)] - [v(x + \Delta x) \cdot u(x) - u(x) \cdot v(x)]}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} = \\ &= \frac{v(x) \cdot [u(x + \Delta x) - u(x)] - u(x) \cdot [v(x + \Delta x) - v(x)]}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} = \frac{v(x) \cdot \Delta u - u(x) \cdot \Delta v}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)}. \end{aligned}$$

Solay etip,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v(x) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)}. \quad (17)$$

Endi $\Delta x \rightarrow 0$ da (15) teńlikte limitke ótemiz. $u(x)$ hám $v(x)$ funkciyaları x noqatta differenciallanıwshı (hám demek, úzliksiz) bolǵanlıqtan

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x), \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v(x), \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x) = v(x).$$

Solay etip, $v(x) \neq 0$ bolğanlıqtan (17) teńliktiń oń tárepi $\frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$ bólshekke teń limitke iye boladı. Demek,

(17) teńliktiń shep tárepiniń de limiti bar. Tuwındınıń anıqlaması boyınsha bul limit $y'(x)$ tuwındıǵa teń hám biz talap etilip atırǵan $y'(x) = \frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$ teńlikke iye bolamız. ▲

1- Saldar. Eger $u(x)$ hám $v(x)$ funkciyaları x noqatta differenciallanıwshı bolsa, onda bul funkciyalardıń qosındısı, ayırması, kóbeymesi hám qatnası usı noqatta differenciallanıwshı hám x noqatta differenciallar ushın

$$d(u \pm v) = du \pm dv,$$

$$d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{n \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$$

teńlikler orınlı.

2- Saldar. Eger $f(x)$ funkciya x noqatta differenciallanıwshı bolsa, onda $\forall c$ – turaqlı san ushın $c \cdot f(x)$ funkciya x noqatta differenciallanıwshı hám $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$ teńlik orınlı.

3- Saldar. Eger $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ funkciyalar x noqatta differenciallanıwshı bolsa, onda $\forall c_1, c_2, \dots, c_n$ turaqlı sanlar ushın $c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x) + \dots + c_n \cdot f_n(x)$ funkciya da x noqatta differenciallanıwshı hám $(c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x) + \dots + c_n \cdot f_n(x))' = c_1 \cdot f_1'(x) + c_2 \cdot f_2'(x) + \dots + c_n \cdot f_n'(x)$ teńlik orınlı.

3-§. Ápiwayı elementar funkciyalardıń tuwındıları

1⁰. Dárejeli funkciyanıń tuwındısı. Meyli, $y = x^\alpha$ bolsın, bul jerde $\alpha \in R, x > 0$. Onda

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = \\ &= x^{\alpha-1} \frac{(1 + \frac{\Delta x}{x})^\alpha - 1}{\frac{\Delta x}{x}}.\end{aligned}$$

Bul teñlikte $\Delta x \rightarrow 0$ da limitke ótip, $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ teñlikke iye bolamız.

2°. *Kórsetkishli funkciyanıń tuwındısı.* Meyli, $y = a^x$ bolsın, bul jerde $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in R$. Onda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Bul teñlikte $\Delta x \rightarrow 0$ da limitke ótip, $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ teñlikti alamız.

Dara jaǵdayda, $(e^x)' = e^x$.

3°. *Logarifmlik funkciyanıń tuwındısı.* Meyli, $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$) bolsın. Onda

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \\ &= \frac{1}{\Delta x} \cdot \log_a(1 + \frac{\Delta x}{x}) = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \cdot \log_a(1 + \frac{\Delta x}{x}) = \frac{1}{x} \cdot \log_a[(1 + \frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}].\end{aligned}$$

Bul teñlikte $\Delta x \rightarrow 0$ da limitke ótip, $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$ teñlikke iye bolamız.

Dara jaǵdayda, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

4°. *Trigonometriyalıq funkciyalardıń tuwındıları.* a) Meyli, $y = \sin x$ ($x \in R$) bolsın. Onda

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \\ &= \frac{2 \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.\end{aligned}$$

Bul teńlikte $\Delta x \rightarrow 0$ da limitke ótip, $(\sin x)' = \cos x$ teńlikke iye bolamız.

b) Meyli, $y = \cos x$ ($x \in R$) bolsın. Onda

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \\ &= -\frac{2\sin(x + \frac{\Delta x}{2}) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = -\sin(x + \frac{\Delta x}{2}) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.\end{aligned}$$

Bul teńlikte $\Delta x \rightarrow 0$ da limitke ótip, $(\cos x)' = -\sin x$ teńlikti alamız.

c) Meyli, $y = \operatorname{tg} x$ ($x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$) bolsın.

Differenciallanıwshı funkciyalardıń qatnasın differenciallaw qádesi boyınsha

$$\begin{aligned}(tgx)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

d) Meyli, $y = \operatorname{ctg} x$ ($x \neq k\pi$, $k \in Z$) bolsın.

Differenciallanıwshı funkciyalardıń qatnasın differenciallaw qádesi boyınsha

$$\begin{aligned}(tgx)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.\end{aligned}$$

5⁰. Keri trigonometriyalıq funkciyalardıń tuwındıları. a) $(-1, 1)$ intervalda anıqlanǵan $y = \arcsin x$ funkciya $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ intervalda anıqlanǵan $x = \sin y$ funkciyaǵa keri funkciya boladı. $x = \sin y$ funkciya ushın $\forall y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ noqattıń dóğereginde keri funkciyanı differenciallaw haqqındaǵı teoremanıń shártleri

orinlangan, sonlıqtan bul teorema boyınsha $y = \arcsin x$ funkciya $\forall x = \sin y$ noqatta differenciallanıwshı hám onıń tuwındısı ushın

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} \quad (18)$$

formula orınlı ($\forall y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$) noqatta $\cos y > 0$ bolǵanlıqtan túbir aldında «+» belgi aldıq).

$$\sin y = x \text{ bolǵanlıqtan } (18) \text{ teńlikten } (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

formulanı alamız.

b) $(-1, 1)$ intervalda anıqlanǵan $y = \arcsin x$ funkciya $(0, \pi)$ intervalda anıqlanǵan $x = \cos y$ funkciyaǵa keri funkciya boladı. $x = \cos y$ funkciya ushın $\forall y \in (0, \pi)$ noqattıń dógeresinde keri funkciyanı differenciallaw haqqındaǵı teoremanıń shártleri orınlangan, sonlıqtan bul teorema boyınsha $y = \arccos x$ funkciya $\forall x = \cos y$ noqatta differenciallanıwshı hám onıń tuwındısı ushın

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} \quad (19)$$

formula orınlı ($\forall y \in (0, \pi)$) noqatta $\sin y > 0$ bolǵanlıqtan túbir aldında «-» belgi aldıq).

$$\cos y = x \text{ bolǵanlıqtan } (19) \text{ teńlikten } (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

formulaǵa iye bolamız.

c) Pútkil sanlar kósherinde anıqlanǵan $y = \arctg x$ funkciya $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ intervalda anıqlanǵan $x = tgy$ funkciyaǵa keri funkciya boladı. $x = tgy$ funkciya ushın $\forall y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ noqattıń dógeresinde keri funkciyanı differenciallaw haqqındaǵı

teoremanın shártleri orınlangan, sonlıqtan bul teorema boyınsha $y = \arctg x$ funkciya $\forall x = tgy$ noqatta differenciallanıwshı hám onıń tuwındısı ushın

$$(\arctg x)' = \frac{1}{(tgy)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + tg^2 y}$$

teńlik orınlı. $tgy = x$ bolǵanlıqtan bul teńlikten $(\arctg x)' = \frac{1}{1 + x^2}$ formulanı alamız.

d) Pútkil sanlar kósherinde anıqlangán $y = \arctg x$ funkciya $(0, \pi)$ intervalda anıqlangán $x = ctgy$ funkciyaǵa kerı funkciya boladı. $x = ctgy$ funkciya ushın $\forall y \in (0, \pi)$ noqattın dógeresinde kerı funkciyanı differenciallaw haqqındaǵı teoremanın shártleri orınlangan, sonlıqtan bul teorema boyınsha $y = \arctg x$ funkciya $\forall x = ctgy$ noqatta differenciallanıwshı hám onıń tuwındısı ushın

$$(\arctg x)' = \frac{1}{(ctgy)'} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1 + ctg^2 y}$$

formula orınlı. $ctgy = x$ bolǵanlıqtan bul teńlikten $(\arctg x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$ formulaǵa iye bolamız.

6⁰. Ápiwayı elementar funkciyalardıń tuwındılarınıń kestesi

Funkciya	Tuwındısı	Funkciya	Tuwındısı
$x^\alpha \quad (x > 0)$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$\log_a x$ ($a > 0, a \neq 1, x > 0$) $\ln x$	$1/(x \cdot \ln a)$ $1/x$
$a^x \quad (0 < a \neq 1)$ e^x	$a^x \ln a$ e^x	$\sin x$ $\cos x$	$\cos x$ $-\sin x$
tgx $ctgx$	$1/\cos^2 x$ $-1/\sin^2 x$	$\arcsin x$ $\arccos x$	$1/\sqrt{1-x^2}$ $-1/\sqrt{1-x^2}$
$\arctg x$	$1/(1+x^2)$	$\arctg x$	$-1/(1+x^2)$
shx chx	chx shx	thx $cth x$	$1/ch^2 x$ $-1/sh^2 x \quad (x \neq 0)$

7⁰. Ápiwayı elementar funkciyalardıń differenciallarınıń kestesı

Funkciya	Differen- cialı	Funkciya	Differencialı
$x^a \quad (x > 0)$	$a \cdot x^{a-1} dx$	$\log_a x$ ($a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0$) $\ln x$	$\frac{dx}{(x \cdot \ln a)}$ dx/x
$a^x \quad (0 < a \neq 1)$ e^x	$a^x \ln a dx$ $e^x dx$	$\sin x$ $\cos x$	$\cos x dx$ $-\sin x dx$
tgx $ctgx$	$dx/\cos^2 x$ $-dx/\sin^2 x$	$\arcsin x$ $\arccos x$	$dx/\sqrt{1-x^2}$ $-dx/\sqrt{1-x^2}$
$arctgx$	$1/(1+x^2)$	$arcctgx$	$-1/(1+x^2)$
shx chx	$chx dx$ $shx dx$	thx $cthx$	$dx/ch^2 x$ $-dx/sh^2 x \quad (x \neq 0)$

8⁰. Logarifmlik tuwındı. Dárejeli- kórsetkishli funkciyanıń tuwındısı. Meyli, $y = f(x)$ funkciya berilgen x noqatta oń anıqlanǵan hám differenciallanıwshı bolsın. Onda x argumenttiń $\varpi = \ln y, \quad y = f(x)$ quramalı funkciyası da quramalı funkciyanı differenciallaw qádesi boyınsha x noqatta differenciallanıwshı bolıp, bul funkciyanıń tuwındısı ushın

$$[\ln f(x)]' = (\ln y)' \cdot y' = \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad (20)$$

formula orınlı. (20) shama $y = f(x)$ funkciyanıń berilgen x noqattaǵı logarifmlik tuwındısı dep ataladı.

Logarifmlik tuwındı ápiwayı elementar funkciya bolmaǵan geypara funkciyalardıń tuwındısın esaplaw ushın qollanılıwı múmkin.

Mısal retinde dárejeli- kórsetkishli funkciya dep atalıwshı funkciyanıń, yaǵnıy $y = u(x)^{v(x)}$ kórinistegi funkciyanıń, bul

jerde $u(x)$ hám $v(x)$ — berilgen x noqatta differenciallanıwshı funksiya, $u(x)$ funksiya bul noqatta óń anıqlanğan

Usı shártlerdi $\varpi = \ln y = v(x) \cdot \ln u(x)$ quramalı funksiya berilgen x noqatta differenciallanıwshı boladı. Bul funksiyanıń tuwındısı

$$\begin{aligned} (\ln y)' &= v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot [\ln u(x)]' = \\ &= v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}. \end{aligned} \quad (21)$$

(20) hám (21) teńliklerden

$$\frac{y'}{y} = v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}. \quad (22)$$

Endi $y = u(x)^{v(x)}$ ekenin esapqa alıp, dárejeli- kórsetkishli funksiyanıń tuwındısı ushın

$$(u(x)^{v(x)})' = u(x)^{v(x)} \cdot [v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}]$$

formiulaǵa iye bolamız.

4-§. Joqarı tártipli tuwındı hám differenciallar

4.1. Joqarı tártipli tuwındı túsiniǵı. (a, b) intervalda anıqlanğan hám differenciallanıwshı $y = f(x)$ funksiyanıń $f'(x)$ tuwındısı da usı intervalda anıqlanğan funksiya boladı. Usı $f'(x)$ funksiya bazı bir $x \in (a, b)$ noqatta differenciallanıwshı bolıwı múmkin, onda onıń tuwındısı $y = f(x)$ funksiyanıń x noqattaǵı *ekinshi tártipli tuwındısı* dep ataladı hám $f''(x)$ dep belgilenedi. Ekinshi tártipli tuwındı túsiniǵı kiritilgennen keyin izbe-iz úshinshi tártipli, tórtinshi tártipli h. t. b. tuwındı túsiniǵın kiritiw múmkin. Eger usınday qılıp $y = f(x)$ funksiyanıń x noqattaǵı $n-1$ ($n > 1$ – natural san)- tártipli tuwındısı túsiniǵı

kiritilgen bolsa, onda bul funksiyanıń usı noqattaǵı n — tártipli tuwındısı $f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$ formula menen esaplanadı.

Solay etip, biz n — tártipli tuwındı túsiniǵın induktiv, birinshi tártipli tuwındıdan kelesi tártipli tuwındıǵa izbe-iz ótip, kiritemiz. n — tártipli tuwındını anıqlawshı formula

$$y^{(n)} = [y^{(n-1)}]' \quad (23)$$

kóriniste jazıladı.

Solay etip, $y = f(x)$ funksiyanıń x noqatta n — tártipli tuwındısı bar bolsa, onda bul funksiyanıń usı noqat dógeriginde birinshi, ekinshi h. t. b. $(n-1)$ — tártipli tuwındıları da bar. Biraq, bul tuwındılardıń bar bolıwınan n — tártipli tuwındınıń bar bolıwı, ulıwma aytqanda, kelip shıqpaydı. Mısalı, $y = \frac{x \cdot |x|}{2}$ funksiyanıń tuwındısı $y' = |x|$ bolıp, bul funksiya $x = 0$ noqatta tuwındıǵa iye emes, yaǵnıy berilgen funksiya $x = 0$ noqatta birinshi tártipli tuwındıǵa iye, biraq ekinshi tártipli tuwındıǵa iye emes.

1-anıqlama. $\{x\} \subset R$ kóplikte shekli n — tártipli tuwındıǵa iye funksiya bul kóplikte n mártebe differenciallanıwshı funksiya dep ataladı.

Joqarı tártipli tuwındı túsiniǵı ilim hám texnikanıń júdá kóp tarawlarında keń qollanıladı. Bul jerde biz *ekinshi tártipli tuwındınıń mexanikalıq maǵanasın* túsindiriw menen sheklenemiz. Eger $y = f(x)$ funksiya materiallıq noqattıń Oy kósheri boylap háreketleniw nızamın anıqlasa onda $f'(x)$ birinshi tártipli tuwındı háreketleniwshı materiallıq noqattıń x waqıt momentindegi tezligin beredi. Olay bolsa, $f''(x)$ ekinshi tártipli tuwındı tezliktiń ózgeriw tezligine, yaǵnıy háreketleniwshı materiallıq noqattıń x waqıt momentindegi *tezleniwine* teń boladı.

Joqarı tártipli tuwındılardı esaplaw metodıkası tek *birinshi tártipli tuwındılardı esaplaw* uqıplılıǵın talap etedi, sebebi (23)

formuladan izbe-iz paydalanıw ushın tek birinshi tártipli tuwındılardı kóp mártebe esaplawdı biliw talap etiledi. Mısal retinde bmr neshe ápiwayı elementar funkciyalardıń n — tártipli tuwındıların esaplaymız.

4.2. Ayırım funkciyalardıń n — tártipli tuwındıları.

1⁰. $y = x^\alpha$ ($\alpha \in R$, $x > 0$) dárejeli funkciyanıń n — tártipli tuwındısı

$$y^{(n)} = (x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1) x^{\alpha-n}$$

formula menen esaplanadı.

Dara jaǵdayda, eger $\alpha = m$ (m — natural san) bolsa, onda

$$(x^m)^{(n)} = \begin{cases} m!, & n = m, \\ 0, & n > m. \end{cases}$$

Solay etip, m — dárejeli kópaǵzalınıń n — tártipli tuwındısı $n > m$ bolǵanda nolge teń.

Eger $y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) bolsa, bul funkciyanıń n — tártipli tuwındısı

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

formula menen esaplanadı.

Bunnan $y = \ln x$ ($x > 0$) logarifmlik funkciyanıń n — tártipli tuwındısın esaplaw formulası kelip shıǵadı:

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}$$

2⁰. $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $x \in R$) kórsetkishli funkciyanıń n — tártipli tuwındısı

$$y^{(n)} = (a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a$$

formula menen esaplanadı.

Dara jaǵdayda, $(e^x)^{(n)} = e^x$

3⁰. $y = \sin x$ funkciyanıń n — tártipli tuwındısı

$$y^{(n)} = (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$$

formula menen esaplanadı.

4^0 $y = \cos x$ funkciyanıń n — tártipli tuwındısı

$$y^{(n)} = (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$$

formula menen esaplanadı.

5^0 $y = \arctg x$ funkciyanıń n — tártipli tuwındısı

$$y^{(n)} = (\arctg x)^{(n)} = \frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{n/2}} \sin\left[n \left(\arctg x + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

formula menen esaplanadı.

6^0 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (a, b, c, d — bazı bir turaqlı sanlar)

funksiyanıń n — tártipli tuwındısı

$$y^{(n)} = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{(n)} = (ad-bc)(-1)^{n-1} c^{n-1} n! (cx+d)^{-(n+2)}$$

formula menen esaplanadı.

Meyli, $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar $\{x\} \subset R$ kóplikte anıqlanǵan bolıp, $x \in \{x\}$ noqatta shekli $f^{(n)}(x)$ hám $g^{(n)}(x)$ tuwındılardıǵa iye bolsın. Onda

$$1) \forall c - \text{turaqlı san ushın } (c \cdot f(x))^{(n)} = c \cdot f^{(n)}(x);$$

$$2) (f(x) \pm g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x);$$

$$3) (f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x) \quad (C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}). \quad \text{Bul}$$

teńlik *Leybnic formulası* dep ataladı.

4.3. Joqarı tártipli differenciallar. Meyli, $f(x)$ funkciya (a, b) intervalda anıqlanǵan bolıp, $x \in (a, b)$ noqatta eki mártebe differenciallanıwshı bolsın. $f(x)$ funkciyanıń x noqattaǵı differencialı $df = f'(x) dx$ formula menen anıqlanatuǵını málim, bul jerde $dx = \Delta x$ - argumenttiń x noqattaǵı ósimi.

2-anıqlama. $f(x)$ funkciyanıń x noqattaǵı df differencialınıń differencialı funkciyanıń usı noqattaǵı *ekinshi tártipli differencialı* dep ataladı hám $d^2 f := d(df)$ dep belgilenedi.

Differenciallaw qádesinen paydalanıp, funkciyanıń ekinshi tártipli differencialı ushın

$$d^2 f := d(df) = d(f'(x)dx) = f''(x)(dx)^2$$

formulanı alamız.

Usıǵan uqsas, $x \in (a, b)$ noqatta n mártebe differenciallanıwshı $f(x)$ funkciya ushın bul funkciyanıń usı noqattaǵı n — tártipli differencialı $(n-1)$ — differencialdın differencialı sıpatında anıqlanadı: $d^n f := d(d^{n-1} f)$. Bul differencial $d^n f = f^{(n)}(x) \cdot (dx)^n$ formula menen esaplanadı.

Solay etip, argument erikli ózgeriwshi bolǵan jaǵdayda funkciyanıń berilgen noqattaǵı n — tártipli differencialı funkciyanıń usı noqattaǵı n — tártipli tuwındısınıń argumenttiń differencialınıń n — dárejesine kóbeymesine teń boladı.

Argument bazı bir t ózgeriwshiniń sáykes mártebe differenciallanıwshı funkciyası bolǵan jaǵdayda funkciyanıń ekinshi hám keyingi tártipli differencialları pútkilley basqa kóriniste boladı.

Meyli, $y = f(x)$ funkciya berilgen x noqatta eki mártebe differenciallanıwshı, al onıń argumenti bazı bir t ózgeriwshiniń eki mártebe differenciallanıwshı $x = \varphi(t)$ funkciyası bolsın. Nátiyjede $y = f[\varphi(t)]$ quramalı funkciyanı alamız. Quramalı funkciyanı differenciallaw qádesi boyınsha

$$\begin{aligned} d^2 y &= d^2 f[\varphi(t)] = d(d(f[\varphi(t)])) = d(f'[\varphi(t)] \cdot d\varphi(t)) = \\ &= d(f'[\varphi(t)] \cdot d\varphi(t) + f''[\varphi(t)] \cdot d(d\varphi(t))) = f''[\varphi(t)] \cdot (d\varphi(t))^2 + \\ &+ f'[\varphi(t)] \cdot d^2 \varphi(t) = f''(x) \cdot (dx)^2 + f'(x) \cdot d^2 x \end{aligned}$$

teńlikke iye bolamız. Bul funkciyanıń ekinshi tártipli differencialınıń forması invariantlıq qásiyetke iye emesligin kórsetedi. Kelesi tártipli differenciallardın forması da invariantlıq qásiyetke iye emesligi óz-ózin málím.

5-§. Parametrli kóriniste berilgen funkciyanı differenciallaw

3-anıqlama. Eger x hám y ózgeriwshiler bazı bir úshinshi t ózgeriwshiniń funkciyası sıpatında $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ($t \in \{t\} \subset R$) kóriniste anıqlanğan bolsa, onda y ózgeriwshi x ózgeriwshiniń funkciyası sıpatında *parametrlik kóriniste berilgen* dep ataladı.

Ádette, t ózgeriwshi *parametr* dep ataladı.

Biz $\varphi(t)$ hám $\psi(t)$ funkciyalar $\{t\}$ kóplikte kerekli tártipli tuwındılarga iye dep alamız.

Bunnan tısqarı, $x = \varphi(t)$ funkciya qaralıp atırğan $t = t_0$ noqattıń dógereginde $t = \varphi^{-1}(x)$ keri funkciyaga iye dep esaplaymız, sebebi bul bizge y ózgeriwshini x ózgeriwshiniń funkciyası sıpatında qarawğa múmkinshilik beredi.

Usınday anıqlanğan $y = y(x)$ funkciyanıń x argumenti boyınsha tuwındıların esaplaw máselesin qaraymız.

Birinshi differencialdıń invariantlıq qásiyeti boyınsha

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad dy = \psi'(x) dt, \quad dx = \varphi'(x) dt$$

Bul teńliklerden

$$y'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

teńlik kelip shıǵadı.

Ekinshi tuwındını esaplaw ushın, birinshi differencialdıń invariantlıq qásiyeti boyınsha

$$y''(x) = \frac{d[y'(x)]}{dx}$$

teńlikti jazamız, bunnan

$$y''(x) = \frac{\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]' dt}{\varphi'(t) dt} = \frac{\psi''(t) \varphi'(t) - \varphi''(t) \psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}$$

teńlikke iye bolamız.

Mısal. Tóمندegi parametrlik kóriniste berilgen funkciyanıń birinshi hám ekinshi tártipli tuwındıların tabamız:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bul funkciyanıń grafigi *cikloida* dep ataladı. Bul iymek sızıq-tuwrı sızıq boylap sırganamastan jumalaytuǵın radiusı a sanına teń sheńberdiń bazı bir tayınlangan noqatınıń traektoriyası (t parametr bul sheńberdiń radiusınıń burılıw múyeshine teń).

Joqarıdaǵı formulalardan paydalanıp, funkciyanıń birinshi hám ekinshi tártipli tuwındıları ushın

$$y'(x) = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2},$$

$$y''(x) = \frac{(\operatorname{ctg} \frac{t}{2})'}{a(1 - \cos t)} = -\frac{1}{4a \sin^4 \frac{t}{2}} \quad (t \neq 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z})$$

formulalarǵa iye bolamız.

6-§. Differenciallanıwshı funkciyalar haqqındaǵı tiykarǵı teoremlar

Bul paragrafta differencial esaptıń tiykarǵı teoremların keltiremiz. Bul teoremlar keleside, á sirese funkciyalardı teksergende, áhmiyetli rol oynaydı.

6.1. Ferma teoreması. Saylap alınǵan c noqattıń bazı bir dógeresinde anıqlanǵan $y = f(x)$ funkciyanı qaraymız.

4-anıqlama. c noqattıń $\exists U_\delta(c)$ dógeregi tabılıp, $f(c)$ mánis funkciyanıń usı dógerektegi mánisleri ishindegi eń úlkeni (eń kishisi) bolsa, onda $y = f(x)$ funkciya c noqatta *lokal maksimumǵa* (*lokal minimumǵa*) iye deymiz.

Funkciyanın noqattağı lokal maksimumı hám lokal minimumı, ulıwma atama menen, funkciyanın *lokal ekstremumı* dep ataladı.

7-teorema (berilgen noqatta differenciallanıwshı funkciyanın lokal ekstremumınıń zárúr shártı). *Eger $y = f(x)$ funkciya c noqatta differenciallanıwshı bolıp, bul noqatta lokal ekstremumğa iye bolsa, onda $f'(c) = 0$ teńlik orınlı boladı.*

Dálillew. Meyli, $f(x)$ funkciya c noqatta lokal maksimumğa erissin, yaǵnıy $\forall x \in U_\delta(c)$ noqatta $f(x) \leq f(c)$ teńsizlik orınlı hám funkciya c noqatta shekli $f'(c)$ tuwındıǵa iye bolsın. Onda

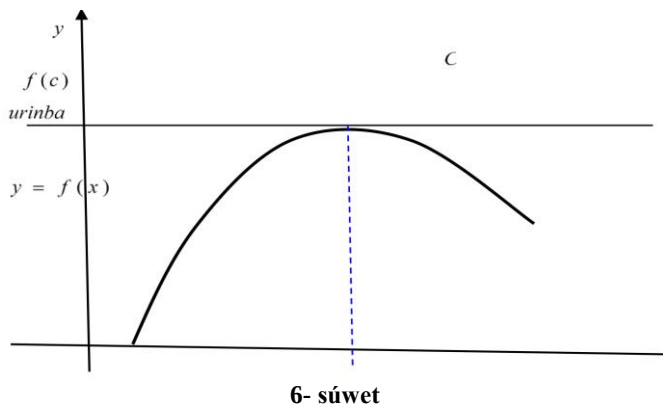
$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

$U_\delta(c)$ dógerektiń $x > c$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı noqatlarında $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$ hám $\lim_{x \rightarrow c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$ teńsizlik,

al $x < c$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı noqatlarında $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$ hám $\lim_{x \rightarrow c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$ teńsizlik orınlı.

Bunnan $f'(c) = 0$ teńlik kelip shıǵadı. ▲

Bul teorema Ferma teoreması dep te ataladı. Bul teorema júdá ápiwayı geometriyalıq maǵanaǵa iye: *eger $y = f(x)$ funkciyanıń grafigine $C(c; f(c))$ noqatta urınba júrgiziw múmkin bolsa, onda bul urınba abscissalar kóshetine parallel boladı* (6- súwret).



Eskertiw. Tuwındınıń nol'ge teń bolıwı lokal ekstremumnıń zárúr shártı bolıp, jetkilikli shártı bolmaydı. Mısalı, $y = x^3$ funkciyanıń $x = 0$ noqattaǵı tuwındısı nolge teń, biraq funkciya bul noqatta lokal ekstremumǵa iye emes.

8-teorema (Roll). Meyli, $y = f(x)$ funkciya $[a, b]$ kesindide úzliksiz hám bul kesindiniń hámme ishki noqatlarında differenciallanıwshı bolsın. Bunnan tısqarı, meyli, $f(a) = f(b)$ bolsın. Onda $[a, b]$ kesindiniń $f'(\xi) = 0$ bolatuǵın ξ ishki noqatı bar.

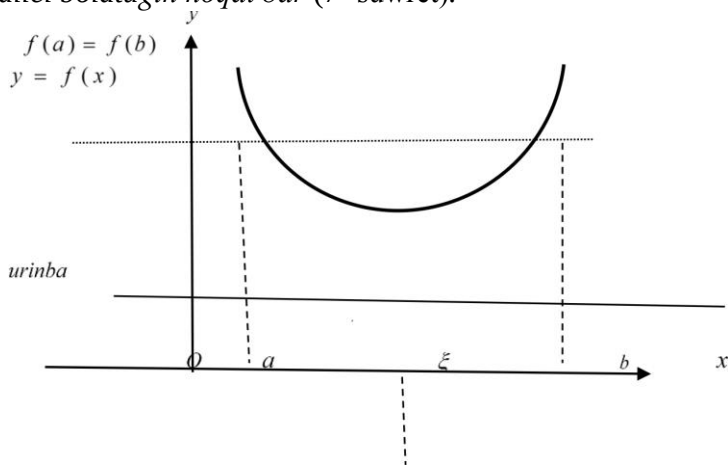
Basqasha aytqanda, differenciallanıwshı funkciyanıń teń mánisleri arasında bul funkciyanıń tuwındısınıń noli álbette jatadı.

Dalillew. $f(x)$ funkciya $[a, b]$ kesindide úzliksiz bolǵanlıqtan Veyershtasstıń II teoreması boyınsha bul kesindide óziniń $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ hám $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ mánislerine erisedi.

Eki jaǵday bolıwı múmkin 1) $m = M$. Bul jaǵdayda $f(x) \equiv m = M$ - turaqlı funkciya bolıp, bul funkciyanıń tuwındısı $[a, b]$ kesindiniń qálegen ishki noqatında nolge teń; 2) $m < M$. Bul jaǵdayda $f(a) = f(b)$ bolǵanlıqtan funkciya m hám M mánislerdiń keminde birewine bazı bir $\xi \in (a, b)$

ishki noqatta erisedi. Onda bul noqatta funkciya lokal ekstremumga iye boladi. 7- teorema boyinsha $f'(\xi) = 0$. ▲

Roll teoremasi juda aqibay geometriyalik maganaqa iye: eger $f(x)$ funkciya Roll teoremasinin shartlerin qanaatlandirsa, onda funkciyaning grafiginde urinba abscissalar kosherine parallel bolatugin noqat bar (7- suvret).



7- suvret

1- Eskertiw. Rol'l teoremasında $y = f(x)$ funkciya $[a, b]$ kesindide uzliksiz ham bul kesindinin hamme ishki noqatlarında differenciallanıwshı bolıwı talap etiledi. Funkciyaning kesindinin ishki noqatlarında differenciallanıwshılıgınan bul noqatlarda uzliksizligi kelip shıgadı, sonlıqtan $y = f(x)$ funkciya $[a, b]$ kesindide uzliksizligin talap qılıwdın ornına bul funkciyaning a noqatta onnan ham b noqatta shepten uzliksizligin talap qılıw jetkilikli.

2- Eskertiw. Roll teoremasının hamme shartleri ahmiyetli. Eger teoremaning shartlerini ayırımları orınlanbasa teoremaning tastıyıqlawı orınlı bolmawı da mumkin. Misallar keltiremiz. 1) $f(x) = 1 - |x|$ funkciya $[-1, 1]$ kesindide uzliksiz, $f(-1) = f(1) = 0$, biraq bul funkciyaning tuwındısı $(-1, 1)$ intervaldın hesh bir noqatında nolge teń emes, sebebi berilgen funkciya $(-1, 1)$

intervaldın $x = 0$ noqatında tuwındıǵa iye emes. Bul funkciya ushın funkciyanıń kesindiniń hámme ishki noqatında differenciallanıwshı bolıwı shárti buzılǵan.

2) $f(x) = x$ funkciya $[0, 1]$ kesindide úzliksiz, kesindiniń hámme ishki noqatlarında differenciallanıwshı hám $\forall x \in (0, 1)$ noqatta $f'(x) = 1$. Bul funkciya ushın Roll teoremasınıń tastıyqlawı orınlı emes, sebebi $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ bolıp, kesindiniń shetki noqatlarında funkciyanıń mánisleri birdey bolıwı shárti buzılǵan.

6.2. Lagranj teoreması. 9-teorema (Lagranj). *Eger $y = f(x)$ funkciya $[a, b]$ kesindide úzliksiz hám bul kesindiniń hámme ishki noqatlarında differenciallanıwshı bolsa, onda $[a, b]$ kesindiniń*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a) \quad (24)$$

teńlik orınlı bolatuǵın ξ ishki noqatı bar.

(24) formula, ádette, *Lagranj formulası* yaqı *shekli ósimler formulası* dep ataladı.

Dálillew. $[a, b]$ kesindide

$$F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

járdemshi funkciyanı qaraymız. Bul funkciya $[a, b]$ kesindide úzliksiz ($f(x)$ hám sızıqlı funkciyanıń ayırması sıpatında), kesindiniń hár bir ishki noqatında

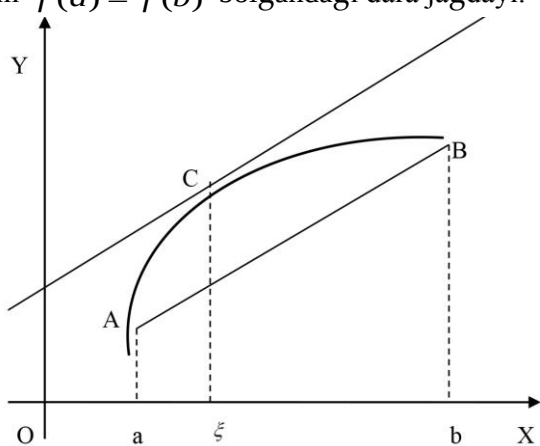
$$F'(x) := f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

tuwındıǵa iye hám $F(a) = F(b) = 0$, yaǵnıy Roll teoremasınıń hámme shártlerin qanaatlandıradı. Onda Roll teoreması boyınsha $\exists \xi \in (a, b)$ noqat tabılıp,

$$F'(\xi) := f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

boladı. Bunnan (24) formula kelip shıǵadı. ▲

Eskertiw. Lagranj teoreması Roll teoremasınıń saldarı sıpatında alınadı. Sonıń menen birge Roll teoreması Lagranj teoremasınıń $f(a) = f(b)$ bolǵandaǵı dara jaǵdayı.



8- súwret

Lagranj teoremasınıń geometriyalıq maǵanasın anıqlaw ushın $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ shama $y = f(x)$ funkciyanıń grafiginiń $A(a; f(a))$ hám $B(b; f(b))$ noqatlarınan ótiwshi kesiwshisiniń, al $f'(\xi)$ sanı funkciyanıń grafigine $C(\xi; f(\xi))$ noqatta júrgizilgen urınbanıń múyeshlik koefficienti ekenin esletip ótemiz. (24) Lagranj formulası $y = f(x)$ funkciyanıń grafiginiń A hám B noqatları arasında $\exists C$ noqat tabılıp, funkciyanıń grafigine bul noqatta júrgizilgen urınba AB kesiwshige parallel bolatuǵının bildiredi (8- súwret).

6.3. Lagranj teoremasınıń geypara saldarları.

¹⁰. *Intervalda tuwındısı nol`ge teń funkciyanıń turaqlılıǵı.*

10-teoremat. Eger $f(x)$ funkciya (a, b) intervalda differenciallanıwshı bolıp, bul intervaldıń hámme noqatlarında $f'(x) = 0$ bolsa, onda bul funkciya usı intervalda turaqlı funkciya.

Dálillew. Meyli, $x_0 \in (a, b)$ - saylap alınıǵan noqat, al $x \in (a, b)$ - qálegen noqat bolsın.

$[x_0, x]$ yoki $[x, x_0]$ kesindi (a, b) intervalga derek boladı. Sonlıqtan $f(x)$ funkciya bul kesindide differenciallanıwshı (demek, úzliksiz de). Bul bizge $f(x)$ funkciyağa Lagranj teoremasın qollanıw huqıqın beredi. Bul teorema boyınsha kesindiniń $\exists \xi$ ishki noqatı tabılıp,

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) \quad (25)$$

teńlik orınlı boladı. Teoremanıń shártı boyınsha (a, b) intervaldıń hámme noqatlarında $f'(x) = 0$. Demek, $f'(\xi) = 0$. Sonlıqtan (25) teńlikten $f(x) = f(x_0)$ teńlikke iye bolamız. Bul teńlik $f(x)$ funkciyanıń $\forall x \in (a, b)$ noqattaǵı mánisi $f(x_0)$ sanǵa teń bolatuǵının bildiredi. Bunnan $f(x)$ funkciya (a, b) intervalda turaqlı funkciya ekeni kelip shıǵadı. ▲

Bul teorema ápiwayı geometriyalıq maǵanaǵa iye: eger $y = f(x)$ funkciyanıń grafiginiń bazı bir bóleginiń hár bir noqatındaǵı urınbası abscissalar kósherine parallel bolsa, onda funkciyanıń grafiginiń bul bóleginiń ózi abscissalar kósherine parallel kesindi boladı.

2⁰. Funkciyanıń intervalda monotonlıq shártleri.

11-teorema. (a, b) intervalda differenciallanıwshı $f(x)$ funkciya usı intervalda ósiwshı (kemiwshı) funkciya bolıwı ushın bul funkciyanıń tuwındısı usı intervalda teris emes (oń emes) anıqlanǵan bolıwı zárúr hám jetkilikli.

Dálillew. 1) Jeterliligi. Meyli, (a, b) intervalda $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) bolsın. $f(x)$ funkciyanıń (a, b) intervalda ósiwshı (kemiwshı) funkciya bolatuǵının dálillew kerek. Meyli, $x_1, x_2 \in (a, b)$ noqatlar $x_1 < x_2$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı qálegen noqatlar bolsın. $f(x)$ funkciyanıń $[x_1, x_2] \subset (a, b)$ kesindide differenciallanıwshı, demek, úzliksiz funkciya. Sonlıqtan bul funkciyağa $[x_1, x_2]$ kesindide Lagranj teoremasın qollanıw múmkin, nátiyjede

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2) \quad (26)$$

teńlikke iye bolamız, bul jerde $\xi \in (x_1, x_2)$ - bazı bir noqat.

Shárt boyınsha $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$). Sonlıqtan (26) teńliktiń oń tárepi (demek, shep tárepi de) teris emes (oń emes), bul $f(x)$ funkciyanıń (a, b) intervalda ósiwshi (kemiwshi) funkciya ekenin kórsetedi. ▲

2) **Zárúrligi.** Meyli, $f(x)$ funkciya (a, b) intervalda differenciallanıwshı hám bul intervalda ósiwshi (kemiwshi) funkciya bolsın. (a, b) intervalda $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) bolatuǵının dálillew kerek. $f(x)$ funkciya (a, b) intervalda kemimeytuǵın (óspeytuǵın) funkciya bolǵanlıqtan bul funkciya (a, b) intervaldın hesh bir noqatında kemiwi (ósiwi) múmkin emes. Onda funkciyanıń $f'(x)$ tuwındısı bul intervaldın hesh bir noqatında teris (oń) anıqlanǵan bolıwı múmkin emes. ▲

12-teorema. (a, b) intervalda differenciallanıwshı $f(x)$ funkciya usı intervalda qatal óciwshi (qatal kemiwshi) bolıwı ushın bul funkciyanıń tuwındısı usı intervalda oń (teris) anıqlanǵan bolıwı jetkilikli.

Dálillew. 11- teoremanıń jetkilikliligin dálillew sxeması boyınsha júrgiziledi. Meyli, $x_1, x_2 \in (a, b)$ noqatlar $x_1 < x_2$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı qálegen noqatlar bolsın. $f(x)$ funkciyanıń $[x_1, x_2] \subset (a, b)$ kesindide differenciallanıwshı, demek, úzliksiz funkciya. Sonlıqtan bul funkciyaǵa $[x_1, x_2]$ kesindide Lagranj teoremasın qollanıw múmkin, nátiyjede

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2)$$

(27)

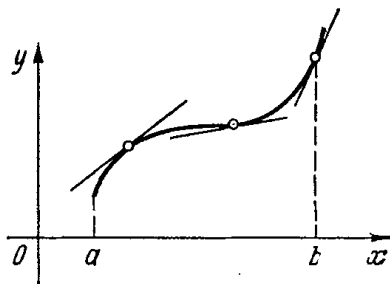
teńlikke iye bolamız, bul jerde $\xi \in (x_1, x_2)$ - bazı bir noqat.

Shárt boyınsha $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$). Sonlıqtan (27) teńliktiń oń tárepi (demek, shep tárepi de) oń (teris), bul $f(x)$

funkciyanıń (a, b) intervalda qatal ósiwshi (qatal kemiwshi) funkciya ekenin kórsetedi. ▲

1- Eskertiw. $f(x)$ tuwındınıń (a, b) intervalda oń (teris) anıqlanǵan bolıw shártı bul funkciyanıń usı intervalda qatal ósiwiniń (qatal kemiwiniń) zárúr shártı bolmaydı. Mısalı, $y = x^3$ funkciya $(-1, 1)$ intervalda qatal ósiwshi, biraq onıń $f'(x) = 3x^2$ tuwındısı bul intervaldıń hámme noqatlarında oń anıqlanǵan emes ($x = 0$ noqatta nolge teń). Ulıwma, eger $f(x)$ funkciyanıń $f'(x)$ tuwındısı intervaldıń bul tuwındı nolge aylanatuǵın shekli sandaǵı noqatlarınan basqa hámme noqatlarında oń (teris) anıqlanǵan bolsa, onda bul funkciya usı intervalda qatal ósedi (qatal kemeyedi).

2- Eskertiw. Tuwındınıń belgisi menen funkciyanıń ózgeriw baǵıtı arasındaǵı 12-teorema járdeminde anıqlanǵan baylanıstı geometriyalıq pikirlewler arqalı túsiniw ańsat. Tuwındı $y = f(x)$ funkciyanıń grafiginiń urınbasınıń múyeshlik koefficientine teń bolǵanlıqtan tuwındınıń belgisi urınbanıń joqarı yarım tegislikti jatıwshı nırı Ox kósherdiń oń baǵıtı menen qanday múyesh (súyir yaki doǵal) jasaytuǵının kórsetedi. Eger (a, b) intervalda $f'(x) > 0$ bolsa, onda urınbanıń joqarı yarım tegislikti jatıwshı nırı Ox kósherdiń oń baǵıtı menen súyir múyesh jasaydı, demek, $y = f(x)$ funkciyanıń grafigi bul intervalda joqarı qaray baǵıtlanadı (9 -súwret).



9- súwret

3- Eskertiw. Lagranj teoreması járdeminde geypara júdá paydalı teńsizliklerdi dálillew múmkin. Mısal retinde tómendegi eki teńsizlikti dálilleymiz:

$$|\sin x_1 - \sin x_2| \leq |x_1 - x_2|, \quad (28)$$

$$|\arctg x_1 - \arctg x_2| \leq |x_1 - x_2| \quad (29)$$

(bul jerde x_1, x_2 — argumenttiń qálegen mánisleri).

(28) teńsizlikti dálillew ushın Lagranj teoremasın $[x_1, x_2]$ kesindide $f(x) = \sin x$ funkciyaǵa qollanıp,

$$\sin x_1 - \sin x_2 = (x_1 - x_2) \cdot (\sin x)'_{x=\xi} \quad (30)$$

teńlikke iye bolamız. $\forall \xi$ noqatta $|(\sin x)'_{x=\xi}| = |\cos \xi| \leq 1$ bolǵanlıqtan, (30) teńlikte modullerge ótip, (28) teńsizlikti alamız.

(29) teńsizlikti dálillew ushın Lagranj teoremasın $[x_1, x_2]$ kesindide $f(x) = \arctg x$ funkciyaǵa qollanıp, $\forall \xi$ noqatta $f'(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2} \leq 1$ teńsizliktiń orınlı bolıwın esapqa alıw jetkilikli.

6.4. Koshi teoreması. 13-teorema (Koshi). *Eger $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalardıń hár birewi $[a, b]$ kesindide úzliksiz, bul kesindiniń hámme ishki noqatlarında differenciallanıwshı hám bunnan tısqarı, $g'(x)$ tuwındı kesindiniń hámme ishki noqatlarında nolden ózgeshe bolsa, onda $[a, b]$ kesindiniń*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (31)$$

teńlik orınlı bolatuǵın ξ ishki noqatı bar.

(31) formula, ádette, *Koshi formulası* yaki *ulıwmalasqan shekli ósimler formulası* dep ataladı.

Dálillew. $g(a) \neq g(b)$, sonlıqtan biz $F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$ járdemshi funkciyanı qarawımız múmkin. Bul funkciya teoremanıń shártleri boyınsha $[a, b]$ kesindide úzliksiz, bul kesindiniń hámme ishki noqatlarında

differentiallaniwshı hám $F(a) = F(b) = 0$, yaǵnıy Roll teoremasınıń hámme shártlerin qanaatlandıradı. Bul teorema boyınsha $\exists \xi \in (a, b)$ noqat tabılıp, $F'(\xi) = 0$ boladı.

$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} g'(x)$ bolǵanlıqtan, $F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} g'(\xi) = 0$ teńlik orınlı. Bunnan (31) formulanı alamız. ▲

1- Eskertiw. $g(a) \neq g(b)$, sebebi, eger bunday bolmaǵanda, $g(x)$ funkciya ushın Roll teoremasınıń hámme shártleri orınlanadı hám bul teorema boyınsha $[a, b]$ kesindiniń bazı bir ξ ishki noqatında $g'(\xi) = 0$ boladı, bul teoremanıń shártine qarama-qarsı.

2- Eskertiw. Lagranj formulası Koshi formulasınıń $g(x) = x$ bolǵan dara jaǵdayı.

7-§. Lopital qádesi

7.1. $\frac{0}{0}$ kórinistegi anıq emesliklerdi ashıw. Eger

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ bolsa, onda a noqat dógeresinde anıqlanǵan $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalardıń $\frac{f(x)}{g(x)}$ qatnası $x \rightarrow a$

da $\frac{0}{0}$ kórinisindegi anıq emeslik dep ataladı.

Bul anıq emeslikti ashıw- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limitti esaplaw (álbette, eger bul limit bar bolsa).

14-teorema (Lopital qádesi). Meyli, $\overset{0}{U}_\delta(a) - a$ noqattıń oyılǵan $\delta -$ dógeregi, $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar $\overset{0}{U}_\delta(a)$ dógerekte anıqlanǵan hám differentiallanıwshı, $g'(x)$ tuwındı $\overset{0}{U}_\delta(a)$ dógerekte nolden ózgeshe hám

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

bolsın. Onda, eger $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ limit (shekli, sheksiz) bar bolsa,
 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limit te bar hám

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (32)$$

teńlik orınlı.

Bul teorema $\frac{0}{0}$ kórinisindegi anıq emeslikti ashıwdıń eki funksiyanıń qatnasınıń a noqattaǵı limitin esaplawdı bul funksiylardıń tuwındılarınıń qatnasınıń a noqattaǵı limitin esaplawǵa keltiriwshi qádesin beredi.

Dálillew. Meyli, $\{x_n\}$ — argumenttiń a noqattan ózgeshe mánislerinen dúzilgen, a noqatqa jıynaqlı qálegen izbe-izlik bolsın. $f(x)$ hám $g(x)$ funksiylardı $x = a$ noqatta nolge teń dep tolıqtırıp anıqlap alamız. Usınday qılıp anıqlaǵanıımızda $f(x)$ hám $g(x)$ funksiylar a noqattıń $U_\delta(a)$ dógeresinde úzliksiz boladı. Haqıyqattanda da, bul funksiylardıń $U_\delta(a)$ dógerekte úzliksizligi bul funksiylardıń usı dógerekte differenciallanıwshılıǵınan, al $x = a$ noqatta úzliksizligi biziń bul funksiylardı usı noqatta tolıqtırıp anıqlawımızdan kelip shıǵadı.

$\{x_n\}$ izbe-izliktiń hámme elementleri $U_\delta(a)$ dógerекке derek bolǵanlıqtan a hám x_n noqatlar menen shegaralanǵan qálegen kesindini qaraymız. Joqarıda ayılǵanlardan $f(x)$ hám $g(x)$ funksiylar bul kesindide úzliksiz, bunnan tısqarı bul kesindiniń ishki hámme noqatlarında bul funksiylar differenciallanıwshı hám $g'(x)$ tuwındı nolden ózgeshe bolıp, a hám x_n noqatlar menen shegaralanǵan kesindide Koshi teoremasınıń hámme shártlerin qanaatlandıradı. Sonlıqtan bul teorema boyınsha a hám x_n noqatlar arasında $\exists \xi_n$ noqat tabılıp,

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$$

teńlik orınly boladı. Biziń tolıqtırıp anıqlawımız boyınsha $f(a) = g(a) = 0$ ekenin esapqa alıp, bul teńlikti

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \quad (33)$$

kóriniste jazamız.

(33) teńlikte $n \rightarrow \infty$ da limitke ótemiz, sonda $\{x_n\} \rightarrow a$. Kosha teoremasınıń tastıyqlawı boyınsha ξ_n noqat a hám x_n noqatlar arasında jatqanlıqtan $\{\xi_n\} \rightarrow a$. Teoremanıń shártı boyınsha $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ limit bar bolǵanlıqtan (33) teńliktiń oń

tárepindegi bólshek Geyne anıqlaması boyınsha $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

shamaǵa teń limitke iye. $\{x_n\}$ - a noqatqa jıynaqlı qálegen izbeizlik bolǵanlıqtan hám Geyne anıqlaması boyınsha (33) teńliktiń shep tárepindegi bólshektiń $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ shamaǵa teń limitke iye

bolıwı $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limittiń de usı shamaǵa teń ekenin bildiredi.

Solay etip, $n \rightarrow \infty$ da (32) teńlikti alamız. ▲

1- Eskertiw. Lopital` qaǵıydası hámme waqıtta da durıs bola bermeydi, yaǵnıy *funkciyalardıń qatnasınıń limiti tuwındıların qatnası limitke iye bolmaǵan jaǵdaylarda da bar bolıwı múmkin.*

Mısalı, $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ hám $g(x) = \sin x$ funkciyalardıń $x = 0$

noqattaǵı limitleri nolge teń hám

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cos \frac{1}{x} = 0$$

Biraq, $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x \cdot \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}}{\cos x}$ bólshek $x = 0$ noqatta limitke iye emes, sebebi, $y = \sin \frac{1}{x}$ funksiya $x = 0$ noqatta limitke iye emes.

2- Eskertiw. Eger 14- teoremanıń shártlerine $f'(x)$ hám $g'(x)$ tuwındıların a noqatta úzliksiz bolıw shárti qosılsa, onda $g'(a) \neq 0$ teńsizlik orınlanganda (32) teńlikti $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$ kóriniste jazıw múmkin.

3- Eskertiw. Eger $f'(x)$ hám $g'(x)$ tuwındılar $f(x)$ hám $g(x)$ funksiylarğa qoyılğan talaplarğa juwap berse, onda Lopital` qádesinen tákirarlap paydalanıw múmkin, yaǵnıy $f(x)$ hám $g(x)$ funksiylardıń birinshi tártipli tuwındılarınıń qatnasınıń limitin bul funksiylardıń ekinshi tártipli tuwındılarınıń qatnasınıń limitine almasırw múmkin. Nátiyjede

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

teńliklerge iye bolamız.

Mısallar. 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}.$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^2 + 2\cos x - 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3}{2x - 2\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12x^2}{2 - 2\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{24x}{2\sin x} = 12.$

4) $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x^\delta}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\delta \cdot x^{\delta-1}}{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \delta \cdot x^{\delta-1} \cdot (1+x) = 0.$

5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}(1 - \frac{1}{x})}{\sin \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + (1 - \frac{1}{x})^2}}{-\frac{1}{x^2} \cdot \cos \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + (1 - \frac{1}{x})^2} \cdot \frac{1}{\cos \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}.$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}}{e^x} = \dots \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

Bul jerde Lopital` qağıydasınan n mártebe paydalandıq.

7.2. $\frac{\infty}{\infty}$ kórinistegi anıq emesliklerdi ashıw. Eger

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad (+\infty, -\infty), \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty \quad (+\infty, -\infty)$ bolsa,

onda a noqat dógeresinde anıqlanğan $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalardıń $\frac{f(x)}{g(x)}$ qatnası $x \rightarrow a$ da $\frac{\infty}{\infty}$ kórinisindegi anıq emeslik dep ataladı.

15-teorema ((Lopitaldıń ekinshi qádesi). Meyli, $\overset{0}{U}_{\delta}(a) - a$ noqattıń oyılğan $\delta -$ dógeregi, $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar $\overset{0}{U}_{\delta}(a)$ dógerekte anıqlanğan hám differenciallanıwshı, $g'(x)$ tuwındı $\overset{0}{U}_{\delta}(a)$ dógerekte nolden ózgeshe hám

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad (+\infty, -\infty), \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty \quad (+\infty, -\infty)$$

bolsın. Onda, eger $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ limit (shekli, sheksiz) bar bolsa,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ limit te bar hám}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (33)$$

teńlik orınlı.

Eskertiw. 14-teorema da, 15-teorema da tómendegi jaǵdaylardıń hár birewinde orınlı:

1) bul teoremalarda $\overset{0}{U}_{\delta}(a)$ dógerек sıpatında $(a, a + \delta)$ intervalı

(($a - \delta, a$) intervalı), al limitler $x \rightarrow a + 0$ da ($x \rightarrow a - 0$ da) alınadı;

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} U_{\delta}(a)$ dógerek sıpatında sanlar kósheriniń $[-\delta, \delta]$ kesindiden sırtqı bólegi, al limitler $x \rightarrow \infty$ da alınadı.

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} U_{\delta}(a)$ dógerek sıpatında $(\delta, +\infty)$ yarım tuwrı sızığı $(-\infty, \delta)$ yarım tuwrı sızığı, al limitler $x \rightarrow +\infty$ da $(x \rightarrow -\infty)$ da alınadı;

7.3. Basqa kórinistegi anıq emesliklerdi ashıw. $\frac{0}{0}$ hám $\frac{\infty}{\infty}$ kórinistegi anıq emesliklerden tısqarı $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^{∞} , 0^0 , ∞^0 kórinistegi anıq emeslikler de jiyi ushırasadı. Bul anıq emeslikler algebralıq túrlendiriwler járdeminde joqarıda qaralǵan eki anıq emesliklerdiń birewine alıp kelinedi.

Mısallar.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0+0} \sqrt{x} \cdot \ln x = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln x}{x^{-1/2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}} =$$

$$= -2 \lim_{x \rightarrow 0+0} \sqrt{x} = 0.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0+0} x^x = (0^0) = \lim_{x \rightarrow 0+0} e^{x \ln x} = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 0+0} e^{\frac{\ln x}{1/x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+0} e^{\frac{1/x}{-1/x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} e^{-x} = 1.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}} = (1^{\infty}) = \lim_{x \rightarrow 0} [(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}]^{e^x-1-x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{x^2}{e^x-1-x}} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{2x}{e^x-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{2}{e^x}} = e^2.$$

8-§. Teylor formulası

Bul paraqrafta biz ilim hám texnikanıń júdá kóp tarawlarında keń qollanılatuǵın matematikalıq analizdiń áhmiyetli formulalarınń birewin anıqlaymız.

8.1. Teylor teoreması. 16-teorema (Teylor). Meyli, $f(x)$ funksiya a noqatnın bazı bir dógereginde $n + 1$ — tártipli tuwindıǵa iye, x — qaralıp atırǵan dógeretniń qálegen noqatı, p — qálegen oń san bolsın. Onda a hám x noqatları arasında jatıwshı $\exists \xi$ noqat tabılıp,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x) \quad (34)$$

formula orınlı, bul jerde

$$R_{n+1}(x) = \left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n! p} f^{(n+1)}(\xi). \quad (35)$$

Eskertiw. ξ noqat a hám x noqatları arasında jatqanı sebepli $\frac{x-a}{x-\xi}$ bólshek oń anıqlanǵan, sonlıqtan $\forall p > 0$ san ushin $\left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p$ dáreje anıqlanǵan.

(34) formula orayı a noqat bolǵan Teylor formulası dep, al $R_{n+1}(x)$ anlatpa Teylor formulasınıń qaldıq aǵzası dep ataladı.

Teylor formulasınıń qaldıq aǵzası tek (35) kóriniste emes, basqa kóriniste de jazılıwı múmkin. (35) kóriniste jazılǵan qaldıq aǵza ulıwma formadaǵı qaldıq aǵza dep ataladı.

Dálillew. (34) teńliktiń oń tárepindegi n — dárejeli kópáǵzalını $\varphi(x, a)$ dep belgileybiz:

$$\varphi(x, a) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \quad (36)$$

Soñ $f(x)$ funkciya menen $\varphi(x, a)$ kópáǵalıńnıń ayırmasın $R_{n+1}(x)$ dep belgileymiz:

$$R_{n+1}(x) = f(x) - \varphi(x, a). \quad (37)$$

Eger $R_{n+1}(x)$ ayırma (35) formula menen anıqlanatuǵının kórsecek teorema dálillenedi.

Teoremada kórsetilgen dógerekten $\forall x$ noqat saylap alamız, anıqlıq ushın $x > a$ dep esaplaymız. Ózgeriw oblastı $[a, x]$ kesindi bolǵan ózgeriwshini t dep belgileymiz hám tómendegi kórinistegi járdemshi funkciyanı qaraymız:

$$\psi(t) = f(x) - \varphi(x, t) - (x - t)^p \cdot Q(x), \quad (38)$$

bul jerde

$$Q(x) = \frac{R_{n+1}(x)}{(x - a)^p}. \quad (39)$$

Járdemshi funkciyanı

$$\begin{aligned} \psi(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x - t) + \frac{f''(t)}{2!}(x - t)^2 - \dots - \\ - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n - (x - t)^p Q(x) \end{aligned} \quad (40)$$

kóriniste jazıw múmkin. Biziń maqsetimiz- kiritilgen járdemshi $\psi(x)$ funkciyanıń qásiyetlerinen paydalanıp $Q(x)$ funkciyanı ańlatıw.

(40) formuladan hám $f(x)$ funkciyaǵa qoyılǵan shártlerden $\psi(t)$ funkciya $[a, x]$ kesindide úzliksiz hám bul kesindiniń hámme ishki noqatlarında differenciallanıwshı. $\psi(a) = \psi(x) = 0$ bolatuǵının kórsetemiz. (38) formulada $t = a$ dep alıp hám (39) teńlikti itibarǵa alıp, $\psi(a) = f(x, a) - \varphi(x, a) - R_{n+1}(x)$ teńlikke

iyе боламыз. Bunnan (37) теңлік тийкарında $\psi(a)=0$ теңлікті аламыз. $\psi(x)=0$ теңлік (40) формуладан келіп шығады.

Солay етіп, $\psi(t)$ функciяy ushın $[a, x]$ кесіндіде Roll теоремасынн шартлери орынланған. Буl теорема бойынша $[a, x]$ кесіндінін $\exists \xi$ ішкі нoқаты табылп,

$$\psi'(\xi) = 0 \quad (41)$$

теңлік орынлн болadı. (40) теңлікті differencialлап, $\psi(t)$ функciяынн туындысy ushın

$$\begin{aligned} \psi'(t) = & -f'(t) + f'(t) - f''(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2!} 2 \cdot (x-t) - \dots \\ & \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!} n \cdot (x-t)^{n-1} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n + p(x-t)^{p-1} Q(x) \end{aligned} \quad (42)$$

теңлікке іye боламыз. (42) теңліктің keyingi екі ағзасын басқалары өз- ара жесіп кететуғынн кóріw қыын емес. Солay етіп,

$$\psi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n + p(x-t)^{p-1} Q(x).$$

Буl теңлікте $t = \xi$ деп алп хám (41) теңліктен payдаланп,

$$Q(x) = \frac{(x-\xi)^{n-p+1}}{n! \cdot p} f^{(n+1)}(\xi)$$

теңлікті аламыз. Алынған буl теңліктен хám (39) теңліктен payдаланп,

$$R_{n+1}(x) = (x-a)^p \cdot Q(x) = \left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n! \cdot p} f^{(n+1)}(\xi)$$

теңлікке іye боламыз. Солay етіп, $R_{n+1}(x)$ айырма (35) формула менен анықланadı екен. ▲

Ең ápiwayы функciяынн- n — дәрежелі алгебралық кóпағзалынн- Tейлор формуласы бойынша жикленіwін қараймыз. Meyлі,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

kópaǵzalı berilgen bolsın. $P^{(n+1)}(x) \equiv 0$ bolǵanlıqtan qaldıq aǵza $R_{n+1}(x) \equiv 0$ hám (34) Teylor formulası

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

kóriniste jazıladı, bul jerde a noqat sıpatında sanlar kósheriniń qálegen noqatın alıw múmkin. Solay etip, Teylor formulası qálegen kópaǵzalını $x-a$ (a – qálegen san) ayırmanıń dárejesi boyınsha kópaǵzalı kórinisinde jazıwǵa múmkinshilik beredi.

Meyli, $f(x)$ – Teylor teoremasınıń shártlerin qanaatlandırıwshı bazı bir funkciya bolsın. Bul funkciya ushın Teylor formulasında qatnasatuǵın $\varphi(x, a)$ kópaǵzalı qanday qásiyetlerge iye bolatuǵının anıqlaymız. $\varphi^{(n)}(x, a)$ simvolı menen bul kópaǵzalınıń n — tártipli tuwındısın belgileybiz. (36) formulanı x ózgeriwshi boyınsha differenciallap hám keyin $x = a$ dep alıp,

$$\begin{cases} \varphi(a, a) = f(a), \\ \varphi'(a, a) = f'(a), \\ \varphi''(a, a) = f''(a), \\ \dots \dots \dots \\ \varphi^{(n)}(a, a) = f^{(n)}(a) \end{cases} \quad (43)$$

teńliklerdi alamız. Solay etip, $f(x)$ funkciya ushın Teylor formulasında qatnasatuǵın $\varphi(x, a)$ kópaǵzalı mına qásiyetke iye: *bul kópaǵzalınıń ózi hám onıń n — tártipke deyingi tuwındıları $x = a$ noqatta, sáykes túrde, $f(x)$ funkciyanıń hám bul funkciyanıń n — tártipke deyingi tuwındılarınıń usı noqattaǵı mánislerine teń.*

8.2. Lagranj, Koshi hám Peano formasındaǵı qaldıq aǵzalar. Joqarıda biz ulıwma formadaǵı qaldıq aǵzalı Teylor formulasın anıqladıq. Endi basqa formadaǵı qaldıq aǵzalar da

qaraymız. Olardıń dáslepki ekewi ulıwma formadaǵı qaldıq aǵzanıń dara jaǵdayı sıpatında alınıwı múmkin.

Dáslep qaldıq aǵza ushın (35) formulanı túrlendirip jazamız. ξ noqat a hám x noqatlar arasında jatqanlıqtan $\xi - a = \theta \cdot (x - a)$ teńlik orınlı bolatuǵın $\theta \in (0, 1)$ noqat bar. Bunnan $\xi = a + \theta \cdot (x - a)$ hám $x - \xi = (1 - \theta) \cdot (x - a)$ teńlikler kelip shıǵadı. Solay etip,

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]$$

kóriniste jazıw múmkin. Bul formulanıń eki áhmiyetli dara jaǵdayın qaraymız.

1) $p = n + 1$. Bul jaǵdayda *Lagranj formasındaǵı* qaldıq aǵza dep atalatuǵın

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)] \quad (0 < \theta < 1)$$

formulanı alamız. Bul qaldıq aǵza Teylor formulasınıń kelesi aǵzasın esletedi, biraq funkciyanıń $(n+1)$ – tuwındısı a noqatta emes, a hám x noqatlar arasında jatatuǵın $\xi = a + \theta \cdot (x - a)$ noqatta esaplanadı.

2) $p = 1$. Bul jaǵdayda *Koshi formasındaǵı* qaldıq aǵza dep atalatuǵın

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)] \quad (0 < \theta < 1)$$

formulanı alamız.

Lagranj hám Koshi formasındaǵı qaldıq aǵzalar p ózgeriwshiniń hár qıylı mánislerine sáykes keletuǵınlıǵı, al θ ózgeriwshi p sanǵa ǵárezli bolǵanlıqtan, θ ózgeriwshiniń Lagranj hám Koshi formasındaǵı qaldıq aǵzalar formulalarındaǵı mánisleri, ulıwma aytqanda, hár qıylı. Ayırım funkciyalardı

bahalaw ushın Koshi forması Lagranj formasına qaraǵanda abzalıraq boladı. Eki formadaǵı qaldıq aǵzalar, ádette, x ózgeriwshiniń a noqattan ózgeshe birdey mánislerinde $f(x)$ funkciyanıń mánislerin juwıq esaplaw talap etiletuǵın jaǵdaylarda qollanıladı.

$f(x)$ funkciyanı $\varphi(x, a)$ kópaǵzalı menen juwıq almasırw hám bunda jol qoyılǵan qátelikti bahalaw tábiyiy másele. Usınıń menen bir qatarda kórsetilgen qáteliktiń sanlı shaması emes, tek onıń $x - a$ sheksiz kishi shamaǵa qarata tártibi qızıqtıratuǵın máseleler de ushırasadı. Bul maqset ushın basqa formadaǵı (Peano formasındaǵı) qaldıq aǵza júdá qolaylı boladı.

Meyli, $f(x)$ funkciya a noqattıń bazı bir dógeresinde $(n - 1)$ mártebe differenciallanıwshı, a noqattıń ózinde shekli n — tártipli tuwındıǵa iye bolsın. (36) formula penen anıqlanǵan $\varphi(x, a)$ kópaǵzalını qaraymız. (33) Teylor formulasınıń $R_{n+1}(x) = f(x) - \varphi(x, a)$ qaldıq aǵzası ushın

$$R_{n+1}(x) = o[(x - a)^n] \quad (44)$$

formula orınlı bolatuǵının dálilleymiz. Ádette, bul formula *Peano formasındaǵı* qaldıq aǵza dep ataladı.

$\varphi(x, a)$ kópaǵzalınıń (43) teńlikler menen ańlatılatsuǵın qásiyetlerinen paydalanıp,

$$R_{n+1}(a) = 0, \quad R'_{n+1}(a) = 0, \quad \dots, \quad R^{(n)}_{n+1}(a) = 0 \quad (45)$$

teńliklerdi alamız. Endi (45) teńliklerden (44) formula kelip shıǵatuǵının dálillewimiz kerek. Bunı matematikalıq indukciya usılı menen orınlaymız.

Dáslep, $n = 1$ bolsa (45) teńliklerden (44) formula kelip shıǵatuǵının kórsetemiz. Bul jaǵdayda (45) teńlikler $R_2(a) = 0, \quad R'_2(a) = 0$ eki teńlik kórinisinde bolıp, bul teńliklerden

$$R'_2(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{R_2(x) - R_2(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{R_2(x)}{x - a} = 0$$

teńlik kelip shıǵadı, al bul teńlik $R_2(x) = o(x - a)$ ($x \rightarrow a$) bolatuǵının bildiredi, yaǵnıy $n = 1$ bolǵan jaǵdayda (45) teńliklerden (44) formula kelip shıǵadı.

Endi, meyli, bazı bir $n \geq 1$ nomer ushın (45) teńliklerden (44) formula kelip shıqsın. Kelesi $n + 1$ nomer ushın (45) teńliklerden (44) formula kelip shıǵatuǵının kórsetemiz. Bul nomer ushın

$$R_{n+2}(a) = 0, \quad R'_{n+2}(a) = 0, \quad \dots, \quad R^{(n+1)}_{n+2}(a) = 0 \quad (45^*)$$

teńlikler orınlı. Uygırıwımız boyınsha n nomer ushın (45) teńliklerden (44) formula kelip shıǵadı, sonlıqtan (45*) teńliklerdiń birinshisin taslap ketip, $R'_{n+2}(a) = 0, \dots, R^{(n+1)}_{n+2}(a) = 0$ teńliklerden

$$R'_{n+1}(x) = o[(x - a)^n] \quad (46)$$

teńlikke iye bolamız.

Ekinshi tárepten, $\forall n \geq 1$ nomer ushın $R_{n+2}(x)$ funkciya $[a, x]$ kesindide Lagranj teoremasınıń shártlerin qanaatlandıradı, sonlıqtan (45*) teńliklerdiń birinshisin esapqa alıp a hám x noqatlar arasında jatatuǵın $\exists \xi$ noqat tabılıp,

$$R_{n+2}(x) = R_{n+2}(x) - R_{n+2}(a) = R'_{n+2}(\xi)(x - a) \quad (47)$$

teńlik orınlı boladı dep tastıyıqlawımız múmkin. (46) formuladan hám $o[(\xi - a)^n] = o[(x - a)^n]$ teńlikten (ξ noqat a hám x noqatlar arasında jatqanlıqtan) paydalanıp, (47) formuladan $R_{n+2}(x) = o[(x - a)^{n+1}]$ teńlikke iye bolamız, al bul teńlik $n + 1$ nomer ushın alınǵan (44) formula.

Solay etip, indukciya orındandı hám Peano formasındaǵı qaldıq aǵza ushın (44) formula dálillendi.

Peano formasındaǵı qaldıq aǵzalı Teylor formulası

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o[(x-a)^n]$$

kóriniste jazıladı.

8.3. Makloren formulası. Orayı $a = 0$ noqatta bolǵan (34) Teylor formulası *Makloren formulası* dep ataladı. Qálegen $f(x)$ funkciya ushın Lagranj, Koshi hám Peano formasındaǵı qaldıq aǵzalı Makloren formulasın jazamız:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + R_{n+1}(x),$$

(47)

bul jerde qaldıq aǵza tómendegi kóriniste boladı:

1) Lagranj formasındaǵı

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta \cdot x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1);$$

2) Koshi formasındaǵı

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta \cdot x)}{n!} (1-\theta)^n x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1);$$

3) Peano formasındaǵı

$$R_{n+1}(x) = o(x)^n \quad (x \rightarrow 0).$$

Solay etip, biz joqarıda $f(x)$ funkciyası ushın Teylor formulasınıń hár túrli formadaǵı qaldıq aǵzaların qaradıq. Sheshiletuǵın máseleniń talabına qarap, Teylor formulasınıń málim bir formadaǵı qaldıq aǵzası paydalanıladı. Mısalı, eger argumenttiń berilgen x_0 noqat dógerindegi mánislerinde $f(x)$ funkciyanıń mánislerin juwıq esaplaw kerek bolsa, Lagranj yaqı Koshi formasındaǵı qaldıq aǵzalı Teylor formulasınan paydalanǵan maqul, al eger $x \rightarrow x_0$ da qaldıq aǵzanıń nolge umtılıw tártibin anıqlaw talap etilse, onda Peano formasındaǵı qaldıq aǵzalı Teylor formulasınan paydalanıw maqsetke muwapıq boladı.

Ádette, Lagranj yaki Koshi formasındaǵı qaldıq aǵzalı Teylor formulası ámeliy máselelerdi sheshkende, al Peano formasındaǵı qaldıq aǵzalı Teylor formulası teoriyalıq izertlewlerde qollanıladı.

8.4. Geypara elementar funkciyalardı Makloren formulası boyınsha jiklew. 1⁰. $f(x) = e^x$ funkciyanı qaraymız. $\forall n$ nomer ushın $f^{(n)}(x) = e^x$ hám $f^{(n)}(0) = 1$ bolǵanlıqtan (47) Makloren formulası

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x)$$

kóriniste jazıladı, bul jerde Lagranj formasındaǵı qaldıq aǵza

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^{\theta \cdot x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

kóriniske iye. $\forall [-r, r]$ ($r > 0$) kesindide $e^{\theta \cdot x} < e^r$ bolǵanlıqtan qaldıq aǵza ushın tómendegi bahanı alamız:

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{e^r}{(n+1)!} r^{n+1}.$$

2⁰. $f(x) = \sin x$ funkciyanı qaraymız. $\forall n$ nomer ushın $f^{(n)}(x) = \sin(x + n \frac{\pi}{2})$ hám

$$f^{(n)}(0) = \sin(n \frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0, & n = 2m, \\ (-1)^{(n-1)/2}, & n = 2m-1 \end{cases}$$

bolǵanlıqtan (47) Makloren formulası

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{(n-1)/2} \frac{x^n}{n!} + R_{n+2}(x)$$

kóriniste (n — taq san) jazıladı, bul jerde Lagranj formasındaǵı qaldıq aǵza

$$R_{n+2}(x) = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} \sin(\theta \cdot x + n \frac{\pi}{2} + \pi) \quad (0 < \theta < 1)$$

kóriniske iye. $\forall [-r, r]$ ($r > 0$) kesindide qaldıq aǵza ushın tómendegi baha orınlı:

$$|R_{n+2}(x)| < \frac{r^{n+2}}{(n+2)!}.$$

3⁰. $f(x) = \cos x$ funkciyanı qaraymız. $\forall n$ nomer ushin
 $f^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$ hám

$$f^{(n)}(0) = \cos(n\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0, & n = 2m - 1, \\ (-1)^{n/2}, & n = 2m \end{cases}$$

bolǵanlıqtan (47) Makloren formulası

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^{n/2} \frac{x^n}{n!} + R_{n+2}(x)$$

kóriniste ($n - \text{jup san}$) jazıladı, bul jerde Lagranj formasındaǵı qaldıq aǵza

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} \cos(\theta \cdot x + n\frac{\pi}{2} + \pi) \quad (0 < \theta < 1)$$

kóriniske iye. $\forall [-r, r]$ ($r > 0$) kesindide qaldıq aǵza ushin tómendegi baha orınlı:

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{r^{n+2}}{(n+2)!}.$$

4⁰. $f(x) = \ln(1+x)$ funkciyanı qaraymız. $\forall n$ nomer ushin
 $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ hám $f(0) = 0$, $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!$

bolǵanlıqtan (47) Makloren formulası

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x)$$

kóriniste jazıladı, bul jerde qaldıq aǵzanı Lagranj hám Koshi formasında jazamız:

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta \cdot x)^{n+1}} \quad (0 < \theta < 1) \text{ (Lagranj formasındaǵı)},$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(1+\theta \cdot x)^{n+1}} (1-\theta)^n \quad (0 < \theta < 1) \text{ (Koshi formasındaǵı)}.$$

Argumenttiń $[0, 1]$ kesindige derek mánislerinde $\ln(1+x)$ funkciyanı bahalaw ushin Lagranj formasındaǵı

qaldıq aǵzaǵa tiykarlanǵan maqul boladı. Lagranj formasındaǵı qaldıq aǵza ushın $[0, 1]$ kesindide

$$|R_{n+1}(x)| = \left| \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta \cdot x)^{n+1}} \right| < \frac{1}{n+1}$$

baha orınlı. Bul bahadan $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0 \quad (\forall x \in [0, 1])$

bolatuǵını kórinip tur.

Endi $\ln(1+x)$ funkciyanı argumenttiń $[-r, 0]$ ($0 < r < 1$) kesindige derek mánislerinde bahalaymız. Bunıń ushın Koshi formasındaǵı qaldıq aǵzaǵa tiykarlanamız. Bul qaldıq aǵzanı

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(1+\theta \cdot x)} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta \cdot x} \right)^n \quad (0 < \theta < 1)$$

kóriniste jazıp alamız. Argumenttiń qaralıp atırǵan mánislerinde

$\frac{1-\theta}{1+\theta \cdot x} < 1$ teńsizlik orınlı bolatuǵının esapqa alıp, Koshi

formasındaǵı qaldıq aǵza ushın $[-r, 0]$ ($0 < r < 1$) kesindide

$$|R_{n+1}(x)| = \left| \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(1+\theta \cdot x)} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta \cdot x} \right)^n \right| < \frac{r^{n+1}}{1-r}$$

baha alamız. Bul bahadan $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0 \quad (\forall x \in [-r, 0] \quad (0 < r < 1))$

bolatuǵının kóriw qıyın emes.

5⁰. $f(x) = (1+x)^\alpha$ (α – bazı bir haqıyqıy san) funkciyanı qaraymız. $\forall n$ nomer ushın

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1) \cdot (1+x)^{\alpha-n},$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)$$

bolǵanlıqtan (47) Makloren formulası

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha \cdot x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + R_{n+1}(x)$$

kóriniste jazıladı, bul jerde Lagranj formasındaǵı qaldıq aǵza

$$R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!} (1+\theta \cdot x)^{\alpha-(n+1)} \cdot x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

kóriniske iye.

Dara jaǵdayda, eger $\alpha = n$ (n — natural san) bolsa, $R_{n+1}(x) = 0$ hám biz hámmege málim N`yuton binomi formulasın alamız:

$$(1+x)^n = 1 + n \cdot x + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \dots + x^n.$$

Eger $(1+x)^n$ funkciyanıń emes, al $(a+x)^n$ funkciyanıń Makloren formulası boyınsha jikleniwın alıw kerek bolsa, onda

$$(a+x)^n = a^n \left(1 + \frac{x}{a}\right)^n = a^n \left[1 + n \cdot \left(\frac{x}{a}\right) + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x}{a}\right)^n\right]$$

formuladan paydalanamız.

GLOSSARIY

Abscissa- noqattın dekart koordinatalarından birinshisi.

Analiz - belgisizden anıqlıqtı, belgiliden anıq pikir tiykarında dälillewshi usıl.

Anıq emes integral -differensiallawğa kerı matematikalıq ámel.

Argument-erikli ózgeriwshi.

Arifmetika-sanlar hám olar ústinde orınlanatuğın ámeller haqqındağı pán.

Arksinus-sinusqa kerı funkciya.

Arktangens-tangenske kerı funkciya.

Sáwlelendiriw- kóplikler sáykesliginiń qandayda bir qağıyda yamasa nızamı.

Bir japıraqlı funkciya – birdey mánisler qabıl etpeytuğın hám bazı bir oblastta anıqlanğan analitikalıq funkciyağa ayıladı.

Bir baylamlı oblast –tómendegi qásiyetke iye bolğan oblast: oblastta jatqan hár qanday jabıq konturdı oblasttan sırtqa shıqpastan úzliksiz túrde tartıp noqatqa aylandırıw múmkin.

Grafik – funkciyanı súwretlew usıllarınan biri.

Dárejege kóteriw- $\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ ma'rite}} = a^n$ kóbeymeni tabıwdan

ibarat.

Differencial – funkciya ósiminiń sıızıqlı bas bólegi.

Differencial esap – funkciyanı tuwındı hám differenciall túsiniqleri járdeminde tekseriwshi matematikanıń bólimi.

Dóngelek- orayı **O** hám radiusı **r** bolğan dóngelek-tegislikde **O** noqattan aralıqları **r** den úlken bolmağan noqatlardıń geometriyalıq orını.

Jeterli shárt – shártten juwmaq kelip shıǵadı.

Zárúrli hám jeterli shártler – teoremalardı jazıw hám bayan etiw túri.

Zárúrli shárt - juwmaqтан shárt kelip shıǵadı.

Integral esap – matematikalıq analizdiń integrallar, olardıń qásiyetleri, esaplaw usılları hám jaǵdayların úyrenetuğın bólimi.

Dáil– tastıyqlawdıń durısıǵı anıqlanatuğın pikirler shınjırı.

Ishki noqat-usı noqattı óz ishine alatuǵın qandayda bir dógerek penen birge kóplikke tiyisli bolǵan noqat.

Kóp baylamlı oblast -bir baylamlı bolmaǵan oblast.

Koordinatalar-belgili tártipte alınǵan hám noqattıń sıızıqtaǵı, tegisliktegi, betliktegi yamasa keńisliktegi awhalın xarakterleytuǵın sanlar.

Koordinatalar bası- koordinata kósherleriniń kesilisiw noqatı.

Lemma-bir yamasa bir neshe teoremanı dálillew ushın qollanılatuǵın járdemshi pikir.

Limit – eger ózgeriwshi shama óziniń ózgeriw payıtında a sanına sheksiz jıynalsa, onda a sanı x ózgeriwshiniń limiti.

Limit noqat - eger a noqattıń hár qanday dógereginde E kópliktiń a dan ózgeshe keminde bir noqatı bar bolsa, onda a noqatqa E kópliktiń limit noqatı dep ataladı.

Teorema – dálil talap etiwshi pikir.

Teńsizlik- teńsizlik belgisi menen ańlatılǵan eki algebrlıq ańlatpa.

Kópliktiń shegarası -bul kóplik shegaralıq noqatlarınıń toparı.

Menshiksiz integral – shegarası sheksiz yamasa integral astındaǵı funkciya ekinshi túr úziliske iye bolǵan integral.

Óz-ara bir mánisli sáykeslik – eki kóplik elementleri arasındaǵı sonday sáykeslik, bunda birinshi kópliktiń hár bir elementine ekinshi kópliktiń tek bir elementine sáykes keledi hám kerisinshe.

Funkciyanıń mánisler kópligi – ǵáressiz ózgeriwshiniń qabıl qılatuǵın mánisler kópligi.

Haqıyqıy sanlar-barlıq racional hám irracional sanlar.

ÁDEBIYATLAR

1. Azlarov. T., Mansurov. X., Matematik analiz. T.: «O'zbekiston». 1 t: 1994 y.-416 b.
2. Xudayberganov G., Vorisov A., Mansurov X., Shoimqulov B. Matematik analizdan maruzalar. I T.: «Vorishashriyot». 2010 y. – 374 b.
3. Toshmetov Ó., Turgunbayev R., Saydamatov E., Madirimov M. Matematik analiz, I-qism. T.: “Extremum-Press”, 2015. -408 b.
4. Sa'dullaev A. va boshq. Matematik analiz kursidan misol va masalalar to'plami. I qism. T.,«O'zbekiston». 2000 y.-400b.
5. Turgunbaev R.M. Matematikalıq analiz. I tom. T.: “Abu matbuot-konsalt”, 2014.-344b.
6. В.А.Ильин, В.А.Садовничий, Бл.Х.Сендов. Математический анализ. 1-ч.М. 1985.
7. Claudia Canuto, Anita Tabacco Mathematical analysis. I. Springer-Verlag. Italia, Milan. 2008.-435p.
8. Gaziyeu A., Israilov I., Yaxshibayeu M. “Matematik analizdan misol va masalalar” T.: “Yangi asr avlodi” 2006 y.
9. Toshmetov O', Turgunbayev R. Matematik analizdan misol va masalalar to'plami. 1-q. TDPU. 2006 y.-140 b.
10. Turgunbayev R.M., Koshnazarov R.A., Raximov I.K. Matematik analiz. Mustaqil ta'lim uchun metodik ko'rsatmalar. I semestr. T.: TDPU. 2013 y. – 56 b.

Internet saytlari

1. <http://vilenin.narod.ru/Mm/Books/>
2. <http://www.allmath.ru/>

MAZMUNÍ

Kirisiw.....	3
1- BAP. HAQÍYQÍY SANLAR	11
1- §. Kópik. Kópikler ústinde ámeler	11
2- §. Racional sanlar hám olardıń qásiyetleri	19
3- §. Haqıyqıy sanlar. Haqıyqıy sanlar kópliginiń qásiyetleri	25
4- §. Haqıyqıy sanlar kópliginiń tolıqlıǵı. Dedekind teoreması	28
5- §. Haqıyqıy sanlar ústinde arifmetikalıq ámeler hám olardıń qásiyetleri.	29
6- §. Haqıyqıy sannıń moduli hám onıń qásiyetleri	37
7- §. Haqıyqıy sanlardı geometriyalıq súwretlew	38
8- §. Shegaralanǵan sanlı kópikler	43
2- BAP. SANLÍ IZBE-IZLIK HÁM ONÍN LIMITI	49
1- §. Sanlı izbe-izlik	49
2- §. Izbe-izliktiń limiti	52
3- §. Jıynaqlı izbe-izliklerdiń qásiyetleri	54
4- §. Monoton izbe-izlikler.....	64
5- §. Monoton izbe-izliktiń limiti haqqındaǵı teoremalardıń qollarıwları.....	68
6- §. Úles izbe-izlikler. Bol`cano- Veyershtass teoreması.....	69
7- §. Fundamental izbe-izlikler. Izbe-izliktiń jıynaqlılıǵınıń Koshi kriteriysi	73
3- BAP. BIR ÓZGERIWSHILI FUNKCIYA HAM ONÍN LIMITI	77
1- §. Funkciya túsiniǵı	77
2- §. Funkciyanıń limiti	87
4- BAP. ÚZLIKSIZ FUNKCIYALAR	114
1- §. Úzliksiz funksiya túsiniǵı	114
2- §. Úzliksiz funksiylardıń lokal hám global qásiyetleri	127
3- §. Tiykarǵı elementar funksiylar hám olardıń úzliksizligi....	139

5- BAP. BIR ÓZGERIWSHILI FUNKCIYALAR USHÍN DIFFERENCIAL ESAP	159
1- §. Funkciyanıń tuwındısı	159
2- §. Funkciyanıń differenciallanıwshılıǵı	166
3- §. Ápiwayı elementar funkciyalardıń tuwındıları	179
4- §. Joqarı tártipli tuwındı hám differenciallar	185
5- §. Parametrli kóriniste berilgen funkciyanı differen- ciallaw	190
6- §. Differenciallanıwshı funkciyalar haqqındaǵı tiykargı teoremlar	191
7- §. Lopital qádesi	201
8- §. Teylor formulası	206
GLOSSARIY	219
ÁDEBIYATLAR	221

Z.B.Saparov, B.B. Prenov, B.M. Narekeev,
D.E. Mirzanova, A.G. Xodjaniyazov

MATEMATIKALÍQ ANALIZ

Redaktori:	A.Abdujalilov
Ko'rkem redaktori:	S. Abduvaliyev
Tex. Redaktori:	U. Vohidov
Operatori:	D. O'rinova

Licenziya: AI №190, berilgen vaqti 10.05.2011
Original-maketten bosiwğa ruqsat etildi 02.10.2019-j.
Formatı 60x84 $\frac{1}{16}$. Kegli 11,5. «Times New Roman»
garniturası. Ofset usılında basıldı. Kólemi 14,0 b.t.
13,02 shártli b.t. Nusqası 100 dana. Buyırtpa 03/10.

«Tafakkur-bo'stoni» baspası. 100190. Tashkent qalasi,
Yunusobod-9, 13-54. E-mail: yunusali_1987@mail.ru

«Tafakkur-bo'stoni» MCHJ baspa-poligrafiyasında
chop etildi. Tashkent qalasi, Chilonzor koshesi, 1.
Telefon: (890) 000-33-93