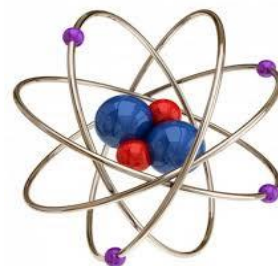


**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**



**БУХОРО ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
ФИЗИКА КАФЕДРАСИ
«АНАЛИТИК МЕХАНИКА»
ФАНИДАН
МАЪРУЗАЛАР МАТНИ**

Бухоро-2017

Ушбу ўқув-услубий мажмуаси Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2015 йил “2”февралдаги “32” –сонли буйруғи билан тасдиқланган “Аналитик механика” фани дастури асосида тайёрланган.

Тузувчилар:

Қ.С.Саидов - Бухоро давлат университети “Физика” кафедраси
доценти, физика-математика фанлари номзоди.

Такризчилар:

М.З.Шарипов - Бухоро давлат муҳандислик технологиялари институти
“Физика” кафедрасининг мудири, физика-математика
фанлари номзоди, доцент.

М.Р.Жумаев - Бухоро давлат муҳандислик технологиялари институти
“Физика” кафедраси доценти, физика-математика
фанлари номзоди.

2.МОДУЛ БЎЙИЧА МАВЗУЛАР

Модул №1. Ҳаракат қонунлари.

1-маъруза. Физик ҳодисаларнинг турли санок системаларида инвариантлиги ва уларнинг математик ифодаси. Галилей ва Лоренц алмаштиришлари. Санок системаси.

Назарий механика моддий нуқталарнинг, уларнинг дискрет системаларининг ва абсолют қаттиқ жисмларнинг ҳаракатларини ўрганадиган механиканинг қисми ҳисобланади. Такидлаш мумкинки Аналитик механикада келтирилган мунособатлар ва маълумотлар механик ҳаракатларнинг умумий қонуниятларини намоён этади ҳамда реал ҳодисаларга мос келади. Шунинг учун назарий механиканинг тадқиқот усуллари физикавий табиатдан қатъий назар жуда кўплаб табиат ҳодисаларини ўрганиш имкониятини беради. Аналитик механика фанининг тадқиқот объектига оддий жисмлардан бошлаб планетар ҳаракатлар механикаси киради.

Механиканинг назарий асослари ҳисобланмиш қонунлари ва аксиомалари авлодлар олимларининг кўп асрлик меҳнатлари натижасида шаклланиб келмоқда. Механиканинг илк қонуниятлари қадимий Миср ва Грецияда милоддан аввал IV-III асрларда қўлланилган. Қадимда механик тадқиқотлар олиб борган олимларга Демокрит (460-370 м.авв), Евклид(III м.авв) ва Архимед (III м.авв) кабиларни мисол келтириш мумкин. Статикани фан сифатида шаклланишида Архимеднинг илмий ишлари муҳим ҳисобланади. Архимед ричагни мувозанати тўғрисидаги масалани ечиб оғирлик маркази тўғрисидаги таълимотни яратиб момент тушинчаси киритилишига сабаб бўлди. Ўрта асрларда араб мамлакатларида ва Ўрта Осиёда яшаб ижод қилган Абу Райхон Беруний (973-1048), Мисрлик Абу Али –Хасан ибн ал-Хайсам (Алхазена) (965-1039), Ал-Хоразмий, Абу Али ибн Сино (980-1037 ва Улуғбек Муҳаммад Тарағай (1394-1449) каби олимлар математика, астрономия ва механика соҳаларида тадқиқотлар олиб борганлар. Беруний аниқ астрономик ва географик ўлчашларга эришган. У

Ҳиндистонга саёҳати давомида Ер радиусини ўлчаш усулини ишлаб чиққан. Ибн Сино таърифига кўра, жисм ҳолатининг ўзгариб бориши ҳаракатни ифодалайди; жисмларнинг фазодаги ҳаракати эса бу ҳаракатнинг хусусий ҳолидир деб таъкидлайди. Улуғбек планеталар ҳаракатини, жумладан, Қуёш ва Ойнинг механик ҳаракатини катта аниқликда ҳисоблай олган.

XIV асрнинг ўрталарида кemasozlik ривожланиши билан бир қаторда механика тез сураатлар билан тараккий этган. Таниқли олим Леонардо да Винчи (1452-1519) томонидан учир моаламаларида механик масалаларни ечишда математик усуллардан фойдалангалигини ўз самарасини берган. У жисмларнинг қия текислик бўйлаб ҳаракати ва сирпанишда ишқаланишни этиборга олади. Шунингдек, куч моменти тушунчасини биринчи бўлиб фанга киритади. Полшалик Николай Коперник (1473-1543) ва унинг издошлари Жордано Бруно (1548-1600), Иоган Кеплер (1564-1633) осмон жисмлари механикасини ишлаб чиқдилар. Италия олими Галилео Галилей (1564-1633) динамиканинг моддий жисмлар ҳаракати ҳақидаги бўлимнинг асосчисидир. Тўғри чизик бўйлаб нотекис, илгариланма ҳаракат қилаётган жисмнинг тезлиги ва тезланиши тушунчасини биринчи бўлиб, Галилей киритди. Бундан ташқари инерция қонунини кашф этди. Галилей ишларига таянган ҳолда Голланд олими Гюген физик маятник назариясини яратди. Шунингдек, Галилей киритган тезланиш тушунчасини нуқтанинг эгри чизикли ҳаракати учун умумлаштиради. Динамиканинг асосий қонунларини ўрганиш соҳасида Галилей бошлаган ишларни инглиз олими Исаак Нютон ривожлантириб, классик механиканинг асосий тушунчалари фазо, вақт, масса, куч, инерциал санок система ҳақидаги қонунларни яратилишида катта ҳисса қўшди. Бу асосий қонунлар Нютоннинг «Натурал фалсафасининг математик ифодаси» номли асарида баён этилган (1687 йил) ва у классик механиканинг асосини ташкил этади.

Назарий механика фани назарий физиканинг бошқа бўлимлари электродинамика, квант механика, статистик физика фанлари билан узвий боғланишга эгадир. Нютон назариясига кўра табиатдаги ҳар қандай ўзаро

таъсир бир онда узатилади, бошқача айтганда жисмлар орасидаги ўзаро таъсир чегараланмаган ёки чексиз тезлик билан тарқалади. Ҳар қандай физик назария сингари классик механика ҳам аниқ тадбиқ қилиш чегарасига эга. Тезлиги ёруғликнинг бўшлиқдаги тезлигига яқин бўлган жисмлар ҳаракати шунингдек, алоҳида атомлар, электронлар ва атом ядроси ва бошқа элементар зарралар ҳаракатини классик механика ифодалай олмайди. Тезлиги ёруғлик тезлигига яқин жисмлар ҳаракатини махсус нисбийлик назарияси постулатига таянувчи релятивистик механика ўрганади. Шундай қилиб классик механика макрожисмлар етарли кичик тезликлар билан бўладиган ҳаракатлари назариясидан иборат, яъни классик механика бу макроскопик жисмлар ҳаракатининг норелятивистик назариясидир.

Аналитик механика курси статика, кинематика ва динамикадан иборат уч қисмга бўлинади. *Статикада* жисмларнинг мувозанати, уларга қўйилган кучларни содда ҳолга келтириш масалалари ҳал қилинади. *Кинематикада* жисмларнинг ҳаракати геометрик нуқтаи назардан, яъни ҳаракатга келтирувчи сабабга боғламай ўрганилади. *Динамикада* моддий жисмларнинг ҳаракати унга таъсир этувчи кучларга боғлиқ равишда текширилади.

Реал жисмларнинг ҳаракати турли туман ва мураккаб бўлганлиги туфайли уларни ўрганишни осонлаштириш мақсадида абстракт тушунчалар киритилган. Бундай объектлар сифатида моддий нуқта, моддий нуқталар системаси, абсолют қаттиқ жисм, яхлит мухит каби тушунчаларни келтириш мумкин.

Моддий нуқта - ҳаракатнинг муайян шароитларида ўлчамлари ҳисобга олинмайдиган жисмдир. Моддий нуқтанинг вазияти ва ҳаракати бошқа моддий нуқталар вазияти ва ҳаракатидан боғлиқ бўлган моддий нуқталар тўпламига – моддий нуқталар системаси ёки механик система дейилади. Ёки бошқача айтганда *моддий нуқталар системаси* - ҳар бирини моддий нуқта деб қараш мумкин бўлган нуқталар тўпламидир. Масалан, Қуёш системаси.

Ўзининг ҳаракати давомида исталган икки нуқтаси орасидаги масофа ўзгармасдан қоладиган система *абсолют қаттиқ жисм* деб қабул қилинган.

Табиатда учрайдиган ҳар қандай моддий жисмлар атом ва молекулалардан ташкил топган бўлиб, улар дискрет структурага эга. Аммо масалани соддалаштириш мақсадида у яхлит муҳит деб қаралади. Текширилувчи объектларга боғлиқ ҳолда классик механика моддий нукта ва моддий нукталар системаси механикаси, абсолют қаттиқ жисм механикаси, яхлит муҳит механикасига бўлинади. Ўз навбатида яхлит муҳит механикаси эластиклик назарияси, гидро ва аэродинамикага бўлинади.

Фазо ва вақт ҳақидаги классик тасаввурлар биринчи бор Ньютон томонидан аниқ кўринишда ифодаланган. Бунда фазо ва вақтни объектив мавжудлиги тан олинади. Аммо улар бир-биридан ва ҳаракатланувчи материядан ажралган ҳолда мавжуд бўлиб қолади. Моддий жисмлар ҳаракати ва майдонларда юз берувчи жараёнлар фазо вақтнинг хусусиятларига мутлақо таъсир этмайди. Классик механикада фазо ҳам вақт ҳам абсолют деб қаралади. Классик механикада фазо ҳамма ерда узлуксиз, бир жинсли ва изотроп деб ҳисобланиб, унинг метрик хусусиятлари Евклид геометриясининг аксиомалари орқали тўлиқ ифодаланади. Вақт эса фазонинг ҳамма нукталари учун бир хил универсал катталиқ ҳисобланиб, ҳамма ерда бир текис кечади ва фазо сингари узлуксиз ва бир жинсли деб қаралади.

Моддий нукта ёки жисмлар ҳаракатини текширишда санок системасидан фойдаланилади. Классик механикада абсолют қаттиқ жисм билан боғланган координаталар системаси ва унга бириктирилган соат, узунлик ва вақт эталонлари биргаликда санок системасини ташкил этади. Фазо бир жинсли ва изотроп бўлганлиги учун унинг хоссалари ҳамма нукталари ва барча йўналишлари бўйича бир хил.

2-маъруза. Моддий нуктанинг траекторияси, тезлиги ва тезланишларнинг декарт ва қутб координаталарда ифодаси.

Ҳар қандай ҳаракат нисбийдир. Жисм ҳаракатини ифодалаш учун координата системасини танлашга тўғри келади. Акс ҳолда нукта ҳаракатланмоқдами ёки қузатувчимиз мавҳум қолади. Шунинг учун турлича траекторияли ҳаракатлар учун мос равишда системалар танланади. Оддий ва

кулай система Декарт координаталар системасидир. Моддий нуқтанинг Декарт координата системасидаги ҳаракат қонунлари қуйидаги кўринишда бўлади

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (1)$$

Агар бу тенгламалардан вақтни чиқариб координаталарни ўзаро боғлиқлиги топилса нуқтанинг траектория тенгламаси топилади ва бундай кўринишдаги тенгламаларга параметрик тенгламалар дейилади. Координата бошидан моддий нуқтага йўналган векторни радиус-вектор деб аталади. Координаталар орқали ифодаланган радиус-вектор қуйидаги кўринишда ёзилади.

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (2)$$

Шунингдек бу радиус-векторининг вақт бўйича тўлиқ дифференциаллари нуқтанинг тезлик ва тезланиш векторларини беради

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \quad (3)$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} \quad (4)$$

Тезлик ва тезланиш векторларининг ўқлардаги проекцияларини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

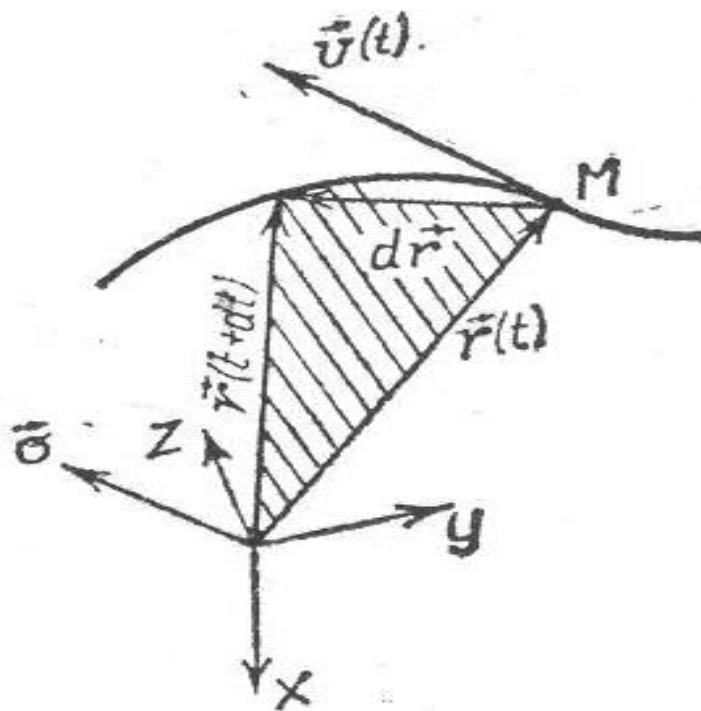
$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}; \quad a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} \quad (5).$$

Тезлик ва тезланишларнинг модуллари эса қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин.

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}; \quad a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \quad (6)$$

Демак радиус-векторидан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосила тезлик векторига, радиус-вектордан вақт бўйича олинган иккинчи тартибли ҳосила эса тезланиш векторига тенг экан.

Нуқтанинг ясси ҳаракатини текширишда $\vec{v}$ оний тезлик билан бирга $\vec{\sigma}$ секториал тезлик тушунчасини киритиш қулайлик туғдиради. Секториал тезликнинг сон қиймати $\vec{r}$ радиус-вектор томонидан вақт бирлиги ичида босиб ўтилган юзага тенг бўлиб, йўналиши $\vec{r}$ ва $\vec{v}$ векторлари билан ўнг винт системаси ҳосил қилувчи $\vec{\sigma}$ векторга тенг (2-расм).



Расмдан кўрамизки, ҳаракатланувчи М нуқта $\vec{r}$ радиус-векторнинг dt вақт ичида босиб ўтган юзаси $d\vec{S} = \frac{1}{2}[\vec{r}, d\vec{r}]$ юза векторининг сон қийматига етарли аниқлик билан тенг, демак, секториал тезлик вектори учун қуйидаги ифода ўринли

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2} \left[\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = \frac{1}{2} [\vec{r}, \vec{v}] \quad (7)$$

Секториал тезликнинг декарт координата ўқларидаги проекцияларини топамиз.

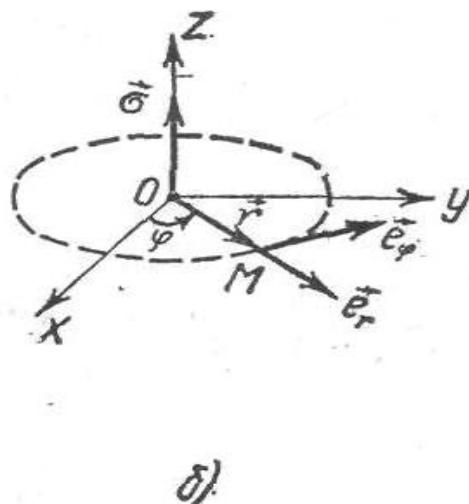
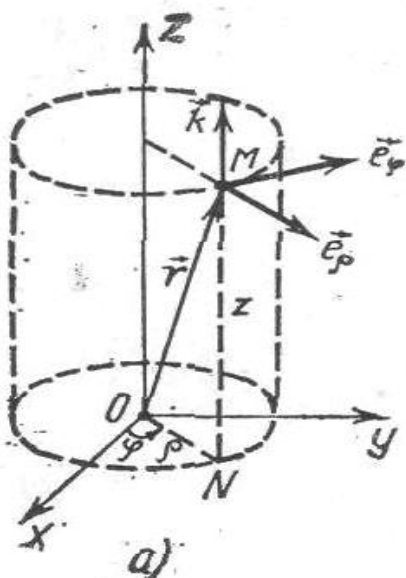
$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2} [\vec{r}, \vec{v}] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [\vec{i}(y\dot{z} - z\dot{y}) + \vec{j}(z\dot{x} - x\dot{z}) + \vec{k}(x\dot{y} - y\dot{x})] \quad (8)$$

Бундан секториал тезликнинг проекциялари

$$\sigma_x = \frac{1}{2}(y\dot{z} - z\dot{y}), \quad \sigma_y = \frac{1}{2}(z\dot{x} - x\dot{z}), \quad \sigma_z = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) \quad (9)$$

3-маъруза. Моддий нуктанинг траекторияси, тезлиги ва тезланишларнинг цилиндрик координаталарда ифодаси

Силиндрик координаталар системасида М нуктанинг ҳолати ρ , φ , z координаталар билан аниқланади. Нуктанинг ҳаракат қонунлари $\rho = \rho(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $z = z(t)$ кўринишларда бўлади.



Расм-3. Силиндрик координаталар системасида М нуктанинг ҳолати.

Декарт координаталарини силиндрик координаталари орқали қуйидагича ёзиш мумкин.

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z \quad (1)$$

$$\vec{r} = \rho \cdot \vec{e}_\rho + z\vec{k}, \quad r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

Силиндрик координаталар системасининг $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi$ ортлари билан $\vec{i}, \vec{j}$ Декарт ортлари орасидаги боғланишни топиш учун $\vec{r}$ радиус-вектор ҳар иккала системадаги (2) ифодаларини ўзаро тенглаштирамиз ва (1) ни инобатга олсак, натижада қуйидагича боғланишларга эга бўламиз:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \rho \cdot \vec{e}_\rho + z\vec{k} \\ x\vec{i} + y\vec{j} &= \rho \cdot \vec{e}_\rho \quad \rho \cdot \vec{e}_\rho = \vec{i} \rho \cos \varphi + \vec{j} \rho \sin \varphi \end{aligned}$$

Силиндрик координаталар системасининг $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi$ ортларининг йўналиши вақтга боғлиқ ҳолда ўзгаради, шунинг учун уларнинг вақт бўйича ҳосилаларини топиш керак бўлади.

$$\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi, \quad \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\rho \quad (4)$$

Нуқтанинг () радиус-векторидан вақт бўйича ҳосилаларида (4) тенгликларни инобатга олсак тезлик ва тезланиш векторларини аниқлашимиз мумкин.

$$\vec{v} = \dot{\rho} \cdot \vec{e}_\rho + \rho \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{k}, \quad v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2} \quad (5)$$

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho \dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z} \quad (6).$$

v_ρ, v_φ, v_z ларга мос равишда тезлик векторининг радиал, кўндаланг ва аксиал проекциялари деб юритилади. Тезлик векторидан вақт бўйича ҳосила олиб $\vec{a}$ тезланиш вектор ва унинг проекциялари учун қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(\dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{k}) = \ddot{\rho} \vec{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{\rho} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \rho \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi - \rho \dot{\varphi}^2 \vec{e}_\rho + \ddot{z} \vec{k}$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi + \ddot{z} \vec{k} \quad (7)$$

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = 2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}, \quad a_z = \ddot{z} \quad (8)$$

4-маъруза. Моддий нуқтанинг траекторияси, тезлиги ва тезланишларнинг сферик координаталарда ифодаси.

Сферик координаталар системасида М моддий нуқтанинг ҳолати r, θ, φ координаталар орқали, унинг ҳаракат қонунлари эса қуйидаги тенгламалар билан берилади.

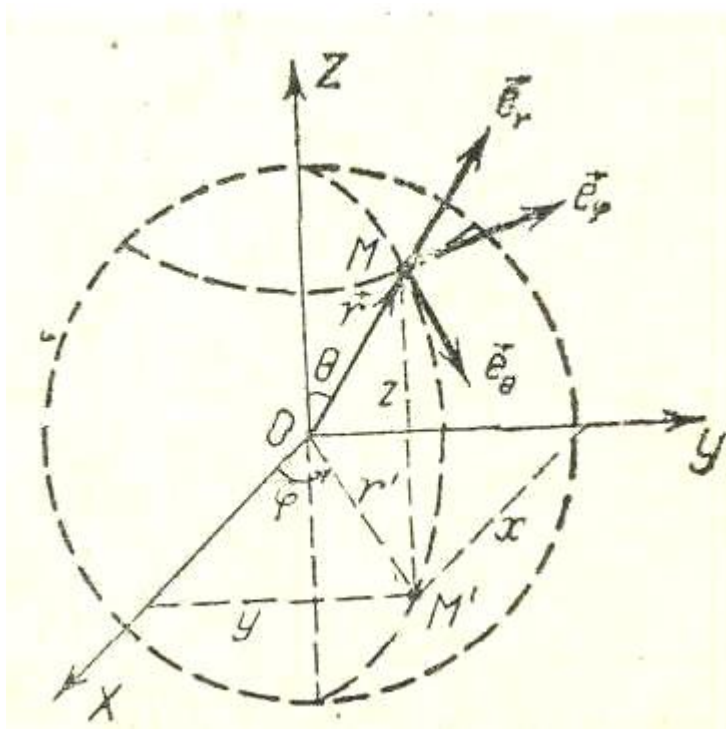
$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \varphi = \varphi(t) \quad (1)$$

Сферик ва Декарт координаталари орасидаги боғланиш қуйидаги формулалар орқали ифодаланади (4-расм):

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \theta = \arctg \frac{r'}{z}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x} \end{aligned} \quad (2)$$

Бу ерда $r' = \sqrt{x^2 + y^2}$. Сферик системанинг $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ ортлари билан Декарт ортлари $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ орасидаги боғланишларни қуйидагича топиш мумкин:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r\vec{e}_r = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{i} r \sin \theta \cos \varphi + \vec{j} r \sin \theta \sin \varphi + \vec{k} r \cos \theta \\ \left. \begin{aligned} \vec{e}_r &= \vec{i} \sin \theta \cos \varphi + \vec{j} \sin \theta \sin \varphi + \vec{k} \cos \theta \\ \vec{e}_\theta &= \vec{i} \cos \theta \cos \varphi + \vec{j} \cos \theta \sin \varphi - \vec{k} \sin \theta \\ \vec{e}_\varphi &= -\vec{i} \sin \varphi + \vec{j} \cos \varphi \end{aligned} \right\}$$



4-расм

Сферик координаталар системсининг барча ортлари М нукта ҳаракатланганда ўз йўналишларини ўзгартиради, шунинг учун уларнинг вақт бўйича биринчи тартибли ҳосилаларини ҳисоблаймиз.

$$\begin{aligned}\dot{\vec{e}}_r &= \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\phi \\ \dot{\vec{e}}_\theta &= -\dot{\theta} \vec{e}_r + \dot{\phi} \cos \theta \vec{e}_\phi \\ \dot{\vec{e}}_\phi &= -\dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_r - \dot{\phi} \cos \theta \vec{e}_\theta\end{aligned}\quad (4)$$

Сферик координаталар орқали ифодаланган $\vec{r} = r\vec{e}_r$ радиус-вектордан биринчи тартибли ҳосила олиб, (4) ни эътиборга олсак тезлик учун қуйидаги муносабатларни оламиз

$$\begin{aligned}\vec{v} = \dot{\vec{r}} &= \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta + r\dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\phi \\ v &= \sqrt{\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta)} \\ v_r &= \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}, \quad v_\phi = r\dot{\phi} \sin \theta\end{aligned}\quad (5)$$

Маълумки, тезлик векторидан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосила тезланиш векторини беради:

$$\vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\theta \vec{e}_\theta + a_\phi \vec{e}_\phi \quad (6)$$

Бу ерда

$$\begin{aligned}a_r &= \ddot{r} - r(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \\ a_\theta &= \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \\ a_\phi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta)\end{aligned}\quad (7)$$

a_r, a_θ ва a_ϕ мос ҳолда радиал, меридионал ва азимутал тезланишлар деб юритилади.

Амалий машғулот. Ҳаракат тенгламалари.

Ҳаракат қонуни $x = a \cos^2 \omega t$, $y = b \sin^2 \omega t$ бўлган зарранинг траекторияси, тезлик ва тезланиш векторилари топилсин.

Ечиш: ҳаракат тенгламаларидан вақтни чиқариб қуйидаги

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

траектория тенгламасини топамиз. Тезлик ва тезланишлари эса

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} = -\omega(a\vec{i} - b\vec{j})\sin 2\omega t$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} = -2\omega^2(a\vec{i} - b\vec{j})\cos 2\omega t$$

бўлади. Кўрамизки, траектория $y = b - \frac{b}{a}x$ тўғри чизиқдан иборат.

1. Массаси 280 кг бўлган лифт шахтага текис тезланиш билан туширилади, Лифт осилган арқоннинг тортилиш кучи 2548 Н бўлса, лифтнинг биринчи 10 секундда босиб ўтган йўли топилсин.
2. Устида 1,02 кг массали юк турган горизонтал платформа вертикал бўйлаб 4 м/с^2 тезланиш билан пастга тушади. Платформанинг юк билан бирга пастга тушиш вақтида юкнинг платформага қанча куч бериши топилсин.
3. Столда турган 2 кг массали жисмга ип боғланиб, ипнинг иккинчи учи А нуқтага бириктирилади. Агар тортилиш кучи 42 Н бўлганда ип узилса, жисмни вертикал бўйлаб юқорига қўтарганда ипнинг узилиши учун А нуқтага қандай тезланиш бериш керак.
4. Узунлиги 1 м бўлган ипга осилган 0,3 кг массали тош вертикал текисликда айлана чизади. Тошнинг ип узиладиган энг кичик бурчак тезлиги $4,5 \text{ рад/с}$ бўлса, ипнинг узилишга кўрсатадиган қаршилиги топилсин.

Мустақил иш. Нисбийлик принципи. Галилейнинг нисбийлик принципи. Ньютон тенгламасини келтириб чиқариш

Шундай инерциал система мавжудки унда тезлик доимий қийматга ва йўналишга эга. Нисбийлик принципига кўра табиат қонунлари барча

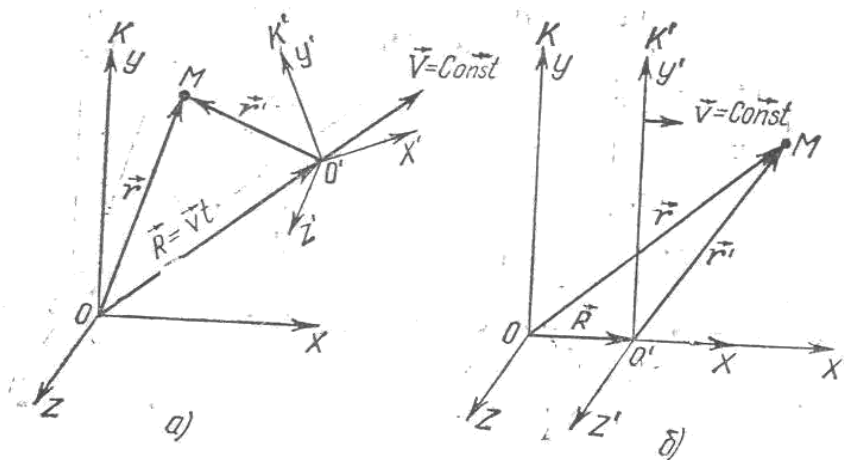
инерциал системаларда бир хил. Масалани умумий ҳолда қўямиз. Фараз қилайлик бизга зарранинг тенгламаси маълум бўлсин.

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (1)$$

Агар бизга бирор K' санок системаси берилган бўлиб, у K системага нисбатан доимий тезлик билан ҳаракатланаётган бўлса (5-расм), зарранинг бу системалардаги радиус векторлари қуйидагича боғланганлигини кўриш мумкин.

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R} = \vec{r}' + \vec{V}t \quad (2)$$

Бунда вақт барча санок системаларида бир хилда бўлади. Галилей нисбийлик принципига кўра вақт мутлақо яъни вақтнинг давомийлиги санок системанинг қандай доимий тезлик билан ҳаракатланишига боғлиқ эмас. Демак бутун коинот учун ягона вақт мавжуд бўлади $t = t'$.



Юқоридаги тенгликнинг иккала томонини вақт бўйича дифференциаллаб Галилейнинг тезликларни қўшиш қонунини оламиз.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{V} \frac{dt}{dt} \\ \vec{v} &= \vec{v}' + \vec{V} \end{aligned} \quad (3)$$

Эркин зарранинг Лагранж функцияси радиус вектор ва вақтга ошкора боғлиқ бўлмайди, чунки биржинслилик бузилади. Лагранж функцияси тезликнинг йўналишига боғлиқ бўлмайди, чунки изотроплик бузилади. Шунинг учун тезликнинг квадратига боғлиқ бўлиши мумкин.

$$L = L(v^2) = av^2$$

Тезликларни алмаштирамиз.

$$L(v^2) = av^2 = a(\vec{v}' + \vec{V})^2 = av'^2 + 2a\vec{v}'\vec{V} + aV^2$$

$$L(v^2) = av'^2 + 2a \frac{d\vec{r}'}{dt} \vec{V} + aV^2 = L(v'^2) + \frac{d}{dt} (2a\vec{r}'\vec{V} + a\vec{V}t)$$

Иккинчи ҳад ҳақиқатдан ҳам тўлиқ дифференциал шунинг учун тушириб қолдириш мумкин. Текширишлар натижаларидан $a = \frac{m}{2}$ маълум. Демак эркин зарранинг Лагранж функцияси топилди.

Модул №2. Моддий нуқта динамикаси

1-маъруза. Энг кичик таъсир принципи. Таъсир тушунчаси. Фазо ва вақтнинг симметрия хусусиятлари. Инерциал санок системалари.

Умумий кўринишдаги ҳаракат тенгламасини қуйидаги кўринишда ифодаладик.

$$\ddot{q} = f(q, \dot{q}, t) \quad (1)$$

Ушбу умумий ҳаракат тенгламаси қандай кўринишга эга бўлиши мумкин деган масалани ҳал қиламиз. Яъни умумлашган кучни аниқлашга киришамиз. Бу масалани ҳал қилиш учун қаралаётган физикавий системанинг бирор бошланғич ва охирги ҳолатлардаги координаталари ва умумлашган тезликлари маълум бўлган система қандай реал траектория бўйлаб бошланғич ҳолатдан охирги ҳолатга ўтади деган масалани ҳал қилиш лозим. Бошқача айтганда жисмнинг ҳаракат траекторияси унинг ҳаракат тенгламаси билан чамбарчас боғлиқ. Масалани дастлаб бир жинсли муҳитда тарқалаётган ёруғлик тўлқини каби қарайлик. Геометрик оптика қонунларига

асосан ёруғлик икки нуктани туташтирувчи тўғри чизик бўйлаб тарқалади. Яъни бўлиши мумкин бўлган траекториялар ичидан энг қисқасини танлайди. Энди ёруғлик бир жинсли бўлмаган мухитда тарқалишини карасак, бу ҳолда ёруғлик тўғри чизик бўйлаб тарқалмайди. Аксинча у А нуктадан В нуктага ўтиши учун энг қисқа вақт сарфловчи йўлни танлайди. Ёруғлик тарқалиши йўналишини оптик зичлигига қараб ўзгартиради. Демак физикавий система А нуктадан В нуктага ёки энг қисқа траектория бўйлаб, ёки энг қисқа вақт талаб қиладиган траектория бўйлаб ўтади. Буни умумий ҳолда кўриб чиқиш учун айрим масалаларни киритамиз.

Таъриф. Ихтиёрий физикавий системанинг умумлашган координаталари, умумлашган тезликлари, ва умумий ҳолда вақтга боғлиқ бўлган функцияси Лагранж функцияси дейилади.

$$L = L(q, \dot{q}, t)$$

Биз ҳозирга қадар умумлашган координата ва умумлашган тезликларга боғлиқ бўлган қуйидаги катталикларни биламиз.

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\dot{q}^2}{2} = f(q, \dot{q})$$

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{kq^2}{2} = f(q)$$

$$E = \frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{kq^2}{2} = f(q, \dot{q})$$

Эндиги мақсадимиз ихтиёрий физикавий система учун Лагранж функциясини аниқлашдан иборат. Бунинг учун Лагранж қуйидаги таъсир принципини таклиф этди.

Таъриф. Ҳар қандай система унинг Лагранж функцияси орқали аниқланувчи қуйидаги таъсир катталиги билан характерланади.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (2)$$

S - таъсир функцияси.

Таъриф. Ҳар қандай система ўз ҳаракати давомида шундай траекторияни танлайдики таъсир вариацияси нольга тенг бўлади

$$\delta S = 0 \quad (3)$$

Кейинги ишларни бажаришдан олдин олий математика курсидан қуйидагиларни эсга олайлик.

Эслатма. 1. Агар бизга икки ўзгарувчили $f(x, y)$ функция берилган бўлса унинг дифференциали қуйидагича топилади.

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (4)$$

2. Агар худди шу функциянинг орттирмасини топиш талаб этилса у қуйидагича

$$\Delta f(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \quad (5)$$

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0$$

3. Худди шу функциянинг вариацияси эса

$$\delta f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y \quad (6)$$

Юқоридаги иккита формуладан учинчисининг фарқи x, y ўзгарувчининг вариацияси чекли ўзгаришидир. Виртуал силжиш вақтнинг функцияси ҳисобланмайди. Функциянинг вариацияси – реал ҳаракатдан берилган вақт моментида ҳаёлий (боғланишлар рухсат этган) ҳаёлий ҳаракатга орттирма олиб ўтишидир.

2-маъруза. Майдон тушунчаси ва Ньютон тенгламаларининг қўлланиш чегараси. Ланграж тенгламалари. Механиканинг умумий тенгламаси. Боғланиш бор ҳолдаги Ланграж функцияси.

Таъсир ифодасидан кўринадики унинг қиймати интеграл остидаги функциянинг кўринишига боғлиқ, яъни у Лагранж функциясининг функционалидир.

Таъсир вариациясини ёзиш мумкин

$$\delta S = S' - S = \int_{t_1}^{t_2} L' dt - \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} [L' - L] dt = 0$$

$$L' = L + \delta L = L + \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}$$

Демак, таъсирнинг вариациясини қуйидагича топиш мумкин.

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left[L + \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta \dot{q} - L \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta \dot{q} \right] dt \\ \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} (\delta q) \right] dt \end{aligned} \quad (1)$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q} \delta q dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} (\delta q) dt$$

Иккинчи ҳадни бўлаклаб интеграллаймиз $\int u dv = uv - \int v du$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = U, \quad dV = \frac{d}{dt} (\delta q) dt, \quad V = \delta q, \quad dU = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} (\delta q) dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt \quad (2)$$

Масаланинг қўйилишига кўра юқори ва пастки чегарада умумлашган координаталар вариацияси нольга тенг. t_1 дан t_2 вақт интервалида $\delta q(t)$ - функция энг кичикдир. $t = t_1$ ва $t = t_2$ барча солиштириладиган функциялар бир хил қийматга эга бўлади.

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$$

Энди (1.3.8) ифодани (1.3.7) формулага қўямиз.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right\} \delta q dt \quad (3)$$

$\delta S = 0$ шартни қўлласак, яъни ҳар қандай система ўз ҳаракати давомида шундай траекторияни танлайдики таъсир вариацияси нольга тенг бўлади.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right\} \delta q dt = 0 \quad (4)$$

Кўриниб турибдики охирги шарт ўринли бўлиши учун қуйидаги шарт бажарилиши лозим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q} \quad (5)$$

Бу Лагранж тенгламасидир, у системанинг ҳаракат тенгламасидир. дейилади. Агар бир неча эркинлик даражасига эга система қаралса алоҳида тенгламалар мажмуасини ҳосил қиламиз.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, S) \quad (6)$$

Математик нуқтаи назардан (1.3.12) тенглама S та тенгламалардан иборат ва уларни тўла аниқлаш учун барча координаталарнинг бошланғич қийматлари берилиши керак.

3-маъруза. Циклик координата тушунчаси. Релятивистик механика асослари. Электромагнит майдондаги зарядли зарранинг Ланграж функцияси

Кулон ўзаро таъсир потенциалларини мисол келтириш мумкин. Чунки, иккала потенциал ҳам зарралар орасидаги масофага тескари пропорционал. Заррачага таъсир қилувчи куч ҳам абсолют қиймат жиҳатдан $\vec{r}$ га боғлиқ ва ҳар бир нуқтада радиус - вектор бўйлаб йўналади.

$$\vec{F}(\vec{r}) = - \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial r} = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

Марказий майдонда системанинг импульс моменти сақланади. Бирта зарра учун

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{P}] = \text{const} . \quad (1)$$

$\vec{M}$ ва $\vec{r}$ векторлар ўзаро перпендикуляр бўлганлиги учун $\vec{M}$ векторнинг доимийлиги радиус–векторнинг ҳар доим бир текисликда қолишини англатади. Шунинг учун зарранинг ҳаракат траекторияси марказий майдонда тўлалигича бир текисликда ётади. Бунда Лагранж функциясининг кутб координаталар системасидаги кўринишидан фойдаланиш қулайдир.

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r) \quad (2)$$

Маълумки кутб координаталар системаси учун қуйидагини ёзиш мумкин.

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vec{r} = r\vec{e}_r ; \quad \vec{g} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

Лагранж функциясида φ ошкора кўринишда иштирок этмайди. Ихтиёрий Q_i умумлашган координаталар лагранж функциясида ошкора кўринишда иштирок этмаса уларни цикли координаталар дейилади.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} = \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = 0$$

Цикли координата бўйича умумлашган импульс $P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$

$$P_\varphi = mr^2\dot{\varphi} \quad (3)$$

Секториал $\vec{\sigma}$ тезликнинг аниқланишидан маълумки $\vec{M}_z$ импульс моменти билан қуйидагича боғланишга эга. $\vec{\sigma} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} \vec{k}$

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}] = m[\vec{r}, \vec{v}] = 2m\vec{\sigma}$$

$$\vec{M}_z = 2m\vec{\sigma} = mr^2\dot{\phi}\vec{k}$$

$$M_z = mr^2\dot{\phi} \quad (4)$$

Демак ϕ бўйича умумлашган импульс Z бўйича импульс моментига тенг экан. Импульс моментининг сақланиши секториал тезликнинг доимийлигини талаб қилади. Ҳаракатланувчи нуқтанинг радиус –вектори тенг вақтларда тенг юзаларни ўтади.

$$\dot{\phi} = \frac{M_z}{mr^2} \quad (5)$$

Энди марказий майдондаги зарранинг ҳаракатини тўлиқ ечимини энергия ва импульс сақланиш қонунларидан топиш мумкин. Тўлиқ энергияни (3) формуладан фойдаланиб ёзамиз.

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + U(r) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \frac{M_z^2}{m^2 r^4}) + U(r)$$

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{M_z^2}{2mr^2} + U(r) \quad (6)$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M_z^2}{m^2 r^2}} \quad (7)$$

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M_z^2}{m^2 r^2}}} + const \quad (8)$$

1-амалий машғулот. Лагранж функцияси ва тенгламаларни тузиш.

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - U(r)$$

Маълумки қутб координаталар системаси учун қуйидагини ёзиш мумкин.

$$x = r \cos \varphi \qquad y = r \sin \varphi \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vec{r} = r\vec{e}_r; \qquad \vec{g} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

1. Массаси 2 кг бўлган жисм горизонтал тўғри чизик бўйлаб $x = 5 \sin(t\pi/2)$ қонунга асосан тебранма ҳаракат қилади. Жисмга таъсир этувчи куч билан x координата орасидаги боғланиш ва бу кучнинг энг катта қиймати топилсин.
2. Массаси 0,2 кг бўлган моддий нуқтанинг ҳаракати $x=2\cos(t\pi)$ ва $y=2\sin(t\pi)$ тенгамалар билан ифодаланади. Нуқтага таъсир қилувчи кучнинг проекцияларини топинг.
3. Массаси 0,5 кг бўлган моддий нуқтанинг ҳаракати $x=3\cos(t2\pi)$ ва $y=2\sin(t\pi)$ тенгамалар билан ифодаланади. Нуқтага таъсир қилувчи кучнинг қийматини топинг.
4. Массаси 0,3 кг бўлган моддий нуқтанинг ҳаракати $x=3\cos(t2\pi)$ ва $y=2e^{-3t}\sin(t\pi)$ тенгамалар билан ифодаланади. Нуқтага таъсир қилувчи кучнинг қийматини топинг.

2-амалий машғулот. Эквивалент Лагранж функцияларини топиш

1. Массаси 280 кг бўлган лифт шахтага текис тезланиш билан туширилади, Лифт осилган арқоннинг тортилиш кучи 2548 Н бўлса, лифт бошланғич 35 м йўлни қанча вақтда ўтади.
2. Ипга осилган 0,3 кг массали тош вертикал текисликда айлана чизади. Тошнинг ип узиладиган энг кичик бурчак тезлиги 4,5 рад/с, ипнинг

узилишга кўрсатадиган қаршилиги $9N$ бўлса, ипнинг узунлиги топилсин.

3. Аввал тўғри чизиқли, сўнгра эгри йўлда 18 м/с тезлик билан бораётган поезд вагониди бир юк пружинали тарозида тортилди, тарози биринчи ҳолда 50 Н ни, эгри йўлда эса 51 Н ни кўрсатди. Йўлнинг эгрилик радиуси аниқлансин.
4. Массаси $0,5 \text{ кг}$ бўлган тош 1 м узунликдаги ипнинг учига осилган, уриб юборилганда тош 5 м/с га тенг горизонтал оний тезлик олди. Тош туртиб юборилгандан кейин ипда қанча тортиш кучи ҳосил бўлганлиги топилсин.
5. Қўзғалмас O нуқтага бириктирилган узунлиги 30 см бўлган ипга осиб қўйилган $0,1 \text{ кг}$ массали M юк конус шаклидаги маятникни тасвирлайди, яъни горизонтал текисликда айлана чизади: шу билан бирга ип вертикал билан 60° ли бурчак ташкил қилади. Юкнинг тезлиги ва ипдаги тортилиш кучи T аниқлансин.

3-амалий машғулот. Механик системалар Лагранж функциясини тузиш

5. Қўзғалмас O нуқтага бириктирилган узунлиги 30 см бўлган ипга осиб қўйилган M юк конус шаклидаги маятникни тасвирлайди, яъни горизонтал текисликда айлана чизади: шу билан бирга ип вертикал билан 60° ли бурчак ташкил қилади. Юкнинг тезлиги аниқлансин.
6. Қўзғалмас O нуқтага бириктирилган ипга осиб қўйилган $0,1 \text{ кг}$ массали M юк конус шаклидаги маятникни тасвирлайди, яъни горизонтал текисликда айлана чизади: шу билан бирга ип вертикал билан 60° ли бурчак ташкил қилади. Ипдаги тортилиш кучи T аниқлансин.

7. Қўзғалмас О нуқтага бириктирилган ипга осиб қўйилган 0,1 кг массали М юк конус шаклидаги маятникни тасвирлайди, яъни горизонтал текисликда айлана чизади: шу билан бирга ип вертикал билан 60° ли бурчак ташкил қилади. Юкнинг тезлиги 2 м/с бўлса ипнинг узунлиги аниқлансин.
8. Массаси 2 кг бўлган жисм горизонтал тўғри чизик бўйлаб $x = 5 \sin(t\pi/2)$ қонунга асосан тебранма ҳаракат қилади. Жисмга таъсир этувчи куч билан x координата орасидаги боғланиш ва бу кучнинг энг катта қиймати топилсин.
9. Массаси 0,2 кг бўлган моддий нуқтанинг ҳаракати $x=2\cos(t\pi)$ ва $y=2\sin(t\pi)$ тенгамалар билан ифодаланади. Нуқтага таъсир қилувчи кучнинг проекцияларини топинг.

Модул №3. Ўзаро таъсирлашадиган моддий нуқталар системаси динамикаси

1-маъруза. Ҳаракат тенгламалари

Ихтиёрий координаталар системасидаги ҳаракат учун Эйлер-Лагранж тенгламасини таҳлил қилиш етарлидир.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (1)$$

$$\dot{q}_i = \frac{d}{dt} q_i \quad (2)$$

Ушбу (1) кўринишдаги Эйлер-Лагранж тенгламаси ихтиёрий координаталар системасида ифодаланувчи барча ҳоллар учун ўринли. Масалани соддалаштириш мақсадида дастлаб, фақат бир ўлчовли ҳаракатланувчи моддий нуқтанинг ҳаракат тенгламасини келтириб чиқарамиз. Бир ўлчовли система учун (1) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \quad (3)$$

Бу ҳолда Лагранж функцияси $L = L(x, \dot{x})$ кўринишда.

Буни Ньютоннинг иккинчи қонуни билан таққосласак,

$$\frac{d}{dt}(mv_x) = F_x; \quad \frac{d}{dt}p_x = F_x \quad (4)$$

(3) ва (4) тенгламани таққослаш шуни кўрсатадики улар айти бир моддий нуқтанинг ҳаракат тенгламасини характерлаши учун қуйидаги шартларни бажариши керак.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = p_x, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = F_x \quad (5)$$

$$p_x = mv_x = m\dot{x}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad L_1(\dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 \quad (7)$$

Иккинчи томондан куч учун қуйидагича ифодани оламиз.

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad L_2(x) = -U(x) \quad (3.8)$$

Юқоридаги муносабатлардан кўриниб турибдики бу ҳолда Лагранж функциясини унинг аддитивлик хоссасидан фойдаланиб қуйидаги икки ҳаднинг йиғиндиси кўринишида ёзиш мумкин.

$$L(x, \dot{x}) = L_1(\dot{x}) + L_2(x)$$

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) \quad (9)$$

Бу муносабат бир ўлчовли ҳаракат ҳоли учун моддий нуқтанинг классик Лагранж функциясидир. Демак, ихтиёрий уч ўлчовли ҳаракатга қатнашувчи моддий нуқтанинг Лагранж функциясини унинг кинетик ва потенциал энергияларининг айирмаси сифатида ифодалаш мумкин.

$$L = T - U \quad (10)$$

Лагранж функциясини Декарт координаталар системаси учун қуйидагича ифодалаш мумкин

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z) \quad (11)$$

Демак олинган натижалардан фойдаланиб Эйлер-Лагранж тенгламасини қуйидаги кўринишга келтириш мумкин

$$\frac{d}{dt}(m\dot{q}) = F \quad (12)$$

Демак бир ўлчовли ҳаракат тенгламасини интеграллаш учун яъни унинг ихтиёрий вақт моментидаги координатасини аниқлаш учун (12) ҳаракат тенгламасини ечиш лозим.

Хусусий ҳолларни кўриб чиқамиз.

1) Жисмга ҳеч қандай куч таъсир қилмасин. $F = m\ddot{x} = 0$ бу ҳолда жисм тезланиши нолга тенг бўлиб $\frac{d}{dt}\dot{x} = 0$, жисм тезлиги ўзгармайди ва унинг ҳаракат тенгламаси қуйидагича..

$$x(t) - x_0 = vt \quad x(t) = x_0 + vt$$

2) $m\ddot{x} = F = \text{const}$. Бу ҳолда жисмнинг тезланиши вақт ўтиши билан ўзгармайди. Бошқача айтганда жисм текис ўзгарувчан ҳаракат қилади.

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = a = \text{const} \quad d\dot{x} = a dt \quad v = v_0 + at$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + at \quad x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Бир ўлчовли ҳаракат тенгламасини умумий ҳолда интеграллаш имкони йўқ. Чунки моддий нуктага таъсир қилувчи куч унинг координатасига, тезлигига ва вақтдан боғлиқ. Бу фикрни тушунтириш учун қуйидаги мисолларни кўриб чиқамиз.

1.

$$\begin{aligned} F &= -kx & k > 0 \\ m\ddot{x} &= -kx & m\ddot{x} &= -kx & \frac{k}{m} &= \omega^2 \\ \ddot{x} + \omega^2 x &= 0 \end{aligned}$$

бу тенглама гармоник тебранишларни тавсифлайди.

2.

$$\begin{aligned} F &= -kx - R\dot{x} & k, R > 0 \\ m\ddot{x} + R\dot{x} + kx &= 0 \end{aligned}$$

Берилган кучнинг ифодасидаги биринчи ҳад қайтарувчи, иккинчи ҳад қаршилик кучи. Қаршилик кучи моддий нуқта билан у ҳаракатланаётган муҳит орасидаги қаршиликни инобатга олади. Қаршилик кучи доимо тезликка қарама-қарши йўналади. Бу тенглама сўнувчи тебранишларни ифодалайди, яъни вақт ўтиши билан сўнувчи эркин тебранишларни тавсифлайди.

2-маъруза. Моддий нуқтанинг импульси, энергияси ва импульс моменти. Вириал тўғрисидаги теорема

Фазо бир жинсли бўлса ёпиқ системанинг механик хоссалари ихтиёрий параллел кўчиришда ўзгармайди. Зарраларнинг тезликлари ўзгармас бўлган ҳолда координаталарининг чексиз кичик қийматга ўзгаришида Лагранж функциясининг ўзгариши.

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial r_i} \delta r_i = \varepsilon \sum \frac{\partial L}{\partial r_i} \quad (1)$$

Йиғинди барча моддий нуқталар бўйича боради. Минималлик талабидан $\delta L = 0$ вариация ўринли, ε нинг ихтиёрий қийматида эса

$$\sum \frac{\partial L}{\partial r_i} = 0 \quad (2)$$

бўлишига олиб келади. Лагранж тенгламасидан фойдаланамиз.

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial r_i} = \sum \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{d}{dt} \sum \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{d}{dt} \sum_i p_i = 0$$

Демак ёпиқ механикавий системада унинг импульс вектори ҳаракат давомида ўзгармайди яъни сақланади.

$$\vec{P} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = \text{const} \quad (3)$$

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i \quad (4)$$

Энергиядан фарқли равишда системанинг импульси алоҳида зарраларнинг импульсларининг геометрик йиғиндисидан иборат.

Ташқи майдон бўлмаса импульснинг учала компонентаси ҳам сақланади. Системанинг потенциал энергияси ташқи майдон бўлганда ҳам бирор координатага боғлиқ бўлмаса импульснинг шу компонентаси сақланади.

Олдинги дарсдан маълумки $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}$ i- заррачага таъсир қилувчи кучдир F_i . Шунинг учун (3) формула ёпиқ системанинг барча зарраларига таъсир қилувчи кучлар йиғиндисидир.

$$\sum_i F_i = 0 \quad (5)$$

Агар иккита заррадан иборат системани қарасак $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$ бўлади. Биринчи заррага иккинчиси томонидан таъсир кучи, иккинчи заррага биринчи зарра томонидан таъсир кучига қиймат жиҳатдан тенг ва қарама-қарши йўналган.

Умумлашган координаталарда эсақуйидагичадир.

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (6)$$

Умумлашган импульс

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (7)$$

Умумлашган куч.

K' система K системага нисбатан $\vec{V}$ тезлик билан ҳаракатласа тезликларни қўшиш формуласи қуйидагича.

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{V}$$

Бу ифодани системанинг импульси формуласига қўямиз.

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i' + \vec{V} \sum_i m_i$$

$$\vec{P} = \vec{P}' + \vec{V} \sum_i m_i \quad (8)$$

Хусусан шундай K' система топиладики унда зарралар системасининг тўлиқ импульси нолга тенг бўлади $\vec{P}' = 0$. Бу ҳисоб системасининг тезлиги қуйидагича

$$\vec{V} = \frac{\vec{P}}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i} \quad (9)$$

Айтиш жоизки импулснинг сақланиш қонуни мувозанат ҳолати ва механик системанинг тезлигини аниқлаш имконини беради. Ўз навбатида массанинг аддитивлиги ҳақида хулоса қилиш мумкин. Охирги формуланинг ўнг томонини вақт бўйича тўлиқ ҳосила кўринишида ёзиш мумкин бўлганлиги учун радиус векторларига ўтиш мумкин.

$$\vec{R} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} \quad (10)$$

3-маъруза. Икки жисм масаласи

Моддий нуқталар системасининг динамик тенгламасини қуйидаги кўринишда умумлаштирилиши мумкин.

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \vec{f}_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

Бунда $\sum \vec{F}_i$ - ташқи кучларнинг, $\sum \vec{f}_i$ - эса ички кучларнинг тенг таъсир этувчисидир. Агар бу кучларни ихтиёрий деб қаралса (1) тенгламанинг уч ва ундан ортиқ моддий нуқталардан иборат системалар учун аниқ ечимлари топилмаган. Шунинг учун иккита моддий нуқтадан иборат система учун ечимни топиб ва шу асосда хулосалар қилиш аҳамияти каттадир. Бу ечим бирта моддий нуқтанинг динамикасига олиб келади. Икки жисм масаласининг ечими, коинот механикасида (планеталар ва уларнинг йўлдошларининг Қуёш системасидаги ҳаракати), статик физикада (зарралар тўқнашуви) ва бошқа соҳаларда ишлатилади.

Ўзаро таъсирлашувчи иккита моддий нуқтадан иборат берк система ҳаракати ҳақидаги масала икки жисм масаласи дейилади. Бунда ўзаро таъсирлашувчи иккита заррадан фақат ички кучлар таъсиридаги ҳаракати ўрганилади. Икки жисм масаласи назарий жиҳатдан умумий ечимга эга

бўлиб, амалий жиҳатдан жуда кўп қўлланишларга эга. Унинг ечимлари йўлдошлар ҳаракати, заррларнинг тўқнашуви ва сочилиш назарияларида ётади. Бу масаланинг ечимларини қараганимизда система ҳаракатини унинг инерция марказининг ҳаракати ва нуқтанинг шу марказга нисбатан ҳаракатига эътиборимизни қаратамиз.

Ўзаро таъсирлашувчи иккита моддий нуқтадан иборат системани кўрамиз. Биз биламизки инерция маркази тўғри чизикли ҳаракат қилади. Нуқталар массалари m_1 ва m_2 , мос равишда радиус-векторлари $\vec{r}_1$ ва $\vec{r}_2$. Улар орасидаги масофа вектори $\vec{r}$. Зарралар системасининг инерция марказига йўналган вектор $\vec{r}_c$.

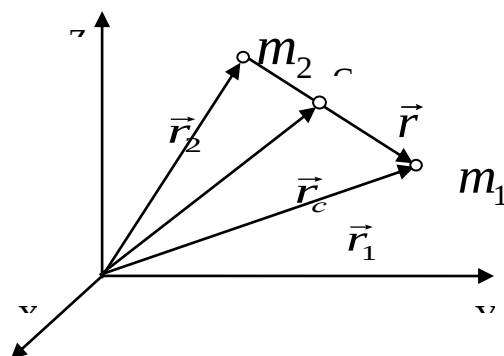
Агар координата бошини инерция марказига (масса марказига) силжитсак масса моменти

$$\mu \vec{R} = \sum_i m_i \vec{r}_i = 0 \quad \text{бўлади } i = 2 \text{ бўлганлиги учун}$$

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0 \quad (2)$$

Бундан ташқари чизмадан умумий ҳолда

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad \vec{r}_1 = \vec{r} + \vec{r}_2 \quad (3)$$



Расм. Икки моддий нуқтадан иборат система.

Юқоридаги (2) ва (3) формулалардан $\vec{r}_1$ ва $\vec{r}_2$ ларни фақат $\vec{r}$ орқали ифодаларини топамиз.

$$m_1(\vec{r} + \vec{r}_2) + m_2\vec{r}_2 = 0 \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \quad (4)$$

Шунингдек (3) формуладан фойдаланамиз.

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \quad \vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \quad (5)$$

Энди ҳаракатни ифодаловчи Лагранж функциясини унинг аддитивлик хусусиятидан фойдаланиб декарт координаталар системасида ёзамиз.

$$L = \frac{m_1\dot{\vec{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{\vec{r}}_2^2}{2} - U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (6)$$

Потенциал энергия зарралар орасидаги таъсирдан иборат ва улар орасидаги масофага боғлиқдир. Юқоридаги (3.9) ва (3.10) ифодаларни (3.11) тенгламага қўямиз.

$$L = \frac{m_1}{2} \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \right)^2 + \frac{m_2}{2} \left(\frac{-m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \right)^2 - U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$L = \frac{\dot{\vec{r}}^2}{2} \left(\frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_1^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \right) - U(\vec{r})$$

$$L = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r})$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r}) \quad (7)$$

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (8)$$

Лагранж функциясидаги m келтирилган масса дейилади. Демак икки жисм масаласи келтирилган масса ёрдамида бирта моддий нуқтанинг масаласига келтирилди. Эркин система учун ҳаракат тенгламасини ёзиш мумкин

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}) \quad (9)$$

Ҳаракат тенгламасининг ечимларида m - келтирилган масса, $\vec{r}$ эса моддий нуқталар орасидаги масофа эканлиги инобатга олинади. Шунинг учун (9) тенглама интеграллангандан кейин ҳақиқий m_1 ва m_2 ҳамда радиус-векторлари $\vec{r}_1$ ва $\vec{r}_2$ ларга ўтилади.

Иккита нуқтадан иборат ёпиқ системанинг энергияси Лагранж функциясидан келиб чиқади.

$$E = \frac{m\dot{\vartheta}^2}{2} + U(\vec{r}) \quad (10)$$

1-амалий машғулот. Ҳаракат тенгламалари

Масала. Агар $E = 0$ бўлса, зарранинг $U(x) = -Ax^4$ майдондаги ҳаракат қонуни топилсин.

Бизга маълумки энергиянинг сақланиш қонунини бир ўлчовли ҳаракат учун қуйидагича ифодалаш мумкин

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x)$$

Масала шартига кўра $E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = 0$ бундан $\frac{m\dot{x}^2}{2} = -U(x)$

Демак зарра $U(x) < 0$ соҳадагина ҳаракатлана олар экан.

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 &= -\frac{2}{m}U(x); & \dot{x}^2 &= \frac{2A}{m}x^4 & \dot{x} &= \pm\sqrt{\frac{2A}{m}}x^2, & \frac{dx}{dt} &= \pm\sqrt{\frac{2A}{m}}x^2 \\ \frac{dx}{x^2} &= \pm\sqrt{\frac{2A}{m}}dt & -\frac{1}{x} &= \pm\sqrt{\frac{2A}{m}}t; & x &= \mp\sqrt{\frac{m}{2A}}\frac{1}{t} \end{aligned}$$

Охирги тенглама зарранинг берилган потенциал майдондаги ҳаракат қонунини ифодалайди.

Мустақил иш. Қуйидаги потенциаллар учун ҳаракат қонуни топилсин.

а) $U(x) = -A \sin^2 x$

б) $U(x) = -B \cos^2 x$

в) $U(x) = -C(1 + \cos x)^2$

г) $U(x) = -D(1 - \sin x)^2$

1. Массаси 0,5 кг бўлган моддий нуқтанинг ҳаракати $x = 3 \cos(t/2\pi)$ ва $y = 2 \sin(t\pi)$ тенгамалар билан ифодаланади. Нуқтага таъсир қилувчи кучнинг қийматини топинг.
2. Массаси 0,3 кг бўлган моддий нуқтанинг ҳаракати $x = 3 \cos(t/2\pi)$ ва $y = 2e^{-3t} \sin(t\pi)$ тенгамалар билан ифодаланади. Нуқтага таъсир қилувчи кучнинг қийматини топинг.
3. Массаси 100 г бўлган шарча оғирлик кучи таъсирида пастга тушади, бунда у ҳавонинг қаршилигига учрайди; шарча ҳаракати $x = 5t - 2,45(1 - e^{-2t})$ тенгама билан ифодаланади. Шарчанинг қаршилик кучи топилсин.
4. Оғирлиги 100 Н бўлган шарча оғирлик кучи таъсирида пастга тушади, бунда у ҳавонинг қаршилигига учрайди; шарча ҳаракати $x = 5t - 2,45(1 - e^{-2t})$ тенгама билан ифодаланади. Шарчанинг қаршилик кучи топилсин.

2-амалий машғулот. Моддий нуқтанинг импульси

1. Оғирлиги 100 Н бўлган шарча оғирлик кучи таъсирида пастга тушади, бунда у ҳавонинг қаршилигига учрайди; шарча ҳаракати $x = 5t - 3(1 - e^{-2t})$ тенгама билан ифодаланади. Шарчанинг қаршилик кучи унинг тезлиги орқали ифодалансин.
2. Тош шахтага бошланғич тезликсиз тушиб келади. Тошнинг шахта тубига тушиб урилишидан чиққан товуш тошнинг туша бошлаган вақтидан 6 с кейин эшитилади.. Товуш тезлиги 330 м/с. Шахта чуқурлиги топилсин.

3. Оғир жисм горизонтга 30° бурчак остида оғган силлиқ текислик бўйлаб пастга тушади. Агар жисмнинг бошланғич тезлиги 4 м/с га тенг бўлса, жисм 6 м йўлни қанча вақтда ўтиши топилсин.
4. Снаряд тўп оғзидан 550 м/с горизонтал тезлик билан учиб чиқади; снаряднинг массаси 7 кг . Агар снаряд тўп ичида 2 м йўл ўтиб чиққан бўлса, порох газларининг ўртача босим кучи F қанча?

3-амалий машғулот. Моддий нуқтанинг энергияси

1. : Горизонтал йўлда 8 м/с тезлик билан борувчи трамвай вағони тормозланганда унинг 2 с дан кейинги тезлигини топинг.
Ишқаланиш коэффиценти $0,2$ га тенг.
2. Снаряд тўп оғзидан 650 м/с горизонтал тезлик билан учиб чиқади. Агар снаряд тўп ичида $2,5 \text{ м}$ йўл ўтиб чиққан бўлса, снаряд стволда қандай тезланиш билан ҳаракатланган?
3. Массаси 6 кг бўлган жисмни туртиб юборилганда силлиқ бўлмаган горизонтал текисликда 5 с да $L=23 \text{ м}$ масофани ўтиб тўхтаган.
Ишқаланиш кучи топилсин.
4. Массаси 1 кг бўлган моддий нуқта $F=7\cos 12t$ қонунга мувофиқ ўзгарувчи куч таъсирида тўғри чизикли ҳаракат қилади. Бошланғич пайтда жисмнинг тезлиги 12 м/с . Нуқтанинг ҳаракат x тенгламаси топилсин.

Модул №4. Сақланиш қонунлари

1-маъруза. Система энергияси, импульси ва импульс моменти сақланиш қонуни. Фазо ва вақтнинг симметрия хусусиятлари ва сақланиш қонунлари

Марказий майдонда системанинг импульс моменти сақланади. Бирта зарра учун

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{P}] = \text{const} . \quad (1)$$

$\vec{M}$ ва $\vec{r}$ векторлар ўзаро перпендикуляр бўлганлиги учун $\vec{M}$ векторнинг доимийлиги радиус–векторнинг ҳар доим бир текисликда қолишини англатади. Шунинг учун зарранинг ҳаракат траекторияси марказий майдонда тўлалигича бир текисликда ётади. Бунда Лагранж функциясининг кутб координаталар системасидаги кўринишидан фойдаланиш қулайдир.

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r) \quad (2)$$

Маълумки кутб координаталар системаси учун қуйидагини ёзиш мумкин.

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vec{r} = r\vec{e}_r; \quad \vec{\mathcal{G}} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

Лагранж функциясида φ ошкора кўринишда иштирок этмайди. Ихтиёрий Q_i умумлашган координаталар лагранж функциясида ошкора кўринишда иштирок этмаса уларни цикли координаталар дейилади.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} = \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = 0$$

Цикли координата бўйича умумлашган импульс $P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$

$$P_\varphi = mr^2\dot{\varphi} \quad (3)$$

Секториал $\vec{\sigma}$ тезликнинг аниқланишидан маълумки $\vec{M}_z$ импульс моменти билан қуйидагича боғланишга эга. $\vec{\sigma} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}\vec{k}$

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}] = m[\vec{r}, \vec{v}] = 2m\vec{\sigma}$$

$$\begin{aligned}\vec{M}_z &= 2m\vec{\sigma} = mr^2\dot{\phi}\vec{k} \\ M_z &= mr^2\dot{\phi}\end{aligned}\quad (4)$$

Демак φ бўйича умумлашган импульс Z бўйича импульс моментига тенг экан. Импульс моментининг сақланиши секториал тезликнинг доимийлигини талаб қилади. Ҳаракатланувчи нуктанинг радиус – вектори тенг вақтларда тенг юзаларни ўтади.

$$\dot{\phi} = \frac{M_z}{mr^2} \quad (5)$$

Энди марказий майдондаги зарранинг ҳаракатини тўлиқ ечимини энергия ва импульс сақланиш қонунларидан топиш мумкин. Тўлиқ энергияни (5) формуладан фойдаланиб ёзамиз.

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + U(r) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \frac{M_z^2}{m^2 r^4}) + U(r)$$

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{M_z^2}{2mr^2} + U(r) \quad (6)$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M_z^2}{m^2 r^2}} \quad (7)$$

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M_z^2}{m^2 r^2}}} + const \quad (8)$$

Юқоридаги (5) формуладан буралиш бурчаги учун ифода келтириб чиқариш мумкин.

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \frac{d\phi}{dt} = \frac{M_z}{mr^2} \\ d\phi &= \frac{M_z}{mr^2} dt\end{aligned}\quad (9)$$

dt нинг ифодасини (7) ифодасидан фойдаланиб буралиш бурчагини топиш мумкин.

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} + const \quad (10)$$

1-амалий машғулот. Сақланиш қонунларини қўллаш

1. Тош шахтага бошланғич тезликсиз тушиб келади. Тошнинг шахта тубига тушиб урилишидан чиққан товуш тошнинг туша бошлаган вақтидан 7 с кейин эшитилади. Товуш тезлиги 330 м/с. Шахта чуқурлиги топилсин.
2. Жисмни туртиб юборилганда силлиқ бўлмаган горизонтал текисликда 4 с да $L=23$ м масофани ўтиб тўхтаган. Ишқаланиш коэффициенти топилсин.
3. Тош шахтага бошланғич тезликсиз тушиб келади. Тошнинг шахта тубига тушиб урилишидан чиққан товуш тошнинг туша бошлаган вақтидан 8 с кейин эшитилади. Товуш тезлиги 330 м/с. Шахта чуқурлиги топилсин.
4. Жисм горизонтга 30° бурчак остида оғган силлиқ текислик бўйлаб пастга тушади. Агар жисмнинг бошланғич тезлиги 3 м/с га тенг бўлса, жисм 7 м йўлни қанча вақтда ўтиши топилсин.
5. Горизонтал йўлда 12 м/с тезлик билан борувчи трамвай вағони тормозланганда у қанча вақтда ва қандай масофани босиб ўтиб тўхтайди? Тормозланиш вақтида вагон ҳаракатига кўрсатиладиган қаршилик вагон оғирлигининг 0,2 қисмини ташкил қилади.

2-амалий машғулот. Энергия, импульс ва импульс моментини ҳисоблаш

1. Тош шахтага бошланғич тезликсиз тушиб келади. Тошнинг шахта тубига тушиб урилишидан чиққан товуш тошнинг туша бошлаган

вақтидан 9 с кейин эшитилади. Товуш тезлиги 330 м/с. Шахта чуқурлиги топилсин.

2. : Массаси 1 кг бўлган моддий нукта $F = F_0 \cos \omega t$ қонунга мувофиқ ўзгарувчи куч таъсирида тўғри чизиqli ҳаракат қилади. Бошланғич пайтда жисмнинг тезлиги v_0 . Нуктанинг ҳаракат x тенгламаси топилсин. F_0 ва ω лар ўзгармас миқдорлар.
3. Массаси 2 кг бўлган моддий нукта $x = 2(1 - \cos 4t) + 10t$ тенглама бўйича ҳаракатланса унга таъсир қилувчи кучнинг ўзгариш қонуни топилсин.
4. : Горизонтал йўлда 8 м/с тезлик билан борувчи трамвай вағони тормозланганда унинг 2 с дан кейинги тезлигини топинг. Ишқаланиш коэффиценти 0,2 га тенг.
5. Снаряд тўп оғзидан 650 м/с горизонтал тезлик билан учиб чиқади. Агар снаряд тўп ичида 2,5 м йўл ўтиб чиққан бўлса, снаряд стволда қандай тезланиш билан ҳаракатланган?

3-амалий машғулот. Циклик координаталар ечиш

1. Массаси 6 кг бўлган жисмни туртиб юборилганда силлиқ бўлмаган горизонтал текисликда 5 с да $L = 23$ м масофани ўтиб тўхтаган. Ишқаланиш кучи топилсин.
2. Массаси 1 кг бўлган моддий нукта $F = 7 \cos 12t$ қонунга мувофиқ ўзгарувчи куч таъсирида тўғри чизиqli ҳаракат қилади. Бошланғич пайтда жисмнинг тезлиги 12 м/с. Нуктанинг ҳаракат x тенгламаси топилсин.
3. Снаряд тўп оғзидан 580 м/с горизонтал тезлик билан учиб чиқади. Агар снаряд тўп ичида 2 м йўл ўтиб чиққан бўлса, снаряд тўп стволида қанча вақт ҳаракатланади?

4. Массаси 3 кг бўлган моддий нукта $F=6\cos 2t$ қонунга мувофиқ ўзгарувчи куч таъсирида тўғри чизиқли ҳаракат қилади. Бошланғич пайтда жисмнинг тезлиги 2 м/с. Нуктанинг ҳаракат x тенгламаси топилсин
5. Моддий нукта $x=e^{2t}\cos 3t$ тенглама бўйича ҳаракатланса унинг тезланишининг ўзгариши қонунини топинг.

Модул №5. Ҳаракат тенгламаларини интеграллаш

1-маъруза. Ҳаракат интеграллари

Битта эркинлик даражасига эга бўлган система бир ўлчовли система дейилади. Бунга $U(x)$ потенциал майдондаги ҳаракатни, ясси математик маятникни мисол келтириш мумкин. Бир ўлчамли ҳаракат тенгламаси умумий кўринишдаги тўла ечимга эга яъни тегишли ҳаракат тенгламасини берилган бошланғич шартларда ишлаб, зарранинг ҳаракатини тўлиқ аниқланиши мумкин. Бунинг учун энергиянинг сақланиш қонунидан фойдаланиш мақсадга мувофиқ. Бир ўлчовли ҳаракат учун Лагранж функциясини ёзамиз.

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) \quad (1)$$

Тўлиқ энергияси қуйидагича.

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E \quad (2)$$

Бу биринчи тартибли дифференциал тенглама ўзгарувчилари ажратилиб интегралланади.

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))} \quad (3)$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}$$

Вақт учун қуйидаги муносабатларни оламиз.

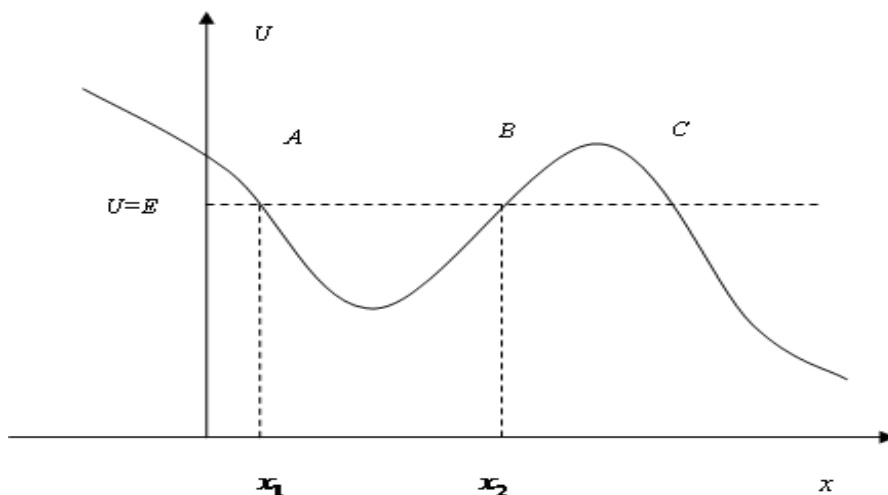
$$dx = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))} dt$$

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}$$

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} + const = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + const \quad (4)$$

Тенгламада тўлиқ энергия ва доимий ихтиёрий қийматда бўлиши мумкин. Кинетик энергия ҳар доим мусбат катталиқ, шунинг учун тўлиқ энергия ҳар доим потенциал энергиядан катта бўлади. $E > U(x)$ бўлганда ҳаракат мавжуд бўлади.

Бизга $U(x)$ потенциал энергиянинг қуйидаги кўриниши берилган бўлсин.



Расм. Ихтиёрий потенциал функцияси.

Тўлиқ энергиянинг берилган қиймати бўйича горизонтал тўғри чизик ўтказамиз. Ҳаракат АВ соҳада ёки С дан ўнгга мавжуд бўлиши мумкин. $U(x) = E$ тенглик ҳаракатнинг чегараларини аниқлайди. Бу нуқталарда тезлик нолга айланади, шунинг учун тўхташ нуқталари дейилади. Агар ҳаракат соҳаси иккита тўхташ нуқталари билан чегараланган бўлса, бундай ҳаракатга финит ҳаракат дейилади. Агар ҳаракат соҳаси чегараланмаган ёки бир

томондан чегараланган бўлса, инфинит ҳаракат дейилади ва зарра чексизликка кетади.

Бир ўлчовли финит ҳаракат тебранма ҳаракатдир. Зарра даврий такрорланувчи ҳаракат қилади (АВ потенциал ўрада). Бунда x_1 дан x_2 гача ҳаракатнинг вақти x_2 дан x_1 гача бўлган вақтга тенг. Демак тебранишнинг даври $x_1 - x_2$ кесмани ўтишга кетган вақтнинг иккиланганига тенг.

$$T = 2t = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \quad (5)$$

Формуладаги x_1 ва x_2 энергиянинг берилган қийматида $U(x) = E$ тенгламанинг илдизлари ҳисобланади.

Эркин тебраниш маълумки қуйидаги дифференциал тенглама билан аниқланади.

$$m\ddot{x} + kx = 0 \qquad m\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Тавсифий тенграмаси тузиб ишланганда қуйидаги ечимга келамиз.

$$\begin{aligned} S^2 + \omega^2 &= 0 & S &= \pm \sqrt{-\omega^2} = \pm i\omega & S_1 &= i\omega & S_2 &= -i\omega \\ x &= C_1 e^{S_1 t} + C_2 e^{S_2 t} & C_1 &= a \sin \alpha & C_2 &= a \cos \alpha \\ x &= a \sin(\omega t + \alpha) & e^{ai} &= \cos \alpha + i \sin \alpha \end{aligned}$$

Берилган частота билан даврий тебранма ҳаракат қилувчи системага осциллятор дейилади. Амплитуда ва фаза интеграллашнинг ихтиёрий доимийлари бўлиб бошланғич шартлардан топилади.

2-маъруза. Бир ўлчамли ҳаракатни интеграллаш

ихтиёрий уч ўлчовли ҳаракатга қатнашувчи моддий нуктанинг Лагранж функциясини унинг кинетик ва потенциал энергияларининг айирмаси сифатида ифодалаш мумкин.

$$L = T - U \quad (1)$$

Лагранж функциясини Декарт координаталар системаси учун қуйидагича ифодалаш мумкин

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z) \quad (2)$$

Демак олинган натижалардан фойдаланиб Эйлер-Лагранж тенгламасини қуйидаги кўринишга келтириш мумкин

$$\frac{d}{dt}(m\dot{q}) = F \quad (3)$$

Демак бир ўлчовли ҳаракат тенгламасини интеграллаш учун яъни унинг ихтиёрий вақт моментидаги координатасини аниқлаш учун (3) ҳаракат тенгламасини ечиш лозим.

Хусусий ҳолларни кўриб чиқамиз.

1) Жисмга ҳеч қандай куч таъсир қилмасин. $F = m\ddot{x} = 0$ бу ҳолда жисм тезланиши нолга тенг бўлиб $\frac{d}{dt}\dot{x} = 0$, жисм тезлиги ўзгармайди ва унинг

ҳаракат тенгламаси қуйидагича. $v = \frac{dx}{dt} = \text{const.}$

$$dx = v dt$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} dx = v \int_0^t dt$$

$$x(t) - x_0 = vt$$

$$x(t) = x_0 + vt$$

2) $m\ddot{x} = F = \text{const.}$ Бу ҳолда жисмнинг тезланиши вақт ўтиши билан ўзгармайди. Бошқача айтганда жисм текис ўзгарувчан ҳаракат қилади.

Бир ўлчовли ҳаракат тенгламасини умумий ҳолда интеграллаш имкони йўқ. Чунки моддий нуктага таъсир қилувчи куч унинг координатасига, тезлигига ва вақтдан боғлиқ. Бу фикрни тушунтириш учун қуйидаги мисолларни кўриб чиқамиз.

1.

$$F = -kx \quad k > 0$$

$$m\ddot{x} = -kx \quad m\ddot{x} = -kx \quad \frac{k}{m} = \omega^2$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

бу тенглама гармоник тебранишларни тавсифлайди.

2.

$$F(x, \dot{x}, t) = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t$$

Бу муносабатда тенгликнинг ўнг томонидаги учинчи ҳад даврий равишда таъсир этувчи мажбурий куч ифодасидир. Бу ерда дастлабки икки ҳад $k = 0, R = 0$ бўлса жисм бу куч таъсирида қуйидаги қонунният бўйича ўзгарувчи тезланишга эга бўлади:

$$\ddot{x} = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

Шундай қилиб, охириги ҳолда тенглама қуйидаги кўринишга эга бўлади

$$m\ddot{x} + kx + r\dot{x} = F_0 \cos \omega t$$

Юқорида кўриб ўтилган учала ҳолда бир ўлчовли ҳаракат тенгламаларини аниқ ечиш мумкин.

1-амалий машғулот. Бир ўлчовли ҳаракат тенгламаларини интеграллаш

1. Моддий нуқта тезлиги $v = e^{2t} + \cos 3t$ қонун бўйича ўзгаради унинг ҳаракат тенгламасини топинг.
2. Қўзғалмас О нуқтага бириктирилган узунлиги 40 см бўлган ипга осиб қўйилган М юк конус шаклидаги маятникни тасвирлайди, яъни горизонтал текисликда айлана чизади: шу билан бирга ип вертикал билан 60° ли бурчак ташкил қилади. Юкнинг тезлиги аниқлансин.
3. Оғирлиги 80 Н бўлган шарча оғирлик кучи таъсирида пастга тушади, бунда у ҳавонинг қаршилигига учрайди; шарча ҳаракати $x = 5t - 3(1 - e^{-2t})$ тенгама билан ифодаланади. Шарчанинг қаршилик кучи унинг тезлиги орқали ифодалансин.
4. Тош шахтага бошланғич тезликсиз тушиб келади. Тошнинг шахта тубига тушиб урилишидан чиққан товуш тошнинг туша бошлаган вақтидан 10 с кейин эшитилади. Товуш тезлиги 330 м/с. Шахта чуқурлиги топилсин.

Модул №6. Марказий майдондаги ҳаракат қонунлари

1-маъруза. Марказий майдондаги ҳаракат, график таҳлил, ҳаракат интеграллари

Марказий майдон деб шундай майдонга айтиладики, бунда заррачага таъсир қилувчи кучнинг модули йўналишга боғлиқ эмас ва фақат у зарранинг ушбу майдонини ҳосил қилувчи марказдан узоқлик масофасигагина боғлиқ. Бундай хусусиятга эга бўлган майдонларга гравитацион ўзаро таъсир ва Кулон ўзаро таъсир потенциалларини мисол келтириш мумкин. Чунки, иккала потенциал ҳам зарралар орасидаги масофага тескари пропорционал. Заррачага таъсир қилувчи куч ҳам абсолют қиймат жиҳатдан $\vec{r}$ га боғлиқ ва ҳар бир нуқтада радиус - вектор бўйлаб йўналади.

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial r} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

Марказий майдонда системанинг импульс моменти сақланади. Бирта зарра учун

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{P}] = \text{const}. \quad (1)$$

$\vec{M}$ ва $\vec{r}$ векторлар ўзаро перпендикуляр бўлганлиги учун $\vec{M}$ векторнинг доимийлиги радиус–векторнинг ҳар доим бир текисликда қолишини англатади. Шунинг учун зарранинг ҳаракат траекторияси марказий майдонда тўлалигича бир текисликда ётади. Бунда Лагранж функциясининг кутб координаталар системасидаги кўринишидан фойдаланиш қулайдир.

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r) \quad (2)$$

Маълумки кутб координаталар системаси учун қуйидагини ёзиш мумкин.

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Лагранж функциясида φ ошкора кўринишда иштирок этмайди. Ихтиёрий Q_i умумлашган координаталар лагранж функциясида ошкора кўринишда иштирок этмаса уларни цикли координаталар дейилади.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} = \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = 0$$

Цикли координата бўйича умумлашган импульс $P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$

$$P_\varphi = mr^2 \dot{\varphi} \quad (3)$$

Секториал $\vec{\sigma}$ тезликнинг аниқланишидан маълумки $\vec{M}_z$ импульс моменти билан қуйидагича боғланишга эга. $\vec{\sigma} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} \vec{k}$

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}] = m[\vec{r}, \vec{v}] = 2m\vec{\sigma}$$

$$\vec{M}_z = 2m\vec{\sigma} = mr^2 \dot{\varphi} \vec{k}$$

$$M_z = mr^2 \dot{\varphi} \quad (4)$$

Демак φ бўйича умумлашган импульс z бўйича импульс моментига тенг экан. Импульс моментининг сақланиши секториал тезликнинг доимийлигини талаб қилади. Ҳаракатланувчи нуктанинг радиус –вектори тенг вақтларда тенг юзаларни ўтади.

$$\dot{\varphi} = \frac{M_z}{mr^2} \quad (5)$$

Энди марказий майдондаги зарранинг ҳаракатини тўлиқ ечимини энергия ва импульс сақланиш қонунларидан топиш мумкин. Тўлиқ энергияни (5) формуладан фойдаланиб ёзамиз.

$$E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \frac{M_z^2}{m^2 r^4}) + U(r)$$

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{M_z^2}{2mr^2} + U(r) \quad (6)$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2}} \quad (7)$$

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2}}} + const \quad (8)$$

2-маъруза. Кулон майдонидаги ҳаракат, траекторияларни синфларга ажратиш

Финит ҳаракатда траекториянинг ёпиқлиги $\Delta\varphi$ бурчакнинг 2π нинг рационал қисми бўлишига боғлиқ. Ихтиёрий $U(r)$ учун умумий ҳолда финит ҳаракатнинг траекторияси ёпиқ бўлмайди.

Финит ҳаракат траекторияси ёпиқ бўлган икки турдаги марказий майдонлар мавжуд. Булар: зарранинг потенциал энергияси $\frac{1}{r}$ ва r^2 га пропорционал бўлган майдонлардир $\left(U = \frac{kr^2}{2}, U = -\frac{\gamma}{r} \right)$. Потенциал энергия r га пропорционал ва ўз навбатида бу майдонда заррага таъсир қилувчи куч r^2 га тесқари пропорционалдир. Бунга Нютоннинг тортишиш майдони Кулон электростатик майдонлари киради. Биринчи майдон учун тортишиш характерли бўлса иккинчисида ҳам тортишиш, ҳам итариш майдонлари характерли.

Аввал тортишиш майдонидаги ҳаракатни кўрамиз.

$$U(\vec{r}) = -\frac{\gamma}{r} \quad (1)$$

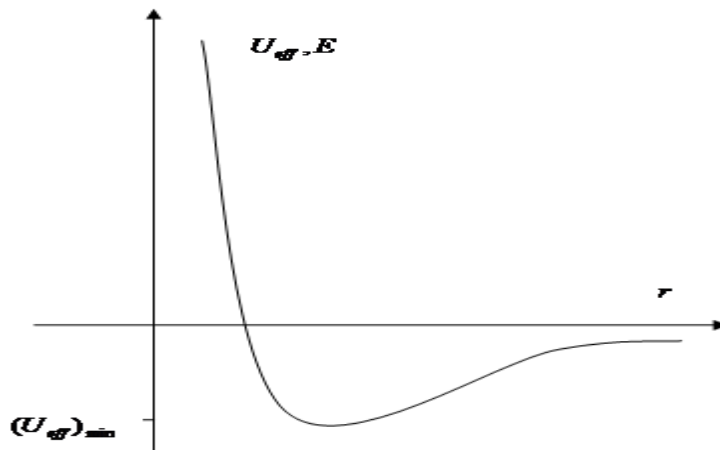
γ -мусбат доимий.

«Эффектив» потенциал энергиянинг ифодасидан фойдаланамиз.

$$U_{eff} = \frac{M_z^2}{2mr^2} - \frac{\gamma}{r} \quad (2)$$

Унда $r \rightarrow 0$ $U_{eff} \rightarrow +\infty$ айланади, $r \rightarrow \infty$ U_{eff} нолга манфий қийматлар томонидан интилади. Минимум қийматни топиш учун потенциал энергиядан радиус вектор бўйича ҳосила ҳисоблаб нолга тенглаштирамиз ва $r = \frac{M^2}{m\gamma}$ эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

$$(U_{eff})_{\min} = -\frac{\gamma^2 m}{2M^2} \quad (3)$$



Расм. Марказий майдонда энергиянинг узоклашиш масофасига боғлиқлиги.

Расмдан кўринадикки $E \geq 0$ ҳолда зарранинг ҳаракати инфинит, $E < 0$ да ҳаракат финит бўлади. Марказий майдонда бурилиш бурчагининг аниқланиши потенциал энергия қийматини кўямиз.

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m\left[E + \frac{\gamma}{r}\right] - \frac{M^2}{r^2}}} = \int \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m\left[E + \frac{\gamma}{r}\right] - \frac{M^2}{r^2} + \frac{m^2 \gamma^2}{M^2} - \frac{m^2 \gamma^2}{M^2}}} \quad (4)$$

Ҳисоб бошини бошланғич бурчак учун $const = 0$ танлаймиз ва қуйидагича белгилашларни киритамиз.

$$P = \frac{M^2}{m\gamma}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\gamma^2}} \quad (5)$$

$$\varphi = \arccos \frac{\left(\frac{M}{r} - \frac{m\gamma}{M}\right) \frac{M}{m\gamma}}{\sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\gamma^2}}} = \arccos \frac{\frac{M^2}{rm\gamma} - 1}{e} = \arccos \frac{\frac{P}{r} - 1}{e}$$

$$\cos \varphi = \frac{\frac{P}{r} - 1}{e} \qquad \frac{P}{r} = 1 + e \cos \varphi$$

$$r = \frac{P}{1 + e \cos \varphi} \quad (6)$$

Бу муносабат 2-тартибли эгри чизикнинг тенгламаси бўлиб, конусий кесимнинг фокал тенгламаси дейилади. P -фокал параметр; e -нисбий экссентриситет.

3-маъруза. Кеплер қонунлари

Гравитацион майдон таъсиридаги осмон жисмларининг ҳаракатини ўрганишда олдинги мавзуларда олинган натижалардан фойдаланамиз. Зарранинг тўлиқ энергияси «эффектив» потенциал энергияга тенг бўладиган ҳоллардаги радиус вектори қийматлари жисмнинг ҳаракат соҳаси чегараларини аниқлайди.

$$E = U_{eff} = \frac{M_z^2}{2mr^2} + U(r) \quad (1)$$

$$(U_{eff})_{\min} = -\frac{\gamma^2 m}{2M^2}, \quad P = \frac{M^2}{m\gamma}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\gamma^2}}$$

Эллипс учун $e = \frac{c}{a}$ доим мусбатдир, c - эллипс марказидан a катта ярим ўқдаги фокус масофасигача бўлган масофа. Такидлаш лозимки эллипснинг

катта ярим ўқи фақат жисмнинг энергиясига боғлиқ (импулс моментига боғлиқ эмас). Майдоннинг марказидан (эллипс фокусидан) энг яқин ва узоқ масофалар қуйидаги формулалардан топилади.

$$r_{\min} = \frac{P}{1+e} = a(1-e) \quad r_{\max} = \frac{P}{1-e} = a(1+e) \quad (2)$$

Эллипснинг орбита бўйлаб ҳаракат вақтини импулс моментининг сақланишидан топиш қулай.

$$M = 2m\sigma = 2m\dot{S} = 2m\frac{dS}{dt} \quad Mdt = 2mdS$$

$$\int_0^T Mdt = 2m\int_0^S dS \quad MT = 2mS \quad T = \frac{2mS}{M}$$

Бунда S радиус вектор бўйган секторнинг юзаси бўлиб, бир даврда эллипснинг юзасига ($S = \pi ab$) тенг бўлади. Эллипснинг катта ва кичик ярим ўқлари учун (3.38) формуладан фойдаланамиз.

$$\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{m}{\gamma} \quad (3)$$

Марказий майдондаги ҳаракат формулаларидан келиб чиқиб Кеплернинг учта қонунини изоҳлашимиз мумкин.

1-қонун. *Қуёш системасининг ҳар бир планетаси доимий секториал тезлик билан ясси ҳаракат қилади.*

Буни импулс моментининг марказий майдонларда сақланишидан кўрамиз, яъни тенг вақтларда тенг юзалар ўтилади.

2-қонун. *Барча планеталар орбиталари эллипсдан иборат бўлиб уларнинг умумий фокусларида Қуёш жойлашади.*

Буни иккинчи тартибли эгри чизиқ формуласидан кўрамиз (3).

3-қонун. *Планеталарнинг айланиш давларининг квадратлари эллиптик орбиталарининг катта ярим ўқларининг кубига пропорционалдир.*

Агар сунъий йўлдош орбитага чиққан бўлса унга атмосфера таъсир қилмайди, фақат тортишиш кучи таъсирида ҳаракатланади.

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

Ерни бир жинсли айланмайдиган R радиусли шар деб қараймиз ва тортишиш кучи $F = ma_n$ $a_r = 0$.

$$G \frac{Mm}{r^2} = ma_n \quad GM = a_n r^2$$

Жисм Ер сиртида бўлса $GM = a_n r^2 = gR^2$ доимий ҳисобланади.

Потенциал майдонда жисмга таъсир қилувчи куч $F = \frac{U}{r}$ га тенг.

1-амалий машғулот. Марказий майдондаги ҳаракат тенгламаларини интеграллаш

Ернинг сунъий йўлдоши тортишиш кучи таъсирида e эксцентриситет билан ҳаракатланмоқда. Ер эллиптик траекториянинг f фокусларидан бирида ётади. Ерга энг яқин масофада йўлдошнинг тезлиги v_1 бўлса, йўлдошнинг энг узоқ нуқтадан ўтиш тезлиги топилсин.

Ечиш: (3.44) формуладан эллиптик орбита учун энг яқин ва энг узоқ масофаларни ёзиб оламиз.

$$r_{\min} = a(1-e) \quad r_{\max} = a(1+e)$$

Марказий майдонда импульс моменти сақланади $M = M_1 = M_2$ ва четки нуқталар учун моментларни ёзамиз.

$$\begin{aligned} M_1 &= mv_1 r_{\min} & M_2 &= mv_2 r_{\max} \\ mv_1 r_{\min} &= mv_2 r_{\max} & v_1 a(1-e) &= v_2 a(1+e) \\ v_2 &= \frac{(1-e)}{(1+e)} v_1 & v_2 &< v_1 \end{aligned}$$

Эллипс учун $e = \frac{c}{a}$, c - эллипс марказида фокусгача бўлган масофа.

1. Экватор текислигида айланувчи Ернинг доиравий йўлдоши ҳар доим унинг бир жойи тепасида туриши учун у қандай баландликда учирилиши керак?

2. Йўлдошнинг доиравий орбитасининг қандай баландлигида R радиусли планетанинг сиртига нисбатан потенциал энергияси унинг кинетик энергиясига тенг бўлиши аниқлансин.
3. Космик аппарат чексизликка кетиши учун унга планета сиртидан қандай минимал тезлик бериш керак?

2-амалий машғулот. Марказий майдондаги ҳаракат тенгламаларини интеграллаш

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m\left[E + \frac{\gamma}{r}\right] - \frac{M^2}{r^2}}} = \int \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m\left[E + \frac{\gamma}{r}\right] - \frac{M^2}{r^2} + \frac{m^2\gamma^2}{M^2} - \frac{m^2\gamma^2}{M^2}}}$$

Қуйидаги белгилашларни киритамиз.

$$\eta = \frac{M}{r} - \frac{m\gamma}{M}; \quad \alpha^2 = 2mE + \frac{m^2\gamma^2}{M^2}; \quad d\eta = -\frac{M}{r^2} dr$$

$$\eta^2 = \left(\frac{M}{r} - \frac{m\gamma}{M}\right)^2 = \frac{M^2}{r^2} - \frac{2m\gamma}{r} + \frac{m^2\gamma^2}{M^2}$$

$$\varphi = -\int \frac{\frac{M}{r^2} \frac{r^2}{M} d\eta}{\sqrt{\alpha^2 - \eta^2}} = -\int \frac{d\eta}{\sqrt{\alpha^2 - \eta^2}}$$

$$\varphi = \arccos \frac{\eta}{\alpha} + const = \arccos \frac{\frac{M}{r} - \frac{m\gamma}{M}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\gamma^2}{M^2}}} + const$$

$$a_n r^2 = gR^2 \quad a_n = g \frac{R^2}{r^2} = \frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{g \frac{R^2}{r}}$$

Сунъий йўлдош Ер сиртидан учирилса $r = R = 6400km$ ва айлана орбитага чиқариш учун қуйидаги бошланғич тезлик берилади.

$$v_1 = \sqrt{g \frac{R^2}{r}} = \sqrt{gR} \approx 7,9 \frac{km}{sek}$$

Жисмни Ернинг тортишиш кучидан озод қилиш учун унга v тезлик бериш керак бўлади. Бунда жисм параболик траектория $E = 0$ бўйлаб ҳаракатланиши керак. Ернинг гравитацион майдонида потенциал энергия

$U = -\frac{\gamma}{r} = -\frac{GMm}{r}$ тенг бўлиб, тўлиқ энергияни ёзиш мумкин.

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} = 0 \quad \frac{mv^2}{2} = \frac{gR^2m}{r}$$

$$v = \sqrt{2g \frac{R^2}{r}}$$

Сунъий йўлдош Ер сиртидан учирлса $r = R$

$$v_2 = \sqrt{2g \frac{R^2}{r}} = \sqrt{2gR} \approx 11,2 \frac{km}{sek}$$

3-амалий машғулот. Даврнинг энергияга боғлиқлигини топиш

Куч марказидан бирор масофада бўлган жисмнинг бошланғич тезлиги ва траектория шакли орасидаги муносабатни тасвирлаш учун қуйидаги жадвални келтирамиз.

Жадвал-1

e эллипс эксцентриситети	Траектория шакли	Жисм энергияси, E	Бошланғич тезлик v_0
$e = 0$	Айлана	$E = (U_{eff})_{\min}$	$v_0 = v_1$
$0 < e < 1$	Эллипс	$(U_{eff})_{\min} < E < 0$	$v_1 < v_0 < v_2$
$e = 1$	Парабола	$E = 0$	$v_0 = v_2$
$e > 1$	гипербола	$E > 0$	$v_0 > v_1$

$$1. \text{ Элептик орбита учун } a = \frac{\gamma}{2|E|} \quad b = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}} \quad \text{формуларни}$$

келтириб чиқаринг.

2. Марказий майдонда Энергия давр орасидаги қуйидаги муносабатларни келтириб чиқаринг

$$T = \frac{2m\pi ab}{M} = \frac{2m\pi a}{M} \frac{M}{\sqrt{2m|E|}} 2m\pi a \sqrt{\frac{a}{m\gamma}}$$

$$T = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{\gamma}}$$

3. Йўлдошнинг Ер атрофида эллиптик орбита бўйлаб ҳаракатининг айланиш даври ва унинг апогей ва перигейлари фарқини билган ҳолда эксцентриситетини аниқланг.

Модул №7. Зарраларнинг тўқнашуви васочилиши

1-маъруза. Зарраларнинг ўз-ўзидан парчаланиши ва сочилиши. Лаборатория ва инерция маркази системалари тушунчаси

Механик жараёнларнинг кўпчилик ҳолларда энергия ва импульснинг сақланиш қонунлари асосида тадқиқ этиш мумкин. Биз зарранинг «ўз-ўзидан» яъни ташқи кучларнинг таъсирисиз парчаланиш жараёнини таҳлил қиламиз. Бунда дастлабки зарра парчаланишдан кейин иккита бошқа заррачага парчалансин.

Энг оддий ҳол бу заррача парчалангунга қадар тинч турган деб қаралади. Импульснинг сақланиш қонунига кўра ёзамиз.

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_{10} + \vec{P}_{20} \quad (1)$$

Агар дастлаб зарралар тинч турган бўлса, $\vec{P}_{10} = 0, \vec{P}_{20} = 0$.

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0 \quad \vec{P}_1 = -\vec{P}_2 \quad P_1^2 = P_2^2 = P_0^2 \quad (2)$$

Яъни бу зарралар микдоран тенг ва қарама-қарши йўналган импульсларга эга бўлади.

Парчаланувчи зарранинг ички энергиясини E_i деб белгилаб энергиянинг сақланишини парчаланиш учун ёзамиз.

$$E_i = E_{1i} + E_{2i} + T_1 + T_2 = E_{1i} + E_{2i} + \frac{P_1^2}{2m_1} + \frac{P_2^2}{2m_2}$$

$$E_i = E_{1i} + \frac{P_0^2}{2m_1} + E_{2i} + \frac{P_0^2}{2m_2} \quad (3)$$

Бу ерда m_1, m_2 ҳосил бўлган зарраларнинг массалари E_{1i}, E_{2i} уларнинг ички энергиялари. Зарра парчаланиши учун парчаланувчи ва парчаланган

зарралар ички энергияларининг айирмаси мусбат бўлиши лозим. Одатда бу энергия фарқини парчаланиш энергияси ε деб юритилади.

$$\frac{p_0^2}{2m_1} + \frac{p_0^2}{2m_2} = T_1 + T_2 = E_i - E_{1i} - E_{2i}$$

$$\varepsilon = E_i - E_{1i} - E_{2i}$$
(4)

Демак, юқоридаги муносабатга кўра қуйидаги ифодага эга бўламиз.

$$\varepsilon = \frac{p_0^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{p_0^2}{2m} \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$
(5)

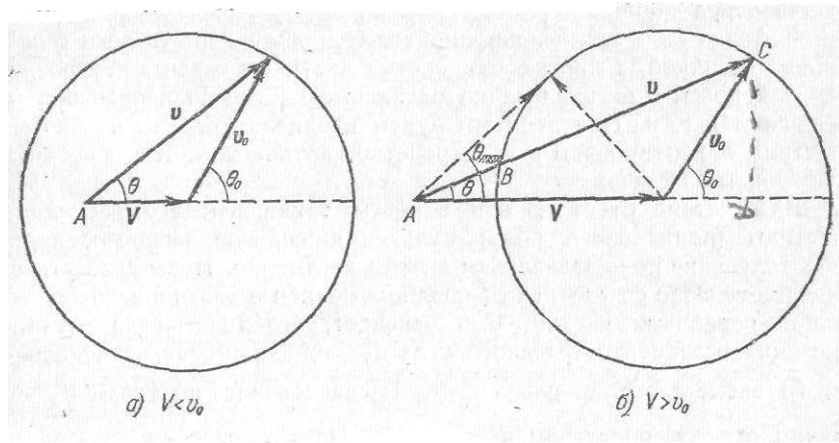
Бу ерда m -ҳосил бўлган зарраларнинг келтирилган массаси. Зарраларнинг тезлиги эса уларнинг импульси орқали аниқланади:

$$v_{10} = \frac{p_0}{m_1} \quad v_{20} = \frac{p_0}{m_2}$$
(6)

Энди дастлабки заррача парчалангунга қадар V тезлик билан ҳаракатланувчи санок тизимига ўтамиз. Одатда бу санок тизимини лаборатория санок тизими (ёки L тизим) деб юритилади. Зарраларнинг тўлиқ импульслари нолга тенг бўлган тизим эса инерция маркази тизими (ёки M тизим) деб юритилади. Парчаланувчи зарралардан бирининг тезлиги L ва M тизимларга нисбатан мос равишда тезликлари v ва v_0 бўлса, у ҳолда $\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}_0$ бўлганлиги учун қуйидаги натижага эга бўламиз.

$$v^2 + V^2 - 2vV \cos \theta = v_0^2,$$
(7)

бу ерда θ - заррачанинг V тезлик йўналишига нисбатан учиб чиқиш бурчаги. Бу тенглама парчаланиш натижасида ҳосил бўлган заррачанинг L тизимдаги тезлигини аниқлайди. Бу муносабатни 13-расмда кўрасатилган диаграмма ёрдамида тасвирлаш мумкин.



Расм 13. Зарранинг парчаланиши диаграммаси.

Икки ҳол бўлиши мумкин $V < v_0, V > v_0$. Биринчи ҳолда заррача ихтиёрий бурчак остида учиб чиқиши мумкин. Иккинчи ҳолда эса заррача қуйидаги тенглик билан аниқланувчи бурчакдан катта бўлмаган бурчак остида фақат олдинга учиб чиқиши мумкин:

$$\sin \theta_{\max} = \frac{v_0}{V} \quad (8)$$

L ва M тизимлардаги учиб чиқиш бурчаклари θ ва θ_0 орасидаги боғланишни ҳам шу диаграммалар асосида топиш мумкин.

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\tilde{N}D}{AD} = \frac{v_0 \sin \theta_0}{V + v_0 \cos \theta_0} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\sin \theta (V + v_0 \cos \theta_0) = v_0 \sin \theta_0 \cos \theta$$

$$V \sin \theta = v_0 (\sin \theta_0 \cos \theta - \sin \theta \cos \theta_0)$$

$$\sin(\theta_0 - \theta) = \frac{V}{v_0} \sin \theta$$

$$\theta_0 - \theta = \arcsin\left(\frac{V}{v_0} \sin \theta\right)$$

$$\theta_0 = \theta + \arcsin\left(\frac{V}{v_0} \sin \theta\right)$$

$$\cos \theta_0 = \cos \left\{ \theta + \arcsin\left(\frac{V}{v_0} \sin \theta\right) \right\}$$

2-маъруза. Зарраларнинг сочилиши

Модда зарралари орасидаги ўзаро таъсир кучларининг табиатини аниқлаш муаммоси ҳам “икки жисм масаласи” ёрдамида ҳал этилиши мумкин. Эластик тўқнашувда зарраларнинг ички ҳолати ўзгармайди. Шунинг учун икки заррадан иборат системанинг энергияси ва импульси сақланади.

Қўйиладиган масала тўқнашувгача бўлган тезликлар орқали тўқнашувдан кейинги тезликларни топишдир. Зарраларни M тизимини эътиборга олган ҳолда ёзамиз.

Агар m_1 ва m_2 массали зарранинг тўқнашувгача L - тизимдаги тезликлари v_1 ва v_2 . Унда инерция маркази тезлигини топамиз.

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \vec{v}_c = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

Тўқнашувгача инерция марказига нисбатан зарраларнинг тезликларини v_{10} ва v_{20} деб белгтлаймиз. Зарраларнинг L - тизимдаги тезлигидан инерция маркази тезлигини айирамиз.

Инерция маркази тизимида зарралар системасининг импульси нолга тенг. Тўқнашувдан кейин йўналишлар тескари бўлади. Эластик тўқнашувда кинетик энергия сақланади, шунинг учун нисбий тезликларнинг абсолют қийматлари ўзгармайди. Биринчи зарранинг тўқнашувдан кейинги тезлиги йўналишида $\vec{n}$ вектор киритамиз.

Демак тўқнашувдан кейинги тезликлар орқали ифода қуйидагича.

$$\vec{v}_{10}' = \frac{m_2}{m_1 + m_2} |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \vec{n} \quad \vec{v}_{20}' = \frac{-m_1}{m_1 + m_2} |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \vec{n} \quad (2)$$

Энди лаборатория тизимида тўқнашувдан кейинги тезликлар учун ифода ёзиш учун (2) ифодаларга инерция маркази тезлигини қўшиш кифоя.

$$\begin{aligned} \vec{v}_1' &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \vec{n} + \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{v}_2' &= \frac{-m_1}{m_1 + m_2} |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \vec{n} + \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (3)$$

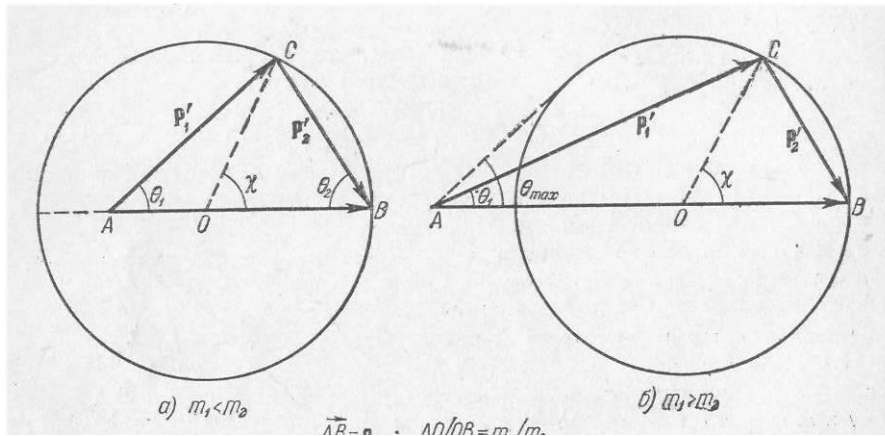
$\vec{n}$ векторнинг йўналиши эса зарраларнинг ўзаро таъсир қонунига ва уларнинг тўқнашув вақтидаги ўзаро жойлашувига боғлиқ бўлади.

Олинган натижаларни геометрик изоҳлаш учун (3) ифодаларни мос равишда m_1 ва m_2 га кўпайтирамиз ва импульсларга ўтамыз.

$|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = v$ зарраларнинг нисбий тезлиги.

$$\begin{aligned}\vec{p}_1' &= m\vec{v} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2), & \vec{p}_2' &= -m\vec{v} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \\ m &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} & \vec{p}_1' + \vec{p}_2' &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2\end{aligned}\quad (4)$$

Радиуси mv бўлган айлана чизамиз. Бирлик вектор $\vec{n}$ $\vec{OC}$ бўйича йўналади. $\vec{AC}$ ва $\vec{CB}$ мос равишда $\vec{p}_1'$ ва $\vec{p}_2'$.



Расм. Зарраларнинг тўқнашиш диаграммаси.

Биринчи (расм) расмдан қуйидагиларни ёзиш мумкин.

$$\begin{aligned}\vec{AO} + m\vec{v} &= \vec{p}_1' & \vec{AO} &= \vec{p}_1' - m\vec{v} & \vec{p}_1' + \vec{p}_2' &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \\ \vec{AO} &= \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) & \vec{AB} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \\ \vec{OB} &= \vec{p}_2' + m\vec{v} & \vec{OB} &= \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = m\vec{v}\end{aligned}$$

$\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ берилишига кўра айлана радиуси ва A нуқта ўзгармайди. C нуқта ихтиёрий ҳолатни эгаллаши мумкин. $m_1 < m_2$ бўлса A нуқта айлана ичида, $m_1 > m_2$ бўлса айлана ташқарисида ётади. Расмдаги θ_1 ва θ_2 бурчаклар тўқнашган зарраларнинг $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ йўналишга нисбатан оғиш бурчаклари бўлиб улар дастлабки зарра импульсининг йўналишига нисбатан олинган.

Расмда тасвирланган $\vec{n}$ бирлик векторнинг йўналиши χ бурчак орқали белгиланган бўлиб у M тизимда биринчи заррачанинг бурилиш бурчагини тавсифлайди. θ_1 ва θ_2 бурчаклар χ бурчак орқали ифодаларини топамиз.

ОСВ учбурчак тенг ёнли шунинг учун бурчаклар учун қуйидаги ўринли.

$$\begin{aligned}\chi + 2\theta_2 &= \pi & \theta_2 &= \frac{\pi - \chi}{2} \\ \operatorname{tg} \theta_1 &= \frac{CD}{AD} = \frac{|OC| \sin \chi}{|AO| + |OC| \cos \chi} = \frac{\sin \chi}{\frac{|AO|}{|OC|} + \cos \chi} \\ \operatorname{tg} \theta_1 &= \frac{m_2 \sin \chi}{m_1 + m_2 \cos \chi} = \frac{CD}{AD} & \theta_2 &= \frac{\pi - \chi}{2}\end{aligned}\quad (5)$$

Энди зарраларнинг тўқнашувдан кейинги тезликларини χ бурчак орқали ифодалари қуйидагича топилади.

$$v_1' = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2 \cos \chi}}{m_1 + m_2} v, \quad v_2' = \frac{2m_1v}{m_1 + m_2} \sin \frac{\chi}{2} \quad (6)$$

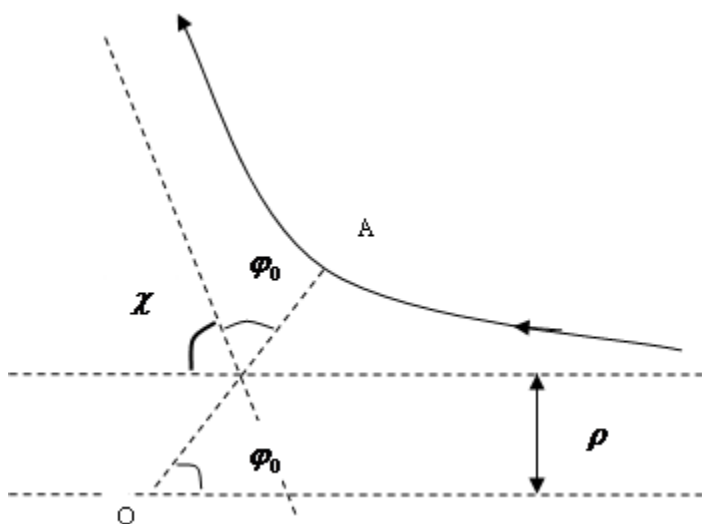
3-маъруза. Сочилишнинг эффектив кесими

Муҳим физикавий аҳамиятга эга бўлган жараёнлардан бири – зарядланган зарраларнинг Кулон майдонидаги сочилишини кўрамиз. Маълумки иккита зарранинг тўқнашиши натижасини тўлиқ аниқлаш учун (χ -бурчакни топиш) ўзаро таъсирнинг аниқ қонуни қаралиши керак. Бунинг учун m массали зарранинг $U(r)$ потенциал майдонда марказий кучда оғишини кўрамиз.

Зарранинг потенциал майдонда оғиш траекториясини чизамиз. ОА энг яқин масофа (расм). Иккила асимптота бу чизикда бир хил бурчакда кесишади.

$$\chi = |\pi - 2\varphi_0| \quad (1)$$

Марказий майдонда зарранинг оғиш бурчаги φ_0 учун муносабат олган эдик.



Расм . Зарраларнинг потенциал майдонда сочилиши траекторияси.

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} \quad (2)$$

Инфинит ҳаракат учун энергия ва импульс моменти чексизликдаги тезлик ва нишоний масофа ρ орқали ифодаланади.

$$E = \frac{mv_{\infty}^2}{2} \quad M = m\rho v_{\infty} \quad (3)$$

Унда (4.19) формуланинг кўриниши қуйидагича ўзгаради.

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{m\rho v_{\infty}}{r^2} dr}{\sqrt{2m\left[\frac{mv_{\infty}^2}{2} - U\right] - \frac{m^2\rho^2 v_{\infty}^2}{r^2}}} = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{\rho}{r^2} dr}{\sqrt{1 - \frac{2U}{mv_{\infty}^2} - \frac{\rho^2}{r^2}}} \quad (4)$$

Сочилиш жараёнида одатда зарралар дастаси иштирок этади. Дастанинг тезлигига v_{∞} мос равишда ундаги зарралар ҳар хил нишоний масофаларга эга бўлади. Ўз навбатида сочилиш бурчаги χ ўзгача бўлади. $\chi \div \chi + d\chi$ бурчаклар оралиғига бирлик вақтда dN та зарранинг сочилиши тўғри келади. Яна дастанинг бирлик кесимидан бирлик вақтда n та зарра ўтса $d\sigma$ эффектив кесим учун қуйидаги муносабат киритилади ва бу сочилишда муҳим ҳисобланади.

$$d\sigma = \frac{dN}{n} \quad (5)$$

χ ва ρ орасида ҳам боғланиш бўлиб, интервалга тушадиган зарралар сони n ни $\rho \div \rho + d\rho$ радиусли айлана юзасига кўпайтмасига тенг.

$$dN = 2\pi\rho d\rho \cdot n \qquad d\rho(\chi) = \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\chi$$

Сочилиш бурчагига боғлиқлигини кўрсак қуйидагини оламиз.

$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi) \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\chi \quad (6)$$

Агар сочилиш бурчаги конусли бўлса фазовий бурчак орқали ифодаланади.

$$\begin{aligned} d\Omega &= 2\pi \sin \chi d\chi \\ d\sigma &= \frac{\rho(\chi)}{\sin \chi} \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\Omega \end{aligned} \quad (7)$$

Яқин тезликларда ҳаракатланаётган зарралар дастасининг кулон майдонида сочилишидаги эффектив кесимини аниқладик.

4-маъруза. Резерфорд формуласи

Энди зарралар дастасининг кулон потенциаллар майдонида сочилиши ечимларини кўриб чиқамиз. Олдинги мавзудаги (4) формулага Кулон потенциалини қўямиз ($U = \frac{\gamma}{r}$ ва соддалик учун $v_{\infty} = v$ деб оламиз).

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{\rho}{r^2} dr}{\sqrt{1 - \frac{2\gamma}{rmv^2} - \frac{\rho^2}{r^2}}} \quad (1)$$

Қуйидаги белгилашларни киритиб интегрални ҳисоблаймиз.

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\gamma}{mv^2\rho^2} + \frac{1}{r} & d\eta &= -\frac{1}{r^2} dr \\ \alpha^2 &= \frac{1}{\rho^2} + \frac{\gamma^2}{m^2(v\rho)^4} & \eta^2 &= \frac{\gamma^2}{m^2(v\rho)^4} + \frac{2\gamma}{mv^2\rho^2 r} + \frac{1}{r^2} \end{aligned}$$

Белгилашларни ва дифференциални интегралга қўйиб қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз

$$\varphi_0 = \arccos \frac{\frac{\gamma}{mv_\infty^2 \rho} + \frac{1}{r}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{mv_\infty^2 \rho}\right)^2}} \Bigg|_{r_{\min}}^{\infty} = \arccos \frac{\frac{\gamma}{mv_\infty^2 \rho}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{mv_\infty^2 \rho}\right)^2}} + const$$

Бу ерда доимийни координатани силжитиб нолга тўғриланса ($const = 0$) бўлади.

$$\varphi_0 = \arccos \frac{\frac{\gamma}{mv_\infty^2 \rho}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{mv_\infty^2 \rho}\right)^2}} \quad (2)$$

Формуланинг икала томонидан косинус ҳисобласак котангинусга келади.

$$\cos \alpha = \frac{ctg \alpha}{\sqrt{1 + ctg^2 \alpha}} \quad ctg \varphi_0 = \frac{\gamma}{mv_\infty^2 \rho}$$

Охирги ифодани квадратга кўтариб тангинус орқали ифодалаш мумкин.

$$\rho^2 = \frac{\gamma^2}{m^2 v_\infty^4} tg^2 \varphi_0$$

Энди олдинги мавзулардан $\varphi_0 = \frac{\pi - \chi}{2}$ эканлигини инобатга олсак, юқоридаги ифода қуйидаги кўринишда ёзилиши мумкин.

$$\rho^2 = \frac{\gamma^2}{m^2 v_\infty^4} \tilde{n} tg^2 \frac{\chi}{2} \quad (3)$$

Бу ифодани χ бўйича дифференциалга келтирамиз.

$$\rho = \frac{\gamma}{mv_\infty^2} \tilde{n} tg \frac{\chi}{2} \quad (4)$$

$$\frac{d\rho}{d\chi} = - \frac{\gamma}{2mv_\infty^2 \sin^2 \frac{\chi}{2}} \quad (5)$$

(3) ва (4) формулаларни инобатга олиб олдинги мавзудаги (1) ва (2) қуйидагича ёзиб сочилиш кесимининг χ сочилиш бурчагига боғланишини тавсифловчи қуйидаги ифодаларни ҳосил қиламиз:

$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi)\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right|d\chi = 2\pi\frac{\gamma}{mv_{\infty}^2}\operatorname{ctg}\frac{\chi}{2}\cdot\frac{\gamma}{2mv_{\infty}^2\sin^2\frac{\chi}{2}}d\chi$$

$$d\sigma = \pi\left(\frac{\gamma}{mv_{\infty}^2}\right)^2\frac{\cos\frac{\chi}{2}}{\sin^3\frac{\chi}{2}}d\chi \quad (6)$$

ёки

$$d\sigma = \left(\frac{\gamma}{2mv_{\infty}^2}\right)^2\frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\chi}{2}} \quad (7)$$

Бу ифода Резерфорд формуласи деб аталади. Кўриниб турибдики, сочилишнинг дифференциал кесими γ нинг ишорасига боғлиқ эмас. Ёки бошқача қилиб айтганда бу натижа ҳам тортишувчи ҳам итариловчи Кулон майдонлари учун ўринлидир.

1-амалий машғулот. Зарраларнинг тўқнашуви масалаларида турли санок системаларидан фойдаланиш

1.Зарраларнинг лаборатория ва инерция маркази системасидаги қуйидаги формулаларни келтириб чиқаринг

$$\vec{p}_1' = m\vec{v} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2), \quad \vec{p}_2' = -m\vec{v} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$$

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

2.Зарраларнинг лаборатория ва инерция маркази системасидаги қуйидаги формулаларни келтириб чиқаринг

$$\vec{v}_1' = \frac{m_2}{m_1 + m_2}|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|\vec{n} + \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v}_2' = \frac{-m_1}{m_1 + m_2}|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|\vec{n} + \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

3. Зарраларнинг тўқнашув диаграммасини тўқнашувдан кейинги импульслар учун тузинг.

4. Моддий нукта тезлиги $v=e^{2t}+\cos 6t$ қонун бўйича ўзгаради унинг ҳаракат тенгламасини топинг.

2-амалий машғулот. Эффектив кесимларни ҳисоблаш

1. Эффектив кесим учун $d\sigma = 2\pi r d\rho$ формулани исботланг.
2. Эффектив кесимнинг сочилиш бурчаги ва нишоний масофа орқали чизиқли бурчак учун ифодаланг.
3. Эффектив кесимнинг сочилиш бурчаги ва нишоний масофа орқали фазовий бурчак учун ифодаланг

Модул №8. Чизиқли кичик тебранишлар.

1-маъруза. Барқарор (турғун) мувозанат ҳолати. Бир ўлчамли эркин ва сўнувчи тебранишлар. Сўниш бор вақтдаги мажбурий тебранишлар

Тебранма ҳаракатлар табиатда ва техникада кенг тарқалган, машиналар, самолётларнинг ихтиёрий конструкцияси бикирликка (эластикликка) эга ва вибрацияланади.

Системаларнинг механик ҳаракатларидан кенг тарқалгани кичик тебранишлардир. Бунда система турғун мувозанат ҳолати яқинида тебранади. Бундай ҳаракатларни бир эркинлик даражага эга система учун кўриб чиқамиз.

Турғун мувозанат ҳолатига минимал $U(q)$ потенциал энергия мос келади. Ундан четлашиш системани қайтарувчи $\frac{du}{dq}$ кучни юзага келтиради. Турғун ҳолат учун q_0 координатани киритамиз ва четлашиш $q - q_0$ бўйича $u(q) - u(q_0)$ ўзгаришнинг ёйилмаси

$$u(q) - u(q_0) \approx \frac{k}{2} (q - q_0)^2$$

Бунда $k = U''(q_0)$ мусбат коэффициент. $U(q_0) = 0$ минимал қийматдан бошлаб ҳисоб бошланса

$$x = q - q_0 \quad (1)$$

Координатанинг мувозанат қийматдан силжиши бўлади. Унда потенциал энергия.

$$U(x) = \frac{kx^2}{2} \quad (2)$$

Умумий ҳолда бир эркинлик даражаси бўлган системанинг кинетик энергияси қуйидагича

$$\frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 = \frac{1}{2} a(q) \dot{x}^2$$

Шу яқинлашишда $a(q)$ ни $a(q_0) = m$ га алмаштириш мумкин. Таъкидлаш керакки m агар зарранинг декарт координатаси фақат x бўлсагина массага мос келади.

Бир ўлчамли кичик тебранишлар учун (бундай системани кўпинча бир ўлчамли осцилятор деб юритилади) Лагранж функцияси қуйидагича

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \quad (3)$$

Бу функцияга мос келувчи Лагранж тенгламаси

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (4)$$

ёки

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5)$$

Олинган дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \quad (6)$$

Бу муносабатни қуйидагича ҳам ёзиш мумкин

$$c_1 = a \sin \alpha \quad c_2 = a \cos \alpha$$

$$x = a \sin(\omega t + \alpha) \quad (7)$$

Чунки $x = a \sin(\omega t + \alpha)$ $v = \frac{dx}{dt} = a\omega \cos(\omega t + \alpha)$

Бошланғич шартлардан фойдаланамиз. $t = 0, \quad x = x_0, \quad v = v_0$
 $x_0 = a \sin \alpha \quad v_0 = a\omega \cos \alpha$

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{c_2}{c_1} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (8)$$

Демак турғун мувозанат ҳолати яқинида система гармоник ҳаракат қилади. a – тебраниш амплитудаси ва косинус аргументи унинг фазаси; α эса фазанинг бошланғич қиймати. Циклли частота ω назарий физикада частота дейилади.

Частота ҳаракатнинг бошланғич шартларига боғлиқ бўлмай тебранишнинг асосий характеристикаси ҳисобланади. (5.5) формуладан кўринадикки частота системанинг хоссалари билан аниқланади. Математик нуқтаи назардан частота потенциал энергиянинг координата квадратиға боғлиқлигидан аниқланади.

Кичик тебранишдаги система энергияси

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)$$

Бунга (5.7) формулани қўйсак қуйидагича бўлади.

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 a^2 \quad (9)$$

Тебранувчи системанинг координатасини вақтга боғлиқлигини комплекс ифоданинг ҳақиқий қисми орқали бериш мумкин.

$$x = \operatorname{Re} \{ A e^{-i\omega t} \} \quad (10)$$

$$A = a e^{-i\alpha} \quad (11)$$

A -комплекс амплитуда дейилади. Унинг модули одатий амплитудадаги аргументи эса бошланғич фазага мос келади.

5.2. СЎНУВЧИ ТЕБРАНИШЛАР

Реал ҳолларда тебранувчи моддий нуқта ҳар доим қаршиликка учрайди. Моддий нуқтанинг тебранишини сўндирувчи қаршиликни қуйидаги ҳолатдан кўрамиз.

Моддий нуқтага $\vec{F}$ қайтарувчи куч ва қайтишига тўсқинлик қилувчи муҳитнинг қаршилик кучи $\vec{R} = -\mu \vec{v}$ таъсир қилсин. Қайтарувчи куч модули $F = k|x|$, қаршилик кучи эса нуқта тезлигининг биринчи даражасига пропорционал қаралсин.

Нуқтанинг ҳаракат йўналишида x ўқини қўямиз, O нуқта M нуқтанинг мувозанат ҳолатига мос танланади.

$\vec{R}$ кучнинг R_x проекцияси ҳар доим $\vec{v}$ тезликнинг v_x проекциясига қарама-қарши йўналади.

$$R_x = -\mu v_x = -\mu \frac{dx}{dt}$$

Нуқтанинг дифференциал ҳаракат тенгламасини қуйидагича ёзамиз.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \mu \frac{dx}{dt}$$

ёки

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{\mu}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

$\mu/m = 2n$ ва $\frac{k}{m} = \omega^2$ деб белгилаб ёзамиз.

$$\frac{dx^2}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \quad (1)$$

$n = \frac{\mu}{2m}$ доимий коэффициент муҳит қаршилигини характерлайди (сўниш коэффициенти).

$$[n] = \left[\frac{H \cdot \text{сек}}{m} : \frac{H \cdot \text{сек}^2}{m} \right] = \frac{1}{\text{сек}} = \text{сек}^{-1}$$

$$[\omega] = \text{сек}^{-1}$$

n ва ω коэффицентларнинг ўлчамлилиги бир хил бўлганлиги учун уларни солиштириш мумкин.

Дифференциал тенгламанинг характеристик тенгламасини тузамиз.

$$r^2 + 2nr + \omega^2 = 0$$

Бу тенгламанинг ечимлари $r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega^2}$

Ечимни фақат кичик қаршилиқлар ҳолида кўрамиз, яъни $n < \omega$. $n \geq \omega$ да характерловчи тенглама ечими ҳақиқий бўлиб, ҳаракат тебранма бўлмайди, демак ечим

$$r_{1/2} = -n \pm i\sqrt{\omega^2 - n^2}$$

Характеристик тенгламанинг илдизи комплекс бўлганлиги учун, умумий ечим кўриниши куйидагича қидирилади.

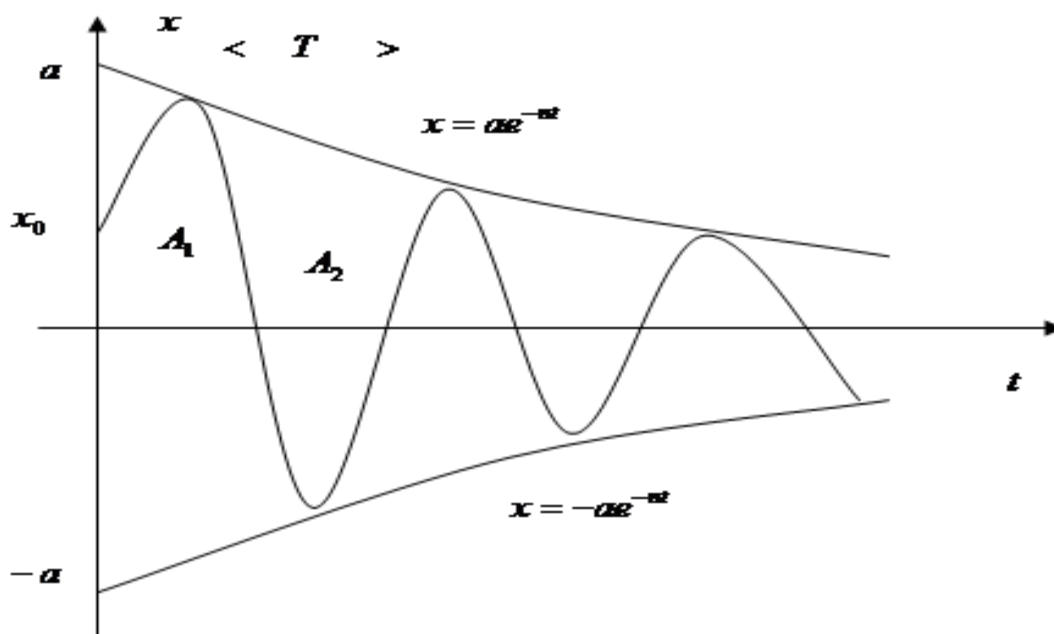
$$x = e^{-nt} \left(c_1 \cos \sqrt{\omega^2 - n^2} \cdot t + c_2 \sin \sqrt{\omega^2 - n^2} \cdot t \right)$$

$c_1 = a \sin \alpha$ ва $c_2 = a \cos \alpha$ белгилашлар киритиб гармоник кўринишга келамиз.

$$x = a e^{-nt} \sin(\sqrt{\omega^2 - n^2} t + \alpha) \quad (2)$$

Бу қонуният бўйича содир бўлувчи тебранишларга сўнувчи тебранишлар дейишади. Амплитуда $A = a e^{-nt}$ вақт ўтиши билан камайиб боради.

Графикдан кўринадиган синусоида $x = a e^{-nt}$ ва $x = -a e^{-nt}$ симметрик чизиклар орасида сўнади (чунки $\sin$ функция -1 дан 1 гача ўзгаради).



Расм. Моддий нуқта тебранишининг сўниши.

Сўнувчи тебранишнинг даври шу қайтарувчи $\vec{F}$ куч таъсиридаги эркин тебранишнинг давридан каттароқ бўлади.

$$T' = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - n^2}} \quad (3)$$

$$\sqrt{\omega^2 - n^2} < \omega \quad T' > T \quad h \ll \omega \quad \text{бўлса} \quad T' \approx T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$\ell^{-nT'}$ тебраниш декременти $-nT'$ - логарифмик декремент.

$$A_0 = a_0 R^{-n t_1}$$

Агар ўзгариш T' давр бўйича борса

$$A_1 = a_0 \ell^{-n(t_1 + T')} = a_0 \ell^{-n t_1} \ell^{-n T'} = A_0 \ell^{-n T'}$$

$$A_2 = A_1 \ell^{-n T'} \quad A_{n+1} = A_n \ell^{-n T'} \quad A_N = A_0 \ell^{-N n T'}$$

2-маъруза. Мажбурий тебранишлар. Кўп эркинлик даражасига эга системанинг тебранишлари. Нормал координаталар тушунчаси. Молекуланинг тебранишлари

Моддий нуктанинг тебранма ҳаракати давомида даврий ўзгарувчи куч таъсирида мажбурий тебраниши ҳосил бўлади. Агар мажбурий куч гармоник ўзгарган ҳол амалиётда муҳим ҳисобланади. Тўғри чизикдан иборат траекторияни кўрамиз. M нуктага $\vec{F}$ қайтарувчи куч, $\vec{R}$ қаршилик кучи ва $\vec{Q}$ мажбурловчи куч таъсир қилади.

Мажбурловчи кучнинг x ўқиға проекцияси гармоник қонун билан ўзгаради.

$$Q_x = H \sin pt \quad (1)$$

p - айланма частота, H - амплитуда

Бу нуктанинг дифференциал ҳаракат тенгламасини ёзамиз.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \mu \frac{dx}{dt} + H \sin pt$$

$$\text{Белгилаш киритамиз} \quad \frac{\mu}{m} = 2n \quad \frac{k}{m} = \omega^2 \quad \frac{H}{m} = h$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = h \sin pt \quad (2)$$

Дифференциал тенгламалар назариясига биноан бундай тенгламанинг умумий ечими икки қисмдан иборат: бир жинсли тенгламанинг x_1 умумий ечими ва берилган нобиржинсли тенгламанинг хусусий x_2 ечимининг йиғиндисидан иборат.

$$x = x_1 + x_2 \quad (3)$$

Бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + 2n \frac{dx_1}{dt} + \omega^2 x_1 = 0$$

тенгламанинг $n < \omega$ учун ечимини биламиз.

$$x_1 = ae^{-nt} \sin(\sqrt{\omega^2 - n^2} t + \alpha) \quad (4)$$

бир жинслибўлмаган (2) тенгламанинг хусусий ечимини

$$x_2 = A \sin(pt - \beta) \quad (6)$$

кўринишида қидирамиз.

А ва β доимийлар (4) ечимни (1) тенгламага қўйилганда тенглик бажарилиши керак. Шунинг учун x_2 ечимнинг ҳосилаларини оламиз.

$$\frac{dx_2}{dt} = Ap \cos(pt - \beta) \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -Ap^2 \sin(pt - \beta) \quad (7)$$

Энди (6) ва (7) ифодаларни (2) тенгламага қўямиз.

$$(\omega^2 A - Ap^2 - h \cos \beta) \sin \varphi + (2nAp - h \sin \beta) \cos \varphi = 0 \quad (8)$$

Охирги тенглама вақтнинг ихтиёрий моментида ва ўз навбатида $\varphi = \rho t - \beta$ ихтиёрий қийматида бажарилиши керак.

Бу шарт (5.21) тенгламада $\sin \varphi$ ва $\cos \varphi$ олдидаги коэффициентлар бир вақтда нолга тенг бўлганда бажарилади.

$$\begin{aligned} A(\omega^2 - \rho^2) - h \cos \beta &= 0 & 2An\rho - h \sin \beta &= 0 \\ \cos \beta &= \frac{A(\omega^2 - \rho^2)}{h} & \sin \beta &= \frac{2An\rho}{h} \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{2An\rho}{h} \cdot \frac{h}{A(\omega^2 - \rho^2)} = \frac{2n\rho}{\omega^2 - \rho^2} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} 2An\rho - h \sqrt{1 - \cos^2 \beta} &= 0 & 2An\rho - h \sqrt{1 - \frac{A^2(\omega^2 - \rho^2)^2}{h^2}} &= 0 \\ 4A^2 n^2 \rho^2 &= h^2 - A^2(\omega^2 - \rho^2)^2 \\ A^2 &= \frac{h^2}{(\omega^2 - \rho^2)^2 + 4n^2 \rho^2} & A &= \frac{h}{\sqrt{(\omega^2 - \rho^2)^2 + 4n^2 \rho^2}} \end{aligned} \quad (10)$$

Энди аниқланган (5) ва (6) ечимларни (5.17) га қўйиб, умумий ечимни ёзишимиз мумкин.

$$x = ae^{-ht} \sin(\sqrt{\omega^2 - n^2} t + \alpha) + A \sin(\rho t - \beta) \quad (11)$$

3-маъруза. Резонанс. Ночизикли тебранишлар

Мажбурий тебранишда муҳитнинг қаршилигининг тебраниш амплитудасига таъсирини кўрайлик.

$$A = \frac{h}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \quad (1)$$

$$h = H / m, \quad \omega = \sqrt{k / m}, \quad n = \mu / 2m.$$

Сўниш коэффициентининг n нинг ўсиши мажбурий тебраниш амплитудасини камайтиради.

μ - мухитнинг қаршилиги бўлмаганда $n = 0$ амплитуда

$$A = \frac{h}{|\omega^2 - p^2|} \quad (2)$$

$$p = 0 \quad A_0 = \frac{h}{\omega^2} \text{ бўлади.}$$

Қаршилиқ бўлганда мажбурият кучининг частотаси p нинг A га таъсирини кўради.

Ҳар доим $p \geq 0$ шунинг учун

$$f'(p) < 0 \quad p < \sqrt{\omega^2 - 2n^2}$$

$$f'(p) = 0 \quad p = \sqrt{\omega^2 - 2n^2}$$

$$f'(p) > 0 \quad p > \sqrt{\omega^2 - 2n^2}$$

Ўз навбатида $p = \sqrt{\omega^2 - 2n^2}$ да $f(p)$ функция минимумига эришади, A амплитуда эса максимумга. Бундай частота критик частота бўлади.

$$p_k = \sqrt{\omega^2 - 2n^2} \quad (3)$$

Унинг аниқланишини кўради. Охири (3) формуладан кўринадики, критик частота ва максимал амплитуда сўниш коэффициентининг $n < \frac{\omega}{\sqrt{2}}$

қийматларидагина мавжуд бўлиши мумкин. Акс ҳолда $n \geq \frac{\omega}{\sqrt{2}}$ да (5.29)

биноан $f'(p) \geq 0$ бўлади. Бунда n нинг берилган қийматида p нинг ўсиши (5.28)дан $f(p)$ нинг ўсишига олиб келади. Шунингдек A $A_0 = h / \omega^2$ дан ногача манотон камаяди, бунда $p = 0$

$$A_0 = \frac{H}{m} \cdot \frac{m}{k} = \frac{H}{k} \quad F = kx$$

$$H = A_0 k \quad F = A_0 k \quad F = H \text{ мувозанат ҳолати.}$$

Критик частота (3) қийматини (1) формулага қўйиб максимал амплитуда учун ёзамиз.

$$A_{\max} = \frac{h}{\sqrt{[\omega^2 - (\omega^2 - 2n^2)]^2 + 4n^2(\omega^2 - 2n^2)}} \quad A_{\max} = \frac{h}{2n\sqrt{\omega^2 - n^2}} \quad (4)$$

A максимал амплитудани $p = 0$ бўлгандаги A_0 амплитудага нисбатига динамик коэффициент дейилади.

$$\eta = \frac{A_{\max}}{A_0} = \frac{\omega^2}{2n\sqrt{\omega^2 - n^2}} \quad (5)$$

$$A_{\max} = A_0 \eta$$

Мажбурловчи куч частотаси эркин тебраниш частотасига яқин бўлганда мажбурий тебранишнинг амплитудасининг кескин ошишига резонанс дейилади. Қаршилик бўлмаса ва мажбурловчи куч частотаси эркин тебраниш частотасига тенг бўлса мажбурий тебраниш амплитудаси чексиз ошади. Реал ҳолда амплитуда чекли ўсади ва конструкция бузилади.

$$\frac{A}{A_0} = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \quad (6)$$

Бу ифодадан қуйидаги боғланиш топилса

$$\frac{A}{A_0} = f\left(\frac{p}{\omega}\right)$$

4-маъруза. Адиабатик инвариантлар. Параметрик резонанс. Тез тебраниб ўзгарувчи майдондаги ҳаракат

Бир ўлчамли финит ҳаракатланувчи системани кўрайлик. Системанинг хоссалари ёки ташқи майдон билан характерланувчи ҳаракатни λ параметр тавсифласин. Қандайдир ташқи сабаблар таъсирида λ вақт бўйича секин ўзгарсин (баъзида бунга адиабатик ҳолат дейилади). Система ҳаракати давомида T давр вақтида λ оз ўзгаради.

$$T \frac{d\lambda}{dt} \ll \lambda \quad (1)$$

Бундай система ёпик ҳисобланмайди ва унинг энергияси E сақланмайди. Энергиянинг ўзгариш тезлиги $\dot{E}$ λ параметрнинг $\dot{\lambda}$ ўзгариш тезлигига пропорционал бўлади. Шундай комбинация (катталик) бўлиши керакки система ҳаракатида бу катталик ўзгармаслиги керак ва унга адиабатик инвариантлик дейилади.

Унда $H(p, q, \lambda)$ функцияси ҳам λ параметрга боғлиқ бўлсин. Энергиянинг вақт бўйича тўлиқ дифференциалигига кўра

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \quad \text{чунки} \quad \frac{dH(p, q)}{dt} = \frac{\partial H(p, q)}{\partial t}$$

Бу тенгламани давр бўйича ўртачалаш мумкин, чунки λ даврда жуда оз ўзгаради ($\dot{\lambda} \ll \lambda$)

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \lambda}$$

Ўртачалашда фақат p ва q катталиклар бўйича инобатга олинади. Ўртачалашни ошкора кўринишда ёзамиз.

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial H}{\partial \lambda} dt \quad (2)$$

Гамильтон тенгламасига кўра қуйидаги муносабатлар маълум.

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad dt = \frac{dq}{\frac{\partial H}{\partial p}}$$

Бу тенглик ёрдамида интегрални координата бўйича ёзиш мумкин. Даврни ҳам қуйидагича ёзиш мумкин.

$$T = \int_0^T dt = \oint \frac{dq}{\frac{\partial H}{\partial p}}$$

$\oint$ -ёпиқ интеграл T давр мобайнида координатанинг тўлиқ ўзгариши (“олдинга” ва “ортга”) бўйича интегрални ифодалайди.

Энди (2) интегрални ёзиш мумкин

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\oint \frac{\partial H / \partial \lambda}{\partial H / \partial p} dq}{\oint \frac{1}{\partial H / \partial p} dq} \quad (3)$$

Таъкидланганидек λ доимий қийматида траектория давомида Гамильтон функцияси доимий E қийматини сақлайди, аммо импульс $p(q, E, \lambda)$ бўйича ўзгаради. $H(p, q, \lambda) = E$ тенгликни λ бўйича дифференциалласак ва λ параметр q ва E га ошкора боғлиқ эмаслиги учун қуйидагиларни ёзиш мумкин.

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{dp}{d\lambda} = 0$$

ёки
$$\frac{\partial H / \partial \lambda}{\partial H / \partial p} = - \frac{dp}{d\lambda}$$

Бу муносабатни (3) интегралга қўямиз ва махраждаги интегралдаги функцияни $\frac{\partial p}{\partial E}$ кўринишда берамиз.

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = - \frac{d\lambda}{dt} \frac{\oint \frac{\partial p}{\partial \lambda} dq}{\oint \frac{\partial p}{\partial E} dq} \quad (4)$$

ёки
$$\oint \left(\frac{\partial p}{\partial E} \frac{d\bar{E}}{dt} + \frac{\partial p}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \right) dq = 0$$

Бу тенгликни қуйидаги кўринишда белгилашлар ёрдамида берилади.

$$\frac{d\bar{I}}{dt} = 0 \quad (5)$$

1-амалий машғулот. Кичик тебранишлар, турғун ва нотурғун мувозанат ҳолатлари

Масала 1. Тебранишнинг амплитудаси ва бошланғич фазасини координата ва тезликнинг бошланғич қийматлари, x_0 ва v_0 орқали ифодаланган

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= a \cos \alpha \\ v_0 &= \dot{x}_0 = -a\omega \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} x &= a \cos(\omega t + \alpha) \\ \dot{x} &= -a\omega \sin(\omega t + \alpha) \end{aligned} \right\}$$

$$a^2 = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{v_0}{x_0 \omega}$$

Масала 2. Турли изотопларнинг атомларидан иборат иккита иккиатомли молекуларнинг частоталари нисбатини топинг. Атомларнинг массалари m_1, m_2 ва m'_1, m'_2 .

Ечиш. Изотопларнинг атомлари бир хил таъсирлашади ва $k = k'$. m коэффициент вазифасини молекуларнинг кинетик энергиясида келтирилган массалар ўтайди.

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \mu' = \frac{m'_1 m'_2}{m'_1 + m'_2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} \quad \omega' = \sqrt{\frac{k'}{\mu'}}$$

$$\frac{\omega'}{\omega} = \sqrt{\frac{k'}{\mu'} \frac{\mu}{k}} = \sqrt{\frac{\mu}{\mu'}} = \sqrt{\frac{m_1 m_2 (m'_1 + m'_2)}{(m_1 + m_2) m'_1 m'_2}}$$

Масала 3. Оғирлиги $G = Sk\Gamma$ бўлган μ юк юқори учи қотирилган пружинага осилган. Статик мувозанат ҳолатида пружинанинг узунлиги $\ell_{cm} = 10\text{см}$. Пружинанинг массаси ва муҳит қаршилиги инобатга олинмайди. Юкнинг ҳаракат қонунини топинг.

Ечиш: Юкни нуқтавий қараб x ўқини вертикал пастга йўналтирамиз. Координата боши пружинанинг асл статик узунлиги 0 нуқтасида олинади.

Юкга $\vec{G}$ оғирлик кучи ва $\vec{F}$ пружинанинг эластик кучи таъсир қилади. Энди пружинанинг узайиши $\ell_{st} + x$ бўлиб, пружинанинг эластиклик кучи $F = k(\ell_{st} + x)$ ёки қайтарувчи куч.

Пружананинг биқирлигини (қаттиқлик коэффициенти) статик мувозанат шартидан топилади.

$$G = F_{st} = k\ell_{st}$$

$$k = \frac{G}{\ell_{st}} = \frac{S}{10} = 0,5k\Gamma / \text{см}$$

$$F = \frac{G}{\ell_{st}} (\ell_{st} + x)$$

Юкни ҳаракат тенгламасини тузамиз.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = G - F$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = G - \frac{G}{\ell_{st}} (\ell_{st} + x)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = g \left(1 - 1 - \frac{x}{\ell_{st}} \right) = -g \frac{x}{\ell_{st}}$$

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{g}{\ell_{st}} x = 0 \quad \omega^2 = \frac{g}{\ell_{st}}$$

$$x = a \sin(\omega t + \alpha)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell_{st}}} = \sqrt{\frac{9,8}{5 \cdot 10^{-2}}} = \sqrt{196} = 14 \text{sek}^{-1}$$

Тебраниш даври эса

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6,28}{14} \approx 0,45 \text{sek}$$

Бошланғич шартлардан a ва α топилади.

$$t = 0 \quad V_0 = 0 \quad t = 0, \quad v_0 = 0, \quad x_0 = -\ell_{st} = -10 \text{sm}$$

$$a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega} \right)^2} = \sqrt{10^2} = 10 \quad \text{tg} \alpha = \frac{\omega x_0}{v_0} = -\infty$$

$$\text{Бундан } \alpha = \frac{3\pi}{2}$$

$$x = 10 \sin \left(14t + \frac{3\pi}{2} \right) \quad \text{ёки} \quad x = -10 \cos 14t \text{ см}$$

Илова.

$$x = a \sin(\omega t + \alpha) \quad t = 0 \quad x = x_0 \quad v = v_0$$

$$\dot{x} = a \omega \cos(\omega t + \alpha) \quad x_0 = a \sin \alpha$$

$$v_0 = a \omega \cos \alpha$$

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad \text{tg} \alpha = \frac{c_2}{c_1} = \frac{v_0}{\omega x_0}$$

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

1. Моддий нукта тўғри чизиқли тебранади. Қаршилиқ кучи тезликка пропорционал. Тебраниш даври $T = 2 \text{sek}$. Икки тўлиқ тебранишдан кейин амплитуда 16 марта камайди. Нуктага бошланғич $v_0 = 1 \text{m/sek}$ тезлик берилган бўлса ҳаракат қонуни топилсин.

2. Тебранишнинг амплитудасини ўзгариш қонунини келтириб чиқаринг.

3. Тиниб турган сувдаги кеманинг вертикал бўйлаб қиладиган эркин тебранишларининг даври топилсин. Кеманинг массаси ва горизонтал проекцияси юзаси берилган.

4. Олдинги масаланинг шартларига асосан, нолга тенг вертикал тезлик билан сувга тушириб юборилган бўлса, ҳаракат тенгламси топилсин.

2-амалий машғулот. Бир ўлчовли эркин тебранишлар, частотани топиш

1.Эркин тебранишлар частотасини топиш формуласини келтириб чиқаринг.

2.Массаси 2 тонна бўлган юк 5м/с ўзгармас тезлик билан пастга туширилаётган трос, блок обоймасига қисилиб қолиб, юк туширилаётган троснинг юқори учи тўсатдан тўхтаб қолди. Троснинг массасини ҳисобга олмай, юкнинг кейинги тебранишида троснинг энг ката тортишиш кучини топинг, бикирлик $4 \cdot 10^6$.

3.Олдинги масалада юк билан трос орасига бикирлиги $4 \cdot 10^5$ бўлган эластик пружина ўрнатилган бўлса энг ката тортишиш кучи топилсин.

3-амалий машғулот. Мажбурий тебранишлар, амплитудани ҳисоблаш

1.Эркин тебранишдаги бошланғич шартлардан фойдаланиб доимийларни аниқланг.

2.Масала. Оғирлиги $G = 3,2T$ бўлган двигател №20 иккита иккитаврлик балкалар устага параллел қилиб қўйилган. Балкалар узунлиги $\ell = 3\text{м}$. Пўлатнинг эластиклик модули $E = 2 \cdot 10^6 \text{кГ/см}^3$. № 20 балканинг инерция моменти ГОСТ 10016-39 бўйича $J = 2 \cdot 2500\text{см}^4 = 5000\text{см}^4 = 5000\text{см}^4$

Ечиш: Двигателнинг айланувчи қисми тўлиқ мувозанатлашмаганлиги сабабли унинг валига марказдан қочма H куч таъсир қилади. Валнинг айланишида бу кучнинг (мажбурловчи) вертикал x ўқиға проекцияси $H_x = H \sin \varphi = H \sin \omega_e t$ тенг.

Демак балкаларга мажбурловчи $H_x = H \sin \omega_e t$ гармоник ўзгарувчи куч таъсир қилади. Бу кучнинг частотаси ρ нинг ўзгариши валнинг ω_e бурчак

тезлигига тенг. Маълумки резонанс эркин ва мажбурий тебранишларнинг частоталари мос келганда содир бўлади.

Эркин тебранишнинг частотаси $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Статик мувозанат вақтида $G = k\ell_{st}$ га тенг. $m = \frac{G}{g}$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{kg}{G}} = \sqrt{\frac{G}{\ell_{st}} \cdot \frac{g}{G}} = \sqrt{\frac{g}{\ell_{st}}}$$

Техникада материалларнинг қаршилиги формуласидан статик узайиши топилади.

$$\ell_{st} = \frac{G\ell^3}{48EJ} = \frac{3200 \cdot 300^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 5000 \text{ см}^4} = \frac{864}{4800} = 0,18 \text{ см}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell_{st}}} = \sqrt{\frac{980}{0,18}} \approx 73,7 \frac{1}{\text{сек}}$$

Двигател валининг бурчак тезлиги $\omega_{\ell} = \omega = 73,7 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$ бўлганда резонанс кузатилади

$$\omega_{\ell} = 73,7 \frac{\text{рад}}{\text{сек}} = 73,7 \frac{\text{айланish}}{2\pi} \cdot \frac{60}{\text{min}} = 704 \frac{\text{айланish}}{\text{min}}$$

Жавоб: дадигател айланиш частотаси $704 \frac{\text{айлан}}{\text{min}}$ дан етарлича фарқланиши керак.

3.Мажбурий тебраниш амплитудаси формуласини келтириб чиқаринг.

4-амалий машғулот. Сўнувчи тебранишлар, ташқи куч таъсиридаги сўнувчи тебранишлар. Кўп ўлчовли тебранишлар, нормал тебранишларни топиш

1. Сўнувчи тебранишнинг ҳаракат тенгламасини келтириб чиқаринг.
2. Сўнувчи тебранишнинг дифференциал тенгламасини тузинг.
3. Массаси 5кг бўлган жисм биқирлик коэффиценти 2 кН/м га тенг пружина осилган. Муҳитнинг қаршилиги тезликка пропорционал. Тўрт марта тебранишдан кейин амплитуда 12 марта кичрайди. Тебраниш даври ва сўнишнинг логарифмик декременти аниқлансин.

Модул №9. Динамиканинг Гамильтон шакли

1-маъруза. Гамильтон функцияси. Гамильтоннинг каноник тенгламалари. Релятивистик механикада Гамильтон функцияси. Гамильтон тенгламаларини вариация принципи асосида келтириб чиқариш.

Механика қонунларини Лагранж функцияси орқали шаклланишини кўриб ўтдик. Лагранж функцияси координаталар ва тезликлар орқали ифодаланади. Шундай системалар мавжудки уларда умумлашган координаталар ва импульслар орқали ифодаланиши қулай бўлади. Шунинг учун ҳаракат қонунларини бу координаталардаги ифодаларини топиш талаб этилади.

Лагранж функциясининг тўлиқ дифференциали

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i$$

Бу муносабатни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин

$$dL = \sum \dot{p}_i dq_i + \sum p_i d\dot{q} \quad (1)$$

чунки $\sum \frac{\partial L}{\partial q_i} = F = \frac{dp_i}{dt} = \dot{p}_i$ умумлашган куч.

Иккинчи ҳадни кўпайтма ҳосиласи кўринишида ёзамиз.

$$\sum p_i d\dot{q}_i = d\left(\sum p_i \dot{q}_i\right) - \sum \dot{q}_i dp_i$$

$$dL = \sum \dot{p}_i dq_i + d\left(\sum p_i \dot{q}_i\right) - \sum \dot{q}_i dp_i$$

$$d\left(\sum p_i \dot{q}_i - L\right) = \sum \dot{q}_i dp_i - \sum \dot{p}_i dq_i$$

Дифференциал остидаги катталиқ системанинг энергиясини беради ва унга Гамилтон функцияси дейилади.

$$H(p, q, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \quad (2)$$

$$dH = \sum \dot{q}_i dp_i - \sum \dot{p}_i dq_i \quad (2^*)$$

Дифференциал қоидасидан

2-март. Каноник алмаштиришлар. Пуассон қавслари ва уларнинг хусусиятлари. Механиканинг симметрик тенгламаси. Луивилл теоремаси

Статистик механика фазавий ҳажм сақланиши яъни Луивилл теоремасига асосланади. Икки ўлчамли, координата ўқларига умумлашган координата ва умумлашган импульс қўйиладиган ҳаёлий фазо фазали фазо дейилади.

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq \quad (1)$$

Интеграл E ва λ ни берилган қийматларида ҳаракат траекторияси бўйича олинади. I интеграл λ параметрнинг ўзгаришида қаралган яқинлашишда ўзгармайди ва адиабатик инвариантлик дейилади. (1) интеграл $p(q)$ боғланишни кўрсатувчи чизикдан иборат ва фазовий траектория дейилади. Даврий ҳаракатланувчи система учун фазовий траектория – ёпик чизик. Бу чизик бўйлаб олинган интеграл ички юзани англатади.

Мисол учун бир ўлчовли осциллятор учун адиабатик инвариантни топамиз. Гамилтон функцияси

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$$

ω – осцилляторнинг хусусий частотаси

$$E = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$$

E га бўлсак

$$\frac{P^2}{2mE} + \frac{q^2}{\frac{2E}{m\omega^2}} = 1$$

Эллиптик орбита учун катта ва кичик ярим ўқларни тенгламадан ёзиш мумкин

$$a = \sqrt{2mE} \quad b = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$$

$$I = \frac{1}{2\pi} \pi a b = \frac{\pi}{2\pi} \sqrt{\frac{4E^2 m}{m\omega^2}} = \frac{E}{\omega}$$

Осцилляторда адиабатик инвариантлик I параметр секин ўзгарса унинг энергияси частотага пропорционал ўзгаради ва $E = I\omega$.

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (2)$$

Бу қидирилаётган p ва q ўзгарувчили тенгламалар Гамилтон тенгламалари дейилади. Бу тенгламаларнинг оддийлиги ва симметриясини эътиборга олиб уларни каноник тенгламалар деб айтилади.

Гамилтон функциясидан вақт бўйича тўлиқ дифференциал қуйидагичадир.

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i$$

Бу муносабатга (2) тенгламалардан $\dot{q}_i$ ва $\dot{p}_i$ ларни қўямиз

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial t} + \sum \frac{\partial H}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned} \quad (3)$$

Агар Гамилтон функцияси вақтга ошкора боғлиқ бўлмаса $\frac{dH}{dt} = 0$ бўлади, яъни энергиянинг сақланиш қонунига келади. (1) формуладан

$$dL = \sum \dot{p}_i dq_i + \sum p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda$$

λ - ташқи майдонни характерловчи параметр бўлсин (2) формуладан

$$dH = \sum \dot{q}_i dp_i - \sum \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda$$

Бундан

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_{p,q_i} = -\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_{\dot{q},q} \quad (4)$$

Хусусий ҳосилалар биринчи ҳолда $\dot{p}, q$ доимийлигида ва иккинчи қисмида $\dot{q}, q$ доимийлигида олинади.

Агар $L = L_0 + L'$ яъни L' қўшимчага эга

$$H = H_0 + H'$$

$$(H')_{p,q} = -(L')_{\dot{q},q} \quad (5)$$

Потенциал майдондаги зарранинг Гамильтон функцияси қуйидагичадир.

$$H = \frac{1}{2m}(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2) + U(x, y, z)$$

3-маъруза. Гамильтон-Якоби методи. Гамильтон-Якоби тенгламаси

Берилган t_1 ва t_2 вақт моментларида системанинг эгаллайдиган $q^{(1)}$ ва $q^{(2)}$ ҳолатлари траектория бўйича энг кичик таъсир интегралини кўрдик.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (1)$$

S интегралнинг минимал қиймати ҳақиқий ҳаракатни ифодалайди. Таъсирнинг ўзгариши бир траекториядан унга яқин траекторияга ўтишда қуйидаги формула билан аниқланарди.

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt$$

Ҳақиқий ҳаракат траекторияси Лагранж тенгламасини қаноатлантириши керак. Шунинг учун интеграл нолга тенг бўлган ҳолати қидирилади. Биринчи ҳолат $\delta q(t_1) = 0$ ва $\delta q(t_2) = \delta q$ ўзгартирилади.

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q = p \delta q$$

Ихтиёрий эркинлик даражаси учун

$$\delta S = p_i \delta q_i \quad (2)$$

Бу муносабатдан таъсирнинг координаталар бўйича хусусий ҳосилалар келиб чиқади.

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i \quad (3)$$

Таъсирнинг (1) формулага биноан тўлиқ дифференциали вақт бўйича қуйидагичадир.

$$\frac{dS}{dt} = L \quad (4)$$

Иккинчи томондан S ни координата ва вақтнинг функцияси сифатида қараб вақт бўйича тўлиқ ҳосиласини оламиз.

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

(2) формулани инобатга олсак

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}_i \quad (5)$$

(3) формулани инобатга олсак

$$L = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum p_i \dot{q}_i \quad (6)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\sum p_i \dot{q}_i + L = -H(P, q, t)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H(p, q, t) \quad (7)$$

(5) формулани dS учун ёзиш мумкин.

$$\begin{aligned} dS &= \sum_i p_i \frac{dq_i}{dt} \cdot dt - H dt = \sum_i p_i dq_i - H dt \\ dS &= \sum_i p_i dq_i - H dt \end{aligned} \quad (8)$$

Таъсирнинг ўзи учун эса қуйидаги интегрални оламиз.

$$S = \int \left(\sum_i p_i dq_i - H dt \right) \quad (9)$$

Агар $H(p, q)$ вақтга ошқора боғлиқ бўлмаса, энергия сақланади ва H ни E га ўзгартириш мумкин.

$$S(q, t) = S_0(q) - Et \quad (10)$$

$$S_0(q) = \sum_i \int p_i dq \quad (11)$$

$S_0(q)$ баъзида қисқартирилган таъсир дейилади. (5) тенгламада $p = \frac{\partial S}{\partial q}$ эътиборга олиб тенгламани умумий ҳолда қуйидагича ёзиш мумкин.

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right) = 0$$

яна ҳам ёйиб S эркинлик даражасида ёзсак,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}; q_1 \dots q_s; t\right) = 0 \quad (12)$$

Бу тенгламага Гамильтон-Якоби тенгламаси дейилади. Бирта зарра учун унинг кўриниши қуйидагича (ташқи $U(x, y, z, t)$ майдонда).

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + U(x, y, z, t) = 0 \quad (13)$$

Агар $H(p, q)$ вақтга ошқора боғлиқ бўлмаса (1.76) формулани эътиборга олиб (1.78) формулани содда кўринишда ёзиш мумкин.

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E \qquad \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial S_0}{\partial q}$$

$$H\left(\frac{\partial S_0}{\partial q_1} \dots \frac{\partial S_0}{\partial q_s}; q, \dots q_s\right) = E \quad (14)$$

4-мәъруза. Ўзгарувчиларни ажратиш усули. Таъсир-бурчак ўзгарувчилари ва адиабатик инвариантлар

Yon sirti izolyatsiyalangan ingichka, uzun va issiqlik o'tkazuvchan sterjenni ko'ramiz. Oldingi bo'limdan ko'rinadiki issiqlik manbalari bo'lmaganda nuqtalarning $u(x, t)$ temperaturasi quyidagi tenglamani qanoatlantiradi [4,5].

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

Agar sterjen juda uzun bo'lsa o'rtasida sodir bo'ladigan jarayonlarga asosan dastlabki temperatura taqsimoti ta'sir qiladi. Uchlardagi temperaturaviy shartlar yetarlicha uzoq vaqt davomida aytilmaydi. Bunday masalalarda sterjenni cheksiz deb hisoblanadi. Chegaraviy shartlar tushirib qoldiriladi va qidirilayotgan $u(x, t)$ funksiyaga faqat boshlang'ich shartlar qo'yiladi.

$$u|_{t=0} = f(x) \quad (2)$$

$f(x)$ funktsiya barcha sonli o'qda aniqlangan $(-\infty < x < \infty)$. Yuqoridagi (1) tenglamani (2) shartda yechish masalasi boshlang'ich shartli masala yoki Koshi masalasi deyiladi. Tenglama yechilishini osonlashtirish uchun vaqtni o'rniga

$$\tau = a^2 t \quad (3)$$

o'zgaruvchini kiritamiz. Unda

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = a^2 \frac{\partial u}{\partial \tau},$$

va (2) tenglama sterjenning fizik xossalariga bog'liq bo'lmagan quyidagiga o'zgaradi

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4)$$

Boshlang'ich shartni $t = 0 \quad \tau = 0$ bo'lganligi uchun oson o'zgartiramiz.

$$u|_{\tau=0} = f(x) \quad (5)$$

Bu masalani yechishda Furiyening o'zgaruvchilarni ajratish va xususiy yechimlarni superpozitsiyasi usulidan foydalanamiz. Tenglamaning xususiy yechimini $u(x, t) = X(x)T(\tau)$ ko'paytma ko'rinishida qidiramiz.

$$X(x) \frac{\partial T(\tau)}{\partial \tau} = T(\tau) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}$$

$$\frac{1}{T(\tau)} \frac{\partial T(\tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \quad (6)$$

Bu tenglamaning koordinataga va o'ng tomoni vaqtga bog'liq bo'la olmaydi. Furiyening o'zgaruvchilarni ajratish usulining mohiyati ham shu. Tenglamaning o'ng va chap tomonlari teng bo'ladigan c doimiyni kiritsak (6) tenglama ikkita tenglamaga ajraladi.

$$\frac{1}{T(\tau)} \frac{\partial T(\tau)}{\partial \tau} = c \qquad \frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = c \quad (7)$$

Tenglamalarning birinchisi quyidagi umumiy yechimga ega.

$$T(\tau) = Ce^{c\tau}$$

Biror bir kesimda temperatura $u = X(x)T(\tau)$ chegarasiz o'smasligi kerak ya'ni $\tau \rightarrow \infty$. Shuning uchun c manfiy bo'lishi kerak, ya'ni $c = -\lambda^2$.

$$T(\tau) = Ce^{-\lambda^2 \tau}$$

Ikkinchi tenglama quyidagi ko'rinishga keladi.

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \lambda^2 X(x) = 0$$

Uning umumiy yechimi quyidagicha;

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$$

Demak, biz (2.1.5) tenglamaning xususiy yechimini oldik.

$$u = (AC \cos \lambda x + BC \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 \tau}$$

yoki

$$u = (\alpha \cos \lambda x + \beta \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 \tau} \quad (8)$$

O'z navbatida $\alpha = AC$ $\beta = BC$ ixtiyoriy doimiylar; λ esa ixtiyoriy sonni anglatadi. (8) funksiya λ ning ixtiyoriy qiymatida tenglamaning yechimi bo'ladi. λ ning har bir qiymatida α va β doimiylarni tanlaymiz[13]. Shuningdek, ta'kidlash mumkinki α va β doimiylar λ ning ixtiyoriy funksiyalari bo'lishi mumkin. Shuning uchun (6) tenglamaning xususiy yechimlari oilasiga ega bo'lamiz.

$$u_{\lambda}(x, \tau) = [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] e^{-\lambda^2 \tau} \quad (9)$$

Furye usulining birinchi qismi tugadi. Bu usulning ikkinchi qismi olingan $u_{\lambda}(x, \tau)$ yechimlarning superpozitsiyasidan iborat. (5) tenglama chiziqli va bir jinslidir, u λ parametrning uzluksiz o'zgaruviga bog'liq bo'lgan sanoqsiz xususiy yechimlarga ega. Shuning uchun integral ko'rinishini qarash mumkin.

$$u(x, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\lambda}(x, t) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] e^{-\lambda^2 \tau} d\lambda \quad (10)$$

Bizga noma'lum $\alpha(\lambda)$ va $\beta(\lambda)$ funksiyalarni topish qoldi. (10) yechim boshlang'ich (4) shartni qanoatlantirishi kerak.

$$u|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda = f(x) \quad (11)$$

Oxirgi tenglik $f(x)$ funksiyani Furye integraliga yoyishni anglatadi. Funksiyani integralga yoyish faqat, bu funksiyani Furye qatoriga yoyilsa mumkin va $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ integral limitga ega bo'lishi kerak. Boshqacha aytganda $f(x)$ funktsiya butun o'q bo'ylab absolyut integrallanishi kerak bu esa barcha fizikaviy masalalarda bajariladi ($f(x)$ funksiya – temperaturaning boshlang'ich taqsimoti).

Integralning intiluvchanligi sterjen issiqlik energiyasini chegaralanganligini anglatadi (chunki issiqlik energiyasi absolyut temperaturaga proporsional. $f(x)$ funksiyaning integralga yoyilmasi quyidagichadir.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\varepsilon) \cos \lambda(\varepsilon - x) d\varepsilon$$

$\cos \lambda(\varepsilon - x) = \cos \lambda x + \sin \lambda \varepsilon \sin \lambda x$ bo'lganligi uchun Furye integralio'zgaradi.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\varepsilon) \cos \lambda \varepsilon d\varepsilon \right) \cos \lambda x + \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\varepsilon) \sin \lambda \varepsilon d\varepsilon \right) \sin \lambda x \right\} d\lambda$$

АННОТАЦИЯ

Аналитик механика курси талабани классик механиканинг фундаментал асослари билан, шу жумладан Ньютон қонунларининг замонавий баёни билан таништиришни ўз олдига мақсад қилиб қўяди.

Физика мутахассислиги бўйича бакалаврларга механик ҳаракатни умумий ҳолда ифодалаш усуллари, марказий майдондаги ҳаракат қонунлари, кичик тебранишлар назариялари ва уларнинг амалдаги талқинлари ҳақида чуқур билим бериш вазифаси қўйилади.

НОРМАТИВ ХУЖЖАТЛАР

Физика кафедрасида ўтиладиган фанлар бўйича талабаларнинг фанларни ўзлаштирганлик даражаси рейтинг тизими асосида амалга оширилади.

Ўзбекистон Республикаси Адлия вазирлигида 2009 йилнинг 10 июлида 1981-сон билан рўйхатдан ўтказилган Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2009 йил «11»_июндаги 204-сонли буйруғи ва Бухоро давлат университети ректорининг 2009 йилнинг 8 августидagi 234-У(01) сонли буйруғи билан тасдиқланган «Олий таълим муассасаларида талабалар билимини назорат қилиш ва баҳолашнинг рейтинг тизими тўғрисидаги низомга мувофиқ ишлаб чиқилди.

МАЪЛУМОТНОМА

САИДОВ ҚУРБОН САЙФУЛЛОЕВИЧ

У 2005 йилнинг 1 майидан буён:

Бухоро Давлат университети
«Назарий ва қаттиқ жисмлар
физикаси» кафедраси доценти
лавозимида ишлайди



Туғилган йили:	Туғилган жойи:
21.03.1967	Бухоро вилояти
Миллати:	Партиявийлиги:
Ўзбек	Партиясиз
Маълумоти:	Таомлаган:
Олий	1991 йилда Ташкент Давлат университети (кундузги)
Маълумоти бўйича мутахассислиги	Физик
Илмий даражаси:	Илмий унвони:
Физика-математика фанлари номзоди	доцент
Қайси чет ва МДХ халқлари тилларини билади (тўлиқ кўрсатилиши лозим)	
Рус, инглиз тиллари	
Давлат мукофотлари билан тақдирланганми (қанақа):	
Йўқ	
Халқ депутатлари, республика, вилоят, шаҳар ва туман Кенгаши депутатими ёки бошқа сайланадиган органларнинг аъзосими (тўлиқ кўрсатилиши лозим)	
Йўқ	

МЕҲНАТ ФАОЛИЯТИ

2.08.91	1.04.94	Бухоро Тиббиёт институти, Тиббий ва биологик физика кафедраси катта лаборанти	Бухоро шаҳри
1.04.94	1.12.95	Бухоро Давлат университети, «Назарий физика ва қаттиқ жисмлар физикаси» кафедраси стажёр-тадқиқотчиси	Бухоро шаҳри
1.12.95	1.12.98	БухДУ кундузги бўлим аспиранти	Бухоро шаҳри
1.12.98	26.12.02	Бух ДУ, «Назарий физика ва электроника» кафедраси катта лаборанти	Бухоро шаҳри
26.12.02	10.05.05	БухДУ, «Назарий физика ва қаттиқ жисмлар физикаси» кафедраси ўқитувчиси	Бухоро шаҳри
10.05.05	1.05.06	БухДУ, «Назарий физика ва қаттиқ жисмлар физикаси» кафедраси катта ўқитувчиси	Бухоро шаҳри
1.05.06		БухДУ, «Назарий физика ва қаттиқ жисмлар физикаси» кафедраси доценти	Бухоро шаҳри