ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

МАМАНАЗАРОВ АЗИЗБЕК ОТАЖОН ЎҒЛИ

ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИК ВА АРАЛАШ ПАРАБОЛИК ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика

ФИЗИКА - МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ
бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
АВТОРЕФЕРАТИ

Фарғона – 2021

УДК: 517.95

Физика – математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико – математическим наукам

Content of dissertation abstract of Doctor of Philosophy (PhD) on Physical – Mathematical Sciences

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

МАМАНАЗАРОВ АЗИЗБЕК ОТАЖОН ЎҒЛИ

ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИК ВА АРАЛАШ ПАРАБОЛИК ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика

ФИЗИКА - МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ
бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
АВТОРЕФЕРАТИ

Фарғона – 2021

Физика - математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида №B 2021.3.PhD/FM627 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Фарғона давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (www.fdu.uz) ва «Ziyonet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Уринов Ахмаджон Кушакович** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Қодиркулов Бахтиёр Жалилович** физика-математика фанлари доктори(DSc), доцент
	Апаков Юсуфжон Пўлатович физика-математика фанлари доктори(DSc), доцент
Етакчи ташкилот:	Урганч давлат университети

Диссертация ҳимояси Фарғона давлат университети ҳузуридаги PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 рақамли Илмий кенгашнинг 2021 йил «29» 12 соат 10^{00} даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 150100, Фарғона шаҳар, Мураббийлар кўчаси, 19-уй. Тел.:(+99873) 244-44-02, факс: (+99873) 244-44-93, e-mail: fardu_info@umail.uz).

Диссертация билан Фарғона давлат университетининг Ахборот - ресурс марказида танишиш мумкин (142 рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 150100, Фарғона шаҳар, Мураббийлар кўчаси, 19- уй. Тел.:(+99873) 244-44-94.

Диссертация автореферати 2021 «18» 12 куни тарқатилди.

(2021 йил «__»_____ даги ______ рақамли реестр баённомаси).

Б.Т.Саматов
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси ўринбосари, ф.-м.ф.д., доцент

И.У.Хайдаров
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.н.

Ш.Т.Каримов
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси, ф.-м.ф.д., доцент

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертация аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган илмий-амалий тадқиқотлар кўп ҳолларда хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар, хусусан, аралаш типдаги дифференциал тенгламалар назарияси масалаларини ечишга келтирилади. Бунда аралаш параболо-гиперболик типдаги дифференциал тенгламалар ғовак муҳитда иссиқлик ва масса алмашинуви, бир жинсли бўлмаган муҳитда электромагнит майдонининг тарқалиши, иссиқлик майдонининг шаклланиши, ёпишқоқ-эластик ва ёпишқоқ суюқликлар ҳаракати масалаларининг, аралаш параболик типдаги дифференциал тенгламалар эса ёпишқоқлик коэффициенти ўзгарувчан суюқликлар ҳаракати масалаларининг математик модели сифатида қабул қилинади. Шунинг учун аралаш параболо-гиперболик ва аралаш параболик тенгламалар учун чегаравий масалалар қўйиш ва уларни ечиш хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назариясининг устувор йўналишларидан бири ҳисобланади.

Ҳозирги вақтда жаҳонда хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар, айниқса, аралаш типдаги тенгламалар учун асосий чегаравий масалалар билан бир қаторда янги локал ва нолокал масалаларни ўрганиш муҳим аҳамият касб этмоқда. Бу борада, тип ўзгариш чизиғи характеристика бўлмаган параболо-гиперболик тенгламалар учун нолокал масалалар қўйишга ва текширишга, сингуляр коэффициентли аралаш параболик тенгламалар учун чегаравий масалаларни ўрганишга, аралаш параболик тенгламаларнинг янги синфларини аниқлашга ва уларга коррект масалалар қўйишга ҳамда текширишга алоҳида эътибор берилмоқда. Мазкур илмий йўналишлар бўйича ҳозиргача олиб борилган илмий тадқиқотлар ушбу диссертация мавзусининг долзарблигини асослайди.

Мамлакатимизда ҳозирги вақтда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий тадбиқларга эга бўлган долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилмоқда. Жумладан, математик физиканинг ноклассик тенгламалари, хусусан, аралаш типдаги дифференциал тенгламаларни ва уларга мос ноклассик масалаларни ўрганишни жадаллаштиришга алоҳида эътибор қаратилмоқда. Дифференциал тенгламалар ва математик физика, динамик системалар ва оптимал бошқарув, амалий математика ва математик моделлаштириш, математик анализ ва функциялар назарияси, эҳтимоллар назарияси ва математик статистика, алгебра ва геометрия фанларининг устувор йўналишлари бўйича ҳалқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математик олимларнинг асосий вазифалари ва фаолият йўналишлари этиб белгилаб берилган[1]. Бу вазифалар ижросини таъминлашда хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар, хусусан, аралаш параболо-гиперболик ва аралаш параболик тенгламалар учун асосий

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш чора-тадбирлари тўғрисида” ги 292-сон қарори

(анъанавий) чегаравий масалалар билан бирга янги коррект нолокал масалалар қўйиш ва тадқиқ қилиш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон "Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида", 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909-сон "Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида", 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон "Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида" ва 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон "Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида"ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур диссертация республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. "Математика, механика ва информатика" устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. И.М.Гельфанд ғовак муҳит билан ўралган каналда газнинг ҳаракатини ўрганишда параболо-гиперболик тенгламалар учун масалалар ўрганиш зарурияти пайдо бўлишини кўрсатиб берган. Шунингдек, Я.С.Уфлянд мураккаб электр тармоқларида тебранишларнинг тарқалиши масалаларини ўрганишда ҳам параболо-гиперболик тенглама учун масалага келган.

Параболо-гиперболик тенгламалар учун чегаравий ва бошланғич чегаравий масалалар ўрганиш бўйича тизимли тадқиқотлар ўтган асрнинг 60-йилларидан бошланди. Бундай тенгламалар учун масалалар ўрганишга бағишланган дастлабки ишлар қаторига Г.М.Стручина, С.И.Гайдук ва А.Иванов, О.А. Ладыженская ва Л.Ступлялис, Л.А.Золиналарнинг ишларини келтириш мумкин. Кейинчалик, параболо–гиперболик тенгламалар учун фундаментал натижалар учинчи тартибли тенгламалар учун М.С.Салаҳитдинов, Т.Д.Джураевлар томонидан олинган бўлса, иккинчи тартибли тенгламалар учун эса А.М.Нахушев, В.А.Врагов, Н.Ю.Капустинлар томонидан олинди. Ҳозирги вақтда иккинчи ва учинчи тартибли параболо-гиперболик тенгламалар учун кўп сонли ишлар мавжуд. Хусусан, Ж.О.Тохиров, А.Сопуев, А.С.Бердышев, Б.Исламов, О.А.Репин, А.В.Псху, К.Б.Сабитов, М.А.Садыбеков, Э.Т.Каримов, В.А.Елеев, А.К.Уринов, Ю.П.Апаков, У.И.Балтаева, А.М.Нагорный ва бошқалар тип ўзгариш чизиғи характеристика бўлган параболо-гиперболик тенгламалар учун локал ва нолокал чегаравий масалалар тадқиқ қилган бўлса, А.С.Бердышев, К.Б.Сабитов, М.А.Садыбеков, Э.Т.Каримов, А.К.Уринов, И.У.Ҳайдаровлар томонидан бундай тенгламалар учун турли чегаравий масалаларнинг спектрал хоссалари ўрганилган. Тип ўзгариш чизиғи характеристика бўлмаган параболо-гиперболик тенгламалар учун чегаравий масалалар Т.Д.Джураев, В.А.Елеев, Н.Ю.Капустин, А.С.Бердышев, Э.Т.Каримов, О.А.Репин, С.Б.Ефимова, М.Мамажонов, Д.Халмуратов, Ю.П.Апаков ва бошқалар томонидан тадқиқ қилинган. Жумладан, Т.Д.Джураев параболо-гиперболик тенгламалар учун юқори ярим текисликда Коши масаласини ва тўғри тўртбурчакда бошланғич-чегаравий масалани ўрганган. В.А.Елеев иккинчи тартибли чизиқли умумий параболо-гиперболик тенглама ва унинг хусусий ҳоллари учун Трикоми масаласига ўхшаш масалаларни ўрганган. Н.Ю.Капустин бир параболо-гиперболик тенглама учун Трикоми масаласини спектрал метод билан ечган. А.С.Бердышев ва Э.Т.Каримов спектрал параметрли параболо-гиперболик тенглама учун Бицадзе-Самарский шартли нолокал масалаларни тадқиқ қилган. О.А.Репин ва С.Б. Ефимовалар Бицадзе-Лыков операторини ўз ичига олувчи параболо-гиперболик тенглама учун Сайго оператори ёрдамида силжишли масала қўйган ва ўрганган. М.Мамажонов ва Д.Халмуратов учинчи тартибли чизиқли умумий параболо-гиперболик тенглама учун чегаравий масалалар баён қилган ва текширган. Ю.П.Апаков уч ўлчовли фазода иккита параллел нохарактеристик тип ўзгариш текисликларига эга бўлган параболо-гиперболик тенглама учун Трикоми масаласини тадқиқ қилган. Шунга қарамай тип ўзгариш чизиғи характеристика бўлмаган сингуляр коэффициентли ва спектрал параметрли параболо-гиперболик тенгламалар учун интеграл шарт ва силжишли шарт берилган нолокал масалалар нисбатан кам ўрганилган.

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг муҳим синфларидан яна бири аралаш параболик тенгламалардир. Аралаш параболик тенгламалар бўйича тадқиқотлар француз математиги М.Жевре ишларидан бошланган. Кейинчалик итальян математиклари C.D.Pagani ва G.Talenti томонидан иккинчи тартибли параболо-гиперболик тенгламалар учун турли масалалар ўрганилган, А.М.Нахушев эса ишораси алмашинувчи характеристик формани ўз ичига олувчи параболик тенгламалар учун коррект чегаравий масалалар қўйиш усулларини таклиф этган.

А.А. Керефов дастлаб текисликда модел аралаш параболик тенглама учун, кейинчалик n ўлчовли фазода чизиқли умумий аралаш параболик тенглама учун Жевре масаласини тадқиқ қилган, С.А.Терсенов эса $n+m$ ўлчовли фазода n та ўзгарувчи бўйича Лаплас операторини, қолган m та ўзгарувчи бўйича Бессел операторини ўз ичига олувчи ва йўналишлари ўзгарувчи аралаш параболик тенглама учун чегаравий масалалар қўйган ва тадқиқ этган. Шунингдек, иккинчи тартибли аралаш параболик тенгламалар учун чегаравий масалалар тадқиқоти билан М.Акбарова, С.В.Попов, И.Е.Егоров, Н.В. Кислов, М.С.Туласынов ва бошқалар ҳам шуғулланганлар.

Т.Д.Джураев, Ю.Иргашев ва С.В.Попов томонидан учинчи тартибли аралаш параболик тенгламалар учун чегаравий масалалар тадқиқ қилинган бўлса, С.В.Попов ва Дж.Аманов томонидан тўртинчи ва юқори жуфт тартибли шундай тенгламалар учун масалалар ўрганилган.

Сўнгги вақтларда тадқиқотчилар томонидан каср тартибли дифференциал операторларни ўз ичига олувчи аралаш параболик тенгламалар учун масалалар қўйилмоқда ва тадқиқ этилмоқда. Бундай тенгламалар билан С.Х.Геккиева, Б.Ж.Қодирқулов, Дж.Аманов ва бошқалар шуғулланганлар.

Шуни таъкидлаб ўтиш керакки, ҳозирги вақтгача олиб борилган тадқиқотларда фақатгина вақт йўналишлари қарама-қарши бўлган аралаш параболик тенгламалар учун чегаравий масалалар ўрганилган бўлиб, вақт йўналишлари перпендикуляр бўлган тенгламалар учун масалалар ўрганилмай қолмоқда.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий – тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Фарғона давлат университети илмий-тадқиқот ишлари режасига мувофиқ "Дифференциал тенгламалар ва унга турдош математик соҳаларнинг долзарб муаммолари" дастури доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади иккинчи тартибли параболо-гиперболик ва аралаш параболик типдаги дифференциал тенгламалар учун масалалар қўйиш ва ўрганишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари қуйидагилардан иборат:

тип ўзгариш чизиғи характеристика бўлмаган параболо-гиперболик типдаги модел тенгламалар учун интеграл шарт ва силжишли шарт берилган нолокал масалаларни баён қилиш ва ўрганиш;

сингуляр коэффициент ва спектрал параметрга эга бўлган тип ўзгариш чизиғи характеристика бўлмаган параболо-гиперболик тенгламалар учун силжишли шарт берилган нолокал масалаларни баён қилиш ва ўрганиш;

вақт йўналишлари қарама-қарши бўлган бутун тартибли аралаш параболик тенглама учун умумий улаш шарти берилган Жевре масаласини ўрганиш;

вақт йўналишлари перпендикуляр бўлган бутун тартибли аралаш параболик тенгламалар учун чегаравий масалалар қўйилишини аниқлаш ва ўрганиш;

каср тартибли аралаш параболик тенгламалар учун чегаравий масалалар қўйилишини аниқлаш ва ўрганиш.

Тадқиқотнинг объекти иккинчи тартибли параболо-гиперболик ва аралаш параболик типдаги дифференциал тенгламалар ҳисобланади.

Тадқиқотнинг предмети иккинчи тартибли параболо-гиперболик ва аралаш параболик типдаги дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалардан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертация ишида энергия интеграли, экстремум принципи ва интеграл тенгламалар усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

тип ўзгариш чизиғи характеристика бўлмаган модел параболо-гиперболик тенгламалар учун интеграл шарт ва силжишли шарт берилган нолокал масалаларнинг бир қийматли ечилиши асосланган;

сингуляр коэффициент ва спектрал параметрга эга бўлган тип ўзгариш чизиғи характеристика бўлмаган параболо-гиперболик тенглама учун силжишли шарт берилган нолокал масалаларнинг бир қийматли ечилишини таъминловчи етарли шартлар аниқланган;

вақт йўналишлари қарама-қарши бўлган сингуляр коэффициентли бутун тартибли аралаш параболик тенглама учун умумий улаш шарти берилган Жевре масаласи ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган;

вақт йўналишлари перпендикуляр бўлган бутун тартибли аралаш параболик тенглама учун Трикоми масаласининг қўйилиши аниқланган ва қўйилган масаланинг бир қийматли ечилиши исботланган;

каср тартибли аралаш параболик тенгламалар учун чегаравий масалалар ечимларининг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

сингуляр коэффициент ва спектрал параметрга эга бўлган иккинчи тартибли параболо-гиперболик тенгламалар учун силжишли шарт берилган нолокал масалаларнинг бир қийматли ечилиши бўйича олинган натижалардан фойдаланиб, кимёвий кинетика назариясининг бузиладиган сингуляр тенгламалари учун баъзи силжишли шарт берилган чегаравий масалалар ечимларини топиш мумкинлиги асосланган;

иккинчи тартибли параболо-гиперболик тенгламалар учун интеграл шартли масалаларнинг корректлиги бўйича олинган натижалар ёрдамида учинчи тартибли тенгламалар учун чегаравий масалаларни функционал фазоларда кучли ечилишини тадқиқ қилиш мумкинлиги исботланган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги энергия интеграли, экстремум принципи ва интеграл тенгламалар усулларидан фойдаланиб, дедуктив хулосалар қабул қилинганлиги ҳамда теоремаларнинг қатъий ва тўлиқ исботланганлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти олинган илмий хулосалар хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назариясининг кейинги ривожида фойдаланилиши мумкинлиги билан асосланган.

Диссертация ишининг амалий аҳамияти сингуляр коэффициент ва спектрал параметрга эга бўлган параболо-гиперболик тенгламалар учун силжишли шарт берилган масалалар тадқиқоти методларидан фойдаланиб, Бессел тенгламасининг тебраниш асимптотикасини қуриш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Параболо-гиперболик ва аралаш параболик тенгламалар учун чегаравий масалаларни тадқиқ қилиш бўйича олинган натижалар асосида:

иккинчи тартибли параболо-гиперболик тенгламалар учун нолокал масалалар тадқиқоти натижалари “Математик физиканинг ноклассик тенгламалари учун чегаравий масалаларнинг корректлигини текшириш” (Қозоғистон Республикаси Таълим ва фан вазирлиги Фан қўмитасининг ёш олимлар танлови, 2021-2023 йй. 2021 йил 5 мартдаги №97КМУ2-рақамли шартномаси, AP 09058677) мавзусидаги халқаро лойиҳада учинчи тартибли дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларни ўрганишда фойдаланилган (Абай номидаги Қозоқ Миллий педагогика университетининг 2021 йил 5 октябрдаги №15-15-10-02-11/1793 рақамли маълумотномаси). Натижада, иккинчи ва учинчи тартибли параболо-гиперболик тенгламалар учун бир нечта чегаравий масалаларнинг функционал фазоларда кучли ечимининг мавжудлигини исботлаш имконини берган;

сингуляр коэффициентли параболо-гиперболик тенгламалар учун нолокал масалалар ва уларни тадқиқ қилиш усуллари "Кимёвий кинетика назариясининг бузиладиган сингуляр тенгламалари ва Бессел тенгламаси ечимининг тебраниш асимптоталарини қуриш" мавзусидаги халқаро лойиҳада фойдаланилган (Ўш давлат университети қошидаги Фундаментал ва амалий тадқиқотлар институтининг 2021 йил 10 ноябрдаги №1423 рақамли маълумотномаси). Натижада, кимёвий кинетика назарияси масалаларини баён қилиш ва ўрганиш ҳамда уларни амалий масалаларда татбиқ қилиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Диссертациянинг асосий натижалари 3 та халқаро ва 2 та республика илмий ва илмий – амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 15 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 10 та мақола, жумладан, 3 таси хорижий ва 7 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш, учта боб, хулоса ва адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг умумий ҳажми 129 бетдан иборат.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«Параболо-гиперболик тенгламалар учун интеграл шарт ва силжишли шарт берилган масалалар»** деб номланган биринчи боби иккита параграфдан иборат бўлиб, чегараланган аралаш $D = D_0 \cup D_1 \cup D_2$ соҳада тип ўзгариш чизиғи характеристика бўлмаган параболо-гиперболик тенгламалар учун нолокал масалалар баён қилиш ва ўрганишга бағишланган, бу ерда

$$D_0 = \{(x,t): x=0,\ 0<t<T\},\ D_1 = \{(x,t): 0<x<q,\ \ 0<t<T\},$$

$$D_2 = \{(x,t): -x<t<T+x,\ (-T/2)<x<0\},\ q = const>0,\ T = const>0.$$

1.1-параграфда параболо-гиперболик типга тегишли ушбу

$$u_{xx} - \frac{1}{2}(1 - sign x)u_{tt} - \frac{1}{2}(1 + sign x)u_t = 0 \qquad (1)$$

тенглама учун D соҳада қуйидаги масалалар тадқиқ қилинган:

I_1 **масала.** *Шундай* $u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C_{x,t}^{2,1}(D_1) \cap C_{x,t}^{2,2}(D_2)$ *функция топилсинки, у* $D \setminus D_0$ *соҳада (1) тенгламани,* D_0 *кесмада ушбу улаш шартини*

$$\lim_{x\to -0} u_x(x,t) = \lim_{x\to +0} u_x(x,t), \qquad t \in (0,T), \qquad (2)$$

D *соҳа чегарасида эса қуйидаги чегаравий шартларни*

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \qquad x \in [0,q]; \qquad (3)$$

$$\int_0^q u(x,t)\,dx = \int_0^t g(\eta)u(q,\eta)\,d\eta + \varphi_1(t), \qquad t \in [0,T]\ ; \qquad (4)$$

$$\alpha(t)\frac{d}{dt}u\left(-\frac{t}{2},\frac{t}{2}\right) + \beta(t)\frac{d}{dt}u\left(\frac{t-T}{2},\frac{t+T}{2}\right) = \gamma(t),\ t \in (0,T)$$

қаноатлантирсин, бу ерда $\varphi_0(x)$, $g(t)$, $\varphi_1(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ *– берилган узлуксиз функциялар бўлиб,* $\alpha^2(t) + \beta^2(t) \neq 0$, $t \in [0,T]$; $\int_0^q \varphi_0(x)\,dx = \varphi_1(0)$.

I_2 **масала.** *Шундай* $u(x,t)$ *функция топилсинки, у* I_1 *масала шартларини, (4) шарт қуйидаги*

$$\int_0^q u(x,t)\,dx = u(q,t) + \varphi_1(t), \qquad t \in [0,T] \tag{5}$$

шартга алмаштирилган ҳолда қаноатлантирсин, бу ерда $\varphi_0(x)$ *ва* $\varphi_1(t)$ *берилган функциялар* $\int_0^q \varphi_0(x)\,dx = \varphi_0(q) + \varphi_1(0)$ *шартни қаноатлантиради.*

1.1-параграфнинг асосий натижалари қуйидаги теоремалар ҳисобланади:

1-теорема. *Ушбу* $g(t) \in C^1[0,T] \cap C^2(0,T)$, $\varphi_0(x) \in C^2[0,q] \cap C^3(0,q)$, $\varphi_1(t) \in C^2[0,T] \cap C^3(0,T)$, $\varphi_1'(0) - \varphi_0'(q) + \varphi_0'(0) + \varphi_0(q)g(0) = 0$ *шартлар ва қуйидаги шартлар гуруҳидан бири бажарилсин:*

I. $\alpha(t) - \beta(t) \equiv 0$, $\alpha(t) + \beta(t) \neq 0$, $t \in [0,T]$;

$$\alpha(t),\ \beta(t) \in C^1[0,T],\ \gamma(t) \in C^1(0,T) \cap L_2[0,T]; \tag{6}$$

II. $\alpha(t) - \beta(t) \neq 0$, $\alpha(t) + \beta(t) \equiv 0$, $t \in [0,T]$; $\alpha(t)$, $\beta(t) \in C^2[0,T]$,

$$\gamma(t) \in C[0,T] \cap C^2(0,T),\ \gamma'(t) \in L_2[0,T],$$

$$\varphi_0'(0) + 2\gamma(0)\left[\alpha(0) - \beta(0)\right]^{-1} = 0; \tag{7}$$

III. $\alpha(t) + \beta(t) \neq 0$, $\alpha(t) - \beta(t) \neq 0$, $t \in [0,T]$ *;(6).*

У ҳолда I_1 *масала ягона ечимга эга.*

2-теорема. *Ушбу* $\varphi_1(t) \in C[0,T] \cap C^2(0,T)$, $\varphi_1'(t) \in L_2[0,T]$ *шартлар ва қуйидаги шартлар гуруҳидан бири бажарилсин:*

I. $\alpha(t) - \beta(t) \equiv 0$, $\alpha(t) + \beta(t) \neq 0$, $t \in [0,T]$; $\alpha(t)$, $\beta(t) \in C^1[0,T]$,

$\gamma(t) \in C^1[0,T] \cap L_2[0,T]$; $\varphi_0(x) \in C^2[0,q]$;

II. $\alpha(t) - \beta(t) \neq 0$, $\alpha(t) + \beta(t) \equiv 0$, $t \in [0,T]$ *; (7) шарт,*

$$\alpha(t), \beta(t) \in C^2[0,T], \gamma(t) \in C[0,T] \cap C^2(0,T),\ \gamma'(t) \in L_2[0,T];$$

$$\varphi_0(x) \in C^1[0,q] \cap C^3(0,q),\quad \varphi_0''(x) \in L[0,q];$$

III. $\alpha(t) - \beta(t) \neq 0$, $\alpha(t) + \beta(t) \neq 0$, $t \in [0,T]$; $\alpha(t)$, $\beta(t) \in C^1[0,T]$,

$\gamma(t) \in C^1(0,T) \cap L_2[0,T]$; $\varphi_0(x) \in C[0,q] \cap C^2(0,q)$, $\varphi_0'(x) \in L_2[0,q]$.

У ҳолда I_2 *масала ягона ечимга эга.*

1.2-параграфда D соҳада ушбу тенглама қаралган:

$$u_{xx} - \frac{1}{2}(1 - signx)u_{tt} - \frac{1}{2}(1 + signx)u_t - \lambda^2 u = 0, \tag{8}$$

бу ерда D_1 да $\lambda = \lambda_1$ ва D_2 да $\lambda = \lambda_2$, λ_1 ва λ_2 лар эса $R \setminus \{0\}$ га тегишли берилган сонлар.

D соҳада (8) тенглама учун қуйидаги масалалар тадқиқ қилинган:

$\tilde{I}_1$ **масала.** *Шундай* $u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C_{x,t}^{2,1}(D_1) \cap C_{x,t}^{2,2}(D_2)$ *функция топилсинки, у* $D \setminus D_0$ *соҳада (8) тенгламани, (2), (3), (4) ва қуйидаги*

$$a(t)A_{0t}^{1,\lambda_2}\left[\frac{d}{dt}u\left(-\frac{t}{2},\frac{t}{2}\right)\right]+b(t)A_{1t}^{1,\lambda_2}\left[\frac{d}{dt}u\left(\frac{t-T}{2},\frac{t+T}{2}\right)\right]+$$
$$+c(t)\lim_{x\to-0}u_x(x,t)=f(t),\ \ 0<t<T \qquad (9)$$

шартларни қаноатлантирсин, бу ерда $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(t)$, $g(t)$, $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $f(t)$ *–берилган функциялар бўлиб,* $a^2(t)+b^2(t)+c^2(t)\neq 0$, $\int_0^q \varphi_0(x)dx=\varphi_1(0)$;

$A_{mt}^{1,\lambda}$ *– маълум оператор:*

$$A_{kt}^{s,\lambda}\left[\omega(t)\right]=\omega(t)-\int_k^t \omega(z)\left(\frac{z-k}{t-k}\right)^s\frac{\partial}{\partial z}J_0\left[\lambda\sqrt{(t-k)(t-z)}\right]dz,\ \ s=\overline{0,1}, \qquad (10)$$

$J_m(z)$ *эса m тартибли биринчи тур Бессел функцияси,* $m\in R$.

$\tilde{I}_2$ **масала.** *Шундай* $u(x,t)$ *функция топилсинки, у* $\tilde{I}_1$ *масала шартларини, (4) шарт (5) шартга алмаштирилган ҳолда қаноатлантирсин, бу ерда ушбу* $\int_0^q \varphi_0(x)dx=\varphi_0(q)+\varphi_1(0)$ *келишув шарти бажарилади.*

1.2- параграфнинг асосий натижалари қуйидаги теоремалардан иборат:

3-теорема. *Ушбу* $\varphi_0(x)\in C^2[0,q]\cap C^3(0,q)$, $\varphi_1(t)\in C^2[0,T]\cap C^3(0,T)$, $g(t)\in C^1[0,T]\cap C^2(0,T)$, $\varphi_1'(0)-\varphi_0'(0)+\varphi_0'(q)+\varphi_0(q)g(0)+\lambda_1^2\varphi_1(0)=0$ *шартлар ва қуйидаги шартлар гуруҳидан бири бажарилсин:*

I. $a(t)-b(t)-2c(t)\equiv 0$, $a(t)+b(t)\neq 0$, $t\in[0,T]$; $a(t)$, $b(t)$, $c(t),f(t)$ $\in C[0,T]\cap C^2(0,T)$, $a(T)+b(T)>0(<0)$, $a(T)-b(0)\geq 0(\leq 0)$, $a'(t)\leq 0(\geq 0)$, $b'(t)\leq 0(\geq 0)$, $t\in[0,T]$, *сўнгги уч шартлардан камида биттасида қатъий тенгсизлик бажарилади;*

II. $a(t)\neq 0$, $b(t)\equiv 0$, $a(t)-2c(t)\neq 0, t\in[0,T]$; $a(t),c(t)\in C^1[0,T]$, $f(t)\in C^1(0,T)\cap L_2[0,T]$.

У ҳолда $\tilde{I}_1$ *масала ягона ечимга эга бўлади.*

4-теорема. Ушбу $\varphi_0(x)\in C^2[0,q]$, $\varphi_1(t)\in C^1[0,T]\cap C^2(0,T)$ $\varphi_1'(t)\in L_2[0,T]$ *шартлар ва қуйидаги шартлар гуруҳидан бири бажарилсин:*

I. 3-теореманинг биринчи гуруҳ шартлари;

II. $b(t)\equiv 0$, $a(t)-2c(t)\neq 0$, $t\in[0,T]$; $a(t)$, $b(t)$, $c(t)\in C^1[0,T]$, $f(t)\in C^1(0,T)\cap L_2[0,T]$.

У ҳолда $\tilde{I}_2$ *масала ягона ечимга эга.*

Диссертациянинг **«Параболо-гиперболик тенгламалар учун силжишли масалалар»** деб номланган иккинчи боби тўртта параграфдан иборат бўлиб, чегараланмаган $Q=Q_0\cup Q_1\cup Q_2$ соҳада тип ўзгариш чизиғи характеристика бўлмаган параболо-гиперболик тенгламалар учун силжишли шарт берилган масалалар баён қилиш ва ўрганишга бағишланган, бу ерда

$$Q_0=\{(x,t): x=0, 0<t<T\},\ Q_1=\{(x,t): 0<x<+\infty,\ 0<t<T\},$$
$$Q_2=\{(x,t): -T/2<x<0,\ -x<t<x+T\};\ T=const>0.$$

2.1-параграфда Q соҳада ушбу тенглама

$$0=Lu\equiv\begin{cases}L_1u\equiv u_{xx}+(k/x)u_x-u_t-\lambda_1^2u, (x,t)\in Q_1;\\ L_2u\equiv u_{xx}-u_{tt}-\lambda_2^2u,\quad (x,t)\in Q_2\end{cases}\tag{11}$$

қаралган ва қуйидаги масала тадқиқ қилинган, бу ерда $k,\lambda_1,\lambda_2\in R$, $k\in(0;1)$.

H_1 **масала**. *Шундай* $u(x,t)\in C(\overline{Q})\cap C_{x,t}^{2,1}(Q_1)\cap C_{x,t}^{2,2}(Q_2)$ *функция топилсинки, у* Q_1 *ва* Q_2 *соҳаларда (11) тенгламани,* Q_0 *тип ўзгариш чизиғида*

$$\lim_{x\to+0}x^ku_x(x,t)=\lim_{x\to-0}u_x(x,t),\quad 0<t<T\tag{12}$$

улаш шартини, Q *соҳа чегарасида эса қуйидаги чегаравий шартларни*

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad 0\le x<+\infty;\qquad \lim_{x\to+\infty}u(x,t)=0,\quad 0\le t\le T;\tag{13}$$
$$a(t)A_{0t}^{0,\lambda_2}\left[u\left(-\frac{t}{2},\frac{t}{2}\right)\right]+b(t)A_{tT}^{0,\lambda_2}\left[u\left(\frac{t-T}{2},\frac{t+T}{2}\right)\right]+c(t)u(0,t)=f(t),\quad 0<t<T$$

қаноатлантирсин, бу ерда $\varphi(x)$, $a(t), b(t), c(t), f(t)-$ *берилган функциялар бўлиб,* $a^2(t)+b^2(t)+c^2(t)\neq0$, $t\in[0,T]$; $A_{kt}^{0,\lambda}$ *–(10) кўринишдаги оператор,* $\overline{Q}=Q\cup\partial Q$.

Бу ерда қуйидаги икки ҳол қаралган:

1^0. $a(t)+b(t)+2c(t)\neq0$, $a(T)=0$, $b(0)=0$, $\varphi(0)=f(0)/[c(0)+a(0)]$; (14)

2^0. $a(t)+b(t)+2c(t)\equiv0$, $a(T)=0$, $b(0)=0$, $\varphi(0)=-f(0)/c(0)$. (15)

2.1-параграфнинг асосий натижалари қуйидаги теоремалар ҳисобланади:

5-теорема. *(14) ва қуйидаги шартлар бажарилган бўлсин:*

$$a(t),b(t),c(t),f(t)\in C^1[0,T]\cap C^2(0,T),\ \varphi(x)\in C^2[0,+\infty);$$
$\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ *ва* $\varphi''(x)$ *функциялар* $[0,+\infty)$ *да чегараланган;*

$$\{a(t)/[a(t)+b(t)+2c(t)]\}'\le0,\ \{b(t)/[a(t)+b(t)+2c(t)]\}'\ge0.$$

У ҳолда H_1 *масала ягона ечимга эга.*

6-теорема. *(15) ва қуйидаги шартлар бажарилган бўлсин:*

$$a'(t)b'(t)>0,\ t\in(0,T);\ a(t)\neq b(t), t\in[0,T];$$
$$a(t), b(t), c(t), f(t)\in C^1[0,T],\ \varphi(x)\in C^2[0,+\infty);$$
$\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ *ва* $\varphi''(x)$ *функциялар* $[0,+\infty)$ *да чегараланган.*

У ҳолда H_1 *масала ягона ечимга эга.*

2.2-параграфда Q соҳада қуйидаги масала ўрганилган:

H_2 **масала**. *Шундай* $u(x,t)\in C(\overline{Q})\cap C_{x,t}^{2,1}(Q_1)\cap C_{x,t}^{2,2}(Q_2)$ *функция топилсинки, у* Q_1 *ва* Q_2 *соҳаларда (11) тенгламани,* Q_0 *тип ўзгариш чизиғида*

(12) улаш шартини, Q соҳа чегарасида эса (13) ва (9) шартларни қаноатлантирсин.

Бу ерда қуйидаги ҳоллар алоҳида-алоҳида қаралган:

$$1)\ b(t)-a(t)+2c(t)\neq 0,\ a(t)+b(t)\neq 0,\ 0\leq t\leq T; \tag{16}$$

$$2)\ b(t)-a(t)+2c(t)\equiv 0,\ a(t)+b(t)\neq 0,\ 0\leq t\leq T; \tag{17}$$

$$3)\ b(t)-a(t)+2c(t)\neq 0,\ a(t)+b(t)\equiv 0,\ 0\leq t\leq T. \tag{18}$$

Қуйидаги теоремалар исботланган:

7-теорема. *(16) ва қуйидаги шартлар бажарилган бўлсин:*

$$\alpha'(t)\leq 0,\ \beta'(t)\leq 0,\ t\in[0,T];\ \alpha(T)+\beta(T)\geq 0,\ \alpha(T)-\beta(0)\geq 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} a(t),\ b(t),\ c(t),\ f(t)\in C[0,T]\cap C^2(0,T),\ \varphi(x)\in C[0,+\infty)\cap C^2(0,+\infty), \\ \varphi(x),\ \varphi'(x), \varphi''(x)\ \textit{функциялар}\ [0,+\infty)\textit{да чегараланган}, \end{array}\right\}, \tag{19}$$

бу ерда $\alpha(t)=a(t)/[a(t)-b(t)-2c(t)],\quad \beta(t)=b(t)/[a(t)-b(t)-2c(t)]$.

У ҳолда H_2 масала ягона ечимга эга.

8-теорема. *(17), (19) ва қуйидаги шартлар бажарилган бўлсин:* $a(T)+b(T)>0(<0),\ a(T)-b(0)\geq 0(\leq 0);\ a'(t)\leq 0(\geq 0),\ b'(t)\leq 0(\geq 0),\ t\in[0,T]$, *сўнгги уч шартларнинг камида биттасида қатьий тенгсизлик бажарилади.*

У ҳолда H_2 масала ягона ечимга эга.

9-теорема. *(18), (19) ва* $\lambda_2=0$ *ёки* $c(t)\neq 0,\ \ b(t)=mc(t),\ \ m\in R\setminus(0,1]$ *шартлар бажарилган бўлсин. У ҳолда H_2 масала ягона ечимга эга.*

2.3- параграфда Q соҳада ушбу тенглама

$$L_\lambda^{(k)}u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{k}{x}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial^{2-H(x)}u}{\partial t^{2-H(x)}}-\lambda^2 u=0 \tag{20}$$

қаралган ва қуйидаги масала ўрганилган, бу ерда $H(x)$–Хевисайд функцияси, $k=const\in(0,1)$.

$\tilde{H}_1$ **масала.** *Шундай* $u(x,t)\in\bigcap\limits_{j=1}^{2}\left[C(\bar{Q}_j)\ \cap C_{x,t}^{2,j}(Q_j)\right]$ *функция топилсинки, у Q_1 ва Q_2 соҳаларда (20) тенгламани, Q_0 тип ўзгариш чизиғида*

$$u(-0,t)=u(+0,t),\ 0\leq t\leq T;\ \lim_{x\to -0}(-x)^k u_x(x,t)=\lim_{x\to +0}x^k u_x(x,t),\quad 0<t<T \tag{21}$$

улаш шартларини, Q соҳа чегарасида эса қуйидаги

$$u(x,0)=\varphi(x),\ 0\leq x<+\infty;\ \lim_{x\to+\infty}u(x,t)=0,\ 0\leq t\leq T, \tag{22}$$

$$a(t)\,A_{0t}^{1,\lambda}D_{0t}^{k/2}\left[t^{k-1}u\left(-\frac{t}{2},\frac{t}{2}\right)\right]+b(t)\,A_{Tt}^{1,\lambda}D_{Tt}^{k/2}\left[(T-t)^{k-1}u\left(\frac{t-T}{2},\frac{t+T}{2}\right)\right]+$$
$$+c(t)u(0,t)=\psi(t),\qquad 0<t<T$$

шартларни қаноатлантирсин, бу ерда $\varphi(x), a(t),\ b(t),\ c(t), \psi(t)$ *– берилган функциялар бўлиб,* $a^2(t)+b^2(t)+c^2(t)\neq 0,\ t\in[0,T]$; $A_{mt}^{s,\lambda}$ *ва* D_{mt}^{α} *операторлар (10) ва ушбу формула билан аниқланган:*

$$D_{mt}^{\alpha}\left[g(t)\right]\equiv\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_m^t|t-z|^{-\alpha}g(z)dz,\quad 0<\alpha<1. \tag{23}$$

Бу ерда қуйидаги ҳоллар қаралган:

I. $p(t)\neq 0, t\in[0,T]$; II. $p(t)\equiv 0,\ t\in[0,T]$,

бу ерда $p(t)=a(t)(T-t)^{1-k/2}+b(t)t^{1-k/2}+\left[\Gamma(k/2)/\Gamma(k)\right]\left[t(T-t)\right]^{1-k/2}c(t)$.

I. $p(t)\neq 0, t\in[0,T]$ бўлсин. Бундан эса $t=T$ ва $t=0$ ларда $b(T)\neq 0$, $a(0)\neq 0$ эканлиги келиб чиқади. Қуйидаги лемма ўринли:

1-лемма. *Агар $u(x,t)$ – $\tilde{H}_1$ га мос бир жинсли масаланинг ечими ва $\lim\limits_{x\to 0}|x|^k u_x(x,t)\in L_2[0,T]$ бўлса, у ҳолда*

$$p(t)\neq 0,\qquad \left[a(t)(T-t)^{1-k/2}/p(t)\right]'\leq 0,\qquad \left[b(t)t^{1-k/2}/p(t)\right]'\geq 0,\qquad t\in[0,T]$$

шартлар бажарилганда, $\lim\limits_{x\to 0}|x|^k u_x(x,t)=0,\ t\in[0,T]$ тенглик ўринли бўлади.

10-теорема. *Агар 1-лемманинг шартлари бажарилган бўлса, у ҳолда $\tilde{H}_1$ масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

11-теорема. *1-лемма шартлари ва қуйидаги шартлар бажарилган бўлсин:*

$$a(t)=(T-t)^{\varepsilon+k/2}\tilde{a}(t),\ \ b(t)=t^{\varepsilon+k/2}\tilde{b}(t),\ \ c(t)=\left[t(T-t)\right]^{\varepsilon+k/2}\tilde{c}(t),\ \varepsilon>0,$$

$$\tilde{a}(t),\tilde{b}(t),\tilde{c}(t)\in C^1[0,T]\cap C^4(0,T);\ \psi(t)=\left[t(T-t)\right]^{-\delta}\tilde{\psi}(t),\ \delta\leqslant 1-(k/2),$$

$$\tilde{\psi}(t)\in C^1[0,T]\cap C^3(0,T);\ \varphi(x)\in C[0,+\infty)\cap C^3(0,+\infty),\ \lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=0;\ \varphi'(x),$$

$\varphi''(x)$, $\varphi'''(x)$ функциялар $[0,+\infty)$ да чегараланган.

У ҳолда $\tilde{H}_1$ масаланинг ечими мавжуд ва ягона.

II. $p(t)\equiv 0,\ t\in[0,T]$ бўлсин. Бундан эса $t=0$ ва $t=T$ ларда $a(0)=0$, $b(T)=0$ эканлиги келиб чиқади. Буни эътиборга олиб, $a(t)=t^{1-k/2}\alpha(t)$ деб фараз қиламиз, бу ерда $\alpha(t)$ – маълум функция.

Қуйидаги теоремалар ўринли:

12-теорема. *Агар $p(t)\equiv 0,\ a(t)=t^{1-k/2}\alpha(t),\ \alpha'(t)\leq 0,\ c'(t)\leq 0, t\in[0,T]$; $\alpha(T)-\alpha(0)-\Gamma(k/2)\Gamma^{-1}(k)c(0)>0$ шартлар бажарилган бўлса, у ҳолда $\tilde{H}_1$ масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

13-теорема. *12-теореманинг шартлари ва ушбу шартлар бажарилган бўлсин: $\alpha(t), c(t)\in C^2[0,T]\cap C^4(0,T)$, $\varphi(x)\in C[0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$, $\psi(t)=t^{\delta}\tilde{\psi}(t)$, $\delta\geq(1-k)/2$, $\tilde{\psi}(t)\in C^1[0,T]\cap C^3(0,T)$; $c(t)\neq 0$, $\left[\alpha(t)-\cos(k\pi)\beta(t)\right]\beta(t)<0$, $t\in[0,T]$.*

У ҳолда $\tilde{H}_1$ масаланинг ечими мавжуд ва ягона.

2.4-параграфда Q соҳада ушбу

$$0=\begin{cases}\tilde{L}_1 u \equiv u_{xx}+(k_1/x)u_x-u_t-\lambda_1^2 u, \ (x,t)\in Q_1,\\ \tilde{L}_2 u \equiv u_{xx}+(k_2/x)u_x-u_{tt}-\lambda_2^2 u, \ (x,t)\in Q_2\end{cases}$$

тенглама қаралган ва қуйидаги масала тадқиқ қилинган, бу ерда $k_1,k_2,\lambda_1,\lambda_2\in R$ бўлиб, $k_1\in(-1,1)$, $k_2\in(0,1)$

$\tilde{H}_2$ **масала.** *Шундай* $u(x,t)\in\bigcap_{j=1}^{2}\left[C(\overline{Q}_j)\cap C_{x,t}^{2,j}(Q_j)\right]$ *функция топилсинки, у* Q_1 *ва* Q_2 *соҳаларда мос ҳолда* $\tilde{L}_1 u=0$ *ва* $\tilde{L}_2 u=0$ *тенгламаларни,* Q_0 *тип ўзгариш чизиғида*

$$u(-0,t)=u(+0,t),\ 0\le t\le T;\ \lim_{x\to-0}(-x)^{k_2}u_x(x,t)=\lim_{x\to+0}x^{k_1}u_x(x,t),\ \ t\in(0,T)$$

улаш шартларини, Q *соҳа чегарасида эса (22) ва*

$$a(t)A_{0t}^{1,\lambda_2}D_{0t}^{1-k_2/2}u\left(-\frac{t}{2},\frac{t}{2}\right)+b(t)A_{Tt}^{1,\lambda_2}D_{tT}^{1-k_2/2}u\left(\frac{t-T}{2},\frac{t+T}{2}\right)+$$

$$+c(t)\lim_{x\to-0}(-x)^{k_2}u_x(x,t)=\psi(t),\ \ t\in(0,T)$$

шартларни қаноатлантирсин, бу ерда $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $\psi(t)$ *– берилган функциялар бўлиб,* $a^2(t)+b^2(t)+c^2(t)\ne0$, $t\in(0,T)$; $A_{mt}^{s,\lambda}$ *ва* D_{mt}^{α} *– (10) ва (23) кўринишдаги операторлар.*

Қуйидаги теорема ва леммалар исботланган:

2-лемма. $\nu(t)\in L_2[0,T]$, $k_2>(1+k_1)/2$, $q(t)\ne0$, $t\in[0,T]$ *ва қуйидаги тенгсизликлар ўринли бўлсин:*

$$\alpha'(t)\le0,\ \beta'(t)\ge0,\alpha'^2(t)+\beta'^2(t)\ne0,\ t\in[0,T].$$

У ҳолда $\tilde{H}_2$ *га мос бир жинсли масала фақат тривиал ечимга эга бўлади, бу ерда*

$$q(t)=\gamma_5\left[a(t)(T-t)^{k_2/2}+b(t)t^{k_2/2}\right]-\left[t(T-t)\right]^{k_2/2}c(t),\ \alpha(t)=(T-t)^{k_2/2}a(t)q^{-1}(t),$$

$$\beta(t)=t^{k_2/2}b(t)q^{-1}(t),\ \gamma_5=2^{k_2-1}\Gamma(1-k_2)\,\Gamma^{-1}\left[1-(k_2/2)\right]\Gamma^{-1}(k_2)\Gamma(k_2/2),$$

$$\nu(t)=\lim_{x\to-0}(-x)^{k_2}u_x(x,t)=\lim_{x\to+0}x^{k_1}u_x(x,t),$$

$u(x,t)$*–* $\tilde{H}_2$ *масаланинг ечими.*

12-теорема. *Агар 2-лемманинг шартлари бажарилган бўлса, у ҳолда* $\tilde{H}_2$ *масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

13-теорема. *2-лемманинг шартлари ва ушбу шартлар бажарилган бўлсин:* $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\delta(t)\in C[0,T]\cap C^2(0,T)$; $\varphi(x)\in C[0,+\infty)\cap C^4(0,+\infty)$, $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$; $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ *ва* $\varphi'''(x)$ *функциялар* $[0,+\infty)$ *да чегараланган.*

У ҳолда $\tilde{H}_2$ *масала ечими мавжуд ва ягона, бу ерда* $\delta(t)=\left[t(T-t)\right]^{k_2/2}\psi(t)q^{-1}(t)$.

Энди $k_2=(1+k_1)/2$ ва $q(t)\ne0$, $t\in(0,T)$, $q(0)=q(T)$ бўлсин. Фараз қилайлик, қуйидаги тенгликлар ўринли бўлсин:

$$a(t)=t^{k_2/2}a_0(t),\ b(t)=(T-t)^{k_2/2}b_0(t),\ t\in[0,T],\ a_0(0)\neq 0,\ b_0(T)\neq 0. \quad (24)$$

3-лемма. *$\nu(t)\in L_2[0,T]$ ва (24) шартлар ҳамда қуйидаги тенгсизликлар бажарилган бўлсин: $q_0(t)\neq 0$, $[a_0(t)/q_0(t)]'\leq 0$, $[b_0(t)/q_0(t)]'\geq 0$, $t\in(0,T)$ ва $a_0(T)\geq 0$, $b_0(0)\geq 0$. У ҳолда $\tilde{H}_2$ масалага мос бир жинсли масала фақат тривиал ечимга эга, бу ерда $\alpha_0(t)=a_0(t)/q_0(t)$, $\beta_0(t)=b_0(t)/q_0(t)$, $\delta_0(t)=-\psi(t)/q_0(t)$, $q_0(t)=\gamma_5[a_0(t)+b_0(t)]-c(t)$, $\nu(t)=\lim\limits_{x\to -0}(-x)^{k_2}u_x(x,t)=$ $=\lim\limits_{x\to +0}x^{k_1}u_x(x,t)$, $u(x,t)-$ $\tilde{H}_2$ масаланинг ечими.*

16-теорема. *Агар 3-лемма шартлари бажарилса, у ҳолда $\tilde{H}_2$ масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

17-теорема. *3-лемма шартлари ва ушбу шартлар бажарилган бўлсин:*

$$\alpha_0(t),\ \beta_0(t),\ \delta_0(t)\in C[0,T]\cap C^2(0,T),\ b_2(t)>0,$$

$$\alpha_0(t)-\beta_0(t)\cos(k_2\pi)>0,\ t\in[0,T],\ \varphi(x)\in C^2[0,+\infty),\ \lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=0,\ k_1>0.$$

У ҳолда $\tilde{H}_2$ масаланинг ечими мавжуд ва ягона.

Диссертациянинг **«Каср ва бутун тартибли аралаш параболик тенгламалар учун чегаравий масалалар»** деб номланган учинчи боби учта параграфдан иборат бўлиб, чегараланмаган соҳаларда аралаш параболик тенгламалар учун чегаравий масалалар баён қилиш ва ўрганишга бағишланган.

W $-$ x ва t ўзгарувчилар текислигининг $t=0$ ва $t=T$ тўғри чизиқлар билан чегараланган соҳаси бўлсин, бу ерда $T=const>0$. W соҳада вақт йўналишлари қарама-қарши бўлган ушбу

$$0=\begin{cases} L_1^{(k_1)}u\equiv u_{xx}+(k_1/x)u_x-u_t,\ (x,t)\in W_1=W\cap(x>0), \\ L_2^{(k_2)}u\equiv u_{xx}+(k_2/x)u_x+u_t,\ (x,t)\in W_2=W\cap(x<0) \end{cases} \quad (25)$$

аралаш параболик тенглама қаралган, бу ерда k_1 ва k_2 $-$ $[0,1)$га тегишли берилган ҳақиқий сонлар.

3.1-параграфда қуйидаги масала тадқиқ қилинган:

***G* масала (Жевре масаласи).** *W соҳанинг ёпиғида узлуксиз бўлган шундай $u(x,t)$ функция топилсинки, у W_1 ва W_2 соҳаларда (25) тенгламанинг регуляр ечими бўлиб, $\lim\limits_{x\to-0}u(x,t)=\lim\limits_{x\to+0}u(x,t)$, $0<t<T$, $\lim\limits_{x\to-0}(-x)^{k_2}u_x(x,t)=$ $\lim\limits_{x\to+0}x^{k_1}u_x(x,t)$, $0<t<T$ улаш шартларини ва ушбу чегаравий шартларни*

$$\begin{aligned} &u(x,0)=\varphi_1(x),\ \ 0\leq x<+\infty;\ \ \lim_{x\to+\infty}u(x,t)=0,\ \ t\in[0,T], \\ &u(x,T)=\varphi_2(x),\ \ -\infty<x\leq 0;\ \ \lim_{x\to-\infty}u(x,t)=0,\ \ t\in[0,T] \end{aligned} \quad (26)$$

қаноатлантирсин, бу ерда $\varphi_1(x)$ ва $\varphi_2(-x)$ $-$ берилган функциялар бўлиб, $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_1(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi_2(x)=0$.

Ушбу параграфнинг асосий натижаси қуйидаги теорема ҳисобланади:

18-теорема. *Қуйидаги шартлар бажарилган бўлсин:* $\varphi_1(x) = x^\varepsilon \tilde{\varphi}_1(x)$, $\tilde{\varphi}_1(x) \in C^2[0,+\infty)$, $\varepsilon > 0$ *ва* $\tilde{\varphi}_1(x), \tilde{\varphi}_1'(x), \tilde{\varphi}_1''(x)$ *функциялар* $[0,+\infty)$*да чегараланган;* $\varphi_2(x) = (-x)^\delta \tilde{\varphi}_2(x)$, $\tilde{\varphi}_2(x) \in C^2(-\infty,0]$, $\delta > 0$ *ва* $\tilde{\varphi}_2(x)$, $\tilde{\varphi}_2'(x)$, $\tilde{\varphi}_2''(x)$ *функциялар* $(-\infty,0]$ *да чегараланган.*

У ҳолда G масала ягона ечимга эга.

3.2-параграфда $W_3 = \{(x,t): -q < x,\, 0 < t < T\}$ соҳада вақт йўналишлари перпендикуляр бўлган ушбу тенглама

$$0 = \begin{cases} L_1 u \equiv u_{xx} - u_t,\ (x,t) \in W_1 = W_3 \cap (x > 0); \\ L_2 u \equiv u_{tt} + u_x,\ (x,t) \in W_4 = W_3 \cap (x < 0) \end{cases}$$

қаралган ва қуйидаги масала тадқиқ қилинган, бу ерда $T, q \in R$, $T > 0$, $q > 0$.

Π ***масала.*** W_3 *соҳанинг ёпиғида узлуксиз бўлган шундай* $u(x,t)$ *функция топилсинки, у* W_1 *ва* W_4 *соҳаларда мос ҳолда* $L_1 u = 0$ *ва* $L_2 u = 0$ *тенгламаларни, ушбу улаш шартини*

$$\lim_{x \to -0} u_x(x,t) = a_1(t) \lim_{x \to +0} u_x(x,t) + a_2(t) D_{0t}^{\alpha}[b_2(t) u(0,t)] +$$
$$+ a_3(t) D_{tT}^{\beta}[b_3(t) u(0,t)] + b_1(t), \quad 0 < t < T$$

ҳамда (26),

$$u(x,T) = \varphi_2(x),\ u(x,0) = \varphi_3(x),\ -q \le x \le 0$$

чегаравий шартларни қаноатлантирсин, бу ерда $a_j(t)$, $b_j(t)$, $\varphi_j(x)$, $(j = \overline{1,3})$ *– берилган функциялар бўлиб,* $a_j(t)$, $b_j(t) \in C[0,T]$, $j = \overline{1,3}$ *ва* $a_1(t) \neq 0$, $t \in [0,T]$; $\varphi_1(x) \in C[0,+\infty)$ *ва чегараланган,* $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x) \in C[-q,0]$ *ва* $\varphi_1(0) = \varphi_3(0)$, $\lim_{x \to +\infty} \varphi_1(x) = 0$; α, β $(0,1)$ *дан олинган берилган сонлар;* D_{0t}^{α} *ва* D_{tT}^{β} *– (23) кўринишдаги операторлар.*

Қуйидаги лемма ва теоремалар ўринли:

4-лемма. $[0,T]$ *кесмада* $a_1(t) > 0, a_2(t) \le 0$ *ва* $b_2(t) > 0$, $b_3(t) > 0$ *тенгсизликлар ўринли бўлиб,* $b_2(t)$ *– камаймайдиган,* $b_3(t)$ *эса ўсмайдиган функция бўлсин. У ҳолда* Π *га мос бир жинсли масала фақат тривиал ечимга эга.*

19-теорема. *4-лемманинг шартлари бажарилса, у ҳолда* Π *масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

20-теорема. *4-лемма шартлари ва ушбу шартлар бажарилган бўлсин:* $a_j(t) \in C^1[0,T] \cap C^2(0,T)$, $j = \overline{1,3}$, $\exists \varphi_1'(x) \in C(0,+\infty) \cap L(0,+\infty)$.

У ҳолда Π *масаланинг ечими мавжуд ва ягона.*

3.3-параграфда $W_5 = W_1 \cup W_0 \cup W_6$ соҳада вақт йўналишлари перпендикуляр бўлган қуйидаги каср тартибли аралаш параболик тенглама

$$0 = \begin{cases} u_{xx}(x,t) - D_{0t}^{\alpha} u(x,t),\ (x,t) \in W_1; \\ u_{tt}(x,t) + D_{x0}^{\delta} u(x,t),\ (x,t) \in W_6 \end{cases} \tag{27}$$

қаралган, бу ерда $W_1=\{(x,t):0<x<+\infty;0<t<T\}$, $W_6=\{(x,t):-q<x<0,$ $-\infty<t<+\infty\}$, $W_0=\{(x,t):x=0,0<t<T\}$; α,δ, $q,T\in R$, $0<\alpha,\delta<1$; D_{mt}^{α} – (23) кўринишдаги оператор.

$W_1\cup W_6$ соҳада (27) тенгламани ва $D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t)\in C(\overline{W}_1)$, $D_{x0}^{\delta-1}u(x,t)\in C(\overline{W}_6)$, $u_{tt}(x,t),D_{x0}^{\delta}u(x,t)\in C(W_6)$, $u_{xx}(x,t),D_{0t}^{\alpha}u(x,t)\in C(W_1)$ шартларни қаноатлантирувчи $u(x,t)$ функция (27) тенгламанинг $W_1\cup W_6$ соҳадаги регуляр ечими дейилади.

Қуйидаги масала ўрганилган:

1-масала. *(27) тенгламанинг $W_1\cup W_6$ соҳадаги шундай регуляр ечими топилсинки, у қуйидаги чегаравий шартларни*

$$\lim_{t\to+0}D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t)=\varphi_1(x),\qquad 0\le x<+\infty; \tag{28}$$

$$\lim_{x\to-0}(-x)^{1-\delta}u(x,t)=\varphi_2(t),\qquad -\infty<t\le 0; \tag{29}$$

$$\lim_{x\to-0}(-x)^{1-\delta}u(x,t)=\varphi_3(t),\qquad T\le t<+\infty \tag{30}$$

ва ушбу улаш шартларини

$$\lim_{x\to-0}(-x)^{1-\delta}u(x,t)=\lim_{x\to+0}u(x,t),\qquad 0\le t\le T; \tag{31}$$

$$\lim_{x\to-0}(-x)^{1-\delta}(\partial/\partial x)\left[(-x)^{1-\delta}u(x,t)\right]=\lim_{x\to+0}\left[u_x(x,t)+b(t)u(x,t)+\right.$$
$$\left.+c(t)u_t(x,t)+\omega(t)D_{0t}^{-\varepsilon_1}u(x,t)+m(t)D_{Tt}^{-\varepsilon_2}u(x,t)\right]+n(t),\ t\in(0,T) \tag{32}$$

қаноатлантирсин, бу ерда $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $\omega(t)$, $m(t)$, $n(t)$ – берилган узлуксиз функциялар, ε_1 ва ε_2 – $(0,1)$ га тегишли берилган сонлар.

Қуйидаги белгилашни киритайлик: $W_7=W_6\cap(t>0)$. $W_1\cup W_7$ соҳада (27) тенгламани ва ушбу $D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t)\in C(\overline{W}_1)$, $D_{x0}^{\delta-1}u(x,t)\in C(\overline{W}_7)$, $u_{tt}(x,t)$, $D_{x0}^{\delta}u(x,t)\in C(W_7)$, $u_{xx}(x,t),D_{0t}^{\alpha}u(x,t)\in C(W_1)$ шартларни қаноатлантирувчи $u(x,t)$ функция (27) тенгламанинг $W_1\cup W_7$ соҳадаги регуляр ечими дейилади.

2-масала. *$W_1\cup W_7$ соҳада (27) тенгламанинг шундай регуляр ечими топилсинки, у (28), (30), $\lim_{t\to+0}u(x,t)=\psi(x)$, $-q\le x\le 0$ чегаравий шартларни ва (31), (32) улаш шартларини қаноатлантирсин, бу ерда $\psi(x)$ – берилган функция.*

3.3-параграфнинг асосий натижалари қуйидаги теоремалардир:

21-теорема. *Қуйидаги шартлар бажарилган бўлсин:*

$$b(t)\le 0,c'(t)\le 0,\omega'(t)\ge 0,m'(t)\ge 0,t\in[0,T],\omega(T)\le 0,m(0)\ge 0; \tag{33}$$

$$b(t),n(t)\in C[0,T],\ c(t),\omega(t),m(t)\in C^1[0,T];\ \varphi_3(t)\in C^1[T,+\infty)\cap C^2(T,+\infty),$$

$$\varphi_1(x)=x^{\varepsilon}\tilde{\varphi}(x),\ \varepsilon>(1-2\beta)/\beta,\ \tilde{\varphi}(x)\in C[0,+\infty)\cap C^1(0,+\infty),$$

$$\varphi_2(t)\in C^1(-\infty,0]\cap C^2(-\infty,0),\ \varphi_2(0)=0,\ \ \varphi_3(t)\in C^1[T,+\infty)\cap C^2(T,+\infty).$$

У ҳолда 1-масала ягона ечимга эга.

22-теорема. *(31) ва қуйидаги шартлар берилган бўлсин:* $b(t), n(t) \in C[0,T]$, $c(t), \omega(t), m(t) \in C^1[0,T]$; $\varphi_1(x) = x^{\varepsilon}\tilde{\varphi}(x)$, $\varepsilon > (1-2\beta)/\beta$, $\varphi_3(t) \in C^1[T,+\infty) \cap C^2(T,+\infty)$, $\psi(x) \in C^1[-a,0]$, $\psi(0) = 0$.

У ҳолда 2-масала ягона ечимга эга.

ХУЛОСА

Диссертация иши тип ўзгариш чизиғи характеристика бўлмаган параболо-гиперболик тенгламалар ва аралаш параболик тенгламалар учун локал ва нолокал масалалар қўйиш ва тадқиқ қилишга бағишланган. Биринчи бобда чегараланган соҳада модел параболо-гиперболик тенгламалар учун интеграл шарт ва силжишли шарт берилган нолокал масалалар қаралган, иккинчи бобда чегараланмаган соҳада сингуляр коэффициент ва спектрал параметрга эга бўлган параболо-гиперболик тенгламалар учун силжишли шарт берилган масалалар баён қилинган, сўнгги учинчи бобда эса чегараланмаган соҳаларда бутун ва каср тартибли аралаш параболик тенгламалар учун чегаравий масалалар қўйилган.

Тадқиқот натижалари қуйидагилардан иборат:

тип ўзгариш чизиғи характеристика бўлмаган модел параболо-гиперболик тенгламалар учун интеграл шарт ва силжишли шарт берилган нолокал масалаларнинг бир қийматли ечилиши асосланган;

сингуляр коэффициент ва спектрал параметрга эга бўлган тип ўзгариш чизиғи характеристика бўлмаган параболо-гиперболик тенглама учун силжишли шарт берилган нолокал масалаларнинг бир қийматли ечилишини таъминловчи етарли шартлар аниқланган;

вақт йўналишлари қарама-қарши бўлган сингуляр коэффициентли бутун тартибли аралаш параболик тенглама учун умумий улаш шарти берилган Жевре масаласи ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган;

вақт йўналишлари перпендикуляр бўлган бутун тартибли аралаш параболик тенглама учун Трикоми масаласининг қўйилиши аниқланган ва қўйилган масаланинг бир қийматли ечилиши исботланган;

каср тартибли аралаш параболик тенгламалар учун чегаравий масалалар ечимларининг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган.

Ўрганилган масалалар ечимининг ягоналиги энергия интеграллари ва экстремум принципи усуллари билан, мавжудлиги эса интеграл тенгламалар усули билан исботланган. Диссертацияда ўрганилган масалаларнинг барчаси янги бўлиб, улар хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назариясининг кейинги тараққиётида фойдаланилиши мумкин.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЁНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ФЕРГАНСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

ФЕРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАМАНАЗАРОВ АЗИЗБЕК ОТАЖОН УГЛИ

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ И СМЕШАННО ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
Диссертации доктора философии (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Фергана – 2021

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико – математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за №B 2021.3.PhD/FM627.

Диссертация выполнена в Ферганском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб – странице Научного совета (www.fdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Уринов Ахмаджон Кушакович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Кадиркулов Бахтиёр Жалилович** доктор физико-математических наук(DSc), доцент
	Апаков Юсупжон Пулатович доктор физико-математических наук(DSc), доцент
Ведущая организация:	**Ургенчский государственный университет**

Защита диссертации состоится «29» 12 2021 года в 10[00] часов на заседании Научного совета PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 при Ферганском государственном университете. (Адрес: 150100, г. Фергана, ул. Мураббийлар, дом 19. Тел: (+99873) 244-44-02, факс: (+99873) 244-44-93, e-mail: fardu_info@umail.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно – ресурсном центре Ферганского государственного университета (зарегистрирована за №142). (Адрес: 150100, г. Фергана, ул. Мураббийлар, дом 19).Тел.: (+99873) 244-44-94.

Автореферат диссертации разослан «18» 12 2021 года.
(протокол рассылки №__от «__»_____2021 года).

Б.Т. Саматов
Заместитель председателя Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф-м.н., доцент

И.У. Хайдаров
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, к.ф-м.н.

Ш.Т.Каримов
Председатель Научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф-м.н., доцент

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Научно-практические исследования, проводимые в мировом масштабе, в большинстве случаев сводятся к решению задач теории дифференциальных уравнений в частных производных, в частности, к теории уравнений смешанного типа. При этом дифференциальные уравнения смешанного параболо-гиперболического типа применяются в качестве математических моделей задач тепло- и массообмена в капиллярно-пористых средах, распространения электромагнитного поля в неоднородной среде, формирования температурного поля, движения вязкоупругой и вязкой жидкостей, а смешанно-параболическое уравнение – задач движения жидкости со знакопеременным коэффициентом вязкости. Поэтому постановка и решение новых корректных краевых задач для уравнений смешанного параболо-гиперболического и смешанно-параболического типов являются одним из приоритетных направлений теории дифференциальных уравнений в частных производных.

В мире в настоящее время является актуальным изучение не только основных краевых задач, но и новых локальных и нелокальных задач для дифференциальных уравнений смешанного типа. При этом постановка и исследование нелокальных задач для параболо-гиперболических уравнений с нехарактеристической линией изменения типа, изучение краевых задач для смешанно-параболических уравнений с сингулярным коэффициентом, определение новых классов смешанно-параболических уравнений и постановка и исследование для них корректных задач считаются важными целевыми научными исследованиями. Проведенные до настоящего времени научные исследования по этим проблемам обосновывают актуальность темы настоящей диссертации.

В нашей стране в настоящее время усилился интерес к актуальным направлениям фундаментальных наук, имеющих научное и практическое применение. В том числе, особое внимание уделяется изучению неклассических уравнений математической физики, в частности, дифференциальных уравнений смешанного типа и неклассических задач, поставленных для таких уравнений. Проведенные научные исследования на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям дифференциальных уравнений и математической физики, динамической системы и оптимального управления, прикладной математики и математического моделирования, математического анализа и теории функции, теории вероятностей и математической статистики, алгебры и геометрии обозначены основными задачами и направлениями деятельности ученых-математиков[2]. При обеспечении выполнения этих задач наряду с основными (классическими) краевыми задачами важное значение имеет

[2] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года № 292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан».

постановка и изучение новых корректных нелокальных задач для дифференциальных уравнений в частных производных, в частности, для уравнений смешанного параболо-гиперболического и смешанно-параболического типов.

Проблема исследования настоящей диссертации находится в русле задач, обозначенных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан ПП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии Наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», ПП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан», ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно–правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Впервые на необходимость рассмотрения задач для параболо-гиперболических уравнений было указано И.М.Гельфандом при исследовании движения газа в канале, окруженном пористой средой. Рассматривая задачу о распространении электрических колебаний в составных линиях, Я.С.Уфлянд также получил задачу для параболо-гиперболического уравнения.

Систематические исследования краевых и начально-граничных задач для параболо-гиперболических уравнений начато с 60-х годов прошлого века. К числу первых работ, посвященных изучению задач для таких уравнений, можно отнести работы Г.М.Стручиной, С.И.Гайдука и А.Иванова, О.А.Ладыженской и Л.Ступлялиса, Л.А.Золиной. Далее, фундаментальные результаты по уравнениям для параболо-гиперболических уравнений третьего порядка получены М.С.Салахитдиновым, Т.Д.Джураевым, а для уравнений второго порядка – А.М.Нахушевым, В.А.Враговым, Н.Ю.Капустиным. В настоящее время существуют многочисленные работы по исследованию краевых задач для параболо-гиперболических уравнений как второго, так и третьего порядка. В частности, в работах Ж.О.Тохирова, А.Сопуева, А.С.Бердышева, Б.Исламова, О.А.Репина, А.В.Псху, К.Б.Сабитова, М.А.Садыбекова, Э.Т.Каримова, В.А.Елеева, А.К.Уринова, Ю.П.Апакова, У.И.Балтаевой, А.М.Нагорного и др. исследованы локальные и нелокальные краевые задачи для параболо-гиперболических уравнений с характеристической линией изменения типа, а в работах А.С.Бердышева, К.Б.Сабитова, М.А.Садыбекова, Э.Т.Каримова, А.К.Уринова, И.У.Хайдарова изучены спектральные свойства различных краевых задач для таких уравнений. Исследованию краевых задач для параболо-гиперболических уравнений с нехарактеристической линией изменения типа посвящены работы Т.Д.Джураева, В.А.Елеева, Н.Ю.Капустина, А.С.Бердышева, Э.Т.Каримова, О.А. Репина, С.Б. Ефимовой, М.Мамажонова, Д.Халмуратова, Ю.П.Апакова и др. В частности, Т.Д.Джураев исследовал задачу Коши в верхней полуплоскости и начально-краевую задачу для параболо-гиперболических уравнений. В.А.Елеев исследовал аналог задачи Трикоми для общего линейного параболо-гиперболического уравнения второго порядка. Задачу Трикоми для одного параболо-гиперболического уравнения Н.Ю.Капустин исследовал спектральным методом. А.С.Бердышев и Э.Т.Каримов исследовали нелокальные задачи с условиями Бицадзе-Самарского для модельного параболо-гиперболического уравнения со спектральным параметром. С помощью оператора Сайго О.А.Репин и С.Б.Ефимова сформулировали и исследовали задачи со смещением для параболо-гиперболического уравнения, содержащего оператор Бицадзе-Лыкова. М.Мамажонов и Д.Халмуратов исследовали краевые задачи для общего линейного параболо-гиперболического уравнения третьего порядка. Ю.П.Апаков исследовал аналог задачи Трикоми для трехмерного параболо-гиперболического уравнения с двумя параллельными нехарактеристическими плоскостями изменения типа. Несмотря на это, малоизученными остаются нелокальные задачи с интегральным условием и условием смещения для параболо-гиперболических уравнений с нехарактеристической линией изменения типа, имеющих сингулярный коэффициент и спектральный параметр.

Еще одним из важных классов уравнений в частных производных являются смешанно-параболические уравнения. Исследование смешанно-параболических уравнений начато с работ французского математика М.Жевре. В дальнейшем различные краевые задачи для смешанно-параболических уравнений второго порядка рассматривали итальянские математики C.D.Pagani и G.Talenti, а А.М.Нахушев предложил методику постановки корректных краевых задач для параболического уравнения со знакопеременной характеристической формой.

Для модельного уравнения на плоскости, а затем в n-мерном пространстве для общего линейного смешанно-параболического уравнения А.А.Керефов исследовал задачи Жевре, а С.А.Терсенов сформулировал и исследовал краевые задачи для многомерного параболического уравнения с меняющимся направлением, содержащим оператор Лапласа по одной переменной и оператор Бесселя по другой переменной. Исследованием краевых задач для смешанно-параболических уравнений второго порядка занимались также М.Акбарова, С.В.Попов, И.Е.Егоров, Н.В.Кислов, М.С.Туласынов и др.

Т.Д. Джураев, Ю.Иргашев, С.В.Попов исследовали краевые задачи для смешанно-параболических уравнений третьего порядка, а С.В.Попов и Дж.Аманов – для таких уравнений четвертого и высокого четного порядка.

В последнее время исследователями ставятся и изучаются задачи для смешанно-параболических уравнений, содержащих дифференциальные операторы дробного порядка. Такими уравнениями занимались С.Х.Геккиева, Б.Д.Кадиркулов, Дж.Аманов и др.

Следует отметить, что к настоящему времени краевые задачи изучены только для смешанно-параболических уравнений с коллинеарными направлениями времени, а для уравнений с перпендикулярными направлениями времени они остаются неизученными.

Связь темы диссертации с научно – исследовательскими работами высшего учебного заведения, в котором выполнена диссертация. Диссертационная работа выполнена в рамках темы «Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и родственных разделов математики» плана научно – исследовательских работ Ферганского государственного университета.

Целью исследования является постановка и изучение задачи для дифференциальных уравнений параболо-гиперболического и смешанно-параболического типов второго порядка.

Задачи исследования, решаемые в данной работе, следующие:

постановка и исследование нелокальных задач с интегральным условием и условием смещения для модельных параболо-гиперболических уравнений с нехарактеристической линией изменения типа;

постановка и исследование нелокальных задач со смещением для параболо-гиперболических уравнений с нехарактеристической линией изменения типа, имеющих сингулярный коэффициент и спектральный параметр;

исследование задачи Жевре с общими условиями склеивания для смешанно-параболического уравнения целого порядка с противоположными направлениями времени;

определение постановки и изучения краевых задач для смешанно-параболических уравнений целого порядка с перпендикулярными направлениями времени;

определение постановки и исследования краевых задач для смешанно-параболических уравнений дробного порядка.

Объектом исследования являются дифференциальные уравнения параболо-гиперболического и смешанно-параболического типов второго порядка.

Предметом исследования являются краевые задачи для дифференциальных уравнений параболо-гиперболического и смешанно-параболического типов второго порядка.

Методы исследований. В диссертационной работе использованы методы интегралов энергии, принцип экстремума и интегральных уравнений.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

установлена однозначная разрешимость нелокальных задач с интегральным условием и условием смещения для модельных параболо-гиперболических уравнений с нехарактеристической линией изменения типа;

выявлены условия, обеспечивающие однозначную разрешимость нелокальных задач со смещением для параболо-гиперболических уравнений с нехарактеристической линией изменения типа, имеющих сингулярный коэффициент и спектральный параметр;

доказаны единственность и существование решения задачи Жевре с общими условиями склеивания для смешанно-параболического уравнения целого порядка с противоположными направлениями времени, имеющего сингулярный коэффициент;

найдена постановка задачи Трикоми для смешанно-параболического уравнения целого порядка с перпендикулярными направлениями времени и доказана однозначная разрешимость поставленной задачи;

доказаны единственность и существование решения краевых задач для смешанно-параболических уравнений дробного порядка.

Практические результаты исследования заключаются в следующем:

Обоснована возможность решения некоторых краевых задач со смещением для сингулярно возмущенных уравнений теории химической кинетики с использованием результатов исследования однозначной разрешимости нелокальных задач со смещением для параболо-гиперболических уравнений, имеющих сингулярный коэффициент и спектральный параметр.

Доказана возможность исследования сильной разрешимости краевых задач в функциональных пространствах для параболо-гиперболических уравнений третьего порядка с помощью результатов исследования корректности задач с интегральным условием для параболо-гиперболических уравнений второго порядка.

Достоверность результатов исследования обоснована принятыми математическими дедуктивными выводами с использованием методов интегралов энергии, принципа экстремума и интегральных уравнений, а также строгими и полными доказательствами теорем.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость результатов исследования заключается в том, что полученные научные выводы могут быть использованы при дальнейшем развитии теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Практическое значение диссертационной работы заключается в том, что использованием методов исследования задач со смещением для параболо-гиперболических уравнений с сингулярным коэффициентом и спектральным параметром, можно построить колебательную асимптотику решения уравнения Бесселя.

Внедрение результатов исследования. Полученные результаты исследования задач для дифференциальных уравнений параболо-гиперболического и смешанно-параболического типов внедрены в следующие научно – исследовательские проекты:

результаты по исследованию нелокальных задач для уравнений параболо-гиперболического типа второго порядка использованы при исследовании краевых задач для дифференциальных уравнений третьего порядка в зарубежном проекте «AP 09058677 Исследование корректности краевых задач для неклассических уравнений математической физики» (конкурс молодых ученых Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан, 2021-2023 гг. Договор №97КМУ2 от 05 марта 2021 года) (Справка № 15-15-10-02-11/1793 от 05.10.2021 Казахского Национального педагогического университета имени Абая). Применения полученных результатов дала возможность доказать сильную разрешимость ряда краевых задач для параболо-гиперболических уравнений второго и третьего порядка в функциональных пространствах;

нелокальные задачи и методы их исследования для параболо-гиперболических уравнений с сингулярным коэффициентом были использованы в зарубежном гранте на тему «Сингулярно возмущенные уравнения теории химической кинетики и построение колебательной асимптотики решения уравнения Бесселя» (Справка № 1423 от 10.11.2021 Института фундаментальных и прикладных исследований при ОшГУ). Применяя этих результатов сформулированы и исследованы задачи теории химической кинетики и их применения в прикладных задачах.

Апробация результатов исследования. Основные результаты диссертации были обсуждены на 3 международных и 2 республиканских научных и научно – практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликована 15 научная работа, из них 10 научных статей опубликованы в научных журналах, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для публикации основных научных результатов диссертаций доктора философии, в том числе, 3- в зарубежных и 7- в республиканских научных изданиях.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Общий объем диссертации 129 страница.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики, приведена степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава, названная **«Задачи с интегральным условием и условием смещения для параболо-гиперболических уравнений»** и состоящая из двух параграфов, посвящена постановке и исследованию нелокальных задач для параболо-гиперболических уравнений с нехарактеристической линией изменения типа в ограниченной смешанной области $D = D_0 \cup D_1 \cup D_2$, где $D_0 = \{(x,t): x = 0,\ 0 < t < T\}$, $D_1 = \{(x,t): 0 < x < q,\ 0 < t < T\}$, $D_2 = \{(x,t): -x < t < T + x,\ (-T/2) < x < 0\}$, а $q = const > 0$, $T = const > 0$.

В параграфе 1.1 в области $Q_1 \cup Q_2 = Q_0 \cup Q_1 \cup Q_2$ рассмотрено уравнение

$$u_{xx} - \frac{1}{2}(1 - sign x)u_{tt} - \frac{1}{2}(1 + sign x)u_t = 0, \qquad (1)$$

которое относится к параболо-гиперболическому типу и линия изменения типа D_0 не является характеристикой.

В области D для уравнения (1) исследованы следующие задачи:

Задача I_1. *Найти функцию* $u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^{2,1}_{x,t}(D_1) \cap C^{2,2}_{x,t}(D_2)$, *удовлетворяющую уравнению (1) в области* $D \setminus D_0$, *условию склеивания*

$$\lim_{x \to -0} u_x(x,t) = \lim_{x \to +0} u_x(x,t), \qquad t \in (0,T) \qquad (2)$$

и краевым условиям

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \qquad x \in [0,q]; \qquad (3)$$

$$\int_0^q u(x,t)\,dx = \int_0^t g(\eta)u(q,\eta)\,d\eta + \varphi_1(t), \qquad t \in [0,T]; \qquad (4)$$

$$\alpha(t)(d/dt)u(-t/2, t/2) + \beta(t)(d/dt)u[(t-T)/2, (t+T)/2] = \gamma(t),\ t \in (0,T),$$

где $\varphi_0(x)$, $g(t)$, $\varphi_1(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ *– заданные непрерывные функции, причем* $\alpha^2(t) + \beta^2(t) \neq 0$, $t \in [0,T]$; $\int_0^q \varphi_0(x)\,dx = \varphi_1(0)$.

Задача I_2. *Найти функцию* $u(x,t)$, *удовлетворяющую условиям задачи* I_1, *когда условие (4) заменено на*

$$\int_0^q u(x,t)\,dx = u(q,t) + \varphi_1(t), \qquad t \in [0,T], \qquad (5)$$

где функции $\varphi_0(x)$ *и* $\varphi_1(t)$ *удовлетворяют условию* $\int_0^q \varphi_0(x)\,dx = \varphi_0(q) + \varphi_1(0)$.

Основными результатами параграфа 1.1 являются следующие теоремы:

Теорема 1. *Задача* I_1 *имеет единственное решение, если* $g(t) \in C^1[0,T] \cap C^2(0,T)$, $\varphi_0(x) \in C^2[0,q] \cap C^3(0,q)$, $\varphi_1(t) \in C^2[0,T] \cap C^3(0,T)$, $\varphi_1'(0) - \varphi_0'(q) + \varphi_0'(0) + \varphi_0(q)g(0) = 0$ *и выполнена одна из следующих групп условий:*

I. $\alpha(t) - \beta(t) \equiv 0$, $\alpha(t) + \beta(t) \neq 0$, $t \in [0,T]$;

$$\alpha(t),\ \beta(t) \in C^1[0,T],\ \gamma(t) \in C^1(0,T) \cap L_2[0,T]; \qquad (6)$$

II. $\alpha(t) - \beta(t) \neq 0$, $\alpha(t) + \beta(t) \equiv 0$, $t \in [0,T]$; $\alpha(t)$, $\beta(t) \in C^2[0,T]$,

$$\gamma(t) \in C[0,T] \cap C^2(0,T),\ \gamma'(t) \in L_2[0,T],$$

$$\varphi_0'(0)+2\gamma(0)\left[\alpha(0)-\beta(0)\right]^{-1}=0; \qquad (7)$$

III. $\alpha(t)+\beta(t)\neq 0,\ \alpha(t)-\beta(t)\neq 0,\ t\in[0,T]$ *;(6).*

Теорема 2. *Задача* I_2 *имеет единственное решение, если* $\varphi_1(t)\in C[0,T]\cap C^2(0,T)$, $\varphi_1'(t)\in L_2[0,T]$ *и выполнена одна из следующих групп условий:*

I. $\alpha(t)-\beta(t)\equiv 0,\ \alpha(t)+\beta(t)\neq 0,\ t\in[0,T];\quad \alpha(t),\ \beta(t)\in C^1[0,T]$,

$\gamma(t)\in C^1[0,T]\cap L_2[0,T];\ \varphi_0(x)\in C^2[0,q]$;

II. $\alpha(t)-\beta(t)\neq 0,\ \alpha(t)+\beta(t)\equiv 0,\quad t\in[0,T]$; *условие (7),*

$\alpha(t),\beta(t)\in C^2[0,T],\gamma(t)\in C[0,T]\cap C^2(0,T),\ \gamma'(t)\in L_2[0,T]$;

$\varphi_0(x)\in C^1[0,q]\cap C^3(0,q),\quad \varphi_0''(x)\in L[0,q]$;

III. $\alpha(t)-\beta(t)\neq 0,\ \alpha(t)+\beta(t)\neq 0,\ t\in[0,T]$;$\alpha(t),\ \beta(t)\in C^1[0,T]$,

$\gamma(t)\in C^1(0,T)\cap L_2[0,T]$; $\varphi_0(x)\in C[0,q]\cap C^2(0,q),\ \varphi_0'(x)\in L_2[0,q]$.

В параграфе 1.2 в области D рассмотрено уравнение

$$u_{xx}-\frac{1}{2}(1-signx)u_{tt}-\frac{1}{2}(1+signx)u_t-\lambda^2u=0, \qquad (8)$$

где $\lambda=\lambda_1$ в D_1 и $\lambda=\lambda_2$ в D_2, а λ_1 и λ_2 – заданные числа из $R\setminus\{0\}$.

В области D исследованы следующие задачи для уравнения (8):

Задача $\tilde{I}_1$. *Найти функцию* $u(x,t)\in C(\overline{D})\cap C^{2,1}_{x,t}(D_1)\cap C^{2,2}_{x,t}(D_2)$, *удовлетворяющую уравнению (8) в* $D\setminus D_0$, *условиям (2), (3), (4) и*

$$a(t)A^{1,\lambda_2}_{0t}\left[\frac{d}{dt}u\left(-\frac{t}{2},\frac{t}{2}\right)\right]+b(t)A^{1,\lambda_2}_{1t}\left[\frac{d}{dt}u\left(\frac{t-T}{2},\frac{t+T}{2}\right)\right]+$$

$$+c(t)\lim_{x\to-0}u_x(x,t)=f(t),\quad 0<t<T, \qquad (9)$$

где $\varphi_0(x),\ \varphi_1(t),\ g(t),\ a(t),\ b(t),\ c(t),\ f(t)$ *– заданные функции, причем* $a^2(t)+b^2(t)+c^2(t)\neq 0,\ \int\limits_0^q\varphi_0(x)dx=\varphi_1(0)$; $A^{1,\lambda}_{mt}$ *– оператор вида*

$$A^{s,\lambda}_{kt}\left[\omega(t)\right]=\omega(t)-\int\limits_k^t\omega(z)\left(\frac{z-k}{t-k}\right)^s\frac{\partial}{\partial z}J_0\left[\lambda\sqrt{(t-k)(t-z)}\right]dz,\ s=\overline{0,1}, \qquad (10)$$

а $J_m(z)$ *– функция Бесселя первого рода порядка* m, $m\in R$.

Задача $\tilde{I}_2$. *Найти функцию* $u(x,t)$, *удовлетворяющую условиям задачи* $\tilde{I}_1$, *когда условие (4) заменено на (5), причем* $\int_0^q\varphi_0(x)dx=\varphi_0(q)+\varphi_1(0)$.

Основными результатами параграфа 1.2 являются следующие теоремы:

Теорема 3. *Задача* $\tilde{I}_1$ *имеет единственное решение, если* $\varphi_0(x)\in C^2[0,q]\cap C^3(0,q)$, $\varphi_1(t)\in C^2[0,T]\cap C^3(0,T)$, $g(t)\in C^1[0,T]\cap C^2(0,T)$,

$\varphi_1'(0)-\varphi_0'(0)+\varphi_0'(q)+\varphi_0(q)g(0)+\lambda_1^2\varphi_1(0)=0$ *и выполнена одна из следующих групп условий:*

I. $a(t)-b(t)-2c(t)\equiv 0$, $a(t)+b(t)\neq 0$, $t\in[0,T]$; $a(t)$, $b(t)$, $c(t), f(t)$ $\in C[0,T]\cap C^2(0,T)$, $a(T)+b(T)>0(<0)$, $a(T)-b(0)\geq 0(\leq 0)$, $a'(t)\leq 0(\geq 0)$, $b'(t)\leq 0(\geq 0)$, $t\in[0,T]$, *причем в последних трех условиях, выполняется хотя бы одно строгое неравенство;*

II. $a(t)\neq 0$, $b(t)\equiv 0$, $a(t)-2c(t)\neq 0, t\in[0,T]$; $a(t),c(t)\in C^1[0,T]$, $f(t)\in C^1(0,T)\cap L_2[0,T]$.

Теорема 4. *Задача* $\tilde{I}_2$ *имеет единственное решение, если* $\varphi_0(x)\in C^2[0,q]$, $\varphi_1(t)\in C^1[0,T]\cap C^2(0,T)$, $\varphi_1'(t)\in L_2[0,T]$ *и выполнена одна из следующих групп условий:*

I. Первая группа условий теоремы 3.

II. $b(t)\equiv 0$, $a(t)-2c(t)\neq 0$, $t\in[0,T]$; $a(t)$, $b(t)$, $c(t)\in C^1[0,T]$, $f(t)\in C^1(0,T)\cap L_2[0,T]$.

Вторая глава, названная **«Задачи со смещением для параболо-гиперболических уравнений»** и состоящая из четырёх параграфов, посвящена постановке и исследованию задач со смещением для уравнения параболо-гиперболического типа с нехарактеристической линией изменения типа в неограниченной области $Q=Q_0\cup Q_1\cup Q_2$, где

$$Q_0=\{(x,t):x=0,0<t<T\},\ Q_1=\{(x,t):0<x<+\infty,\ 0<t<T\},$$
$$Q_2=\{(x,t):-T/2<x<0,\ -x<t<x+T\};\ T=const>0.$$

В параграфе 2.1 в области Q рассмотрено уравнение

$$0=Lu\equiv\begin{cases}L_1u\equiv u_{xx}+(k/x)u_x-u_t-\lambda_1^2u,(x,t)\in Q_1;\\ L_2u\equiv u_{xx}-u_{tt}-\lambda_2^2u,\quad (x,t)\in Q_2,\end{cases}\qquad(11)$$

где $k,\lambda_1,\lambda_2\in R$, причем $k\in(0;1)$, и исследована следующая задача

Задача H_1. *Найти функцию* $u(x,t)\in C(\overline{Q})\cap C^{2,1}_{x,t}(Q_1)\cap C^{2,2}_{x,t}(Q_2)$, *удовлетворяющую в областях* Q_1 *и* Q_2 *уравнению (11), на отрезке* Q_0 *условию склеивания*

$$\lim_{x\to+0}x^ku_x(x,t)=\lim_{x\to-0}u_x(x,t),\quad 0<t<T,\qquad(12)$$

а на границе области – краевым условиям

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad 0\leq x<+\infty;\qquad \lim_{x\to+\infty}u(x,t)=0,\quad 0\leq t\leq T;\qquad(13)$$
$$a(t)A^{0,\lambda_2}_{0t}[u(-t/2,t/2)]+b(t)A^{0,\lambda_2}_{tT}\{u[(t-T)/2,(t+T)/2]\}+$$
$$+c(t)u(0,t)=f(t),\quad 0<t<T,$$

где $a(t), b(t), c(t), f(t)$*–заданные функции, причем* $a^2(t)+b^2(t)+c^2(t)\neq 0$, $t\in[0,T]$, $A^{0,\lambda}_{kt}$ *- оператор (10),* $\overline{Q}=Q\cup\partial Q$.

Здесь рассмотрено два случая:

1^0. $a(t)+b(t)+2c(t)\neq 0$, $a(T)=0$, $b(0)=0$, $\varphi(0)=f(0)/[c(0)+a(0)]$; (14)

2^0. $a(t)+b(t)+2c(t)\equiv 0$, $a(T)=0$, $b(0)=0$, $\varphi(0)=-f(0)/c(0)$. (15)

Основными результатами параграфа 2.1 являются следующие теоремы:

Теорема 5. *Пусть выполнены условия (14) и следующие условия* $a(t),b(t),c(t),f(t)\in C^1[0,T]\cap C^2(0,T)$; $\varphi(x)\in C^2[0,+\infty)$, *функции* $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ *и* $\varphi''(x)$ *ограничены на* $[0,+\infty)$;

$$\left\{a(t)/[a(t)+b(t)+2c(t)]\right\}'\leq 0,\ \left\{b(t)/[a(t)+b(t)+2c(t)]\right\}'\geq 0.$$

Тогда задача H_1 *имеет единственное решение.*

Теорема 6. *Пусть выполнены условия (15) и следующие условия:* $a'(t)b'(t)>0$, $t\in(0,T)$; $a(t)\neq b(t), t\in[0,T]$; $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $f(t)\in C^1[0,T]$, $\varphi(x)\in C^2[0,+\infty)$; *функции* $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ *и* $\varphi''(x)$ *ограничены на* $[0,+\infty)$;

Тогда задача H_1 *имеет единственное решение.*

В параграфе 2.2 в области Q исследована следующая задача:

Задача H_2. *Найти функцию* $u(x,t)\in C(\overline{Q})\cap C^{2,1}_{x,t}(Q_1)\cap C^{2,2}_{x,t}(Q_2)$, *удовлетворяющую в областях* Q_1 *и* Q_2 *уравнению (11), на отрезке* Q_0 *условию склеивания (12), а на границе области* Q *– краевым условиям (13) и (9).*

Здесь рассмотрены следующие случаи отдельно:

1) $b(t)-a(t)+2c(t)\neq 0$, $a(t)+b(t)\neq 0$, $0\leq t\leq T$; (16)

2) $b(t)-a(t)+2c(t)\equiv 0$, $a(t)+b(t)\neq 0$, $0\leq t\leq T$; (17)

3) $b(t)-a(t)+2c(t)\neq 0$, $a(t)+b(t)\equiv 0$, $0\leq t\leq T$. (18)

Доказаны следующие теоремы:

Теорема 7. *Пусть выполнены условия (16) и* $\alpha'(t)\leq 0, \beta'(t)\leq 0$, $t\in[0,T]$; $\alpha(T)+\beta(T)\geq 0$, $\alpha(T)-\beta(0)\geq 0$,

$$\left.\begin{array}{l} a(t), b(t), c(t), f(t)\in C[0,T]\cap C^2(0,T),\ \varphi(x)\in C[0,+\infty) \\ \cap C^2(0,+\infty),\ \text{функции}\ \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)\ \text{ограничены на}\ [0,+\infty) \end{array}\right\}, \quad (19)$$

где $\alpha(t)=a(t)/[a(t)-b(t)-2c(t)]$, $\beta(t)=b(t)/[a(t)-b(t)-2c(t)]$.

Тогда задача H_2 *имеет единственное решение*

Теорема 8. *Пусть выполнены условия (17), (19) и* $a(T)+b(T)>0(<0)$, $a(T)-b(0)\geq 0(\leq 0)$; $a'(t)\leq 0(\geq 0)$, $b'(t)\leq 0(\geq 0), t\in[0,T]$ *причем в последних трех условиях выполняется хотя бы одно строгое неравенство.*

Тогда задача H_2 *имеет единственное решение.*

Теорема 9. *Пусть выполнены условия (18), (19) и* $\lambda_2=0$ *или* $c(t)\neq 0$, $b(t)=mc(t)$, $m\in R\setminus(0,1]$. *Тогда задача* H_2 *имеет единственное решение.*

В параграфе 2.3 в области Q рассмотрено следующее уравнение

$$L_{\lambda}^{(k)}u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{k}{x}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial^{2-H(x)}u}{\partial t^{2-H(x)}}-\lambda^2 u=0, \tag{20}$$

где $H(x)$ – функция Хевисайда, а $k=const\in(0,1)$.

Исследована следующая

Задача $\tilde{H}_1$. *Найти функцию* $u(x,t)\in\bigcap_{j=1}^{2}\left[C(\bar{Q}_j)\cap C_{x,t}^{2,j}(Q_j)\right]$, *удовлетворяющую в областях* Q_1 *и* Q_2 *уравнению (20), на линии изменения типа* Q_0 *– условиям склеивания*

$$u(-0,t)=u(+0,t),\quad 0\le t\le T;\ \lim_{x\to-0}(-x)^k u_x(x,t)=\lim_{x\to+0}x^k u_x(x,t),\quad 0<t<T, \tag{21}$$

а на границе области Q *– условиям*

$$u(x,0)=\varphi(x),\ 0\le x<+\infty;\ \lim_{x\to+\infty}u(x,t)=0,\ 0\le t\le T, \tag{22}$$

$$a(t)A_{0t}^{1,\lambda}D_{0t}^{k/2}\left[t^{k-1}u\left(-\frac{t}{2},\frac{t}{2}\right)\right]+b(t)A_{Tt}^{1,\lambda}D_{Tt}^{k/2}\left[(T-t)^{k-1}u\left(\frac{t-T}{2},\frac{t+T}{2}\right)\right]+$$
$$+c(t)u(0,t)=\psi(t),\qquad 0<t<T,$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $\psi(t)$ *– заданные функции, причем* $a^2(t)+b^2(t)+c^2(t)\ne 0$, $t\in[0,T]$; $A_{mt}^{s,\lambda}$ *и* D_{mt}^{α} *–операторы (10) и*

$$D_{mt}^{\alpha}\left[g(t)\right]\equiv\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_m^t|t-z|^{-\alpha}g(z)dz,\quad 0<\alpha<1. \tag{23}$$

Здесь рассмотрены следующие случаи: I. $p(t)\ne 0, t\in[0,T]$; II. $p(t)\equiv 0, t\in[0,T]$, где $p(t)=a(t)(T-t)^{1-k/2}+b(t)t^{1-k/2}+\left[\Gamma(k/2)/\Gamma(k)\right]\left[t(T-t)\right]^{1-k/2}c(t)$.

I. Пусть $p(t)\ne 0, t\in[0,T]$. Отсюда, при $t=T$ и $t=0$ следует, что $b(T)\ne 0$, $a(0)\ne 0$. Справедлива следующая

Лемма 1. *Если* $u(x,t)$ *решение однородной задачи* $\tilde{H}_1$ *и* $\lim_{x\to 0}|x|^k u_x(x,t)\in L_2[0,T]$, *то при* $p(t)\ne 0$, $\left[a(t)(T-t)^{1-k/2}/p(t)\right]'\le 0$, $\left[b(t)t^{1-k/2}/p(t)\right]'\ge 0$, $t\in[0,T]$ *справедливо равенство* $\lim_{x\to 0}|x|^k u_x(x,t)=0, t\in[0,T]$.

Теорема 10. *Если выполнены условия леммы 1, то задача* $\tilde{H}_1$ *не может иметь более одного решения.*

Теорема 11. *Пусть выполнены условия леммы 1 и следующие условия*

$$a(t)=(T-t)^{\varepsilon+k/2}\tilde{a}(t),\ b(t)=t^{\varepsilon+k/2}\tilde{b}(t),\ c(t)=\left[t(T-t)\right]^{\varepsilon+k/2}\tilde{c}(t), \varepsilon>0,$$

$$\tilde{a}(t),\tilde{b}(t),\ \tilde{c}(t)\in C^1[0,T]\cap C^4(0,T);\ \psi(t)=\left[t(T-t)\right]^{-\delta}\tilde{\psi}(t),\ \delta\leqslant 1-(k/2),$$

$$\tilde{\psi}(t)\in C^1[0,T]\cap C^3(0,T);\ \varphi(x)\in C[0,+\infty)\cap C^3(0,+\infty),\ \lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=0,$$

а функции $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\varphi'''(x)$ *ограничены на* $[0,+\infty)$.

Тогда существует решение задачи $\tilde{H}_1$, *притом оно единственно.*

II. Пусть $p(t)\equiv 0$, $t\in[0,T]$. Отсюда при $t=0$ и $t=T$ следует, что $a(0)=0$, $b(T)=0$. Учитывая это, предположим, что $a(t)=t^{1-k/2}\alpha(t)$, где $\alpha(t)$ – известная функция.

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 12. *Если* $p(t)\equiv 0$, $a(t)=t^{1-k/2}\alpha(t)$, $\alpha'(t)\le 0$, $c'(t)\le 0, t\in[0,T]$; $\alpha(T)-\alpha(0)-\Gamma(k/2)\Gamma^{-1}(k)c(0)>0$, *то задача* $\tilde{H}_1$ *не может иметь более одного решения.*

Теорема 13. *Пусть выполнены условия теоремы 12 и условия* $\alpha(t),c(t)\in C^2[0,T]\cap C^4(0,T)$, $\varphi(x)\in C[0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$, $\psi(t)=t^{\delta}\tilde{\psi}(t)$, $\delta\ge(1-k)/2$, $\tilde{\psi}(t)\in C^1[0,T]\cap C^3(0,T)$; $c(t)\ne 0$, $[\alpha(t)-\cos(k\pi)\beta(t)]\beta(t)<0$, $t\in[0,T]$. *Тогда существует решение задачи* $\tilde{H}_1$, *притом оно единственно.*

В параграфе 2.4 в области Q рассмотрено уравнение

$$0=\begin{cases}\tilde{L}_1u\equiv u_{xx}+(k_1/x)u_x-u_t-\lambda_1^2u, & (x,t)\in Q_1,\\ \tilde{L}_2u\equiv u_{xx}+(k_2/x)u_x-u_{tt}-\lambda_2^2u, & (x,t)\in Q_2,\end{cases}$$

где $k_1,k_2,\lambda_1,\lambda_2\in R$, причем $k_1\in(-1,1)$, $k_2\in(0,1)$ и исследована следующая

Задача $\tilde{H}_2$. *Найти функцию* $u(x,t)\in\bigcap\limits_{j=1}^{2}\left[C(\bar{Q}_j)\cap C^{2,j}_{x,t}(Q_j)\right]$, *удовлетворяющую в областях* Q_1 *и* Q_2 *уравнениям* $\tilde{L}_1u=0$ *и* $\tilde{L}_2u=0$ *соответственно, на отрезке* Q_0 *условиям склеивания* $u(-0,t)=u(+0,t)$, $0\le t\le T$; $\lim\limits_{x\to-0}(-x)^{k_2}u_x(x,t)=\lim\limits_{x\to+0}x^{k_1}u_x(x,t)$, $t\in(0,T)$, *а на границе области* Q *условиям (22) и*

$$a(t)A_{0t}^{1,\lambda_2}D_{0t}^{1-k_2/2}u(-t/2,t/2)+b(t)A_{Tt}^{1,\lambda_2}D_{tT}^{1-k_2/2}u[(t-T)/2,(t+T)/2]+$$
$$+c(t)\lim_{x\to-0}(-x)^{k_2}u_x(x,t)=\psi(t),\ t\in(0,T),$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $\psi(t)$ – *заданные функции, причем* $a^2(t)+b^2(t)+c^2(t)\ne 0$, $t\in(0,T)$; $A_{mt}^{s,\lambda}$ *и* D_{mt}^{α} – *операторы (10) и (23).*

Доказаны следующие леммы и теоремы:

Лемма 2. Пусть $\nu(t)\in L_2[0,T]\cap C(0,T)$, $k_2>(1+k_1)/2$, $q(t)\ne 0$, $t\in[0,T]$ *и выполнены следующие неравенства* $\alpha'(t)\le 0$, $\beta'(t)\ge 0$, $\alpha'^2(t)+\beta'^2(t)\ne 0$, $t\in[0,T]$. *Тогда однородная задача* $\tilde{H}_2$ *имеет только тривиальное решение, где* $q(t)=\gamma_5\left[a(t)(T-t)^{k_2/2}+b(t)t^{k_2/2}\right]-[t(T-t)]^{k_2/2}c(t)$, $\alpha(t)=(T-t)^{k_2/2}a(t)q^{-1}(t)$, $\beta(t)=t^{k_2/2}b(t)q^{-1}(t)$, $\gamma_5=2^{k_2-1}\Gamma(1-k_2)\Gamma^{-1}[1-(k_2/2)]\Gamma^{-1}(k_2)\Gamma(k_2/2)$.

Теорема 14. *Если выполнены условия леммы 2, то задача* $\tilde{H}_2$ *не имеет более одного решения.*

Теорема 15. *Пусть выполнены условия леммы 2 и следующие условия:* $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\delta(t)\in C[0,T]\cap C^2(0,T)$; $\varphi(x)\in C[0,+\infty)\cap C^4(0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$; *а функции* $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ *и* $\varphi'''(x)$ *ограничены на* $(0,+\infty)$. *Тогда решение задачи* $\tilde{H}_2$ *существует, притом оно единственно, где* $\delta(t)=\left[t(T-t)\right]^{k_2/2}\psi(t)q^{-1}(t)$.

Пусть $k_2=(1+k_1)/2$ и $q(t)\neq 0$, $t\in(0,T)$, $q(0)=q(T)$. Предположим, что

$$a(t)=t^{k_2/2}a_0(t),\ b(t)=(T-t)^{k_2/2}b_0(t),\ t\in[0,T],\ a_0(0)\neq 0,\ b_0(T)\neq 0. \quad (24)$$

Лемма 3. *Пусть* $\nu(t)\in L_2[0,T]$ *и выполнены (24) и следующие неравенства* $q_0(t)\neq 0$, $\left[a_0(t)/q_0(t)\right]'\leq 0$, $\left[b_0(t)/q_0(t)\right]'\geq 0$, $t\in(0,T)$ *и* $a_0(T)\geq 0$, $b_0(0)\geq 0$. *Тогда однородная задача* $\tilde{H}_2$ *имеет только тривиальное решение, где* $\alpha_0(t)=a_0(t)/q_0(t)$, $\beta_0(t)=b_0(t)/q_0(t)$, $\delta_0(t)=-\psi(t)/q_0(t)$, $q_0(t)=\gamma_5\left[a_0(t)+b_0(t)\right]-c(t)$, $\nu(t)=\lim\limits_{x\to-0}(-x)^{k_2}u_x(x,t)=\lim\limits_{x\to+0}x^{k_1}u_x(x,t)$, $u(x,t)$– *решение задачи* $\tilde{H}_2$.

Теорема 16. *Если выполнены условия леммы 3, то задача* $\tilde{H}_2$ *не имеет более одного решения.*

Теорема 17. *Пусть выполнены условия леммы 3 и следующие условия:* $\alpha_0(t)$, $\beta_0(t)$, $\delta_0(t)\in C[0,T]\cap C^2(0,T)$, $b_2(t)>0$, $\alpha_0(t)-\beta_0(t)\cos(k_2\pi)>0$, $t\in[0,T]$, $\varphi(x)\in C^2[0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$, $k_1>0$.

Тогда решение задачи $\tilde{H}_2$ *существует, притом оно единственно.*

Третья глава диссертации, названная **«Краевые задачи для смешанно-параболических уравнений целого и дробного порядка»** и состоящая из трех параграфов, посвящена постановке и исследованию краевых задач для смешанно-параболических уравнений в неограниченных областях.

Пусть W – область плоскости переменных x и t, ограниченная прямыми $t=0$ и $t=T$, где $T=const>0$. В области W рассмотрено уравнение

$$0=\begin{cases} L_1^{(k_1)}u\equiv u_{xx}+(k_1/x)u_x-u_t,\ (x,t)\in W_1=W\cap(x>0),\\ L_2^{(k_2)}u\equiv u_{xx}+(k_2/x)u_x+u_t,\ (x,t)\in W_2=W\cap(x<0),\end{cases} \quad (25)$$

где k_1 и k_2 – заданные действительные числа из $[0,1)$, принадлежит смешанно-параболическому типу, причем направления времени его противоположны.

В параграфе 3.1 исследована следующая задача

Задача *G* (Жевре). *Найти непрерывную в замыкании области* W *функцию* $u(x,t)$, *являющуюся регулярным в областях* W_1 *и* W_2 *решением уравнения (25), и удовлетворяющую условиям склеивания*

$\lim\limits_{x\to-0} u(x,t) = \lim\limits_{x\to+0} u(x,t),\ 0<t<T,\ \lim\limits_{x\to-0}(-x)^{k_2} u_x(x,t) = \lim\limits_{x\to+0} x^{k_1} u_x(x,t),\ 0<t<T$ *и граничным условиям*

$$u(x,0)=\varphi_1(x),\quad 0\le x<+\infty;\quad \lim_{x\to+\infty} u(x,t)=0,\ \ t\in[0,T], \tag{26}$$
$$u(x,T)=\varphi_2(x),\quad -\infty<x\le 0;\quad \lim_{x\to-\infty} u(x,t)=0,\ \ t\in[0,T],$$

где $\varphi_1(x)$ *и* $\varphi_2(-x)$ *– заданные функции, причем* $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_1(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi_2(x)=0$.

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 18. *Пусть выполнены следующие условия:* $\varphi_1(x)=x^{\varepsilon}\tilde{\varphi}_1(x)$, $\tilde{\varphi}_1(x)\in C^2[0,+\infty)$, $\varepsilon>0$ *и функции* $\tilde{\varphi}_1(x), \tilde{\varphi}_1'(x), \tilde{\varphi}_1''(x)$ *ограничены на* $[0,+\infty)$; $\varphi_2(x)=(-x)^{\delta}\tilde{\varphi}_2(x)$, $\tilde{\varphi}_2(x)\in C^2(-\infty,0]$, $\delta>0$ *и функции* $\tilde{\varphi}_2(x)$, $\tilde{\varphi}_2'(x)$, $\tilde{\varphi}_2''(x)$ *ограничены на* $(-\infty,0]$. *Тогда задача G имеет единственное решение.*

В параграфе 3.2 в области $W_3=\{(x,t): -q<x,\ 0<t<T\}$, где $T,q\in R$, причем $T>0$, $q>0$, рассмотрено смешанно-параболическое уравнение

$$0=\begin{cases} L_1 u\equiv u_{xx}-u_t,\ (x,t)\in W_1=W_3\cap(x>0); \\ L_2 u\equiv u_{tt}+u_x,\ (x,t)\in W_4=W_3\cap(x<0), \end{cases}$$

с перпендикулярными направлениями времени и исследована следующая

Задача Π. *Найти непрерывную в замыкании области* W_3 *функцию* $u(x,t)$, *удовлетворяющую в областях* W_1 *и* W_4 *соответственно уравнениям* $L_1 u=0$ *и* $L_2 u=0$, *условию склеивания*

$$\lim_{x\to-0} u_x(x,t)=a_1(t)\lim_{x\to+0} u_x(x,t)+a_2(t)D_{0t}^{\alpha}\left[b_2(t)u(0,t)\right]+$$
$$+a_3(t)D_{tT}^{\beta}\left[b_3(t)u(0,t)\right]+b_1(t),\quad 0<t<T$$

и краевым условиям (26), $u(x,T)=\varphi_2(x)$, $u(x,0)=\varphi_3(x), -q\le x\le 0$, *где* $a_j(t)$, $b_j(t)$, $\varphi_j(x)$, $\left(j=\overline{1,3}\right)$*– заданные функции, причем* $a_j(t)$, $b_j(t)\in C[0,T]$, $j=\overline{1,3}$ *и* $a_1(t)\ne 0$, $t\in[0,T]$; $\varphi_1(x)\in C[0,+\infty)$ *и ограничена,* $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)\in C[-q,0]$ *и* $\varphi_1(0)=\varphi_3(0)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_1(x)=0$; α,β *заданные действительные числа из* $(0,1)$; D_{0t}^{α} *и* D_{tT}^{β}*– операторы вида (23).*

Доказаны следующие леммы и теоремы:

Лемма 4. *Если на отрезке* $[0,T]$ $a_1(t)>0$, $a_2(t)\le 0$ *и* $b_2(t)>0$, $b_3(t)>0$, $b_2(t)$ *– неубывающая, а* $b_3(t)$ *– невозрастающая функция, то однородная задача* Π *имеет только тривиальное решение.*

Теорема 19. *Если выполнены условия леммы 4, то задача* Π *не имеет более одного решения.*

Теорема 20. *Если выполнены условия леммы 4 и* $a_j(t)\in C^1[0,T]\cap C^2(0,T)$, $j=\overline{1,3}$, $\exists\varphi_1'(x)\in C(0,+\infty)\cap L(0,+\infty)$, *то существует решение задачи* Π, *притом оно единственно.*

В параграфе 3.3 в области $W_5 = W_1 \cup W_0 \cup W_6$ рассмотрено следующее смешанно-параболическое уравнение дробного порядка с перпендикулярными направлениями времени:

$$0 = \begin{cases} u_{xx}(x,t) - D_{0t}^{\alpha} u(x,t), (x,t) \in W_1; \\ u_{tt}(x,t) + D_{x0}^{\delta} u(x,t), (x,t) \in W_6, \end{cases} \tag{27}$$

где $W_1 = \{(x,t): 0 < x < +\infty; 0 < t < T\}, W_6 = \{(x,t): -q < x < 0, \ -\infty < t < +\infty\}$, $W_0 = \{(x,t): x = 0, 0 < t < T\}$; α, δ, $q, T \in R$, $0 < \alpha, \delta < 1$; D_{mt}^{α} – оператор (23).

Функция $u(x,t)$, которая удовлетворяет в области $W_1 \cup W_6$ уравнению (27) и следующим условиям $D_{0t}^{\alpha-1} u(x,t) \in C(\overline{W}_1)$, $D_{x0}^{\delta-1} u(x,t) \in C(\overline{W}_6)$, $u_{tt}(x,t), D_{x0}^{\delta} u(x,t) \in C(W_6)$, $u_{xx}(x,t), D_{0t}^{\alpha} u(x,t) \in C(W_1)$, называется регулярным в области $W_1 \cup W_6$ решением уравнения (27).

Исследованы следующие задачи:

Задача 1. *Найти регулярное в области $W_1 \cup W_6$ решение уравнения (27), удовлетворяющее следующим граничным условиям*

$$\lim_{t \to +0} D_{0t}^{\alpha-1} u(x,t) = \varphi_1(x), \qquad 0 \le x < +\infty; \tag{28}$$

$$\lim_{x \to -0} (-x)^{1-\delta} u(x,t) = \varphi_2(t), \qquad -\infty < t \le 0; \tag{29}$$

$$\lim_{x \to -0} (-x)^{1-\delta} u(x,t) = \varphi_3(t), \qquad T \le t < +\infty \tag{30}$$

и условиям склеивания

$$\lim_{x \to -0} (-x)^{1-\delta} u(x,t) = \lim_{x \to +0} u(x,t), \qquad 0 \le t \le T; \tag{31}$$

$$\lim_{x \to -0} (-x)^{1-\delta} (\partial / \partial x)\left[(-x)^{1-\delta} u(x,t)\right] = \lim_{x \to +0}\left[u_x(x,t) + b(t) u(x,t) + \right.$$
$$\left. + c(t) u_t(x,t) + \omega(t) D_{0t}^{-\varepsilon_1} u(x,t) + m(t) D_{Tt}^{-\varepsilon_2} u(x,t)\right] + n(t), \ t \in (0,T), \tag{32}$$

где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $\omega(t)$, $m(t)$, $n(t)$ – заданные функции, а ε_1 и ε_2 – заданные действительные числа $(0,1)$.

Введем обозначение: $W_7 = W_6 \cap (t > 0)$. Регулярным в области $W_1 \cup W_7$ решением уравнения (25), называется функция $u(x,t)$, удовлетворяющая в области $W_1 \cup W_7$ уравнению (25) и следующим условиям: $D_{0t}^{\alpha-1} u(x,t) \in C(\overline{W}_1)$, $D_{x0}^{\delta-1} u(x,t) \in C(\overline{W}_7)$, $u_{tt}(x,t), D_{x0}^{\delta} u(x,t) \in C(W_7)$, $u_{xx}(x,t), D_{0t}^{\alpha} u(x,t) \in C(W_1)$.

Задача 2. *Найти регулярное в области $W_1 \cup W_7$ решение уравнения (27), удовлетворяющее условиям (28), (30), $\lim_{t \to +0} u(x,t) = \psi(x)$, $-q \le x \le 0$ и условиям склеивания (31), (32), где $\psi(x)$ – заданная функция.*

Основными результатами параграфа 3.3 являются следующие теоремы:

Теорема 21. *Пусть выполнены следующие условия:*

$$b(t) \le 0, c'(t) \le 0, \omega'(t) \ge 0, m'(t) \ge 0, t \in [0,T], \omega(T) \le 0, m(0) \ge 0; \tag{33}$$

$b(t), n(t) \in C[0,T]$, $c(t), \omega(t), m(t) \in C^1[0,T]$; $\varphi_3(t) \in C^1[T, +\infty) \cap C^2(T, +\infty)$,

$$\varphi_1(x) = x^{\varepsilon}\tilde{\varphi}(x),\ \varepsilon > (1-2\beta)/\beta,\ \ \tilde{\varphi}(x) \in C[0,+\infty) \cap C^1(0,+\infty),$$
$$\varphi_2(t) \in C^1(-\infty,0] \cap C^2(-\infty,0),\ \varphi_2(0) = 0,\ \ \varphi_3(t) \in C^1[T,+\infty) \cap C^2(T,+\infty).$$

Тогда задача 1 имеет единственное решение.

Теорема 22. *Пусть выполнены условия (31) и следующие условия:* $b(t), n(t) \in C[0,T]$, $c(t), \omega(t), m(t) \in C^1[0,T]$; $\varphi_1(x) = x^{\varepsilon}\tilde{\varphi}(x)$, $\varepsilon > (1-2\beta)/\beta$, $\varphi_3(t) \in C^1[T,+\infty) \cap C^2(T,+\infty)$, $\psi(x) \in C^1[-a,0]$, $\psi(0) = 0$. *Тогда задача 2 имеет единственное решение.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация посвящена постановке и исследованию локальных и нелокальных краевых задач для параболо-гиперболических уравнений с нехарактеристической линией изменения типа и смешанно-параболических уравнений. В первой главе в ограниченной области рассмотрены нелокальные задачи с интегральным условием и условием смещения для модельных параболо-гиперболических уравнений, во второй главе в неограниченной области сформулированы задачи со смещением для параболо-гиперболических уравнений, имеющих сингулярний коэффициент и спектралный параметр, а в последней третьей главе – в неограниченных областях поставлены краевые задачи для смешанно-параболических уравнений целого и дробного порядка.

Результаты исследования следующие:

установлена однозначная разрешимость двух нелокальных задач с интегральным условием и условием смещения для модельных параболо-гиперболических уравнений с нехарактеристической линией изменения типа;

выявлены условия, обеспечивающие однозначную разрешимость нелокальных задач со смещением для параболо-гиперболических уравнений с нехарактеристической линией изменения типа, имеющих сингулярный коэффициент и спектральный параметр;

доказаны единственность и существование решения задачи Жевре с общими условиями склеивания для смешанно-параболического уравнения целого порядка с противоположными направлениями времени, имеющего сингулярный коэффициент;

найдена постановка задачи Трикоми для смешанно-параболического уравнения целого порядка с перпендикулярными направлениями времени и доказана однозначная разрешимость поставленной задачи;

доказаны единственность и существование решения краевых задач для смешанно-параболических уравнений дробного порядка.

Единственность решения изученных задач доказаны методами интегралов энергии и принципа экстремума, а существование решения – методом интегральных уравнений. Все задачи, изученные в диссертации, являются новыми и могут быть использованы при дальнейшем развитии теории дифференциальных уравнений в частных производных.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 FERGANA STATE UNIVERSITY

FERGANA STATE UNIVERSITY

MAMANAZAROV AZIZBEK OTAJON UGLI

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR PARABOLIC-HYPERBOLIC AND MIXED PARABOLIC EQUATIONS

01.01.02 – Differential equations and mathematical physics

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Fergana – 2021

The theme of Dissertation of Doctor of Philosophy (PhD) on Physical and Mathematical Sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number №B 2021.3.PhD/FM627

Dissertation has been prepared at Fergana State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website (www.fdu.uz) and the "ZiyoNet" information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisors: **Urinov Akhmadjon Kushakovich**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Official opponents: **Kadirkulov Bakhtiyar Jalilovich**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Docent

Apakov Yusupjon Pulatovich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Docent

Leading organization: **Urgench State University**

Defense will take place « 29 » 12 2021 at 10^{00} at the meeting of Scientific Council number PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 at Fergana State University. (Address: Murabbiylar str. 19, Fergana, Uzbekistan, 150100, Phone: (+99873)244-44-02, fax: (+99873)244-44-93, e-mail: fardu_info@umail.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Fergana State University (is registered № 142). (Address: Murabbiylar str. 19, Fergana, Uzbekistan, 150100, Phone: (+99873)244-44-94.

Abstract of dissertation sent out on « 18 » 12 2021 year.

(Mailing report №________ on «___» ________ 2021 year).

B.T. Samatov
Deputy chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.Ph.M.S.

I.U.Khaydarov
Scientific Secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, C.Ph.M.S

Sh.T.Karimov
Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.Ph.M.S.

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is to study second order parabolic-hyperbolic and mixed parabolic type differential equations.

The object of the research work is the second order parabolic-hyperbolic and mixed parabolic type differential equations.

The scientific novelty of the research consists of the following:

established the unique solvability of nonlocal problems with an integral condition and a shift condition for model parabolic-hyperbolic equations with a non-characteristic line of change of the type;

the conditions are revealed that ensure the unique solvability of nonlocal problems with a shift for parabolic-hyperbolic equations with a non-characteristic line of change of type, having a singular coefficient and a spectral parameter;

the uniqueness and existence of the solution of Gevrey problem with general gluing conditions for a mixed-parabolic equation of integer order with opposite time directions and having a singular coefficient has been proved;

the formulation of the Tricomi problem for a mixed-parabolic equation of integer order with perpendicular time direction was found and the unique solvability of the problem was proved;

the uniqueness and existence of the boundary-value problems for fractional order mixed parabolic equations was proved

Implementation of research results. The results obtained on the study of problems for differential equations of parabolic-hyperbolic and mixed-parabolic types has been implemented in the following research projects:

the results on the study of nonlocal problems for second order parabolic-hyperbolic type equations were used in the study of boundary value problems for differential equations of the third order in the foreign project "AP 09058677. Investigation of the correctness of boundary value problems for non-classical equations of mathematical physics" (competition of young scientists of the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, 2021-2023. Agreement No. 97KMU2 dated March 05, 2021) (Reference No. 15-15-10-02-11/1793 dated October 5, 2021 of Kazakh National Pedagogical University named after Abai). As a result, the strong solvability of a number of boundary value problems for parabolic-hyperbolic equations of the second and third order in functional spaces has been proved;

nonlocal problems and methods of their study for parabolic-hyperbolic equations with a singular coefficient were used in a foreign grant on the topic "Singularly perturbed equations of the theory of chemical kinetics and the construction of vibrational asymptotics for the solution of the Bessel equation" (2020) (Reference No. 1423 dated November 10, 2021 of the Institute of Fundamental and Applied Research at Osh State University). These results made it possible to formulate and study the problems of the theory of chemical kinetics and their application in applied problems.

Эълон қилинган ишлар рўйхати

Список опубликованных работ

List of published works

I бўлим (I часть; part I)

1. Urinov A.K., Mamanazarov A.O. A problem with integral condition for a parabolic-hyperbolic equation with non-characteristic line of type changing // Contemporary Analysis and Applied Mathematics (CAAM). – Turkey, Istanbul. 2015. Vol.3, No.2. –Pp. 170–183. (5. Journal IF 0.469)
2. Уринов А.К., Маманазаров А.О. Задачи с интегральным условием для параболо-гиперболического уравнения с нехарактеристической линией изменения типа // Вестник НУУз. –Ташкент. 2017. №2/2. –С. 227–238. (01.00.00; №8)
3. Маманазаров А.О. Нелокальная задача для одного параболо-гиперболического уравнения // Бюллетень Института математики. –Ташкент. 2018. №6. –С. 25–31. (01.00.00; №17)
4. Маманазаров А.О. Об одной задаче со смещением для параболо-гиперболического уравнения // Бюллетень Института математики. –Ташкент. 2019. №2. – С.7–16. (01.00.00; №17)
5. Маманазаров А.О. Задачи Трикоми для одного параболо - гиперболического уравнения с сингулярным коэффициентом // Бюллетень Института математики. –Ташкент. 2020. №1. –С.75–89. (01.00.00; №17)
6. Уринов А.К., Маманазаров А.О. Однозначная разрешимость одной нелокальной задачи со смещением для параболо-гиперболического уравнения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. –Ижевск. 2020. Т. 30, Вып. 2. – С. 270-289. (3. Journal IF: 1.0)
7. Маманазаров А.О. Краевые задачи для смешанно-параболического уравнения дробного порядка в неограниченных областях // Бюллетень Института математики. –Ташкент. 2020. №6. –С. 37 – 48 (01.01.01; №17)
8. Маманазаров А.О. Задача Жевре для одного смешанно-параболического уравнения с сингулярным коэффициентом // Итоги науки и техники. Совр. мат. и ее прил. –Москва. Том 156, 2018. -С.18-29.
   Mamanazarov A.O. Gevrey problem for a mixed parabolic equation with a singular coefficient // Journal of Mathematical Sciences. Vol. 254, No. 6, 2021. -Pp.718-730. (3. Journal IF 0.6)
9. Mamanazarov A.O. A nonlocal problem for a parabolic hyperbolic equation with singular coefficients // Uzbek Mathematical Journal. –Tashkent. Vol.65, Iss.1, 2021. –Pp. 118–136 (01.00.00, №6)
10. Маманазаров А.О. Задачи с интегральным условием для параболо-гиперболического уравнения // Бюллетень Института математики. –Ташкент. 2021. №4. –С. 113 – 123 (01.01.01; №17)

II бўлим (II часть; part II)

11. Маманазаров А.О. Задача Жевре для одного смещанно-параболического уравнения с сингулярным коэффициентом // Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения». 15-17 декабря 2017 г.-Ташкент. -С.58 – 59.
12. Маманазаров А.О. Нелокальная задача для параболо гиперболического уравнения со спектральным параметром // Материалы V международной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». 4-7-декабря 2018 г. Нальчик, Кабардино-Балкарская Республика, -С. 132.
13. Mamanazarov A.O. Problems for a mixed-parabolic equation // Abstracts of the International scientific conference on the theme «Modern problems of differential equations and related branches of mathematics ». March 12-13, 2020. Fergana. -Pp. 207-210.
14. Mamanazarov A.O. A nonlocal problem for parabolic hyperbolic equation with singular coefficients // Abstracts of the Intern. online Conf. "Frontier in Math. and Computer Science". October 12-15, 2020. –Tashkent, -Pp. 98-99.
15. Уринов А.К., Маманазаров А.О. Однозначная разрешимость одной нелокальной задачи для параболо-гиперболического уравнения // Тезисы докладов респ. конф. с участием зарубежных ученых «Современные методы мате- матической физики и их приложения», 17-18 ноября 2020 г., С. 421-425.

Автореферат Фарғона давлат университети «FarDU. Ilmiy xabarlar – Научный вестник. ФерГУ» илмий – методик журнал таҳририятида таҳрирдан ўтказилди.