

**В.И. РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ
ХУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ҚУДРАТОВ ҲАМЗА ЭРГАШЕВИЧ

**КРИТИК ТАРМОҚЛАНУВЧИ ТАСОДИФИЙ ЖАРАЁНЛАР
УЧУН ЛИМИТ ТЕОРЕМАЛАР ВА МОМЕНТЛАР УЧУН БАҲОЛАР**

01.01.05 – Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD)
ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

Тошкент - 2022

**Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD)
диссертацияси автореферати мундарижаси**

**Оглавление автореферата диссертации
доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам**

**Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD)
on physical-mathematical sciences**

Қудратов Ҳамза Эргашевич

Критик тармоқланувчи тасодифий жараёнлар учун
лимит теоремалар ва моментлар учун баҳолар..... 3

Қудратов Ҳамза Эргашевич

Предельные теоремы для критических ветвящихся
случайных процессов и оценки для моментов..... 15

Kudratov Khamza Ergashevich

Limits theorems for critical branching random processes
and estimates for moments..... 27

Эълон қилинган ишлар рўйхати

Список опубликованных работ
List of published works..... 30

**В.И. РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ
ХУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ҚУДРАТОВ ҲАМЗА ЭРГАШЕВИЧ

**КРИТИК ТАРМОҚЛАНУВЧИ ТАСОДИФИЙ ЖАРАЁНЛАР
УЧУН ЛИМИТ ТЕОРЕМАЛАР ВА МОМЕНТЛАР УЧУН БАҲОЛАР**

01.01.05 – Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD)
ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

Тошкент – 2022

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси
Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида
B2021.4.PhD/FM347 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгашнинг веб-
саҳифасида (<http://kengash.mathinst.uz>) ва «Ziynet» Ахборот таълим порталида
(<http://www.ziynet.uz>) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:

Хусанбаев Якубджан Мухамаджанович
физика-математика фанлари доктори, доцент

Расмий оппонентлар:

Абдушукуров Абдурахим Ахмедович
физика-математика фанлари доктори, профессор

Азимов Жаҳонгир Баҳромович
физика-математика фанлари номзоди

Етакчи ташкилот:

Қарши Давлат университети

Диссертация ҳимояси В.И. Романовский номидаги Математика институти ҳузуридаги
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2022 йил «25» Январ соат 16.00 даги
мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш, Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй.
Тел.: (+99871)207-91-40, e-mail: uzbmash@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Диссертация билан В.И. Романовский номидаги Математика Институтининг Ахборот-
ресурс марказида танишиш мумкин (131 рақамли билан рўйхатга олинган). Манзил: 100174,
Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй. Тел.: (+99871)207-91-40.

Диссертация автореферати 2022 йил «7» Январ куни тарқатилди.
(2022 йил «7» Январ даги 2 рақамли реестр баённомаси).



У.А. Розиков
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш раиси,
ф.-м.ф.д., профессор

Ж.К. Адашев
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш илмий котиби,
ф.-м.ф.д., катта илмий ходим

Ш.Қ. Форманов
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш ҳузуридаги Илмий семинар
раиси, ф.-м.ф.д., профессор,
академик

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида фундаментал фанлар соҳасида олиб борилаётган кўпгина илмий- амалий татқиқотлар замонавий тасодифий жараёнлар масалалари, хусусан тармоқланувчи жараёнлар назарияси масалаларини татқиқ қилишга келтирилади. Тармоқланувчи жараёнлар назариясининг шаклланиши дастлаб Ф.Гальтон ва Г.Ватсон томонидан инглиз лордлари фамилиялари йўқ бўлиб кетиш жараёнини ўрганиш билан боғлиқ. Тармоқланувчи тасодифий жараёнлар назарияси- бу бирор тақсимот қонуни асосида ривожланиб боровчи заррачалар популяциясининг эволюцион қонунларини ўрганувчи назария ҳисобланади. Тармоқланувчи жараёнлар демография, тиббиёт, кимё, биология, ҳамда генетик кодлаш ва популяцияларни бошқаришда муҳим аҳамиятга эга. Шунинг учун, тармоқланувчи жараёнларларни татқиқ этиш замонавий тасодифий жараёнлар назариясида долзарб ва муҳим вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда тасодифий сондаги заррачадан бошланувчи Гальтон-Ватсон тармоқланувчи жараёнлари асимптотикасини тадқиқ этиш тасодифий жараёнлар назариясидаги асосий масалалардан бири бўлиб, бошланғич ҳолатнинг ўрта қиймати мавжуд бўлмаган ҳамда битта заррачанинг авлодлари сони дисперсияси чекли бўлган ҳолда жараённинг давом этиш эҳтимоллиги учун асимптотик муносабат аниқланган. Аммо тасодифий сондаги заррачалардан бошланувчи Гальтон-Ватсон тармоқланувчи жараёнларида битта заррачанинг авлодлари сонининг дисперсияси мавжуд бўлмаган ҳолда давом этиш эҳтимоллиги асимптотикасини баҳолаш масаласи тўлиқ ҳал этилмаган. Бу борада, тасодифий сондаги заррачалардан бошланувчи тармоқланувчи жараёнлар асимптотикаси, ўзгарувчан муҳитдаги тармоқланувчи жараёнлар ва иммиграцияли тармоқланувчи жараёнлар моментлари ҳамда марказий моментларини юқоридан баҳолаш масалалари мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий татбиқига, жумладан эҳтимоллар назарияси ва математик статистиканинг катта амалий аҳамиятга эга бўлган долзарб йўналишларига, хусусан тармоқланувчи жараёнларнинг асимптотикасини таҳлил қилишга алоҳида эътибор қаратилди. Бунинг натижасида тармоқланувчи жараёнларнинг асимптотикасини татқиқ қилиш бўйича салмоқли натижаларга эришилди. «Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика» ва «Функционал анализ ва актуар математика» фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар асосида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди¹. Мазкур қарор ижросини таъминлашда тармоқланувчи тасодифий жараёнлар назарияси соҳасида илмий татқиқот ишларини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

¹ Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамаси 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида» ги Фармони, 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В. И. Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора тадбирлари тўғрисида» ги ва 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида» ги Қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига мослиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Тармоқланувчи жараёнларни ўрганиш бўйича дастлабки ишлар Х.Ватсон, Ф.Гальтон, А.Н.Колмогоров, Т.Е.Харрис, Р.Беллман, Б.А.Севастьянов, М.Иржина, С.Карлин, Д.Кендалл, Дж.Ламперти, Н.А.Дмитрев ва бошқалар томонидан амалга оширилган. Тармоқланувчи жараёнлар учун лимит теоремалар Б.А.Севастьянов, А.М.Яглом, В.М.Золотарев, Дж.Ламперти, П.Е.Ней, Дж.Х.Фостер, Дж.А.Виллиамсон, К.Хейткот, В.П.Чистяков, Р.С.Слак, Е.Сенета, А.Г.Пейкс, С.В.Нагаев, А.В.Нагаев, А.М.Зубков, В.А.Ватулин, Ш.К.Форманов, Р.И.Мухамедханова, И.С.Бадалбаев, И.С.Рахимов, Г.К.Митов, К.В.Митов, Н.М.Янев ва бошқалар томонидан ўрганилган.

А.Н.Колмогоров томонидан тармоқланувчи жараёнларнинг давом этиш эҳтимоллиги асимптотикасидаги бош ҳадлар аниқланган. С.В.Нагаев, А.В.Нагаев ва Р.И.Мухамедханова томонидан тармоқланувчи жараёнларнинг давом этиш эҳтимоллиги асимптотикасидаги кейинги ҳадлар олинган. Узлуксиз ҳолда тармоқланувчи жараёнларнинг давом этиш эҳтимоллиги асимптотикаси Б.А.Севастьянов, В.М.Золотарев, В.П.Чистяков томонидан ўрганилган. А.М.Яглом томонидан тармоқланувчи жараёнларнинг шартли (кўрилаётган вақтда жараённинг сўнмаганлик шартида) тақсимооти асимптотикаси ўрганилган ва, хусусан, критик ҳолда кўрсаткичли тақсимоотга яқинлашиши исботланган. Р.С.Слак томонидан битта заррачанинг авлодлар сони дисперсияси чексиз бўлган ҳолда критик тармоқланувчи жараённинг шартли (кўрилаётган вақтда жараённинг сўнмаганлик шартида) тақсимооти асимптотикаси топилган. Узлуксиз параметрли Марков тармоқланувчи жараёнлари учун А.М.Яглом теоремасининг аналоги Б.А.Севастьянов томонидан исботланган.

В.Феллер катта сондаги заррачалардан бошланувчи критик Гальтон-Ватсон тармоқланувчи жараёнларини битта заррача авлодлари сони дисперсияси мавжуд бўлган ҳолда стохастик диффузион жараёнга

яқинлашишини кўрсатган. Г.К.Митов, К.В.Митов, Н.М.Яневлар томонидан ўрта қиймати чексиз тасодифий сондаги заррачадан бошланувчи критик тармоқланувчи жараёнлар учун, битта заррачанинг авлодлар сони чекли дисперсияга эга бўлган ҳолда, шартли тақсимоли лимити топишган. С.В.Нагаев ва В.Вахтел томонидан битта заррачадан бошланувчи ва битта заррачанинг авлодлар сони фақат ўрта қийматга эга бўлган ҳолда критик Гальтон-Ватсон тармоқланувчи жараёни ўрганишган. Шунини таъкидлаш керакки, бу ҳолда жараёни ўзи эмас, балки уни чизиқли бўлмаган алмаштирилгани шартли тақсимолини кўрсаткичли тақсимотга яқинлашиши кўрсатишган.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилаётган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Ўзбекистон Миллий университети Математика факултети «Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика» кафедрасининг «Статистик баҳолаш назарияси ва гипотезаларни текшириш» (2016-2021 йиллар) мавзусидаги илмий тадқиқот йўналиши доирасида бажаришган.

Тадқиқотнинг мақсади тасодифий сондаги ва катта сондаги заррачалардан бошланувчи тармоқланувчи тасодифий жараёнларнинг асимптотик ҳолатларини аниқлаш ва тасодифий жараёнларнинг моментларини юқоридан баҳолашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

критик тармоқланувчи тасодифий жараёнларнинг асимптотик ҳолатларини аниқлаш;

тасодифий сондаги заррачалардан бошланувчи критик тармоқланувчи тасодифий жараёнлар учун шартли ва шартсиз лимит теоремалар исботлаш;

иммиграцияли тармоқланувчи тасодифий жараёнларнинг моментлари учун юқоридан баҳолаш олиш;

ўзгарувчан муҳитдаги тармоқланувчи тасодифий жараёнларнинг моментлари учун баҳолаш олиш.

Тадқиқотнинг объекти тармоқланувчи жараёнлар, иммиграцияли тармоқланувчи жараёнлар, ўзгарувчан муҳитдаги тармоқланувчи жараёнлар.

Тадқиқотнинг предмети ҳосил қилувчи функциялар, тармоқланувчи тасодифий жараёнларнинг моментлари, тармоқланувчи тасодифий жараёнларнинг давом этиш эҳтимоллиги, тармоқланувчи тасодифий жараёнларнинг шартли тақсимоли.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертация ишида эҳтимолликлар назарияси усуллари, характеристик функциялар ва ҳосил қилувчи функциялар аналитик усулларидан фойдаланишган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

тасодифий сондаги заррачалардан бошланувчи критик тармоқланувчи тасодифий жараёнлар давом этиш эҳтимоллиги учун асимптотик муносабатлар аниқланган;

тасодифий сондаги заррачалардан бошланувчи критик тармоқланувчи тасодифий жараёнларнинг сўнмаганлик шартдаги тақсимолини кўрсаткичли

таксимотга яқинлашиши исботланган;

катта сондаги заррачалардан бошланувчи тармоқланувчи жараён таксимотини дисперсияси мавжуд бўлмаган ҳолда асимптотикаси топишган.

иммиграцияли ва ўзгарувчан муҳитдаги тармоқланувчи тасодифий жараёнларнинг моментлари ва марказий моментлари учун юқоридан баҳолаш олинган;

Тадқиқотнинг амалий натижалари маълум муҳитдаги популяция эволюциясининг кўпайиши ёки касалликларни тарқалишининг математик моделларини ўзгарувчан муҳитдаги тармоқланувчи жараёнлар орқали ифодалашни таклиф этилганлиги ва бу тармоқланувчи жараёнлар асимптотикасини аниқлаш усуллари баён қилинганлигидан иборат.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги. Эҳтимолликлар назарияси, тасодифий жараёнлар назарияси, математик таҳлил ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти тармоқланувчи тасодифий жараёнлар назариясини ривожлантиришда қўлланилиши билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти шундан иборатки, популяциялар эволюцияси ҳақида ҳулосалар чиқариш, демография, биология, шунингдек, медицинанинг баъзи масалаларини ечиш имконини берганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Критик тармоқланувчи тасодифий жараёнлар учун лимит теоремалар ва моментлар учун баҳолаш бўйича олинган натижалар асосида:

ўзгарувчан муҳитдаги тармоқланувчи тасодифий жараёнлар моментлари учун юқоридан олинган баҳолашдан ОТ-Ф4-69 рақамли «Гармоник таҳлил, даражали геометрия ва унинг математик физика масалаларига тадбиқлари» мавзусидаги фундаментал илмий лойиҳада интегралларни яқинлашишга текширишда фойдаланилган (Самарқанд Давлат университетининг 2021 йил 24 ноябрдаги № 10/4737-сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши сингуляр интегралларни текис баҳолаш имконини берган.

тасодифий сондаги заррачалардан бошланувчи критик тармоқланувчи тасодифий жараёнлар давом этиш эҳтимоллиги учун аниқланган асимптотик муносабатлардан ОТ-Ф4-03 рақамли «Дискрет ва узлуксиз вақтлик динамик системалар ва қисмий интеграл операторларнинг спектрлари» мавзусидаги фундаментал илмий лойиҳада Q -жараёнлар траекторияларини баҳолашда фойдаланилган (Қарши Давлат университетининг 2021 йил 20 октябрдаги № 04/5185-сонли маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши дискрет ва узлуксиз вақтлик Q -жараёнлар траекторияларининг асимптотикасини қуриш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 7 та халқаро ва 10 та республика илмий–амалий анжуманларида, муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Тадқиқот мавзуси бўйича жами 23 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестацияси комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 6 та мақола, жумладан, 2 таси хорижий ва 4 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг умумий ҳажми 110 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг Ўзбекистон Республикаси фан ва технологиялари ривожланишининг устивор йўналишларига мувофиқлиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси ҳамда Ўзбекистон Миллий университети илмий тадқиқотлари билан боғлиқлиги келтирилган.

Тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг «**Тармоқланувчи тасодифий жараёнларга оид асосий таъриф ва натижалар**» деб номланувчи биринчи бобида диссертация ишини ёритиш ва мавзуни тадқиқ этиш учун зарур бўлган муҳим тушунчалар келтирилган. Шунингдек, диссертация мавзуси доирасидаги тадқиқотлар бошлангунга қадар шу соҳада тадқиқ этилган ишлар ва олинган натижалар шарҳи келтириб ўтилган. Биринчи бобнинг биринчи параграфи Гальтон-Ватсон тармоқланувчи жараёнига оид асосий таъриф ва натижалар деб номланган бўлиб, унда Гальтон-Ватсон тармоқланувчи жараёни таърифи, сонли характеристикалари, ҳосил қилувчи функцияси ва асимптотик тақсимотларига бағишланган. Биринчи бобнинг иккинчи параграфи иммиграцияли тармоқланувчи жараёнларга оид асосий таъриф ва натижалар деб номланган бўлиб, иммиграцияли тармоқланувчи жараёнлар таърифи ва иммиграцияли тармоқланувчи жараёнларга оид муҳим асимптотик натижалар келтирилган.

Айтайлик $\{\xi(n, j), n, j \geq 1\}$ боғлиқсиз, бир хил тақсимланган ва манфий бўлмаган бутун қийматларни қабул қилувчи тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги бўлсин.

1-таъриф. Гальтон-Ватсон тармоқланувчи жараёни деб қуйидаги

$$Z(0) = 1, \quad Z(n) = \sum_{j=1}^{Z(n-1)} \xi(n, j), \quad n \geq 1 \quad (1)$$

рекуррент муносабат билан аниқланувчи тасодифий жараёнга айтилади.

Айтайлик $A = E\xi(1,1) < \infty$ бўлсин. Агар $A < 1$, $A = 1$, $A > 1$ бўлса, у ҳолда (1) муносабат билан аниқланган тасодифий жараён мос равишда докритик, критик, надкритик дейилади.

Фараз қилайлик $\{\xi(n, j), n, j \geq 1\}$ ва $\{\varepsilon(n), n \geq 1\}$ иккита боғлиқсиз ва ҳар бири ўзаро боғлиқсиз ва бир хил тақсимланган, номанфий, бутун қийматларни қабул қилувчи тасодифий микдорлардан ташкил топган кетма-кетликлар бўлсин.

2-таъриф. Иммиграцияли тармоқланувчи жараён деб қуйидаги

$$X(0) = 0, \quad X(n) = \sum_{j=1}^{X(n-1)} \xi(n, j) + \varepsilon(n), \quad n \geq 1 \quad (2)$$

рекуррент муносабатлар билан аниқланувчи тасодифий жараёнга айтилади.

Диссертациянинг «Гальтон-Ватсон тармоқланувчи жараёнлари учун асимптотик муносабатлар» деб номланган иккинчи бобида битта заррачадан бошланувчи Гальтон-Ватсон тармоқланувчи жараёни давом этиш эҳтимоллиги учун қуйи ва юқоридан баҳолар келтирилган, шунингдек тасодифий сондаги заррачадан бошланувчи Гальтон-Ватсон тармоқланувчи жараёни давом этиш эҳтимоллиги учун асимптотик муносабатлар ҳамда Яглом ва Slack шартли лимит теоремалари аналоглари келтирилган. Хусусий ҳолда Яглом теоремасидаги яқинлашиш тезлиги баҳоланган. Шунингдек катта сондаги заррачалардан бошланувчи Гальтон-Ватсон тармоқланувчи жараёни учун битта заррачанинг авлодлар сони дисперсияси мавжуд бўлмаган ҳолда Феллер теоремаси аналоглари исбот қилинган.

Фараз қилайлик $\{\xi(k, j), k, j \geq 1\}$ - биргаликда боғлиқсиз, манфий бўлмаган бутун қийматларни қабул қилувчи ва бир хил тақсимланган тасодифий микдорлар бўлсин. Қуйидаги рекуррент муносабатлар билан аниқланган $\{Z(n), n \geq 0\}$ Гальтон-Ватсон тармоқланувчи жараёни қараймиз:

$$Z(0) = 1, \quad Z(n) = \sum_{j=1}^{Z(n-1)} \xi(n, j), \quad n \in N. \quad (3)$$

Қуйидаги белгилашларни киритамиз.

$$f(s) := Es^{\xi(1,1)}, \quad A = f'(1), \quad B = f''(1), \quad C = f'''(1),$$

$$S_n(x) = P\left(\frac{2Z_n}{Bn} < x | Z_n > 0\right), \quad S(x) = 1 - e^{-x}, \quad x > 0$$

Иккинчи бобнинг иккинчи параграфида қуйидаги теорема исботланган.

1-теорема. Фараз қилайлик (3) жараёнда

$$P(\xi(1,1) = 0) = p, \quad p_k = P(\xi(1,1) = k) = (1-p)^2 p^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

бўлсин, бунда $p \in (0,1)$ фиксирланган сон. У ҳолда

$$\sup_x |S_n(x) - S(x)| \leq \frac{4(1-p)}{\pi p} \frac{\ln n}{n} + \frac{2(1-p)}{\pi p} \left(27 \frac{1}{3} + \ln \frac{4\sqrt{2}p^2}{3(1-p)^2} \right) \frac{1}{n} + \frac{16(1-p)^4}{3\pi p^4 n^4}$$

Фараз қилайлик $\{\xi(k, j), k, j \in N\}$ ўзаро боғлиқсиз, бир хил $p_i = P(\xi(1,1) = i), i = 0, 1, \dots$ тақсимотга ва $f(s) := Es^{\xi(1,1)} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i s^i, 0 \leq s \leq 1$ ҳосил қилувчи функцияга эга тасодикий миқдорлар бўлсин. Қуйидаги рекуррент муносабат билан аниқланган $Z(k), k \geq 0$ жараёни қараймиз:

$$Z(0) = \eta, Z(n) = \sum_{j=1}^{Z(n-1)} \xi(n, j), n \in N, \quad (4)$$

бу ерда η - мусбат бутун қийматлар қабул қилувчи ва $\{\xi(k, j), k, j \in N\}$ тасодикий миқдорлар кетма - кетлигидан боғлиқсиз тасодикий миқдор.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$Q(n) = P(Z(n) > 0), A = f'(1), B = f''(1), C = f'''(1), \\ D = f^{IV}(1), a = h'(1), b = h''(1), c = h'''(1).$$

Энди иккинчи бобнинг учинчи параграфидаги натижаларга тўхталамиз.

Қуйидаги теорема тасодикий η сондаги заррачалардан бошланган критик тармоқланувчи жараёнинг давом этиш эҳтимоллигини нолга кетиш тезлигини беради.

2-теорема. Агар $A = 1, 0 < B < \infty, a < \infty$ бўлса, у ҳолда $n \rightarrow \infty$ да

$$Q(n) = \frac{2a}{Bn} (1 + o(1)).$$

Қуйидаги теорема давом этиш эҳтимоллигини нолга интилиш тезлигини (2-теоремадаги) битта заррачанинг авлодлар сони иккидан катта тартибдаги моментлар мавжуд бўлган ҳолда аниқлаштириш мумкинлигини кўрсатади.

3-теорема. Агар $A = 1, B > 0, C < \infty, c < \infty$ бўлса, у ҳолда $n \rightarrow \infty$ да

$$Q(n) = \frac{2a}{Bn} + \left(\frac{4Ca}{3B^2} - \frac{2a}{B} \right) \frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2} \right).$$

Қуйидаги теорема Яглом теоремасининг тасодикий сондаги заррачалардан бошланувчи тармоқланувчи жараёнлар учун аналогидир.

4-теорема. Агар $A = 1, B \in (0, \infty), a < \infty$ бўлса, у ҳолда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P((1 - H_n(0))Z(n) \leq y / Z(n) > 0) = 1 - e^{-\frac{y}{a}}.$$

Иккинчи бобнинг тўртинчи параграфида битта заррачанинг авлодлар сони чексиз дисперсияга эга бўлган ҳолда критик тармоқланувчи жараёнлар учун лимит теоремалар келтирилган. Қуйидаги шартни киритамиз:

$$f(s) = s + (1-s)^{1+\alpha} L(1-s), \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (5)$$

бу ерда $L(x)$ - нолда секин ўзгарувчи функция.

Қуйидаги теорема (5) шарт бажарилган (дисперсия мавжуд бўлмаган) ҳолда тасодифий η сондаги заррачалардан бошланувчи критик тармоқланувчи жараёни давом этиш эҳтимоллигини нолга интилиш тезлигини аниқлайди.

5-теорема. Агар $a < \infty$ ва (5) шарт ўринли бўлса, у ҳолда

$$Q^\alpha(n)L(1-F_n(0)) \sim \frac{a^\alpha}{an}(1+o(1)),$$

Қуйидаги теорема ўринли.

6-теорема. Агар (5) шарт ўринли бўлиб, $a < \infty$ бўлса, у ҳолда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\exp\{-\lambda(1-H_n(0))Z(n)\} / Z(n) > 0) = 1 - a\lambda(1+(a\lambda)^\alpha)^{-1/\alpha}, \quad \lambda > 0.$$

Қуйидаги теорема бошланғич ҳолатида “кўп” заррача бўлган ва заррачаларни кўпайиш қонунияти (5) шартни қаноатлантирадиган критик Гальтон-Ватсон жараёнини асимптотик тақсимотини аниқлайди.

7-теорема. Агар (5) шарт ўринли бўлса ва бошланғич ҳолат $Z(0) = [bn^{1/\alpha}L^{1/\alpha}(1-f_n(0))]$ бир эҳтимоллик билан бўлса, у ҳолда $n \rightarrow \infty$ да

$$E(\exp\{-\lambda(1-F_n(0))Z(n)\} / Z(0) = [bn^{1/\alpha}L^{1/\alpha}(1-f_n(0))]) \rightarrow \exp\{-\lambda b(\alpha(1+\lambda^\alpha))^{-1/\alpha}\}$$

Қуйидаги теорема (5) шарт ўринли бўлган ва ўрта қиймати мавжуд бўлмаган тасодифий сондаги заррачалардан бошланувчи критик Гальтон-Ватсон тармоқланувчи жараёнининг шартли тақсимоти асимптотикаси тўғрисида маълумот олиш имконини беради.

8-теорема. Қуйидаги шартлар ўринли бўлсин:

$$h(s) = 1 - (1-s)^\theta L\left(\frac{1}{1-s}\right), \quad 0 < \theta < 1,$$

бу ерда $L(x)$ - чексизда секин ўзгарувчи функция,

$$f(s) = s + (1-s)^{1+\alpha} L(1-s), \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

бу ерда $L(x)$ - нолда секин ўзгарувчи функция. У ҳолда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\exp\{-\lambda(1-F_n(0))Z(n)\} / Z(n) > 0) = 1 - \lambda^\theta (1+\lambda^\alpha)^{-\theta/\alpha}, \quad \lambda > 0.$$

Диссертациянинг «Тармоқланувчи жараёнлар моментлари учун баҳолар» деб номланувчи учинчи бобида тармоқланувчи тасодифий жараёнлар моментлари ва марказий моментлари учун юқоридан баҳолар келтирилган.

Учинчи бобнинг биринчи параграфида иммиграцияли тармоқланувчи тасодифий жараёнлар моментлари ва марказий моментлари учун юқоридан баҳолар келтирилган ва асосий натижаларни исботлаш учун зарур бўладиган ёрдамчи леммалар ва уларнинг исботлари келтирилган.

Учинчи бобнинг иккинчи параграфида ўзгарувчан муҳитдаги Гальтон-Ватсон тармоқланувчи жараёни моментлари ва марказий моментлари учун юқоридан баҳолар келтирилган.

Энди учинчи бобнинг учинчи параграфидаги натижаларни келтирамиз.

Фараз қилайлик $Y_1, Y_2, \dots$ - қийматлар соҳаси $N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ бўлган ва ҳосил қилувчи функциялари $f_1, f_2, \dots$ бўлган тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги бўлсин. $Y_{n,i}, n, i \in N$ тасодифий миқдорлар боғлиқсиз бўлиб, барча $i \geq 1$ учун $Y_{n,i}$ тасодифий миқдорнинг тақсимооти Y_n нинг тақсимооти билан устма-уст тушсин. η - манфий бўлмаган бутун қийматларни қабул қилувчи, ҳосил қилувчи функцияси φ бўлган тасодифий миқдор бўлиб, у $\{Y_{k,j}, k, j \in N\}$ тасодифий миқдорлардан боғлиқсиз бўлсин. $\varepsilon_n, n \in N$ - манфий бўлмаган бутун қийматлар қабул қилувчи, ҳосил қилувчи функциялари $h_1, h_2, \dots$ бўлган тасодифий миқдорлар бўлиб, у $\{Y_{k,j}, k, j \in N\}$ ва η тасодифий миқдорлардан боғлиқсиз бўлсин. N_0 да қиймат қабул қилувчи $W_n, n \geq 0$ тасодифий миқдорларни қуйидаги рекуррент муносабат билан аниқлаймиз:

$$W_0 = \eta, W_n = \sum_{j=1}^{W_{n-1}} Y_{n,j} + \varepsilon_n, n \in N.$$

Учинчи параграфнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат.

9-теорема. Фараз қилайлик $m_n := f'_n(1) < \infty$, $\gamma_n^{(p)} := EY_{n,1}^p < \infty$, $\lambda_n := E\varepsilon_n < \infty$, $\tau_n^{(p)} := E\varepsilon_n^p < \infty$, $\alpha_p := E\eta^p < \infty$. У ҳолда қуйидаги тасдиқлар ўринли:

1. агар $0 < p \leq 1$ бўлса, у ҳолда

$$EW_n^p \leq \gamma_n^{(p)} \mu_{n-1} \left(\alpha_1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\lambda_j}{\mu_j} \right) + \tau_n^{(p)},$$

бу ерда $\mu_0 := 1$, $\mu_n := \prod_{k=1}^n m_k$.

2. агар $p > 1$ бўлса, у ҳолда

$$EW_n^p \leq 2^{n(p-1)} \Gamma_n^{(p)} \alpha_1^{(p)} + \Gamma_n^{(p)} \sum_{j=1}^n \frac{\tau_j^{(p)} 2^{(n+1-j)(p-1)}}{\Gamma_j^{(p)}},$$

бу ерда $\Gamma_n^{(p)} := \prod_{j=1}^n \gamma_j^{(p)}$.

10-теорема. Фарз қилайлик $m_n := f'_n(1) < \infty$, $\gamma_n^{(p)} := EY_{n,1}^p < \infty$, $\lambda_n := E\varepsilon_n < \infty$, $\tau_n^{(p)} := E\varepsilon_n^p < \infty$, $\alpha_p := E\eta^p < \infty$, $\theta_n^{(p)} := E|Y_{n,1} - m_n|^p < \infty$, $\beta_p := E|\eta - E\eta|^p < \infty$, $\delta_n^{(p)} := E|\varepsilon_n - \lambda_n|^p < \infty$ бўлсин. Қуйидаги тасдиқлар ўринли:

1. агар $0 < p \leq 1$ бўлса, у ҳолда

$$E |W_n - EW_n|^p \leq \mu_n^p \left(\sum_{k=1}^n \left(\mu_k^{-p} \theta_k^{(p)} \mu_{k-1} \left(\alpha_1 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right) + \delta_k^{(p)} \right) + \beta_p \right);$$

2. агар $1 < p \leq 2$ бўлса, у ҳолда

$$E |W_n - EW_n|^p \leq \mu_n^p \left(\sum_{k=1}^n \mu_k^{-p} 2^{(n+1-k)(p-1)} \left(2^p \theta_k^{(p)} \mu_{k-1} \left(\alpha_1 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right) + 2^{p-1} \delta_k^{(p)} \right) + 2^{(n+1)(p-1)} \beta_p \right)$$

3. агар $p > 2$ бўлса, у ҳолда

$$\begin{aligned} E |W_n - EW_n|^p &\leq \\ &\leq \mu_n^p \sum_{k=1}^n \mu_k^{-p} 2^{(n+1-k)(p-1)} \left(2^{p-1} C(p) \theta_k^{(p)} \left(2^{(k-1)(\frac{p}{2}-1)} \Gamma_{k-1}^{(\frac{p}{2})} \alpha_1^{(\frac{p}{2})} + \Gamma_{k-1}^{(\frac{p}{2})} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\tau_i^{(\frac{p}{2})} 2^{(k-i)(\frac{p}{2}-1)}}{\Gamma_i^{(\frac{p}{2})}} \right) + 2^{p-1} \delta_k^{(p)} \right) + \\ &\quad + \mu_n^p 2^{(n+1)(p-1)} \beta_p, \end{aligned}$$

бу ерда $C(p)$ фақат p га боғлиқ ўзгармас сон.

ХУЛОСА

Диссертация иши тасодифий сондаги заррачадан бошланувчи критик тармоқланувчи жараёнларни асимптотик ҳолатини ўрганишга ҳамда тармоқланувчи жараёнлар моментлари учун юқоридан баҳолар олишга бағишланган.

Тадқиқотининг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Гальтон-Ватсон тармоқланувчи жараёнининг давом этиш эҳтимоллиги учун қуйи ва юқоридан баҳолар олинган.
2. Тасодифий сондаги заррачалардан бошланувчи критик Гальтон-Ватсон жараёнининг давом этиш эҳтимоллигини асимптотик ҳолатига бошланғич ҳолатнинг таъсири аниқланган.
3. Тасодифий сондаги заррачалардан бошланувчи критик Гальтон-Ватсон жараёни учун жараённи сўнмаганлик шартдаги тақсимоли учун Яглом теоремаси аналогини ўрнатилган.
4. Тасодифий сондаги заррачалардан бошланувчи ва заррачалар кўпайиш тақсимоли дисперсияси мавжуд бўлмаган ҳолда критик Гальтон-Ватсон жараёнининг сўнмаганлик шартдаги тақсимоли асимптотикаси топилган.
5. Бошланғич ҳолатида “кўп” заррача бўлган ва заррачаларни кўпайиш тақсимоли конуни дисперсияси мавжуд бўлмаган ҳолда критик Гальтон-Ватсон жараёнининг асимптотик тақсимоли аниқланган.
6. Иммиграцияли ва ўзгарувчан муҳитдаги тармоқланувчи жараёнлар моментлари ва марказий моментлари учун юқоридан баҳолар олинган.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 ПО
ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ИНСТИТУТЕ
МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И. РОМАНОВСКОГО**

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

КУДРАТОВ ХАМЗА ЭРГАШЕВИЧ

**ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ КРИТИЧЕСКИХ ВЕТВЯЩИХСЯ
СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И ОЦЕНКИ ДЛЯ МОМЕНТОВ**

01.01.05 – Теория вероятностей и математическая статистика

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

ТОШКЕНТ – 2022

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за B2021.4.PhD/FM347

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета <http://kengash.mathinst.uz> и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» <http://www.ziyonet.uz>.

Научный руководитель:

Хусанбаев Якубджан Мухамаджанович
доктор физико-математических наук, доцент

Официальные оппоненты:

Абдушукуров Абдурахим Ахмедович
доктор физико-математических наук, профессор

Азимов Жахонгир Бахромович
кандидат физико-математических наук

Ведущая организация:

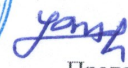
Каршинский государственный университет

Защита диссертации состоится «25» января 2022 года в 16.00 часов на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И. Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И. Романовского (зарегистрирована за № 131). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан «7» января 2022 года.
(реестр протокол рассылки № 2 от «7» января 2022 года).




У.А.Розиков
Председатель Научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., профессор


Ж.К.Адашев
Ученый секретарь Научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., старший научный
сотрудник


Ш.К.Форманов
Председатель научного семинара
при Научном совете по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., профессор, академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научно-практические исследования, проводимые на мировом уровне, приводятся к задачам современной теории случайных процессов, в частности, к задачам теории ветвящихся процессов. Становление теории ветвящихся процессов связано с исследованием Ф.Гальтоном и Г.Ватсоном процесса исчезновения фамилий английских лордов. Теория ветвящихся случайных процессов – это теория, изучающая законы эволюции популяции частиц, развивающихся на основе определенного закона распределения. Ветвящиеся процессы имеют важное значение в демографии, медицине, химии, биологии, а также в генетическом кодировании и в управлении популяциями. Поэтому изучение ветвящихся процессов остается одной из актуальных и важнейших задач в современной теории случайных процессов.

В настоящее время изучение ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона, начинающихся со случайного числа частиц, является одним из актуальных задач теории случайных процессов. Установлена асимптотика вероятности продолжения ветвящегося процесса, начинающегося со случайного числа частиц с бесконечным средним значением в случае, когда число потомков одной частицы имеет конечную дисперсию. Однако проблема нахождения оценки асимптотики вероятности продолжения ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона, начинающихся со случайного числа частиц, при отсутствии дисперсии числа потомков одной частицы, полностью не решена. В связи с этим нахождение асимптотики ветвящихся процессов, начинающихся со случайного числа частиц и оценки моментов и центральных моментов сверху для ветвящихся процессов в изменяющихся средах являются из целевых научных исследований.

В нашей стране отводится особое внимание научному исследованию и практическому применению фундаментальных наук, в том числе актуальным направлениям теории вероятностей и математической статистики, имеющим огромное практическое значение, в частности, особое внимание уделяется исследованию асимптотики ветвящихся процессов. Благодаря этому, при изучении асимптотики ветвящихся процессов были получены весомые научные результаты. Проведение исследований на уровне мировых стандартов по приоритетным направлениям дисциплин «Теория вероятностей и математическая статистика, функциональный анализ и актуарная математика» обозначены как основные цели и направления деятельности исследователей¹. Исследования по асимптотическому анализу ветвящихся случайных процессов с иммиграцией играют важную роль в исполнении этого Постановления.

Исследования данной диссертации, в определенной степени служат осуществлению задач, обозначенных в Указе Президента Республики

¹Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистана от 18 мая 2017 года № 292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан».

Узбекистан №-УП-4947 «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан» от 7 февраля 2017 года, в Постановлениях Президента Республики Узбекистан №-ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И.Романовского Академии Наук Республики Узбекистан», №-ПП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования» и №-ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования с приоритетными направлениями развития науки и технологий республики. Данная диссертационная работа выполнена в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Впервые ветвящиеся процессы были исследованы в работах Х.Ватсона, Ф.Гальтона, А.Н.Колмогорова, Т.Е.Харриса, Р.Беллмана, Б.А.Севастьянова, М.Иржиной, С.Карлина, Д.Кендалла, Дж.Ламперти, Н.А.Дмитрева и других ученых. Предельные теоремы для ветвящихся процессов были изучены такими учеными, как Б.А.Севастьянов, А.М.Яглом, В.М.Золотарев, Дж.В.Ламперти, П.Е.Ней, Дж.Фостер, Дж.Виллиамсон, К.Хейткот, В.П.Чистяков, Р.С.Слак, Е.Сенета, А.Г.Пейкс, С.В.Нагаев, А.В.Нагаев, А.М.Зубков, В.А.Ватутин, Ш.К.Форманов, Р.И.Мухамедханова, И.С.Бадалбаев, И.С.Рахимов, Г.К.Митов, К.В.Митов, Н.М.Янев и другие.

А.Н.Колмогоров определил главные члены асимптотики вероятности продолжительности ветвящихся процессов. С.В.Нагаев, А.В.Нагаев и Р.И.Мухамедханова определили следующие члены асимптотики вероятности продолжительности ветвящихся процессов. Асимптотика вероятности продолжительности ветвящихся процессов в непрерывном случае была изучена в работах Б.А.Севастьянова, В.М.Золотарева, В.П.Чистякова. А.М.Яглом изучал асимптотику условного распределения (при условии невырождения процесса в рассматриваемое время) ветвящихся процессов и, в частности, доказал о его приближении к показательному распределению в критическом случае. Р.С.Слак изучил асимптотику условного распределения (при условии невырождения в рассматриваемое время) критических ветвящихся процессов в случае, когда число потомков одной частицы имеет бесконечную дисперсию. Для марковских ветвящихся процессов с непрерывными параметрами теорема, аналогичная теореме А.М.Яглома, была установлена Б.А.Севастьяновым.

В.Феллер доказал сходимость критических ветвящихся процессов Гальтона – Ватсона, начинающихся с большого числа частиц, к диффузионному процессу в случае, когда число потомков одной частицы имеет конечную дисперсию. Г.К.Митов, К.В.Митов, Н.М.Янев нашли предел

условного распределения для критических ветвящихся процессов, начинающихся со случайного числа частиц, с бесконечным средним значением, когда число потомков одной частицы имеет конечную дисперсию. С.В.Нагаев, В.И.Вахтель исследовали ветвящийся процесс Гальтона – Ватсона, начинающийся с одной частицы, у которого число потомков одной частицы имеет лишь среднее значение.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждения высшего образования, где выполнялась диссертация.

Диссертация выполнена в рамках направления научно исследовательской темы «Теория статистических оценок и проверка гипотез» кафедры «Теория вероятностей и математическая статистика» математического факультета Национального университета Узбекистана (2016-2021).

Целью исследования является исследование асимптотического поведения ветвящихся случайных процессов, начинающихся со случайного или большего числа частиц, а также нахождения оценок сверху для моментов ветвящихся случайных процессов.

Задачи исследования:

установление асимптотических поведений критических ветвящихся случайных процессов;

доказательство условных и безусловных предельных теорем для критических ветвящихся случайных процессов, начинающихся со случайного числа частиц;

получение оценок сверху для моментов ветвящихся случайных процессов с иммиграцией;

получение оценок сверху для моментов ветвящихся случайных процессов в изменяющейся среде.

Объектом исследования являются ветвящиеся процессы, ветвящиеся процессы с иммиграцией, ветвящиеся процессы в изменяющейся среде.

Предметом исследования являются производящие функции, моменты ветвящихся случайных процессов, вероятность продолжительности ветвящихся случайных процессов, условные распределения ветвящихся случайных процессов.

Методы исследования. В диссертационной работе использованы методы теории вероятностей и аналитические методы, такие как метод характеристических функций и метод производящих функций.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

установлены асимптотические соотношения для вероятности продолжительности критических ветвящихся случайных процессов, начинающихся со случайного числа частиц;

доказана сходимость условного распределения при условии невырождения критических ветвящихся случайных процессов, начинающихся со случайного числа частиц, к показательному распределению;

найдена асимптотика распределения ветвящихся процессов,

начинающихся со случайного числа частиц в случае, когда дисперсия числа потомков одной частицы не существует;

получена оценка сверху для моментов и центральных моментов ветвящихся случайных процессов с иммиграцией и изменяющей среде.

Практические результаты исследования математические модели эволюции популяции или распространения болезней в данной среде были предложены для выражения с помощью ветвящихся процессов в изменяющихся средах, и были описаны методы определения асимптотики этих ветвящихся процессов.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений, применением фундаментальных результатов математического анализа и теории вероятностей.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследовательской работы объясняется тем, что результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории ветвящихся случайных процессов.

Практическая значимость результатов исследовательской работы определяется возможностью применения полученных в работе научных результатов при решении задач медицины, биологии, демографии, эволюции популяций.

Внедрение результатов исследования. Результаты, связанные с предельные теоремы для критических ветвящихся случайных процессов и оценки для моментов были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

Полученные оценки сверху для моментов ветвящихся случайных процессов в изменяющей среде были использованы при проверке сходимости интегралов в фундаментально-исследовательском научном проекте ОТ-Ф4-69 «Гармонический анализ, степенная геометрия и их приложения к задачам математической физики» (Справка Самаркандского Государственного университета № 10/4737 от 24 ноября 2021 года). Применение научного результата позволило провести гладкую оценку сингулярных интегралов.

Асимптотические соотношения, определенные для вероятности продолжения критических ветвящихся случайных процессов, начинающихся со случайного числа частиц были использованы при оценивании траекторий Q-процессов в фундаментальном научном проекте ОТ-Ф4-03 «Динамические системы с дискретным и непрерывным временем и спектры частичных интегральных операторов» (Справка Каршинского Государственного университета № 04/5185 от 20 октября 2021 года). Применение научного результата позволило получить асимптотические выводы относительно траекторий Q-процессов в дискретном и непрерывном случае.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на 7 международных и 10 республиканских научно-практических конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 23 научные работы, из них 6 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей Аттестационной Комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора философии, в том числе 2 опубликована в зарубежных журналах и 4 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 110 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **«Основные определения и результаты, связанные с ветвящимся случайными процессами»** приведены важные необходимые понятия для исследования и раскрытия темы диссертационной работы. В ней также приводится описание уже имеющихся результатов и обзор исследовательских работ по тематике диссертации. Первый параграф первой главы называется “Основные определения и результаты для ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона”. Он посвящен определению ветвящихся процессов Гальтона – Ватсона, их числовым характеристикам, производящей функции и их асимптотическим распределениям. Второй параграф первой главы посвящен ветвящимся процессам с иммиграцией. В нем приведены основные определения и важные асимптотические результаты для ветвящихся процессов с иммиграцией.

Пусть $\{\xi(n, j), n, j \geq 1\}$ – последовательность независимых, одинаково распределенных и принимающих неотрицательные целые числа случайных величин.

Определение 1. Ветвящимся процессом Гальтона – Ватсона называется процесс, определенный следующими рекуррентными соотношениями

$$Z(0) = 1, \quad Z(n) = \sum_{j=1}^{Z(n-1)} \xi(n, j), \quad n \geq 1 \quad (1)$$

Пусть $A = E\xi(1,1) < \infty$. Если $A < 1$, $A = 1$, $A > 1$, то случайный процесс, определенный в соотношении (1), называется, соответственно, докритическим, критическим, надкритическим.

Предположим, что последовательности $\{\xi(n, j), n, j \geq 1\}$ и $\{\varepsilon(n), n \geq 1\}$ независимы и состоят из взаимно независимых и одинаково распределенных, принимающих неотрицательные целые значения случайных величин.

Определение 2. Ветвящимся процессом с иммиграцией называется случайный процесс, определенный следующими рекуррентными соотношениями:

$$X(0) = 0, \quad X(n) = \sum_{j=1}^{X(n-1)} \xi(n, j) + \varepsilon(n), \quad n \geq 1 \quad (2)$$

Во второй главе диссертации, названной «Асимптотические соотношения для ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона», приведены верхние и нижние оценки для вероятности продолжения ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона, начинающихся с одной частицы, асимптотические соотношения для вероятности продолжения ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона, начинающихся со случайного числа частиц, а также приведены предельные теоремы для условных распределений процесса, аналог теорем Яглома и Слака. В частном случае получена оценка скорости сходимости в теореме Яглома. Доказан аналог теоремы Феллера для ветвящихся процессов Гальтона – Ватсона, начинающихся с большого числа частиц в случае несуществования дисперсии числа потомков одной частицы.

Предположим, что $\{\xi(k, j), k, j \geq 1\}$ – взаимно независимые, неотрицательные, целочисленные и одинаково распределенные случайные величины. Рассмотрим ветвящийся процесс Гальтона – Ватсона $\{Z(n), n \geq 0\}$, определенный следующими рекуррентными соотношениями:

$$Z(0) = 1, \quad Z(n) = \sum_{j=1}^{Z(n-1)} \xi(k, j), \quad n \in N. \quad (3)$$

Введем следующие обозначения:

$$f(s) := Es^{\xi(1,1)}, \quad A = f'(1), \quad B = f''(1), \quad C = f'''(1),$$

$$S_n(x) = P\left(\frac{2Z_n}{Bn} < x | Z_n > 0\right), \quad S(x) = 1 - e^{-x}, \quad x > 0.$$

Во втором параграфе второй главы доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть в процессе (3)

$$P(\xi(1,1) = 0) = p, \quad p_k = P(\xi(1,1) = k) = (1-p)^2 p^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $p \in (0,1)$ – фиксированное число. Тогда

$$\sup_x |S_n(x) - S(x)| \leq \frac{4(1-p)}{\pi p} \frac{\ln n}{n} + \frac{2(1-p)}{\pi p} \left(27 \frac{1}{3} + \ln \frac{4\sqrt{2}p^2}{3(1-p)^2} \right) \frac{1}{n} + \frac{16(1-p)^4}{3\pi p^4 n^4}.$$

Предположим, что случайные величины $\{\xi(k, j), k, j \in N\}$ взаимно независимы, имеют одинаковое распределение $p_i = P(\xi(1,1) = i), i = 0, 1, \dots$ и производящую функцию $f(s) := Es^{\xi(1,1)} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i s^i, 0 \leq s \leq 1$. Рассмотрим процесс $Z(k), k \geq 0$, определенный рекуррентным соотношением:

$$Z(0) = \eta, \quad Z(n) = \sum_{j=1}^{Z(n-1)} \xi(n, j), \quad n \in N, \quad (4)$$

где η – случайная величина, принимающая целые положительные значения и не зависящая от последовательности $\{\xi(k, j), k, j \in N\}$.

Введем следующие обозначения:

$$Q(n) = P(Z(n) > 0), \quad A = f'(1), \quad B = f''(1), \quad C = f'''(1), \quad D = f^{IV}(1), \\ a = h'(1), \quad b = h''(1), \quad c = h'''(1).$$

Перейдем к результатам третьего параграфа второй главы.

В следующей теореме определена скорость сходимости к нулю вероятности продолжения критических ветвящихся процессов, начинающихся со случайного числа частиц η .

Теорема 2. Если $A=1$, $0 < B < \infty$, $a < \infty$, то при $n \rightarrow \infty$

$$Q(n) = \frac{2a}{Bn} (1 + o(1)).$$

В следующей теореме показано, что можно определить скорость сходимости к нулю вероятности продолжения ветвящегося процесса при существовании моментов числа потомков одной частицы порядка выше второго (как в теореме 2).

Теорема 3. Если $A=1$, $B > 0$, $C < \infty$, $c < \infty$, то при $n \rightarrow \infty$

$$Q(n) = \frac{2a}{Bn} + \left(\frac{4Ca}{3B^2} - \frac{2a}{B} \right) \frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2} \right).$$

Следующая теорема является аналогом теоремы Яглома для ветвящихся процессов, начинающихся со случайного числа частиц.

Теорема 4. Если $A=1$, $B \in (0, \infty)$, $a < \infty$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P((1 - H_n(0))Z(n) \leq y / Z(n) > 0) = 1 - e^{-\frac{y}{a}}.$$

В четвертом параграфе второй главы приведены предельные теоремы для критических ветвящихся процессов в случае, когда число потомков одной частицы не имеет дисперсию.

Введем следующее условие

$$f(s) = s + (1-s)^{1+\alpha} L(1-s) \quad (5)$$

где $0 < \alpha < 1$, L – медленно меняющаяся функция в нуле.

Следующая теорема определяет скорость стремления к нулю вероятности продолжения критических ветвящихся процессов, начинающихся со случайного η числа частиц в случае, когда имеет место условие (5) (не существования дисперсии).

Теорема 5. Если $a < \infty$ имеет место условие (5), тогда

$$Q^\alpha(n) L(1 - f_n(0)) \sim \frac{a^\alpha}{\alpha n} (1 + o(1)).$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 6. Пусть $a < \infty$ и имеет место условие (5). Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\exp\{-\lambda(1-H_n(0))Z(n)\} / Z(n) > 0) = 1 - a\lambda(1 + (a\lambda)^\alpha)^{-1/\alpha}, \quad \lambda > 0.$$

Следующая теорема определяет асимптотическое распределение критического процесса Гальтона-Ватсона, начинающегося с большого числа частиц в случае, когда распределение числа потомков одной частицы удовлетворяет условию (5).

Теорема 7. Пусть имеет место условие (5) и начальное состояние $Z(0) = [bn^{1/\alpha} L^{1/\alpha}(1 - f_n(0))]$ с вероятностью 1. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$E(\exp\{-\lambda(1 - f_n(0))Z(n)\} / Z(0) = [bn^{1/\alpha} L^{1/\alpha}(1 - f_n(0))]) \rightarrow \exp\left\{-\lambda b(\alpha(1 + \lambda^\alpha))^{-1/\alpha}\right\}.$$

Следующая теорема даёт информацию об асимптотике условного распределения ветвящегося процесса в случае, когда имеет место условие (5) для числа потомков одной частицы и не существует математическое ожидание начального состояния.

Теорема 8. Пусть имеют место следующие условия:

$h(s) = 1 - (1-s)^\theta L\left(\frac{1}{1-s}\right)$ при $0 < \theta < 1$, где L – медленно меняющаяся функция на бесконечности,

$f(s) = s + (1-s)^{1+\alpha} L(1-s)$ при $0 < \alpha < 1$, где L – медленно меняющаяся функция в нуле.

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\exp\{-\lambda(1 - f_n(0))Z(n)\} / Z(n) > 0) = 1 - \lambda^\theta (1 + \lambda^\alpha)^{-\theta/\alpha}, \quad \lambda > 0.$$

В третьей главе диссертации, названной «**Оценки для моментов ветвящихся процессов**», приведены оценки сверху для моментов и центральных моментов ветвящихся случайных процессов.

В первом параграфе третьей главы приведены оценки сверху для моментов и центральных моментов ветвящихся случайных процессов с иммиграцией, а также приведены необходимые при доказательстве основных результатов вспомогательные леммы и их доказательства.

Во втором параграфе третьей главы приведены оценки сверху для моментов и центральных моментов ветвящихся процессов Гальтона – Ватсона в изменяющейся среде.

Теперь представим результаты в третьем параграфе третьей главы.

Предположим, что $Y_1, Y_2, \dots$ – последовательность случайных величин с областью значения $N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ и $f_1, f_2, \dots$ – производящие функции, соответствующие этим величинам. Пусть $Y_{n,i}, n, i \in N$ – независимые случайные величины такие, что для всех $i \geq 1$ распределение случайной величины $Y_{n,i}$ совпадает с распределением Y_n ; η – случайная величина, принимающая неотрицательные целые значения, имеющая производящую функцию φ , и не зависящая от последовательности случайных величин $\{Y_{k,j}, k, j \in N\}$. Пусть $\varepsilon_n, n \in N$ – последовательность случайных величин, принимающих неотрицательные целые значения, с производящими функциями $h_1, h_2, \dots$, соответственно, причем не зависящая от

последовательности $\{Y_{k,j}, k, j \in N\}$ и от случайной величины η . Определим случайные величины $W_n, n \geq 0$, принимающие значения в N_0 следующими рекуррентными соотношениями:

$$W_0 = \eta, W_n = \sum_{j=1}^{W_{n-1}} Y_{n,j} + \varepsilon_n, n \in N.$$

Основными результатами третьего параграфа третьей главы являются следующие теоремы:

Теорема 9. Предположим, что $m_n := f'_n(1) < \infty$, $\gamma_n^{(p)} := EY_{n,1}^p < \infty$, $\lambda_n := E\varepsilon_n < \infty$, $\tau_n^{(p)} := E\varepsilon_n^p < \infty$, $\alpha_p := E\eta^p < \infty$. Тогда имеют место следующие утверждения:

1. если $0 < p \leq 1$, то

$$EW_n^p \leq \gamma_n^{(p)} \mu_{n-1} \left(\alpha_1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\lambda_j}{\mu_j} \right) + \tau_n^{(p)},$$

здесь $\mu_0 := 1$, $\mu_n := \prod_{k=1}^n m_k$.

2. если $p > 1$, то

$$EW_n^p \leq 2^{n(p-1)} \Gamma_n^{(p)} \alpha_1^{(p)} + \Gamma_n^{(p)} \sum_{j=1}^n \frac{\tau_j^{(p)} 2^{(n+1-j)(p-1)}}{\Gamma_j^{(p)}},$$

здесь $\Gamma_n^{(p)} := \prod_{j=1}^n \gamma_j^{(p)}$.

Теорема 10. Предположим, что $m_n := f'_n(1) < \infty$, $\gamma_n^{(p)} := EY_{n,1}^p < \infty$, $\lambda_n := E\varepsilon_n < \infty$, $\tau_n^{(p)} := E\varepsilon_n^p < \infty$, $\alpha_p := E\eta^p < \infty$, $\theta_n^{(p)} := E|Y_{n,1} - m_n|^p < \infty$, $\beta_p := E|\eta - E\eta|^p < \infty$, $\delta_n^{(p)} := E|\varepsilon_n - \lambda_n|^p < \infty$. Тогда имеют место следующие утверждения:

1. если $0 < p \leq 1$, то

$$E|W_n - EW_n|^p \leq \mu_n^p \left(\sum_{k=1}^n \left(\mu_k^{-p} \theta_k^{(p)} \mu_{k-1} \left(\alpha_1 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right) + \delta_k^{(p)} \right) + \beta_p \right);$$

2. если $1 < p \leq 2$, то

$$E|W_n - EW_n|^p \leq \mu_n^p \left(\sum_{k=1}^n \mu_k^{-p} 2^{(n+1-k)(p-1)} \left(2^p \theta_k^{(p)} \mu_{k-1} \left(\alpha_1 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right) + 2^{p-1} \delta_k^{(p)} \right) + 2^{(n+1)(p-1)} \beta_p \right);$$

3. если $p > 2$, то

$$\begin{aligned} & E|W_n - EW_n|^p \leq \\ & \leq \mu_n^p \sum_{k=1}^n \mu_k^{-p} 2^{(n+1-k)(p-1)} \left(2^{p-1} C(p) \theta_k^{(p)} \left(2^{(k-1)(\frac{p-1}{2})} \Gamma_{k-1}^{(\frac{p}{2})} \alpha_1^{(\frac{p}{2})} + \Gamma_{k-1}^{(\frac{p}{2})} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\tau_i^{(\frac{p}{2})} 2^{(k-i)(\frac{p-1}{2})}}{\Gamma_i^{(\frac{p}{2})}} \right) + 2^{p-1} \delta_k^{(p)} \right) + \\ & + \mu_n^p 2^{(n+1)(p-1)} \beta_p, \end{aligned}$$

здесь $C(p)$ – постоянная, зависящая только от p .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена исследованию асимптотики критических ветвящихся процессов, начинающихся со случайного числа частиц и получению оценки сверху для моментов ветвящихся процессов.

Основные результаты исследований состоят в следующем:

1. Получены оценки сверху и снизу для вероятности продолжения ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона.
2. Определено влияние начального состояния на асимптотическое состояние вероятности продолжения критических ветвящихся процессов Гальтона – Ватсона, начинающихся со случайного числа частиц.
3. Установлен аналог теоремы Яглома для критического процесса Гальтона – Ватсона, начинающихся со случайного числа частиц.
4. Найдена асимптотика распределения критических процессов Гальтона – Ватсона, начинающихся со случайного числа частиц при условии невырождения в случае несуществования дисперсии закона распределения размножения числа частиц.
5. Определено асимптотическое распределение для критических процессов Гальтона – Ватсона, начинающихся с большого числа частиц, в случае несуществования дисперсии закона распределения размножения частиц.
6. Получены оценки сверху для моментов и центральных моментов ветвящихся процессов с иммиграциями и изменяющейся среде.

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED
AFTER V.I.ROMANOVSKIY**

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

KUDRATOV KHAMZA ERGASHEVICH

**LIMITS THEOREMS FOR CRITICAL BRANCHING RANDOM
PROCESSES AND ESTIMATES FOR MOMENTS**

01.01.05-theory probability and mathematical statistics

**ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY
(PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

Tashkent – 2022

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2021.4.PhD/FM347

Thesis has been prepared at National University Uzbekistan.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website <http://kengash.mathinst.uz> and the «Ziyonet» Information and educational portal <http://www.ziyonet.uz/>.

Scientific supervisor:

Khusanbaev Yakubdjan Muxamadjanovich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences,

Official opponents:

Abdushukurov Abduraxim Axmedovich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences,

Azimov Jaxongir Baxromovich
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,

Leading organization:

Karshi State University

Defense will take place « 25 » January 2022 at 16:00 at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at V.I.Romanovsky Institute of Mathematics. (Address: University str. 9, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmash@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

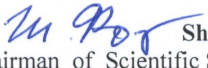
Dissertation is possible to review in Information-resource centre at V.I.Romanovsky Institute of Mathematics (is registered № 131) (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 207-91-40).

Abstract of dissertation sent out on « 7 » January 2022 year
(Mailing report № 2 on « 7 » January 2022 year)



U.A. Rozikov
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
Doctor of Physical and Mathematical
Sciences, Professor

J.K. Adashev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees,
Doctor of Physical and Mathematical
Sciences


Sh.K. Formanov
Chairman of Scientific Seminar under
Scientific Council on award of scientific
degrees,
Doctor of Physical and Mathematical
Sciences, Professor, Academician

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is the study of the asymptotic behaviour of branching random processes starting with a random number of particles, as well as finding upper bounds for the moments of branching random processes.

The object of the research work are branching processes, branching processes with immigration, branching processes in varying environment.

Scientific novelty of the research work is the following:

Asymptotic relations are established for the probability of the duration of critical branching random processes starting with a random number of particles;

The convergence of the conditional distribution under the condition of non-degeneration of critical branching random processes starting with a random number of particles, to an exponential distribution is proved;

The asymptotics of the distribution of branching processes starting with a random number of particles is found in the case when the variance of the number of descendants of one particle does not exist;

An upper bound is obtained for the moments and central moments of branching random processes with immigration and varying environment.

Implementation of the research results. The results obtained in the dissertation were used in the following research projects:

the upper bounds obtained for the moments of branching random processes in a varying environment were used to check the convergence of integrals in the fundamental research project OT-F4-69 "Harmonic analysis, power geometry and their applications to problems of mathematical physics" (Reference from Samarkand State University No. 10 / 4737 dated November 24, 2021). The application of the scientific result made it possible to carry out a smooth evaluation of the singular integrals;

asymptotical relations determined for the probability of continuation of critical branching random processes starting with a random number of particles were used to study the trajectories of Q-processes in the fundamental scientific project OT-F4-03 "Dynamical systems with discrete and continuous time and spectra of partial integral operators" (Reference from Karshi State University No. 04/5185 dated October 20, 2021). The application of the scientific result made it possible to obtain asymptotic conclusions regarding the trajectories of Q-processes in the discrete and continuous case.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 110 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; I part)

1. Хусанбаев Я. М., Кудратов Х.Э. Некоторые неравенства для моментов ветвящихся случайных процессов с иммиграцией // Матматика институти бюллетени, №6, 2019, С. 52-56. (01.00.00. № 17).
2. Форманов Ш.К., Хусанбаев Я. М., Кудратов Х.Э. О вероятности продолжения ветвящихся процессов // Доклады АНРУз, №4, 2020, С. 7-10. (01.00.00. № 7).
3. Khusanbaev Ya.M., Kudratov Kh. E. On the inequalities for moments of branching random processes // Uzbek Mathematical Journal, №4, 2020, pp. 70-81.
4. Khusanbaev Ya.M., Kudratov Kh. E. Inequalities for moments of branching processes in a varying environment // AIP Conference Proceedings. № 1. 2021. 2365. 060018. (3. Scopus IF= 0.177).
5. Кудратов Х.Э., Хусанбаев Я. М. Об асимптотических соотношениях для критического процесса Гальтона-Ватсона // Вестник Томского Государственного университета. Математика и механика, №73, 2021, С. 5-16. (3. Scopus IF= 0.25).
6. Кудратов Х.Э. Об оценке скорости сходимости критического ветвящегося процессе Гальтона-Ватсона // Матматика институти бюллетени, №5, 2021, С. 101-106. (01.00.00. № 17).

II бўлим (II часть; II part)

7. Хусанбаев Я. М., Кудратов Х.Э. Момнетные неравенства для ветвящихся процессов с иммиграцией // Материалы республиканской научной конференции «Современные проблемы теории вероятностей и математической статистики» Ташкент, 30 апреля-1 мая 2019 г., С. 40-41.
8. Kudratov Kh. E. On inequalities for moments of branching processes with immigration // Abstracts of the Joint International Conference STEMM. May 13-17, 2019, Tashkent, p. 101.
9. Khusanbaev Ya.M., Kudratov Kh. E. On the Inequalities for Moments of Branching Processes with Immigration // 2nd International Conference on Stochastic Processes and Algebraic Structures. Vasteras, Sweden, September 30- October 2, 2019, p. 89-90.
10. Хусанбаев Я. М., Кудратов Х.Э. Об оценке момента ветвящегося процесса с иммиграцией // Международная конференция «Обратные и некорректные задачи», Самарканд, 2-4 октября 2019 г., С. 147.
11. Хусанбаев Я. М., Кудратов Х.Э. Некоторые неравенство для моментов ветвящихся случайных процессов с иммиграцией // Труды республиканской научно-практической конференции «Статистика и её применения», Ташкент, 17-18 октября 2019 г., С. 354-355.

12. Кудратов Х.Э., Тошкулов Х.А. О неравенствах для моментов ветвящихся процессов с иммиграцией // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы геометрии и топологии и их приложения», Ташкент, 21-23 ноября 2019 г., С. 168.
13. Khusanbayev Y.M., Sharipov S.O., Qudratov H.E. On central limit theorem for subcritical branching processes with dependent immigration // Abstracts of the International scientific Conference «Modern problems of defferential equations and related branches of mathematics» Fergana, March 12-13, 2020, p. 154-155.
14. Кудратов Х.Э., Тошкулов Х.А. Ўзгарувчан мухитдаги тармоқланувчи жараён моментлари учун тенгсизликлар // Республика илмий-амалий анжумани «Математика, физика ва ахборот технологияларининг долзарб муаммолари», Бухоро, 15-апрел 2020 йил. 70-71 бетлар.
15. Хусанбаев Я. М., Кудратов Х.Э. Неравенства для вероятности продолжения ветвящихся процессов // Материалы республиканской научной онлайн конференции молодых ученых «Современные проблемы математики и прикладной математики» Ташкент, 21 мая 2020 г., С. 119-121.
16. Khusanbaev Ya.M., Kudratov Kh. E. Inequalities for moments of branching process in a varying environment // Uzbekistan-Malaysia international online conference «Computational models and technologies», Tashkent, August 24-25, 2020, p. 179-180.
17. Khusanbaev Ya.M., Kudratov Kh. E. Inequalities for moments of branching process with immigration in a varying environment // Proceedings of scientific conference «Modern problems of stochastic analysis», Tashkent, September 21-22, 2020, p. 62-64.
18. Хусанбаев Я. М., Кудратов Х.Э. О вероятности продолжения ветвящихся процессов // Тезисы докладов конференции «Современные стохастические модели и проблемы актуарной математики» Қарши, 25 сентября 2020 г., С. 136-137.
19. Khusanbaev Ya.M., Kudratov Kh. E. Inequalities for moments of branching process in a varying environment // National University of Uzbekistan and Holon Institute of Technology international online conference « Frontier in Mathematics and Computer Science» Tashkent, Oktober 12-15, 2020, p. 78-80.
20. Хусанбаев Я. М., Кудратов Х.Э. Асимптотические соотношения для критических ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона // Материалы научной конференции «Актуальные проблемы стохастического анализа», Ташкент, 20-21 февраля 2021 г., С. 179-181.
21. Кудратов Х.Э., Хабибуллоев А.О. О критическом ветвящемся процессе с бесконечной дисперсией // Материалы научной конференции «Актуальные проблемы стохастического анализа», Ташкент, 20-21 февраля 2021 г., С. 222-223.

22. Khusanbaev Ya.M., Kudratov Kh. E. Some limit theorems for the critical Galton-Watson branching processes // Материалы научной конференции «Сарымсаковские чтения», Ташкент, 16-18 сентября 2021 г., С. 234-237.
23. Кудратов Х.Э., Хусанбаев Я.М. Об оценке скорости сходимости критического ветвящегося процессе Гальтона-Ватсона // Материалы научной конференции «Дифференциальные уравнения и родственные проблемы анализа», Бухара, 4-5 ноября 2021 г., С. 360-361

Автореферат «O‘zbekiston matematika jurnali» таҳририятидан
2021 йил 22 декабрда таҳрирдан ўтказилиб, ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги
матнлар ўзаро мувофиқлаштирилди.

Бичими: 84x60 $\frac{1}{16}$. «Times New Roman» гарнитураси.
Рақамли босма усулда босилди.
Шартли босма табағи: 2,25. Адади 100. Буюртма № 78/21.

Гувоҳнома № 851684.
«Тірографф» МЧЖ босмахонасида чоп этилган.
Босмахона манзили: 100011, Тошкент ш., Беруний кўчаси, 83-уй.