

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS

TA'LIM VAZIRLIGI

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

Fizika – matematika fakulteti

“Matematika” kafedrası

BAXTIYOROVA SITORA BAXTIYOROVNA

**„SINGULYAR UMUMLASHGAN FUNKSIYALAR VA ULARNING
HOSILALARINI HISOBLASH” mavzusida**

5130100 -«Matematika» ta'lim yo'nalishi bo'yicha bakalavr

darajasini olish uchun

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

“Ish ko'rildi va himoyaga ruxsat berildi”

Ilmiy rahbar: prof. Durdiyev D.Q. ” _____ ” _____ **2018y.**

Kafedra mudiri: prof. Mamatova N.H. ” _____ ” _____ **2018y.**

Taqrizchi: dots. Yunusov G'.G'. ” _____ ” _____ **2018y.**

Himoya qilishga ruxsat berildi”

Fakultet dekani prof. Sh.M.Mirzayev

« _____ » _____ **2018 y**

Buxoro- 2018 y

MUNDARIJA

Kirish.....	3
I BOB. UMUMLASHGAN FUNKSIYALAR HAQIDA TUSHUNCHA.	
1.1. Asosiy funksiyalar sinfi. Umumlashgan funksiyalar ta’rifi.....	13
1.2. Regulyar va singulyar umumlashgan funksiyalar.....	24
Xulosa.....	29
II BOB. SINGULAR UMUMLASHGAN FUNKSIYALAR VA ULARGA MISOLLAR.	
2.1. Singulyar umumlashgan funksiyalar ustida amallar.....	30
2.2. Singulyar umumlashgan funksiyalar hosilalari.....	52
Xulosa.....	58
Xotima.....	59
Adabiyotlar ro’yxati.....	60

KIRISH

Barchamizga ayonki, yurtimizdagi har qaysi inson, har qaysi oilaning eng ezgu orzu-maqsadlari, hayotiy manfaatlari avvalambor uning farzandlari timsolida namoyon bo'ladi, ro'yobga chiqadi. Albatta, bu borada yurtimizda ulkan ishlar qilinmoqda va ular amalda o'zining ijobiy natijasini bermoqda.

Ta'lim va ilm-fan, davlatning yoshlarga doir siyosatini amalga oshirish, ta'limning yangi, zamonaviy usullarini, jumladan. axborot-kommunikasiya texnologiyalarini joriy etish borasidagi dolzarb vazifalarni amalga oshirish yoshlarimiz, jamiyatimiz va mamlakatimizning kelajagi uchun strategik ahamiyatga ega ekani sababli ushbu sohadagi ishlar shaxsan Bosh vazirga yuklatilgan. Sizning e'tiboringizni quyidagi vazifalarni amalga oshirishga qarataman

Birinchi vazifa - maktabgacha ta'lim sohasida. Ochiq tan olishimiz kerak, biz bu muhim sohadagi ishlarni e'tibordan chetda qoldirdik. Ushbu sohada bolalarni qamrab olish 27 foizni tashkil etadi. Yaqinda tasdiqlangan dasturga ko'ra, bu yo'nalishda 2 ming 200 ta muassasaning moddiy-texnik bazasi mustahkamlanadi.

Shuningdek, tajribali pedagog va mutaxassislarni jalb etgan holda, o'quv reja va dasturlarini tubdan qayta ko'rib chiqish zarur. Oldimizda yoshlarga tarbiya berish, psixologiya va boshqa turli sohalarda kadrlarni tayyorlash va qayta tayyorlash bo'yicha murakkab vazifalar turibdi.

Ikkinchi vazifa - umumta'lim maktablari, litsey va kasb-hunar kollejlari, shuningdek, oliy o'quv yurtlaridagi o'qitish sifati bilan bog'liq. Zamonaviy o'quv reja va uslublarini joriy etish talab darajasida emas. Bolalar va yoshlarga maxsus fanlar, mamlakatimiz va jahon sivilizatsiyasi tarixini, xorijiy tillarni va zamonaviy kompyuter dasturlarini chuqur o'rgatish vazifalari hali sifatli va to'liq holda yechilgani yo'q.

Yana bir muammoni hal etish ham o'ta muhim hisoblanadi: bu - pedagoglar va professor-o'qituvchilar tarkibining professional darajasi, ularning maxsus bilimlaridir. Bu borada ta'lim olish, ma'naviy-ma'rifiy kamolot masalalari va haqiqiy qadriyatlarni shakllantirish jarayonlariga faol ko'mak beradigan muhitni yaratish zarur.

Uchinchi vazifa - ta'lim muassasalarini, eng avvalo, kasb-hunar kollejlarini oqilona joylashtirishni, shuningdek, iqtisodiyot, ijtimoiy soha va har bir hududning zarur mutaxassislarga bo'lgan talabini to'g'ri aniqlashni tanqidiy tahlil qilishdir.

Hozircha ushbu mexanizm ishlamayapti. Tarmoqlar rahbarlari kadrlarga ehtiyoj to'g'risidagi ma'lumotni Oliy ta'lim vazirligi va Iqtisodiyot vazirligiga taqdim etishadi. Keyin mutaxassislarni tayyorlash kvotalari bo'yicha chuqur o'ylanmagan takliflar ishlab chiqiladi. Buning natijasida kadrlar sifati va ularni ishga joylashtirish muammosi yildan-yilga kuchayib bormoqda.

Afsuski, hech kim buning uchun javobgar emas. Nima sababdan? Axir, bu o'rinda gap barchamizning farzandlarimiz to'g'risida, hech bir mubolag'asiz aytish kerakki, mamlakatimizning kelajagi haqida ketyapti. Oliy va o'rta maxsus ta'lim vaziri R.Qosimovni ogohlantirib aytmoqchiman. Siz bu sohada katta tajribaga ega bo'lgan holda, nafaqat ushbu kamchiliklarni bartaraf etish, balki tub va sifatli o'zgarishlarni ta'minlash uchun ham shaxsan javob berasiz. Oldingi yillardagi xatolarni takrorlash mumkin emas.

To'rtinchi vazifa - nafaqat akademik ilm-fanni, balki oliy o'quv yurtlaridagi ilm-fanni yanada rivojlantirish. Bunga Fanlar akademiyasi a'zolari bilan yaqinda o'tkazilgan uchrashuv va uzoq muddatli muloqot davomida qat'iy ishonch hosil qildim. Bu o'rinda, mening nazarimda, ikkita asosiy vazifani hal etish zarur:

birinchi - ilmiy muassasalarning moddiy-texnik bazasini ilg'or xorijiy markazlar darajasida va olimlar talablariga muvofiq sezilarli ravishda mustahkamlash kerak. Bunda, albatta, davlatning ehtiyojlari va uning maqsadli vazifalari inobatga olinishi shart;

ikkinchi - akademiklarni har taraflama qo'llab-quvvatlash, jumladan, moddiy rag'batlantirish bo'yicha aniq chora-tadbirlarni ishlab chiqish va amalga oshirish. Sizga, Abdulla Nigmatovich, Fanlar akademiyasining yangi prezidenti B.Yo'ldoshev, Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi va boshqa idoralar bilan birgalikda bir oy muddatda olimlar bilan uchrashuvda berilgan topshiriqlarni ijro etish bo'yicha puxta ishlangan chora-tadbirlar kompleksini taqdim etish topshiriladi.

Beshinchi vazifa - kitoblarni chop etish va tarqatishdagi muammolarni hal qilishdir. Bu o'rinda gap, eng avvalo, yoshlar va aholi o'rtasida mamlakatimizning boy tarixini, uning betakror madaniyati va milliy qadriyatlarini keng targ'ib qilish, jahon ilm-fani va adabiyoti yutuqlarini yetkazish uchun zarur muhit va shart-sharoit yaratish haqida bormoqda.

Bu borada zamonaviy kompyuter texnologiyalari va, ayniqsa, internet tizimi bizdan ancha ildamlab ketganini ham inobatga olish zarur.

Ana shu vazifani hal etishda turli darsliklarni yaratish, ularni chop etish va moliyalashtirish masalalarida idoralar o'rtasidagi o'zaro kelishmovchilik, afsuski, jiddiy to'siq bo'lmoqda.

Shu munosabat bilan, Bosh vazirga alohida komissiya tuzib, bir oy muddatda darsliklar, maxsus va badiiy adabiyotga bo'lgan real ehtiyojni, ularni boshqa tillarga tarjima qilish, ular bilan o'quv yurtlari, kutubxona va axborot-resurs markazlarini ta'minlash bo'yicha chora-tadbirlar kompleksini taqdim etish topshiriladi.

Bunda yoshlar va aholining keng qatlamlari o'rtasida kitobxonlikni targ'ib qilish masalalariga ham alohida e'tibor berish lozim bo'ladi. Kitoblarning haqiqiy narxi shakllanishini juda ham puxta o'rganish zarur.

Hozirgi paytda hammamizning oldimizda juda muhim ahamiyatga ega bo'lgan masala, ya'ni kitobxonlikni keng yoyish va yoshlarimizning kitobga bo'lgan muhabbatini, ularning ma'naviy immunitetini yanada oshirishga qaratilgan ishlarimizni yangi bosqichga olib chiqish vazifasi turibdi.

O'zbekiston Respublikasi Prezidentining "Oliy ta'lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi qarori chiqdi.

Ta'kidlash joizki, 2011-2016 yillarda Oliy ta'lim muassasalarining moddiy-texnika bazasini mustahkamlash va yuqori malakali mutaxassislar tayyorlash sifatini tubdan yaxshilash chora-tadbirlari dasturini amalga oshirish doirasida 25 ta oily ta'lim muassasining 202 ta obyektida yangi qurilish, kapital ta'mirlash va rekonstruksiya ishlari bajarildi.

Iqtisodiyotning real sektori talablaridan kelib chiqib, muhandislik, ishlab chiqarish va qurilish yo'nalishlari va ixtisosliklari bo'yicha o'qishga qabul qilish, uning umumiy soniga nisbatan 23 foizdan 33,2 foizga oshdi. Oliy ta'lim sohasida mutaxassislar tayyorlash va malakasini oshirish bo'yicha yangilangan davlat oliy ta'lim standartlari va o'quv dasturlari joriy qilindi.

Shu bilan birga, O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2016-yil 8-oktabrdagi F-4724-son farmoyishi bilan tashkil qilingan Ishchi guruh tomonidan oily ta'lim tizimidagi holatni o'rganish natijalariga ko'ra, bir qator oliy ta'lim muassasalarida halim ham ilmiy-pedagogik salohiyatning pastligi, ta'lim jarayonlarini axborot-uslubiy va o'quv adabiyotlari bilan ta'minlash zamonaviy talablarga javob bermasligi, ularning moddiy-texnika bazasini tizimli yangilashga ehtiyoj mavjudligi aniqlandi.

Oliy ta'lim tizimida o'z yo'nalishlari bo'yicha dunyoning yetakchi ilmiy-ta'lim muassasalari bilan yaqin hamkorlik aloqalari o'rnatish, o'quv jarayoniga ilg'or xorijiy tajribalarini joriy etish, ayniqsa, istiqbolli pedagog va ilmiy kadrlarni xorijning yetakchi ilmiy-ta'lim muassasalarida stajirovkadan o'tkazish va malakasini oshirish borasidagi ishlar yetarli darajada olib borilmayapti.

Oliy ta'lim tizimini tubdan takomillashtirish, mamlakatni ijtimoiy-iqtisodiy rivojlantirishning ustuvor vazifalaridan kelib chiqqan holda, kadrlar tayyorlash mazmunini tubdan qayta ko'rish, xalqaro standartlar darajasiga mos oliy ma'lumotli mutaxassislar tayyorlash uchun zarur sharoitlar yaratilishini ta'minlash maqsadida:

1. Oliy ta'lim tizimini kelgusida yanada takomillashtirish va kompleks rivojlantirish bo'yicha eng muhim vazifalar etib quyidagilar belgilansin:

har bir oliy ta'lim muassasasi jahonning yetakchi ilmiy-ta'lim muassasalari bilan hamkorlik aloqalari o'rnatish, o'quv jarayoniga xalqaro ta'lim standartlariga asoslangan ilg'or pedagogik texnologiyalar, o'quv dasturlari va o'quv-uslubiy materiallarini keng joriy qilish, o'quv-pedagogik faoliyatga, master-klasslar o'tkazishga, malaka oshirish kurslariga xorijiy hamkor ta'lim muassasalaridan yuqori malakali o'qituvchilar va olimlarni faol jalb qilish, ularning bazasida tizimli asosda respublikamiz oliy ta'lim muassasalari magistrant, yosh o'qituvchi va ilmiy xodimlarining stajirovka o'tashlarini, professor-o'qituvchilarni qayta tayyorlash va malakasini oshirishni tashkil qilish;

oliy ma'lumotli mutaxassislar tayyorlashning maqsadli parametrlarini shakllantirish, oliy ta'lim muassasalarida o'qitish yo'nalishlari va mutaxassisliklarini istiqbolda mintaqalar va iqtisodiyot tarmoqlarini rivojlantirish, amalga oshirilayotgan hududiy va tarmoq dasturlarining talablarini inobatga olgan holda optimallashtirish;

ta'lim jarayonini, oliy ta'limning o'quv reja va dasturlarini yangi pedagogik texnologiyalar va o'qitish usullarini keng joriy etish, magistratura ilmiy-ta'lim jarayonini sifat jihatdan yangilash va zamonaviy tashkiliy shakllarni joriy etish asosida yanada takomillashtirish;

yangi avlod o'quv adabiyotlarini yaratish va ularni oliy ta'lim muassasalarining ta'lim jarayoniga keng tadbiq etish, oliy ta'lim muassasalarini zamonaviy o'quv, o'quv-metodik va imiy adabiyotlar bilan ta'minlash, shu jumladan, eng yangi xorijiy adabiyotlar sotib olish va tarjima qilish, axborot-resurs markazlari fondlarini muntazam yangilab borish;

pedagog kadrlarning kasb mahorati sifati va saviyasini uzluksiz yuksaltirish, xorijda pedagog va ilmiy xodimlarning malakasini oshirish va stajirovkasini o'tkazish, oliy ta'lim muassasalari bitiruvchilarini PhD va magistratura dasturlari bo'yicha o'qitish, oliy ta'lim muassasalari va qayta tayyorlash va malaka oshirish

markazlari o'quv jarayonlariga yuqori malakali xorijiy olimlar, o'qituvchi va mutaxassislarni keng jalb qilish;

oliy ta'lim muassasalari ilmiy salohiyatini mustahkamlash, oliy ta'limda ilm-fanni yanada rivojlantirish, uning akademik ilm-fan bilan integratsiyalashuvini kuchaytirish, oliy ta'lim muassasalari professor-o'qituvchilarining ilmiy-tadqiqot faoliyati samaradorligini oshirish, iqtidorli talaba-yoshlarni ilmiy faoliyat bilan shug'ullanishga keng jalb etish;

oliy ta'limning ma'naviy-axloqiy mazmunini oshirish, talaba-yoshlarga mustaqillik g'oyalariga, yuksak ma'naviyat va insoniylikning milliy an'alariga sodiqlik ruhini chuqur singdirish, ularda yot g'oya va mafkuralarga nisbatan immunitet va tanqidiy tafakkurni mustahkamlash bo'yicha keng ko'lamli ma'rifiy va tarbiyaviy ishlarni olib borish;

oliy ta'lim muassasalari moddiy-texnika bazasini o'quv va ilmiy-laboratoriya bino va korpuslari, sport inshootlari, ijtimoiy muhandislik infratuzilmasi obyektlarini qurish, rekonstruksiya qilish va kapital ta'mirlash, oliy ta'lim ilm-fanning ustuvor yo'nalishlari bo'yicha o'quv-ilmiy laboratoriyalarini zamonaviy asbob va uskunalar bilan jihozlash orqali yanada mustahkamlash;

oliy ta'lim muassasalarini zamonaviy axborot-kommunikatsiya texnologiyalari vositalari bilan jihozlash, oliy ta'lim muassasalari talabalari, o'qituvchilari va yosh tadqiqotchilarining jahon ta'lim resurslari, zamonaviy ilmiy adabiyotlarning elektron kataloglari va ma'lumotlar bazalariga kirish imkoniyatlarini kengaytirish.

2. 2017-2021 yillarda Oliy ta'lim tizimini kompleks rivojlantirish dasturi (keying o'rinlarda – Dastur), uning tarkibida quyidagilar:

2017-2021 yillarda oliy ta'lim tizimini tubdan takomillashtirish bo'yicha kompleks chora-tadbirlari 1-ilovaga muvofiq;

2017-2021 yillarda oliy ta'lim muassasalarining moddiy-texnika bazasini mustahkamlash va modernizatsiyalash, ularni zamonaviy o'quv- ilmiy laboratoriyalar, zamonaviy axborot-kommunikatsiya texnologiyalari vositalari bilan jihozlash kompleks chora-tadbirlari 2-ilovaga muvofiq;

2017-2021 yillarda Oliy ta'lim tizimini kompleks rivojlantirish dasturini amalga oshirish moliyaviy xarajatlar hajmining hisoblangan parametrlari 3-ilovaga muvofiq;

2017-2021 yillarda qurilish, rekonstruksiya qilish va kapital ta'mirlashning har yili tasdiqlanagan manzili dasturlariga kiritiladigan oliy ta'lim muassasalari ro'yxati 4-ilovaga muvofiq;

2017-2021 yillarda o'quv va ilmiy laboratoriya uskunlari bilan jihozlashning har yili tasdiqlanadigan manzili dasturlariga kiritiladigan oliy ta'lim muassasalari ro'yxati 5- ilovaga muvofiq;

2017-2021 yillarda oliy ta'lim muassasalarini rivojlantirishning manzili dasturlari 6-74 ilovaga muvofiq tasdiqlansin.

3. O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi ikki oy muddat ichida O'zbekiston Respublikasi Prezidentining yosh pedagog va ilmiy xodimlar malakasini oshirish bo'yicha "Iste'dod" fondining tubdan qayta ko'rib chiqish bo'yicha takliflarni, quyidagilarni inobatga olgan holda, tayyorlansin:

xorijiy ta'lim va ilmiy muassasalarida oliy ta'lim muassasalarining pedagog va ilmiy xodimlar malakasini oshirish, stajirovkasini o'tkazish, bitiruvchilarning PhD va magistratura dasturlarida o'qitishni takomillashtirish bo'yicha amaliy chora-tadbirlarni;

yuqori malakali xorijiy olim, o'qituvchi va mutaxassislarni xorijiy oliy ta'lim va ilmiy muassasalar bilan hamkorlik mexanizm va shakllarni joriy etishning ustuvor yo'nalishlarini inobatga olgan holda, Oliy ta'lim muassasalari va pedagog kadrlarni qayta tayyorlash va malakasini oshirish tarmoq markazlari o'quv jarayoniga keng jalb etish bo'yicha chora-tadbirlar dasturini;

"Iste'dod" fondining moliyaviy resurslarini shakllantirish manbasi sifatida O'zbekiston Respublikasi Moliya vazirligi huzuridagi Ta'lim va tibbiyot muassasalari moddiy-texnika bazasini rivojlantirish jamg'armasi mablag'larini jalb etishni.

Bugungi kunda «Farzandlarimiz bizdan ko'ra kuchli, bilimli, dono va albatta baxtli bo'lishlari shart!» degan hayotiy da'vat har birimizning, ota-onalar va keng jamoatchilikning ongi va qalbidan mustahkam o'rin egallagan.

Hozirgi vaqtda mamlakatimiz aholisining 32 foizini yoki 10 millionini 30 yoshgacha bo'lgan yoshlarimiz tashkil etadi.

Yoshlarimiz haqli ravishda Vatanimizning kelajagi uchun javobgarlikni zimmasiga olishga qodir bo'lgan, bugungi va ertangi kunimizning hal etuvchi kuchiga aylanib borayotgani barchamizga g'urur va iftixor bag'ishlaydi.

Bu sohada olib borayotgan keng miqyosli ishlarimizni, xususan, ta'lim-tarbiya bo'yicha qabul qilingan umummilliy dasturlarimizni mantiqiy yakuniga yetkazishimiz zarur.

Shu maqsadda hukumatning, tegishli vazirlik va idoralar hamda butun ta'lim tizimining, hurmatli domlalarimiz va professor-o'qituvchilarning eng muhim vazifasi - yosh avlodga puxta ta'lim berish, ularni jismoniy va ma'naviy yetuk insonlar etib tarbiyalashdan iboratdir. Farzandlarimiz uchun zamonaviy ish joylari yaratish, ularning hayotda munosib o'rin egallashini ta'minlashga qaratilgan ishlarimizni yangi bosqichga ko'tarishni davrning o'zi taqozo etmoqda.

Biz yoshlarga doir davlat siyosatini hech og'ishmasdan, qat'iyat bilan davom ettiramiz. Nafaqat davom ettiramiz, balki bu siyosatni eng ustuvor vazifamiz sifatida bugun zamon talab qilayotgan yuksak darajaga ko'taramiz. Yoshlarimizning mustaqil fikrlaydigan, yuksak intellektual va ma'naviy salohiyatga ega bo'lib, dunyo miqyosida o'z tengdoshlariga hech qaysi sohada bo'sh kelmaydigan insonlar bo'lib kamol topishi, baxtli bo'lishi uchun davlatimiz va jamiyatimizning bor kuch va imkoniyatlarini safarbar etamiz.

Mavzuning dolzarbligi: Bitiruv malakaviy ishim matematik-fizika tenglamalari fanida muhim o'rin tutgan bo'lib, zamonaviy matematika masalalarini o'rganishda umumlashgan funksiyalar, Dirakning δ –funksiyasi orqali umumlashgan funksiyalar fundamental yechimini topish, xususan singulyar umumlashgan funksiyalar va ularning hosilalarini o'rganish muhim hisoblanadi.

Bitiruv malakaviy ishning maqsadi: Yuqorida ishning dolzarbligi qismida bayon qilingan mulohazalar ishning maqsadini aniqlab beradi va ular quyidagilardan iborat:

- umumlashgan funksiyalarni o'rganish;
- umumlashgan funksiyalarni turlarga bo'lish;
- regulyar va singulyar umumlashgan funksiyalarni o'rganish;
- singulyar umumlashgan funksiyalarga doir misollar yechish;
- singulyar umumlashgan funksiyalarning hosilalarini topish va ularga doir misollar yechishni o'rganish.

Bitiruv malakaviy ishning vazifasi: Bu bitiruv malakaviy ishimizning vazifasi shundan iboratki, singulyar umumlashgan funksiyalar ustida amallarni bajarishni o'rganish.

Bitiruv malakaviy ishning o'rganilganlik darajasi: Qo'yilgan mavzu batafsil va yetarlicha o'rganilgan.

Bitiruv malakaviy ishining predmeti: Asosiy funksiyalar, umumlashgan funksiyalar, regulyar umumlashgan funksiyalar, singulyar umumlashgan funksiyalar.

Bitiruv malakaviy ishning obykti: Dirakning δ –funksiyasi, singulyar umumlashgan funksiyalar hosilalari.

Bitiruv malakaviy ishning ilmiy farazi: Ushbu bitiruv malakaviy ishi referativ xarakterga ega bo'lib, singulyar umumlashgan funksiyalar ustida amallarni bajarish o'rganilgan.

Bitiruv malakaviy ishning yangiligi: Bitiruv malakaviy ish referativ xarakterga ega bo'lib, singulyar umumlashgan funksiyalar va ularning hosilalari misollar yordamida ochib berilgan.

Bitiruv malakaviy ishning amaliy ahamiyati: Ushbu bitiruv malakaviy ishidan kvant fizika va kvant mexanika yo'nalishidagi magistrlar o'zlarining sohalarida foydalanadilar.

Bitiruv malakaviy ishning metodologik asosi: Matematik analiz, integral tenglamalar, hosila, matematika fizika masalalari usullari qo'llaniladi.

Bitiruv malakaviy ishning metodlari: Umumlashgan funksiyalar turlari, Dirakning δ –funksiyasi.

Bitiruv malakaviy ishning tarkibi va hajmi: Mazkur bitiruv malakaviy ishi kirish qismi, 2 ta bob, har bir bobda 2 tadan 4 ta paragraf, har bir bob uchun xulosalar, xotima va adabiyotlar ro'yxatidan iborat.

I BOB. UMUMLASHGAN FUNKSIYALAR HAQIDA TUSHUNCHA.

1.1. Asosiy funksiyalar sinfi. Umumlashgan funksiyalar ta'rif.

$G \subset \mathbb{R}^n$ dagi ochiq to'plam va $\varphi: G \rightarrow \mathbb{C}$ bo'lsin.

1.1-ta'rif. φ funksiyaning tashuvchisi deb, $\mathbb{R}^n$ dagi $\varphi(x) \neq 0$ bo'ladigan $x \in G$ nuqtalarning to'plami yopilmasiga aytiladi. Boshqacha qilib aytganda, $x \in G$ nuqta φ funksiya tashuvchisiga tegishli bo'ladi, agar x ga yaqinlashuvchi G dagi $x_1, x_2, \dots, x_n$ nuqtalarning ketma- ketligi topilsa va barcha $n = 1, 2, \dots$ larda $\varphi(x_n) \neq 0$ bo'lsa. φ funksiyaning tashuvchisi $\text{supp } \varphi$ orqali belgilanadi.

1.2-ta'rif. $\varphi: G \rightarrow \mathbb{C}$ funksiya asosiy deyiladi, agar φ cheksiz differensiallanuvchi va $\text{supp } \varphi$ G ning qism to'plami bo'lsa.

Boshqa so'zlar bilan aytadigan bo'lsak, asosiy deb, biz aniqlanish soha chegarasining biror atrofida nolga aylanuvchi cheksiz differensiallanuvchi funksiyalarni ataymiz.

Bizga matematik analiz kursidan ma'lumki, Lebeg teoremasiga ko'ra, to'plam $\mathbb{R}^n$ da kompakt bo'ladi, agar u yopiq va chegaralangan bo'lsa. Shunga asoslanib, asosiy funksiya tashuvchisi G ning aniqlanish sohasiga tegishli bo'lgan kompakt qism to'plami bo'ladi, deya olamiz. Yana asosiy funksiyaning tashuvchisi G soha chegarasi bilan kesishmasligini ta'kidlab o'tishimiz kerak.

1-misol. $G \subset \mathbb{R}$, $(0; 1)$ –ochiq interval va $\varphi: G \rightarrow \mathbb{C}$ barcha $0 < x < 1$ lar uchun $\varphi(x) = 1$ bo'lsin. Albatta bunday aniqlangan φ funksiya cheksiz differensiallanuvchi bo'ladi, lekin uning tashuvchisi $[0; 1]$ yopiq kesma bilan ustma-ust tushadi va shu bilan birga G to'plamga kirmaydi. Shuning uchun φ asosiy funksiya bo'lolmaydi.

2-misol. $\omega_{x_0, \varepsilon}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ cheksiz differensiallanuvchi funksiyani quramiz.

U $|x - x_0| < \varepsilon$ ochiq sharda qat'iy musbat va bu shar tashqarisida 0 ga teng. Bu yerda ε – ixtiyoriy musbat son, x_0 esa $\mathbb{R}^n$ fazosining ixtiyoriy nuqtasi.

Berilgan $G \subset \mathbb{R}^n$ Soha va uning ixtiyoriy nuqtasi uchun yetarlicha kichik musbat ε son topamizki, $|x - x_0| < \varepsilon$ yopiq shar G ga tegishli bo'lsin. U holda $\Omega_{x_0, \varepsilon}$ funksiyaning G ga torayishi G soha uchun asosiy funksiya bo'ladi.

2 ta asosiy funksiyaning yig'indisi va songa ko'paytmasi yana asosiy funksiya bo'lishini ko'rish qiyin emas. Shuning uchun berilgan G sohada aniqlangan barcha asosiy funksiyalar to'plami $\mathcal{D}(G)$ orqali belgilanadi.

Uzluksiz funksiyalar δ -funksiyalar uchun asosiy funksiyalar hisoblanadi. Bu nuqtai nazar olinishiga sabab, istalgan umumlashgan funksiyaning xuddi "yaxshi" (asosiy) funksiyalar fazosida chiziqli, uzluksiz funksionalni aniqlashdek qarash asos qilib olingan. Boshqa tomondan, asosiy funksiyalar zahirasi yetarlicha katta bo'lishi kerak. Asosiy funksiyalar to'plami $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ga barcha $\mathbb{R}^n$ da cheksiz differensiallarni kiritamiz. $\mathcal{D}$ da o'xshashlikni quyidagi tarzda aniqlaymiz. Agar:

a) $\text{supp } \varphi_k \subset \cup_R$ bo'ladigan $\exists R > 0$ son mavjud bo'lsa;

b) har bir $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ lar uchun $k \rightarrow \infty$ da

$$D^\alpha \varphi_k(x) \xrightarrow{x \in \mathbb{R}^n} D^\alpha \varphi(x) \quad (1.1)$$

o'rinli bo'lsa, u holda $\mathcal{D}$ dagi $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ funksiyalar ketma-ketligi $\varphi \in \mathcal{D}$ funksiyaga yaqinlashadi.

$\mathcal{D}$ chiziqli to'plam bilan unda keltirilgan o'xshashlik $\mathcal{D}$ dagi asosiy funksiyalar fazosi deyiladi. $\mathcal{D}$ dan $\mathcal{D}$ ga $D^\beta \varphi(x)$ differensiallash amali uzluksizdir. Haqiqatdan ham, agar $\mathcal{D}$ da $\varphi_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ bo'lsa, u holda

a) $\varphi_k(x) = 0, |x| > R$ biror $R > 0$ da;

b) har bir α uchun $k \rightarrow \infty$ da

$$D^\alpha \varphi_k(x) \xrightarrow{x} 0$$

o'rinli bo'ladi. Biroq bunda

$$a) \text{upp} D^\beta \subset \overline{U_R};$$

b) har bir α uchun $k \rightarrow \infty$ da

$$D^\alpha [D^\beta \varphi_k(x)] = D^{\alpha+\beta} \varphi_k(x) \xrightarrow{x} 0$$

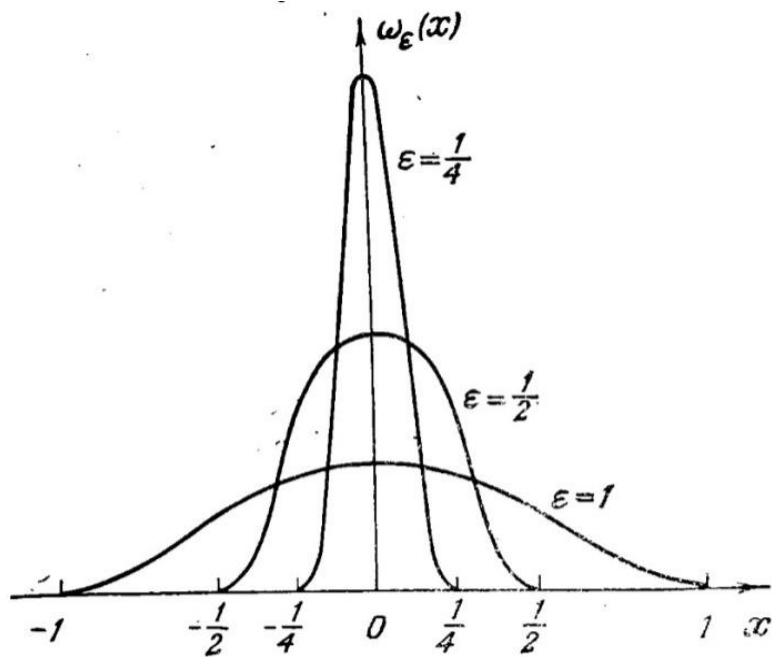
bo'ladi, bu esa $k \rightarrow \infty$ da $\mathcal{D}$ da

$$D^\beta \varphi_k \rightarrow 0$$

ni anglatadi. Ya'ni $\mathcal{D}$ 'operator $\mathcal{D}$ dan $\mathcal{D}$ ga uzluksizdir. O'z-o'zidan, asosiy bo'lmagan, chiziqli o'zgaruvchilari almashgan $\varphi(Ay + b)$ va $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ funksiyaga ko'paytirilgan $a(x)\varphi(x)$ ning amallari $\mathcal{D}$ dan $\mathcal{D}$ ga uzluksiz bo'lishi kelib chiqadi.

Aytganimizdek, tashuvchilari berilgan G sohada saqlanuvchi asosiy funksiyalar to'plami $\mathcal{D}(G)$ orqali belgilanadi, shu tariqa $\mathcal{D}(G) \subset D(\mathbb{R}^n) = \mathcal{D}$ bo'ladi. Keltirilgan ta'rifdan ushbu savol paydo bo'ladi: ayniy, noldan farqli bo'lgan asosiy funksiyalar mavjudmi? Bunday funksiyalar $\mathbb{R}^n$ da analitik bo'lishi mumkin emasligi ma'lum. Noldan farqli asosiy funksiyaga ushbu "qalpoqcha" misol bo'la oladi:

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}}, & |x| \leq \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases}$$



1-rasm.

(Asosiy funksiyaga misol – “Qalpoqcha” grafigi.)

Doimiy C_ε ni shunday tanlaymizki, bunda

$$\int \omega_\varepsilon(x) dx = 1$$

bo'lsin. Bundan

$$\omega_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^h} \omega_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

ekanligini tekshirish qiyin emas.

Navbatdagi lemma asosiy funksiyalarning boshqa ko'p sondagi misollarini beradi.

1.1-lemma. G ning ixtiyoriy sohasi va $\forall \varepsilon > 0$ soni uchun $\exists \eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ funksiya mavjud bo'lib, $0 \leq \eta(x) \leq 1$; $\eta(x)=1$, $x \in G_\varepsilon$; $\eta(x) = 0$, $x \notin G_{3\varepsilon}$ lar o'rirlidir.

Isbot. $\chi(x) - G_{2\varepsilon}$ to'plamning xarakteristik funksiyasi bo'lsin: $\chi(x) = 1$, $x \in G_{2\varepsilon}$, $\chi(x) = 0$, $x \notin G_{2\varepsilon}$. U holda $\eta(x) = \int \chi(y) \omega_\varepsilon(x - y) dy$ funksiya zaruriy

xossalarga ega bo'ladi. Haqiqatdan ham, $\omega_\varepsilon \in \mathcal{D}$, $0 \leq \omega_\varepsilon(x)$, $\text{supp} \omega_\varepsilon = \overline{U_\varepsilon}$, $\int \omega_\varepsilon(x) dx = 1$ ekanligidan,

$$\eta(x) = \int_{G_{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon(x-y) dy \in C^\infty(\mathbb{R}^n);$$

$$0 \leq \eta(x) \leq \int \omega_\varepsilon(x-y) dy = \int \omega_\varepsilon(\xi) d\xi = 1;$$

$$\eta(x) = \int \chi(y) \omega_\varepsilon(x-y) dy$$

$$= \begin{cases} \int_{U(x;\varepsilon)} \omega_\varepsilon(x-y) dy = \int \omega_\varepsilon(\xi) d\xi = 1, & x \in G_\varepsilon \\ 0, & x \notin G_{3\varepsilon} \end{cases}$$

Lemma isbotlandi. Isbotlangan lemmadan ushbu natijalar kelib chiqadi:

a) agar G soha chegaralangan bo'lsa, u holda $\eta(x)=1$, $x \in G_\varepsilon$ o'rinli bo'lgan $\exists \eta \in \mathcal{D}$ funksiya mavjud bo'ladi;

b) agar $G' \Subset G$ bo'lsa, u holda $\exists \eta \in \mathcal{D}(G)$ funksiya mavjud bo'lib, $\eta(x)=1$, $x \in G'$ o'rinli bo'ladi.

Umumlashgan funksiyalar funksiya klassik tushunchasining umumlashmasidir. Bu umumlashma bir tomondan, ideallashtirilgan tushunchalar, xususan, moddiy nuqta zichligi, nuqtaviy zaryad yoki dipolning zichligi, oddiy yoki ikkilamchi qatlamning zichligi, nuqtaviy manbaning intensivligi, kuch intensivligi kabi tushunchalarni matematik ko'rinishda ifodalash imkonini beradi. Boshqa tomondan, umumlashgan funksiya tushunchasida aslida bo'lishi mumkin bo'lmagan faktlar o'z aksini topadi, masalan, jismning nuqtadagi zichligini o'lchashda aslida bu nuqtaning yetarlicha kichik atrofida uning o'rtacha zichligini o'lchash va uni berilgan nuqtadagi zichlik deya e'lon qilish imkonini beradi. Qo'pol qilib aytganda, umumlashgan funksiya har bir nuqta atrofida o'zining "o'rtacha qiymatlari"ni aniqlaydi. Isbot tariqasida massasi 1 bo'lgan moddiy nuqtaning zichligini aniqlashga harakat qilamiz. Bu nuqta koordinatalar boshi bilan

ustma-ust tushadi deb hisoblaymiz. Ushbu zichlikni aniqlash uchun 1 lik massani U_ε sharning ichida tekis taqsimlaymiz. Natijada o'rtacha zichlikka ega bo'lamiz:

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi\varepsilon^2}, & |x| < \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases}$$

Topilishi kerak bo'lgan zichlikni $\delta(x)$ orqali ifodalaymiz. Dastlab, zichlikka $\varepsilon \rightarrow +0$ dagi o'rtacha $f_\varepsilon(x)$ zichliklar ketma-ketligining limitini qo'llaymiz, ya'ni

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Tabiiyki, δ zichlikdan V hajm bo'yicha olingan integral shu hajmdagi jism massani beradi, ya'ni,

$$\int_V \delta(x) = \begin{cases} 1, & 0 \in V \\ 0, & 0 \notin V \end{cases}$$

Lekin, (1.2) tenglikka ko'ra, bu tenglikning chap qismi doim 0 ga teng. Bunday ziddiyat $\varepsilon \rightarrow 0$ dagi $f_\varepsilon(x)$ ketma-ketlikning limiti $\delta(x)$ zichlikni berolmasligini ko'rsatadi. Endi $f_\varepsilon(x)$ funksiyalar ketma-ketligining kuchsiz limitini hisoblaymiz, ya'ni, istalgan uzluksiz φ funksiya uchun $\varepsilon \rightarrow 0$ dagi $\int f_\varepsilon \varphi dx$ sonli ketma-ketlikning limitini topamiz.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \varphi(0)$$

ekanligini ko'rsatamiz. $\varphi(x)$ funksiya uzluksizligiga ko'ra, $\forall \eta > 0$ uchun $\exists \varepsilon_0 > 0$ son topilib, barcha $|x| < \varepsilon_0$ lar uchun $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \eta$ tengsizlik o'rinlidir. Bu yerda barcha $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ lar uchun

$$\left| \int f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx - \varphi(0) \right| = \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \left| \int_{|x| < \varepsilon} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx \right| \leq$$

$$\leq \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{|x|<\varepsilon} |\varphi(x) - \varphi(0)| dx < \eta \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{|x|<\varepsilon} dx = \eta$$

tenglikka ega bo'lamiz. Shu tariqa, $f_\varepsilon(x)$ funksiyalar ketma-ketligining $\varepsilon \rightarrow 0$ dagi kuchsiz limiti har bir uzluksiz $\varphi(x)$ funksiyaga uning $x = 0$ nuqtadagi qiymati $\varphi(0)$ ni mos qo'yuvchi $\varphi(0)$ funksionalga teng bo'ladi. Aynan mana shu funksional $\delta(x)$ zichlikni aniqlaydi. Bu yerda $\delta(x)$ -Dirakning δ -funksiyasi deyiladi. Demak, $\varepsilon \rightarrow 0$ dagi $f_\varepsilon(x) \rightarrow \delta(x)$ degani, istalgan uzluksiz $\varphi(x)$ funksiya uchun ushbu munosabat o'rinli bo'lishini bildiradi:

$$\int f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \rightarrow (\delta, \varphi), \varepsilon \rightarrow 0 \quad (1.3)$$

Bu yerda (δ, φ) belgilash δ funksionalning φ funksiyadagi qiymati— $\varphi(0)$ ning sonini anglatadi. To'liq massani hosil qilish uchun $\delta(x)$ funksional bilan

$$\varphi(x) = 1, (\delta, 1) = 1$$

funksiyaga ta'sir qilish kerak. Agar m massa $x = 0$ nuqtada jamlangan bo'lsa, u holda unga mos zichlikni $m\delta(x)$ ga teng deyish mumkin. Agar m massa x_0 nuqtada jamlangan bo'lsa, u holda uning zichligini $m\delta(x - x_0)$ ga teng deb ayta olamiz, bu yerda $(m\delta(x - x_0), \varphi) = m\varphi(x_0)$ o'rinlidir.

Umumiy holda m_k massalar turli x_k ($k = 1, 2, \dots, N$) nuqtalarda jamlangan bo'lsa, u holda mos zichliklar

$$\sum_{k=1}^N m_k \delta(x - x_k)$$

ga teng bo'ladi.

1.3-ta'rif. Umumlashgan funksiya deb, asosiy funksiyalar fazosi $\mathcal{D}$ dagi ixtiyoriy chiziqli, uzluksiz funksionalga aytiladi.

f funksional yoki umumlashgan funksiyaning φ asosiy funksiyadagi qiymatini (f, φ) orqali belgilaymiz. f umumlashgan funksiyaning $f(x)$ ko'rinishida

ham tasvirlaymiz, bunda x sifatida asosiy funksiyalarning f funksional ta'sir qilayotgan argument nazarda tutiladi. f umumlashgan funksiyani ta'rifini izohlaymiz:

1) f umumlashgan funksiya $\mathcal{D}$ dagi funksionaldir, ya'ni har bir $\varphi \in \mathcal{D}$ ga $f(\varphi)$ son mos qo'yiladi;

2) f umumlashgan funksiya $\mathcal{D}$ dagi chiziqli funksionaldir, ya'ni, agar $\varphi \in \mathcal{D}$, $\psi \in \mathcal{D}$ va λ, μ — kompleks sonlar bo'lsa, u holda

$$(f, \lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda(f, \varphi) + \mu(f, \psi)$$

bo'ladi;

3) f umumlashgan funksiya $\mathcal{D}$ dagi uzluksiz funksiyadir, ya'ni agar $\mathcal{D}$ da $k \rightarrow \infty, \varphi_k \rightarrow 0$ bo'lsa, u holda $(f, \varphi_k) \rightarrow 0$ bo'ladi.

$\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ orqali barcha umumlashgan funksiyalar to'plamini belgilaymiz. $\mathcal{D}'$ to'plam — chiziqli. Agar f va g umumlashgan funksiyalarning $\lambda f + \mu g$ chiziqli kombinatsiyasini funksionaldek aniqlasak, u holda formulaga muvofiq,

$$(\lambda f + \mu g, \varphi) = \lambda(f, \varphi) + \mu(g, \varphi), \varphi \in \mathcal{D}$$

bo'ladi. $\lambda f + \mu g$ funksional $\mathcal{D}$ da chiziqli va uzluksiz, ya'ni $\mathcal{D}'$ ga tegishli ekanligini tekshiramiz. Agar $\varphi \in \mathcal{D}$, $\psi \in \mathcal{D}$ va α, β — ixtiyoriy kompleks sonlar bo'lsa, u holda ta'rifga ko'ra,

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g, \varphi + \beta \psi) &= \lambda(f, \alpha\varphi + \beta\psi) + \mu(g, \alpha\varphi + \beta\psi) = \\ &= \alpha[\lambda(f, \varphi) + \mu(g, \varphi)] + \beta[\lambda(f, \varphi) + \mu(g, \varphi)] = \\ &= \alpha(\lambda f + \mu g, \varphi) + \beta(\lambda f + \mu g, \psi) \end{aligned}$$

bo'ladi, shuning uchun funksional — chiziqli. Uning uzluksizligi f va g funksionallarning uzluksizligidan kelib chiqadi:

1.4-ta’rif. Agar $\mathcal{D}$ da $k \rightarrow \infty$ da $\varphi_k \rightarrow 0$ bo’lsa, u holda

$$(\lambda f + \mu g, \varphi_k) = \lambda(f, \varphi_k) + \mu(g, \varphi_k) \rightarrow 0$$

bo’ladi.

$\mathcal{D}'$ dagi yaqinlashishni funksionallar ketma-ketligining kuchsiz o’xshashligi kabi aniqlaymiz:

1.5-ta’rif. $\mathcal{D}'$ dagi $f_1, f_2, \dots$ umumlashgan funksiyalarning ketma-ketligi $f \in \mathcal{D}'$ umumlashgan funksiyaga yaqinlashadi, agar $\forall \varphi \in \mathcal{D}'$ uchun $(f_k, \varphi) \rightarrow (f, \varphi), (k \rightarrow \infty)$ bo’lsa. Ushbu holda $\mathcal{D}'$ da $k \rightarrow \infty$ da $f_k \rightarrow f$ kabi yozamiz.

1.6-ta’rif. $\mathcal{D}'$ chiziqli to’plam bilan undagi o’xshashlik birgalikdagi $\mathcal{D}'$ umumlashgan funksiyalar fazosi deyiladi.

1.1-teorema. $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ va $\mathcal{D}'$ dagi $f_1, f_2, \dots$ ketma-ketlik uchun (f_k, φ) sonli ketma-ketlik $k \rightarrow \infty$ da yaqinlashadi. U holda $(f, \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k, \varphi), \varphi \in \mathcal{D}$ tenglik bilan aniqlanuvchi $\mathcal{D}$ dagi f funksional $\mathcal{D}$ da chiziqli va uzluksizdir, ya’ni $f \in \mathcal{D}'$.

Isbot. Funksional limitining chiziqliligi oddiy isbotlanadi:

$$\begin{aligned} (f, \alpha\varphi + \beta\psi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k, \alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k, \varphi) + \beta \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k, \psi) = \\ &= \alpha(f, \varphi) + \beta(f, \psi), \quad \varphi, \psi \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Uning uzluksizligini ko’rsatamiz. $\mathcal{D}$ da $\varphi_\nu \rightarrow 0, \nu \rightarrow \infty$ bo’lsin. Biz $(f, \varphi_k) \rightarrow 0$ ni isbotlashimiz yetarli. Qism ketma-ketliklar uchun barcha $\nu = 1, 2, \dots$ larda biror $a > 0$ uchun $|(f, \varphi_\nu)| \geq 2a$ tengsizlik bajariladi deb hisoblash mumkin.

$$(f, \varphi_\nu) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k, \varphi_\nu)$$

ekanligidan, har bir $\nu = 1, 2, \dots$ uchun $\exists k_\nu$ nomer topilib,

$$|(f_k, \varphi_v)| \geq a$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Ammo bu quyidagi lemmaga ziddir. Hosil bo'lgan ziddiyat f funksionalning uzluksizligini isbotlaydi. Teorema isbotlandi.

1.2-lemma. $\mathcal{D}'$ dagi $f_1, f_2, \dots$ funksionallar ketma-ketligi teorema shartlarini qanoatlantirsin va $\mathcal{D}$ dagi $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ asosiy funksiyalar ketma-ketligi $\mathcal{D}$ da 0 ga intilsin. U holda $(f_k, \varphi_k) \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) bo'ladi.

Isbot. Lemmani noto'g'ri deb faraz qilamiz. U holda qism ketma-ketliklar uchun $|(f_k, \varphi_k)| \geq c > 0$ o'rinli deb hisoblasa bo'ladi. φ_k ning $\mathcal{D}$ da 0 ga intilishini:

a) $\varphi_k(x) = 0$, biror $R > 0$ uchun $|x| > R$ da;

b) har bir α uchun $k \rightarrow \infty$ da

$$D^\alpha \varphi_k(x) \xrightarrow{x} 0$$

orqali izohlash mumkin. Shunga ko'ra ketma-ketliklar uchun

$$|D^\alpha \varphi_k(x)| \leq \frac{1}{4^k}, |\alpha| \leq k = 0, 1, \dots$$

o'rinli deb aytish mumkin. $\psi_k = 2^k \cdot \varphi_k$ desak, u holda

$$|D^\alpha \varphi_k(x)| \leq \frac{1}{2^k}, |\alpha| \leq k = 0, 1, \dots \quad (1.4)$$

bo'lib, bunda $\mathcal{D}$ da $k \rightarrow \infty$, $\psi_k \rightarrow 0$ va $\mathcal{D}$ dagi istalgan $\sum_v \varphi_{k_v}(x)$ ko'rinishidagi qator $k \rightarrow \infty$ da yaqinlashuvchi bo'ladi:

$$|(f_k, \psi_k)| = 2^k |(f_k, \varphi_k)| \geq 2^k c \rightarrow \infty \quad (1.5)$$

Endi $\{f_{k_v}\}$ va $\{\psi_{k_v}\}$ qism ketma-ketliklarni ko'ramiz. $\{f_{k_1}\}$ va $\{\psi_{k_1}\}$ larni shunday tanlaymizki, bunda

$$|(f_{k_1}, \psi_{k_1})| \geq 2^k$$

o'rinli bo'ladi. f_{k_j} va ψ_{k_j} , $j = 1, 2, \dots, \nu - 1$ lar qurilgan deb faraz qilamiz; f_{k_ν} va ψ_{k_ν} larni quraylik. $\mathcal{D}$ da $k \rightarrow \infty$, $\psi_k \rightarrow 0$ ekanligidan

$$(f_{k_j}, \psi_k) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$$

bo'ladi va $\exists N$ nomer topilib, barcha $k \geq N$ lar uchun

$$|(f_{k_j}, \psi_k)| \leq \frac{1}{2^{v-j}}, j = 1, 2, \dots, \nu - 1 \quad (1.6)$$

$k \rightarrow \infty$ da $(f_k, \psi_{k_j}) \rightarrow (f, \psi_{k_j})$ bo'lishidan, $\exists N_1 \geq N$ nomer topilib, barcha $k \geq N_1$ larda

$$|(f_k, \psi_k)| \leq |(f, \psi_k)| + 1 \quad (1.7)$$

o'rinli bo'ladi.

(1.5) formulaga binoan, $\exists k_\nu \geq N$ nomer tanlaymizki, bunda

$$|(f_{k_\nu}, \psi_{k_\nu})| \geq \sum_{j=1}^{\nu-1} |(f, \psi_{k_j})| + 2\nu \quad (1.8)$$

o'rinli bo'ladi.

(1.6)–(1.8) tengsizliklarga asosan, f_{k_ν} va ψ_{k_ν} larning qurilishi quyidagicha bo'ladi:

$$|(f_{k_j}, \psi_{k_\nu})| \leq \frac{1}{2^{v-j}}, j = 1, 2, \dots, \nu - 1 \quad (1.9)$$

$$|(f_{k_\nu}, \psi_{k_\nu})| \geq \sum_{j=1}^{\nu-1} |(f_{k_\nu}, \psi_{k_j})| + \nu + 1 \quad (1.10)$$

$\psi(x) = \sum_{v=1}^{\infty} \psi_{k_\nu}(x)$ bo'lsin. (1.4) ga asosan, bu qator $\mathcal{D}$ da yaqinlashuvchi bo'ladi, uning yig'indisi esa

$$(f_{k_\nu}, \psi) = (f_{k_\nu}, \psi_{k_\nu}) + \sum_{j=1, j \neq 0}^{\infty} (f_{k_\nu}, \psi_{k_j})$$

bo'ladi. (1.9) va (1.10) tengsizliklarni qo'llasak,

$$\begin{aligned} |(f_{k_\nu}, \psi)| &\geq |(f_{k_\nu}, \psi_{k_\nu})| - \sum_{j=1}^{\nu-1} |(f_{k_\nu}, \psi_{k_j})| - \sum_{j=\nu+1}^{\infty} |(f_{k_\nu}, \psi_{k_j})| \geq \\ &\geq \nu + 1 - \sum_{j=\nu+1}^{\infty} \frac{1}{2^{j-\nu}} = \nu \Rightarrow \end{aligned}$$

$\nu \rightarrow \infty$ da $(f_{k_\nu}, \psi) \rightarrow \infty$ bo'ladi. Lekin bu $(f_k, \psi) \rightarrow (f, \psi)$ munosabatga zid. Ushbu ziddiyat lemmani isbotlaydi.

1.2. Regulyar va singulyar umumlashgan funksiyalar.

Umumlashgan funksiyaga misol tariqasida $\mathbb{R}^n$ da lokal integrallanuvchi $f(x)$ funksiya yordamida hosil qilinuvchi funksionalni keltirish mumkin:

$$(f, \varphi) = \int f(x) \varphi(x) dx, \varphi \in \mathcal{D} \quad (1.11)$$

Integralning chiziqlilik xossasidan bu funksionalning ham chiziqliligi kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} (f, \lambda\varphi + \mu\psi) &= \int f(x) [\lambda\varphi(x) + \mu\psi(x)] dx = \\ &= \lambda \int f(x) \varphi(x) dx + \mu \int f(x) \psi(x) dx = \lambda(f, \varphi) + \mu(f, \psi). \end{aligned}$$

Integral belgisi ostida limitga o'tish teoremasidan esa, uning $\mathcal{D}$ dagi uzluksizligi kelib chiqadi:

$$(f, \varphi_k) = \int f(x) \varphi_k(x) dx \rightarrow 0, k \rightarrow \infty.$$

Shu asnoda, (1.11) funksional $\mathcal{D}'$ da umumlashgan funktsiyani aniqlaydi.

1.7-ta'rif. (1.11) formula bo'yicha $\mathbb{R}^n$ da lokal integrallanuvchi funktsiyalar orqali aniqlanadigan umumlashgan funktsiyalarga regulyar umumlashgan funktsiyalar deyiladi. Qolgan umumlashgan funktsiyalar singulyar umumlashgan funktsiyalar deyiladi.

1.3-lemma. (Dyu Bua-Reymon lemmasi) G da lokal integrallanuvchi $f(x)$ funktsiya G sohada umumlashgan funktsiya ma'nosida 0 ga aylanishi uchun G ning deyarli barcha joyida $f(x) = 0$ bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. Shartning yetarliligi ma'lum. Uning zaruriyligini ko'rsatamiz. $a \in G$ sohadagi ixtiyoriy nuqta bo'lsin. G sohada to'laligicha saqlanuvchi shunday yopiq shar topilib, $f = 0$ bajariladi. Istalgan $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ uchun

$$\psi_k(x) = e^{\frac{1}{\varepsilon}(k, x)} \omega_\varepsilon(x - a)$$

funktsiya $\mathcal{D}(G)$ ga tegishli bo'lsa, u holda

$$(f, \psi_k) = \int f(x) e^{\frac{1}{\varepsilon}(k, x)} \omega_\varepsilon(x - a) dx = 0$$

bo'ladi. Shu tariqa, $\cup(a; \varepsilon)$ sharda integrallanuvchi $f(x) \omega_\varepsilon(x - a)$ funktsiyaning $\{e^{\frac{1}{\varepsilon}(k, x)}\}$ trigonometrik sistemasining barcha Furiye koeffitsiyentlari 0 ga teng. Bundan kelib chiqadiki, bu funktsiya deyarli barcha joyda 0 ga teng, hamda bu sharning hamma joyida $f(x) = 0$ bo'ladi. $a \in G$ sohaning ixtiyoriy nuqtasi ekanligidan, G ning deyarli barcha joyida $f(x) = 0$ bo'ladi. Lemma isbotlandi.

$\mathbb{R}^n$ dagi istalgan lokal integrallanuvchi funktsiya (1.11) formulaga asosan, regulyar umumlashgan funktsiyani aniqlaydi. Dyu Bua-Reymon lemmasiga ko'ra, istalgan regulyar umumlashgan funktsiya $\mathbb{R}^n$ da lokal integrallanuvchi yagona

funksiya bilan aniqlanadi. O'z-o'zidan, $\mathbb{R}^n$ da lokal integrallanuvchi funksiyalar va regulyar umumlashgan funksiyalar orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjudligi kelib chiqadi. Shu sababli, lokal integrallanuvchi $f(x)$ funksiyani va u orqali (1.11) formula bo'yicha hosil qilingan umumlashgan funksiya $-(f, \varphi)$ funksionalni ayniylashtiramiz. Tom ma'noda "oddiy", ya'ni $\mathbb{R}^n$ da lokal integrallanuvchi funksiyalar umumlashgan funksiyalar bo'ladi. Va nihoyat, agar $\mathbb{R}^n$ da lokal integrallanuvchi funksiyalar ketma-ketligi $f_k(x), k = 1, 2, \dots$ har bir kompaktda $f(x)$ funksiyaga yekis yaqinlashsa, u holda u $f(x)$ ga $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ da ham yaqinlashadi.

Haqiqatdan ham, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ uchun $k \rightarrow \infty$ da

$$(f_k, \varphi) = \int f_k(x) \varphi(x) dx \rightarrow \int f(x) \varphi(x) dx = (f, \varphi)$$

o'rinlidir.

f umumlashgan funksiya $C^P(G)$ sinfga tegishli bo'ladi, agar u G sohada $C^P(G)$ sinfnining $f_G(x)$ funksiyasi bilan ustma-ust tushsa, ya'ni $\forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$ uchun

$$(f, \varphi) = \int f_G(x) \varphi(x) dx$$

bo'lsa. Agar $f_G \in C^P(\bar{G})$ bo'lsa, u holda f $C^P(\bar{G})$ sinfga tegishli deb aytiladi.

Demak, singulyar umumlashgan funksiyani hech qaysi lokal integrallanuvchi funksiya bilan ayniylashtirib bo'lmaydi. Singulyar umumlashgan funksiya oddiy misol qilib, Dirakning δ – funksiyasini olishimiz mumkin:

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \varphi \in \mathcal{D}.$$

Ko'rinib turibdiki, $\delta \in \mathcal{D}'$, $\text{supp} \delta = \{0\}$ bo'lishidan, $\delta(x) = 0, x \neq 0$ bo'ladi.

$\delta(x)$ –singulyar umumlashgan funksiya bo'lishini isbotlaymiz. Teskarisini faraz qilaylik, $\mathbb{R}^n$ da lokal integrallanuvchi $\exists f(x)$ funksiya mavjud bo'lib, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ uchun

$$\int f(x)\varphi(x)dx = \varphi(0) \quad (1.12)$$

bo'lsin. $x_1\varphi(x) \in \mathcal{D}$ ekanligidan, agar $\varphi \in \mathcal{D}$ bo'lsa, u holda (1.11) tenglikka asosan, barcha $\varphi \in \mathcal{D}$ lar uchun

$$\int f(x)x_1\varphi(x)dx = x_1\varphi(x)|_{x=0} = 0 = (x_1f, \varphi)$$

o'rinli bo'ladi, bu yerda $x_1 - x$ ning birinchi koordinatasi. Shu tariqa $\mathbb{R}^n$ da lokal integrallanuvchi $x_1f(x)$ funksiya umumlashgan funksiyalar ma'nosida 0ga teng. Dyu Bua-Reymonning lemmasiga binoan, deyarli barcha yerda $x_1f(x) = 0$ va deyarli barcha yerda $f(x) = 0$ bo'ladi. Lekin bu (1.12) tenglikka zid. Bu ziddiyat δ -funksiyaning singulyarligini isbot qiladi.

$\omega_\varepsilon(x)$ –“qalpoqcha” funksiya bo'lsin. $\mathcal{D}'$ da $\varepsilon \rightarrow +0$ da

$$\omega_\varepsilon(x) \rightarrow \delta(x) \quad (1.13)$$

bo'ladi. Shuni ko'rsatamiz. $\mathcal{D}'$ da yaqinlashish ta'rifiga asosan, (1.13) tenglik

$\varphi \in \mathcal{D}$ uchun

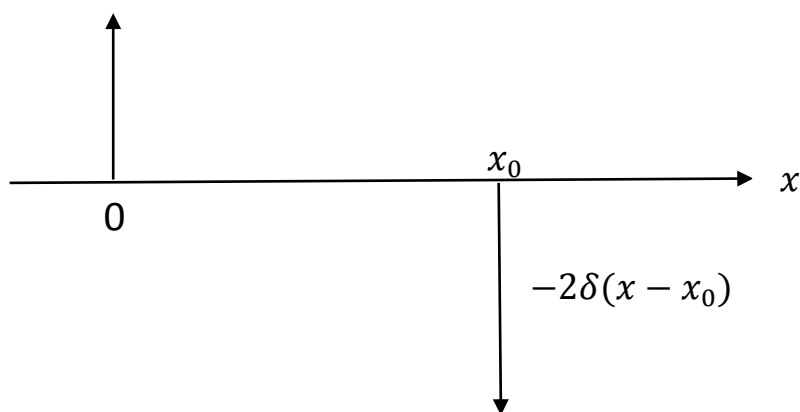
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int \omega_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \varphi(0)$$

tenglikka ekvivalentdir. $\varphi(x)$ funksiyaning uzluksizligiga ko'ra, $\forall \eta > 0$ son uchun $\exists \varepsilon_0 > 0$ topilib, $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \eta$ yengsizliklarda $|x| < \varepsilon_0$ bajariladi. Shu yerda “qalpoqcha”ning xossaligidan foydalanib, barcha $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ lar uchun

$$\left| \int \omega_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \right| \leq \int \omega_\varepsilon(x) |\varphi(x) - \varphi(0)| dx < \eta \int \omega_\varepsilon(x) dx = \eta$$

tenglikka ega bo'lamiz. $\varepsilon \rightarrow +0$ da $\omega_\varepsilon(x)$ ketma-ketlikning yaqinlashishi ko'rsatilgan grafikdan $\delta(x)$ umumlashgan funksiyaning grafigini tasvirlash mumkin.

δ –funksiyaning umumlashgan tekislikdagi funksiyasi oddiy qatlamdan iborat.



2-rasm.

($\delta(x)$ umumlashgan funksiyaning grafigi.)

S –bo'lakli silliq tekislik va $\mu(x)$ – S da berilgan uzluksiz funksiya bo'lsin. Quyidagi tartibda aniqlangan $\mu\delta_S$ umumlashgan funksiyani kiritamiz, $\varphi \in \mathcal{D}$ uchun:

$$(\mu\delta_S, \varphi) = \int_S \mu(x)\varphi(x)ds,$$

$\mu\delta_S \in \mathcal{D}'$ ligi ma'lum; $\text{supp}\mu\delta_S \subset S$ bo'lishidan $\mu\delta_S(x) = 0$, $x \notin S$ bo'ladi.

1.8-ta'rif. $\mu\delta_S$ umumlashgan funksiya S tekislikda μ zichlikli oddiy qatlam deb ataladi.

Xulosa

Bitiruv malakaviy ishning birinchi bobi umumlashgan funksiyalar haqida tushuncha deb nomlanib, unda asosiy funksiyalar va ularga misollar, umumlashgan funksiyalarning ta'riflari, umumlashgan funksiyalar turlari, Dirakning δ –funksiyasi va unga doir misollar bilan birgalikda ularga doir teoremlarning isboti bilan keltirib o'tilgan. Bob ikki qismdan iborat.

Bobning 1-qismi asosiy funksiyalar sinfi, umumlashgan funksiyalar ta'rifi deb nomlanib, unda funksiya tashuvchisi, asosiy funksiya ta'rifi, asosiy funksiyalar to'plami, asosiy funksiyalarga misollar, "Qalpoqcha" funksiyasi, umumlashgan funksiya ta'rifi kabi tushunchalarga to'xtab o'tilgan

Bobning 2-qismi regulyar va singulyar umulashgan funksiyalar deb nomlanib, mazkur qismda regulyar umulashgan funksiya va singulyar umulashgan funksiya haqida ta'rif va lemma isboti bilan keltirilgan.

2-BOB. SINGULYAR UMUMLASHGAN FUNKSIYALAR VA ULARGA MISOLLAR.

2.1. Singulyar umumlashgan funksiyalar ustida amallar.

Ushbu formula orqali aniqlanuvchi chiziqli $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ funksionalni kiritamiz:

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi\right) = Vp \int \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right) \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1). \quad (2.1)$$

Bu funksionalning $\mathcal{D}$ da uzluksizligini isbotlaymiz.

2.1-ta'rif. $\mathcal{D}$ da $k \rightarrow \infty$ uchun $\varphi_k \rightarrow 0$ bo'lsin, ya'ni $k \rightarrow \infty$ da $\varphi_k(x) = 0$, $|x| > R$ va $D^\alpha \varphi_k(x) \Rightarrow 0$ bo'lsin. U holda $k \rightarrow \infty$ da

$$\begin{aligned} \left|\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi_k\right)\right| &= \left|Vp \int \frac{\varphi_k(x)}{x} dx\right| = \left|Vp \int_{-R}^R \frac{\varphi_k(0) + x\varphi'_k(x')}{x} dx\right| \leq \\ &\leq \int_{-R}^R |\varphi'_k(x_k)| dx \leq 2R \max_{|x| \leq R} |\varphi'_k(x)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

bo'ladi.

Shu tariqa, $\mathcal{P}\frac{1}{x} \in \mathcal{D}'$ bo'ladi. $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ umumlashgan funksiya $\frac{1}{x}$ funksiya bilan $x \neq 0$ da ustma-ust tushadi. U yakuniy qism yoki $\frac{1}{x}$ dan olingan integralning bosh qiymati deb ataladi. Endi ushbu tenglikni o'rnatamiz:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int \frac{1}{x - i\varepsilon} \varphi(x) dx = -i\pi\varphi(0) + Vp \int \frac{\varphi(x)}{x} dx,$$

$$\frac{1}{x+i0} = -i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}. \quad (2.2)$$

O'z-o'zidan,

$$\frac{1}{x-i0} = i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x} \quad (2.2')$$

bo'ladi.

(2.2) va (2.2') formulalar Soxotskov formulalari deb nomlanadi. Ular kvant fizikada qo'llaniladi. Quyidagi teorema δ –funksiya ishtirokidagi munosabatga misol bo'la oladi:

2.1-teorema. (Soxotskov formulalari) ushbu munosabatlar o'rinlidir:

$$\frac{1}{x \pm i0} = \mp i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

Isbot. $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ asosiy funksiyani fiksirlaymiz. U $|x| > R$ bo'ladigan barcha $x \in \mathbb{R}$ larda nolga aylansin. U holda umumlashgan funksiya ta'rifiga asosan, $\frac{1}{x-i0}$ uchun

$$\left(\frac{1}{x-i0}, \varphi\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} \int_{-R}^{+R} \frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon} dx;$$

suratga $\varphi(0)$ ni qo'shib ayiramiz, keyin maxrajdagi ifodani $\frac{1}{x-i\varepsilon}$ ga ko'paytirib irratsionallikdan qutqaramiz:

$$\begin{aligned} \varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} \int_{-R}^{+R} \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} \int_{-R}^{+R} \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx = \\ = \varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} \int_{-R}^{+R} \frac{x}{x^2+\varepsilon^2} dx - \varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} \int_{-R}^{+R} \frac{i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} dx + \\ + \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} \int_{-R}^{+R} \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx; \end{aligned}$$

toq funksiyadan olingan integral nolga teng:

$$\varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} \int_{-R}^{+R} \frac{x}{x^2+\varepsilon^2} dx = 0.$$

Quyidagi integral Nyuton-Leybniss formulasiga asosan hisoblanadi:

$$\begin{aligned}\varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} \int_{-R}^{+R} \frac{-i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} dx &= \varphi(0) \left(-2i \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} \operatorname{arctg} \frac{R}{\varepsilon} \right) = \\ &= -2i \left(-\frac{\pi}{2} \right) \varphi(0) = i\pi\varphi(0).\end{aligned}$$

Nihoyat, oxirgi integralning limitini hisoblaymiz:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow -0} \int_{-R}^{+R} \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx &= \int_{-R}^{+R} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx = \\ &= Vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx = (\mathcal{P} \frac{1}{x}, \varphi)\end{aligned}$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ dagi integral belgisi ostidagi limit mavjud, $|x| \leq |x + i\varepsilon|$ tengsizlikka ko'ra, barcha haqiqiy x va ε lar uchun

$\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x + i\varepsilon} \right| \leq \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \right|$ tengsizlik ham o'rinli bo'ladi. Oxirgi funksiyani aniqlab va $\varphi'(0)$ ga tenglashtirib ushbu uzluksiz, bu degani chekli $[-R; R]$ oraliqda integrallanuvchi funksiyaga ega bo'lamiz. Hisoblashni bajargan holda dastlabki tengligimizni davom ettirishimiz mumkin:

$$\left(\frac{1}{x - i0}, \varphi \right) = i\pi\varphi(0) + \left(\mathcal{P} \frac{1}{x}, \varphi \right) = (i\pi\delta(x) + \mathcal{P} \frac{1}{x}, \varphi).$$

So'nggi tenglik shuni ko'rsatadiki, $\frac{1}{x - i0}$ va $i\pi\delta(x) + \mathcal{P} \frac{1}{x}$ umumlashgan funksiyalar, ya'ni chiziqli funkcionallar istalgan asosiy funksiyaga bir xil ta'sir qiladi. Demak bu umumlashgan funksiyalar o'zaro teng.

$f(x) - \mathbb{R}^n$ da lokal integrallanuvchi funksiya va $x = Ay + b$, $\det A \neq 0$ — $\mathbb{R}^n$ fazosining o'z-o'ziga asosiy bo'lmagan chiziqli akslantirishi bo'lsin. U holda istalgan $\varphi \in \mathcal{D}$ uchun ushbu tenglikka ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned}
(f(Ay + b), \varphi) &= \int f(Ay + b) \varphi(y) dy = \\
&= \frac{1}{|\det A|} \int f(x) \varphi[A^{-1}(x - b)] dx = \\
&= \frac{1}{|\det A|} (f, \varphi[A^{-1}(x - b)]).
\end{aligned}$$

Ushbu tenglikni istalgan $f(x) \in \mathcal{D}'$ uchun $f(Ay + b)$ umumlashgan funksiyaning ta'rifi sifatida qabul qilamiz:

$$(f(Ay + b), \varphi) = \left(f, \frac{\varphi[A^{-1}(x - b)]}{|\det A|} \right), \varphi \in \mathcal{D}. \quad (2.3)$$

2.2-ta'rif. Ushbu $\varphi(x) \rightarrow \varphi[A^{-1}(x - b)]$ amal chiziqli va $\mathcal{D}$ dan $\mathcal{D}$ ga uzluksiz bo'lsa, u holda (2.3) tenglikning o'ng qismi orqali aniqlanuvchi $f(Ay + b)$ funksional $\mathcal{D}'$ ga tegishli bo'ladi. Xususiyl holda, agar A — aylanish, ya'ni, $A' = A^{-1}$ va $b = 0$ bo'lsa, u holda

$$(f(Ay), \varphi) = (f, \varphi(A'x))$$

bo'ladi.

2.3-ta'rif. Agar A — o'xshashlik bo'lsa, $c > 0$ da $A = cI$, $c \neq 0$ va $b = 0$ bo'lsa, u holda

$$(f(cy), \varphi) = \frac{1}{|c^n|} \left(f, \varphi \left(\frac{x}{c} \right) \right)$$

bo'ladi.

2.4-ta'rif. Agar $A = I$ bo'lsa, u holda

$$(f(y + b), \varphi) = (f, \varphi(x - b))$$

bo'ladi.

2.5-ta'rif. $f(x + b)$ umumlashgan funksiya $f(x)$ umumlashgan funksiyaning b vektorga qadar siljishi deb ataladi.

Masalan, $\delta(x - x_0) - \delta(x)$ ning x_0 vektor qadar siljishi bo'lib, uni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$(\delta(x - x_0), \varphi) = (\delta, \varphi(x + x_0)) = \varphi(x_0).$$

Bu ta'rif sferik-simmetrik, markaziy-simmetrik, bir jinsli, davriy, Lorens-invariant va boshqa umumlashgan funksiyalarni aniqlash imkonini beradi. Misol uchun f umumlashgan funksiya Lorens gruppasiga nisbatan invariant deyiladi, agar Lorens gruppasining barcha A akslantirishlari uchun $f(Ax) = f(x)$ bo'lsa. Bu yerda $A - \mathbb{R}^n$ da $(x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2)$ kvadratik formani saqlovchi chiziqli akslantirish. (2.3) ta'rifdan ko'rinadiki, o'zgaruvchilarning chiziqli o'rin almashinuvi amali chiziqli va $\mathcal{D}'$ dan $\mathcal{D}$ ga uzluksiz:

$$(\lambda f + \mu g)(Ay + b) = \lambda f(Ay + b) + \mu g(Ay + b)$$

Bu yerda $f, g \in \mathcal{D}'$. Agar $\mathcal{D}'$ da $k \rightarrow \infty$ da $f_k \rightarrow 0$ bo'lsa, u holda $\mathcal{D}'$ da $k \rightarrow \infty$ uchun $f_k(Ay + b) \rightarrow 0$ bo'ladi.

$f(x) - \mathbb{R}^n$ da lokal integrallanuvchi funksiya va $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ bo'lsin. U holda $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ uchun

$$(af, \varphi) = \int a(x)f(x)\varphi(x)dx = (f, a\varphi)$$

tenglik o'rinlidir. Ushbu tenglikni $f \in \mathcal{D}'$ umumlashgan funksiyaning cheksiz differensiallanuvchi a funksiya bilan ko'paytmasi af ning ta'rif sifatida qabul qilamiz:

$$(af, \varphi) = (f, a\varphi), (\varphi \in \mathcal{D}) \quad (2.4)$$

$a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ funksiya ko'paytirish amali chiziqli va $\mathcal{D}$ dan $\mathcal{D}$ ga uzluksiz ekanligidan, (2.4) tenglikning o'ng qismi orqali aniqlanadigan af funksional $\mathcal{D}'$ ga

tegishli bo'ladi. (2.4) ta'rifga ko'ra, $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ funksiyaga ko'paytirish amali chiziqli va $\mathcal{D}'$ dan $\mathcal{D}'$ ga uzluksiz bo'ladi:

$$a(\lambda f + \mu g) = \lambda(af) + \mu(ag), f, g \in \mathcal{D}'.$$

2.6-ta'rif. Agar $\mathcal{D}'$ da $k \rightarrow \infty$ uchun $f_k \rightarrow 0$ bo'lsa, u holda $\mathcal{D}'$ da $k \rightarrow \infty$ uchun $af_k \rightarrow 0$ bo'ladi.

2.7-ta'rif. Agar $f \in \mathcal{D}'$ bo'lsa, u holda quyidagi tenglik o'rinlidir:

$$f = \eta f. \quad (2.5)$$

Bu yerda $\eta - f$ tashuvchining atrofida 1 ga teng bo'lgan, $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ sinfga qarashli istalgan funksiya.

Haqiqatdan ham, umumiy nuqtaga ega bo'lmagan f tashuvchining $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ va $(1 - k)\varphi$ lar uchun

$$(f - \eta f, \varphi) = (f, (1 - k)\varphi) = 0$$

o'rinli bo'ladi.

Mashqlar.

a) Quyidagi funksiyalar $\varepsilon \rightarrow +0$ da $\delta(x)$ ga intilishini isbotlang:

$$1. \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}};$$

$$2. \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}.$$

b) $t \rightarrow +\infty$ dagi limitik munosabatlarni isbotlang:

$$1. \frac{e^{ixt}}{x - i0} \rightarrow 2\pi i \delta(x);$$

$$2. \frac{e^{-ixt}}{x - i0} \rightarrow 0;$$

$$3. \frac{e^{ixt}}{x + i0} \rightarrow 0;$$

$$4. \frac{e^{-ixt}}{x + i0} \rightarrow -2\pi i \delta(x).$$

Misollarni yechishdan avval ushbu ta'rif va teoremlarni qaraymiz:

2.8-ta’rif. $\mathbb{R}^n$ fazosida aniqlangan haqiqiy xonali funksiyalarning $h_1, h_2, \dots, h_k, \dots$ ketma-ketligi δ – obraz bo’ladi, agar

(I) har bir $k \in \mathbb{N}$ uchun $h_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya $\mathbb{R}^n$ da integrallanuvchi;

(II) istalgan $x \in \mathbb{R}^n$ va $k \in \mathbb{N}$ lar uchun $h_k(x) \geq 0$ tengsizlik o’rinli bo’lsa;

(III) har bir $k \in \mathbb{N}$ uchun $\exists \varepsilon_k > 0$ son mavjud bo’lib, $|x| > \varepsilon_k$ ni qanoatlantiruvchi barcha $x \in \mathbb{R}^n$ lar uchun $h_k(x) = 0$ o’rinli bo’ladi, bu yerda $k \rightarrow \infty$ da $\varepsilon_k \rightarrow 0$;

(IV) barcha $k \in \mathbb{N}$ lar uchun

$$\int_{\mathbb{R}^n} h_k(x) dx = 1$$

o’rinli bo’ladi.

2.2-teorema. $h_1, h_2, \dots, h_k, \dots$ funksiyalarning δ –obraz ketma-ketligi bo’lsin. U holda $\lim_{k \rightarrow \infty} h_k(x) = \delta(x)$ bo’lib, bu yerda limit umumlashgan funksiyalar nazariyasi ma’nosida tushuniladi.

Isbot. φ – ixtiyoriy asosiy funksiya bo’lsin. Umumlashgan funksiyalar ketma-ketligi limiti ta’rifidan va h_k asosiy funksiya integral “yordamida” ta’sir qiluvchi regulyar umumlashgan funksiya ekanidan foydalanib, quyidagi tenglikni yozishimiz mumkin:

$$\begin{aligned} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} h_k, \varphi \right) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (h_k, \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_k(x) \varphi(x) dx = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{|x| < \varepsilon_k} h_k(x) \varphi(x) dx. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Endi bizga matematik analiz kursidan ma’lum bo’lgan quyidagi teorema kerak bo’ladi:

2.3-teorema. Agar $G - \mathbb{R}^n$ dagi bog'langan ochiq to'plam, $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya uzluksiz, $g: G \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya nomanfiy bo'lsa, u holda $\exists x_0 \in G$ nuqta topilib,

$$\int_G f(x)g(x)dx = f(x_0) \int_G g(x)dx$$

bo'ladi.

Bu teorema va δ –obraz ketma- ketlikning (III), (IV) xossalaridan foydalanib, (2.6) formuladagi oxirgi ifodani o'zgartiramiz:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x_k) \int_{|x| < \varepsilon_k} h_k(x)dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x_k) \int_{\mathbb{R}^n} h_k(x)dx = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x_k) = \varphi(0) = (\delta, \varphi), \end{aligned}$$

bu yerda $x_k - |x| < \varepsilon_k$ sharning biror nuqtasi.

Shu tariqa $\lim_{k \rightarrow \infty} h_k$ va δ umumlashgan funksiyalar istalgan φ funksiya bir xilda ta'sir qiladi. O'z-o'zidan bu umumlashgan funksiyalar ustma-ust tushadi. Teorema isbotlandi.

Yechish:

a) 1. Isbotlang. $\varepsilon \rightarrow +0$ da $\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}} \rightarrow \delta(x)$.

$$\begin{aligned} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} h_k, \varphi \right) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_k(x)\varphi(x)dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x_k) \int_{\mathbb{R}^n} h_k(x)dx = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x_k) = \varphi(0) = (\delta, \varphi) \end{aligned}$$

formuladan foydalanib, hisoblaymiz. Bu yerda

$$h_k(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}$$

ga teng.

$$\begin{aligned} (h_k(x), \varphi) &= \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}, \varphi \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}, \varphi \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}} \cdot \varphi(x) dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varphi(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \cdot e^{-\frac{x^2}{(2\sqrt{\varepsilon})^2}} dx = \end{aligned}$$

bu yerda

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$$

ekanligidan foydalanamiz:

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varphi(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \cdot 2\sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\pi} = \varphi(0) = (\delta(x), \varphi).$$

2. Isbotlang. $\varepsilon \rightarrow +0$ da $\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \rightarrow \delta(x)$.

$$\left(\lim_{k \rightarrow \infty} h_k, \varphi \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_k(x) \varphi(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x_k) \int_{\mathbb{R}^n} h_k(x) dx =$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x_k) = \varphi(0) = (\delta, \varphi)$$

formuladan foydalanib, hisoblamiz. Bu yerda

$$h_k(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$$

ga teng.

$$\begin{aligned}
(h_k(x), \varphi) &= \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}, \varphi \right) = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}, \varphi \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \cdot \varphi(x) dx = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varphi(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varphi(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{\pi} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2 + 1} dx = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varphi(x) \cdot \frac{\varepsilon}{\pi} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot 2 \operatorname{arctg} \frac{R}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varphi(x) \cdot \frac{\varepsilon}{\pi} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\pi}{2} = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varphi(x) = \varphi(0) = (\delta(x), \varphi).
\end{aligned}$$

b) 1. $\frac{e^{ixt}}{x-i0} \rightarrow 2\pi i \delta(x)$

$f_\varepsilon(x) = \frac{e^{ixt}}{x-i0}$ funksiyalar ketma-ketligining kuchsiz limitini hisoblaymiz, ya'ni istalgan uzluksiz φ funksiya uchun $\varepsilon \rightarrow 0$ da ushbu tenglik o'rinli ekanligini ko'rsatamiz:

$$(f_\varepsilon(x), \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx$$

Bu yerda

$$\frac{e^{ixt}}{x-i0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} \frac{e^{ixt}}{x+i0}$$

ga teng. Eyler formulasiga asosan,

$$e^{ixt} = \cos xt + i \sin xt.$$

Shuning uchun yuqoridagi tenglikni quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow -0} \frac{e^{ixt}}{x+i0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} \left(\frac{\cos xt}{x+i\varepsilon} + i \cdot \frac{\sin xt}{x+i\varepsilon} \right).$$

Mos tengliklarni o'z o'rniga keltirib qo'yamiz va I_1, I_2 belgilashlarni kiritamiz:

$$\begin{aligned}(f_\varepsilon(x), \varphi(x)) &= \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\cos xt}{x + i\varepsilon} + i \cdot \frac{\sin xt}{x + i\varepsilon} \right), \varphi(x) \right] = \\ &= \left(\frac{\cos xt}{x - i0}, \varphi(x) \right) + i \left(\frac{\sin xt}{x - i0}, \varphi(x) \right) = I_1 + I_2.\end{aligned}$$

2.1 § da isbotlangan Soxotskov formulasidan, ya'ni

$$\frac{1}{x - i0} = i\pi\delta(x) + \mathcal{P} \frac{1}{x}$$

tenglikdan foydalanamiz:

$$\begin{aligned}I_1 &= \left(\frac{\cos xt}{x - i0}, \varphi(x) \right) = \left| \frac{1}{x - i0} = i\pi\delta(x) + \mathcal{P} \frac{1}{x} \right| = \\ &= \left(\cos xt \left(i\pi\delta(x) + \mathcal{P} \frac{1}{x} \right), \varphi(x) \right) = \left(i\pi\delta(x) + \cos xt \cdot \mathcal{P} \frac{1}{x}, \varphi(x) \right) = \\ &= (i\pi\delta(x), \varphi(x)) + \left(\cos xt \cdot \mathcal{P} \frac{1}{x}, \varphi(x) \right) = \left(\cos xt \cdot \mathcal{P} \frac{1}{x}, \varphi(x) \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\cos xt}{x} \varphi(x) dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\cos xt}{x} \varphi(x) dx \right] =\end{aligned}$$

Lagranjning chekli orttirmalari formulasiga asosan,

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(x')$$

ga teng,

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} \left[\left(\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^R \right) \frac{\cos xt}{x} (\varphi(0) + x\varphi'(x')) dx \right] =$$

$$= \int_{-R}^R \cos xt \cdot \varphi'(x') dx =$$

integralni hisoblash uchun uni bo'laklaymiz:

$$\begin{aligned} u &= \varphi'(x') & dv &= \cos xt \, dx \\ du &= \varphi''(x') & v &= \frac{1}{t} \sin xt; \end{aligned}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\varphi'(x') \frac{\sin xt}{t} \Big|_{-R}^R - \int_{-R}^R |\varphi''(x')| \frac{\sin xt}{t} dx \right] \leq$$

Nyuton-Leybniss formulasini qo'llaymiz va ifodani baholaymiz:

$$\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \left[2\varphi'(x) \frac{\sin Rt}{t} + |\varphi'(-R)| \frac{\sin Rt}{t} \right] = i\pi(\delta(x), \varphi(x));$$

$$I_1 = i\pi(\delta(x), \varphi(x)).$$

Endi I_2 ni hisoblaymiz, bu yerda ham Soxotskov formulalaridan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} I_2 &= \left(i \frac{\sin xt}{x - i0}, \varphi(x) \right) = \left(i \cdot \sin xt \cdot \left(i\pi\delta(x) + \mathcal{P} \frac{1}{x} \right), \varphi(x) \right) = \\ &= \left(-\pi \sin xt \cdot \delta(x) + i \sin xt \cdot \mathcal{P} \frac{1}{x}, \varphi(x) \right) = \\ &= i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\sin xt}{x} \varphi(x) dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin xt}{x} \varphi(x) dx \right] = \end{aligned}$$

Lagranjning chekli orttirmalari formulasiga ko'ra,

$$\begin{aligned} &= |\varphi(x) = \varphi(0) + x \cdot \varphi'(x')| = \\ &= i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\sin xt}{x} \varphi(0) dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin xt}{x} \varphi(0) dx \right) + \end{aligned}$$

$$+i\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \sin xt \cdot \varphi'(x') dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \sin xt \cdot \varphi'(x') dx \right) =$$

yig'indining 2-qo'shiluvchisining limiti 0 ga teng, chunki integral ostidagi ifoda toq funksiyadir.

$$= i\varphi(0)\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin xt}{x} dx =$$

integral ostidagi ifoda π ga teng:

$$= i\pi\varphi(0) = i\pi(\delta(x), \varphi(x));$$

$$I_2 = i\pi(\delta(x), \varphi(x)).$$

Natijalarni umumlashtiramiz:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{ixt}}{x - i0} = I_1 + I_2 = 2i\pi\delta(x).$$

2.

$$\frac{e^{-ixt}}{x - i0} \rightarrow 0$$

.

$f_{\varepsilon}(x) = \frac{e^{-ixt}}{x - i0}$ funksiyalar ketma-ketligining kuchsiz limitini hisoblaymiz, ya'ni istalgan uzluksiz φ funksiya uchun $\varepsilon \rightarrow 0$ da ushbu tenglik o'rinli ekanligini ko'rsatamiz:

$$(f_{\varepsilon}(x), \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f_{\varepsilon}(x) \varphi(x) dx.$$

$\frac{e^{-ixt}}{x - i0}$ ni limit orqali ifodalaymiz:

$$\frac{e^{-ixt}}{x - i0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} \frac{e^{-ixt}}{x + i\varepsilon}$$

e^{-ixt} funksiyani Eyler formulasiga asosan yoyamiz:

$$|e^{-ixt} = \cos xt - i \sin xt|$$

Limitik ifodani davom ettiramiz va I_1, I_2 belgilashlarni kiritamiz:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} \left(\frac{\cos xt}{x + i\varepsilon} - i \frac{\sin xt}{x + i\varepsilon} \right); \\ (f_\varepsilon(x), \varphi(x)) = \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow -0} \left(\frac{\cos xt}{x + i\varepsilon} - i \frac{\sin xt}{x + i\varepsilon} \right), \varphi(x) \right) = \\ = \left(\frac{\cos xt}{x - i0}, \varphi(x) \right) - i \left(\frac{\sin xt}{x - i0}, \varphi(x) \right) = I_1 + I_2; \end{aligned}$$

Hisoblashlarni Soxotskov formulalaridan foydalanib, davom ettiramiz:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x - i0} = i\pi\delta(x) + \mathcal{P} \frac{1}{x}; \\ I_1 = \left(\frac{\cos xt}{x - i0}, \varphi(x) \right) = \left(\cos xt \left(i\pi\delta(x) + \mathcal{P} \frac{1}{x} \right), \varphi(x) \right) = \\ = \left(\left(i\pi\delta(x) + \cos xt \cdot \mathcal{P} \frac{1}{x} \right), \varphi(x) \right) = \\ = (i\pi\delta(x), \varphi(x)) + \left(\cos xt \cdot \mathcal{P} \frac{1}{x}, \varphi(x) \right) = I_{11} + I_{12}; \end{aligned}$$

$I_{11} = ((i\pi\delta(x), \varphi(x)))$ ga teng.

$I_{12} = \left(\cos xt \cdot \mathcal{P} \frac{1}{x}, \varphi(x) \right)$ ni limitik munosabatlar orqali yechamiz:

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\cos xt}{x} \varphi(x) dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\cos xt}{x} \varphi(x) dx \right] =$$

bu yerda $\varphi(x)$ funksiyani Lagranjning chekli orttirmalari formulasiga asosan, ushbu yig'indi ko'rinishida ifodalaymiz:

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x \cdot \varphi'(x');$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\cos xt}{x} [\varphi(0) + x \cdot \varphi'(x')] dx + \right. \\
& \quad \left. + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\cos xt}{x} [\varphi(0) + x \cdot \varphi'(x')] dx \right) = \\
& = \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} \left[\varphi(0) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos xt}{x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \cos xt \cdot \varphi'(x') dx \right] =
\end{aligned}$$

1-integral ostida toq funksiya bo'lgani uchun uning qiymati 0 ga teng. 2-integralni esa bo'laklab integrallaymiz:

$$\begin{aligned}
& = \left| \begin{array}{ll} f = \varphi'(x') & dv = \cos xt \\ df = \varphi''(x') & v = \frac{1}{t} \sin xt \end{array} \right| = \\
& = \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} \left[0 + \varphi'(x') \cdot \frac{\sin xt}{t} \Big|_{-R}^R - \int_{-R}^R \varphi''(x') \cdot \frac{\sin xt}{t} dt \right] \leq \\
& \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} \left[2\varphi'(R) \frac{\sin Rt}{t} + 2\varphi'(-R) \cdot \frac{\sin Rt}{t} \right] = 0. \\
& I_{12} = 0.
\end{aligned}$$

Endi I_2 ni hisoblaymiz, bu yerda ham Soxotskov formulasidan foydalanamiz:

$$\begin{aligned}
I_2 & = \left(-i \frac{\sin xt}{x - i0}, \varphi(x) \right) = \left(-i \sin xt \left(i\pi \delta(x) + \mathcal{P} \frac{1}{x} \right), \varphi(x) \right) = \\
& = -i \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\sin xt}{x} \varphi(x) dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin xt}{x} \varphi(x) dx \right] =
\end{aligned}$$

Lagranjning chekli orttirmalari formulasiga ko'ra, ya'ni

$$|\varphi(x) = \varphi(0) + x \cdot \varphi'(x')|$$

dan foydalanamiz,

$$\begin{aligned}
 &= -i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\sin xt}{x} [\varphi(0) + x \cdot \varphi'(x')] dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin xt}{x} [\varphi(0) + x \cdot \varphi'(x')] dx \right] = \\
 &= -i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\varphi(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin xt}{x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin xt}{x} \cdot x \cdot \varphi'(x') dx \right] =
 \end{aligned}$$

yig'indidagi 2-integral ostidagi funksiya toq bo'lgani uchun uning qiymati 0 ga teng:

$$= -i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin xt}{x} dt = -i\pi \varphi(0) = (-i\pi \delta(x), \varphi(x));$$

$$I_2 = (-i\pi \delta(x), \varphi(x));$$

Natijalarni umumlashtiramiz:

$$I_1 + I_2 = I_{11} + I_2 = (i\pi \delta(x), \varphi(x)) + (-i\pi \delta(x), \varphi(x)) = 0;$$

demak:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-ixt}}{x - i0} = 0.$$

3.

$$f_{\varepsilon}(x) = \frac{e^{ixt}}{x + i0};$$

$$f_{\varepsilon}(x) = \frac{e^{-ixt}}{x - i0} \text{ funksiyalar ketma-ketligining kuchsiz limitini hisoblaymiz,}$$

ya'ni istalgan uzluksiz φ funksiya uchun $\varepsilon \rightarrow 0$ da

$$(f_{\varepsilon}(x), \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f_{\varepsilon}(x) \varphi(x) dx$$

ga teng. $\frac{e^{ixt}}{x+i0}$ ni limit orqali ifodalaymiz:

$$\frac{e^{ixt}}{x+i0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{e^{ixt}}{x-i\varepsilon}$$

e^{ixt} funksiyani Eyler formulasiga asosan yoyamiz:

$$|e^{ixt} = \cos xt + i \sin xt|$$

limitik ifodani davom ettiramiz va I_1, I_2 belgilashlarni kiritamiz:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\frac{\cos xt}{x-i\varepsilon} + i \frac{\sin xt}{x-i\varepsilon} \right); \\ (f_\varepsilon(x), \varphi(x)) = \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\frac{\cos xt}{x-i\varepsilon} + i \frac{\sin xt}{x-i\varepsilon} \right), \varphi(x) \right) = \\ = \left(\frac{\cos xt}{x+i0}, \varphi(x) \right) + i \left(\frac{\sin xt}{x+i0}, \varphi(x) \right) = I_1 + I_2; \end{aligned}$$

Hisoblashlarni Soxotskov formulalaridan foydalanib, davom ettiramiz:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+i0} = -i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}; \\ I_1 = \left(\frac{\cos xt}{x+i0}, \varphi(x) \right) = \left(\cos xt \left(-i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x} \right), \varphi(x) \right) = \\ = \left(\left(-i\pi\delta(x) + \cos xt \cdot \mathcal{P}\frac{1}{x} \right), \varphi(x) \right) = \\ = (-i\pi\delta(x), \varphi(x)) + \left(\cos xt \cdot \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x) \right) = I_{11} + I_{12}; \end{aligned}$$

$I_{11} = (-i\pi\delta(x), \varphi(x))$ ga teng.

$I_{12} = \left(\cos xt \cdot \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x) \right)$ ni limitik munosabatlar orqali yechamiz:

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\cos xt}{x} \varphi(x) dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\cos xt}{x} \varphi(x) dx \right] =$$

bu yerda $\varphi(x)$ funksiyani Lagranjning chekli orttirmalari formulasiga asosan, ushbu yig'indi ko'rinishida ifodalaymiz:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(0) + x \cdot \varphi'(x'); \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} & \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\cos xt}{x} [\varphi(0) + x \cdot \varphi'(x')] dx + \right. \\ & \left. + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\cos xt}{x} [\varphi(0) + x \cdot \varphi'(x')] dx \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\varphi(0) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos xt}{x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \cos xt \cdot \varphi'(x') dx \right] =\end{aligned}$$

1-integral ostida toq funksiya bo'lgani uchun uning qiymati 0 ga teng. 2-integralni esa bo'laklab integrallaymiz:

$$\begin{aligned}&= \left| \begin{array}{ll} f = \varphi'(x') & dv = \cos xt \\ df = \varphi''(x') & v = \frac{1}{t} \sin xt \end{array} \right| = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[0 + \varphi'(x') \cdot \frac{\sin xt}{t} \Big|_{-R}^R - \int_{-R}^R \varphi''(x') \cdot \frac{\sin xt}{t} dt \right] \leq \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[2\varphi'(R) \frac{\sin Rt}{t} + 2\varphi'(-R) \cdot \frac{\sin Rt}{t} \right] = 0. \\ I_{12} &= 0.\end{aligned}$$

Endi I_2 ni hisoblaymiz, bu yerda ham Soxotskov formulasidan foydalanamiz:

$$I_2 = \left(i \frac{\sin xt}{x + i0}, \varphi(x) \right) = \left(i \sin xt \left(-i\pi\delta(x) + \mathcal{P} \frac{1}{x} \right), \varphi(x) \right) =$$

$$= -i \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\sin xt}{x} \varphi(x) dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin xt}{x} \varphi(x) dx \right] =$$

Lagranjning chekli orttirmalari formulasiga ko'ra, ya'ni

$$|\varphi(x) = \varphi(0) + x \cdot \varphi'(x')|$$

dan foydalanamiz,

$$\begin{aligned} &= -i \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\sin xt}{x} [\varphi(0) + x \cdot \varphi'(x')] dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin xt}{x} [\varphi(0) + x \cdot \varphi'(x')] dx \right] = \\ &= -i \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} \left[\varphi(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin xt}{x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin xt}{x} \cdot x \cdot \varphi'(x') dx \right] = \end{aligned}$$

yig'indidagi 2-integral ostidagi funksiya toq bo'lgani uchun uning qiymati 0 ga teng:

$$= i \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} \varphi(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin xt}{x} dt = i\pi \varphi(0) = (i\pi \delta(x), \varphi(x));$$

$$I_2 = (i\pi \delta(x), \varphi(x));$$

Natijalarni umumlashtiramiz:

$$I_1 + I_2 = I_{11} + I_2 = (-i\pi \delta(x), \varphi(x)) + (i\pi \delta(x), \varphi(x)) = 0;$$

demak:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{ixt}}{x + i0} = 0.$$

4.

$$\frac{e^{-ixt}}{x + i0}$$

$f_\varepsilon(x) = \frac{e^{-ixt}}{x+i0}$ funksiyalar ketma-ketligining kuchsiz limitini hisoblaymiz, ya'ni istalgan uzluksiz φ funksiya uchun $\varepsilon \rightarrow 0$ da

$$(f_\varepsilon(x), \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx$$

ga teng. $\frac{e^{-ixt}}{x+i0}$ ni limit orqali ifodalaymiz:

$$\frac{e^{-ixt}}{x+i0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{e^{-ixt}}{x-i\varepsilon}$$

e^{-ixt} funksiyaning Eyler formulasiga asosan yoyamiz:

$$|e^{-ixt} = \cos xt - i \sin xt|$$

limitik ifodani davom ettiramiz va I_1, I_2 belgilashlarni kiritamiz:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\frac{\cos xt}{x-i\varepsilon} - i \frac{\sin xt}{x-i\varepsilon} \right);$$

$$\begin{aligned} (f_\varepsilon(x), \varphi(x)) &= \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\frac{\cos xt}{x-i\varepsilon} - i \frac{\sin xt}{x-i\varepsilon} \right), \varphi(x) \right) = \\ &= \left(\frac{\cos xt}{x+i0}, \varphi(x) \right) - i \left(\frac{\sin xt}{x+i0}, \varphi(x) \right) = I_1 + I_2; \end{aligned}$$

Hisoblashlarni Soxotskov formulalaridan foydalanib, davom ettiramiz:

$$\frac{1}{x+i0} = -i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x};$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \left(\frac{\cos xt}{x+i0}, \varphi(x) \right) = \left(\cos xt \left(-i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x} \right), \varphi(x) \right) = \\ &= \left(\left(-i\pi\delta(x) + \cos xt \cdot \mathcal{P}\frac{1}{x} \right), \varphi(x) \right) = \\ &= \left(-i\pi\delta(x), \varphi(x) \right) + \left(\cos xt \cdot \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x) \right) = I_{11} + I_{12}; \end{aligned}$$

$I_{11} = (-i\pi\delta(x), \varphi(x))$ ga teng.

$I_{12} = \left(\cos xt \cdot \mathcal{P} \frac{1}{x}, \varphi(x) \right)$ ni limitik munosabatlar orqali yechamiz:

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\cos xt}{x} \varphi(x) dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\cos xt}{x} \varphi(x) dx \right] =$$

bu yerda $\varphi(x)$ funksiyani Lagranjning chekli orttirmalari formulasiga asosan, ushbu yig'indi ko'rinishida ifodalaymiz:

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x \cdot \varphi'(x');$$

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\cos xt}{x} [\varphi(0) + x \cdot \varphi'(x')] dx + \right. \\ & \left. + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\cos xt}{x} [\varphi(0) + x \cdot \varphi'(x')] dx \right) = \end{aligned}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\varphi(0) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos xt}{x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \cos xt \cdot \varphi'(x') dx \right] =$$

1-integral ostida toq funksiya bo'lgani uchun uning qiymati 0 ga teng. 2-integralni esa bo'laklab integrallaymiz:

$$\begin{aligned} & = \left| \begin{array}{ll} f = \varphi'(x') & dv = \cos xt \\ df = \varphi''(x') & v = \frac{1}{t} \sin xt \end{array} \right| = \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[0 + \varphi'(x') \cdot \frac{\sin xt}{t} \Big|_{-R}^R - \int_{-R}^R \varphi''(x') \cdot \frac{\sin xt}{t} dt \right] \leq \\ & \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[2\varphi'(R) \frac{\sin Rt}{t} + 2\varphi'(-R) \cdot \frac{\sin Rt}{t} \right] = 0. \end{aligned}$$

$$I_{12} = 0.$$

Endi I_2 ni hisoblaymiz, bu yerda ham Soxotskov formulasidan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} I_2 &= \left(-i \frac{\sin xt}{x + i0}, \varphi(x) \right) = \left(-i \sin xt \left(-i\pi\delta(x) + \mathcal{P} \frac{1}{x} \right), \varphi(x) \right) = \\ &= -i \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \left(\frac{\sin xt}{x} \varphi(x) \right) dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin xt}{x} \varphi(x) dx \right] = \end{aligned}$$

Lagranjning chekli orttirmalari formulasiga ko'ra, ya'ni

$$|\varphi(x) = \varphi(0) + x \cdot \varphi'(x')|$$

dan foydalanamiz,

$$\begin{aligned} &= -i \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \left(\frac{\sin xt}{x} \right) [\varphi(0) + x \cdot \varphi'(x')] dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin xt}{x} [\varphi(0) + x \cdot \varphi'(x')] dx \right) = \\ &= -i \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\varphi(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin xt}{x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin xt}{x} \cdot x \cdot \varphi'(x') dx \right] = \end{aligned}$$

yig'indidagi 2-integral ostidagi funksiya toq bo'lgani uchun uning qiymati 0 ga teng:

$$= -i \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varphi(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin xt}{x} dt = -i\pi\varphi(0) = (-i\pi \delta(x), \varphi(x));$$

$$I_2 = (-i\pi\delta(x), \varphi(x));$$

Natijalarni umumlashtiramiz:

$$I_1 + I_2 = I_{11} + I_2 = (-i\pi\delta(x), \varphi(x)) +$$

$$(-i\pi\delta(x), \varphi(x)) = (-2i\pi\delta(x), \varphi(x)).$$

Demak:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-ixt}}{x + i0} = (-2i\pi\delta(x), \varphi(x)).$$

2.2. Singulyar umumlashgan funksiyalar hosilalari.

2.9-ta'rif. $f \in C^k(\mathcal{O})$ bo'lsin. U holda barcha $\alpha, |\alpha| \leq k$ va $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ lar uchun ushbu bo'laklab integrallash formulasi o'rinlidir:

$$(D^\alpha f, \varphi) = \int D^\alpha f(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi).$$

Bu formulani $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ dan olingan f umumlashgan funksiyaning $D^\alpha f$ hosilasining ta'rifi sifatida qabul qilamiz:

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi), \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}) \quad (2.7)$$

$\varphi \rightarrow (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi$ amali chiziqli va $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ dan $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ ga uzluksiz bo'lganligidan (2.4) tenglikning o'ng qismi orqali aniqlangan $D^\alpha f$ funksional $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ dan olingan umumlashgan funksiya beradi. Xususan, $f = \delta$ bo'lganda (2.4) tenglik ushbu ko'rinishni oladi:

$$(D^\alpha \delta, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi(0), \varphi \in \mathcal{D}$$

Ta'rifdan ko'rinadiki, agar $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ dan olingan f umumlashgan funksiya $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$ dagi $C^k(\mathcal{O}_1)$ sinfga tegishli bo'lsa, u holda uning klassik va $D^\alpha f$ umumlashgan hosilalari, $\mathcal{O}_1$ bilan ustma-ust tushadi. Umumlashgan funksiyalarni differensiallash amalining quyidagi xossalari mavjud:

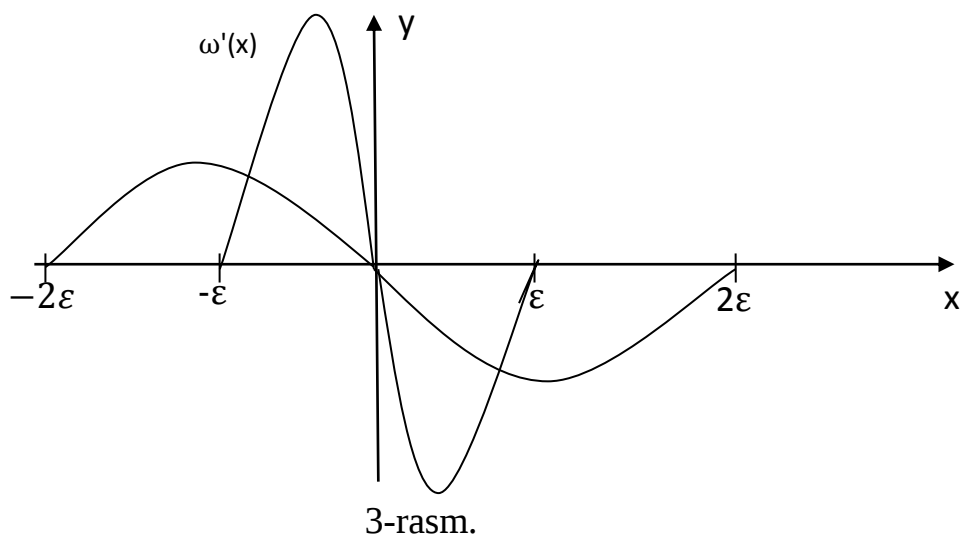
a) $f \rightarrow D^\alpha f$ differensiallash amali (chiziqli va) $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ dan $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ ga uzluksizdir.

Chiziqliligi ma'lum. uzluksizligini isbotlaymiz. $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ ga $k \rightarrow \infty$ uchun $f_k \rightarrow 0$ bo'lsin. U holda barcha $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ lar uchun $k \rightarrow \infty$ da

$$(D^\alpha f_k, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f_k, D^\alpha \varphi) \rightarrow 0 \quad (2.8)$$

o'rinli bo'ladi, bu esa $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ da $D^\alpha f_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ ekanligini bildiradi.

$\varepsilon \rightarrow +0$ dagi $\omega_\varepsilon(x)$ ketma-ketlik 3-rasmda tasvirlangan:



(umumlashgan funksiya differentsiallash amalining a) xossasi uchun $\omega_\varepsilon(x)$ ketma-ketlik grafigi)

Xususan, agar

$$\sum_{k \geq 1} u_k(x) = S(x), u_k \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathcal{O})$$

qator har bir $k \in \mathcal{O}$ kompaktda tekis yaqinlashsa, u holda uni istalgancha marta hadma-had differentsiallash mumkin va hosil bo'lgan qatorlar $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ da yaqinlashadi, ya'ni

$$\sum_{k \geq 1} D^\alpha u_k(x) = D^\alpha S(x).$$

Haqiqatdan ham, bu qatorning xususiy yig'indilarining ketma-ketligi $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ da $S(x)$ ga yaqinlashadi;

b) istalgan $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ umumlashgan funksiya cheksiz differentsiallanuvchidir.

Haqiqatdan ham, $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ ekanligidan $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ bo'ladi, o'z o'rnida

$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ bo'ladi va hokazo;

v) differentsiallash natijasi differentsiallash tartibiga bog'liq emas:

$$D^{\alpha+\beta} f = D^{\alpha}(D^{\beta} f) = D^{\beta}(D^{\alpha} f). \quad (2.9)$$

Haqiqatdan ham,

$$\begin{aligned} (D^{\alpha+\beta} f, \varphi) &= (-1)^{|\alpha|+|\beta|} (f, D^{\alpha+\beta} \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (D^{\beta} f, D^{\alpha} \varphi) = \\ &= (-1)^{|\beta|} (D^{\alpha} f, D^{\beta} \varphi) = (D^{\beta}(D^{\alpha} f), \varphi) (D^{\alpha}(D^{\beta} f), \varphi); \end{aligned}$$

g) agar $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ va $a \in C^{\infty}(\mathcal{O})$ bo'lsa, u holda af ko'paytmani differentsiallash uchun Leybnis formulasi o'rinli bo'ladi:

$$D^{\alpha}(af) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\beta}{\alpha} D^{\beta} a D^{\alpha-\beta} f \quad (2.10)$$

Haqiqatdan ham, agar $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ bo'lsa, u holda

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial(af)}{\partial x_1}, \varphi \right) &= - \left(af, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) = - \left(f, a \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) = - \left(f, \frac{\partial(a\varphi)}{\partial x_1} - \frac{\partial a}{\partial x_1} \varphi \right) = \\ &= - \left(f, \frac{\partial(a\varphi)}{\partial x_1} \right) + \left(f, \frac{\partial(a\varphi)}{\partial x_1} \varphi \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, a\varphi \right) + \left(\frac{\partial a}{\partial x_1} f, \varphi \right) = \\ &= \left(a \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial a}{\partial x_1} f, \varphi \right) \end{aligned}$$

bo'ladi.

$$d) \quad \text{supp} D^{\alpha} f \subset \text{supp} f \quad (2.11)$$

Haqiqatdan ham, agar $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ bo'lsa, u holda barcha $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_f)$ lar uchun

$$D^\alpha \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_f) \text{ va } (D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi) = 0$$

ga ega bo'lamiz.

Misollar.

1. $\theta(x)$ Xevisayd Umumlashgan funksiyasi bu—quyidagicha ta'sir qiluvchi funksionaldir:

$$(\theta, \varphi) = \int_0^\infty \varphi(x) dx.$$

U Xevisaydning lokal-integrallanuvchi funksiyasi orqali hosil bo'lgan:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$\theta(x)$ umumlashgan funksiyadan hosila olamiz:

$$\begin{aligned} (\theta', \varphi) &= -(\theta, \varphi') = -\int_0^\infty \theta \varphi'(x) dx = \\ &= -\left(\int_0^\infty \varphi'(x) dx \right) = -\varphi|_0^\infty = \varphi(0) = (\delta(x), \varphi), \end{aligned}$$

ya'ni,

$$\theta'(x) = \delta(x)$$

.

2. δ – funksiyadan hosila ushbu formula orqali aniqlanuvchi funksionalga teng:

$$(\delta', \varphi) = -(\delta, \varphi') = -\varphi'(0).$$

δ –funksiyadan olingan n-tartibli hosila ushbu fomulada ko'rsatilgan:

$$(\delta^n(x), \varphi) = (-1)^n \varphi^n(0)$$

3. Isbotlang: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

Isbot.

$$\begin{aligned}
& ((\ln|x|)'\varphi) = -(\ln|x|, \varphi') = \\
& = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln|x| \cdot \varphi' dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \ln|x| \cdot \varphi' dx \right) = \\
& = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln(-x) d\varphi + \int_{\varepsilon}^{\infty} \ln x d\varphi \right) = - \\
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\ln(-x) \varphi|_{-\infty}^{-\varepsilon} - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi \cdot \frac{1}{x} dx + \ln x \varphi|_{\varepsilon}^{\infty} \varphi \cdot \frac{1}{x} dx \right) = \\
& = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\ln \varepsilon \cdot \varphi(-\varepsilon) - \ln \varepsilon \cdot \varphi(\varepsilon) - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi}{\varepsilon} dx - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi}{\varepsilon} dx \right) = \\
& = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \varepsilon (\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} \cdot \varepsilon = \left(\frac{1}{x}, \varphi \right); \\
& \left| \varphi(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)}{\varepsilon}, \right. \\
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(0) - \varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)}{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(0) - \varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} = \\
& = \varphi'(0) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(-\varepsilon)}{(-\varepsilon)} - \frac{\varphi(0)}{(-\varepsilon)} = 2\varphi'(0) \Big| \\
& \Rightarrow 2\varphi'(0) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} = 2\varphi'(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = 0.
\end{aligned}$$

Isbotlandi.

4. Cheksiz differensiallanuvchi x funksiyaning $\frac{1}{x}$ umumlashgan funksiyaga ko'paytmasi 1 umumlashgan funksiyani beradi:

$$\frac{1}{x} * x = 1$$

Isbot.

$$\begin{aligned} \left(x * \frac{1}{x}, \varphi\right) &= \left(\frac{1}{x}, x\varphi\right) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\xi}^{\infty} \frac{x \cdot \varphi(x) + x \cdot \varphi(-x)}{x} dx = \left(\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\xi}^{\infty} \varphi(x) dx + \right. \\ &+ \left. \int_{\xi}^{\infty} \varphi(-x) dx\right) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \left(\int_{\xi}^{\infty} \varphi(x) dx - \int_{-\xi}^{-\infty} \varphi(y) dy\right) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\xi}^{\infty} \varphi(x) dx + \\ &+ \int_{-\infty}^{-\xi} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = (1, \varphi). \end{aligned}$$

Isbotlandi.

Xulosa

Bitiruv malakaviy ishning ikkinchi bobi singulyar umumlashgan funksiyalar va ularga misollar deb nomlanib, mazkur bobda Soxotskov formulalari, singulyar umumlashgan funksiyalarga misollar, singulyar umumlashgan funksiyalarning hosilalari haqida gap ketadi. Bob ikki qismdan iborat.

2-bobning 1-qismi singulyar umumlashgan funksiyalar ustida amallar deb nomlanib, unda Soxotskov teoremasining isboti va uning bir necha misollarga tadbir'i ko'rib o'tilgan.

2-bobning 2-qismida esa umumlashgan funksiyalarni differensiallash amalining xossalari, singulyar umumlashgan funksiyalar hosilaari va ularga doir misollar berib o'tilgan.

Xotima

Mazkur bitiruv malakaviy ishi “Singulyar umumlashgan funksiyalar va ularning hosilalarini hisoblash” deb nomlanib, kirish qismi, 2 ta bob, 4 ta paragraf, har bir bob uchun xulosalar, xotima va adabiyotlar ro'yxatidan iborat.

Bitiruv malakaviy ishning birinchi bobi umumlashgan funksiyalar haqida tushuncha deb nomlanib, unda asosiy funksiyalar va ularga misollar, umumlashgan funksiyalarning ta'riflari, umumlashgan funksiyalar turlari, Dirakning δ –funksiyasi va unga doir misollar bilan birgalikda ularga doir teoremlarning isboti bilan keltirib o'tilgan. Bob ikki qismdan iborat.

Bobning 1-qismi asosiy funksiyalar sinfi, umumlashgan funksiyalar ta'rifi deb nomlanib, unda funksiya tashuvchisi, asosiy funksiya ta'rifi, asosiy funksiyalar to'plami, asosiy funksiyalarga misollar, ”Qalpoqcha” funksiyasi, umumlashgan funksiya ta'rifi kabi tushunchalarga to'xtab o'tilgan

Bobning 2-qismi regulyar va singulyar umumlashgan funksiyalar deb nomlanib, mazkur qismda regulyar umumlashgan funksiya va singulyar umumlashgan funksiya haqida ta'rif va lemma isboti bilan keltirilgan.

Bitiruv malakaviy ishning ikkinchi bobi singulyar umumlashgan funksiyalar va ularga misollar deb nomlanib, mazkur bobda Soxotskov formulalari, singulyar umumlashgan funksiyalarga misollar, singulyar umumlashgan funksiyalarning hosilalari haqida gap ketadi. Bob ikki qismdan iborat.

2-bobning 1-qismi singulyar umumlashgan funksiyalar ustida amallar deb nomlanib, unda Soxotskov teoremasining isboti va uning bir necha misollarga tadbir'i ko'rib o'tilgan.

2-bobning 2-qismida esa umumlashgan funksiyalarni differensiallash amalining xossalari, singulyar umumlashgan funksiyalar hosilaari va ularga doir misollar berib o'tilgan.

Ushbu bitiruv malakaviy ishidan kvant fizika va kvant mexanika yo'nalishidagi magistrlar o'zlarining sohalarida foydalanishlari mumkin.

Adabiyotlar ro'yxati

1. Ш.М.Мирзиёев, Эркин ва фаровон, демократик Ўзбекистон давлатини биргаликда барпо этамиз, Тошкент, “Ўзбекистон” 2016. Б 13-14.
2. Ш.М.Мирзиёев, Танқидий таҳлил, қатъий тартиб-интизом ва шахсий жавобгарлик – Ҳар бир раҳбар фаолиятининг кундалик қондаси бўлиши керак, Тошкент, “Ўзбекистон” 2017. Б 44-47.
3. Ш.М.Мирзиёев, Қонун устуворлиги ва инсон манфаатларини таъминлаш – юрт тараққиёти ва халқ фаровонлигининг гарови, Тошкент, “Ўзбекистон” 2017. Б 22-23.
4. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining “Oliy ta'lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida”gi qarori.
5. Владимиров В.С., Уравнения математической физики, М. Наука, 1979.
6. Владимиров В.С., Обобщенные функции, М. Наука, 1974.
7. Александров В.А., Обобщенные функции: Учеб. пособие/Новосиб.гос.ун-т. Новосибирск, 2005.46 с.
8. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский, Уравнения математической физики, МГУ-1966.
9. M.S.Salohiddinov, Matematika fizika tenglamalari, Toshkent, “Ma'naviyat” 2002-y.
10. www.Google.ru