ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ТАДЖИЕВА МОХБОНУ АКРОМ КИЗИ

S^4 СИМПЛЕКСДАГИ КВАДРАТИК ГОМЕОМОРФИЗМЛАРНИНГ ДИНАМИК ХОССАЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2022

УДК: 517.98

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ТАДЖИЕВА МОХБОНУ АКРОМ КИЗИ

S^4 СИМПЛЕКСДАГИ КВАДРАТИК ГОМЕОМОРФИЗМЛАРНИНГ ДИНАМИК ХОССАЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2022

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2019.2.PhD/FM331 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://ik-fizmat.nuu.uz/) ва “ZiyoNet” таълим ахборот тармоғида (http://www.ziyonet.uz/) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Ганиходжаев Расул Набиевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Худойберганов Гулмирза** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Жамилов Уйғун Умурович физика-математика фанлари доктори, профессор
Етакчи ташкилот:	Тошкент давлат транспорт университети

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2022 йил “____” ____________ соат ____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+998 71) 227 12 24, факс: (+998 71) 246 53 21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (____ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+998 71) 246 02 24).

Диссертация автореферати 2022 йил “____” ____________ куни тарқатилди.

(2022 йил “____” ____________ даги ____ рақамли реестр баённомаси).

А.Садуллаев
Илмий даражалар берувчи
илмий кенгаш раиси,
ф.-м.ф.д., академик

Н.К.Мамадалиев
Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш илмий котиби,
ф.-м.ф.ф.д. (PhD)

А.Садуллаев
Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш ҳузуридаги илмий семинар
муовини, ф.-м.ф.д., академик

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда квадратик акслантиришлар динамик хоссаларини ўрганиш масалаларига бағишланади. Ҳозирги вақтда симплексда аниқланган квадратик акслантиришлар динамик системалар назариясининг энг ривожланган соҳаларидан бири бўлиб, математик анализ, дифференциал тенгламалар, биология ва эҳтимоллар назарияси фанларининг ғоя ва масалалари билан боғлиқ. Қўзғалмас нуқталарни тадқиқ этиш усуллари симплексда аниқланган квадратик акслантиришларнинг ечимларини анализ қилиш, шунингдек, квадратик акслантиришларнинг қўзғалмас нуқталарини тўлиқ аниқлаш, тавсифлаш ва қўзғалмас нуқталарнинг хусусиятларини ўрганиш имконини беради. Шу сабабли квадратик акслантиришларнинг динамик хоссалари ва траекториялар ҳаракати динамикасини тавсифлаш – замонавий математикада муҳим аҳамиятга эга ҳисобланади.

Жаҳонда ҳозирги вақтда квадратик акслантиришлар замонавий дискрет динамик системаларнинг энг долзарб муаммоларидан бири бўлиб, симплексда аниқланган Лотка-Вольтерра типидаги квадратик акслантиришларнинг қўзғалмас нуқталарини тўлиқ таснифлаш бўйича илмий изланишлар олиб борилмоқда. Бунда олиб борилаётган тадқиқотлар қўзғалмас нуқтанинг турини аниқлаш, яъни итарувчи, тортувчи ва эгар нуқта бўлиш шартларини батафсил таснифлашнинг аҳамиятини очиб беради. Бундан ташқари динамик системаларни таснифлаш, уларнинг ички нуқталари траекториялари ҳолатларини кўрсатиш, эволюция оператори учун зарурий ва етарли шартларни олишга алоҳида эътибор берилмоқда.

Мамлакатимизда, айниқса, кейинги йилларда фундаментал фанлар, жумладан, квант механикаси ва физикада тадбиқига эга бўлган долзарб йўналишларга эътибор кучайтирилди. Бундай йўналишлардан бири – динамик системалар назариясидир. Жумладан, охирги йилларда симплексда аниқланган квадратик акслантиришларни ўрганишга алоҳида эътибор қаратилди. Дискрет динамик системаларни чуқур тадқиқ қилиш натижасида, симплексда аниқланган квадратик акслантиришларни таҳлил қилишда салмоқли натижаларга эришилди. “Функционал анализ, алгебра, динамик системалар назарияси, дифференциал тенгламалар, эҳтимоллар назарияси ва математик статистика” фанларининг устивор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Бунда квадратик, кубик ва бошқа дискрет динамик системаларнинг илмий натижаларини илм-фаннинг бошқа турдош соҳаларида қўллаш жуда муҳим аҳамиятга эга ҳисобланади.

---

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида”ги 292-сон қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида”ги Фармони, 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон “Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ва 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон “Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. “Математика, механика ва информатика” устивор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Ҳозирги вақтда замонавий математиканинг долзарб йўналишларидан бири бўлган динамик системалар назарияси А.Пуанкаренинг илмий ишларида бошланган. Динамик системаларни таснифлаш уларнинг ҳолатларини кўрсатиш, эволюция оператори ва унинг хусусиятларини тавсифлаш, вақтга боғлиқлик ва шунга ўхшаш усулларга асосланади. Дифференциал тенгламалар назариясининг сифат назариясида юзага келган узлуксиз динамик системалар, асосан, дифференциал тенгламалар ечимлари ҳолатининг кўпхилликлардаги глобал топологик ҳолатини ўрганади. Шу муносабат билан узлуксиз динамик системалар оқим деб аталади. Бу йўналиш асосчилари А.Пуанкаре, Дж.Биркгоф, А.Андронов, А.Н.Колмогоров ва бошқалар. Комплекс динамик системадаги илмий ишлар П.Фату ва Г.Жюлиянинг классик ишларида ўрганила бошланган. Бу илмий ишларда $z \to z^2 + c, c \in C$ акслантириш орбиталарининг динамик хусусиятлари таснифланган.

Популяцион генетика масалалари охирги икки асрдан буён математик олимлар томонидан ўрганилиб келинмоқда. Бу соҳа математик биологиянинг асосий соҳаларидан бири ҳисобланади. Популяцион генетика масалаларда чекли ўлчамли симплексда аниқланган квадратик стохастик операторлар ҳосил бўлиши табиий. Бунда биологик системанинг эволюцияси дискрет динамик системалар орқали ёритилади. Энг содда генетик моделлар Г.Х.Харди, Ю.И.Любич, Г.Кестен, В.Вольтерра, С.Н.Бернштейн ишларида ўз аксини топган. Т.А.Саримсоқов биологик системани ўрганиш учун эҳтимоллар назариясининг усулларини қўллай бошлаган. Унинг таклифига кўра, дискрет динамик системалар ўргανила бошланди. Р.Н.Ганиходжаевнинг илмий изланишларида Вольтерра туридаги квадратик стохастик акслантиришлар графлар назарияси ва дифференциал тенгламанинг сифат назарияси ёрдамида ўрганилган. Бу назариянинг асосида Лотка-Вольтерра акслантиришининг траекторияларини ўрганиш ётади.

Д.Б.Эшмаматова томонидан $\varphi(x)=\frac{x_i}{x_j}, i\neq j$ кўринишдаги Ляпунов функцияларнинг мавжудлик шартлари кўрсатилган ва икки ўлчамли симплексда аниқланган Лотка-Вольтерра типидаги операторларнинг композициялари траекторияларининг асимптотикалари таҳлил қилинган. Н.Н.Ганиходжаев, У.А.Розиков, Ф.А.Мухаммедов, У.У.Жамилов, М.Ладра, А.Ю.Хамраев, Ф.А.Шахиди, М.Сабуровларнинг илмий ишлари чекли ўлчамли симплексда аниқланган квадратик ва кубик стохастик акслантиришларнинг қўзғалмас нуқталари, уларнинг хоссалари ҳамда ички нуқталарининг траекторияларининг ҳолатларини ўрганиш ва таҳлил қилишга бағишланган. К.А.Кургановнинг илмий ишларида умумий ҳолатда бўлмаган кососимметрик матрицали Лотка-Вольтерра акслантиришлари ва уларнинг қўзғалмас нуқталари таснифи ҳамда тўрт ўлчамли симплексда аниқланган Лотка-Вольтерра акслантиришларининг эргодик хоссалари кўрилган. Бироқ S^4 симплексдаги квадратик гомеоморфизмларнинг динамик хоссалари атрофлича тадқиқ қилинмаган. Бу илмий ишимизнинг долзарблигини асослайди.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетининг ОТ-Ф4-31 “Нокоммутатив модуллар, Лейбниц алгебралари ва симплексда полиномиал каскадлар” мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади бешта учга эга бўлган бир жинсли турнирларга мос, кососимметрик матрицаси умумий ҳолатда бўлган Лотка-Вольтерра системалари учун ички нуқталар траекторияларининг динамикасини тавсифлаш ҳамда кичик ўлчамли симплексда аниқланган айниган кососимметрик матрицали Лотка-Вольтерра операторининг ички нуқталар динамикасини тўлиқ таснифлашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

кососимметрик матрица умумий ҳолатда бўлганда бешта учга эга бўлган бир жинсли турнирларга мос келувчи Лотка-Вольтерра операторининг қўзғалмас нуқталар динамикасини аниқлаш ва таҳлил қилиш;

қўзғалмас нуқталар картаси ёрдамида тоқ сонли координаталари нолга тенг бўлмаган ички қўзғалмас нуқтани аниқлаш ва қўзғалмас нуқталар хусусиятини тавсифлаш (итарувчи, тортувчи, эгар);

кичик ўлчамли симплексда аниқланган айниган кососимметрик матрицали Лотка-Вольтерра операторининг қўзғалмас нуқталар динамикасини тўлиқ тавсифлаш;

$m=3$ га тенг бўлганда мусбат ва манфий траекторияларнинг мавжудлик критерийсини топиш (эволюциянинг бошланиши ва тугаши, ихтиёрий коэффициентлар учун);

$m=4$ га тенг бўлганда мусбат ва манфий траекторияларнинг мавжудлик критерийсини топиш, яъни эволюциянинг бошланиши ва тугаши шартларини аниқлаш ($a_{ki}=\pm 1,\ k\neq i$ коэффициентлар учун).

Тадқиқотнинг объектини бир жинсли турнирлар, аралаш графлар, қўзғалмас нуқталарнинг хусусияти, қўзғалмас нуқталар картаси ташкил этади.

Тадқиқотнинг предметини тўрт ўлчамли симплексда квадратик гомеоморфизм, айниган ва айнимаган кососимметрик матрицалар учун Лотка-Вольтерра акслантиришлари ташкил қилади.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида функционал анализ, математик анализ, умумий топология ва динамик системалар назарияси усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

қўзғалмас нуқталар картаси ёрдамида бешта координатаси нолдан фарқли ички қўзғалмас нуқта мавжудлиги аниқланган ва исботланган;

тўрт ўлчамли симплексда аниқланган айнимаган кососимметрик матрицали ҳамда икки ўлчамли симплексда аниқланган айниган матрицали Лотка-Вольтерра акслантиришлари қўзғалмас нуқталарнинг итарувчи, тортувчи ва эгар нуқта бўлиш хусусиятлари аниқланган;

графлар назарияси ёрдамида тўрт ўлчамли симплекснинг ички нуқталари траекторияларининг динамикаси кўрсатилган;

айниган кососимметрик матрицаларга мос квадратик Лотка-Вольтерра акслантиришлари учун ички нуқталарининг мусбат ва манфий траекторияларининг мавжудлиги исботланган (кичик ўлчамлар учун).

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

олинган тадқиқот натижалари ва диссертация ишида қўлланилган усуллар популяцион генетика масалаларида қўлланилган;

квадратик акслантиришларнинг қўзғалмас нуқталари ҳақидаги натижаларни биологик системанинг эволюцион ҳолатини характерловчи динамик системаларига тадбиқ этилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги функционал анализ, умумий топология, динамик системалар назарияси усулларидан фойдаланилгани ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган. Шунингдек, олинган натижалар Python 3.10.0 ва Wolfram Mathematica математик дастурлар ёрдамида текширилгани билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти шундан иборатки, тўрт ўлчамли симплексда аниқланган умумий ҳолатдаги кососимметрик матрицага мос Лотка-Вольтерра акслантиришининг мавжудлик критерийси ва айниган кососимметрик матрицага мос Лотка-Вольтерра операторининг мусбат ва манфий траекторияларининг мавжудлигини исботлаш билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти олинган тадқиқиот усуллари, динамик системалар алоҳида маҳсус курсларда ва математик биологияда қўлланилиши билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Тўрт ўлчамли симплексда аниқланган квадратик гомеоморфизмларнинг динамик хоссалари бўйича олинган диссертация натижалари қуйидаги илмий тадқиқот лойиҳасида қўлланилган:

S^4 симплексдаги квадратик гомеоморфизмларнинг динамик хоссаларини тавсифлаш натижалари ОТ-Ф4-31 рақамли Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон миллий университетининг (2017-2020 йй.) “Нокоммутатив модуллар, Лейбниц алгебралари ва симплексда полиномиал каскадлар” лойиҳасида симплексда аниқланган бир жинсли турнирларга мос Лотка-Вольтерра оператори ички нуқталар траекторияларини тавсифлашда фойдаланилган (Ўзбекистон Миллий университети 2021 йил 17 июлдаги 04/11-3803-сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши симплексда аниқланган бир жинсли турнирларга мос Лотка-Вольтерра оператори ички нуқталар траекторияларининг ҳолатини тўлиқ тавсифлаш имконини берган;

S^4 симплексда аниқланган бир жинсли турнирларга мос Лотка-Вольтерра операторининг қўзғалмас нуқталар картасини таснифлаш натижалари UMT/CRIM/2-2/2/14 рақамли Малайзия Теренггану университетининг (2019-2020 йй.) “Куч кабелининг коэффициентини топиш учун ўзгартирилган гомотопик таҳлил усули” тўрт ўлчамли симплексда квадратик гомеоморфизм, айниган ва айнимаган кососимметрик матрицалар учун Лотка-Вольтерра акслантиришни аниқлашда фойдаланилган (Малайзия Теренггану университетининг 03/30-55233-сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши айниган кососимметрик матрицаларга мос квадратик Лотка-Вольтерра акслантиришлари учун ички нуқталарнинг мусбат ва манфий траекторияларининг мавжудлигини таҳлил қилиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 5 та халқаро ва 5 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация тадқиқоти мавзуси бўйича жами 16 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 5 та, жумладан, 2 таси хорижий ва 3 таси республика журналларида, шунингдек, 10 та маъруза тезислари илмий конференция материалларида нашр этилган ҳамда 1 та муаллифлик гувоҳномаси олинган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг умумий ҳажми 93 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **“Бошланғич маълумотлар”** деб номланувчи бобида диссертациянинг асосий натижаларини тақдим этиш учун зарур бўлган дастлабки маълумотлар келтирилган. Лотка-Вольтерра оператори учун умумий ҳолатда бўлиш тушунчаси, яъни кососимметрик матрицанинг барча жуфт тартибли бош минорлари нолдан фарқли бўлиши киритилган. Турнирлар ва бир жинсли турнирлар таснифи берилган ва Лотка-Вольтерра системасини ўрганишда турнирлардан фойдаланиш кўриб чиқилган.

Айтайлик, $x=(x_1,x_2,...,x_m)$ турлар эҳтимолликларининг тақсимоти бўлсин. Турларнинг ўзаро чатишиши тасодифий (панмиксия) бўлсин ва турли авлодлар ўртасидаги ҳеч қандай чатишиш бўлмасин, у ҳолда популяциянинг авлоддан кейинги авлодга ўтиш эҳтимоликлари тақсимоти қуйидаги формула билан аниқланади:

$$x_k^{(n+1)}=x_k^{(n)}\left(1+\sum_{i=1}^{m}a_{ki}x_i^{(n)}\right),\ k=1,2,...,m,\ n=0,1,... .$$

$x^0=(x_1^{\ 0},x_2^{\ 0},...,x_m^{\ 0})$ бошланғич авлоддаги эҳтимоллик тақсимоти, $a_{ki}=-a_{ik},\ |a_{ki}|\le 1$ ирсият коэффициенти.

Квадратик стохастик оператор $V:S^{m-1}\to S^{m-1}$ ни кўриб чиқамиз:

$$(Vx)_k=x_k^{'}=\sum_{i,j=1}^{m}P_{ij,k}x_ix_j,\ k=\overline{1,m},$$

бу ерда $x=(x_1,x_2,...,x_m)\in S^{m-1},\ (Vx)_k - Vx\in S^{m-1}$ нуқтанинг k-чи координатаси, бу ердаги $P_{ij,k}$ коэффициент қуйидаги шартларни қаноатлантиради:

$$P_{ij,k}=P_{ji,k}\ge 0,\ \sum_{k=1}^{m}P_{ij,k}=1.$$

1-таъриф. Агар $P_{ij,k}=0,\ k\notin\{i,j\}$ бўлса, у ҳолда квадратик стохастик V оператор S^{m-1} симплексда аниқланган Лотка-Вольтерра акслантириши дейилади.

Таърифга кўра, ихтиёрий $i,k=\overline{1,m}$ учун $P_{ik,k}+P_{ik,i}=1$ тенглик бажарилади.

Айтайлик, $Vx=(x_1^{'},x_2^{'},...,x_m^{'})$ бўлсин. Киритилган белгилашлардан фойдаланиб, операторнинг умумий кўринишини қуйидагича ёзиб оламиз:

$$x_k^{'}=x_k\left(1+\sum_{i=1}^{m}a_{ki}x_i\right),\ k=\overline{1,m}. \qquad (1)$$

Бу муносабат S^{m-1} симплексда Лотка-Вольтерра операторининг каноник кўриниши дейилади.

2-таъриф. Агар барча жуфт тартибли бош минорлари нолдан фарқли бўлса, кососимметрик матрица $A=(a_{ki})$ умумий ҳолатда дейилади.

Агар кососимметрик матрица умумий ҳолатда бўлса, у ҳолда унга мос V Лотка-Вольтерра акслантириши a_{ki} коэффициенти билан ҳам умумий ҳолатдаги оператор бўлади.

1-мисол. $V: S^3 \to S^3$ Лотка-Вольтерра операторининг умумий кўриниши қуйидагича:

$$\begin{cases} x_1' = x_1(1+ax_2-bx_3+cx_4), \\ x_2' = x_2(1-ax_1+dx_3-ex_4), \\ x_3' = x_3(1+bx_1-dx_2+fx_4), \\ x_4' = x_4(1-cx_1+ex_2-fx_3), \end{cases}$$

бунда $a,b,...,f \in [-1;1]$.

Бу оператор фақат ва фақат коэффициентлари $a,b,...,f \in [-1;1]$ қуйидаги шартни қаноатлантирса

$$a,b,...,f \neq 0 \quad \text{ва} \quad af-be+cd \neq 0$$

умумий ҳолатда бўлади.

Р.Н.Ганиходжаевнинг ишларида қуйидаги натижалар келтирилган:

1-натижа. Агар умумий ҳолатдаги V – Лотка-Вольтерра оператори ички қўзғалмас нуқтага эга бўлса, у ҳолда бу нуқта итарувчи қўзғалмас нуқта бўлади.

2- натижа. Умумий ҳолатдаги Лотка-Вольтерра оператори аниқланган симплекснинг ихтиёрий ёғи кўпи билан 1 та ички қўзғалмас нуқтага эга.

2-мисол. Айтайлик $V: S^4 \to S^4$ операторнинг умумий кўриниши қуйидагича:

$$V: \begin{cases} x_1' = x_1(1-x_2+x_3-x_4+x_5), \\ x_2' = x_2(1+x_1+x_3+x_4-x_5), \\ x_3' = x_3(1-x_1+x_2-x_4+x_5), \\ x_4' = x_4(1+x_1-x_2+x_3-x_5), \\ x_5' = x_4(1-x_1+x_2-x_3+x_4). \end{cases}$$

Бу ерда V – оператор умумий ҳолатда ва қуйидаги қўзғалмас нуқталарга эга:

1) S^4 симплекснинг учлари $e_1=(1,0,0,0,0),...,e_5=(0,0,0,0,1)$,

2) икки ўлчамли ёқда $M_1(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},0,0)$, $M_2(0,\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},0)$, $M_3(0,0,\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, $M_4(\frac{1}{3},0,0,\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, $M_5(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0,0,\frac{1}{3})$,

3) симплекснинг ичида $C(\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5})$.

Демак, V – оператор жами 11 та қўзғалмас нуқтага эга. Бу қўзғалмас нуқталардан $C(\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5})$ қўзғалмас нуқта итарувчи қўзғалмас нуқта бўлиб, тортувчи қўзғалмас нуқтаси йўқ.

Д.Б.Эшмаматованинг ишларида умумий ҳолатда бўлган Лотка-Вольтерра оператори ҳар доим ягона итарувчи қўзғалмас нуқтага ва кўпи билан 1 та тортувчи қўзғалмас нуқтага эга эканлиги келтирилган.

Шундай қилиб, умумий ҳолатда бўлган Лотка-Вольтерра операторлар тўплами ҳамма ерда зич ва очиқ тўплам эканлиги келиб чиқади.

Шунинг учун Лотка-Вольтерра акслантиришларининг динамикасини умумий ҳолатда ўрганиш билан чекланиб қолишимиз табиий.

1-лемма. Айтайлик $A=(a_{ki})$ – кососимметрик матрица ва $b_1,...,b_m>0$. У ҳолда қуйидаги тенгсизлик ўринли:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & b_2 & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & b_m \end{vmatrix} \geq b_1 \cdot b_2 \cdot ... \cdot b_m .$$

Агар $x_i>0,\ i=\overline{1,m}$ бўлса, $x=(x_1,x_2,...,x_m)$ нуқта S^{m-1} симплекснинг ички нуқтаси дейилади.

1-леммадан фойдаланиб, биз S^{m-1} симплекснинг барча ички нуқталарида (1) акслантиришнинг якобиани мусбат эканлигига эга бўламиз. Демак, Лотка-Вольтерра акслантириши S^{m-1} симплекснинг ихтиёрий ички нуқтасининг атрофида локал гомеоморфизм бўлади. S^{m-1} – симплекснинг компакт тўплам эканлиги ва акслантиришнинг локал гомеоморфизмлигидан V – операторнинг гомеоморфлиги келиб чиқади.

Шундай қилиб, биз қуйидаги теоремани оламиз.

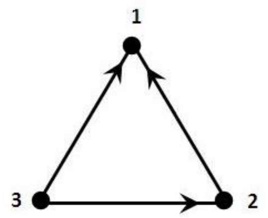
Квадратик Лотка-Вольтерра акслантириши барча a_{ki} лар учун симплекснинг гомеоморфизми бўлади.

Популяцион генетика масалаларида биологик системанинг бирор вақт давомида эволюциясини ўрганиш зарурияти туғилади. Аксарият ҳолларда системанинг эволюцияси симплекснинг квадратик акслантиришлари орқали ифодаланади. Биологик нуқтаи назардан эволюцион гомеоморф акслантириш биологик системанинг муайян вақтдаги ҳолатига кўра, унинг тарихини тиклаш имкониятини беради.

Маълумки, берилган чекли ўлчамли симплексда ҳар бир Лотка-Вольтерра квадратик акслантириши қандайдир турнирга мос келади ва турнирнинг хоссалари траекторияларнинг асимптотик ҳолатини ўрганишга имкон беради.

Айтайлик, $a_{ki}=-a_{ik}$, $|a_{ki}|\le 1$ шартни қаноатлантирувчи $A=(a_{ki})$ – кососимметрик матрицаси умумий ҳолатда бўлган Лотка-Вольтерра оператори берилган бўлсин. Текисликда m та нуқта олиб, бу нуқталарни $1,2,...,m$ номерлаб чиқамиз, агар $a_{ki}<0$ бўлса йўналиш k дан i га қараб йўналади, агар аксинча $a_{ki}>0$ бўлса йўналиш қарама-қарши бўлади, яъни i дан k га қараб йўналади. Кейин ҳосил булган графни $A=(a_{ki})$ – кососимметрик матрица билан динамик системага мос турнир деб атаймиз ва T_m билан белгилаймиз.

Масалан, $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ – кососимметрик матрица берилган бўлсин, у ҳолда бу матрицага мос турнирнинг кўриниши қуйидагича бўлади:



Бу мисолда A – кососимметрик матрица умумий ҳолатда, турнир эса транзитивдир.

Айтайлик, x_1,x_2 – лар турнирнинг учлари бўлсин, у ҳолда $x_1\to x_2$ белги x_1 ва x_2 учларни туташтирувчи қиррада йўналиш x_1 учдан x_2 учга йўналган бўлади. Қуйидаги шартни $x_i\ne x_j,\, i\ne j$ қаноатлантирувчи учлар учун $x_1\to x_2\to...\to x_p$ чекли учлар кетма-кетлиги йўл дейилади. Ёпиқ йўл цикл дейилади, яъни $x_p=x_1$.

Турнирнинг ихтиёрий иккита $x,y\in Y$ учлари учун боши x да, охири y да бўлган йўл мавжуд бўлса, у ҳолда турнир кучли дейилади.

Ж.Мунн ишларидан бизга маълумки, турнир кучли бўлиши учун унда узунлиги ($|Y|$ ($|Y|$ – Y тўпламнинг элементлар сони)га тенг цикл мавжуд бўлиши зарур ва етарли.

Цикл мавжуд бўлмаган турнир – транзитив турнир дейилади.

3-таъриф. Агар турнирнинг ихтиёрий қисм турнири кучли ёки транзитив бўлса, у ҳолда бундай турнир бир жинсли дейилади.

Д.Б.Эшмаматованинг ишларида Y тўпламнинг элементлар сони $|Y|\ge 4$ бўлганда, турнирларнинг бир жинсли бўлиш критерийси келтирилган.

Айтайлик, $X=\{x\in S^{m-1}: Vx=x\}$ тўплам Лотка-Вольтерра операторининг қўзғалмас нуқталар тўплами бўлсин. Боль-Брауэр теоремасига кўра, $V:S^{m-1}\to S^{m-1}$ оператор узлуксиз, S^{m-1} симплекс қавариқ, компакт тўплам, у ҳолда қўзғалмас нуқталар тўплами бўш эмас.

Қуйида келтирилган теоремалар Р.Н.Ганиходжаев илмий ишларида исботланган.

1. Агар Лотка-Вольтерра операторига мос келадиган турнир T_m транзитив бўлса, у ҳолда операторнинг қўзғалмас нуқталари фақат симплекснинг S^{m-1} учларидан иборат бўлади.

2. T_m – кучли турнир камида $m-2$ циклик учликни ўз ичига олади.

3. $V: S^{m-1} \to S^{m-1}$ операторнинг ҳар қандай қўзғалмас нуқтаси фақат нолга тенг бўлмаган тоқ сондаги координаталарга эга.

4. Агар A – кососимметрик матрица бўлса, у ҳолда

$$P = \{x \in S^{m-1} : Ax \geq 0\}$$

тўплам бўш бўлмаган қавариқ кўпёқдир.

Бу теоремадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

3-натижа. $Q = \{x \in S^{m-1} : Ax \leq 0\}$ – тўплам бўш бўлмаган қавариқ кўпёқдир.

Диссертациянинг иккинчи **“Бир жинсли турнирларга мос S^4 симплексда аниқланган квадратик гомеоморфизмларнинг хоссалари”** номли бобида умумий ҳолатдаги V Лотка-Вольтерра операторининг қўзғалмас нуқталар тушунчаси киритилган. Тўрт ўлчамли симплекснинг бир жинсли турнирлари учун қўзғалмас нуқта картасидан фойдаланиб, Лотка-Вольтерра оператори қўзғалмас нуқталарининг мавжудлиги ва жойлашуви ҳақидаги янги натижалар олинган. Шунингдек, Лотка-Вольтерра оператори қўзғалмас нуқталари якобианининг хос сонлари хусусиятлари (итарувчи, тортувчи, эгар) тавсифланди.

Ушбу бобнинг натижалари қуйидагилардир:

1-теорема. Агар G_V – қўзғалмас нуқталар картаси транзитив бўлса, у ҳолда тўрт ўлчамли симплексда V операторнинг бешта координатаси нолдан фарқли қўзғалмас нуқтага эга эмас.

2-теорема. Агар G_V – қўзғалмас нуқталар картаси циклик учликни ташкил этса, у ҳолда бешта координатаси нолдан фарқли қўзғалмас нуқтага эга бўлади.

4-натижа. V операторнинг бешта координатаси нолдан фарқли бўлган қўзғалмас нуқталари сони G_V қўзғалмас нуқталар картасидаги учликлар сонига тенг.

3-теорема. Агар G_V картада битта манба бўлса, у ҳолда V_3 акслантиришнинг S^4 симплексда ички қўзғалмас нуқтаси мавжуд эмас.

4-теорема. Агар G_V картада гамильтон цикли мавжуд бўлса, у ҳолда қўзғалмас нуқталар картасида ички қўзғалмас нуқта мавжуд.

5-теорема. Агар қуйидаги сонли $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5$ ифодаларнинг ишоралари бир хил бўлса, у ҳолда қўзғалмас нуқталар картаси гамильтон циклини ташкил қилади. У ҳолда операторнинг бешта координатаси нолдан фарқли ички қўзғалмас нуқтаси мавжуд.

Диссертациянинг учинчи **“Айниган кососимметрик матрицага мос квадратик Лотка-Вольтерра оператор динамикаси”** деб номланган бобида кичик ўлчамдаги айниган кососимметрик матрицага мос квадратик Лотка-Вольтерра акслантириши динамикасини тўлиқ тавсифлашга бағишланган.

Бундай системаларнинг ички нуқталари траекторияларининг динамикасини ўрганиш анча қийинчилик туғдиради, шунинг учун ички нуқталар траекториялари ҳаракатини батафсил кўриб чиқиш учун биз компьютернинг амалий дастурларидан фойдаландик.

Бундай системаларда қандай усулларни қўллаш мумкинлиги ҳақидаги саволга жавоб бериш учун биз системанинг фазали портретидан фойдаланишимиз мумкин.

Шундай қилиб, “фазали портрет” бизга динамик системанинг ҳолатини кўриш имконини беради, яъни унинг ёрдамида биз бир қарашда турли хил ички нуқталар траекториялари динамикаси ҳамда динамик система коэффициентларининг турли қийматларида юзага келиши мумкин бўлган ҳаракатларни тўлиқ қамраб олиш имкониятини беради. Улар учун P ва Q тўпламлар тасвирланган ва бу тўпламлар ёрдамида ички нуқталар траекторияларининг асимптотик ҳаракати батафсил ёритилган. Бошқача айтганда, эволюциянинг қаерда бошланиши ва қаерда тугаши шартлари топилган.

Учинчи бобнинг асосий натижалари:

6-теорема. Агар $V_4^{(1)}$ операторнинг коэффициентлари қуйидаги $a_{12}a_{34} = a_{14}a_{23}$ шартни қаноатлантирса, у ҳолда P ва Q – тўпламлар кесмани ташкил этади ва қуйидаги тенглик билан аниқланади:

$$P = Q = \left\{ \left(\frac{a_{23}\alpha}{a_{12}+a_{23}}; \frac{a_{14}(1-\alpha)}{a_{12}+a_{14}}; \frac{a_{12}\alpha}{a_{12}+a_{23}}; \frac{a_{12}(1-\alpha)}{a_{12}+a_{14}} \right), 0 \le \alpha \le 1 \right\}.$$

7-теорема. Агар $V_4^{(1)}$ операторнинг коэффициентлари қуйидаги $a_{12}a_{34} < a_{14}a_{23}$ шартни қаноатлантирса, у ҳолда P ва Q тўпламлар қуйидаги тенгсизлик билан аниқланади:

$$P = \left\{ \frac{a_{34}}{a_{23}+a_{34}} \le x_2 \le \frac{a_{12}}{a_{12}+a_{14}} \right\} \text{ ва } Q = \left\{ \frac{a_{12}}{a_{12}+a_{23}} \le x_3 \le \frac{a_{14}}{a_{14}+a_{34}} \right\}.$$

8-теорема. Агар $V_4^{(1)}$ акслантиришнинг коэффициентлари қуйидаги $a_{12}a_{34} > a_{14}a_{23}$ шартни қаноатлантирса, у ҳолда P ва Q тўпламлар қуйидаги тенгсизлик билан аниқланади:

$$P = \left\{ \frac{a_{14}}{a_{12}+a_{23}} \le x_3 \le \frac{a_{12}}{a_{14}+a_{34}} \right\} \text{ ва } Q = \left\{ \frac{a_{14}}{a_{12}+a_{14}} \le x_2 \le \frac{a_{34}}{a_{23}+a_{34}} \right\}.$$

ХУЛОСА

Диссертация кососимметрик матрица умумий ҳолатда бўлганда бешта учга эга бўлган бир жинсли турнирларга мос Лотка-Вольтерра операторининг қўзғалмас нуқталарини тўлиқ аниқлаш ва тавсифлашдан иборат.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Агар G_V – қўзғалмас нуқталар картаси транзитив бўлса, у ҳолда тўрт ўлчамли симплексда аниқланган V оператор бешта координатаси нолдан фарқли қўзғалмас нуқтага эга эмас.

2. Агар G_V – қўзғалмас нуқталар картаси циклик учликни ташкил этса, у ҳолда оператор бешта координатаси нолдан фарқли қўзғалмас нуқтага эга.

3. Агар G_V картада битта манба бўлса, у ҳолда V_3 акслантиришнинг S^4 симплексда ички қўзғалмас нуқтаси мавжуд эмас.

4. Агар G_V картада гамильтон цикли мавжуд бўлса, у ҳолда операторнинг ички қўзғалмас нуқтаси мавжуд.

5. Агар қуйидаги сонли $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5$ ифодаларнинг ишоралари бир хил бўлиб, қўзғалмас нуқталар картаси гамильтон цикл ташкил қилса, у ҳолда операторнинг бешта координатаси нолдан фарқли ички қўзғалмас нуқтаси мавжуд.

6. Агар $V_4^{(1)}$ операторнинг коэффициентлари қуйидаги $a_{12}a_{34} = a_{14}a_{23}$ шартни қаноатлантирса, у ҳолда P ва Q – тўпламлар кесмани ташкил этиб, бу кесма қуйидаги тенглик билан аниқланади:

$$P = Q = \left\{ \left(\frac{a_{23}\alpha}{a_{12}+a_{23}}; \frac{a_{14}(1-\alpha)}{a_{12}+a_{14}}; \frac{a_{12}\alpha}{a_{12}+a_{23}}; \frac{a_{12}(1-\alpha)}{a_{12}+a_{14}} \right), 0 \le \alpha \le 1 \right\}.$$

7. Агар $V_4^{(1)}$ операторнинг коэффициентлари қуйидаги $a_{12}a_{34} < a_{14}a_{23}$ шартни қаноатлантирса, у ҳолда P ва Q тўпламлар қуйидаги тенгсизлик билан аниқланади:

$$P = \left\{ \frac{a_{34}}{a_{23}+a_{34}} \le x_2 \le \frac{a_{12}}{a_{12}+a_{14}} \right\} \text{ ва } Q = \left\{ \frac{a_{12}}{a_{12}+a_{23}} \le x_3 \le \frac{a_{14}}{a_{14}+a_{34}} \right\}.$$

8. Агар $V_4^{(1)}$ акслантиришнинг коэффициентлари қуйидаги $a_{12}a_{34} > a_{14}a_{23}$ шартни қаноатлантирса, у ҳолда P ва Q тўпламлар қуйидаги тенгсизлик билан аниқланади:

$$P = \left\{ \frac{a_{14}}{a_{12}+a_{23}} \le x_3 \le \frac{a_{12}}{a_{14}+a_{34}} \right\} \text{ ва } Q = \left\{ \frac{a_{14}}{a_{12}+a_{14}} \le x_2 \le \frac{a_{34}}{a_{23}+a_{34}} \right\}.$$

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

ТАДЖИЕВА МОХБОНУ АКРОМ КИЗИ

ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КВАДРАТИЧНЫХ ГОМЕОМОРФИЗМОВ СИМПКЛЕКСА S^4

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ
ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент – 2022

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2019.2.PhD/FM331.

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана им. Мирзо Улугбека.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz/) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (http://www.ziyonet.uz/).

Научный руководитель:	**Ганиходжаев Расул Набиевич** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Худойберганов Гулмирза** доктор физико-математических наук, профессор
	Жамилов Уйғун Умурович доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	**Ташкентский государственный транспортный университет**

Защита диссертации состоится «____» ____________ 2022 года в ____ на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4.Тел.: (+998 71) 227 12 24, факс: (+998 71) 246 53 21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4.Тел.: (+998 71) 246 02 24).

Автореферат диссертации разослан «____» ____________ 2022 года.
(протокол рассылки №____ от «____» ____________ 2022 года).

А.Садуллаев
Председатель Научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., академик

Н.К.Мамадалиев
Ученый секретарь Научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.ф.-м.н. (PhD)

А.Садуллаев
Заместитель председателя научного семинара
при Научном совете по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научные исследования с практическими приложениями, проводимые в мире, в большинстве случаев сводятся к задачам изучения динамических свойств квадратичных отображений. В настоящее время квадратичные отображения, определяемые в симплексе, являются одной из наиболее развитых областей теории динамических систем и связаны с идеями и вопросами таких наук, как математический анализ, дифференциальные уравнения, биология и теория вероятностей. Методы исследования неподвижных точек позволяют проводить анализ решений квадратичных отображений, определенных в симплексе, а также полностью определять, описывать и исследовать характеристики неподвижных точек квадратичных отображений. Поэтому динамические свойства квадратичных отображений и описание динамики предельного поведения траекторий играют важную роль в современной математике.

В настоящее время во всем мире квадратичные отображения являются одной из наиболее актуальных проблем современных дискретных динамических систем, для которых ведутся научные исследования полной классификации неподвижных точек квадратичных отображений типа Лотки-Вольтерра, определённых в симплексе. При этом проводимые исследования раскрывают значение детальной классификации определения типа неподвижной точки, то есть условий, при которых эта точка будет приягивающей, отталкивающей и седловой. Кроме того, особое внимание уделяется классификации динамических систем, а также определению состояний траекторий, их внутренних точек, получению необходимых и достаточных условий для оператора эволюции.

В нашей стране, особенно в последние годы, уделяется повышенное внимание современным направлениям в фундаментальных науках, в том числе квантовой механике и физике. Теория динамических систем является одним из основных среди этих направлений. В частности, особое внимание в последние годы уделяется изучению квадратичных отображений, определенных в симплексе. Постановка научных задач и проведение их исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям математических дисциплин «Функциональный анализ, алгебра, теория динамических систем, дифференциальные уравнения, теория вероятностей и математическая статистика» обозначены как основные задачи и направления деятельности математической науки[1]. При этом очень важным является применение научных результатов по квадратичным, кубическим и других дискретным динамическим системам в других смежных областях науки.

---

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «Об организации вновь созданных научно-исследовательских институтов Академии наук Республики Узбекистан».

Данное диссертационное исследование в определенной степени служит решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в постановлениях № ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В.И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан» и № ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Теория динамических систем, восходящая к классическим работам А.Пуанкаре, в настоящее время является одним из актуальных направлений современной математики. Классификация динамических систем основана на способе задания их состояний, методах описания оператора эволюции и его свойствах, способе зависимости от времени и т.д. Непрерывные динамические системы, возникшие из качественной теории дифференциальных уравнений, в основном изучают глобальную топологическую картину поведения решений дифференциальных уравнений на многообразиях. Основоположниками этого направления являются А.Пуанкаре, Дж.Биркгоф, А.Андронов, А.Н.Колмогоров и другие. Начало комплексной динамики восходит к классическим работам П.Фату и Г.Жюлиа. В этих работах были классифицированы динамические свойства орбит отображения $z \to z^2 + c$ комплексной плоскости при различных значениях $c \in C$.

Задачи популяционной генетики изучаются многими учеными-математиками в течение последних двух веков. Квадратичные стохастические операторы, действующие в конечномерном симплексе, естественным образом возникают в задачах популяционной генетики. При этом эволюция биологической системы описывается дискретной динамической системой. Впервые простейшие модели генетических систем были исследованы в работах Г.Х.Харди, Ю.И.Любича, Г.Кестена, В.Вольтерра, С.Н.Бернштейна. Вероятностные методы к изучению динамических систем первым применил Т.А.Сарымсаков. По его предложению начали детально изучаться дискретные динамические системы. В работах Р.Н.Ганиходжаева были исследованы квадратичные стохастические операторы Вольтерровского типа с применением теории графов и качественной теории дифференциальных уравнений. Основной задачей в этой теории является изучение предельного поведения траектории отображении Лотки-Вольтерра.

В работах Д.Б.Эшмаматовой были доказаны условия существования функций Ляпунова $\varphi(x)=\frac{x_i}{x_j}, i\neq j$ и изучено асимптотическое поведение траекторий композиции двух отображений Лотки – Вольтерра, действующих в симплексе S^2. Исследованию свойств и характеров неподвижных точек квадратичных и кубических стохастических операторов, заданных на конечномерном симплексе, посвящены работы Н.Н.Ганиходжаева, У.А.Розикова, Ф.А.Мухаммедова, У.У.Жамилова М.Ладра, А.Ю.Хамраева, Ф.А.Шахиди, М.Сабурова. В работах К.А.Курганова исследованы задачи классификации неподвижных точек динамических систем Лотки – Вольтерра с кососимметрическими матрицами, не являющимся матрицами общего положения, а также эргодические свойства отображений Лотки – Вольтерра для четырехмерного симплекса.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждением высшего образования, где выполнялось диссертация. Исследование выполнено в соответствии с планом научного исследования ОТ-Ф4-31 «Некоммутативные модули, алгебры Лейбница и полиномиальные каскады на симплексах» Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (2017-2020 гг.).

Целью исследования является полное описание динамики траекторий, а также расположения неподвижных точек систем Лотки – Вольтерра с пятью вершинами для однородных турниров, с матрицами общего положения, а также полное описание динамики квадратичных отображений Лотки – Вольтерра с вырожденной кососимметрической матрицей для малых размерностей.

Задачи исследования:

описание и анализ динамики траекторий внутренних точек систем Лотки-Вольтерра с пятью вершинами для однородных турниров, с матрицами общего положения;

ввыявление неподвижных внутренних точек с нечетным числом ненулевых координат с помощью карт неподвижных точек, а также классификация характера неподвижных точек (отталкивающая, притягивающая и седловая неподвижная точка);

полное описание динамики квадратичных отображений Лотки – Вольтерра с вырожденной кососимметрической матрицей для малых размерностей;

нахождение при $m=3$ критерия существования отрицательной и положительной траекторий (начала и конца эволюции, при любых коэффициентах);

нахождение при $m=4$ критерия существования отрицательной и положительной траекторий, т.е. определение начала и конца эволюции, при $a_{ki}=\pm 1, k\neq i.$

Объектом исследования являются однородные турниры, смешанные графы, характер неподвижных точек, карты неподвижных точек.

Предметом исследования являются квадратичные гомеоморфизмы четырехмерного симплекса, отображения Лотки – Вольтерра с вырожденной и невырожденной кососимметрическими матрицами.

Методика исследования. В работе используются методы функционального анализа, математического анализа, общей топологии и теории динамических систем.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

с помощью карт неподвижных точек выявлены и доказаны критерии существования внутренних неподвижных точек с пятью ненулевыми координатами;

дано полное описание характера неподвижных точек (притяивающий, отталкивающий, седловой) отображений Лотки – Вольтерра, действующих в четырехмерном симплексе, с невырожденной кососимметрической матрицей, а также с вырожденной кососимметрической матрицей для отображений Лотки – Вольтерра, действующих в двумерном симплексе;

с помощью элементов теории графов доказаны критерии динамики траекторий внутри четырехмерного симплекса;

для квадратичных отображений Лотки – Вольтерра с вырожденной кососимметрической матрицей (для малых размерностей) доказано существование отрицательной и положительной траекторий внутренних точек.

Практические результаты исследования состоят в следующем:

полученные результаты исследований и методы, использованные в диссертационной работе, были использованы в вопросах популяционной генетики;

результаты о неподвижных точках квадратичных отображений были применены к динамическим системам, характеризующим эволюционное состояние биологической системы.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием методов функционального анализа, общей топологии, теории динамических систем, а также строгостью математических рассуждений. Результаты подтверждены с помощью математических программ, написанных на языке Python 3.10.0 и в системе Wolfram Mathematica.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования заключается в том, что найдены критерии существования внутренних неподвижных точек для отображений Лотки – Вольтерра, действующих в четырехмерном симплексе, с матрицей общего положения, а также доказано существование положительной и отрицательной траекторий для отображений Лотки – Вольтерра с вырожденной кососимметрической матрицей.

Практическая значимость полученных результатов исследования подтверждается возможностью их применения в спецкурсах по дискретным динамическим системам, а также в математической биологии.

Внедрение результатов исследования. Полученные результаты динамических свойств квадратичных гомеоморфизмов, действующих в четырехмерном симплексе применены следующие в научно-исследовательском проекте:

результаты описания динамических свойств квадратичных гомеоморфизмов симплекса S^4 использованы в гранте под номером ОТ-Ф4-31 «Некоммутативные модули, алгебры Лейбница и полиномиальные каскады на симплексах» Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (2017-2020 гг.) При изучении траекторий внутренних точек систем Лотки – Вольтерра с пятью вершинами для однородных турниров, с матрицами общего положения. (справка Национального университета Узбекистана от 17 июля 2021 года, № 04/11-3803). Применение полученных результатов позволило полностью классифицировать траектории внутренних точек симплекса для отображений Лотки – Вольтерра, с соответствующими однородными турнирами;

результаты классификации карт неподвижных точек отображений Лотки – Вольтерра, действующих в симплексе S^4, применены в проекте Малазийского университета Теренггану под номером UMT/CRIM/2-2/2/14 (2019-2020 гг.) «Модифицированный метод гомотопического анализа для нахождения коэффициента силового кабеля» (Справка Малазийского университета Теренггану 30.03-55233). Применение научных исследований отображений Лотки – Вольтерра с вырожденными кососимметрическими матрицами дало возможность проанализировать положительную и отрицательную траектории внутренних точек этих отображений.

Апробация результатов исследования. Основные результаты диссертации представлены и обсуждены на 10 научно-практических конференциях, в том числе на 5 международных и 5 республиканских.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 16 научных работ, из них 5 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций на степень доктора философии, в том числе 2 из них опубликованы зарубежных журналах, 3 – в республиканских научных изданиях и 10 тезисов докладов в материалах научных конференций, а также получено 1 авторское свидетельство на созданные компьютерные программные продукты.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на десять параграфов, заключения и списка использованной литературы. Общий объем диссертации составляет 93 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИСЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **«Предварительные сведения»**, приведены предварительные сведения, которые используются при дальнейшем изложении основных результатов диссертационной работы. Дано понятие общего положения для системы Лотки – Вольтерра как условие положительности всех главных миноров чётного порядка отличных от нуля кососимметрической матрицы. Введены понятия турнира и однородного турнира, а также рассмотрено применение турниров в изучении систем Лотки – Вольтерра.

Пусть $x=(x_1,x_2,...,x_m)$ – некоторое распределение вероятностей индивидов по признакам. В предположении, что скрещивания происходят случайным образом (панмиксия) и между различными поколениями не происходит скрещиваний, для описания закона перехода от распределения вероятностей в следующем поколении получим следующую динамическую систему:

$$x_k^{(n+1)}=x_k^{(n)}\left(1+\sum_{i=1}^{m}a_{ki}x_i^{(n)}\right),\ \text{где } k=1,2,...,m,\ n=0,1,... .$$

$x^0=(x_1{}^0,x_2{}^0,...,x_m{}^0)$ – распределение вероятностей в начальном поколении, $a_{ki}=-a_{ik},\ |a_{ki}|\le 1$ коэффициенты наследственности.

Рассмотрим квадратичный стохастический оператор $V:S^{m-1}\to S^{m-1}$, имеющий вид :

$$(Vx)_k=x_k^{'}=\sum_{i,j=1}^{m}P_{ij,k}x_ix_j,\ k=\overline{1,m},$$

де $x=(x_1,x_2,...,x_m)\in S^{m-1}$, $(Vx)_k$ – k-тая координата точки $Vx\in S^{m-1}$, а коэффициенты $P_{ij,k}$ удовлетворяют условиям

$$P_{ij,k}=P_{ji,k}\ge 0,\ \sum_{k=1}^{m}P_{ij,k}=1.$$

Определение 1. Если $P_{ij,k}=0$ при $k\notin\{i,j\}$, то квадратичный стохастический оператор V называется отображением Лотки – Вольтерра на симплексе S^{m-1}.

Из определения следует, что $P_{ik,k}+P_{ik,i}=1$ для любых $i,k=\overline{1,m}.$

Пусть $Vx=(x_1^{'},x_2^{'},...,x_m^{'})$. Тогда

$$x_k^{'}=x_k\left(1+\sum_{i=1}^{m}a_{ki}x_i\right),\ \ k=\overline{1,m}. \qquad (1)$$

Это соотношение называется каноническим видом отображение Лотки – Вольтерра на симплексе S^{m-1}.

Определение 2. Кососимметрическая матрица $A=(a_{ki})$ называется матрицей общего положения, если все ее главные миноры четного порядка отличны от нуля.

Если кососимметрическая матрица является матрицей общего положения, то соответствующее отображение Лотки – Вольтерра V с коэффициентами a_{ki} также является оператором общего положения.

Пример 1. Отображение Лотки – Вольтерра $V:S^3\to S^3$ имеет вид:

$$V:\begin{cases} x_1^{'}=x_1(1+ax_2-bx_3+cx_4),\\ x_2^{'}=x_2(1-ax_1+dx_3-ex_4),\\ x_3^{'}=x_3(1+bx_1-dx_2+fx_4),\\ x_4^{'}=x_4(1-cx_1+ex_2-fx_3),\end{cases}$$

где $a,b,...,f\in[-1;1]$.

Этот оператор является оператором общего положения тогда и только тогда, когда коэффициенты $a,b,...,f\in[-1;1]$ удовлетворяют следующим условиям:

$$a,b,...,f\neq 0 \ \text{ и } \ af-be+cd\neq 0.$$

Следующие следствия приведены в работах Р.Н.Ганиходжаева:

Следствие 1. Если отображение Лотки-Вольтерра общего положения V имеет внутреннюю неподвижную точку, то эта точка является отталкивающей.

Следствие 2. Относительная внутренность любой грани симплекса может иметь не более одной неподвижной точки отображения Лотки-Вольтерра общего положения.

Пример 2. Пусть $V:S^4\to S^4$ имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_1^{'}=x_1(1-x_2+x_3-x_4+x_5),\\ x_2^{'}=x_2(1+x_1+x_3+x_4-x_5),\\ x_3^{'}=x_3(1-x_1+x_2-x_4+x_5),\\ x_4^{'}=x_4(1+x_1-x_2+x_3-x_5),\\ x_5^{'}=x_4(1-x_1+x_2-x_3+x_4).\end{cases}$$

Здесь V – оператор общего положения, и он имеет следующие неподвижные точки:

1) вершины S^4, т.е. $e_1=(1,0,0,0,0),...,e_5=(0,0,0,0,1)$,

2) на двумерных гранях $M_1(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},0,0)$, $M_2(0,\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},0)$, $M_3(0,0,\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, $M_4(\frac{1}{3},0,0,\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, $M_5(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0,0,\frac{1}{3})$,

3) внутри симплекса $C(\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5})$.

Итого 11 неподвижных точек из которых $C(\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5})$ является отталкивающей, а притягивающих неподвижных точек нет.

В работе Д.Б. Эшмаматовой доказано, что отображение Лотки – Вольтерра общего положения всегда имеет единственную отталкивающую неподвижную точку и не более одной притягивающей неподвижной точки.

Таким образом, операторы общего положения образуют открытое и всюду плотное подмножество в множестве всех отображений Лотки – Вольтерра.

Поэтому естественно ограничиться изучением динамики отображения Лотки-Вольтерра общего положения.

Лемма 1. Пусть $A=(a_{ki})$ – кососимметрическая матрица и $b_1,...,b_m>0$. Тогда

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & b_m \end{vmatrix} \ge b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_m.$$

Точку $x=(x_1,...,x_m)$ будем называть относительно внутренней точкой симплекса S^{m-1}, если $x_i>0, i=\overline{1,m}$.

Используя лемму, получаем, что якобиан отображения (1) во всех относительно внутренних точках симплекса положителен. Следовательно, квадратичное отображение Лотки – Вольтерра является локальным гомеоморфизмом в окрестности любой относительно внутренней точки S^{m-1}. Так как S^{m-1} является компактом, то из локальной гомеоморфности следует гомеоморфность.

Следовательно, получаем следующую теорему.

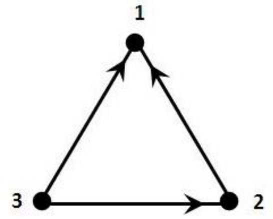
Квадратичное отображение Лотки – Вольтерра является гомеоморфизмом симплекса S^{m-1}, при любых a_{ki}.

В задачах популяционной генетики появляется необходимость изучения эволюции биологической системы во времени. Во многих случаях эволюция системы описывается квадратичными отображениями симплекса в себя. С биологической точки зрения гомеоморфизм оператора эволюции означает возможность восстановления предыстории биологической системы по известному состоянию системы в данный момент.

Как известно, каждое квадратичное отображение Лотки – Вольтерра, заданное на конечномерном симплексе, определяет некий турнир, свойства которого позволяют изучить асимптотическое поведение траекторий этого отображения.

Пусть $A=(a_{ki})$ – кососимметрическая матрица общего положения оператора Лотки – Вольтерра, удовлетворяющая условиям $a_{ki}=-a_{ik}, |a_{ki}|\le 1.$ Предположим, что $a_{ki}\ne 0$ при $k\ne i$. Взяв на плоскости m точек, пронумеруем их числами $1,2,...,m,$ а затем соединим точку k с точкой i стрелкой, направленной из k в i, если $a_{ki}<0,$ и обратно, если $a_{ki}>0.$ Построенный граф назовем турниром динамической системы с кососимметрической матрицей $A=(a_{ki})$ и обозначим его через T_m.

Например, кососимметрической матрице $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ соответствует турнир



Ясно, что в этом примере A – матрица общего положения, а турнир является транзитивной тройкой.

Пусть x_1, x_2 – вершины турнира. Запись $x_1\to x_2$ означает, что ребро, соединяющее x_1 и x_2, направлено от x_1 к x_2. Конечная последовательность вершин $x_1\to x_2\to ...\to x_p$ называется маршрутом, если $x_i\ne x_j$ при $i\ne j$. Цикл – это замкнутый маршрут, т.е. $x_p = x_1$.

Турнир – сильный, если для любых вершин $x,y\in Y$ существует маршрут с началом x и концом y.

С работ Ж.Муна нам известно, что турнир сильный тогда и только тогда, когда в нем существует цикл длины $|Y|$ ($|Y|$ – количество элементов Y).

Турнир, не имеющий циклов, называется транзитивным.

Определение 3. Турнир называется однородным, если его любой подтурнир является либо сильным, либо транзитивным.

В работе Д.Б. Эшмаматовой доказан критерий однородности турниров, при $|Y|\ge 4$.

Пусть $X=\{x\in S^{m-1}: Vx=x\}$ – множество неподвижных точек отображения Лотки – Вольтерра V. Поскольку, $V:S^{m-1}\to S^{m-1}$ непрерывно, а

S^{m-1} – выпуклый компакт, то согласно теореме Боля-Брауэра множество неподвижных точек V непусто.

В работе Р.Н.Ганиходжаева доказаны, следующие теоремы

1. Если турнир T_m соответствующий отображению Лотки-Вольтерра V является транзитивным, тогда неподвижными точками V будут только лишь вершины S^{m-1}.

2. Сильный турнир T_m содержит не менее $m-2$ циклических троек.

3. Любая неподвижная точка отображения $V: S^{m-1} \to S^{m-1}$ имеет только лишь нечетное число ненулевых координат.

4. Если A – кососимметрическая матрица, то

$$P = \{x \in S^{m-1} : Ax \geq 0\}$$

непустой выпуклый многогранник.

Следствие 3. $Q = \{x \in S^{m-1} : Ax \leq 0\}$ – непустой выпуклый многогранник.

Во второй главе диссертации, названной **«Динамические свойства квадратичных гомеоморфизмов симплекса S^4 с однородными турнирами»**, вводится понятие карты неподвижных точек отображения Лотки – Вольтерра V с матрицами общего положения. Используя карты неподвижных точек для однородных турниров четырехмерного симплекса, получены новые результаты о существовании и расположении неподвижных точек систем Лотки – Вольтерра. В главе также приведена характеристика неподвижных точек (притягивающая, отталкивающая и седло) с помощью собственных чисел якобиана отображения Лотки – Вольтерра.

Результатами этой главы являются следующие утверждения.

Теорема 1. Если G_V – транзитивный турнир, то отображение V не имеет в симплексе S^4 неподвижных точек с пятью ненулевыми координатами.

Теорема 2. Если в G_V существует циклическая тройка, то существует неподвижная точка с пятью ненулевыми координатами.

Следствие 4. Число неподвижных точек отображения V с пятью ненулевыми координатами равно числу циклических троек в турнире G_V.

Теорема 3. Если в G_V существует один источник, тогда отображение V_3 не имеет внутри S^4 неподвижных точек.

Теорема 4. Если в G_V существует гамильтонов цикл, тогда кроме вершин карты существует внутренняя неподвижная точка.

Теорема 5. Если знаки выражений $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5$ совпадают, тогда карта G_V образует гамильтонов цикл и отображение имеет внутреннюю неподвижную точку с пятью ненулевыми координатами.

Третья глава диссертации, названная **«Динамика квадратичных отображений Лотки-Вольтерра с вырожденной кососимметрической матрицей»**, посвящена полному описанию динамики квадратичных отображений Лотки – Вольтерра с вырожденной кососимметрической матрицей для случая малых размерностей.

Увидеть аналитически динамику траекторий внутренних точек таких систем достаточно сложно, поэтому для рассмотрения подробной картины поведения траекторий мы воспользовались компьютерными прикладными программами. Чтобы ответить на вопрос, какие режимы поведения могут устанавливаться в подобных системах, мы можем использовать так называемый фазовый портрет системы, т.е. совокупность всех ее траекторий.

Значит, **«фазовый портрет» («фазовая плоскость»),** разбитый на траектории, дает нам возможность увидеть обозримую картину динамической системы, т.е. с помощью его мы получим возможность одним взглядом охватить полную совокупность движений, которые могут возникнуть при различных начальных неподвижных точках и при различных значениях коэффициентов системы. В данной главе для них и описаны множества P и Q, при помощи которых изучается асимптотическое поведение траекторий внутренних точек. Другими словами говоря, для данных в этих системах популяциях найдено, где эволюция начинается и где заканчивается.

Оснавными результатами являются

Теорема 6. Если коэффициенты отображения $V_4^{(1)}$ удовлетворяют условиям $a_{12}\,a_{34}=a_{25}\,a_{34}$, тогда множество P и Q – отрезок определяемый следующем образом:

$$P=Q=\left\{\left(\frac{a_{23}\alpha}{a_{12}+a_{23}};\frac{a_{14}(1-\alpha)}{a_{12}+a_{14}};\frac{a_{12}\alpha}{a_{12}+a_{23}};\frac{a_{12}(1-\alpha)}{a_{12}+a_{14}}\right),\ 0\le\alpha\le1\right\}.$$

Теорема 7. Если коэффициенты отображения $V_4^{(1)}$ удовлетворяют условию $a_{12}a_{34}<a_{14}a_{23}$, тогда

$$P=\left\{\frac{a_{34}}{a_{23}+a_{34}}\le x_2\le\frac{a_{12}}{a_{12}+a_{14}}\right\} \text{ и } Q=\left\{\frac{a_{12}}{a_{12}+a_{23}}\le x_3\le\frac{a_{14}}{a_{14}+a_{34}}\right\}.$$

Теорема 8. Если коэффициенты отображения $V_4^{(1)}$ удовлетворяют условию $a_{12}a_{34}>a_{14}a_{23}$, тогда

$$P=\{\frac{a_{14}}{a_{12}+a_{23}}\le x_3\le\frac{a_{12}}{a_{14}+a_{34}}\} \text{ и } Q=\left\{\frac{a_{14}}{a_{12}+a_{14}}\le x_2\le\frac{a_{34}}{a_{23}+a_{34}}\right\}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация посвящена полному описанию и изучению динамики систем Лотки-Вольтерра с пятью вершинами для однородных турниров, с матрицами общего положения, а также полному описанию динамики квадратичных отображений Лотки – Вольтерра с вырожденной кососимметрической матрицей для малых размерностей.

Основными результатами исследований являются:

1. Если карта G_V является транзитивым турниром, тогда отображение V не имеет внутри симплекса S^4 неподвижных точек с пятью и более ненулевыми координатами.
2. Если в карте G_V существует циклическая тройка, тогда внутри симплекса существует неподвижная точка с пятью ненулевыми координатами.
3. Если в G_V существует один источник, тогда отображение V_3 не имеет внутри S^4 неподвижных точек.
4. Если в G_V образуется гамильтонов цикл, тогда кроме вершин карты существует внутренняя неподвижная точка.
5. Если знаки выражений $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5$ совпадают, тогда карта G_V образует гамильтонов цикл и отображение имеет внутреннюю неподвижную точку с пятью ненулевыми координатами.
6. Если коэффициенты отображения $V_4^{(1)}$ удовлетворяют условию $a_{12}a_{34} = a_{14}a_{23}$, тогда множество P и Q – отрезок определяемый равенством
$$P = Q = \left\{ \left(\frac{a_{23}\alpha}{a_{12}+a_{23}}; \frac{a_{14}(1-\alpha)}{a_{12}+a_{14}}; \frac{a_{12}\alpha}{a_{12}+a_{23}}; \frac{a_{12}(1-\alpha)}{a_{12}+a_{14}} \right), 0 \le \alpha \le 1 \right\}.$$
7. Если коэффициенты отображения $V_4^{(1)}$ удовлетворяют условию $a_{12}a_{34} < a_{14}a_{23}$, тогда
$$P = \left\{ \frac{a_{34}}{a_{23}+a_{34}} \le x_2 \le \frac{a_{12}}{a_{12}+a_{14}} \right\} \text{ и } Q = \left\{ \frac{a_{12}}{a_{12}+a_{23}} \le x_3 \le \frac{a_{14}}{a_{14}+a_{34}} \right\}.$$
8. Если коэффициенты отображения $V_4^{(1)}$ удовлетворяют условию $a_{12}a_{34} > a_{14}a_{23}$, тогда
$$P = \left\{ \frac{a_{14}}{a_{12}+a_{23}} \le x_3 \le \frac{a_{12}}{a_{14}+a_{34}} \right\} \text{ и } Q = \left\{ \frac{a_{14}}{a_{12}+a_{14}} \le x_2 \le \frac{a_{34}}{a_{23}+a_{34}} \right\}.$$

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

TADZHIEVA MOKHBONU AKROM KHIZI

DYNAMIC PROPERTIES OF QUADRATIC HOMEOMORPHISMS OF A SIMPLEX S^4

01.01.01-Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent – 2022

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2019.2.PhD/FM331.

Dissertation has been prepared at National University of Uzbekistan named after MirzoUlugbek.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website of Scientific Council (http://ik-fizmat.nuu.uz/) and the “ZiyoNet” Information and educational portal (http://www.ziyonet.uz/).

Scientific supervisor:	**Ganikhodzhaev Rasul Nabiyevich** Doctor of Physical and mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Khudoyberganov Gulmirza** Doctor of Physical and mathematical Sciences, Professor
	Jamilov Uygun Umurovich Doctor of Physical and mathematical Sciences, Professor
Leading organization:	Tashkent State Transport University

Defense will take place on “____” _________________ 2022 at ____ at the meeting of Scientific Council DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 at National University of Uzbekistan. (Address: 4 University str., Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Tel.: (+998 71) 246 53 21, Fax: (+998 71) 246 53 21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource center at National University of Uzbekistan (registered for No.____). (Address: 4 University str., Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Tel.: (+998 71) 246 02 24).

Abstract of dissertation sent out on “____” _______________ 2022.
(Mailing report No.____ on “____” _______________ 2022).

A.Sadullaev
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Academician

N.K.Mamadaliev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees,
PhD in Math.and Physics

A.Sadullaev
Vice-Chairman of Scientific seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Academician

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is a complete description of the dynamics of trajectories, the study of the location of fixed points of the Lotka – Volterra systems for homogeneous tournaments with five vertices and generic matrices, as well as a complete description of the dynamics of quadratic Lotka – Volterra mappings with a degenerate skew-symmetric matrix for small dimensions.

The object of the researchwork is homogeneous tournaments, mixed graphs, map of fixed points, character of fixed points.

Scientific novelty of the research work consists of the following:

with the help of maps of fixed points, criteria for the existence of internal fixed points with five nonzero coordinates were revealed and proved;

characteristic properties of fixed points of the quadratic Lotka – Volterra mappings identified on S^4 simplex are described;

a complete description of the character of fixed points is given;

using elements of the graph theory, the dynamics of trajectories of points inside a four-dimensional simplex is studied;

for quadratic Lotka – Volterra mappings with a degenerate skew-symmetric matrix (for small dimensions), the existence of negative and positive trajectories of the fixed points is proved.

Implementation of the research results. The results obtained in the dissertation of the dynamic properties of quadratic homeomorphisms defined on four-dimensional simplex were used in the following research projects:

the results of the description of the dynamic properties of quadratic homeomorphisms of the simplex were used in the grant number OT-F4-31 “Noncommutative modules, Leibniz algebras and polynomial cascades on simplices” of the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek (2017-2020) when studying the trajectories of fixed points of the Lotka – Volterra systems with five vertices for homogeneous tournaments, with matrices of general position. (Reference of the National University of Uzbekistan dated July 17, 2021, No. 04/11-3803);

the results obtained in the dissertation on the construction of maps of fixed points of the Lotka – Volterra mappings with a homogeneous tournament in the simplex has been applied in the research project “Modified homotopy analysis method for solving a system of linear and nonlinear integral equations and modeling tension and the scale factor of power cable” UMT/CRIM/2-2/2/14 Jld. 4(44), Vote No. 55233, to describe the dynamic properties of the Lotka – Volterra mappings of a four-dimensional simplex.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The total volume of the thesis is 93 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; part I)

1. Ganikhodzhaev R.N., Tadzhieva M.A., Eshmamatova D.B. Dynamical properties of quadratic homeomorphisms of a finite-dimensional simplex // Journal of Mathematical Sciences, 2020. March. Vol. 245. – № 3. – P. 398-402 (Scopus. IF=0.28).

2. Ganikhodzhaev R.N., Tadzhieva M.A. Stability of fixed points of discrete dynamic systems of Volterra type // AIP Conference Proceedings, 2021. V. 2365. – № 1. – P. 060005-1-060005-7. https://doi.org/10.1063/5.0057979. (Scopus. IF=0.7).

3. Tadjiyeva M.A. On properties of a chart of the fixed points in the simplex S^4 // Uzbek Mathematical Journal. – Tashkent, 2019. – № 1. – P. 133-142 (01.00.00. № 6).

4. Таджиева М.А., Эшмаматова Д.Б., Эшниезов А.И., Ганиходжаев Р.Н. Спектр якобиана в неподвижных точках отображений Лотки-Вольтерра действующих в S^4 с однородным турниром и матрицей общего положения // Бюллетень Института математики. – Ташкент, 2021. Vol. 4. – № 3. – С. 91-96 (01.00.00. № 17).

5. Eshmamatova D.B., Ganikhodzhaev R.N., Tadzhieva M.A. Dynamics of Lotka-Volterra quadratic mappings with degenerate skew-symmetric matrix (the case of small dimensions) // Uzbek Mathematical Journal. – Tashkent, 2022. – № 1 (01.00.00. № 6).

II бўлим (II часть; part II)

6. Таджиева М.А. № DGU 12042 UZ. Программа для “Изучения динамики квадратичных отображений Лотки-Вольтерра с вырожденной кососимметричной матрицей (случай малых размерностей)”. №DGU 2021 2135; Заяв 23.06.2021 г.

7. Ганиходжаев Р.Н., Эшмаматова Д.Б., Таджиева М.А. Карта неподвижных точек вольтерровских операторов с однородным турниром в симплексе S^4 // PROCEEDINGS OF SCIENTIFIC CONFERENCE “ACTUAL PROBLEMS OF STOCHASTIC ANALYSIS” dedicated to the 80th anniversary of the birth of academician Sh.K.FORMANOV. – Tashkent, 2021. February 20-21. – P. 499-503.

8. Ganikhodzhaev R.N., Tadzhieva M.A. Устойчивость неподвижных точек дискретных систем вольтерровского типа / Uzbekistan-Malaysia international online conference on “Computational models and technologies (cmt 2020)”. – Tashkent, August 24-25. – P. 191.

9. Ганиходжаев Р.Н., Таджиева М.А. О выпуклой оболочке операторов Лотки-Вольтерра на симплексе и их турниров / Тезисы Международной

конференции “Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий”. – Tashkent, 2019. 14-15 ноября. – С. 154-155.

10. Таджиева М.А., Ганиходжаев Р.Н. Конфликтные ситуации в дискретных динамических системах Лотки-Вольтерра / Материалы Международной конференции “КРОМШ-2019”. – Крым, 2019. 17-29 сентября. – С. 130-131.

11. Ganikhodzhaev R.N., Tadzhieva M.A. Quadratic stochastic operators with homogeneous tournament / Abstracts of the Uzbek-Israel joint international conference. – Tashkent, 2019. 13-17 may. – P. 56.

12. Ganikhodzhaev R.N., Tadzhieva M.A. Dynamic properties of quadratic homemorphisms of a finite-dimensional simplex / Abstracts of the second USA-Uzbekistan conference on analysis and mathematical physics. – Urgench, 2017. August 8-12. – P. 37-38.

13. Ганиходжаев Р.Н., Таджиева М.А., Кадиров А.А. Об условиях гомеоморфности квадратичных отображений симплекса S^{m-1} на себя / Abstracts of the Republic conference “Modern problems of dynamical systems and their appliactions”. – Tashkent, 2017. May 11-12. – P. 200-201.

14. Ганиходжаев Р.Н., Курганов К.А., Таджиева М.А. Динамика некоторых квадратичных стохастических операторов вольтерровского типа соответствующих “странным” турнирам / Abstracts of the Republic conference “Modern problems of dynamical systems and their applications”. – Tashkent, 2017. May 11-12. – P. 201-203.

15. Ганиходжаев Р.Н., Таджиева М.А., Гайбуллаев Р.К. О решениях квадратичных операторных уравнений / Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий Аль-Хорезми. – Ташкент, 2016. 9-16 ноября. – С. 258-259.

16. Ганиходжаев Р.Н., Пирнапасов А.Т., Таджиева М.А. Неподвижные и периодические точки квадратичных гомеоморфизмов конечномерных симплексов / Abstracts of the international conference “Problems of modern topology and applications”. – Tashkent, 2014. May 20-24. – P. 132-134.

Автореферат « Ўзбекистон математика » журнали таҳририятида таҳрирдан ўтказилиб, ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги матнлар ўзаро мувофиқлаштирилди.

Босмахона лицензияси:

9338

Бичими: 84х60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» гарнитураси.
Рақамли босма усулда босилди.
Шартли босма табоғи: 3,5. Адади 100. Буюртма № 16/22.

Гувоҳнома № 851684.
«Tipograff» МЧЖ босмахонасида чоп этилган.
Босмахона манзили: 100011, Тошкент ш., Беруний кўчаси, 83-уй.