ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ҚОСИМОВ ОДИЛБЕК ЮНУСОВИЧ

ЭГРИЛИГИ ЎЗГАРМАС КЎПХИЛЛИКЛАРДА СИНГУЛЯР РИМАН ҚАТЛАМАЛАР ГЕОМЕТРИЯСИ

01.01.04 – Геометрия ва топология

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2022 йил

УДК: 514.763.2

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

Қосимов Одилбек Юнусович
Эгрилиги ўзгармас кўпхилликларда сингуляр риман қатламалар геометрияси...3

Касимов Одилбек Юнусович
Геометрия сингулярных римановых слоений на многообразиях постоянной кривизны…………………………………...19

Qosimov Odilbek Yunusovich
Geometry of singular riemannian foliations on manifolds of constant curvature...35

Эълон қилинган ишлар рўйхати
Список опубликованных работ
List of published works...38

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ҚОСИМОВ ОДИЛБЕК ЮНУСОВИЧ

ЭГРИЛИГИ ЎЗГАРМАС КЎПХИЛЛИКЛАРДА СИНГУЛЯР РИМАН ҚАТЛАМАЛАР ГЕОМЕТРИЯСИ

01.01.04 – Геометрия ва топология

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2022 йил

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2020.3.PhD/FM520 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (www.ik-fizmat.nuu.uz) ва "Ziyonet" ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Нарманов Абдигаппар Якубович** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Заитов Адилбек Атаханович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Шарипов Хуршид Фазлиддинович физика-математика фанлари фалсафа доктори (PhD)
Етакчи ташкилот:	**Ташкент Давлат Транспорт университети**

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2022 йил "15" март соат 11°° даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (26 рақами билан рўйхатга олинган). Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 246-02-24.

Диссертация автореферати 2022 йил "1" март куни тарқатилди.
(2022 йил "1" март даги 1 рақамли реестр баённомаси).

А. Садуллаев
Илмий даражалар берувчи
илмий кенгаш раиси,
ф.-м.ф.д., академик

Н.К. Мамадалиев
Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш илмий котиби,
ф.-м.ф.ф.д. (PhD)

Р.Б.Бешимов
Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш ҳузуридаги илмий семинар
раис муовини, ф.-м.ф.д., доцент

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Бугунги кунда жаҳон миқёсида фундаментал фанлар соҳасида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда замонавий геометриянинг муҳим объектларидан бири бўлган қатламалар геометриясини тадқиқ қилишга бағишланган. Қатламалар назариясининг муҳим бўлимларидан бири сингуляр риман қатламаларидир. Сингуляр риман қатламалари риман геометриясининг классик масалаларидан бири бўлган ҳаракатлар группаси таъсирини ўрганишда пайдо бўлади. Назарий физика ва механикада муҳим аҳамиятга эга бўлган ўзгармас эгриликка эга бўлган кўпхилликларда моддий нуқта ҳаракатини тавсифлаш учун Киллинг вектор майдонлар ишлатилади. Маълумки, Киллинг вектор майдонлар орбиталари ҳам риман қатламаларини ҳосил қилади. Шунинг учун ўзгармас эгриликка эга бўлган кўпхилликларда риман қатламаларини тадқиқ қилиш муҳим аҳамиятга эгадир.

Ҳозирги вақтда жаҳонда риман геометрияси жадал ривожланмоқда. Риман геометриясининг янги ва муҳим бўлимларидан бири француз олимлари томонидан асос солинган қатламалар назариясидир. Риман қатламалари қатламалар назариясининг долзарб соҳаларидан бири бўлиб, кўпгина тадбиқларга эга. Шу жумладан, эгрилиги ўзгармас кўпхилликларда Киллинг вектор майдонлар орбиталари ёрдамида ҳосил қилинган сингуляр қатламаларни тадқиқ қилиш муҳим аҳамият касб этмоқда. Назарий физикада динамик системаларни тавсифлашда уларнинг ҳолат фазоси сифатида кўпхилликлардан ташқари орбифолдлар ҳам ишлатилмоқда. Кўпхилликларда ҳосил қилинган риман қатламалари назарий физика ва механика масалаларида кенг қўлланилмоқда. Сингуляр риман қатламалари геометрияси натижалари ва методларидан назарий физика ҳамда динамик системаларда фойдаланиш муҳим илмий йўналиш ҳисобланади.

Мамлакатимизда математиканинг фундаментал ва амалий йўналишларини ривожлантиришга катта эътибор қаратилмоқда. Қатламалар назарияси геометриянинг янги соҳалари сифатида замонавий математика бўйича тадқиқотларда муҳим воситадир. Шунинг учун дунёнинг кўплаб давлатларида геометриянинг қатламалар назарияси, шу жумладан, вектор майдонлар орбиталари ҳосил қиладиган сингуляр риман қатламалари геометрияси каби янги соҳаларини ривожлантиришга алоҳида эътибор қаратилмоқда. Математика фанларининг устувор йўналишлари ҳисобланган “Алгебра, динамик тизимлар назарияси, геометрия ва топология ва шу каби” ихтисосликлар бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш фундаментал тадқиқотларнинг асосий вазифаси сифатида қаралади[1]. Илмий натижалардан илм фаннинг турдош соҳаларида фойдаланиш мақсадида қатламалар назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга молик масала ҳисобланади.

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида”ги 292-сонли қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида”ги Фармони, 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон “Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ва 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон “Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Диссертация республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. “Математика, механика ва информатика” устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Қатламалар назарияси йигирманчи асрнинг иккинчи ярмида дифференциал топология ва дифференциал тенгламаларнинг туташ соҳасида юзага келди. Қатламалар назариясининг асослари A.Haefliger, G.Ehresman, G.Reeb, H.Rosenberg, G.Lamoureux, R.Langevin каби математикларнинг ишларида шаклланди. Қатламалар назариясига япон математиклари T.Inaba, I.Tamura, америка математиклари R.Herman, Ph.Tondeur, B.L.Reinhart, француз математиклари D.Gromoll, K.Grove, P.Molino, Россия математиклари П.С.Новиков, Н.И.Жуковалар муҳим ҳисса қўшдилар. Ҳозирги вақтда қатламалар назарияси жадал ривожланмоқда. Сингуляр риман қатламалари қатламаларнинг муҳим синфларидан биридир. Регуляр риман қатламалар фанга B.L.Reinhart томонидан 1959 йилда киритилди ва кўп математиклар, жумладан, R.Herman, P.Molino, Ph.Tondeurлар томонидан тадқиқ қилинди. Сингуляр риман қатламалари P.Molino томонидан “Riemanninan foliations. Birkhauser. – Boston-Basel, 1988” номли монографиясида киритилди ва J.Cheeger, Marco Radeschi, M.Marcos, Alexandrino, Ph.Tondeur, А.Я.Нарманов, Ж.О.Аслоновлар ишларида тадқиқ этилган.

Франциялик профессор P.Molino риман кўпхиллигида сингуляр риман қатламаси берилган бўлса, кўпхилликнинг риман метрикаси ҳар бир қатламнинг нормал қатламасида трансверсал риман метрика ҳосил қилишини кўрсатди. Кейинчалик профессор А.Я.Нарманов бу шартнинг тўлиқ риман кўпхиллигида берилган сингуляр қатламанинг риман қатлама бўлиши учун зарур ва етарли шарт эканлигини исботлади. Америкалик профессор Ph.Tondeur метрик функцияларнинг сатҳ сиртлари риман қатламаси ҳосил қилишини кўрсатди. D.Gromoll, K.Groveлар евклид фазосида берилган сингуляр риман қатламаси изопараметрик қатлама эканлигини кўрсатдилар. Сингуляр риман қатламалар табиий равишда риман геометриясининг асосий масалаларининг бири бўлган изометриялар группасининг таъсирини тадқиқ қилишда ҳосил бўлади. Кўпхилликда изометриялар группасининг орбиталари оиласи риман қатламасининг классик моделидир.

Риман қатламаларининг назарий физика ва нисбийлик назариясида муҳим тадбиқларга эга бўлган Киллинг вектор майдонлари орбиталари ва изометрик группа орбиталари оиласи сифатида ҳосил бўлиши унинг геометриясини тадқиқ қилишда сермаҳсул бўлишига олиб келди. Ўзбекистон Миллий университети профессори А.Я.Нарманов ва унинг шогирдлари А.С.Шарипов, Ж.О.Аслонов, Г.Х.Каипназаровалар тадқиқотларида метрик функциялар сатҳ сиртлари ва Киллинг вектор майдонлари орбиталари ҳосил қилган сингуляр риман қатламалар геометрияси тадқиқ қилинган. А.Я.Нарманов, Г.Х.Каипназаровалар ишларида евклид фазосида берилган метрик функция сатҳ сиртлари ҳосил қилган қатлама тўлиқ классификация қилинган, А.Я.Нарманов, Ж.О.Аслонов ишларида уч ўлчамли евклид фазосида Киллинг вектор майдонлар орбиталари ҳосил қилган сингуляр риман қатламанинг тўлиқ таснифи олинган. А.Я.Нарманов ва А.С.Шарипов ишларида қатламли кўпхиллик изометриялар группаси тадқиқ қилинган. Бироқ эгрилиги ўзгармас кўпхилликларда сингуляр риман қатламалар геометрияси масаласи ҳанузгача атрофлича тадқиқ этилмаган. Бу бизнинг мавзумизнинг долзарблигини белгилайди.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий тадқиқот ишлари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Ўзбекистон Миллий университетининг MRU-10/2017 “Геометрик ва аналитик методларни дифференциал ўйинлар ҳамда бошқарув назарияси масалаларида ривожлантириш” мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади сингуляр риман қатламалар геометриясини ва Киллинг вектор майдонлар орбиталари тўплами структурасини тадқиқ қилишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари :

Евклид фазосида коўлчами кичик бўлган сингуляр риман қатламаларини таснифлаш;

компакт кўпхилликларда коўлчами кичик бўлган сингуляр риман қатламаларини тўлиқ тадқиқ қилиш;

Евклид фазосида сингуляр риман қатламасининг сингуляр қатламлари бир-биридан ажралган бўлса, қатлама кесимга эга бўлишини исботлаш;

кесимга эга бўлган сингуляр риман қатламаси қатламлари тўплами структурасини тадқиқ қилиш ва унга орбифолд структурасини киритиш.

Тадқиқотнинг объектини сингуляр риман қатламалари, Киллинг вектор майдонлар орбиталари ва кесимга эга бўлган риман қатламалари ташкил этади.

Тадқиқотнинг предметини эгрилиги ўзгармас кўпхилликларда коўлчами кичик риман қатламалари геометрияси ва Киллинг вектор майдонлари орбиталари геометрияси ташкил этади.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертация тадқиқот ишида риман геометрияси, дифференциал топология ва қатламалар назарияси масалаларини ечиш усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

Евклид фазосида коўлчами кичик бўлган сингуляр риман қатламаларининг тўлиқ таснифи олинган;

компакт кўпхилликларда коўлчами кичик бўлган сингуляр риман қатламаларининг тўлиқ тадқиқи амалга оширилган;

Евклид фазосида сингуляр риман қатламасининг сингуляр қатламлари бир-биридан ажралган бўлса, қатлама кесимга эга бўлиши исботланган;

сингуляр риман қатламасининг қатламлари тўпламида уни силлиқ орбифолдга айлантирувчи дифференциал структура мавжудлиги исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

олинган натижалар амалий аҳамиятга эга бўлган Киллинг вектор майдонлар геометриясини тадқиқ қилишда ишлатилган;

Риман геометриясининг турли масалаларини тадқиқ қилишда қўлланилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги. Риман геометрияси, дифференциал топология ва дифференциал геометрия усулларидан фойдаланилганлиги ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти шундан иборатки, сингуляр риман қатламалар геометрияси бўйича тадқиқот натижалари Киллинг вектор майдонлар орбиталари тўплами орбифолд структурасига эга эканлигини исботлашда қўлланилгани билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти сингуляр риман қатламалар геометрияси бўйича тадқиқот натижалари назарий физикада муҳим аҳамиятга эга бўлган Киллинг вектор майдонлар геометриясини тадқиқ қилишда ҳамда риман геометриясининг турли масалаларида қўлланилиши мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Сингуляр риман қатламалари геометрияси бўйича олинган диссертация натижалари қуйидаги илмий тадқиқот лойиҳасида қўлланилган:

Евклид фазолари ва компакт кўпхилликларда аниқланган сингуляр риман қатламалар геометрияси Ф4-ОТ-0-79517 “Қатламали кўпхилликларнинг геометрияси ва топологияси” номли грант лойиҳада қатламали кўпхилликларнинг геометрик хоссалари ҳақидаги масала ечимида фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта таълим вазирлигининг 2021 йил 2 февралдаги № 89-06-201-сонли маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши эгрилиги ўзгармас кўпхилликларда аниқланган қатлама қатламининг секцион эгрилигини ҳисоблаш учун аниқ формулаларни топиш имконини берган;

Киллинг вектор майдонлари орбиталари ҳосил қилган сингуляр риман қатламалар геометриясидан Удмуртия давлат университетининг “№-20-01-00293 Бошқариш назарияси ва терминал моменти фиксирланмаган дифференциал ўйинлар назарияси масалаларидаги сифатли усуллар” номли тадқиқот лойиҳасида динамик системалар ва дифференциал ўйинларни бошқариш масалаларини ечишда фойдаланилган (Удмуртия давлат университети, Россия, маълумотнома № 7873-2899/30, 29 март 2021 йил). Илмий натижаларнинг қўлланилиши бошқарув тизимларининг ва дифференциал ўйинларнинг эришувчанлик тўпламлари геометриясини аниқлаш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 5 та халқаро ва 5 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация тадқиқоти мавзуси бўйича жами 15 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 5 та мақола, жумладан, 1 таси хорижий ва 4 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг умумий ҳажми 90 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг Ўзбекистон Республикаси фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мувофиқлиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси ҳамда Ўзбекистон Миллий Университети илмий тадқиқотлари билин боғлиқлиги келтирилган.

Тадқиқотнинг мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **“Сингуляр қатламалар геометрияси”** номланувчи биринчи боби учта параграфдан иборат. Ушбу бобда диссертацияда ишлатиладиган асосий тушунча ва ёрдамчи фактлар келтирилган.

Берилган M кўпхилликнинг x нуқтаси орқали чексиз кўп силлиқ чизиқлар ўтади, бу чизиқларнинг x нуқтадаги уринма векторлари тўплами T_xM фазо n ўлчамли вектор фазо бўлади ва кўпхилликнинг x нуқтадаги уринма фазоси деб аталади.

Берилган M кўпхилликнинг барча x нуқтасида аниқланган уринма фазолар оиласининг бирлашмаси шу кўпхилликнинг уринма қатламаси деб аталади ва қуйидагича белгиланади

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M.$$

Маълумки, уринма қатлама $2n$ ўлчамли силлиқ кўпхиллик бўлади.

Ҳар бир $x \in M$ учун $\pi(X, x) = x$ қоида билан аниқланувчи $\pi : TM \to M$ акслантириш проекция деб аталади, бу ерда $X \in T_x M$.

Таъриф 1.1.4. Берилган n ўлчамли силлиқ кўпхиллик M да $\pi \circ X(x) = x$ қоида билан аниқланувчи $X : M \to TM$ акслантириш кўпхиллик устида аниқланган вектор майдон дейилади.

Бизга M кўпхилликда аниқланган X силлиқ вектор майдон берилган бўлсин. Ҳар бир $t \in (a, b)$ учун $\dot{\varphi}(t) = X(\varphi(t))$, тенглик бажарилса, $\varphi : (a, b) \to M$ силлиқ эгри чизиқ берилган X вектор майдоннинг интеграл эгри чизиғи дейилади, бу ерда $\dot{\varphi}(t) -$ $\varphi : (a, b) \to M$ эгри чизиқнинг $\varphi(t)$ нуқтасига мос уринма вектори. Биз $X^t(x)$ орқали M кўпхилликда аниқланган X вектор майдоннинг $t = 0$ да $x \in M$ нуқта орқали ўтувчи интеграл чизиғини белгилаймиз.

Бизга M кўпхилликда аниқланган X ва Y силлиқ вектор майдонлар берилган бўлсин. Бу вектор майдонларга уларнинг Ли қавси деб аталувчи ва қўйидаги шартни қаноатлантирувчи:

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)),$$

ягона $[X, Y]$ вектор майдон мос қўйилади, бу ерда $f : M \to R$ силлиқ функция.

Берилган M кўпхилликда аниқланган барча силлиқ вектор майдонлар тўплами $V(M)$ ҳақиқий сонлар майдони устида вектор майдонларнинг Ли қавсига нисбатан Ли алгебрасини ташкил қилади.

Таъриф 1.1.5. Агар M кўпхилликда аниқланган X вектор майдон оқими ҳосил қилган бир параметрли акслантиришлар группаси изометриялардан ташкил топган бўлса, X вектор майдон Киллинг вектор майдон дейилади.

Таъриф 1.1.7. Ҳар бир $x \in M$ нуқтага бирор $P(x) \subset T_x M$ қисм фазони мос қўйувчи P акслантириш текисликлар майдони дейилади. Агар ҳар қандай $x \in M$ нуқта учун $\dim P(x) = k$ тенглик бажарилса, у ҳолда P майдон k ўлчамли текисликлар майдони дейилади.

Таъриф 1.1.8. Агар ҳар бир $x \in M$ нуқта учун шундай $U(x)$ атроф ва бу атрофда силлиқ $X_1, X_2, ..., X_m$ вектор майдонлар топилиб барча $y \in U(x)$ нуқталар учун $P(y)$ қисм фазода $X_1(y), X_2(y), ..., X_m(y)$ векторлар базис ташкил қилса, у ҳолда P текисликлар майдони силлиқ дейилади.

Таъриф 1.1.9. Ҳар бир $x \in M$ нуқта учун шундай $N_x \subset M$ қисм кўпхиллик топилиб, барча $y \in N_x$ нуқталар учун $T_y N_x = P(y)$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда P текисликлар майдони тўла интегралланувчи дейилади. N_x қисм кўпхиллик P текисликлар майдонининг интеграл қисм кўпхиллиги дейилади.

Бизга D силлиқ вектор майдонлар оиласи берилган бўлса, у ҳолда табиий равишда текисликлар майдони ҳосил бўлади. Ҳақиқатан ҳам, агар D силлиқ вектор майдонлардан ташкил топган бўлса, у ҳолда ҳар бир $x \in M$ нуқта учун $D(x) = \{X(x) : X \in D\}$ векторлар тўплами $T_x M$ уринма фазонинг бирор $P(x)$ қисм фазосини вужудга келтиради ва бу текисликлар майдонини P_D орқали белгилаймиз. Агар ҳар бир $x \in M$ нуқта учун $X(x) \in P(x)$ муносабат бажарилса, у ҳолда X вектор майдон P текисликлар майдонига тегишли дейилади.

Кўпхиллик устида берилган P текисликлар майдони учун $X, Y \in P$ муносабатдан $[X, Y] \in P$ муносабат келиб чиқса P инволютив дейилади.

Таъриф 1.1.10. Агар D вектор майдонлар оиласи ҳосил қилган P_D текисликлар майдони тўлиқ интегралланувчи бўлса, у ҳолда D вектор майдонлар оиласи тўлиқ интегралланувчи дейилади.

M кўпхиллик n ўлчамли силлиқ кўпхиллик, A атлас M кўпхилликда C^r синфга тегишли силлиқ кўпхиллик структурасини аниқловчи максимал атлас бўлсин, бу ерда $r \geq 0$. Агар $r \geq s \geq 0$ бўлса, M кўпхиллик C^s синфга тегишли кўпхиллик бўлади, бунда C^s синфга тегишли M кўпхилликда локал эгри чизиқли координаталар системасини A^s орқали белгилаймиз. k сон $0 < k < n$ тенгсизликни қаноатлантирувчи бутун сон бўлсин.

Таъриф 1.2.1. Агар M кўпхилликнинг чизиқли боғланишли қисм тўпламларидан тузилган $F = \{L_\alpha ; \alpha \in B\}$ оила, қуйидаги учта шартни қаноатлантирса, у k **ў**лчамли C^r қатлама дейилади:

(F_1) $\bigcup\limits_{\alpha \in B} L_\alpha = M$;

(F_{11}) барча $\alpha, \beta \in B$ учун, агар $\alpha \neq \beta,$ у холда $L_\alpha \cap L_\beta = \varnothing$;

(F_{111}) ихтиёрий $p \in M$ нуқта учун шундай $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in A^{(r)}$, $p \in U_\lambda$ локал координаталар системаси мавжудки, агар $U_\lambda \cap L_\alpha \neq \varnothing$ бўлса, у ҳолда $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap L_\alpha)$ тўпламнинг чизиқли боғлиқлик компоненталари қуйидаги тенгламалар билан берилади:

$$\{(x_1, x_2, ... x_n) \in \varphi_\lambda(U_\lambda) : \ x_{k+1} = c_{k+1}, \ x_{k+2} = c_{k+2}, ..., x_n = c_n\},$$

бу ерда $c_{k+1}, c_{k+2}, ..., c_n$ сонлар чизиқли боғлиқлик компоненталарида ўзгармас сонлардир.

Таъриф 1.2.3. М кўпхилликнинг L қисм тўплами k ўлчамли қатлам дейилади, агар L устида шундай σ дифференциал структура мавжуд бўлиб, у қуйидаги шартларни қаноатлантирса:

1) (L,σ) силлиқ кўпхиллик M кўпхилликнинг $k-$ ўлчамли ботирилган боғланишли қисм кўпхиллиги бўлади;

2) N ихтиёрий локал боғланишли топологик фазо, $f(N)\subset L$ муносабатни қаноатлантирувчи $f:N\to M$ узлуксиз акслантириш бўлса, у ҳолда $f:N\to(L,\sigma)$ узлуксиз бўлади.

Таъриф 1.2.4. M кўпхилликнинг F қатламларга ажралиши (C^r синфга тегишли) силлиқ сингуляр қатлама (яьни махсусликка эга қатлама) дейилади, агар қуйидаги шартлар бажарилса:

1) ҳар бир $x\in M$ нуқта учун, шу x нуқтани ўз ичига олувчи шундай C^r синфга тегишли, $\psi(U)=V_1\times V_2$, тенгликни қаноатлантирувчи $(\psi,U)-$ карта мавжуд, бу ерда V_1 тўплам R^k фазо координата бошининг атрофи, V_2 тўплам эса R^{n-k} да координата бошининг атрофи, k эса x нуқтадан ўтувчи қатламнинг ўлчами;

2) $\psi(x)=(0,0)$;

3) $L\cap U\neq\varnothing$ муносабат ўринли бўлган ҳар бир L қатлам учун $L\cap U=\psi^{-1}(V_1\times l)$ тенглик ўринли, бу ерда $l=\left\{\, v\in V_2:\psi^{-1}\left(0,v\right)\in L\right\}$.

Таъриф 1.2.5. Агар F сингуляр қатламанинг бирор қатламига перпендикуляр ўтувчи ҳар қандай геодезик чизиқ F сингуляр қатламанинг бошқа қатламларига ҳам перпендикуляр бўлса, F қатлама риман қатламаси дейилади.

F қатлама риман кўпхиллигидаги сингуляр қатлама бўлсин. F қатламанинг p нуқтани ўз ичига олувчи L_p қатлам максимал ўлчамга эга бўлса, L қатлами регуляр қатлам дейилади. F қатламанинг L қатлами регуляр қатлам бўлмаса бу қатлам сингуляр қатлам дейилади. L регуляр қатламнинг нуқталари F қатламанинг регуляр нуқталар дейилади. F қатламанинг бирорта нуқтаси регуляр нуқта бўлмаса бу нуқта сингуляр нуқта дейилади.

Бу параграфда R^3 да $D=\{X,Y\}$ вектор майдонлар оиласи қаралган, бу ерда

$$X=\{-y;x;0\},\ \mathrm{Y}=\{0;z;y\}.$$

Бу оила учун қуйидаги теорема исботланган.

Теорема 1.2.3. D вектор майдонлар оиласининг орбитаси сингуляр қатламани ҳосил қилади, сингуляр қатлами битта нуқтадан иборат, регуляр қатламлари эса учи чиқариб ташланган, яъни координаталар боши чиқариб ташланган конус ҳамда бир паллали ва икки паллали гиперболоидлар оиласидан иборат.

Таъриф 1.3.1. Агар ҳар бир T_xM уринма фазода $x\in M$ нуқтага силлиқ боғланган $<,>$ скаляр кўпайтма аниқланган бўлса, у ҳолда M силлиқ кўпхилликда риман структураси аниқланган дейилади.

Риман структураси аниқланган боғланишли силлиқ кўпхиллик M риман кўпхиллиги дейилади.

Қуйидаги акслантиришни қарайлик:

$$\nabla : V(M)\times V(M)\to V(M),\ (u,X)\to \nabla_u X$$

Таъриф 1.3.2. Юқоридаги акслантириш қуйидаги хоссаларга эга бўлса, бу акслантиришга боғланиш деб аталади:

а) $\nabla_{au+bv}X = a\nabla_u X + b\nabla_v X$,

б) $\nabla_u(aX+bY) = a\nabla_u X + b\nabla_u Y$,

с) $\nabla_u(f\,X) = (uf)X_x + f(x)\nabla_u X$.

Бу ерда $uf -\ f$ функциянинг u вектор йўналиши бўйича ҳосиласи. $\nabla_u X$ ифода X вектор майдоннинг u вектор йўналиши бўйича ковариант ҳосиласи дейилади.

Агар ∇ акслантириш (U,h) локал координаталарда қуйидаги

$$(\nabla_u X)_p = \left(u^i \frac{\partial \bar{X}^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p = \left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} u^i \frac{\partial \bar{X}^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p$$

тенглик билан аниқланса, боғланишдан иборат бўлади, бу ерда $\bar{X}^j = X^j \circ h,\ X^j -\ X$ майдоннинг координат функциялари.

Таъриф 1.3.4. Кўпхилликдаги ихтиёрий X, Y, Z силлиқ вектор майдонлар учун

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

тенглик бажарилса, ∇ боғланиш Риман боғланиши ёки Леви-Чивита боғланиши дейилади.

Ҳар бир $p\in M$ нуқта ва ихтиёрий $u,v\in T_pM$ векторлар учун

$$R(u,v)w = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

қоида билан таъсир қилувчи $R(u,v): T_pM \to T_pM$ акслантириш эгрилик алмаштириши дейилади, бу ерда M кўпхилликда аниқланган $X,\ Y,\ Z$ вектор майдонлар $X_p = u,\ Y_p = v,\ Z_p = w$ шартни қаноатлантирувчи силлиқ вектор майдонлар.

Таъриф 1.3.5. Ушбу $k(u,v) := \langle R(u,v)v,u\rangle$ формула билан аниқланадиган $k: T_pM\times T_pM \to R$ функция риман эгрилиги дейилади.

Бизга чизиқли эркли $u,v\in T_pM$ векторлар орқали аниқланувчи $\sigma\subset T_pM$ текислик берилган бўлсин. Бу текисликка K_σ ҳақиқий сонни мос қўямиз:

$$K_\sigma = \frac{\langle R(u,v)v,u\rangle}{|u|^2|v|^2 - \langle u,v\rangle^2},$$

бунда $\langle u,v\rangle - g$ риман метрикаси ёрдамида аниқланган скаляр кўпайтма. K_σ катталик нуқтадаги берилган текисликка нисбатан секцион эгрилик ёки икки ўлчамли σ йўналишдаги эгрилик дейилади.

Таъриф 1.3.6. Агар риман кўпхиллигининг K_σ секцион эгрилиги ўзгармас, яьни у нуқтанинг танланишига ҳам, икки ўлчамли йўналиш σ нинг танланишига ҳам боғлиқ бўлмаса, риман кўпхиллиги ўзгармас эгриликка эга дейилади.

Таъриф 1.3.10. Бизга ∇ боғланишга эга силлиқ M кўпхиллик берилган бўлсин. $\gamma:[a,b]\to M$ чизиқ учун $\frac{D}{dt}\gamma^{'}(t)=0$ тенглик бажарилса, яьни γ чизиқнинг γ' тезлик вектор майдони γ бўйлаб параллел бўлса у геодезик чизиқ дейилади.

Хусусий ҳолда параллел вектор майдоннинг интеграл чизиғи геодезик чизиқдан иборат бўлади.

Уринма фазода берилган $u\in T_pM$ вектор йўналишидаги геодезик чизиқни $\gamma_u(t)$ билан белгилаймиз.

Таъриф 1.3.11. Уринма текисликда $\exp_p u=\gamma_u(1)$ қоида билан аниқланган $\exp_p:T_pM\to M$ акслантириш экспоненциал акслантириш дейилади.

Бу таъриф ихтиёрий боғланишли кўпхилликлар учун ҳам аниқланади. Риман кўпхиллиги бўлган ҳолда $\exp_p:T_pM\to M$ акслантириш акси, T_pM урунма фазода бошланғич p нуқтадан u йўналиш бўйича йўналган ҳар бир нур, p нуқтадан чиқувчи u йўналишдаги геодезик чизиқ узунлиги билан текис “устма-уст” тушади (геодезик чизиқ охиригача).

Диссертациянинг **“Сингуляр риман қатламалар геометрияси”** номли иккинчи боби учта параграфдан иборат. Диссертациянинг бу бобида евклид фозоси ҳамда компакт фазоларда сингуляр риман қатламалар геометрияси тадқиқ қилинган.

Иккинчи бобнинг биринчи параграфида евклид фазоларидаги коўлчами кичик сингуляр риман қатламалар классификацияси ҳосил қилинган.

Бу параграфнинг асосий натижаси евклид фазоларидаги коўлчами кичик сингуляр риман қатламалар геометрияси ҳақидаги теоремадан иборат.

Теорема 2.1.1. F қатлама R^n евклид фазосидаги сингуляр риман қатламаси бўлсин. Регуляр қатламнинг ўлчами $n-1$, сингуляр қатламлар тўплами SingF эса чекли сондаги қатламлардан ташкил топган бўлсин. У ҳолда F қатлама қуйидаги n та типдан бири бўлади:

1. F қатлама параллел гипертекисликлардан тузилган;

2. F қатлама концентрик сфералар оиласи ва нуқтадан (сфералар марказидан) иборат;

3. F қатлама $S^{n-k-1}\times R^k$ кўринишидаги концентрик цилиндрлар оиласи ва R^k кўринишидаги сингуляр қатламдан иборат, бу ерда $1\le k\le n-2$.

Иккинчи бобнинг иккинчи параграфида компакт кўпхилликларда коўлчами кичик сингуляр риман қатламалар геометрияси тасниф қилинган.

Қуйидаги теорема исботланган.

Теорема 2.2.1. F қатлама $M-$компакт боғланишли $n-$ўлчамли кўпхилликда аниқланган сингуляр риман қатламаси, регуляр қатламнинг ўлчами $n-1$ га тенг бўлсин. У ҳолда:

a) агар компакт бўлмаган регуляр қатлам мавжуд бўлса, у ҳолда F қатлама регуляр қатламадан иборат бўлади ҳамда барча қатламлар ҳамма жойда зич бўлади;

b) агар компакт бўлмаган регуляр қатлам мавжуд бўлмаса, у ҳолда $\mathrm{SingF} \neq \varnothing$ ва барча қатламлар компакт бўлади.

Натижа 2.2.1. F қатлама M компакт боғланишли кўпхилликдаги коўлчами бирга тенг сингуляр қатлама бўлсин. У ҳолда F қатламанинг барча қатламлари компакт бўлади ёки барча қатламлар ҳамма жойда зич бўлади.

Агар M кўпхиллик R^n фазога силлиқ жойлашган ва R^n фазода координаталар боши орқали чиқувчи l йўналтирувчи векторга эга $\xi_l(t)$ тўғри чизиқ берилган бўлсин, у ҳолда $x \in M$ нуқтадаги қиймати бу нуқтанинг $\xi_l(t)$ тўғри чизиққа ортогонал проекциясига тенг бўлган $h_l(x)$ функция баландлик функцияси дейилади.

Ушбу F қатлама икки ва уч ўлчамли сфералардаги сингуляр риман қатламаси бўлсин. Икки ва уч ўлчамли сфераларда қуйидаги теоремалар исботланган.

Теорема 2.2.2. F қатлама иккита сингуляр қатламга эга бўлиб, у баландлик функцияларининг сатх чизиқларидан иборат қатламлардан иборат.

Теорема 2.2.3. F қатлама қуйидаги типлардан бири бўлади:

1. F қатлама бир ўлчамли ва Хопф қатламасига ортогонал эквивалент.
2. F қатлама бир ўлчамли регуляр қатламларга эга ва сингуляр қатламлар тўплами ёпиқ геодезик чизиқ билан устма-уст тушади.
3. F қатламанинг регуляр қатламлари икки ўлчамли сфералар оиласидан иборат ва иккита сингуляр (нол ўлчамли қатлам) қатламга эга.
4. F қатлама икки ўлчамли регуляр қатламлардан тузилган (икки ўлчамли торлар) ва иккита сингуляр бир ўлчамли қатламга эга.

Иккинчи бобнинг учинчи параграфида вектор майдонлар оиласи ҳосил қилган сингуляр қатламалар геометрияси масалалари атрофлича ўрганилган.

Маълумки, M кўпхилликни D оиланинг орбиталарига бўлиниши сингуляр қатламани ҳосил қилади.

Евклид фазосида D вектор майдонлар оилаларининг орбитаси сингуляр қатлама ҳосил қилиши кўрсатилган, бу ерда

Евклид фазосида $D_1 = \{X, Y\}$, $D_2 = \{Y, Z\}$, $D_3 = \{X, Z\}$ вектор майдонлар оилаларининг орбитаси сингуляр қатлама ҳосил қилиши кўрсатилган, бу ерда

$$X = \{x, y, z\},\ Y = \{-y, x, 0\},\ \mathrm{Z}=\{\text{-y,x,1}\}.$$

Бу вектор майдонлар оилалари учун қуйидаги теоремалар исботланган.

Теорема 2.3.4. Уч ўлчамли R^3 фазода $D_1 = \{X, Y\}$ вектор майдонлар оиласи F сингуляр қатламани ҳосил қилади, унинг регуляр қатламлари учи ўзига тегишли бўлмаган доиравий конуснинг юқори ва пастки қисмлари ҳамда битта нуқтаси чиқариб ташланган икки ўлчамли текислик ташкил қилади. F қатламанинг сингуляр қатлами эса битта нуқта ва иккита нурлардан иборат.

Теорема 2.3.5. Уч ўлчамли R^3 фазода $D_2 = \{Y, Z\}$ вектор майдонлар оиласи F сингуляр қатламани ҳосил қилади, регуляр қатламалар концентрик цилиндрлар оиласидан иборат. F қатламанинг сингуляр қатлами эса битта тўғри чизиқдан иборат.

Теорема 2.3.6. Уч ўлчамли R^3 фазода $D_3 = \{X, Z\}$ вектор майдонлар оиласи F сингуляр қатламани ҳосил қилади, сингуляр қатлам битта тўғри чизиқдан иборат, яъни Oz ўқидан иборат, L регуляр қатлам эса уч ўлчамли кўпхилликдан иборат.

Диссертациянинг **“Киллинг вектор майдонлар орбиталари тўплами структураси”** номли учинчи боби иккита параграфдан иборат. Диссертациянинг бу бобида Киллинг вектор майдонлар оиласи орбиталари ҳосил қилган сингуляр қатламалардан ташкил топган фазолар структураси тадқиқ қилинган.

Учинчи бобнинг биринчи параграфида кесимга эга бўлган сингуляр Риман қатламалар геометрияси тадқиқ қилинган.

Таъриф 3.1.1. $F-$ тўла риман кўпхиллигидаги сингуляр риман қатламаси бўлсин. Агар ихтиёрий регуляр p нуқтадан ўтувчи $\sigma := \exp_p(H_p L)$ тўплам ҳамма қатламларни ортогонал кесиб ўтувчи тўла ботирилган қисм кўпхилликдан иборат ва унинг регуляр нуқталари тўплами ҳамма жойда зич бўлса, F кесимга эга бўлган сингуляр риман қатламаси дейилади, σ тўплам кесим деб аталади.

Қуйидаги теоремада Киллинг вектор майдонлар орбиталари ҳосил қилган қатламанинг кесимга эга бўлишининг етарли шарти кўрсатилган.

Теорема 3.1.2. F қатлама R^n фазодаги Киллинг вектор майдонлар D оиласи ҳосил қилган сингуляр риман қатламаси бўлсин. Агар барча сингуляр қатламлар яккаланган ва регуляр қатламларнинг ўлчами $n-1$ га тенг бўлса, у ҳолда F кесимга эга бўлган риман қатламаси бўлади.

Қуйидаги теорема исботланган.

Теорема 3.1.3. F қатлама R^n фазодаги D Киллинг вектор майдонлар оиласи ҳосил қилган сингуляр риман қатламаси бўлсин, бу ерда $n = 2,3.$ Агар регуляр қатламанинг ўлчами $n-1$ га тенг бўлса, у ҳолда F кесимга эга бўлган сингуляр риман қатламаси бўлади.

Учинчи бобнинг иккинчи параграфида Киллинг вектор майдонлар орбиталари кесимга эга бўлган сингуляр риман қатламасини вужудга келтирса, у ҳолда бу орбиталар тўплами силлиқ орбифолд бўлиши исботланган.

M орқали саноқли базага эга бўлган боғланишли Хаусдорф топологик фазосини белгилаймиз. M нинг очиқ қисм тўпламини U билан, R^n нинг очиқ қисм тўпламини V билан белгилаймиз ва $G-$ V даги C^r дифференциалланувчи чекли группа.

Орбифолддаги карта деб (U,V,G,φ) тўртликка айтилади, бу ерда $\varphi: V \to U$ акслантириш иккита акслантиришлар композициясидан иборат, яъни $\varphi := \tilde{\pi} \circ \pi$, $\pi: V \to V/G$ фактор акслантириш ва $\tilde{\pi}: V/G \to U$ ихтиёрий гомеоморфизм.

Берилган (U,V,G,φ) ва (U',V',G',φ') карталар учун $U \subset U'$ муносабат бажарилса, (η,ψ), жуфтлик инъекция дейилади, агар $\eta: V \to V'$ C^r- жойлаштириш, $\psi: G \to G'$ мономорфизм бўлиб, улар барча $\gamma \in G$ лар учун қуйидаги шартларни қаноатлантирса:

$$\varphi = \varphi' \circ \eta \text{ и } \eta \circ \gamma = \psi(\gamma) \circ \eta$$

Орбифолддаги $A = \{(U_\alpha, V_\alpha, G_\alpha, \varphi_\alpha), \alpha \in J\}$ карталар оиласи C^r синфга тегишли атлас дейилади, агарда бу атлас қуйидаги шартларни қаноатлантирса:

1) $\{U_\alpha, \alpha \in J\}$ карталар тўплами M кўпхилликни қопласа;

2) A атласга тегишла ихтиёрий иккита $(U_\alpha, V_\alpha, G_\alpha, \varphi_\alpha)$ ва $(U_\beta, V_\beta, G_\beta, \varphi_\beta)$ карталар учун $U_\alpha \subset U_\beta$ муносабат бажарилса, инъекция мавжуд бўлиши керак.

M орбифолддаги C^r синфга тегишли A максимал атлас C^r синфга тегишли дифференциал структура дейилади ва (M,A) жуфтлик дифференциалланувчи C^r орбифолд дейилади.

Сингуляр қатламалар учун қуйидаги теорема исботланган.

Теорема 3.2.3. F қатлама R^n фазодаги D Киллинг вектор майдонлар оиласи ҳосил қилган сингуляр қатлама бўлсин. Агар F кесимга эга бўлган сингуляр риман қатламаси бўлса, у ҳолда F қатламанинг қатламлар тўплами (орбиталар тўплами) силлиқ орбифолд бўлади.

ХУЛОСА

Диссертация эгрилиги ўзгармас кўпхилликларда сингуляр риман қатламалари геометриясини тадқиқ қилишга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Евклид фазосида коўлчами кичик бўлган сингуляр риман қатламаларининг тўлиқ таснифи олинган.
2. Компакт кўпхилликда коўлчами кичик бўлган сингуляр риман қатламаларининг тўлиқ таснифи ўрганилган.
3. Икки ва уч ўлчамли сферада коўлчами кичик бўлган сингуляр риман қатламаларининг тўлиқ таснифи олинган.

4. Евклид фазосида сингуляр риман қатламасининг сингуляр қатламлари бир-биридан ажралган бўлса, қатлама кесимга эга бўлиши исботланган.

5. Икки ва уч ўлчамли евклид фазоларида Киллинг вектор майдонлар орбиталари ҳосил қилган сингуляр риман қатламаси кичик коўлчамга эга бўлса, қатлама кесимга эга бўлиши далилланган.

6. Сингуляр риман қатламасининг қатламлари тўпламида уни силлиқ орбифолдга айлантирувчи дифференциал структура мавжудлиги исботланган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

КАСИМОВ ОДИЛБЕК ЮНУСОВИЧ

ГЕОМЕТРИЯ СИНГУЛЯРНЫХ РИМАНОВЫХ СЛОЕНИЙ НА МНОГООБРАЗИЯХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

01.01.04 – Геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО – МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ТОШКЕНТ–2022 год

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за B2020.3.PhD/FM520.

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана имени М. Улугбека.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.ik-fizmat@nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Нарманов Абдигаппар Якубович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Заитов Адилбек Атаханович** доктор физико-математических наук, профессор
	Шарипов Хуршид Фазлиддинович доктор философии физико-математических наук (PhD)
Ведущая организация:	**Ташкентский государственный транспортный университет**

Защита диссертации состоится «15» марта 2022 года в 11[00] часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871)227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №26). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «1» марта 2022 года.
(протокол рассылки №1 от «1» марта 2022 года).

А.Садуллаев
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

Н.К.Мамадалиев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.ф.-м.н.(PhD)

Р.Б.Бешимов
Заместитель председателя научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., доцент

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многочисленные научные и практические исследования, проводимые в области фундаментальных наук в мире, посвящены изучению геометрии слоений, которая является одним из важнейших объектов современной геометрии. Одним из важных разделов теории слоений является сингулярные римановы слоения. Сингулярные римановы слоения естественным образом возникают в одной из основных задач римановой геометрии при изучении действия группы изометрий. Векторные поля Киллинга используются для описания движения материальной точки в многообразиях, которые имеют постоянную кривизну, что важно в теоретической физике и механике. Известно, что орбиты векторных полей Киллинга также порождают римановы слоения. Поэтому, исследования римановых слоений в многообразиях с постоянной кривизной очень важны.

В настоящее время в мире интенсивно развивается риманова геометрия. Одним из новых и важных разделов римановой геометрии является теория слоений, основанная французскими учеными. Римановы слоения являются одной из основных областей теории слоений и имеют многие применения. В частности, важно изучить сингулярные слоения, сформулированные с использованием орбит векторных полей Киллинга в многообразиях постоянной кривизны. В теоретической физике при описании динамических систем, кроме многообразия, орбифолды также используются в качестве фазы их состояния. Римановы слоения, порождаемые в многообразиях, широко используются в вопросах теоретической физики и механики. Использование результатов и методов геометрии сингулярных римановых слоений в теоретической физике и динамических системах является актуальным научным направлением.

В нашей стране достаточно большое внимание уделяется развитию фундаментальных направлений математики. Теория слоений как новый раздел геометрии является важным инструментом в исследованиях в современной математике. Поэтому, широкое внимание уделяется развитию новых разделов геометрии, как теория слоений, в частности, изучению геометрии сингулярных слоений, порожденных орбитами векторных полей. Проведение научных исследований по приоритетным направлениям математических наук на уровне международных стандартов по важным направлениям специальности «Алгебра, теория динамических систем, геометрия и топология и т.д.» рассматривается как важная задача фундаментальных исследований[1]. В целях использования научных результатов в

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан»

смежных областях науки, важной считается развитие теории слоений.

Данное диссертационное исследование в определенной степени служит решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в постановлениях № ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан» и № ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Теория слоений возникла во второй половине двадцатого века на стыке дифференциальной топологии и дифференциальных уравнений. Основы теории слоений сформировались в работах таких математиков, как A.Haefliger, G.Ehresman, G.Reeb, H.Rosenberg, G.Lamoureux, R.Langevin. Важный вклад в теорию слоений внесли известные математики, такие, как японские математики T.Inaba, I.Tamura, американские математики R.Herman, Ph.Tondeur, B.L.Reinhart, французские математики D.Gromoll, K.Grove, P.Molino, российские математики П.С.Новиков, Н.И.Жукова. Сейчас теория слоений интенсивно развивается. Одним из важных классов слоений является римановы слоения. Регулярные римановы слоения введены B.L.Reinhart в 1959 году и изучались многими авторами, в частности, в работах R.Herman, P.Molino, Ph.Tondeur. Сингулярные римановы слоения были введены P.Molino в своей монографии «Riemanninan foliations. Birkhauser. Boston-Basel. 1988» и изучались в работах J.Cheeger, Marco Radeschi, M.Marcos, Alexandrino, А.Я.Нарманова, Ж.О. Аслонова.

Французский профессор P.Molino показал, что если на римановом многообразии задано сингулярное риманово слоение, то риманова метрика порождает трансверсальную риманову метрику на нормальном расслоении каждого слоя. Профессор А.Я.Нарманов доказал, что на полном римановом многообразии это условие является необходимым и достаточным условием для того, чтобы сингулярное слоение было римановым. Американский профессор Ph.Tondeur показал, что поверхности уровня метрических функций порождают римановы слоения. Gromoll D, Grove K показали, что одномерное риманово слоение на евклидовом пространстве является изопараметрическим слоением. Сингулярные римановы слоения естественным образом возникают в одной из основных задач римановой геометрии по изучению действия группы изометрий. Разбиение риманова многообразия на орбиты группы изометрий является классической моделью риманова слоений.

Исследования геометрии римановых слоений оказались очень плодотворными в силу того, что римановы слоения возникают как семейство орбит векторных полей Киллинга и как разбиение риманова многообразия на орбиты группы изометрий, которые имеют широкие приложения в теоретической физике и в теории относительности. В исследованиях ученых Национального университета Республики Узбекистана по геометрии слоений профессора А.Я.Нарманова и его учеников А.С.Шарипова, Ж.О.Аслонова, Г.Х.Каипназаровой изучены геометрии сингулярных римановых слоений, порожденных орбитами векторных полей Киллинга и группы изометрий римановых слоений. В работах А.Я.Нарманова, Г.Х.Каипназаровой получена полная классификация сингулярных римановых слоений евклидова пространства, порожденных поверхностями уровня метрических функций, в работах А.Я.Нарманова, Ж.О.Аслонова получена полная классификация сингулярных римановых слоений трехмерного евклидова пространства, порожденных орбитами векторных полей Киллинга. В работах А.Я.Нарманова и А.С.Шарипова исследована группа изометрий римановых слоений, порожденных римановыми субмерсиями.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждением высшего образования, где выполнялась диссертация. Исследование выполнено в соответствии с планом научного исследовательского проекта MRU-10/2017 «Развитие геометрических и аналитических методов в задачах теории управления и дифференциальных играх» Национального университета Узбекистана.

Целью исследования является изучение геометрии сингулярных римановых слоений и структуры множества орбит векторных полей Киллинга.

Задачи исследования:

классификация сингулярных римановых слоений малой коразмерности евклидова пространства;

полная классификация сингулярных римановых слоений малой коразмерности на компактных многообразиях;

исследование геометрии сингулярного риманова слоения с сечением;

исследование структуры множества слоев сингулярного риманова слоения с сечением и введение на этом множестве структуры гладкого орбиобразия.

Объект исследования – сингулярное риманово слоение, орбита векторных полей Киллинга.

Предмет исследования – геометрия римановых слоений малой коразмерности на евклидовом пространстве, геометрия орбит векторных полей Киллинга.

Методика исследования. В диссертационной работе используются методы римановой геометрии, дифференциальной топологии и теории слоений.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

получена классификация сингулярных римановых слоений малой коразмерности евклидова пространства;

получена классификация сингулярных римановых слоений малой коразмерности на компактных многообразиях;

доказано, что если сингулярные слои сингулярного риманова слоения малой коразмерности евклидова пространства изолированы друг от друга, то это слоение является слоением с сечением;

доказано, что на множестве слоев сингулярного риманова слоения с сечением существует дифференциальная структура, по отношению к которой множество слоев является гладким орбиобразием.

Практические результаты исследования – результаты исследования геометрии Римановых слоений применяются для изучения геометрии орбит векторных полей Киллинга, а также для решения различных задач римановой и дифференциальной геометрии.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием методов римановой геометрии, дифференциальной топологии и дифференциальной геометрии, а также строгостью математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования заключается в том, что доказано, что множество слоев сингулярного риманова слоения является гладким орбиобразием и получена классификация риманова слоения малой коразмерности на евклидовом пространстве и на компактном мноогообразии.

Практическая значимость результатов исследования состоит в том, что изучение геометрии римановых слоений является важной и практической основой для задач римановой геометрии, для изучения геометрии векторных полей Киллинга, для изучения геометрии подмногообразий риманова многообразия, а также для задач римановой геометрии.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты по геометрии сингулярных римановых слоений были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

Геометрия сингулярных римановых слоений евклидова пространства и компактного многообразия использованы в исследованиях проекта Ф4-ОТ-0-79517 “Геометрия и топология слоеных многообразий” при решении задач о геометрии слоеных многообразий. (Справка Министерства высшего и средне-специального образования Республики Узбекистан от 2 февраля 2021 года №89-06-201). Применение научных результатов позволило найти точные формулы для вычисления секционной кривизны слоев слоений многообразий постоянной кривизны;

Геометрия сингулярные римановых слоений, порождённых орбитами векторных полей Киллинга использованы в научно-исследовательском проекте Удмуртского государственного университета «№-20-01-00293 Качественные методы в задачах теории управления и теории дифференциальных игр с нефиксированным терминальным моментом» при решении задач управления динамическими системами и дифференциальных игр (Справка Удмуртский государственный университет, Россия, 29 марта 2021 года № 7873-2899/30). Применение научных результатов позволило определить геометрию множества достижимости систем управления и дифференциальных игр.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на 5 международных и 5 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликованы 15 научных работ, из них 5 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертации на степень доктора философии по физико-математическим наукам, в том числе 1 работа опубликована в зарубежном журнале и 4 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 90 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики Узбекистан, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы и связь с научным направлением Национального университета Узбекистан.

Во введении также сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации, названная **«Геометрия сингулярных слоений»,** состоит из трёх параграфов. В этой главе диссертации приведены необходимые понятия и определения из теории слоений.

Через точку x многообразия M, проходит бесконечно много кривых, множество T_xM всех касательных векторов этих кривых в данной точке x образуют n мерное векторное пространство T_xM. Пространство T_xM называется касательным пространством многообразия M в точке x.

Набор всех касательных пространств, отвечающих всем точкам x многообразия M, называется касательным расслоением многообразия M и обозначается через

$$TM = \bigcup_{x\in M} T_xM.$$

Известно, что касательное расслоение является гладким многообразием размерности $2n$.

Отображение $\pi: TM \to M$ при котором $\pi(X,x)=x$, где $X\in T_xM$ (и, следовательно $\pi(T_xM)=x$), называется проекцией.

Определение 1.1.4. Пусть M – гладкое многообразие размерности n. Отображение $X: M\to TM$, при котором $\pi\circ X(x)=x$ называется векторным полем на M.

Пусть X – гладкое векторное поле на многообразии M. Гладкая кривая $\varphi:(a,b)\to M$ называется интегральной кривой векторного поля X, если для каждого $t\in(a,b)$ имеет место равенство: $\dot{\varphi}(t)=X(\varphi(t))$, где $\dot{\varphi}(t)$– касательный вектор кривой $\varphi:(a,b)\to M$ в точке $\varphi(t)$. Для точки $x\in M$ интегральную кривую векторного поля X, проходящую через точку x при $t=0$, обозначим через $X^t(x)$.

Пусть X и Y гладкие векторные поля на многообразии M, то их скобка Ли $[X,Y]$ единственное векторное поле, удовлетворяющее условию

$$[X,Y](f)=X(Y(f))-Y(X(f)),$$

для всех гладких функций $f: M\to R$.

Множество $V(M)$ всех гладких векторных полей на многообразии M образует алгебру Ли над полем действительных чисел относительно скобки Ли векторных полей.

Определение 1.1.5. Векторное поле X на M называется векторным полем Киллинга, если однопараметрическая группа преобразований, порожденная потокам векторного поля X, состоит из изометрий.

Определение 1.1.7. Отображение P, ставящее каждой точке $x\in M$ некоторое подпространство $P(x)\subset T_xM$, называется распределением. Если $\dim P(x)=k$ для всех $x\in M$, то P называется $k-$ мерным распределением.

Определение 1.1.8. Распределение P называется гладким, если для каждой точки $x \in M$ существует окрестность этой точки $U(x)$, и гладкие векторные поля $X_1, X_2, ..., X_m$, заданные на $U(x)$, такие, что векторы $X_1(y), X_2(y), ..., X_m(y)$ образуют базис для подпространства $P(y)$, для каждого $y \in U(x)$.

Определение 1.1.9. Распределение P называется вполне интегрируемым, если для каждой точки $x \in M$ существуют подмногообразие N_x многообразия M такое, что $T_y N_x = P(y)$ для всех $y \in N_x$. Подмногообразие N_x называется интегральным подмногообразием распределения P

Если дано семейство D гладких векторных полей, то естественным образом возникает гладкое распределение. Действительно, если D состоит из гладких векторных полей, то для каждой точки $x \in M$ множество векторов $D(x) = \{X(x) : X \in D\}$ порождает некоторое подпространство $P(x)$ касательного пространство $T_x M$. Это распределение обозначим через P_D. Говорят, что векторное поле X принадлежит распределению P, если $X(x) \in P(x)$ для всех $x \in M$. Распределение P на многообразии M называется инволютивным, если $X, Y \in P$ то имеет место $[X, Y] \in P$.

Определение 1.1.10. Семейство векторных полей D называется вполне интегрируемым, если соответствующее распределение P_D, порожденное D, является вполне интегрируемым.

Пусть M гладкое многообразие размерности n, A максимальный атлас, определяющий на M структуру гладкого многообразия класса C^r, где $r \geq 0$. Многообразие M является также многообразием класса C^s, если $0 \leq s \leq r$. Систему локальных криволинейных координат на C^s многообразии M обозначим через A^s. Пусть теперь целое k удовлетворяет неравенствам $0 < k < n$.

Определение 1.2.1. Семейство $F = \{L_\alpha; \alpha \in B\}$ линейно связных подмножеств M называется $k-$ мерным C^s слоением, если оно удовлетворяет следующим трем условиям:

(F_I) $\bigcup_{\alpha \in B} L_\alpha = M$;

(F_{II}) Для всех $\alpha, \beta \in B$ если $\alpha \neq \beta$ обязательно $L_\alpha \cap L_\beta = \varnothing$;

(F_{III}) Для всякой точки $p \in M$ можно выбрать локальные координаты $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in A^{(s)}, p \in U_\lambda$ так, что если $U_\lambda \cap L_\alpha \neq \varnothing$ для некоторого $\alpha \in B$, то компоненты линейной связности множества $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap L_\lambda)$ имеют вид

$$\{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \varphi_\lambda(U_\lambda) : x_{k+1} = c_{k+1}, x_{k+2} = c_{k+2}, ..., x_n = c_n\},$$

где числа $c_{k+1}, c_{k+2}, ..., c_n$ постоянны на компонентах линейной связности.

Определение 1.2.3. Подмножество L многообразия M называется k мерным слоем, если существует дифференциальная структура σ на L такая, что:

1. (L, σ) есть связное $k-$ мерное погруженное многообразие М;

2. если N-произвольное локально связное топологическое пространство, $f: N \to M$ непрерывное отображение такое, что $f(N) \subset L$, то $f: N \to (L, \sigma)$ непрерывно.

Определение 1.2.4. Разбиение F многообразия M на слои называется гладким (из класса C^r) сингулярным слоением (т.е. слоением с особенностями),если выполнены следующие условия:

1. для каждой точки $x \in M$ существует C^r карта (ψ, U), содержащая точку x такая, что $\psi(U) = V_1 \times V_2$, где $V_1 -$ окрестность начало в R^k, V_2 окрестность начало в R^{n-k}, k есть размерность слоя, проходящего через точку x;

2. $\psi(x) = (0, 0)$;

3. для каждого слоя L_α такого, что $L_\alpha \cap U \neq \varnothing$, имеет место равенство $L_\alpha \cap U = \psi^{-1}(V_1 \times l)$, где $l = \{v \in V_2 : \psi^{-1}(0, v) \in L_\alpha\}$.

Определение 1.2.5. Сингулярное слоение F называется римановым, если каждая геодезическая, ортогональная в некоторой точке слою, слоения F остается ортогональна всем слоям F во всех точки

Пусть F сингулярное слоение на римановом многообразии. Слой L слоения F называется регулярным, если размерность слоя L_p, содержащего точку p, максимален. Слой L слоения F называется сингулярным, если он не является регулярным. Точка регулярного слоя L называется регулярной точкой слоения F. Точка слоения F называется сингулярной, если она не является регулярной.

В этом параграфе рассматривается семейство векторных полей $D = \{X, Y\}$ в R^3 где

$$X = \{-y; x; 0\}, \ \mathrm{Y} = \{0; z; y\}.$$

Для этого семейство доказана следующая теорема.

Теорема 1.2.3. Орбиты семейства векторных полей $D = \{X, Y\}$ порождают сингулярное слоение, сингулярным слоем которого является точка, а регулярными слоями которого являются конус с выколотой вершиной в начале координат, однополостный и двуполостный гиперболоиды

Определение 1.3.1. Говорят, что на гладком многообразии M задана риманова структура (метрика), если в каждом касательном пространстве

$T_x M$ определено скалярное произведение $\langle , \rangle$, гладко зависящее от точки x.

Римановым многообразием будем называть связное гладкое многообразие M, на котором задана риманова структура.

Рассмотрим отображение: $\nabla : V(M) \times V(M) \to V(M),\ (u, X) \to \nabla_u X$

Определение 1.3.2. Выще указанное отображение обладающий следующими свойствами,

а) $\nabla_{au+bv} X = a\nabla_u X + b\nabla_v X$,

б) $\nabla_u (aX + bY) = a\nabla_u X + b\nabla_u Y$,

с) $\nabla_u (fX) = (uf) X_x + f(x)\nabla_u X$

называется связностью.

Здесь uf производная функции f в направлении вектора u. $\nabla_u X$ называют ковариантной производной векторного поля X в направлении вектора u.

Отображение ∇, определённой равенством в локальных координатах (U, h) на R^n

$$(\nabla_u X)_p = \left(u^i \frac{\partial \bar{X}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p = \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} u^i \frac{\partial \bar{X}^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p$$

является связностью, где $\bar{X}^j = X^j \circ h,\ X^j -$ координатные функции поля X.

Определение 1.3.4. Связность ∇ называется римановой, или просто связностью Леви-Чивита, если для любых гладких векторных полей X, Y, Z на M выполняется равенство

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle.$$

Это равенство принято называть тождеством Риччи.

Для каждой точки $p \in M$ и любых векторов $u, v \in T_p M$ преобразованием кривизны называют отображение $R(u,v): T_p M \to T_p M$, действующее по правилу

$$R(u,v)w = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

где X, Y, Z любые гладкие векторные поля на M, удовлетворяющие условию $X_p = u, Y_p = v, Z_p = w.$

Определение 1.3.5. Кривизной римана называют функцию $k: T_p M \times T_p M \to R,$ определенную по формуле

$$k(u,v) := \langle R(u,v)v, u\rangle.$$

Пусть $u, v \in T_p M$ линейно независимые векторы, σ двумерная плоскость, порождённая парой u,v. Плоскости σ сопоставим действительное число K_σ:

$$K_\sigma = \frac{\langle R(u,v)v,u\rangle}{|u|^2|v|^2 - \langle u,v\rangle^2},$$

где $\langle u,v\rangle$ – скалярное произведение, определённое римановой метрикой g.

Величина K_σ называется секционной кривизной по отношению к плоскости или кривизной в двумерном направлению σ.

Определение 1.3.6. Риманово многообразие называют многообразием постоянной кривизны, если его секционные кривизны K_σ постоянны, т.е. не зависят ни от точки многообразия, ни от выбора двумерного направления σ.

Определение 1.3.10. Гладкое многообразие M со связностью ∇. Путь $\gamma:[a,b]\to M$ называют геодезической, если

$$\frac{D}{dt}\gamma'(t) = 0,$$

т.е. поле векторов скорости γ' пути γ параллельно вдоль γ.

В частности, интегральные кривые параллельного векторного поля являются геодезическими линиями.

Обозначим геодезической линией $\gamma_u(t)$ в направлении заданного вектора $u \in T_pM$ в касательное прастранства.

Определение 1.3.11. Отображение $\exp_p : T_pM \to M$, действующее по правилу $\exp_p u = \gamma_u(1)$, называют экспоненциальным отображением. Это определение относится к любым многообразиям со связностью.

В случае риманова многообразия отображение $\exp_p : T_pM \to M$ состоит в том, что каждый луч в T_pM идущий из начала в направлении вектора u, равномерно по длине «налагается» на геодезическую в M, идущую из p в направлении u (пока эта геодезическая есть).

Вторая глава диссертации, названная **«Геометрия сингулярных римановых слоений»,** состоит из трёх параграфов. В этой главе диссертации исследованы геометрия сингулярных римановых слоений в евклидово и компактное пространство.

В первом параграфе второй главы получена классификация сингулярных римановых слоений малой коразмерности евклидова пространства.

Основным результатом параграфа является теорема о геометрии сингулярного риманова слоения малой коразмерности евклидова пространства:

Теорема 2.1.1. Пусть F сингулярное риманово слоение евклидова пространства R^n. Предположим, что регулярные слои имеют размерность $n-1$, а множество сингулярных слоев SingF состоит из конечного числа слоев. Тогда слоение F имеет один из следующих n типов:

1. Слоение F состоит из параллельных гиперплоскостей;

2. Слоение F состоит из концентрических гиперсфер и точки (центр сфер);

3. Слоение F состоит из концентрических цилиндров вида $S^{n-k-1}\times R^k$ и сингулярного слоя R^k, где $1\le k\le n-2$.

Во втором параграфе второй главы изучена геометрия сингулярных римановых слоений малой коразмерности на компактном многообразии.

Доказана следующая теорема.

Теорема 2.2.1. Пусть F сингулярное риманово слоение на компактном связном многообразие M размерности n, регулярные слои которого имеют размерность $n-1$. Тогда:

a) если существует некомпактный регулярный слой, то слоение F является регулярным слоением, все слои которого всюду плотны;

b) если не существует некомпактный регулярный слой, то $\mathrm{SingF}\ne\varnothing$ и все слои являются компактными.

Следствие 2.2.1. Пусть F риманово слоение коразмерности один на компактном связном многообразие M. Тогда, либо все слои слоения F компактны, либо все слои всюду плотны.

Пусть многообразие M гладко вложено в R^n и если задана прямая $\xi_l(t)$, идущая в направлении вектора l через начало координат в R^n, то значение функции $h_l(x)$ (функции высоты) в точке $x\in M$ положим равным ортогональной проекции точки x на прямую $\xi_l(t)$

Пусть F является сингулярным римановым слоением на двумерных и трехмерных сферах. Следующие теоремы доказываются на двумерных и трехмерных сферах.

Теорема 2.2.2. Слоение F имеет ровно две сингулярности и слои являются линиями уровня функции высоты.

Теорема 2.2.3. Слоение F имеет один из следующих типов:

1. Слоение F одномерно и ортогонально конгруэнтно слоению Хопфа;

2. Слоение F имеет одномерные регулярные слои и множество сингулярных слоев совпадает с замкнутой геодезической;

3. Регулярными слоями слоения F являются двумерные сферы, и имеет ровно две сингулярности (нульмерные слои);

4. Слоение F имеет двумерные регулярные слои (двумерные торы) и имеет ровно два сингулярных одномерных слоев.

В третьем параграфе второй главы рассматривается вопрос о геометрии сингулярных слоений, порожденных семейством векторных полей.

Известно, что разбиение многообразия M на орбиты семейства D является сингулярным слоением.

Показано, что в евклидовом пространстве орбиты семейств $D_1 = \{X, Y\}$, $D_2 = \{Y, Z\}$, $D_3 = \{X, Z\}$ векторных полей порождают сингулярное слоение, где

$$X = \{x, y, z\},\ Y = \{-y, x, 0\},\ \text{Z=\{-y,x,1\}}.$$

Для семейств этих векторных полей доказаны следующие теоремы.

Теорема 2.3.4. Орбиты семейства $D_1 = \{X, Y\}$ векторных полей порождают сингулярное слоение F, пространства R^3, регулярными слоями которого являются верхние и нижние части кругового конуса, с выколотой вершиной и двумерная плоскость выколотой точкой. Сингулярными слоями слоения F являются точка и два лучей.

Теорема 2.3.5. Орбиты семейства $D_2 = \{Y, Z\}$ векторных полей порождают сингулярное риманово слоение F пространства R^3, регулярными слоями которого являются концентрические цилиндры. Сингулярным слоем слоения F является прямая.

Теорема 2.3.6. Орбиты семейства $D_3 = \{X, Z\}$ векторных полей порождают сингулярное слоение F пространства R^3, сингулярный слой которого является прямой, т.е. ось Oz, регулярным слоем которого является трехмерное многообразие L.

В третьей главе диссертации, названной **«Структура множества орбит векторных полей Киллинга»,** состоит из двух параграфов. В этой главе диссертации исследованы структуры пространства слоев сингулярного слоения, которые порождаются орбитами векторных полей Киллинга.

В первом параграфе третьей главы изучены геометрия сингулярных римановых слоений с сечением.

Определение 3.1.1. Пусть $F-$ сингулярное риманово слоение на полном римановом многообразии. Слоение F называется сингулярным римановым слоением с сечением, если для каждой регулярной точки p множество $\sigma := \exp_p(H_p L)$ является полным погруженным подмногообразием, которое пересекает каждый слой ортогонально и в нем множество регулярных точек всюду плотно. Множество σ называется сечением.

Следующая теорема доказанное нами является теоремой о достаточных условиях, для того, чтобы слоение, порожденное орбитами векторных полей Киллинга, было слоением с сечением.

Теорема 3.1.2. Пусть F сингулярное слоение на R^n, порожденное орбитами семейства D векторных полей Киллинга. Предположим, что все сингулярное слои изолированы, а размерность регулярных слоев равна $n-1$, Тогда слоение F является римановым слоением с сечением.

Нами доказана следующая теорема.

Теорема 3.1.3. Пусть F сингулярное риманово слоение на R^n, порожденное орбитами семейства D векторных полей Киллинга, где $n=2,3$. Предположим, что размерность регулярных слоев равна $n-1$. Тогда слоение F является сингулярным римановым слоением с сечением.

Во втором параграфе третьей главы мы докажем, что если орбиты векторных полей Киллинга порождают сингулярное риманово слоение с сечением, то множество орбит является гладким орбиобразием.

Обозначим через M связное хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой. Пусть U открытое подмножество M, V открытое подмножество в R^n и G конечная группа C^r диффеоморфизмов V.

Карта орбиобразие в M —это набор из четырех элементов (U,V,G,φ), где $\varphi:V\to U$ это отображение, которое есть композиция двух отображений $\varphi:=\tilde{\pi}\circ\pi$, где $\pi:V\to V/G$ фактор отображение на множество орбит, и $\tilde{\pi}:V/G\to U$ произвольный гомеоморфизм.

Если для карт (U,V,G,φ), $(U^{'},V^{'},G^{'},\varphi^{'})$ имеет место включение $U\subset U'$то инъекцией карты (U,V,G,φ) в карту $(U^{'},V^{'},G^{'},\varphi^{'})$ называется пара (η,ψ), где $\eta:V\to V^{'}$ C^r- вложение, $\psi:G\to G^{'}$ мономорфизм групп, удовлетворяющие следующим равенствам:

$$\varphi=\varphi^{'}\circ\eta \text{ и } \eta\circ\gamma=\psi(\gamma)\circ\eta$$

для всех $\gamma\in G$.

Атласом класса C^r называется семейство карт $A=\{(U_\alpha,V_\alpha,G_\alpha,\varphi_\alpha),\alpha\in J\}$ для которых выполнены условия:

1) множество $\{U_\alpha,\alpha\in J\}$ образует покрытие M;

2) для любых двух карт (U',V',G',φ') и (U'',V'',G'',φ'') из A таких, что $U'\subset U''$, существует инъекция карты (U',V',G',φ') в карту (U'',V'',G'',φ'').

Максимальный атлас A класса C^r называется C^r-структурой дифференцируемого орбиобразия на M, и пара (M,A) называется дифференцируемым C^r орбиобразием.

Для сингулярного слоения доказана следующая теорема.

Теорема 3.2.3. Пусть F сингулярное слоение в R^n, порожденное орбитами семейства D векторных полей Киллинга. Предположим, что слоение F является сингулярным римановым слоением с сечением. Тогда множество слоев F (множество орбит) является орбиобразием.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая диссертация посвящена изучению геометрии сингулярных римановых слоений на многообразиях постоянной кривизны.

Основные результаты исследований состоят в следующем:

1. Получена классификация сингулярных римановых слоений малой коразмерности евклидова пространства;
2. Получена классификация сингулярных римановых слоений малой коразмерности на компактном многообразии;
3. Получена классификация сингулярных римановых слоений малой коразмерности на двухмерного и трехмерного сферах;
4. Доказано, что если сингулярные слои сингулярного риманова слоения малой коразмерности евклидова пространства изолированы друг от друга, то это слоение является слоением с сечением;
5. Доказано, что сингулярное риманово слоение малой коразмерности трехмерного и двумерного евклидова пространства, порожденного орбитами семейства векторных полей Киллинга, является слоением с сечением;
6. Доказано, что на множестве слоев сингулярного риманова слоения с сечением существует дифференциальная структура, по отношению к которой множество слоев является гладким орбиобразием.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

QOSIMOV ODILBEK YUNUSOVICH

GEOMETRY OF SINGULAR RIEMANNIAN FOLIATIONS ON MANIFOLDS OF CONSTANT CURVATURE

01.01.04 – Geometry and topology

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT-2022

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2020.3. PhD/FM520.

Dissertation has been prepared at National University of Uzbekistan

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.ik-fizmat.nuu.uz) and the "Ziyonet" Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Narmanov Abdigappar Yakubovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Zaitov Adilbek Ataxanovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Sharipov Xurshid Fazliddinovich Doctor of Philosophy in Physical and Mathematical Sciences (PhD)
Leading organization:	**Tashkent State transport university**

Defense will take place «15» march 2022 at 11°° at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 at National University of Uzbekistan. (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №26) (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on «1» march 2022 year
(Mailing report № 1 on «1» march 2022 year)

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

A. Sadullaev
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Academician

N.K.Mamadaliyev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees,
PhD in Math.and Physics

R.B.Beshimov
Vice-Chairman of Scientific seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Dotsent

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is to study the geometry of singular Riemannian foliations and the structure of the set of orbits of Killing vector fields.

The object of the research work is the geometry of Riemannian foliations of small codimension on Euclidean space, the geometry of the orbits of Killing vector fields.

Scientific novelty of the research work is as follows:

A classification of singular Riemannian foliations of small codimension in Euclidean space is obtained;

A classification of singular Riemannian foliations of small codimension on compact manifolds is obtained;

It is proved that if the singular leaves of a singular Riemannian foliation of small codimension of the Euclidean space are isolated from each other, then this foliation is a foliation with a section;

It is proved that on the set of leaves of a singular Riemannian foliation with a section there exists a differential structure with respect to which the set of leaves is a smooth orbifold.

Implementation of the research results. The results obtained in the dissertation on the geometry of singular Riemannian foliations were used in the following research projects:

The geometry of the singular Riemannian foliations of the Euclidean space and compact manifold was used in the research of the Ф4-ОТ-0-79517 project "Geometry and topology of foliated manifolds" in solving problems on the geometry of foliated manifolds. (Certificate of the Ministry of Higher and Secondary Specialized Education of the Republic of Uzbekistan dated February 2, 2021 № 89-06-201). The application of scientific results made it possible to find exact formulas for calculating the sectional curvature of the fibers of foliations of manifolds of constant curvature;

The geometry of the singular Riemannian foliations generated by the orbits of the Killing vector fields was used in the research project of the Udmurt State University «№-20-01-00293 Qualitative methods in problems of control theory and the theory of differential games with non-fixed terminal moment» in solving problems of control of dynamical systems and differential games (Reference Udmurt State University, Russia, March 29, 2021 № 7873-2899/30). The application of scientific results made it possible to determine the geometry of the reachable set of control systems and differential games.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, a conclusion and a bibliography. The volume of the thesis is 90 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (1 часть; part 1)

1. Narmanov A.Ya., Qosimov O.Y. On the geometry of singular foliations generated by the family of vector fields // Uzbek Mathematical Journal. – Tashkent, 2021. – № 1. – P. 137-146 (01.00.00. № 6).
2. Narmanov A.Ya., Qosimov O.Y. On the Geometry of the Set of Orbits of Killing Vector Fields on Euclid Space // Journal of Geometry and Symmetry in Physics, 2020. – № 55. – P. 39-49 (3. Scopus, Cite Score IF=0.6).
3. Qosimov O.Y. On the geometry of singular foliations // Uzbek Mathematical Journal. – Tashkent, 2019. – № 4. – P. 132-138 (01.00.00. № 6).
4. Нарманов А.Я., Касимов О.Ю. Геометрия сингулярных слоений малой коразмерности // Ўзбекистон Республикаси фанлар академияси маъ-рузалари. – Тошкент, 2013. – № 2. – Б. 11-12 (01.00.00. № 7).
5. Narmanov A.Ya., Kasimov O.Y. Geometry of singular Riemannian foliations // Uzbek Mathematical Journal. – Tashkent, 2011. – № 3. – P. 129-136 (01.00.00. № 6).

II бўлим (2 часть; part 2)

6. НармановА.Я., Касимов O.Yu. О геометрии множества орбит векторных полей Киллинга / “Современные проблемы математики и механики” материалы Международной конференции, посвящённой 80-летию академика В.А.Садовничего. – Москва, 2019. 13-15 мая. – С. 570-571.
7. Нарманов А.Я., Касимов О.Ю. О геометрии множества орбит векторных полей / “Современные проблемы теории вероятностей и математической статистики” тезисы докладов Республиканской конференции. – Ташкент, 2019. По 30 апреля по 1 мая. – С. 164-166.
8. Касимов О.Ю. О геометрии сингулярных слоений / “Современные проблемы геометрии и топологии и их приложения” материалы Между-народной конференции. – Ташкент, 2019. 21-23 ноября. – С. 167.
9. Касимов О.Ю. Геометрия сингулярных Римановых слоений / “Проблемы современной математики” тезисы докладов Республиканской конференции. – Карши, 2011. 22-23 апреля. – С. 397.
10. Нарманов А.Я., Касимов О.Ю., Турсунов Б.А. Сингулярные Римановы слоения сфер малой размерности / “Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – аль-Хорезмий 2012” тезисы докладов Международной конференции. – Ташкент, 2012. 19-22 декабря. – С. 88-89.
11. Qosimov O.Y., Rajabov E.O. On the structure of set of orbits of vector fields / “Frontier in mathematics and computer science” International online conference. – Tashkent, 2020. October 12-15. – P. 119-120.

12. Narmanov A. Ya., Qosimov O. Yu. Geometry of the set of orbits of Killing vector fields / “Современные методы математической физики и их приложения” тезисы докладов Республиканской конференции. – Ташкент, 2020. 17-18 ноября. – С. 187-189.

13. Касимов О.Ю. Геометрия орбиобразий, образованная орбитой векторных полей / “Современные проблемы математики: способы и решения” тезисы докладов Республиканской конференции. – Термез, 2020. 21-23 октябрь. – С. 54-56.

14. Касимов О.Ю. О геометрии интегральных подмногообразий семейство векторных полей / “Современные методы математической физики и их приложения” тезисы докладов Республиканской конференции. – Ташкент, 2020. 17-18 ноября. – С. 138-141.

15. Narmanov A.Ya., Qosimov O.Yu. On the set of orbits of Killing vector fields / “Geometric methods in control theory and mathematical physics” III International Scientic Conference. – Ryazan, 2021. 26-30 April. – P. 18.

Автореферат « ЎзМУ хабарлари » журнали таҳририятида таҳрирдан ўтказилиб, ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги матнлар ўзаро мувофиқлаштирилди.

Босмахона лицензияси:

9338

Бичими: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» гарнитураси.
Рақамли босма усулда босилди.
Шартли босма табоғи: 3,5. Адади 100. Буюртма № 15/22.

Гувоҳнома № 851684.
«Tipograff» МЧЖ босмахонасида чоп этилган.
Босмахона манзили: 100011, Тошкент ш., Беруний кўчаси, 83-уй.