

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM
VAZIRLIGI BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

Fizika-matematika fakulteti

“Matematika” kafedrası

Abdusattorova Dilfuza O'ktamjon qizi

**«Ikkita buzilish chizig'iga ega bo'lgan giperbolik tipdagi kvazichiziqli
tenglama uchun Koshi masalasi»**

mavzusida

5130100 – “Matematika” ta'lim yo'nalishi bo'yicha bakalavr
darajasini olish uchun

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

**“Ish ko'rildi va himoyaga ruxsat
berildi”**

**Ilmiy rahbar _____dots.
H.R.Rasulov**

“ _____” _____ 2018 y.

Kafedra mudiri : _____

dots. N.H.Mamatova

“ _____” _____ 2018 y

Taqrizchi : _____

“ _____” _____ 2018 y

MUNDARIJA.

KIRISH	3
I. IKKINCHI TARTIBLI XUSUSIY HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI KANONIK KO'RINISHI	12
1.1.Asosiy tushunchalar	12
1.2. Xususiyl hosilali differensial tenglamalarning <i>En</i> fazoda.....	16
umumiy holda berilishi	16
1.3. Ikkinchi tartibli xususiyl hosilali differensial tenglamalarning kanonik ko'rinishi va tasnifi	18
XULOSA.....	25
II. IKKITA BUZILISH CHIZIG'IGA EGA BO'LGAN GIPERBOLIK TIPDAGI KVAZICHIZIQLI TENGLAMA UCHUN KOSHI MASALASI	26
2.1. Eyler integrallari, gipergeometrik funksiyalar va ularning xossalari	27
2.2. Masalaning qo'yilishi.....	44
2.3. Koshi masalasi yechimining yagonaligi va mavjudligi	45
Ushbu keltirilganlarni quyidagi teorema ko'rinishida ifodalash mumkin:	53
Xulosa	53
XOTIMA.....	53
FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR	54

KIRISH

*Mamlakatimizda jamiyatimizning
zamon talablari darajasida rivojlanishi
ilm-fan ravnaqiga bog'liq.*

SH.M.Mirziyoev

Konstitutsiyamizda belgilab berilgan asosiy maqsadlarimiz barchamizga yaxshi ma'lum. Ya'ni, bosh qomusimiz bozor iqtisodiyotiga asoslangan mustaqil demokratik davlat qurish, inson manfaatlari, huquq va erkinliklari, qonun ustuvorligi va mamlakatimiz barcha fuqarolari uchun qonun oldida tenglik tamoyili ta'minlanadigan fuqarolik jamiyatini shakllantirishning mustahkam poydevorini yaratib berdi.

O'zbekistonimizga mos tarixiy, milliy, an'anaviy va iqtisodiy vaziyat va xususiyatlarni inobatga olmasdan turib, "bozor iqtisodiyotining shiddatli girdobiga o'zingni tashlasang, uning o'zi ko'zlangan manzilga olib chiqadi" degan xomxayollardan butunlay voz kechdik va bugungi kunda butun dunyoda tan olingan, "o'zbek modeli" deb nom olgan jamiyatimizni tubdan isloh etish, erkinlashtirish, demokratik yangi davlat qurish, uni modernizatsiya qilish bo'yicha puxta o'ylangan taraqqiyot yo'limizni tanlab oldik.

Biz tanlagan va mashhur besh tamoyilga asoslangan taraqqiyot modelining naqadar haqqoniy va samarali ekani biz qurayotgan yangi demokratik tizimda, iqtisodiyotimiz rivojlanishining barqaror, barchani hayratda qoldirayotgan sur'atlarida, xalqimizning hayot darajasi va sifati ortib borayotganida o'zining amaliy tasdig'ini topmoqda.

Mamlakatimizda amalga oshirilayotgan olamshumul o'zgarishlar, shahar va qishloqlarimizning qiyofasi tobora chiroy ochib, aholimizning farovonligi yuksalib borayotgani haqida gapirganda, bunday yangilanishlarning g'oyat muhim manbalari – avvalo, odamlarimizning ongu tafakkuri, dunyoqarashi va kayfiyati tubdan o'zgarib, ularning yon-atrofimizda ro'y berayotgan voqea-hodisalarga daxldorlik hissi, ertangi kunga munosabati va ishonchi tobora mustahkamlanib,

siyosiy saviyasi va huquqiy madaniyati o'sib borayotgani haqida alohida to'xtalishni o'rinli deb bilaman

Jahon tarixi barchamizga bir haqiqatni doimo eslatib turadi – hayotimiz taraqqiyoti hech qachon bir joyda to'xtab turmaydi, xuddi shu kabi jamiyatimizni isloh etish va demokratlashtirish, mamlakatni modernizatsiya qilish va yangilash bir muddatlik ish emas, balki muntazam davom etadigan uzluksiz jarayondir.

Ayniqsa, bugun biz XXI asrda – intellektual mehnat birlamchi ahamiyat kasb etayotgan globallashuv va internet asrida yashayotganimizni hisobga oladigan bo'lsak, jahon bozorida raqobat kurashining miqyosi va keskinligi tobora ortib borayotgani bu haqiqatni yana tasdiqlab bermoqda.

Shuning uchun ham qo'lga kiritilgan yutuqlar bilan chegaralanmasdan, xotirjamlik kayfiyatiga berilmasligimiz, aksincha, yangi marralar sari intilishimiz, doimo izlanib yashashimiz, taraqqiyot va yangilanish yo'lidan izchillik bilan yanada ilgarilab borishimiz zarur.

Istiqlol mamlakatimiz yosh olimlariga jahon ilm-fani oldida turgan dolzarb masalalarni hal etishda faol ishtirok etish imkonini berdi. Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti huzurida Kembrij universiteti (Buyuk Britaniya) ishtirokida Yuqori texnologiyalar markazining tashkil etilgani ham bunga yorqin misoldir. Innovatsion loyihalar ishlab chiquvchilar orasida yosh mutaxassislarning ulushi tobora ortib bormoqda. Yosh olimlar kengashi iste'dodli yoshlarni qo'llab-quvvatlash maqsadida ilmiy va innovatsion faoliyatni rivojlantirish bo'yicha ilm-fan yo'lini tanlagan yoshlarni rag'batlantirishga qaratilgan maqsadli strategiyani ishlab chiqdi.

Respublikamiz mustaqillikka erishgandan keyin bizning o'zbek yigit-qizlari jahon arenalarida sport va ilm-fanning turli sohalarida yutuqlarga erishib yurtimiz sharafini himoya qilishmoqda. Ularga o'z sohasini mukammal biladigan mutaxassislar bo'lib yetishishi uchun jahon standartlari darajasida bilim berish,

fanlarni chuqur o'rgatish, fanning ishlab chiqarish bilan aloqasini mustahkamlash bugungi kunning muhim vazifalaridan biridir.

O'zbekiston Respublikasi Prezidentining «Oliy ta'lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida»gi qarori oliy ta'lim tizimini tubdan takomillashtirish, mamlakatimizni ijtimoiy-iqtisodiy rivojlantirish borasidagi ustuvor vazifalarga mos holda, kadrlar tayyorlashning ma'no-mazmunini tubdan qayta ko'rib chiqish, xalqaro standartlar darajasida oliy malakali mutaxassislar tayyorlash uchun zarur sharoitlar yaratish maqsadida qabul qilingan.

Mustaqillik yillarida iqtisodiyotning, ijtimoiy hayotning real talablaridan kelib chiqqan holda, yurtimizda oliy ta'lim tizimini modernizatsiya qilish, unga o'qitishning zamonaviy shakl va texnologiyalarini joriy etish, mutaxassislar tayyorlash bo'yicha ixtisoslik yo'nalishlarini takomillashtirish borasida katta ishlar qilindi.

Shu bilan birga, O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2016 yil 8 oktyabrdagi farmoyishi asosida tuzilgan ishchi guruh tomonidan oliy ta'lim tizimidagi mavjud holatni o'rganish natijalari shuni ko'rsatmoqdaki, qator oliy ta'lim muassasalarida ilmiy-pedagogik salohiyat hanuz past darajada qolmoqda, ta'lim jarayonining o'quv-metodik va axborot ta'minoti zamonaviy talablarga mos emas, moddiy-texnika bazasi tizimli ravishda yangilanishga muhtoj. Oliy ta'lim tizimida o'quv jarayoniga ilg'or xalqaro tajribani keng joriy etish, yetakchi xorijiy turdosh ilmiy-ta'lim muassasalari bilan yaqin hamkorlik aloqalarini yo'lga qo'yish orqali pedagog va ilmiy kadrlar malakasini oshirish borasidagi ishlar talab darajasida olib borilmayapti.

Qabul qilingan qarorga ko'ra, quyidagilar oliy ta'lim tizimini kelgusida kompleks rivojlantirishning eng muhim vazifalari etib belgilandi:

har bir oliy ta'lim muassasasi tomonidan xorijdagi yetakchi turdosh ilmiy-ta'lim muassasalari bilan istiqbolli hamkorlik aloqalarini yaqindan yo'lga qo'yish, o'quv jarayoniga xalqaro ta'lim standartlariga asoslangan eng zamonaviy pedagogik texnologiyalar, ta'lim dasturlari va o'quv-metodik materiallarni keng

joriy etish, ilmiy-pedagogik faoliyatga yuqori malakali chet el o'qituvchilari va olimlarini jalb etish;

oliy ma'lumotli kadrlarni tayyorlashning maqsadli mezonlarini shakllantirish, oliy ta'lim muassasalaridagi ixtisoslik yo'nalishlari va mutaxassisliklarni hududlar va sohalar bo'yicha joriy etilayotgan dasturlarning talab va ehtiyojlari, iqtisodiyot tarmoqlari va hududlarni kompleks taraqqiy ettirish istiqbollari inobatga olgan holda optimallashtirish;

yangi avlod o'quv qo'llanmalarini yaratish va oliy ta'lim tizimiga keng tatbiq etish, oliy ta'lim muassasalarini zamonaviy o'quv-metodik va ilmiy adabiyotlar bilan ta'minlash, jumladan, eng yangi xorijiy adabiyotlarni sotib olish va tarjima qilish negizida axborot-resurs markazlari fondlarini muntazam yangilab borish;

pedagog kadrlarning kasb malakasi va mahoratini sifat jihatidan muntazam oshirib borish, pedagog va ilmiy xodimlarning stajirovkadan o'tishini yo'lga qo'yish, oliy ta'lim muassasalari bitiruvchilarini PhD dasturi va xorijiy magistratura dasturlari asosida o'qitish;

oliy ta'lim muassasalarining ilmiy salohiyatini mustahkamlash, oliy ta'lim tizimida ilmiy tadqiqotlarni yanada rivojlantirish, ularning akademik ilm-fan bilan integratsiyasini kuchaytirish, professor-o'qituvchilar tarkibining ilmiy faoliyati samaradorligini oshirish, iqtidorli talaba-yoshlarni ilmiy faoliyat bilan shug'ullanishga jalb etish;

oliy ta'limning ma'naviy-axloqiy mazmunini kuchaytirish, talaba-yoshlarning qalbi va ongiga milliy istiqloq g'oyasini, xalqimizning yuksak ma'naviyati va insonparvarlik an'analariga sadoqat tuyg'usini chuqur singdirish, biz uchun mutlaqo yot va begona bo'lgan g'oyalarga nisbatan ularda mustahkam immunitet va tanqidiy munosabatni shakllantirish;

oliy ta'lim muassasalari moddiy-texnika bazasini ularning o'quv va ilmiy-laboratoriya binolarini, sport inshootlari va ijtimoiy-muhandislik infratuzilmalarini qurish, kapital ta'mirlash va rekonstruksiya qilish orqali yanada mustahkamlash, zamonaviy ilm-fan sohalarining ustuvor yo'nalishlari bo'yicha o'quv-ilmiy laboratoriyalar bazasini zamonaviy asbob-uskunalar bilan ta'minlash;

oliy ta'lim muassasalarini zamonaviy axborot-kommunikatsiya texnologiyalari vositalari bilan ta'minlash, talabalar, o'qituvchi va yosh tadqiqotchilarning jahondagi ilg'or ta'lim resurslari, ilmiy adabiyotlar va ma'lumotlar bazasi bo'yicha elektron kataloglarga kirish imkoniyatini kengaytirish.

Qarorda belgilangan vazifalarning samarali yechimini to'liq ta'minlash maqsadida oliy ta'lim darajasini sifat jihatidan oshirish va tubdan takomillashtirish, oliy ta'lim muassasalari moddiy-texnika bazasini mustahkamlash va modernizatsiya qilish, ularni zamonaviy o'quv-ilmiy laboratoriyalari, axborot-kommunikatsiya texnologiyalari bilan jihozlash maqsadida oliy ta'lim tizimini 2017 — 2021 yillarga mo'ljallangan kompleks rivojlantirish dasturi tasdiqlandi.

Dasturga muvofiq, 2017 — 2021 yillarda 48 ta oliy ta'lim muassasasida jami 180 ta o'quv, ilmiy-laboratoriya binosi, sport inshootlari va ijtimoiy-muhandislik infratuzilmalari ob'ektlarida qurilish, rekonstruksiya va kapital ta'mirlash ishlari olib boriladi. Shuningdek, 53 ta oliy ta'lim muassasasida 400 ta o'quv laboratoriyasi bosqichma-bosqich eng zamonaviy o'quv-laboratoriya uskunalari bilan jihozlanadi, 7 ta oliy ta'lim muassasasida barcha oliy ta'lim muassasalari o'zaro hamkorlikda foydalanadigan ilmiy laboratoriyalar tashkil etiladi.

Qarorning muhim ahamiyatini ko'rsatadigan yana bir jihat shundan iboratki, mamlakatimiz Prezidenti tomonidan har bir oliy ta'lim muassasasi bo'yicha quyidagi konkret parametr va ko'rsatkichlarni o'z ichiga olgan manzilli rivojlantirish dasturlari tasdiqlandi:

oliy ta'lim tizimida yangi ta'lim ixtisoslik yo'nalishlari va mutaxassisliklarning, shuningdek, iqtisodiyot sohalari va hududlarni kompleks rivojlantirishning joriy va istiqboldagi ehtiyojlaridan kelib chiqqan holda ishlab chiqilgan va bakalavriat va magistraturaga talabalar qabul qilishning umumiy ko'rsatkichlarini 2021 yilgacha bosqichma-bosqich ravishda 18 foizgacha oshirishni nazarda tutadigan 2017 — 2021 yillarga mo'ljallangan parametr va ko'rsatkichlari;

o'quv binolari, talabalar turarjoylari, axborot-resurs markazlari va boshqa ob'ektlarni qurish, rekonstruksiya qilish va kapital ta'mirlash hisobidan yangi

o'quv o'rinlarini tashkil etish, yangi o'quv-laboratoriya komplekslarini sotib olish, auditoriyalarni kompyuter texnikasi bilan jihozlash;

professor-o'qituvchilarning kasb mahoratini, pedagog xodimlarning malakasini oshirish, shuningdek, ularning xorijiy hamkor oliy o'quv yurtlarida malaka oshirishi, magistratura, doktoranturada ta'lim olishi hamda respublikamizning tayanch oliy o'quv yurtlari qoshida qayta tayyorgarlikdan o'tishi va malaka oshirishi.

Mazkur dasturda, asosan, mamlakatimizning har bir oliy ta'lim muassasasi bilan AQSH, Buyuk Britaniya, Fransiya, Italiya, Niderlandiya, Rossiya, Yaponiya, Janubiy Koreya, Xitoy va shu kabi boshqa davlatlarning yetakchi ilmiy-ta'lim muassasalari bilan hamkorlik aloqalarining o'rnatilgani o'ta muhim ahamiyat kasb etadi. Shu asosda har yili 350 nafardan ortiq xorijlik yuqori malakali pedagog va olimlarning mamlakatimiz oliy o'quv yurtlariga o'quv jarayoniga jalb etilishi ko'zda tutilmoqda.

Amaliyot shuni ko'rsatmoqdaki, oliy ta'lim muassasalari pedagog xodimlarining mehnatiga haq to'lash bo'yicha amaldagi tizimni jiddiy takomillashtirish va bu borada moddiy rag'batlantirishning yangi mexanizmlarini joriy etishga ehtiyoj sezilmoqda. Shu munosabat bilan O'zbekiston Respublikasining Moliya vazirligi, Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi, Mehnat vazirligi, Sog'liqni saqlash vazirligi va Xalq ta'limi vazirligiga uch oy muddatda ilg'or xalqaro tajribadan kelib chiqib, oliy o'quv yurtlari pedagog xodimlariga ularning kasb mahorati, faoliyatidagi yuqori natijadorlik va tarbiyaviy sohadagi samarali ishtirokini inobatga olib, ustama haq to'lashni belgilash tizimi bo'yicha Vazirlar Mahkamasiga takliflar kiritish vazifasi topshirildi.

Qarorga muvofiq, Vazirlar Mahkamasiga ikki oy muddatda iqtidorli yosh pedagog va ilmiy xodimlarning malakasini oshirish bo'yicha O'zbekiston Respublikasi Prezidentining «Iste'dod» jamg'armasi faoliyatini tubdan qayta ko'rib chiqish, xorijiy ta'lim muassasalari va ilmiy markazlarida ilmiy-pedagog xodimlarning malaka oshirishi va qayta tayyorgarlikdan o'tishini, oliy ta'lim muassasalari bitiruvchilarining PhD dasturi va ularning magistraturada o'qishini

tashkil etish bo'yicha chora-tadbirlar ko'zda tutilgan takliflar kiritish topshirilmoqda.

Ta'kidlash joizki, oliy ta'lim muassasalarining ilmiy salohiyatini mustahkamlash maqsadida korxonalarning buyurtmasiga asosan, amaliy va innovatsion ilmiy tadqiqot va tajriba-konstruktorlik faoliyatini amalga oshiradigan ta'lim va ilmiy-tadqiqot muassasalari yuridik shaxslardan olinadigan daromad solig'idan, yagona soliq to'lovidan, maqsadli davlat jamg'armalariga majburiy to'lov va qo'shimcha qiymat solig'idan ozod qilindi.

Ta'lim-tarbiya jarayonlarining sifati ustidan samarali davlat nazoratini o'rnatish maqsadida Vazirlar Mahkamasi huzurida Ta'lim sifatini nazorat qilish bo'yicha davlat inspeksiyasi tashkil etiladi. Uning asosiy vazifasi ta'lim-tarbiya jarayoni, professor-o'qituvchilar tarkibi, ta'lim tizimida kadrlar tayyorlash va ularning malakasini oshirish sifati hamda mulkchilik shakli va idoraviy bo'ysunishidan qat'iy nazar, ta'lim muassasalarini attestatsiya va davlat akkreditatsiyasidan o'tkazish, ta'lim-tarbiya sifatini nazorat qilish bo'yicha davlat siyosatini amalga oshirishdan iborat.

Oliy ta'lim tizimini 2017-2021 yillarga mo'ljallangan kompleks rivojlantirish dasturini amalga oshirish uchun yo'naltiriladigan moliyaviy mablag'lar 1,7 trillion so'mdan ziyod bo'lib, ulardan 1,2 trillion so'mi o'quv-laboratoriya binolari, sport zallari va talabalar turarjoylarini rekonstruksiya qilish va kapital ta'mirlashga, 500 milliard so'mdan ortiq mablag' esa o'quv-laboratoriya uskunolari, mebel va inventar bilan ta'minlash, umumiy tartibda foydalanishga mo'ljallangan, barcha ta'lim muassasalariga xizmat ko'rsatadigan laboratoriya komplekslarini tashkil etish hamda axborot-kommunikatsiya texnologiyalarini rivojlantirishga sarflanadi.

O'zbekiston Respublikasi Prezidentining «Oliy ta'lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida»gi qarori uzluksiz ta'lim tizimini rivojlantirish, mamlakatimizning izchil rivojlanib borayotgan iqtisodiyotini yuqori malakali kadrlar bilan ta'minlash, barcha hududlar va tarmoqlarni strategik jihatdan kompleks rivojlantirish masalalarini hal qilish borasida oliy ta'lim tizimi ishtirokini kengaytirish yo'lidagi yana bir muhim amaliy qadamdir.

Bitiruv malakaviy ishining dolzarbligi: Respublikamiz mustaqillikka erishgandan keyin o'zbek yigit-qizlari jahon arenalarida sport va ilm-fanning turli sohalarida yutuqlarga erishib, yurtimiz sharafiga himoya qilishmoqda. Ularga o'z sohasini mukammal biladigan mutaxassislar bo'lib yetishishi uchun jahon standartlari darajasida bilim berish, fanlarni chuqur o'rgatish, fanning ishlab chiqarish bilan aloqasini mustahkamlash bugungi kunning muhim vazifalaridan biridir. Bitiruv malakaviy ishi matematik fizika fanida muhim o'rin tutgan ikkita buzilish chizig'iga ega bo'lgan giperbolik tipdagi kvazichiziqli tenglama uchun Koshi masalasiga bag'ishlangan. Talabalar bunday masalalarni o'rganishda qator qiyinchiliklarga duch keladilar. Buning sababi bunday masalalar mantiqiy fikrlashni, mavzu yuzasidan qo'shimcha bilimlarni talab qiladi. Mazkur bitiruv malakaviy ishi xuddi shu jihatlarni yoritishga qaratilganligi bilan, qolaversa bir qancha fizik hodisa va jarayonlarning aniq matematik metodini tuzishda hamda uni yechishda qo'l kelganligi bilan dolzarb hisoblanib, ikkita buzilish chizig'iga ega bo'lgan giperbolik tipdagi tenglama uchun Koshi masalasini yechish usullari o'rganilgan.

Tadqiqot ob'ekti va predmeti: aralash tipdagi tenglamalar sirasiga kiruvchi ikkita buzilish chizig'iga ega bo'lgan giperbolik tipdagi tenglamalar, oliy o'quv yurtlarining "Matematika" yo'nalishi talabalariga o'qitiladigan maxsus fanlar bo'yicha darsliklar.

Bitiruv malakaviy ishining asosiy maqsadi va vazifalari:

1. Aralash tipdagi tenglamalar haqida tushunchalar berish, buzilish chizig'iga ega bo'lgan matematik fizika tenglamalarini yechishda qo'llaniladigan gipergeometrik funksiyalar va ularning xossalari keltirish.

2. Ikkita buzilish chizig'iga ega bo'lgan giperbolik tipdagi tenglama yechimining mavjudligi va yagonaligini isbotlash.

Bitiruv malakaviy ishning o'rganilganlik darajasi: Qo'yilgan mavzu to'liq o'rganilgan.

Bitiruv malakaviy ishning ilmiy farazi: bitiruv malakaviy ishida gipergeometrik funksiyalarining bir qator xossalari va ularni xususiy hosilali

differential tenglamalar yechimini yozishda foydalanilishi hamda ikkita buzilish chizig'iga ega bo'lgan giperbolik tipdagi tenglama uchun Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligini isbotlash yo'li o'rganilgan.

Bitiruv malakaviy ishning metodologik asosi: Matematik analiz, matematik fizika tenglamalarini yechish usullari.

Bitiruv malakaviy ishning metodlari: Matematik analiz, matematik fizika tenglamalarining bir qator mavzulari.

Olingan asosiy natijalar: Aralash tipdagi tenglamalar sirasiga kiruvchi ikkita buzilish chizig'iga ega bo'lgan giperbolik tipdagi kvazichiziqli tenglama yechimining mavjudligi va yagonaligini isbotlash usuli organilib, uni talabalarning tushunishlari oson bo'lishi va shu yo'nalishda ilmiy izlanishlar olib borishlarida sohani tezroq egallashlari uchun sodda ko'rinishda yoritilgan. Oliygo'ra miqyosida o'tilmagan har bir tushunchalar batafsil keltirilgan.

Natijalarning ilmiy yangiligi va amaliy ahamiyati: bitiruv malakaviy ishi referativ xarakterga ega bo'lib, mazkur yonalishda ilmiy izlanishlar olib boruvchi tadqiqotchilarning sohani tezroq egallashlariga amaliy yordam beradi.

Bitiruv malakaviy ishning hajmi va tuzilishi: Mazkur bitiruv malakaviy ish kirish qismi, 2 ta bob, birinchi bobda 3 ta paragraf, birinchi bobning xulosasi, ikkinchi bobda 3 ta paragraf, ikkinchi bobning xulosasi, xotima va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat.

I. IKKINCHI TARTIBLI XUSUSIY HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI KANONIK KO'RINISHI

1.1.Asosiy tushunchalar

Differensial tenglamalar deb, noma'lumi bir yoki bir necha o'zgaruvchili funksiya va uning hosilalari qatnashgan tenglamalarga aytiladi.

Agar tenglamada noma'lum funksiya ko'p o'zgaruvchining (o'zgaruvchi 2 tadan kam bo'lmasligi kerak) funksiyasi bo'lsa, bunday tenglama xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi.

1.1.1-ta'rif: x, y erkli o'zgaruvchining $u(x, y)$ noma'lum funksiyasi va funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalari orasidagi bog'lanishga, ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar deyiladi.

1.1.2-ta'rif: E^2 fazoda ikkinchi tartibli xususiy hosilalari mavjud qandaydir $u(x, y)$ funksiya berilgan bo'lsin ($u_{xy} = u_{yx}$). U holda

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 \quad (1.1.1)$$

tenglama umumiy holda berilgan xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi. Bu yerda F - qandaydir funksiya. Xuddi shunga o'xshash ko'p erkli o'zgaruvchili ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}, \dots, u_{x_i x_j}, \dots) = 0 \quad (1.1.2)$$

1.1.3-ta'rif: Xususiy hosilali differensial tenglama yuqori tartibli hosilalarga nisbatan chiziqli deyiladi, agarda u yuqori tartibli hosilalarga nisbatan ushbu ko'rinishga ega bo'lsa:

$$a_{11}(x, y)u_{xx} + 2a_{12}(x, y)u_{xy} + a_{22}(x, y)u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (1.1.3)$$

1.1.4-ta'rif: Quyidagi ko'rinishdagi tenglamalarga kvazichiziqli tenglamalar deyiladi:

$$a_{11}(x, y, u, u_x, u_y)u_{xx} + 2a_{12}(x, y, u, u_x, u_y)u_{xy} + a_{22}(x, y, u, u_x, u_y)u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (1.1.4)$$

1.1.5-ta’rif: Tenglama chiziqli deyiladi, agarda u barcha xususiy hosilalar va noma’lum funksiyaning o’ziga nisbatan ham chiziqli bo’lsa, ya’ni quyidagi ko‘rinishga ega bo’lsa,

$$a_{11}(x, y)u_{xx} + 2a_{12}(x, y)u_{xy} + a_{22}(x, y)u_{yy} + b_1(x, y)u_x + b_2(x, y)u_y + c(x, y)u + f(x, y) = 0 \quad (1.1.5)$$

Ushbu tenglamada $a_{11}(x, y), a_{12}(x, y), a_{22}(x, y), b_1(x, y), b_2(x, y), c(x, y)$ - (1.1.5) tenglamaning koeffitsientlari, $f(x, y)$ - (1.1.5) tenglamaning ozod hadi deyiladi.

1.1.6-ta’rif: Agar (1.1.5) tenglamada $f(x, y) \equiv 0$ bo’lsa, u holda (1.1.5) tenglama bir jinsli tenglama deyiladi. Aks holda, agar $f(x, y) \neq 0$ bo’lsa, (1.1.5) tenglama bir jinsli bo’lmagan differensial tenglama deyiladi.

Biror fizik jarayonni to’la o’rganish uchun, bu jarayonni tasvirlayotgan tenglamalardan tashqari, uning boshlang’ich holatini (boshlang’ich shartlarni) va jarayon sodir bo’ladigan sohaning chegarasidagi holatini (chegaraviy shartlarni) berish zarurdir. Matematik nuqtai nazardan bu narsa differensial tenglamalar yechimining yagona emasligi bilan bog’liqdir.

Oddiy differensial tenglamalar kursidan ma’lumki, n — tartibli

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

tenglamaning yechimi n ta ixtiyoriy o’zgarmasga bog’liqdir, ya’ni $y = \varphi(x, c_1, \dots, c_n)$. Bu o’zgarmaslarni aniqlash uchun noma’lum funksiya $y(x)$ qo’shimcha shartlarni qanoatlantirishi kerak.

Xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun bu masala murakkabroq. Bu tenglamalarning yechimi ixtiyoriy o’zgarmaslarga emas, balki ixtiyoriy funksiyalarga bog’liq bo’lib, bu funksiyalar soni tenglamalar tartibiga teng bo’ladi.

Ixtiyoriy funksiyalar argumentlarining soni yechim argumentlari sonidan bitta kam bo'ladi.

1.1.1- misol. Quyidagi tenglamaning umumiy yechimini toping: $u_{xy}=0$.

Dastlab x bo'yicha, so'ngra y bo'yicha integrallaymiz.

Natijada $u(x,y) = f_1(x) + f_2(y)$ yechimni olamiz. Ko'rinib turibdiki, xususiy hosilali differensial tenglamaning yechimida tenglama tartibiga teng miqdorda, ya'ni ikkita funksiya qatnashyapti, bu funksiyalar argumenti esa yechim argumentlari sonidan bitta kam.

1.1.2-misol. Quyidagi tenglamaning umumiy yechimini topaylik:

$$u_{xyy}=0.$$

Yuqoridagidek mulohaza yuritsak, umumiy yechim quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$u(x,y) = f_1(x)y + f_2(x) + f_3(y).$$

1.1.3-misol. Quyidagi tenglamaning umumiy yechimini topaylik:

$$u_{xyz}=0.$$

Yuqoridagidek mulohaza yuritilsa, umumiy yechim quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$u(x,y,z) = x \cdot y \cdot f_1(x,y) + x \cdot f_2(x,z) + f_3(y,z).$$

Oxirgi misolda, yechimda tenglama tartibiga mos uchta funksiya qatnashayapti, yechim uch o'zgaruvchili bo'lgani uchun bu funksiyalar argumenti ikki o'zgaruvchili.

Shunday qilib, aniq fizik jarayonni ifodalovchi yechimni ajratib olish uchun qo'shimcha shartlarni berish zarurdir. Bunday qo'shimcha shartlar boshlang'ich va chegaraviy shartlardan iboratdir.

Jarayon sodir bo'layotgan soha $G \in R^n$ bo'lib, S uning chegarasi bo'lsin. S ni bo'lakli silliq sirt bo'ylab hisoblaymiz.

Differensial tenglamalar uchun, asosan, 3 tipdagi masalalar bir-biridan farq qiladi.

a) **Koshi masalasi.** Bu masala, asosan giperbolik va parabolik tipdagi tenglamalar uchun qo'yiladi, G soha butun R^n fazo bilan ustma-ust tushadi, bu holda chegaraviy shartlar bo'lmaydi.

b) **Chegaraviy masala.** Elliptik tipdagi tenglamalar uchun qo'yiladi, S da chegaraviy shartlar beriladi, boshlang'ich shartlar tabiiy bo'lmaydi.

c) **Aralash masala.** Giperbolik va parabolik tipdagi tenglamalar uchun qo'yiladi, $G \neq R^n$ bo'lib, boshlang'ich va chegaraviy shartlar beriladi.

d) **Boshqa masalalar.** Ikkinchi tartibli ikki o'zgaruvchili kanonik ko'rinishga keltirilgan giperbolik tipdagi ushbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = f(x, y)$$

umumiy chiziqli tenglama berilgan bo'lsin.

Bu tenglamaning xarakteristikalar tenglamasi $dy^2 - dx^2 = 0$ dan iborat. Bundan $x - y = \text{const}$, $x + y = \text{const}$ to'g'ri chiziqlar oilasi berilgan tenglamaning xarakteristikalari ekanligi kelib chiqadi.

Uchlari A , B , C va D nuqtalarda, tomonlari berilgan tenglamaning xarakteristikalaridan iborat bo'lgan to'rtburchakni G orqali belgilab olamiz. Odatda bu to'rtburchak xarakteristik to'rtburchak deyiladi.

Gursa masalasi. G to'rtburchakda regulyar, ya'ni $\overline{G}$ da uzluksiz va

$u|_{AB} = \varphi$, $u|_{CB} = \psi$ shartlarni qanoatlantiruvchi berilgan tenglamaning yechimi topilsin.

Masalaning qo'yilishiga asosan, φ va ψ funksiyalar berilgan sohasida uzluksiz va $\varphi(A) = \psi(A)$ shart bajarilishi zarur. Demak, Gursa masalasida tenglamaning ikkita kesishadigan xarakteristikalarida bitta chegaraviy shart beriladi.

Gursa masalasida shartlar xarakteristikalarda berilgani uchun bu masala xarakteristik masala deb ham yuritiladi.

Endi G orqali $y=0$ o'qning ixtiyoriy $A(x_1,0)$, $B(x_2,0)$ kesmasi va yuqorida berilgan tenglamaning $AC: x+y=x_1$, $BC: x-y=x_2$ xarakteristikalari bilan chegaralangan uchburchakni belgilaymiz.

Bu uchburchak xarakteristik uchburchak deyiladi.

1.2. Xususiy hosilali differensial tenglamalarning E^n fazoda umumiy holda berilishi

D orqali dekart ortogonal koordinatalari $x_1, x_2, \dots, x_n$, $n \geq 2$ bo'lgan x nuqtalarning n -o'lchovli E^n Yevklid fazosidagi sohani, ya'ni ochiq, bog'langan (bo'sh bo'lmagan) to'plamni belgilaymiz. Tartiblangan manfiy bo'lmagan n ta butun sonning $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ketma-ketligi n tartibli multiindeks deyiladi, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ son bu multiindeksning uzunligi deb ataladi.

$u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyaning $x \in D$ nuqtadagi $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ tartibli hosilasini

$$D^\alpha u = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n} u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad D^0 u = u(x)$$

ko'rinishda yozib olamiz. Xususiy holda $\alpha = \alpha_i$, bo'lganda

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_i} u}{\partial x_i^{\alpha_i}} = D_i^{\alpha_i} u, \quad D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} = u_{x_i}, \quad D_i^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = u_{x_i x_i}$$

$F = F(x, \dots, p_\alpha, \dots)$ funksiya D soha x nuqtalarining va $P_\alpha = P_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = D^\alpha u$,

$\alpha_i = 0, 1, \dots$ haqiqiy o'zgaruvchining berilgan funksiyasi bo'lib, kamida bitta

$\frac{\partial F}{\partial p_\alpha}$, $|\alpha| = m > 0$ hosila noldan farqli bo'lsin.

Ushbu

$$F(x, \dots, D^\alpha u, \dots) = 0 \quad (1.2.1)$$

tenglik noma'lum $u(x) = u(x_1, \dots, x_n)$ funksiyaga nisbatan m – tartibli xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi. (1.2.1) tenglamaning chap tomoni esa xususiy hosilali differensial operator deb ataladi.

Agar F barcha p_α ($|\alpha|=0,1,\dots,m$) o'zgaruvchilarga nisbatan chiziqli funksiya bo'lsa, (1.2.1) tenglama chiziqli differensial tenglama deyiladi.

Agarda F , $|\alpha| = m$ bo'lganda barcha p_α o'zgaruvchilarga nisbatan chiziqli funksiya bo'lsa, (1.2.1) tenglama **kvazichiziqli differensial tenglama** deb ataladi.

D sohada aniqlangan $u(x)$ funksiya (1.2.1) tenglamada ishtirok etuvchi barcha hosilalari bilan uzluksiz bo'lib, uni ayniyatga aylantirsa, $u(x)$ ni (1.2.1) tenglamaning **regulyar (klassik) yechimi** deyiladi.

Xususiy hosilali m - tartibli chiziqli differensial tenglamani ushbu

$$Lu \equiv \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x) \quad (1.2.2)$$

ko'rinishda yozib olish mumkin.

Barcha $x \in D$ lar uchun (1.2.2) tenglamaning o'ng tomoni $f(x)$ nolga teng bo'lsa, (1.2.2) tenglama *bir jinsli*, $f(x)$ funksiya nolga teng bo'lmasa, **bir jinsli bo'lmagan tenglama** deyiladi.

Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar bir jinsli bo'lmagan (1.2.2) tenglamaning yechimlari bo'lsa, ravshanki $w(x) = u(x) - v(x)$ ayirma bir jinsli ($f = 0$) tenglamaning yechimi bo'ladi.

Agarda $u_i(x)$, $i = 1, \dots, k$ funksiyalar bir jinsli ($f = 0$) tenglamaning yechimlari bo'lsa, $u(x) = \sum_{i=1}^k c_i u_i(x)$ funksiya ham, bu yerda c_i – haqiqiy o'zgarmaslar, shu tenglamaning yechimi bo'ladi.

Xususiy hosilali ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n B_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u = f(x) \quad (1.2.3)$$

ko'rinishda yoziladi, bu yerda $A_{ij}, B_i, C, f - D$ sohada berilgan haqiqiy funksiyalardir.

(1.2.3) tenglamaning barcha $A_{ij}, i, j = 1, \dots, n$ koeffitsientlari nolga teng bo'lgan $x \in D$ nuqtalarda tenglama ikkinchi tartibli bo'lmay qoladi, ya'ni bu nuqtalarda (1.2.3) tenglamaning tartibi buziladi. Bundan keyin biz (1.2.3) tenglama berilgan sohada uning tartibi ikkiga teng deb hisoblaymiz. (1.2.3) tenglamada $i \neq j$ bo'lganda alohida—alohida $A_{ij}u_{x_i x_j}$ qo'shiluvchilar ishtirok etmay, balki ularning yig'indisi $(A_{ij} + A_{ji})u_{x_i x_j}$ ishtirok etadi. Shu sababli ham umumiylikka zid keltirmagan holda, hamma vaqt $A_{ij} = A_{ji}$, deb hisoblaymiz.

Eslatib o'tamiz, D sohada aniqlangan va k -tartibgacha xususiy hosilalari bilan uzluksiz bo'lgan haqiqiy $u(x)$ funksiyalarning to'plami $C^k(D)$ orqali belgilanadi.

1.3. Ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarning kanonik ko'rinishi va tasnifi

Biz x va y erkli o'zgaruvchilarni almashtirish natijasida, ya'ni

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y) \quad (1.3.1)$$

berilgan chiziqli tenglamaga ekvivalent bo'lgan va soddaroq ko'rinishga ega bo'lgan tenglamaga ega bo'lishimiz mumkin. Haqiqatan ξ va η o'zgaruvchilarni qanday tanlasak (1.1.3) tenglama soddaroq ko'rinishga keladi degan savol tug'iladi?

Buning uchun (1.1.3) tenglamada x va y erkli o'zgaruvchilardan yangi ξ va η o'zgaruvchilarga o'tamiz:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \\ u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} \\ u_{xy} &= u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy} \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy} \end{aligned} \right\} \quad (1.3.2)$$

(1.3.2) ifodalarni (1.1.3) tenglamaga keltirib qo'yib, ξ va η o'zgaruvchilarga nisbatan (1.1.3) tenglamaga ekvivalent bo'lgan quyidagi tenglamani olamiz:

$$\overline{a_{11}}(\xi, \eta) \cdot u_{\xi\xi} + 2\overline{a_{12}}(\xi, \eta) \cdot u_{\xi\eta} + \overline{a_{11}}(\xi, \eta) \cdot u_{\eta\eta} + \overline{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0 \quad (1.3.3)$$

bu yerda

$$\overline{a_{11}} = a_{11} \xi_x^2 + 2a_{12} \xi_x \xi_y + a_{22} \xi_y^2$$

$$\overline{a_{12}} = a_{11} \xi_x \eta_x + a_{12} (\xi_x \eta_y + \eta_x \xi_y) + a_{22} \xi_y \eta_y$$

$$\overline{a_{22}} = a_{11} \eta_x^2 + 2a_{12} \eta_x \eta_y + a_{22} \eta_y^2$$

$\overline{F}$ - funksiya ikkinchi tartibli xususiy hosilaga bog'liq emas. Agar (1.1.3) tenglama chiziqli bo'lganda, ya'ni

$$F(x, y) = b_1(x, y) \cdot u_x + b_2(x, y) \cdot u_y + c(x, y) \cdot u + f(x, y)$$

ko'rinishda bo'lganda, $\overline{F}$ funksiya quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\overline{F}(\xi, \eta) = \overline{b_1}(\xi, \eta) \cdot u_\xi + \overline{b_2}(\xi, \eta) \cdot u_\eta + \overline{c}(\xi, \eta) \cdot u + \overline{f}(\xi, \eta).$$

(1.3.3) tenglama sodda ko'rinishga ega bo'lishi uchun ξ va η o'zgaruvchilarni shunday tanlaymizki, $\overline{a_{11}}$ koeffitsient nolga teng bo'lsin. Buning uchun ushbu birinchi tartibli

$$a_{11} z_x^2 + 2a_{12} z_x z_y + a_{22} z_y^2 = 0 \quad (1.3.4)$$

xususiy hosilali tenglamani qaraymiz. Faraz qilamiz, $z = \varphi(x, y)$ - funksiya bu tenglamaning qandaydir xususiy yechimi bo'lsin. Agar $\xi = \varphi(x, y)$ deb qabul qilsak, u holda $\bar{a}_{11} = 0$ bo'ladi.

Demak, yuqorida bayon qilingan masalaning yechimi yangi erkli o'zgaruvchilarga o'tish masalasi (1.3.4) tenglamani yechishga bog'liq ekan.

Quyidagi lemmalarini isbotlaymiz.

1.3.1-lemma. Agar $z = \varphi(x, y)$ funksiya ushbu

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0 \quad (1.3.4)$$

tenglamaning yechimi bo'lsa, u holda $\varphi(x, y) = C$ munosabat, quyidagi oddiy

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0 \quad (1.3.5)$$

differensial tenglamaning umumiy yechimini ifodalaydi.

Isbot. $z = \varphi(x, y)$ funksiya (1.3.4) tenglamaning yechimi bo'lgani uchun, shu tenglamani qanoatlantirishi kerak va

$$a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22} = 0 \quad (1.3.6)$$

tenglik ayniyatni ifodalaydi. Bu tenglik x va y o'zgaradigan sohaning barcha qiymatlarida o'rinli. $\varphi(x, y) = C$ munosabat (1.3.5) tenglamaning umumiy yechimi bo'la oladi. $y - \varphi(x, y) = C$ oshkormas munosabatdan aniqlansin, ya'ni faraz qilaylik $y = f(x, C)$ bo'lsin, u holda oshkormas funksiya olingan to'la differensial quyidagicha bo'ladi:

$$\varphi_x dx + \varphi_y dy = 0,$$

bundan quyidagi tenglikni olamiz.

$$\frac{dy}{dx} = -\left[\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right]_{y=f(x,C)} . \quad (1.3.7)$$

Bu tenglikda y - erkli o'zgaruvchi bo'lmasdan x va C ga bog'liq funktsiyani ifodalaydi va uning qiymati $f(x,C)$ ga teng bo'ladi. Bundan esa $y = f(x,C)$ funktsiya (1.3.5) tenglamani qanoatlantirishi kelib chiqadi, chunki

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} = \left[a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22} \right]_{y=f(x,C)} = 0$$

kvadrat qavs ichidagi ifoda barcha x va y o'zgaruvchilarning qiymatlarida nolga teng bo'ladi. Shu bilan 1.3.1-lemma isbot bo'ldi.

1.3.2-lemma. Agar $\varphi(x,y)=C$ munosabat $a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0$ oddiy differensial tenglamaning umumiy yechimi bo'lsa, u holda $z = \varphi(x,y)$ funktsiya (1.3.4) tenglamani qanoatlantiradi.

Isbot. Faraz qilamiz, $\varphi(x,y)=C$ munosabat (1.3.5) tenglamaning umumiy yechimini ifodalasin.

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0 \quad (1.3.6')$$

(1.3.6') tenglama x va y ning barcha qiymatlarida o'rinli ekanligini isbotlaymiz. Faraz qilamiz, (x_0, y_0) nuqta sohaning qandaydir nuqtasi bo'lsin. Agar biz bu ixtiyoriy nuqtada (1.3.6') tenglama o'rinli bo'lishini ko'rsatsak, u holda (x_0, y_0) nuqta ixtiyoriy bo'lganligi sababli, bu tenglama ayniyatga aylanishi kelib chiqadi va $\varphi(x,y)$ funktsiya (1.3.6') tenglamaning yechimi bo'ladi. (x_0, y_0) nuqtadan (1.3.5) tenglamaning integral egri chizigini o'tkazamiz va faraz qilamiz, $\varphi(x_0, y_0) = C_0$ va $y = f(x, C_0)$, u holda $y_0 = f(x_0, C_0)$ bo'ladi. Bu egri chiziqning barcha nuqtalari uchun esa,

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} = \left[a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22} \right]_{y=f(x,C_0)} = 0$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu tenglikda $x = x_0$ deb olsak,

$$a_{11}\varphi_x^2(x_0, y_0) + 2a_{12}\varphi_x(x_0, y_0)\varphi_y(x_0, y_0) + a_{22}\varphi_y^2(x_0, y_0) = 0$$

ayniyatga ega bo‘lamiz. Shu bilan ikkinchi lemma isbotlandi.

1.3.1-ta’rif. (1.3.5) tenglama (1.1.3) tenglamaning xarakteristik tenglamasi deyiladi.

1.3.2-ta’rif. (1.3.5) tenglamaning integrallari esa (1.1.3) tenglamaning xarakteristiklari deyiladi.

Faraz qilamiz, $\xi = \varphi(x, y)$, bu yerda $\varphi(x, y) = \text{const}$ (1.3.5) tenglamaning umumiy integrali. Biz $u_{\xi\xi}$ oldidagi koeffitsientni nolga aylantiramiz. Agar $\psi(x, y) = \text{const}$ (1.3.5) tenglamaning boshqa umumiy integralini ifodalasa va $\varphi(x, y)$ ga bog‘liq bo‘lmasa, biz $\eta = \psi(x, y)$ deb olsak, $u_{\eta\eta}$ oldidagi koeffitsientni nolga aylantiramiz.

(1.3.5) tenglama quyidagi ikkita tenglamaga ajraladi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22}}}{a_{11}}, \quad (1.3.8)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22}}}{a_{11}}. \quad (1.3.9)$$

Ildiz ostidagi ifodaning ishorasi

$$a_{11}(x, y) \cdot u_{xx} + 2a_{12}(x, y) \cdot u_{xy} + a_{11}(x, y) \cdot u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (1.3.10)$$

tenglamaning tipini aniqlaydi.

Agar M nuqtada $a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} > 0$ bo‘lsa, (1.3.10) tenglama giperbolik tipga qarashli, agar M nuqtada $a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} < 0$ bo‘lsa, berilgan (1.3.10) tenglama elliptik tipga qarashli, agar M nuqtada $a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = 0$ bo‘lsa, parabolik tipga qarashli deyiladi.

Quyidagi tenglik sohaning barcha nuqtalarida o‘rinli bo‘ladi, ya’ni

$$\bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11} \cdot \bar{a}_{22} = (a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22}) \cdot D^2, \quad D = \xi_x \eta_y - \eta_x \xi_y$$

Bundan o‘zgaruvchilar almashtirilganda ham tenglama tipining invariantligi saqlanishi ko‘rinib turibdi, chunki D - yakobian noldan farqli.

Barcha nuqtalarida tenglama bir xil tipga tegishli bo'lgan G sohani qaraymiz. G sohaning har bir nuqtasidan ikkita xarakteristika o'tadi, aynan, giperbolik tipdagi tenglamalar uchun ikkita haqiqiy va o'zaro farqli xarakteristikalar elliptik tenglamalar uchun esa ikkita kompleks va o'zaro farqli xarakteristikalar, parabolik turdagi tenglamalar uchun esa, ikkita haqiqiy va o'zaro ustma-ust tushadigan xarakteristikalar o'tadi.

Bu hollarning har birini alohida-alohida qaraymiz.

1) Giperbolik tipdagi tenglamalar uchun $a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} > 0$ va (1.3.8) , (1.3.9) tenglamalarning o'ng tomoni haqiqiy va o'zaro farqli. Bu tenglamalarning umumiy yechimlari $\varphi(x,y) = const$ va $\psi(x,y) = const$ bo'lib, haqiqiy xarakteristikalar oilasiga ega bo'ladi. Faraz qilamiz, $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$. U vaqtda (1.3.3) tenglamani $u_{\xi\eta}$ oldidagi koeffitsientga bo'lib, ushbu ko'rinishga keltiramiz:

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \quad (1.3.10')$$

bu yerda $\Phi = -\frac{\bar{F}}{2a_{12}}$.

(1.3.5) tenglamaning (1.3.10') ko'rinishi giperbolik tipdagi tenglamaning kanonik ko'rinishi deyiladi.

Ko'pincha giperbolik tipdagi tenglamalarning ikkinchi kanonik ko'rinishidan foydalaniladi.

Ikkinchi kanonik ko'rinishga keltirish uchun quyidagicha yangi almashtirish kiritishga to'g'ri keladi:

$$\xi = \alpha + \beta, \quad \eta = \alpha - \beta \text{ yoki } \alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \beta = \frac{\xi - \eta}{2}, \quad (1.3.11)$$

bunda α va β lar yangi o'zgaruvchilar. Natijada biz ushbu tengliklarga ega bo'lamiz:

$$u_\xi = \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta), \quad u_\eta = \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta), \quad u_{\xi\eta} = \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}) \quad (1.3.12)$$

Bundan (1.3.10) tenglama quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1, \quad (1.3.13)$$

bu yerda $\Phi_1 = 4\Phi$.

1) Parabolik tenglamalar uchun $a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = 0$ bo'lib, (1.3.8) va (1.3.9) tenglamalar ustma-ust tushadi va biz bitta umumiy integralga: $\varphi(x, y) = \text{const}$ ga ega bo'lamiz. Bu holda $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ deb qabul qilamiz. Bu yerda $\eta = \eta(x, y)$ funksiya $\xi = \varphi(x, y)$ funksiyaga bog'liq bo'lmagan ixtiyoriy funksiya. O'zgaruvchilarni bunday qabul qilish natijasida

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = \left(\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y\right)^2 = 0$$

chunki $a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$ tenglik $a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = 0$ tenglikdan olinadi. Bundan esa quyidagi kelib chiqadi

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + a_{22}\xi_y\eta_y = \left(\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y\right)\left(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y\right) = 0.$$

(1.3.5) tenglamani $u_{\eta\eta}$ oldidagi koeffitsientga bo'lish natijasida, parabolik turdagi tenglamlarning kanonik ko'rinishini keltirib chiqaramiz:

$$u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \quad (1.3.14)$$

bu yerda $\Phi = -\frac{\bar{F}}{a_{22}}$.

Agar (1.3.14) tenglamaning o'ng tomonida u_ξ qatnashmasa, u holda bu tenglama ξ parametrga bog'liq oddiy differensial tenglama bo'lib qoladi.

2) Elliptik tipdagi tenglamalar uchun $a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} < 0$ bo'lib, (1.3.8) va (1.3.9) tenglamlarning o'ng tomoni kompleks bo'ladi. Faraz qilamiz $\varphi(x, y) = \text{const}$ (1.3.8) tenglamaning kompleks integrali bo'lsin. U holda $\varphi(x, y)$ funksiyaga qo'shma $\varphi^*(x, y)$ funksiya (1.3.9) qo'shma tenglamaning umumiy integralini ifodalaydi. Kompleks o'zgaruvchilarga o'tamiz, bu uchun faraz qilamiz,

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \varphi^*(x, y).$$

Bu holda elliptik tipdagi tenglama giperbolik tipdagi tenglama qaysi ko'rinishga kelgan bo'lsa, o'sha ko'rinishga keladi.

Kompleks o'zgaruvchilar bilan ish ko'rmaslik uchun, quyidagi yangi α va β o'zgaruvchilarni kiritamiz:

$$\alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}, \quad \beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i}, \quad \text{chunki} \quad \xi = \alpha + i\beta, \quad \eta = \alpha - i\beta.$$

Bu holda

$$a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = (a_{11}\alpha_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha_y^2) - (a_{11}\beta_x^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}\beta_y^2) + 2i(a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + a_{22}\alpha_y\beta_y)$$

($\xi_x = \alpha_x + i\beta_x$ va h.k. ekanligidan foydalanamiz) ya'ni $\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22}$ va $\bar{a}_{12} = 0$.

(1.3.3) tenglamani $u_{\alpha\alpha}$ oldidagi koeffitsientga bo'lib quyidagi tenglamani olamiz:

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \quad (1.3.15)$$

bu yerda $\Phi = -\frac{\bar{F}}{a_{22}}$

Shunday qilib, $a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22}$ ifodaning ishorasiga qarab (1.1.3) tenglama quyidagi kanonik ko'rinishlarga keltirilishi mumkin ekan:

$$a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} > 0 \quad (\text{giperbolik tipda}), \quad u_{xx} - u_{yy} = \Phi \quad \text{yoki} \quad u_{xy} = \Phi.$$

$$a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} < 0 \quad (\text{elliptik tipda}), \quad u_{xx} + u_{yy} = \Phi.$$

$$a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = 0 \quad (\text{parabolik tipda}), \quad u_{xx} = \Phi.$$

XULOSA

Mazkur Bitiruv malakaviy ishining I bobi ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarni kanonik ko'rinishi to'g'risida tayyorlangan bo'lib, bu

bobning birinchi mavzusi asosiy tushunchalar deb nomlandi. Bu mavzuda differensial tenglama, xususiy hosilali differensial tenglama, ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama, Koshi masalasi, chegaraviy masala, aralash masalalar haqida to'liq ma'lumot berilib, misollar orqali o'rganilib borildi.

Ushbu bobning ikkinchi mavzusi xususiy hosilali differensial tenglamalarni E^n fazoda umumiy holda berilishi deb nomlanib, bu mavzuda E^n fazodagi n -tartibli multiindeks va uning uzunligi, chiziqli differensial tenglama, kvazi chiziqli differensial tenglama, tenglamaning regulyar (klassik) yechimi, bir jinsli bo'lmagan tenglama, xususiy hosilali ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar haqida ma'lumotlar berilib, misollar orqali o'rganildi.

Uchinchi mavzuda ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarni kanonik ko'rinishga keltirish o'rganildi.

II. IKKITA BUZILISH CHIZIG'IGA EGA BO'LGAN GIPERBOLIK TIPDAGI KVAZICHIZIQLI TENGLAMA UCHUN KOSHI MASALASI

2.1. Eyler integrallari, gipergeometrik funksiyalar va ularning xossalari

Agar bir jinsli ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama uchdan ortiq bo'lmagan maxsus nuqtaga ega bo'lsa, umumiylikni saqlagan holda, ular $0, \infty, 1$ nuqtalar bo'ladi deyish mumkin. Agar barcha maxsus nuqtalar "to'g'ri" bo'lsa, unda tenglama ko'rinishini quyidagicha yozish mumkin [1]:

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + [x - (a+b+1)z]\frac{du}{dz} - abu = 0, \quad (2.1.1)$$

bu yerda $a, b, c - z$ ga bog'liq emas.

Bu tenglama gipergeometrik differensial tenglama deyiladi. a, b, c larni tenglama parametrlari deymiz, ular ixtiyoriy kompleks son bo'la oladi.

Bu differensial tenglamani yechimini yozishda Eyler integrallari va Gauss tomonidan kiritilgan gipergeometrik funksiyaning xossalaridan foydalaniladi. Eng avvalo Eyler integrallari va ularni xossalarini keltiramiz [2]:

Eyler integrallari

Birinchi tur Eyler integrali. Quyidagi ko'rinishdagi integral shunday nomlanadi (Lejandra taklifiga ko'ra):

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx, \quad (2.1.2)$$

bu yerda $a, b > 0$. Bu ikki a va b o'zgaruvchilarga bog'liq funksiyani ifodalaydi: B (Beta) funksiyasi.

Biz bilamizki, qaralayotgan integral musbat a va b (birdan kichik bo'lsa ham) qiymatlar uchun mavjud, shuningdek, haqiqatdan ham B funksiyaning aniqlanishiga ko'ra ham shunday bo'lishi mumkin. Uning ba'zi bir xossalarini ko'ramiz.

1°. Avvalo, umuman olganda bevosita ($x = 1 - t$ o'rgartirish bajarish orqali) ega bo'lamiz:

$$B(a, b) = B(b, a)$$

shunga ko'ra B funksiya a va b ga nisbatan simmetrik bo'ladi.

2°. (2.1.2) formulani qismlarga bo'lib, $b > 1$ bo'yicha integrallashga ko'ra, quyidagini topamizk

$$\begin{aligned} B(a, b) &= \int_0^1 (1-x)^{b-1} d\frac{x^a}{a} = \frac{x^a(1-x)^{b-1}}{a} \Big|_0^1 + \frac{b-1}{a} \int_0^1 x^a(1-x)^{b-2} dx = \\ &= \frac{b-1}{a} \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-2} dx - \frac{b-1}{a} \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx = \\ &= \frac{b-1}{a} B(a, b-1) - \frac{b-1}{a} B(a, b) \end{aligned}$$

bundan

$$B(a, b) = \frac{b-1}{a+b-1} B(a, b-1). \quad (2.1.3)$$

Bu formulani $b-1$ dan katta bo'lgan holda b ni kamaytirish maqsadida qo'llash mumkin, xuddi shunday har doim ikkinchi argumentni birdan kichik bo'lishiga erishish mumkin.

Shuningdek, B ning simmetrik ko'rinishda ekanligidan birinchi argument uchun ham shunga erishish mumkin, yani boshqacha ko'rinishdagi formula keltiriladi ($a > 1$):

$$B(a, b) = \frac{a-1}{a+b-1} B(a-1, b). \quad (2.1.4)$$

Agar b natural n songa teng bo'lsa, unda (2.1.3) formulani ketma-ket qo'llab, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$B(a, n) = \frac{n-1}{a+n-1} \cdot \frac{n-2}{a+n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a+1} \cdot B(a, 1).$$

Ammo

$$B(a, 1) = \int_0^1 x^{a-1} dx = \frac{1}{a}.$$

Shunga ko'ra, $B(a, n)$ uchun va bir vaqtda $B(n, a)$ uchun quyidagi natijaviy ifoda kelib chiqadi:

$$B(n, a) = B(a, n) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)}{a \cdot (a+1) \cdot (a+2) \cdot \dots \cdot (a+n-1)}. \quad (2.1.5)$$

Agar a ham natural m soniga teng bo'lsa, unda

$$B(m, n) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

Agar $0! = 1$ ekanligini inobatga olsak, bu formulani $m = 1$ yoki $n = 1$ bo'lganda ham qo'llash mumkin.

3°. B funksiya uchun muhim hisoblanadigan analitik tasviri quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi. Ayniqsa, agar (2.1.2) integralda $x = \frac{y}{1+y}$ almashtirishni bajarsak, bu yerda $y - 0$ dan ∞ gacha o'zgaradi, undan

$$B(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}} dy. \quad (2.1.6)$$

4°. (2.1.6) formulada $0 < a < 1$ deb hisoblab, $b = 1 - a$ desak

$$B(a, 1-a) = \int_0^{\infty} \frac{y^{a-1}}{1+y} dy.$$

Ma'lumki, yuqorida hisoblangan integral Eyler nomi bilan bog'liq. Uning qiymatini qo'yib, quyidagi formulaga kelamiz:

$$B(a, 1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi} \quad (0 < a < 1). \quad (2.1.7)$$

Agar, xususiyl holda $a = 1-a = \frac{1}{2}$ bo'lsa, unda:

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi. \quad (2.1.7')$$

Ikkinchi tip Eyler integrali. Bu nom Lejandra tomonidan ajoyib integralga berilgan:

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx, \quad (2.1.8)$$

ixtiyoriy $a > 0$ da kelib chiqadi va Γ ("Gamma") funksiyasi deyiladi. Γ funksiyasi matematik analiz uchun asosiy funksiyalardan biri hisoblanadi. (2.1.8) integral ko'rinishdagi Γ funksiyaning xossalari o'rganish, bir vaqtning o'zida parametrga bog'liq integral teoremlarning qo'llanilishiga doir misol bo'ladi.

(2.1.8) da $x = \ln \frac{1}{z}$ deb olib, topamiz:

$$\Gamma(a) = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{z}\right)^{a-1} dz.$$

Ma'lumki,

$$\ln \frac{1}{z} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - z^{\frac{1}{n}}\right),$$

n ning o'sishi bilan $n \left(1 - z^{\frac{1}{n}}\right)$ ifoda o'z limitiga intiladi. Bunday holda, quyidagi tenglik o'rinli

$$\Gamma(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{a-1} \int_0^1 \left(1 - z^{\frac{1}{n}}\right)^{a-1} dz ,$$

yoki , agar $z = y^n$ ni qo'ysak,

$$\Gamma(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^a \int_0^1 y^{n-1} (1 - y)^{a-1} dy$$

bo'ladi.

(2.1.5) ga asosan

$$\int_0^1 y^{n-1} (1 - y)^{a-1} dy = B(n, a) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)}{a \cdot (a+1) \cdot (a+2) \cdot \dots \cdot (a+n-1)}.$$

Xuddi shunday, Eyler-Gauss formulasiga kelamiz:

$$\Gamma(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^a \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)}{a \cdot (a+1) \cdot (a+2) \cdot \dots \cdot (a+n-1)}. \quad (2.1.9)$$

Keyinchalik Γ funksiya xossalarini ko'rsatilgani kabi uning (2.1.8) integral ko'rinishidan keltirib chiqaramiz.

Γ funksiyaning oddiy xossalari.

1°. $\Gamma(a)$ funksiya barcha $a > 0$ qiymatlarda uzluksiz va barcha tartibli hosilalari ham uzluksiz bo'ladi. Buni isbotlash uchun hosilalarning mavjudligini ko'rsatishning o'zi yetarli. (2.1.8) integralni integral ostida differensiallab, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\Gamma'(a) = \int_0^\infty x^{a-1} \cdot \ln x \cdot e^{-x} dx. \quad (2.1.10)$$

Leybnits qoidasini qo'llash shuni ko'rsatadiki, ikkala integral ham

$$\int_0^1 x^{a-1} \cdot \ln x \cdot e^{-x} dx \quad \text{va} \quad \int_1^{\infty} x^{a-1} \cdot \ln x \cdot e^{-x} dx$$

a ga bog'liq teng kuchli: birinchisi $x = 0$ da $a \geq a_0 > 0$ (majoranta $x^{a_0-1} |\ln x|$) uchun, ikkinchisi esa $x = \infty$ da $a \leq A < \infty$ uchun (majoranta $x^A e^{-x}$).

Shu yo'l bilan ikkinchi tartibli hosilaning mavjudligini ko'rish mumkin

$$\Gamma''(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} (\ln x)^2 e^{-x} dx \quad (2.1.10')$$

va qolgan barcha hollar ham yuqoridagi kabi isbotlanadi.

2°. (2.1.8) dan, alohida-alohida integrallab, quyidagini topamiz:

$$a \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx = x^a e^{-x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} x^a e^{-x} dx ,$$

ya'ni

$$\Gamma(a+1) = a \cdot \Gamma(a). \quad (2.1.11)$$

Shu formulani qayta qo'llab,

$$\Gamma(a+n) = (a+n-1)(a+n-2) \dots (a+1)a\Gamma(a) \quad (2.1.12)$$

formulaga ega bo'lamiz.

Shu yo'l orqali argumentning ixtiyoriy katta qiymatida Γ funksiyani hisoblash, argumentning birdan kichik bo'lganida Γ funksiyani hisoblash masalasiga keltirish mumkin.

Agar (2.1.12) da $a = 1$ deb olsak

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1, \quad (2.1.13)$$

undan ko'rinadiki

$$\Gamma(n+1) = n!. \quad (2.1.14)$$

Funksiya Γ faqat natural n qiymatlarda aniqlangan $n!$ – argumentning ixtiyoriy musbat qiymatlari sohasida shunday hisoblanadi.

3°. Γ funksiyaning o'zgarish yo'li. Endi biz a ning 0 dan ∞ gacha o'sishida $\Gamma(a)$ funksiyaning umumiy ko'rinishida tasavvurga egamiz.

(2.1.13) va (2.1.14) dan $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ ekanligi kelib chiqadi, shuning uchun Roll teoremasiga ko'ra, 1 va 2 orasida $\Gamma'(a)$ hosilaning a_0 ildizi yotishi kerak. Bu hosila doimiy o'suvchi, yoki (2.1.10') dan ma'lumki, ikkinchi $\Gamma''(a)$ hosila doimiy musbat.

Shuningdek, $0 < a < a_0$ da $\Gamma'(a) < 0$ hosila va $\Gamma(a)$ funksiya kamayadi, $a_0 < a < \infty$ da esa $\Gamma'(a) > 0$ bo'ladi, shuning uchun $\Gamma(a)$ o'suvchi; $a = a_0$ da minimumga erishadi. Biz kuzatib o'tirmaydigan hisoblash shuni beradiki,

$$a_0 = 1,4616 \dots, \quad \min \Gamma(a) = \Gamma(a_0) = 0,8856 \dots$$

$\Gamma(a)$ uchun a ning 0 ga yoki ∞ ga yaqinlashishining limitini hisoblash qiziqarli bo'ladi. (2.1.13) dan ma'lumki

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a} \rightarrow +\infty$$

$a \rightarrow +0$ da. Boshqa tomondan, (2.1.14) ko'rinishidan

$$\Gamma(a) > n!,$$

Faqatgina $a > n+1$ da, ya'ni, $a \rightarrow +\infty$ da $\Gamma(a) \rightarrow +\infty$.

4°. B va Γ funksiyalari orasidagi munosabat.

Biz bu munosabatni o'rnatish uchun, $x = ty$ almashtirish orqali (2.1.8) ni quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$\frac{\Gamma(a)}{t^a} = \int_0^{\infty} y^{a-1} e^{-ty} dy. \quad (2.1.15)$$

Bu yerda a ni $a + b$ ga almashtirib, va t ni $1 + t$ ga almashtirib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{\Gamma(a + b)}{(1 + t)^{a+b}} = \int_0^{\infty} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy.$$

Endi bu tenglikning ikkala qismini t^{a-1} ga ko'paytiramiz va 0 dan ∞ gacha o'zgaruvchi t bo'yicha integrallaymiz:

$$\Gamma(a + b) \int_0^{\infty} \frac{t^{a-1}}{(1 + t)^{a+b}} dt = \int_0^{\infty} t^{a-1} dt \int_0^{\infty} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy.$$

Chapdagi integraldan $B(a, b)$ ni ko'rish qiyin emas, o'ngdan esa yana integrallaymiz. Natijada esa ((2.1.15) va (2.1.8) ni hisobga olganda):

$$\begin{aligned} \Gamma(a + b) \cdot B(a, b) &= \int_0^{\infty} y^{a+b-1} e^{-y} dy \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-ty} dt = \\ &= \int_0^{\infty} y^{a+b-1} e^{-y} \cdot \frac{\Gamma(a)}{y^a} dy = \Gamma(a) \int_0^{\infty} y^{b-1} e^{-y} dy = \Gamma(a) \cdot \Gamma(b). \end{aligned}$$

Bundan,

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a + b)}. \quad (2.1.16)$$

Olingan natija, bu Eyler munosabati Direxliga tegishli. Ayniqsa, uning tegishlilik asosini aniqlash uchun integrallar joylashuvini aniqlash lozim.

Biz buni amalga oshirishdan avval, $a > 1, b > 1$ bilan chegaralanamiz. Unda funksiya

$$t^{a-1}y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}$$

barcha xossalarda bajariluvchi bo'ladi: bu funksiya $y \geq 0, t \geq 0$ uchun uzluksiz va integrallar

$$t^{a-1} \int_0^{\infty} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy = \Gamma(a+b) \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}$$

va

$$y^{a+b-1} e^y \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-ty} dt = \Gamma(a) y^{b-1} e^{-y}$$

o'z o'rnida ular uzluksiz funksiyalarni ifodalaydi: birinchisi – t dan $t \geq 0$ uchun, ikkinchisi – y dan $y \geq 0$ uchun. Olingan integrallarning o'rnini almashtirishni eslatadi, bu esa (2.1.16) dan - $a > 1, b > 1$ bo'lgan hol uchun o'rinli.

Agar faqat $a > 0, b > 0$ ma'lum bo'lsa, unda isbotlanganlarga ko'ra

$$B(a+1, b+1) = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)}.$$

Bundan esa, B funksiya uchun (2.1.3), (2.1.4) formulalarni keltirib, Γ uchun (2.1.11) formuladan ortiqcha chegaralarsiz (2.1.16) formulani olish mumkin.

5°. Qo'shimcha formula.

Agar (2.1.16) formulada $b = 1 - a$ ni qo'ysak, unda (2.1.7) va (2.1.13) ko'rinishidagi munosabatni olamiz:

$$\Gamma(a) \cdot \Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Bu esa qo'shimcha formula deyiladi.

Bundan $a = \frac{1}{2}$ da quyidagini topamiz:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (2.1.18)$$

Agar integralda

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} dz = \sqrt{\pi}$$

$z = x^2$ almashtirishni bajarsak, Eyler-Puasson [14] integrali qiymatini olamiz:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Gipergeometrik differensial tenglamalar

Yuqorida aytib o'tilganidek, quyidagi (2.1.1) tenglama

$$z(1-z) \frac{d^2 u}{dz^2} + [x - (a+b+1)z] \frac{du}{dz} - abu = 0 \quad (2.1.1)$$

gipergeometrik differensial tenglama deyiladi. a, b, c larni differensial tenglama parametrlari deymiz, ular ixtiyoriy kompleks son bo'la oladi va z ga bog'liq emas.

Quyidagilarni kiritamiz, ya'ni

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)},$$

boshqacha aytganda,

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_n = a(a+1) \dots (a+n-1), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

bo'lsin.

Agar $c \neq 0, -1, -2, \dots$ bo'lsa, unda

$$u_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n n!} \equiv {}_2F_1(a, b; c; z) \equiv F(a, b; c; z) \quad (2.1.19)$$

ifoda $z = 0$ nuqtadagi (2.1.1) gipergeometrik differensial tenglamaning regulyar yechimi bo'ladi.

Agar $c = -n$, bu yerda $n = 0, 1, 2, \dots$ bo'lsa, unda

$$\begin{aligned} u_1 &= z^{n+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a+n+1)_m (b+n+1)_m z^m}{(n+2)_m m!} = \\ &= z_2^{n+1} F_1(a+n+1, b+n+1; n+2; z) \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

${}_2F_1(a, b; c; z)$ funksiya a, b, c parametrlarga ega z o'zgaruvchiga bog'liq gipergeometrik qator deyiladi. ${}_2F_1$ dagi indekslar tashlab yuboriladi, agar bu funktsiyani boshqa tipdagi gipergeometrik qatorlar bilan aralashtirish xavfi bo'lmasa.

Gipergeometrik qator (2.1.19) ma'noga ega bo'lmay qolsa, $c = -m$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) bo'lgan holda qaraymiz.

Agar $c = -m, m = n, n+1, n+2, \dots$ bo'lganidan $a = -n$ yoki $b = -n, n = 0, 1, 2, \dots$, bo'lsa, unda

$$\left. \begin{aligned} F(-n, b; -m; z) &= \sum_{r=0}^n \frac{(-n)_r (b)_r z^r}{(-m)_r r!} \\ F(a, -n; -m; z) &= \sum_{r=0}^n \frac{(a)_r (-n)_r z^r}{(-m)_r r!} \end{aligned} \right\} \quad (2.1.21)$$

deb yozib olishimiz mumkin.

(2.1.20) va (2.1.21) funksiyalar (2.1.1) tenglamaning yechimi bo'ladi. Shu kabi, agar $-a$ va $-b$ nomusbat butun sonlar bo'lsa, gipergeometrik differensial tenglama z ga bog'liq ko'phad bo'ladigan yechimga ega bo'ladi.

Agar a va b lar $0, -1, -2, \dots$ dan farqli bo'lsa, unda (2.1.19) gipergeometrik qator (yoki, (2.1.20) $c = -n$ bo'lgan holda) $|z| < 1$ aylana ichida yotuvchi barcha qiymatlarga absolyut to'g'ri keladi. Bundan

$$\begin{aligned} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!} &= \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(n+1)} = \\ &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} n^{a+b-c-1} [1 + O(n^{-1})], \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

unda, Raabe alomatiga ko'ra, gipergeometrik qator uchun quyidagi natijaga erishamiz:

- absolyut yaqinlashish $|z| = 1$ da, $z \neq 1$, agar $Re(a+b-c) < 0$;
- shartli yaqinlashish $|z| = 1$ da, $z \neq 1$, agar $0 \leq Re(a+b-c) < 1$;
- uzoqlashish $|z| = 1$ da, $z \neq 1$, agar $1 \leq Re(a+b-c)$.

Elementar munosabatlar. (2.1.19) aniqlanishidan kelib chiqadiki,

$$F(a, b; c; z) = F(b, a; c; z)$$

oltita funksiya

$$F(a \pm 1, b; c; z), \quad F(a, b \pm 1; c; z), \quad F(a, b; c \pm 1; z)$$

$F(a, b; c; z)$ funksiyaning aralashmasi deyiladi. $F(a, b; c; z)$ va ixtiyoriy ikki aralash funksiya orasida koefitsientlari z dan olingan chiziqli funksiya bo'ladigan chiziqli bog'liqlik mavjud. Birinchi aniqlangan tipdan 15 ta munosabat mavjud. Bundaylardan biri:

$$cF(a, b-1; c; z) + (a-b)zF(a, b; c+1; z) = cF(a-1, b; c; z). \quad (2.1.23)$$

(2.1.23) munosabatni tekshirish uchun uning ikkala tomonini darajali qatorlarga yoyamiz. z^n da chap tomon koeffitsientlari quyidagi ko'rinishni oladi

$$\begin{aligned} & c \frac{(a)_n (b-1)_n}{(c)_n n!} + (a-b) \frac{(a)_{n-1} (b)_{n-1}}{(c+1)_{n-1} (n-1)!} = \\ & = \frac{(a)_{n-1} (b)_{n-1}}{(c+1)_{n-1} (n-1)!} \left[a-b + \frac{(b-1)(a+n-1)}{n} \right] = \\ & = \frac{c(a)_{n-1} (b)_{n-1}}{(c)_n n!} (a-1)(b+n-1) = c \frac{(a-1)_n (b)_n}{(c)_n n!} \end{aligned}$$

bu esa (2.1.23) tenglikni isbotlaydi.

Agar l, m, n – butun sonlar bo'lsa, unda quyidagi

$$F(a+l, b+m; c+n; z)$$

funksiya $F(a, b; c; z)$ funksiya va koeffitsientlari ratsional a, b, c, z dan bo'lgan aralash funksiyalardan birining chiziqli kombinatsiyasini Gauss munosabatini qayta qo'llash orqali keltirib chiqariladi.

Vaholanki, biz hisoblashimiz lozimki, c ca $c+n$ lar $0, -1, -2, \dots$ dan farqli. $F(a, b; c; z)$ va $F(a+l, b+m; c+n; z)$ funksiyalar assotsiatsialanuvchi qatorlar deyiladi. Ko'rsatish mumkinki, agar uchinchi parameter qiymati $0, -1, -2, \dots$ dan farqli bo'lsa, unda ixtiyoriy uchta assotsiatsialanuvchi qatorlar koeffitsientlari ko'phadlar bo'ladigan chiziqli bir jinsli bog'liqlikka ega bo'ladi.

Quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi:

$$\frac{d^n}{dz^n} F(a, b; c; z) = \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} F(a+n, b+n; c+n; z), \quad (2.1.24)$$

$$(a)_n z^{a-1} F(a+n, b; c; z) = \frac{d^n}{dz^n} [z^{a+n-1} F(a, b; c; z)], \quad (2.1.25)$$

$$\begin{aligned} (c)_n z^{c-1} (1-z)^{a+b-c} F(a, b; c; z) = \\ = \frac{d^n}{dz^n} [z^{n+c-1} (1-z)^{n+a+b-c} F(a+n, b+n; c+n; z)]. \end{aligned} \quad (2.1.26)$$

(2.1.26) munosabat yakobi mulohazasidan kelib chiqqan. (2.1.25) va (2.1.26) ni isbotlash uchun, quyidagi operatorlarni keltiramiz:

$$\delta = z \frac{d}{dz}, \quad D = \frac{d}{dz}.$$

Ma'lumki,

$$aF(a+1, b; c; z) = (\delta + a)F(a, b; c; z)$$

va shunday qilib, ixtiyoriy analitik funksiya uchun

$$(\delta + a)(\delta + a + 1) \dots (\delta + a + n - 1)f(z) = z^{1-a} D^n [z^{a+n-1} f(z)]$$

bo'lsa, (2.1.25) tenglik isbotlanadi.

(2.1.26) ga ega bo'lish uchun, (2.1.1) tenglikni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$D[z(1-z)MDu] = abMu$$

bu yerda $M = z^{c-1}(1-z)^{a+b-c}$.

(2.1.24) tenglikdan kelib chiqadiki, $D^{n-1}F(a, b; c; z)$ gipergeometrik differensial tenglamani a, b, c lar $a+n-1, b+n-1, c+n-1$ ga almashtirilgan holda qanoatlantiradi. Bundan esa rekkurent formulaga ega bo'lamiz:

$$D[z^n(1-z)^n MD^n F] = (a+n-1)(b+n-1)[z(1-z)]^{n-1} MD^{n-1} F$$

va shuningdek,

$$D^n[z^n(1-z)^n MD^n F] = (a)_n(b)_n MF.$$

(2.1.24) ni yana bir marotaba qo'llab va F – n -darajadan past bo'lgan ko'phad bo'lmasa deb faraz qilsak, ya'ni $(a)_n(b)_n \neq 0$ bo'lsa, (2.1.26) ga ega bo'lamiz.

Riman tenglamasi umumiy nazariyasidan ko'rinadiki, umuman olganda (2.1.1) tenglamaning quyidagi ko'rinishdagi 24 ta yechimi bo'lishi kerak:

$$z^\rho(1-z)^\sigma F(a', b'; c'; z'),$$

bu yerda, ρ, σ, a', b', c' lar a, b, c dan olingan chiziqli funksiya, z va z' esa kasr-chiziqli akslantirish orqali bog'langan. Bu yechimlarning ixtiyoriy uchasi doimiy koeffitsientlar bilan chiziqlilik asosida bog'liq. Bu munosabatlar gipergeometrik qatorlarning analitik davomi uchun qo'llanilishi mumkin.

Asosiy integral ifodalar.

Agar $Re\ c > Re\ b > 0$ bo'lsa, Eyler formulasining o'rni

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a} dt \quad (2.1.27)$$

Bu tenglikning o'ng tomoni $|\arg(1-z)| < \pi$ sohada z ga bog'liq bir qiymatli analitik funksiya bo'ladi, ya'ni, (2.1.27) tenglik $F(a, b; c; z)$ uchun analitik davomni beradi. (2.1.27) tenglikni $|z| < 1$ da isbotlash uchun, $(1-tz)^{-a}$ ni binomial qatorga yoyamiz va hosil bo'lgan bo'linishni hadma-had integrallaymiz. Biz beta – integrallarga ega bo'lamiz, ular (2.1.1), (2.1.22) orqali hisoblanadi.

Ayniyatdan

$$\left\{ z(1-z) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + [c - (a+b+1)z] \frac{\partial}{\partial z} - ab \right\} \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a} =$$

$$= -a \frac{\partial}{\partial t} [t^b (1-t)^{c-b} (1-tz)^{-a-1}] \quad (2.1.28)$$

kelib chiqadi, (2.1.1) tenglikning o'ng tomonidagi ifoda (2.1.1) differensial tenglamaning yechimi bo'ladi. $s = -t$ deb olib, $Re\ b > 0, Re\ (a + 1 - c) > 0$ va $|\arg z| < \pi$ da

$$\int_0^{\infty} s^{b-1} (1+s)^{c-b-1} (1+sz)^{-a} ds$$

integral (2.1.1) gipergeometrik differensial tenglamaning yechimi bo'ladi. $s = \frac{\tau}{1-\tau}$

o'rniga qo'yish quyidagi ko'rinishdagi integralga olib keladi:

$$\int_0^1 \tau^{b-1} (1-\tau)^{a-c} [1-\tau(1-z)]^{-a} d\tau.$$

Shuningdek,

$$\begin{aligned} F(a, b; a+b+1-c; 1-z) = \\ = \frac{\Gamma(a+b+1-c)}{\Gamma(b)\Gamma(a+1-c)} \int_0^{\infty} s^{b-1} (1+s)^{c-b-1} (1+sz)^{-a} ds \end{aligned} \quad (2.1.29)$$

ham gipergeometrik differensial tenglamaning yechimi bo'ladi. Undan tashqari, quyidagi ko'rinishdagi ixtiyoriy integral

$$\int_C t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt$$

(2.1.1) gipergeometrik differensial tenglamaning yechimi bo'ladi, agarda C Riman fazosida integral funksiyada yopiq kontur bo'lsa, yoki kontur oxirlari $t^b (1-t)^{c-b} (1-tz)^{-a-1}$ funksiyaning nollari bo'lsa. $(1-tz)^{-a}$ ni binomial qatorga yoyib va (2.1.23)-(2.1.25) kontur integrallarni beta funksiya uchun qo'llab, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$F(a, b; c; z) = \frac{i\Gamma(c) \exp[i\pi(b-c)]}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)2 \sin[\pi(c-b)]} \int_0^{(1+)} \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a} dt,$$

$$\operatorname{Re} b > 0, \quad |\arg(1-z)| < \pi, \quad c-b \neq 1, 2, 3, \dots$$

$$F(a, b; c; z) = \frac{-i\Gamma(c) \exp[i\pi b]}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)2 \sin[\pi b]} \int_0^{(1+)} \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a} dt,$$

$$\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b, \quad |\arg(-z)| < \pi, \quad b \neq 1, 2, 3, \dots$$

$$F(a, b; c; z) = \frac{-\Gamma(c) \exp[i\pi c]}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)4 \sin \pi b \sin[\pi(c-b)]} \int^{(1+, 0+, 1-, 0-)} \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a} dt \quad (2.1.30)$$

$$|\arg(-z)| < \pi, \quad b, 1-c, c-b \neq 1, 2, 3, \dots$$

Barcha hollarda biz faraz qilamiz, integrallash yo'li haqiqiy t , $0 \leq t \leq 1$ uchun $t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}$ Riman fazosidagi nuqtadan boshlanadi va bu funksiyaning asosiy qiymati $t^b, (1-t)^{c-b}$, $z \rightarrow 0$ bo'lganda $(1-tz)^{-a} \rightarrow 1$ bo'lgani kabi $(1-tz)^{-a}$ aniqlanadi.

Agar $z = 1$ ni qo'ysak, (2.1.27) tenglamaning o'ng tomoni beta integral bo'ladi va (2.1.1)-(2.1.22) dan quyidagi kelib chiqadi,

$$F(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad \operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0, \quad \operatorname{Re}(c-a-b) > 0. \quad (2.1.31)$$

Bevosita isbotlaymizki, (2.1.31) tenglik parametrning juda kichik chegaralarida to'g'ri bo'lib qoladi: $c \neq 0, -1, -2, \dots$ va $\operatorname{Re}(c-a-b) > 0$ bo'lishi yetarli. Rekkurent formuladan:

$$(c-a)(c-b)zF(a, b; c+1; z) = c[(2c-a-b-1)z-c+1]F(a, b; c; z) + c(c-1)(1-z)F(a, b; c-1; z)$$

va yuqoridagi eslatmadan kelib chiqadiki, $m = 1, 2, 3, \dots$ da tenglik o'rinli bo'lib qoladi:

$$F(a, b; c; 1) = \frac{(c-a)(c-b)}{c(c-a-b)} F(a, b; c+1; 1) = \\ = \frac{(c-a)_m (c-b)_m}{(c)_m (c-a-b)_m} F(a, b; c+m; 1).$$

2.2. Masalaning qo'yilishi

Yuqorida aytib o'tilganidek, xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasining muhim va jadal rivojlanib borayotgan yo'nalishlaridan biri aralash tipdagi tenglamalar sohasi hisoblanadi. Ikkinchi tomondan bu tenglamalarning yechimlari mexanika, fizika va texnika masalalarida keng ko'lamli tarzda tadbiq etilishi amaliyotda katta qiziqish uyg'otadi.

Jumladan, F.Frankl yassi devorli idishdan tovush tezligidan yuqori tezlikda suyuqlik yoki gazning oqib chiqish (idish ichida tezlik tovush tezligidan past) masalasi A.S.Chapliginning

$$K(u)U_{xx} + U_{yy} = 0 \quad (K(0) = 0, K'(u) > 0)$$

tenglamasi uchun chegaraviy masalaga kelishini ko'rsatilgan.

Aralash tipdagi tenglamalar deb qaralayotgan sohaning bir qismida elliptik, ikkinchi qismida giperbolik tipga tegishli bo'lgan tenglamalarga aytiladi, ularni ajratib turuvchi chiziqda (buzilish chizig'i) esa tenglama parabolik tipga tegishli yoki aniqlanmagan bo'lishi mumkin.

Aralash tipdagi tenglamalar sirasiga kiruvchi ikkita buzilish chizig'iga ega bo'lgan quyidagi giperbolik tipdagi tenglamani qaraymiz:

$$-(-y)^m u_{xx} + x^m u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \quad m = \text{const} > 0 \quad (2.2.1)$$

Ω – soha, (2.2.1) tenglamada $y = 0$ o'qidan OA kesma orqali va $OD: x + y = 0$, $DA: x^p + (-y)^p = 1$, $2p = m + 2$ xarakteristikalar bilan chegaralangan bo'lsin.

2.2.1-ta'rif: (2.2.1) tenglamani qanoatlantiruvchi $u(x, y) \in C[\bar{\Omega}] \cap C^2[\Omega]$ funksiyaga tenglamaning regulyar yechimi deb ataladi.

Koshi masalasi. Ω sohada quyidagi boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi (2.2.1) tenglamaning regulyar yechimini toping:

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.2.2)$$

$$\lim_{y \rightarrow -0} u_y(x, y) = v(x), \quad 0 < x < 1, \quad (2.2.3)$$

bu yerda $\tau(x), v(x)$ – berilgan funksiyalar, $\tau(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$, $v(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$ va $v(x)$ funksiyasi $O(0, 0)$ nuqtada $2/(m+2)$ tartibli ikkinchi tur uzilishga ham ega bo'lishi mumkin.

Mazkur bitiruv malakaviy ishida, (2.2.1) tenglamaning o'ng tomoni $f(x, y, u, u_x, u_y)$ quyidagi shartni qanoatlantirsin deb faraz qilamiz:

$$f(x, y, u, u_x, u_y) = (x^{2p} - (-y^{2p}))(-xy)^{\alpha p} f^1(x, y, u, u_x, u_y),$$

bunda $f^1(x, y, u, u_x, u_y)$ funksiya $Q = \{(x, y) \in \bar{\Omega}, -\infty < u, u_x, u_y < +\infty\}$ sohada uzluksiz va barcha argumentlar bo'yicha uzluksiz hosilaga ega, $m < 2$ da $\alpha \geq 0$ va $m \geq 2$ da $\alpha > (m-2)(m+2)$ hamda

$$\max_Q \left| |f_1|, |f_{1u}|, |f_{1u_x}|, |f_{1u_y}| \right| \leq \text{const} \quad (2.2.4)$$

shartni qanoatlantiradi.

2.3. Koshi masalasi yechimining yagonaligi va mavjudligi

(2.2.1) tenglama va (2.2.2), (2.2.3), boshlang'ich shartlar tenglamaning o'ng tomoni (2.2.4) xarakteristik koordinatalarda

$$\sqrt{\xi} = x^p - (-y)^p, \quad \sqrt{\zeta} = x^p + (-y)^p$$

quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$Lu = u_{\xi\zeta} - \frac{\beta}{\zeta - \xi} (u_\zeta - u_\xi) = -K_1 H(\xi, \zeta) f_1(\xi, \zeta, u, u_\xi, u_\zeta), \quad (2.3.1)$$

$$u \Big|_{\zeta=\xi} = \tau(\xi^{1/2p}), \quad 0 \leq \xi \leq 1,$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow \xi} 2^{\frac{1}{p}} p (\sqrt{\zeta} - \sqrt{\xi})^{2\beta} (\sqrt{\xi} u_{\xi} - \sqrt{\zeta} u_{\zeta}) = v(\xi^{1/2p}), 0 < \xi < 1, \quad (2.3.2)$$

bu yerda

$$K_1 = 4^{-2/p} p^{-2}, \quad H(\xi, \zeta) = (\zeta - \xi)^{\alpha-4\beta}, \quad 2\beta = \frac{m}{(m+2)}.$$

Umumiylikni chegaralamagan holda, $\tau(\xi) = v(\xi) = 0$ deb olish mumkin.

Haqiqatdan ham [3],

$$\begin{aligned} \tilde{u}_0(\xi, \zeta) = & \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} \int_{\xi}^{\zeta} \frac{(\zeta - \xi)^{1-2\beta} \tau\left(t^{\frac{1}{2p}}\right)}{(\zeta - t)^{1-\beta} (t - \xi)^{1-\beta}} dt - \\ & - \frac{4^{2\beta-1} \Gamma(1-2\beta)}{p \Gamma^2(1-\beta)} \int_{\xi}^{\zeta} \frac{t^{-\frac{1}{2p}} v\left(t^{\frac{1}{2p}}\right) dt}{(\zeta - t)^{\beta} (t - \xi)^{\beta}} \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

$L\tilde{u}_0 = 0$ tenglama uchun (2.3.2) boshlang'ich shartga ega bo'lgan Koshi masalasining yechimi.

Unda, $u(\xi, \zeta) = \tilde{u}_0(\xi, \zeta) + \bar{u}(\xi, \zeta)$ ni tenglamaga qo'yib, (2.3.1) va (2.3.2) ni hisobga olganda, $\bar{u}(\xi, \zeta)$ uchun bir jinsli bo'lmagan quyidagi tenglamani olamiz:

$$L\bar{u} = -K_1 H(\xi, \zeta) f_1(\xi, \zeta, \tilde{u}_0 + \bar{u}, \tilde{u}_{0\xi} + \bar{u}_{\xi}, \tilde{u}_{0\zeta} + \bar{u}_{\zeta}),$$

boshlang'ich shartlar esa quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\bar{u} \Big|_{\zeta = \xi} = 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1,$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow \xi} 2^{\frac{1}{2}} p (\sqrt{\zeta} - \sqrt{\xi})^{2\beta} (\sqrt{\xi} \bar{u}_{\xi} - \sqrt{\zeta} \bar{u}_{\zeta}) = 0, \quad 0 < \xi < 1,$$

bunda $\Delta - (\xi, \zeta)$ o'zgaruvchilar fazosida Ω sohaning obrazi.

Δ sohada (2.3.2) nol boshlang'ich shartlar bilan berilgan (2.3.1) tenglama uchun Koshi masalasini Riman usulida noldan farqli ekvivalent integrodifferensial tenglamaga keltiramiz:

$$u(\xi, \zeta) = -K_1 \int_{\xi}^{\zeta} d\xi' \int_{\xi'}^{\zeta} H(\xi', \zeta') f_1(\xi', \zeta', u, u_{\xi'}, u_{\zeta'}) v(\xi', \zeta', \xi, \zeta) d\zeta', \quad (2.3.4)$$

bu yerda $v(\xi', \zeta', \xi, \zeta) - \Delta$ sohada $f_1(\xi, \zeta, u, u_\xi, u_\zeta)$ da (2.3.1) tenglamaning Riman funksiyasi hisoblanadi.

(2.3.1) tenglama uchun Riman funksiyasi [1] $v(\xi', \zeta', \xi, \zeta) - \Delta$ quyidagi ko'rinishga ega

$$v(\xi', \zeta', \xi, \zeta) = \frac{(\zeta' - \xi')^{2\beta}}{(\zeta - \xi')^\beta (\zeta' - \xi)^\beta} F(\beta, \beta, 1, z),$$

$$z = \frac{(\zeta - \zeta')(\xi' - \xi)}{(\zeta' - \xi)(\zeta - \xi')}, \quad (2.3.5)$$

bu yerda $F(a, b, c, z)$ – Gauss tomonidan kiritilgan gipergeometrik funksiya.

(2.3.1) tenglama uchun (2.3.5) Riman funksiyasi va uning hosilalari uchun quyidagi baholar o'rinni:

$$|v(\xi', \zeta', \xi, \zeta)| \leq (\zeta' - \xi')^\beta / (\zeta - \xi)^\beta, \quad (2.3.6)$$

$$|v_\xi(\xi', \zeta', \xi, \zeta)| \leq (\zeta' - \xi')^\beta / ((\zeta' - \xi)(\zeta - \xi))^\beta, \quad (2.3.7)$$

$$|v_\zeta(\xi', \zeta', \xi, \zeta)| \leq (\zeta' - \xi')^\beta / ((\zeta - \xi')(\zeta - \xi))^\beta, \quad (2.3.8)$$

$$|v_{\xi\zeta}(\xi', \zeta', \xi, \zeta)| \leq \text{const}(\zeta' - \xi')^\beta / ((\zeta' - \xi')(\zeta' - \xi)(\zeta - \xi'))^\beta. \quad (2.3.9)$$

Ularning o'rinnililigini birinchi baholash misolida ko'rsatamiz.

Haqiqatdan ham, $0 \leq z \leq 1$, $0 < t < 1$, $1 - zt \geq 1 - z$ tengsizlikni hisobga olgan holda va $F(a, b, c, z)$ funksiyaning integral ko'rinishi (2.3.5) dan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$|v_\xi(\xi', \zeta', \xi, \zeta)| =$$

$$= \left| B^{-1}(\beta, 1 - \beta) \frac{(\zeta' - \xi')^{2\beta}}{(\zeta' - \xi)^\beta (\zeta - \xi')^\beta} \int_0^1 t^{\beta-1} (1 - t)^{-\beta} (1 - tz)^{-\beta} dt \right| \leq$$

$$\leq B^{-1}(\beta, 1 - \beta) \frac{(\zeta' - \xi')^{2\beta} (1 - z)^{-\beta}}{(\zeta' - \xi)^\beta (\zeta - \xi')^\beta} \int_0^1 t^{\beta-1} (1 - t)^{-\beta} dt \leq \frac{(\zeta' - \xi')^\beta}{(\zeta - \xi)^\beta}.$$

Qolgan baholashlar ham yuqorida keltirilgani kabi isbotlanadi.

(2.3.4) tenglamaning yechimini ketma-ket yaqinlashish usuli bilan aniqlaymiz. Birinchi yaqinlashish uchun

$$u_0(\xi, \zeta) = 0$$

deb olamiz.

n - yaqinlashish aniqlangan bo'lsa, unda $(n + 1)$ - yaqinlashishni quyidagi formula orqali aniqlaymiz:

$$u_{n+1}(\xi, \zeta) == -K_1 \int_{\xi}^{\zeta} d\xi' \int_{\xi'}^{\zeta} H(\xi', \zeta') f_1 \left(\xi', \zeta', u_n, \frac{\partial u_n}{\partial \xi'}, \frac{\partial u_n}{\partial \zeta'} \right) v(\xi', \zeta', \xi, \zeta) d\zeta' \quad (2.3.10)$$

Bu yerdan, (2.3.10) ni ξ va ζ bo'yicha differensiallab, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{n+1}}{\partial \xi} &= K_1 \int_{\xi}^{\zeta} H(\xi, \zeta') f_1 \left(\xi, \zeta', u_n, \frac{\partial u_n}{\partial \xi}, \frac{\partial u_n}{\partial \zeta'} \right) v(\xi, \zeta', \xi, \zeta) d\zeta' - \\ &- K_1 \int_{\xi}^{\zeta} d\xi' \int_{\xi'}^{\zeta} H(\xi', \zeta') f_1 \left(\xi', \zeta', u_n, \frac{\partial u_n}{\partial \xi'}, \frac{\partial u_n}{\partial \zeta'} \right) v_{\xi}(\xi', \zeta', \xi, \zeta) d\zeta', \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{n+1}}{\partial \zeta} &= -K_1 \int_{\xi}^{\zeta} H(\xi', \zeta) f_1 \left(\xi', \zeta, u_n, \frac{\partial u_n}{\partial \xi'}, \frac{\partial u_n}{\partial \zeta} \right) v(\xi', \zeta, \xi, \zeta) d\xi' - \\ &- K_1 \int_{\xi}^{\zeta} d\xi' \int_{\xi'}^{\zeta} H(\xi', \zeta') f_1 \left(\xi', \zeta', u_n, \frac{\partial u_n}{\partial \xi'}, \frac{\partial u_n}{\partial \zeta'} \right) v_{\zeta}(\xi', \zeta', \xi, \zeta) d\zeta'. \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

2.3.1-lemma. Agar (2.2.4) shart bajarilgan bo'lsa, unda quyidagi baholash o'rinli:

$$|u_{n+1} - u_n| \leq MC_0 (3\tilde{N}C)^n (\zeta - \xi)^{\alpha-4\beta+2}, \quad (2.3.13)$$

$$\left| \frac{\partial u_{n+1}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_n}{\partial \xi} \right| \leq MC_1 (3\tilde{N}C)^n (\zeta - \xi)^{\alpha-4\beta+1}, \quad (2.3.14)$$

$$\left| \frac{\partial u_{n+1}}{\partial \zeta} - \frac{\partial u_n}{\partial \zeta} \right| \leq MC_2 (3\tilde{N}C)^n (\zeta - \xi)^{\alpha-4\beta+1}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.3.15)$$

bu yerda

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{K_1}{(\alpha - 3\beta + 2)(\alpha - 3\beta + 1)}, \\
c_1 &= \frac{K_1}{\alpha - 3\beta + 1} + \frac{K_1 B(\beta, \alpha - 5\beta + 2)}{\alpha - 4\beta + 1} \\
c_2 &= \frac{K_1}{\alpha - 3\alpha + 1} + \frac{K_1}{(\alpha - 3\beta + 1)^2}, \quad c = \max\{c_1, c_1, c_2\}, \\
M &= \max_{\bar{\Delta}} |f_1(\xi, \zeta, 0, 0, 0)|, \quad \tilde{N} = \max_{P_1} \left| |f_{1u}|, |f_{1u_\xi}|, |f_{1u_\zeta}| \right|.
\end{aligned}$$

Isbot. $n = 0$ bo'lsin. Unda (2.2.4) shartga ko'ra, (2.3.6) baholashdan va (2.3.10) dan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned}
|u_1 - u_0| &\leq K_1 \left| \int_{\xi}^{\zeta} d\xi' \int_{\xi'}^{\zeta} H(\xi', \zeta') f_1(\xi', \zeta', 0, 0, 0) v(\xi', \zeta', \xi, \zeta) d\zeta' \right| \leq \\
&\leq K_1 M \int_{\xi}^{\zeta} d\xi' \int_{\xi'}^{\zeta} \frac{(\zeta' - \xi')^{\alpha-3\beta}}{(\zeta - \xi)^{\beta}} d\zeta' = \frac{K_1 M}{\alpha - 3\beta + 1} \int_{\xi}^{\zeta} (\zeta - \xi')^{\alpha-3\beta+1} (\zeta - \xi)^{-\beta} d\xi' = \\
&= C_0 M (\zeta - \xi)^{\alpha-4\beta+2}.
\end{aligned} \tag{2.3.16}$$

(2.3.6), (2.3.7), (2.3.8) baholashlarga o'xshash ravishda, (2.2.4) shartdan foydalanib, (2.3.11) va (2.3.12) ga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \right| &\leq M c_1 (\zeta - \xi)^{\alpha-4\beta+1}, \\
\left| \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} - \frac{\partial u_0}{\partial \zeta} \right| &\leq M c_1 (\zeta - \xi)^{\alpha-4\beta+1}.
\end{aligned} \tag{2.3.17}$$

$n = 1$ bo'lsin. Unda (2.2.4) shart va (2.3.10) dan (2.3.6), (2.3.16), (2.3.17) lardan foydalanib,

$$\begin{aligned}
|u_2 - u_1| &\leq K_1 \int_{\xi}^{\zeta} d\xi' \int_{\xi'}^{\zeta} \left(|f_{1u}| |u_1 - u_0| + |f_{1u_{\xi_1}}| |u_{1\xi_1} - u_{0\xi_1}| \right. \\
&\quad \left. + |f_{1u_{\zeta_1}}| |u_{1\zeta_1} - u_{0\zeta_1}| \right) |v(\xi', \zeta', \xi, \zeta)| d\zeta' \leq
\end{aligned}$$

$$\leq \tilde{N}MCK_1 \int_{\xi}^{\zeta} d\xi' \int_{\xi'}^{\zeta} \frac{3(\zeta' - \xi')^{\alpha-3\beta}}{(\zeta - \xi)^{\beta}} d\zeta' \leq MC_0 3\tilde{N}C(\zeta - \xi)^{\alpha-4\beta+2},$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

(2.3.11) dan (2.2.4) ni hisobga olganda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u_2}{\partial \xi} - \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \right| \leq K_1 & \left(\int_{\xi}^{\zeta} (|f_{1u}| |u_1 - u_0| + |f_{1u_{\xi}}| |u_{1\xi} - u_{0\xi}| \right. \\ & + |f_{1u_{\zeta'}}| |u_{1\zeta'} - u_{0\zeta'}|) |v(\xi', \zeta', \xi, \zeta)| H(\xi, \zeta') d\zeta' \\ & + \int_{\xi}^{\zeta} d\xi' \int_{\xi'}^{\zeta} (|f_{1u}| |u_1 - u_0| + |f_{1u_{\xi'}}| |u_{1\xi'} - u_{0\xi'}| \\ & \left. + |f_{1u_{\zeta'}}| |u_{1\zeta'} - u_{0\zeta'}|) |v_{\xi}(\xi', \zeta', \xi, \zeta)| H(\zeta', \xi') d\zeta' \right). \end{aligned}$$

Bu yerda (2.3.6) , (2.3.8), (2.3.16) va (2.3.17) larni qo'llab, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u_2}{\partial \xi} - \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \right| & \leq MC3\tilde{N}K_1 \left(\int_{\xi}^{\zeta} \frac{(\zeta' - \xi)^{\alpha-3\beta}}{(\zeta - \xi)^{\beta}} d\zeta' + \int_{\xi}^{\zeta} d\xi' \int_{\xi'}^{\zeta} \frac{(\zeta' - \xi')^{\alpha-3\beta}}{(\zeta - \xi)^{\beta}(\zeta' - \xi)} d\zeta' \right) \\ & \leq MC3\tilde{N}K_1 \left(\frac{(\zeta - \xi)^{\alpha-4\beta+1}}{\alpha - 3\beta + 1} + \int_{\xi}^{\zeta} (\zeta - \xi')^{-\beta} (\xi' - \xi)^{\beta-1} d\xi' \int_{\xi'}^{\zeta} (\zeta' - \xi')^{\alpha-4\beta} d\zeta' \right) \\ & \leq MC_1 3\tilde{N}C(\zeta - \xi)^{\alpha-4\beta+1}. \end{aligned}$$

Yuqoridagidek (2.3.12) dan topamiz:

$$\left| \frac{\partial u_2}{\partial \zeta} - \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} \right| \leq MC_2 3\tilde{N}C(\zeta - \xi)^{\alpha-4\beta+1}.$$

Matematik induksiya usulini qo'llab, (2.3.13)-(2.3.15) baholashlarning to'g'ri ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

(2.3.13) va (2.3.15) baholashlardan ma'lumki, quyidagi qatorlar

$$u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (u_0 - u_{n-1}),$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial \xi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial u_n}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} \right), \quad \frac{\partial u_0}{\partial \zeta} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial u_n}{\partial \zeta} - \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \zeta} \right)$$

$\bar{\Delta}$ da $\tilde{N} < (3c)^{-1}$ bo'lganda absolyut yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

Bundan xulosa qilamizki, (2.3.10)-(2.3.12) ketma-ketliklarning limiti mavjud, $u(\xi, \zeta)$ limit funksiyasi esa (2.3.4) integrodifferensial tenglamani qanoatlantiradi va quyidagi baholashlarga ega bo'ladi:

$$\begin{aligned} |u(\xi, \zeta)| &\leq N_1 (\zeta - \xi)^{\alpha-4\beta+2}, \\ |u_\xi(\xi, \zeta)| &\leq N_1 (\zeta - \xi)^{\alpha-4\beta+1}, \\ |u_\zeta(\xi, \zeta)| &\leq N_1 (\zeta - \xi)^{\alpha-4\beta+1}, \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

bu yerda $N_1 = MC(1 - 3\tilde{N}C)^{-1}$.

(2.3.4) tenglamaga L operatorni qo'llab ((2.3.6)-(2.3.8) dan foydalanib),

$$Lu = -K_1 H(\xi, \zeta) f_1(\xi, \zeta, u, u_\xi, u_\zeta),$$

ya'ni

$$u = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{n-1})$$

qator Koshi masalasining yechimi bo'lishini ko'ramiz.

Endi esa (2.3.18) bahoni qanoatlantiruvchi (2.3.4) integrodifferensial tenglamaning yechimi yagona ekanligini ko'rsatamiz.

Δ sohada $V(\xi, \zeta) \neq u(\xi, \zeta)$ – (2.3.18) bahoni qanoatlantiruvchi (2.3.4) tenglamaning yechimi bo'lsin.

$$z_n(\xi, \zeta) = V(\xi, \zeta) - S_n(\xi, \zeta) \quad (2.3.19)$$

farqini qaraymiz, bu yerda

$$S_0(\xi, \zeta) = u_0(\xi, \zeta),$$

$$S_n(\xi, \zeta) = \sum_{k=1}^n (u_k(\xi, \zeta) - u_{k-1}(\xi, \zeta)) + u_0(\xi, \zeta), \quad n = 1, 2, \dots$$

$n = 0$ bo'lsin. Unda, (2.3.18) ni hisobga olib, (2.3.19) dan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} |z_0(\xi, \zeta)| &= |V(\xi, \zeta)| \leq N_1(\xi, \zeta)^{\alpha-4\beta+2}, \\ \left| \frac{\partial z_0(\xi, \zeta)}{\partial \xi} \right| &\leq N_1(\zeta - \xi)^{\alpha-4\beta+1}, \\ \left| \frac{\partial z_0(\xi, \zeta)}{\partial \zeta} \right| &\leq N_1(\zeta - \xi)^{\alpha-4\beta+1}. \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

Matematik induksiya usulidan foydalanib, tengsizliklarni isbotlaymiz. $n = 1$ bo'lsin.

Unda (2.3.19), (2.2.4) shartdan (2.3.6) dan foydalanib, (2.3.20) dan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} |z_1(\xi, \zeta)| &\leq K_1 \left| \int_{\xi}^{\zeta} d\xi' \int_{\xi'}^{\zeta} \left(f_1(\xi', \zeta', S_0, S_{0\xi'}, S_{0\zeta'}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - f_1(\xi', \zeta', V, V_{\xi'}, V_{\zeta'}) \right) H(\xi', \zeta') v(\xi', \zeta', \xi, \zeta) d\zeta' \right| \leq \\ &\leq K_1 \int_{\xi}^{\zeta} d\xi' \int_{\xi'}^{\zeta} \left(|f_{1u}| |z_0| + |f_{1u_{\xi'}}| |z_{0\xi'}| + |f_{1u_{\zeta'}}| |z_{0\zeta'}| \right) |v_{\xi}(\xi', \zeta', \xi, \zeta)| H(\zeta', \xi') d\zeta' \\ &\leq \\ &\leq 3K_1 N_1 \tilde{N} \int_{\xi}^{\zeta} d\xi' \int_{\xi'}^{\zeta} |v_{\xi}(\xi', \zeta', \xi, \zeta)| H(\zeta', \xi') d\zeta' \leq \\ &\leq 3K_1 N_1 \tilde{N} \int_{\xi}^{\zeta} d\xi' \int_{\xi'}^{\zeta} \frac{(\zeta' - \xi')^{\alpha-3\beta}}{(\zeta - \xi)^{\beta}} d\zeta' \leq \\ &\leq N_1(3\tilde{N}C)(\zeta - \xi)^{\alpha-4\beta+2}. \end{aligned}$$

Yuqoridagi kabi hisoblab, quyidagilarni topamiz:

$$\left| \frac{\partial z_1(\xi, \zeta)}{\partial \xi} \right| \leq N_1(3\tilde{N}C)1(\zeta - \xi)^{\alpha-4\beta+1},$$

$$\left| \frac{\partial z_1(\xi, \zeta)}{\partial \zeta} \right| \leq N_1(3\tilde{N}C)(\zeta - \xi)^{\alpha-4\beta+1}.$$

Matematik induksiya usulini qo'llab, quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$|z_n(\xi, \zeta)| = |V(\xi, \zeta) - S_n(\xi, \zeta)| \leq N_1(3\tilde{N}C)^n(\zeta - \xi)^{\alpha-4\beta+1}, n = 1, 2, \dots$$

Agar $\tilde{N} < (3C)^{-1}$ ekanligini inobatga olsak, $n \rightarrow \infty$ izlanayotgan funksiya $z_n(\xi, \zeta) \rightarrow 0$.

Ushbu hisoblashlardan $V(\xi, \zeta) = u(\xi, \zeta)$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, ikkita buzilish chizig'iga ega bo'lgan giperbolik tipdagi (2.2.1) kvazichiziqli tenglama uchun berilgan shartlar bajarilganda (2.2.2) va (2.2.3) Koshi masalasi yechimi mavjud va yagona. Shuni isbotlash talab etilgan edi.

Ushbu keltirilganlarni quyidagi teorema ko'rinishida ifodalash mumkin:

2.3.1-teorema. Agar (2.2.4) va $\tilde{N} < (3C)^{-1}$ tengsizlik bajarilsa, (2.2.1)-(2.2.3) masala yagona yechimga ega bo'ladi.

Xulosa

Mazkur bitiruv malakaviy ishining II bobi 3 ta paragrafdan iborat bo'lib, 1-paragrafda eyler integrallari, gipergeometrik funksiyalar, ularning xossalari va ularga doir misollar yechib ko'rsatilgan. 2-paragrafda asosiy masalaning qo'yilishi o'rganilgan. 3-paragrafda Koshi masalasining yagonaligi va mavjudligi haqidagi teorema isboti bilan keltirilgan va ularga doir misollar yechib ko'rsatilgan.

XOTIMA

Mazkur Bitiruv malakaviy ishining I bobi ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarni kanonik ko'rinishi to'g'risida tayyorlangan bo'lib, bu bobning birinchi mavzusi asosiy tushunchalar deb nomlandi. Bu mavzuda differensial tenglama, xususiy hosilali differensial tenglama, ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama, Koshi masalasi, chegaraviy masala, aralash masalalar haqida to'liq ma'lumot berilib, misollar orqali o'rganilib borildi.

Ushbu bobning ikkinchi mavzusi xususiy hosilali differensial tenglamalarni E^n fazoda umumiy holda berilishi deb nomlanib, bu mavzuda E^n fazodagi n -tartibli multiindeks va uning uzunligi, chiziqli differensial tenglama, kvazi chiziqli differensial tenglama, tenglamaning regulyar (klassik) yechimi, bir jinsli bo'lmagan tenglama, xususiy hosilali ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar haqida ma'lumotlar berilib, misollar orqali o'rganildi.

Uchinchi mavzuda ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarni kanonik ko'rinishga keltirish o'rganildi.

Mazkur bitiruv malakaviy ishining II bobi 3 ta paragrafdan iborat bo'lib, 1-paragrafda eyler integrallari, gipergeometrik funksiyalar, ularning xossalari va ularga doir misollar yechib ko'rsatilgan. 2-paragrafda asosiy masalaning qo'yilishi o'rganilgan. 3-paragrafda Koshi masalasining yagonaligi va mavjudligi haqidagi teorema isboti bilan keltirilgan va ularga doir misollar yechib ko'rsatilgan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Смирнов М.М. Вырождающегося гиперболические уравнения. – Минск: Высшая школа, 1977 г., 159 с.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1965 г., 297 с.
3. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.: Наука, 1985 г., 304 с.
4. Азларов Т., Мансуров Х. Математик анализ, 2-кисм, Тошкент, «Ўқитувчи», 1989.
5. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции, Москва, «Наука», 1974
6. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики, Москва, «Наука», 1982.
7. Sh.M.Mirziyoev “Erkin va farovon, demokratik O’zbekiston davlatini birgalikda barpo etamiz” Toshkent O’zbekiston 2017 y
8. M.S.Salohiddinov “Oddiy differensial tenglamalar”. Toshkent 1996 y.
9. Владимиров В.С. Уравнения математической физики, Москва, «Наука», 1971.
10. Годунов С.К. Уравнения математической физики, Москва, «Наука», 1971.
11. Кошляков Н.С. Глинер Э.Б. Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики, Москва, Физматгиз, 1962
12. Кузнецов Д.С. Специальные функции, Москва, «Высшая школа», 1962.
13. Михайлов В.П. Уравнения математической физики, Москва, «Наука», 1975.
14. Г.М.Фихтенгольц Курс дифференциального и интегрального исчисления. 2-том. 750 бет.