В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ҒАЙБУЛЛАЕВ РУСТАМЖОН ҚАҲРАМОНОВИЧ

АБЕЛ АЛГЕБРАЛАРНИНГ ЛЕЙБНИЦ КЕНГАЙТМАЛАРИ ВА ГИПОНИЛЬПОТЕНТ ИДЕАЛИ БЕРИЛГАН *n*-ЛИ АЛГЕБРАЛАРНИНГ ТАСНИФИ

01.01.06 – Алгебра

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PHD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2022

УДК: 512.554

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата докторской диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ҒАЙБУЛЛАЕВ РУСТАМЖОН ҚАҲРАМОНОВИЧ

АБЕЛ АЛГЕБРАЛАРНИНГ ЛЕЙБНИЦ КЕНГАЙТМАЛАРИ ВА ГИПОНИЛЬПОТЕНТ ИДЕАЛИ БЕРИЛГАН *n*-ЛИ АЛГЕБРАЛАРНИНГ ТАСНИФИ

01.01.06 – Алгебра

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PHD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2022

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2021.2.PhD/FM349 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз(резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://kengash.mathinst.uz) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида (http://www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Омиров Бахром Абдазович** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Эшматов Фарход Хасанович** физика-математика фанлари доктори, катта илмий ходим
	Курбанбаев Тууелбай Кадирбаевич физика-математика фанлари номзоди, доцент
Етакчи ташкилот:	**Андижон Давлат университети**

Диссертация ҳимояси В.И.Романовский номидаги Математика Институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2022 йил «___»___________соат ____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174,Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй. Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Диссертация билан В.И. Романовский номидаги Математика Институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (______-рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй. Тел.: (+99871) 207-91-40.

Диссертация автореферати 2022 йил «___» _______________ куни тарқатилди.
(2022 йил «___» ________________даги _____-рақамли реестр баённомаси).

У.А.Розиков
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

Ж.К.Адашев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.д., катта илмий ходим

А.Р.Хаётов
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш ҳузуридаги илмий семинар раис ўринбосари, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий тадқиқотлар аксарият ҳолларда алгебраик ва геометрик масалаларга келтирилади. Математика ва физиканинг айрим масалаларини ҳал этишда Ли алгебралари тузилиш структураси назариясидан фойдаланиш натижасида n-Ли алгебралари, Ли супералгебралари, Малцев ва Лейбниц алгебралари каби Ли алгебраларининг умумлашмалари пайдо бўлди. Ли алгебраларининг умумлашмаси бўлган n-Ли ва Лейбниц алгебралари назарияси замонавий алгебранинг жадал суръатда ривожланаётган соҳаларидан бири ҳисобланиб, Ли алгебраларидаги кўплаб натижаларни ушбу алгебраларга тадқиқ этиш муҳим аҳамиятга эга. Лейбниц алгебралари учун Леви теоремасининг исботланиши чекли ўлчамли Лейбниц алгебраларини тавсифлаш масаласини чекли ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебраларини ўрганиш масаласига олиб келди. Шунинг учун чекли ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебраларининг таснифлаш муҳим аҳамиятга эга.

Ҳозирги кунда жаҳон миқёсида чекли ўлчамли n-Ли алгебралари назариясини ўрганиш Ли алгебралари назариясида янги йўналишни яратди. Шунингдек, n-Ли алгебраларининг динамик системалар, геометрия ва физиканинг турли соҳалардаги татбиқлари туфайли бу алгебраларни ўрганиш муҳим аҳамият касб этмоқда. Чекли ўлчамли n-Ли алгебралари учун Энгель теоремасининг аналоги мавжудлиги аммо Леви ёйилмаси умуман олганда ўринли эмаслиги, чекли ўлчамли n-Ли алгебраларини ўрганиш мураккаб масала эканлигини ва уларни қўшимча чекловлар билан ўрганиш кераклигини англатади. Бундай чекловлардан бири ечилувчан n-Ли алгебраларини ўрганишда максимал идеалга гипонильпотентлик шартини қўйишдир. Максимал гипонильпотент идеалга эга бўлган чекли ўлчамли ечилувчан n-Ли алгебраларини таснифлаш, нилрадикал орқали ечилувчан Ли алгебраларини қуриш методини чекли ўлчамли ечилувчан n-Ли алгебралари учун татбиқ этиш мақсадли илмий тадқиқодлардан биридир.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий татбиқига эга бўлган амалий математика, информатика, рақамли иқтисодиётнинг долзарб йўналишларга эътибор кучайтирилди. Жумладан, охирги йилларда чекли ўлчамли Лейбниц ва n-Ли алгебраларини таснифлаш орқали амалий муаммоларни ҳал этиш борасида салмоқли натижаларга эришилди. «Алгебра ва функционал анализ» фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифаси ва фаолият йўналиши этиб белгиланди[1]. Қарор ижросини таъминлашда илмий натижалардан илм-фаннинг турдош соҳаларида фойдаланиш мақсадида чекли ўлчамли ечилувчан Лейбниц ва n-Ли алгебралари назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида”ги 292-сон қарори

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон "Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича харакатлар стратегияси тўғрисида"ги Фармони, 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон "Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида"ги ва 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон "Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида"ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. "Математика, механика ва информатика" устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Чекли ўлчамли Ли алгебраларини таснифлаш масаласи Леви теоремасининг исботланиши билан бир қанча соддалашиб, ечилувчан Ли алгебраларини таснифлаш масаласига келиб қолди. Чекли ўлчамли ечилувчан Ли алгебраларини уларнинг нилрадикалларидан фойдаланиб қуришда А. Малцев ва Г.М. Мубаракзяновлар томонидан исботланган методлар ёрдамида нилрадикали филиформ, квази-филиформ, Абел, Гейзенберг ва бошқа турдаги нильпотент алгебралардан иборат бўлган ечилувчан Ли алгебраларининг таснифлари олинди. Ж.М. Касас, М. Ладра, Б.А. Омиров ва И.А. Каримжановлар томонидан нилрадикали Абел, нул-филиформ, филиформ, табиий градуирланган филиформ, квази-филиформ ва p-филиформ, Гейзенберг ва бошқа алгебралар бўлган ечилувчан Лейбниц алгебралари таснифланган.

1970-йилда Й.Намбу кварк моделлари квант статистикаси учун дастлабки қадам ҳисобланган уч заррачаларнинг бир вақтдаги классик динамикасини тавсифлаш мақсадида Пуассон қавсини умумлаштирди ва уч-чизиқли кўпайтма тушунчасини киритди. 1994 йилда Л.Тахтаджан Намбу механикасининг геометрик ғояларини ривожлантириб, Якоби айниятининг аналоги бўлган фундаментал айният тушунчасини киритди. Бу унга Намбунинг умумлашган механикаси ва В.Филиппов томонидан таклиф қилинган n-Ли алгебраси тушунчалари орасидаги боғлиқликни ўрнатиш имконини берди. В.Линг алгебраик ёпиқ майдон устидаги характеристикаси нолга тенг бўлган содда n-Ли алгебраси $(n > 2)$ мавжуд ва ягона эканлигини ва унинг ўлчами n+1 бўлиши исбот қилди. Бундан ташқари Линг ўзининг диссертациясида Леви теоремасининг аналогини исботлаган, яъни ихтиёрий чекли n-Ли алгебраси ярим содда қисм алгебраси ва ечилувчан радикалларнинг ярим тўғри йиғиндисига ёйилишини исботлаган. Ли алгебралари каби ечилувчан n-Ли алгебраларини ўрганиш масаласи n-Ли алгебралари назариясининг асосий масалаларидан бири ҳисобланади. Р.Бай, М.Гозе ва Ш.Касимовларнинг ишларида баъзи нильпотент ва ечилувчан n-Ли алгебраларининг таснифи келтирилган.

Ҳозирги вақтда чекли ўлчамли Лейбниц алгебраларининг тузилиш структураси ва уларнинг тасвирлари, дифференциаллашлар фазоси, ҳамда когомологик группалари тавсифларини Ш.А. Аюпов, Б.А. Омиров, К.К. Кудайбергенов, И.С.Рахимов, А.Х. Худойбердиев, Ж.К. Адашев, Ж.М. Касас, М. Ладра, Л. Камачо, А. Шабанская ва бошқаларнинг ишларида ўрганилган бўлса, чекли ўлчамли n-Ли алгебраларининг тузилиш структураси ва уларнинг тасвирлари, дифференциаллашлар фазоси Р.Бай, М.Гозе ва Ш.Касимов, С.Шен, Й.Жанг, В.Линг, Р.Турдибаев ва бошқаларнинг ишларида қаралган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетининг ОТ-Ф4-31 “Нокоммутатив модуллар, Лейбниц алгебралари ва симплексда полиномиал каскадлар” (2017-2020 йиллар) мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади k-ўлчамли Абел алгебраларнинг k-1 ко-ўлчамли Лейбниц кенгайтмаларини қуриш ва гипонилпотент идеали берилган ечилувчан n-Ли алгебраларининг таснифини олишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари қуйидагилардан иборат**:**

яримсодда Лейбниц алгебраларининг дифференциаллашлари фазосидан тузилган Ли структурасини таснифлаш;

нилрадикали k-ўлчамли Абел алгебраси ва ко-ўлчами k-1 га тенг бўлган ечилувчан Лейбниц алгебраларини классификациялаш ҳамда нилрадикали максимал рангa эга бўлган ечилувчан Ли алгебраларини ички дифференциаллашларини таснифлаш;

табиий усулда градуирланган филиформ n-Ли алгебраларини таснифлаш ва берилган максимал филиформ гипонильпотент идеалга эга бўлган ечилувчан n-Ли алгебраларини классификациялаш.

Тадқиқотнинг объекти. Нилрадикали Абел алгебраси бўлган ечилувчан Лейбниц алгебралари, нилрадикали максимал рангa эга бўлган ечилувчан Ли алгебраларини дифференциаллашлари ва ечилувчан n-Ли алгебралар.

Тадқиқотнинг предмети. Ярим содда Лейбниц алгебралари дифференциаллашлари назарияси, ечилувчан Лейбниц алгебралари назарияси ва ечилувчан n-Ли алгебралари назарияси.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертацияда ассоциатив бўлмаган алгебраларнинг структуравий назарияси усуллари, дифференциаллашлар ва инвариантлар назарияси усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

нилрадикали k-ўлчамли Абел алгебраси ҳамда тўлдирувчи қисм фазонинг ўлчами k-1 бўлган ечилувчан Лейбниц алгебралари таснифланган;

нилрадикали максимал рангa эга бўлиб тўлдирувчи қисм фазо ўлчами нилрадикал рангидан кичик бўлган барча ечилувчан Ли алгебраларда ташқи дифференциаллаш мавжудлиги исботланган;

табиий усулда градуирланган филиформ *n*-Ли алгебралари таснифланган;

максимал филиформ гипонильпотент идеалга эга ечилувчан *n*-Ли алгебралари таснифланган.

тадқиқотнинг амалий натижаси берилган максимал гипонильпотент идеалга эга ечилувчан *n*-Ли алгебралари таснифини беришнинг методи ва бунга оид бир қанча фаразларнинг баён қилинганлигидан иборат.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги натижалар ассоциатив бўлмаган алгебралардаги маълум методлар ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлигига асосланганлиги, олинган натижалар алгебраик кўпхилликларининг маълум натижалари ва тадқиқ этиш усулларидан қатъий фойдаланганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти ишда олинган натижалардан берилган нилрадикалли чекли ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебраларини таснифлашда ва ечилувчан *n*-Лейбниц алгебралари назарияларида фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти уларни максимал филиформ гипонильпотент идеали берилган ечилувчан *n*-Ли алгебралари таснифи ёрдамида бошқа типдаги максимал гипонильпотент идеалга эга ечилувчан *n*-Ли алгебралари таснифларини олиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Абел алгебраларнинг Лейбниц кенгайтмалари ва гипонильпотент идеали берилган *n*-Ли алгебраларнинг таснифи бўйича олинган натижалар асосида:

нилрадикали *k*-ўлчамли Абел алгебраси ҳамда тўлдирувчи қисм фазо ўлчами *k*-1 бўлган ечилувчан Лейбниц алгебраларининг таснифидан ID: FRGS/1/2016/STG06/UPM/03/2 рақамли “Алгебраларнинг баъзи синфларини умумлашган дифференциаллашлари ва уларнинг тадбиқлари” мавзусидаги хорижий лойиҳасида нилрадикали максимал ранга эга бўлиб, тўлдирувчи қисм фазонинг ўлчами нилрадикалнинг рангидан кичик бўлган ечилувчан Лейбниц алгебраларини таснифлашда фойдаланилган (Мара Технология университетининг 2021-йил 22-ноябрдаги маълумотномаси, Малайзия). Илмий натижанинг қўлланилиши айрим чекли ўлчамли ассоциатив бўлмаган алгебралар синфининг диффереациаллашлар алгебрасининг таснифларини олиш имконини берган;

максимал филиформ гипонильпотент идеалга эга ечилувчан *n*-Ли алгебраларининг таснифидан MTM2016-79661-P рақамли “Группа ва ассоциатив бўлмаган алгебраларнинг гомологиялари, гомотопик ва категорик инвариантлари” мавзусидаги хорижий лойиҳада баъзи нилпотент *n*-Лейбниц алгебраларини таснифини олишда фойдаланилган (Сантияго де Компостела университетининг 2021-йил 24-ноябрдаги маълумотномаси, Испания). Илмий натижанинг қўлланилиши ечилувчан (нилпотент) *n*-Лейбниц алгебраларига оид бир қатор фаразларнинг тўғрилигини текшириш ҳамда янги ечилувчан(нилпотент) n-Лейбниц алгебралари қуриш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 3 та халқаро ва 7 та республика илмий-амалий анжуманларда муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 15 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 5 та илмий мақола, жумладан, 2 таси хорижий ва 3 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисм, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат. Диссертациянинг ҳажми 85 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмда диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган бўлиб тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ҳамда диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«Яримсодда Лейбниц алгебралари дифференциаллашлар фазосида Ли структуралари»** деб номланувчи биринчи бобида, Ли алгебралари, Лейбниц алгебралари ва n-Ли алгебралари назарияларидан зарур тушунчалар ва ёрдамчи натижалар келтирилган. Ярим содда Лейбниц алгебралари дифференциаллашлар фазосида Ли структураси таснифланган.

1-таъриф. F майдон устида аниқланган G алгебранинг ихтиёрий x, y, z элементлари учун қуйидаги айниятлар бажарилса,

$$[x,x]=0 \text{ − антикоммутативлик айнияти,}$$

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0 \text{ − Якоби айнияти,}$$

у ҳолда G алгебрасига *Ли алгебраси* дейилади, бу ерда [-,-] − G алгебрада аниқланган кўпайтириш амали.

2-таъриф. F майдон устида аниқланган L алгебранинг ихтиёрий x, y, z элементлари учун қуйидаги Лейбниц айнияти бажарилса,

$$[[x,y],z]=[[x,z],y]+[x,[y,z]]$$

L алгебра *Лейбниц алгебраси* дейилади, бу ерда [-,-] − L алгебрада аниқланган кўпайтириш амали.

L Лейбниц алгебрасининг ихтиёрий x, y элементлари учун $[x,y]=-[y,x]$ шарт бажарилса, у ҳолда Лейбниц айнияти Якоби айнияти билан устма-уст тушиб қолишини кўриш қийин эмас, бу эса Ли алгебраси Лейбниц алгебрасининг хусусий ҳоли эканлигини англатади.

Ли бўлмаган Лейбниц алгебраларида элементларининг квадратларидан ҳосил қилинган идеални I орқали белгилаймиз, яъни $I=Span\{[x,x] \mid x\in L\}$.

Асосий таъриф ва тушунчаларни Лейбниц алгебралари учун тақдим этиб, уларни Ли алгебралари учун ҳам (бошқача кўрсатилмаган бўлса) ўринли бўлишидан фойдаланамиз.

Шуни таъкидлаб ўтиш керакки, ўнг идеал, чап идеал, икки томонлама идеал ва қисм алгебра тушунчалари Лейбниц алгебралари учун ҳам Ли алгебраларидаги каби таърифланади.

$Ann_r(L) = \{x\in L \mid [L, x] = 0\}$ ва $Ann_l(L) = \{x\in L \mid [x, L] = 0\}$ тўпламлар мос равишда L алгебранинг *ўнг* ва *чап аннуляторлари* дейилади. Лейбниц айниятидан фойдаланиб, $Ann_r(L)$ ни L алгебранинг икки томонлама идеали эканлигини ва ихтиёрий $x,y\in L$ элементлар учун $[x,x]$ ва $[x, y] + [y, x]$ элементлар $Ann_r(L)$ ётишини кўриш қийин эмас.

$Center(L):=\{x\in L:[x,L]=[L,x]=0\}$ тўплам L Лейбниц алгебрасининг *маркази* дейилади.

Айтайлик, L − Лейбниц алгебраси берилган бўлсин. L Лейбниц алгебраси учун *ҳосилавий* ва *қуйи марказий қатор*ларни мос равишда қуйидагича аниқлаймиз:

$$L^{[1]}=L,\ L^{[k+1]}=[L^{[k]}, L^{[k]}]; \qquad L^1=L,\ L^{k+1}=[L^k, L^1], \qquad k\geq 1.$$

3-таъриф. L − Лейбниц алгебраси бўлсин. Шундай $n\in\mathbb{N}$ (мос равишда, $m\in\mathbb{N}$) сон мавжуд бўлиб, $L^n=0$ (мос равишда, $L^{[m]}=0$) ўринли бўлса, у ҳолда L *нильпотент* (мос равишда, *ечилувчан*) Лейбниц алгебраси дейилади.

Маълумки, ихтиёрий иккита нильпотент идеалларнинг йиғиндиси нильпотент идеал бўлади. Шунинг учун ягона максимал нильпотент идеал мавжуд.

4-таъриф. Лейбниц алгебрасининг максимал нильпотент идеалига алгебранинг *нилрадикали* дейилади.

Лейбниц алгебралари структуравий назариясининг асосий натижаларини тушунтириш учун содда ва ярим содда Лейбниц алгебралари тушунчаларини киритамиз.

5-таъриф. L Лейбниц алгебрасининг идеаллари фақат $\{0\}$, I, L лардан иборат ва $L^2\neq I$ бўлса, у ҳолда ушбу алгебра *содда* дейилади.

6-таъриф. L Лейбниц алгебрасининг максимал ечилувчан идеали I бўлса, у ҳолда ушбу алгебра *яримсодда* дейилади.

Ли алгебраларида идеал $I=\{0\}$ бўлганлиги учун содда ва яримсодда Лейбниц алгебралари тушунчалчалари таърифлари Ли алгебраларидаги таърифлар билан устма-уст тушади.

7-таъриф. L Лейбниц алгебрасида аниқланган $d: L\to L$ чизиқли акслантириш L алгебранинг ихтиёрий x, y элементлари учун ушбу

$$d([x, y])=[d(x), y]+[x, d(y)],$$

тенгликни қаноатлантирса, d чизиқли акслантиришга L нинг барча дифференциаллашлари тўплами белгиланади. Бунда $Der(L)$ коммутатор амалига нисбатан Ли алгебраси бўлади.

Лейбниц айнияти ёрдамида ўнгдан кўпайтириш оператори R_x (яъни, берилган $x\in L$ элемент учун, $R_x(y) = [y,x]$, $y\in L$) ни дифференциаллаш эканлигини кўришимиз мумкин. Бундай турдаги дифференциаллашлар *ички дифференциаллаш*лар деб аталади ва $Inner(L)$ орқали L нинг барча ички дифференциаллашлари тўплами белгиланади. Ички бўлмаган диффереціаллашлага эса *ташқи дифференциаллаш*лар дейилади.

Айтайлик, L Ли алгебраси бўлсин. Одатда, Ли алгебрасининг ички дифференциаллашлари ad_x орқали белгиланади ва берилган $x\in L$ элемент учун, $\mathrm{ad}_x(y) = [x, y]$, $\forall y\in L$ каби аниқланади.

8-таъриф. $Der(L)$ Ли алгебрасининг максимал Абел қисм алгебраси L алгебрасининг *максимал тори* деб аталади.

Ли алгебрасининг Лейбниц алгебрасидан фарқли бўлган яна бошқа бир умумлашмаси n-Ли алгебраларидир.

9-таъриф. F майдон устида аниқланган A вектор фазода шундай n-ар поли-чизиқли [-,-,…,-] амал мавжуд бўлиб қуйидаги икки айниятни қаноатлантирса:

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n]=(-1)^{sign(\sigma)}[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}],$$

$$[[x_1, x_2, \ldots, x_n], y_1, \ldots, y_n]=\sum_{i=1}^{n} [x_1, \ldots, x_{n-1},[x_i , y_2, \ldots , y_n], x_{i+1}, \ldots , x_n],$$

у ҳолда A алгебрага *n-Ли алгебраси* дейилади, бу ерда $\sigma\in S_n$, ва $sign(\sigma)$ – σ ўринлаштиришнинг жуфт ёки тоқлиги.

10-таъриф. Айтайлик, A n-Ли алгебраси ва B унинг қисм фазоси бўлсин. Агар $[B,B,\ldots,B] \subseteq B$ муносабати ўринли бўлса, у ҳолда B n-Ли алгебрасининг *қисм алгебраси* дейилади. A n-Ли алгебрасининг J қисм фазоси учун $[J, A, \ldots, A] \subseteq J$ муносабати ўринли бўлса, J n-Ли алгебрасининг *идеали* дейилади.

Агар $[A, A, \ldots, A] \neq 0$ ва A тривиал бўлмаган идеалга эга бўлмаса, у ҳолда A n-Ли алгебраси *содда* дейилади.

A n-Ли алгебрасининг ихтиёрий J идеали учун мос равишда қуйи марказий ва ҳосилавий қаторларни қуйидагича аниқлаймиз:

$$J^1 = J,\quad J^{k+1} = [J^k, J, A, \ldots, A],\qquad k \geq 1,$$
$$J^{(1)} = J,\quad J^{(s+1)} = [J^{(s)}, J^{(s)}, A, \ldots, A],\ s \geq 1.$$

11-таъриф. Айтайлик, A n-Ли алгебраси берилган бўлсин. Агар шундай натурал r сони мавжуд бўлиб, $J^{(r)}=\{0\}$ муносабати бажарилса, J *ечилувчан идеал* дейилади, Хусусан, агар $\exists r \in \mathbb{N}$ сони учун $A^{(r)}=\{0\}$ тенглик ўринли бўлса, A n-Ли алгебраси *ечилувчан n-Ли алгебраси* дейилади.

Худди шу каби A n-Ли алгебраси учун нилпотентлик тушунчаси киритилади.

12-таъриф. Агар $\exists r \in \mathbb{N}$ сони учун $J^r=\{0\}$ бўлса, у ҳолда идеал J *нилпотент идеал* дейилади. Агар $J = A$ бўлса, у ҳолда A *нилпотент n-Ли алгебра* дейилади.

Қуйида n-Ли алгебрасининг дифференциаллашлари тушунчасини келтирамиз.

13-таъриф. Айтайлик, A n-Ли алгебрасининг $D: A \to A$ чизиқли акслантириши берилган бўлсин. Агар ихтиёрий $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ элементлари учун, қуйидаги тенглик ўринли бўлса,

$$D([x_1, x_2, \ldots, x_n]) = \sum_{i=1}^{n} [x_1, \ldots, D(x_i), \ldots, x_n],$$

у ҳолда D чизиқли акслантиришга A n-Ли алгебрасининг *дифференциаллаши* дейилади ва A n-Ли алгебрасининг барча дифференциаллашлари тўплами $Der(A)$ каби белгиланади.

Ушбу дифференциаллашлар тўплами $gl(A)$ алгебраси учун қисм алгебра бўлади ва A n-Ли алгебрасининг дифференциаллашлар алгебраси дейилади.

Қуйидаги акслантиришга $ad(x_2, \ldots, x_n) : A \to A$,

$$ad(x_2, \ldots, x_n)(y)=[y, x_2, x_3, \ldots, x_n], \quad \forall y \in A,$$

ўнг кўпайтма дейилади.

Бу кўпайтма A n-Ли алгебраси учун дифференциаллаш бўлишини кўрсатиш қийин эмас. Ўнг кўпайтма операторларининг барча чекли чизиқли комбинациялари $Der(A)$ Ли алгебрасининг идеали бўлади ва $Ad(A)$ каби белгиланади. $Ad(A)$ фазонинг элементлари *ички дифференциаллаш* дейилади. Шуни ҳам айтиш керакки, ихтиёрий $x_2, x_3, \ldots, x_n, y_2, y_3, \ldots, y_n \in A$ элементлари учун қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$[ad(x_2, \ldots, x_n), ad(y_2, \ldots, y_n)] = \sum_{i=1}^{n} ad(y_2, \ldots, [x_2, \ldots, x_n, y_i], \ldots, y_n).$$

Айтайлик, A – нильпотент n-Ли алгебраси бўлсин. $x_1, \ldots, x_{n-1} \in A \backslash A^2$ элементлари учун $ad(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ операторининг Жордан блоклари ўлчамларидан тузилган $C(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = (m_1, m_2, \ldots, m_s)$ тартибланган кетма-кетликни қараймиз. A алгебранинг антикоммутативлигидан қуйидаги тенглик ўринли

$$C(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})=(m_1, m_2, \ldots, m_k, \underbrace{1,1,\ldots,1}_{n-1}),$$

бу ерда $m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_k \geq 1$.

$C(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ кетма-кетликлар тўпламида лексикографик тартибни аниқлаймиз.

14-таъриф. Қуйидаги

$$C(A)= \max_{x_i \in A \backslash A^2} \{C(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})\}$$

кетма-кетликни нильпотент n-Ли алгебрасининг характеристик кетма-кетлиги дейилади.

15-таъриф. Айтайлик, L – m ўлчамли n-Ли алгебраси бўлсин. Агар $2 \leq i \leq m - n + 2$ учун $dim A^i = m - n + 2 - i$ шарт ўринли бўлса, у ҳолда L – n-Ли алгебраси *филиформ* дейилади.

Айтайлик, A – n-Ли алгебраси ва J – унинг идеали бўлсин.

$$J \text{ – нильпотент идеал } \Leftrightarrow \ \exists k \in \mathbb{N} : [J^{k-1}, J, A, \ldots, A] = \{0\};$$

$$J \text{ – нильпотент қисм алгебра } \Leftrightarrow \ \exists s \in \mathbb{N} : [J^{s-1}, J, J, \ldots, J] = \{0\}.$$

Ли алгебралари (n=2) учун нилпотент қисм алгебра ва нилпотент идеал тушунчалари устма-уст тушади. Аммо $n>2$ да n-Ли алгебралари учун юқоридаги факт умуман олганда ўринли эмас.

16-таъриф. Айтайлик, A – n-Ли алгебраси ($n > 2$) бўлиб, J – A алгебранинг идеали бўлсин. Агар J нилпотент қисм алгебра бўлиб, лекин нильпотент идеал бўлмаса, у ҳолда J идеалга A n-Ли алгебрасининг *гипонильпотент идеали* дейилади.

Агар J гипонильпотент идеални ўз ичига олувчи J дан бошқа гипонильпотент идеал мавжуд бўлмаса, J максимал гипонильпотент идеал дейилади.

Биринчи бобнинг иккинчи параграфида ярим содда Лейбниц алгебраларининг дифференциаллашлари фазосининг Ли структураси таснифланган. L ярим содда Лейбниц алгебраси бўлсин. Ш.А.Аюпов, Б.А.Омиров, К.К.Кудайбергенов ва бошқаларнинг ишида ушбу лемма келтирилган.

1-лемма. $L=L\oplus L_2$ ярим содда Лейбниц алгебраси бўлиб, $[L_i, L_i] = L_i$. тенглик ўринли бўлсин. У ҳолда,

$$Der(L) = Der(L_1)\oplus Der(L_2)$$

муносабат ўринли бўлади.

Кейинги ўринларда $L=S\dotplus I$ Лейбниц алгебрасини ёйилмайдиган ярим содда Лейбниц алгебраси деб фараз қиламиз.

Айтайлик,

$$S=\bigoplus_{i=1}^{r} n_i S_i \tag{1}$$

– ярим содда S Ли алгебрасининг содда Ли идеалларининг тўғри йиғиндисига ёйилмаси бўлсин, бу ерда $i\neq j$ бўлганда $S_i\not\simeq S_j$ бўлади ва

$$I=\bigoplus_{i=1}^{r+s} m_i I_i \tag{2}$$

– I идеалнинг содда I_i – S-модулларга тўғри йиғинди сифатида ёйилмаси бўлсин бу ерда $i\neq j$ бўлганда $I_i\not\simeq I_j$ бўлади.

Кейинги ўринларда S модуллар сифатида $S_i\simeq I_i$ деб фараз қиламиз, бу ерда $i\in\{1,2,\ldots,r\}$ учун $m_i\geq 0$.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз.

$$R_S=\{R_x\colon x\in S\},$$
$$Der(L)_{S,I}=\{d\in Der(L)\colon d(S)\subset I,\ d(I)=0\},$$
$$Der(L)_{I,I}=\{d\in Der(L)\colon d(I)\subset I,\ d(S)=0\}.$$

Ш.А.Аюпов, Б.А.Омиров, К.К.Кудайбергенов ва бошқаларнинг ишларидан қуйидаги лемма ва теоремани келтирайлик:

2-лемма. $L=S\dotplus I$ – ярим содда Лейбниц алгебраси бўлсин. У ҳолда

$$Der(L)=R_S\dotplus Der(L)_{S,I}\dotplus Der(L)_{I,I}.$$

1-теорема. $L=S\dotplus I$ – ярим содда Лейбниц алгебраси бўлиб, S ва I нинг ёйилмалари мос равишда (1) ва (2) каби бўлсин. У ҳолда

а) ихтиёрий $d\in Der(L)_{S,I}$ учун $\oplus_{i=1}^{r}\hom_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{n_i},\mathbb{C}^{m_i})$ даги ягона элемент орқали аниқланади.

b) ихтиёрий $d\in Der(L)_{I,I}$ учун $\oplus_{i=1}^{r+s}\hom_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{m_i},\mathbb{C}^{m_i})$ даги ягона элемент орқали аниқланади.

c) $dimDer(L)=dimS+\sum_{i=1}^{r}n_im_i+\sum_{i=1}^{r+s}m_i^2$

Ушбу параграфда юқоридаги натижалардан фойдаланиб ярим содда Лейбниц алгебралари учун қуйидаги теорема исботланган.

2-теорема. Айтайлик, $L=(\bigoplus_{i=1}^{r}n_iS_i)\dotplus(\bigoplus_{i=1}^{r+s}m_iI_i)-$ ярим содда Лейбниц алгебраси бўлсин. У ҳолда

$$Der(L)\cong(\bigoplus_{i=1}^{r}n_iS_i)\dotplus((\bigoplus_{i=1}^{r}(M_{n_i,m_i}\dotplus M_{m_i,m_i}))\oplus(\bigoplus_{i=r+1}^{r+s}M_{m_i,m_i})),$$

бўлади ва кўпайтмалар қуйидагича аниқланади:

$[M_{m_i,m_i},M_{m_i,m_i}]$, $1\le i\le r+s$ – матрицаларни коммутатор кўпайтмаси;

$[M_{m_i,m_i},M_{m_j,m_j}]=0$, $1\le i\ne j\le r+s$;

$[M_{n_i,m_i},M_{m_i,m_i}]$, $1\le i\le r$ – матрицаларни коммутатор кўпайтмаси;

$[M_{n_i,m_i},M_{m_j,m_j}]=0$, $1\le i\ne j\le r$;

$[M_{n_i,m_i},n_iS_i]$: матрица $A\in M_{n_i,m_i}$ ва $x\in n_iS_i$ элементи учун $[A,x]$ кўпайтма $[A,B]$, коммутатори ёрдамида аниқланади, бу ерда $B\in M_{n_i,n_i}$ матрицаси R_z чизиқли операторининг $n_iS_i\cong Inder(n_iS_i)$ изморфизмдаги x элементга мос келувчи матрицасидир;

$[M_{n_i,m_i},n_jS_j]=0,\quad 1\le i\ne j\le r$;

$[M_{m_i,m_i},n_jS_j]=0,\quad r+1\le i\le r+s,\ \ 1\le j\le r.$

1-натижа. $L=G\oplus I$ – содда Лейбниц алгебраси бўлсин. У ҳолда ($Der(L)$, [-,-]) Ли алгебраси қуйидаги икки алгебраларнинг бирига изоморф бўлади:

i) $dimG = dimI$ бўлсин, у ҳолда $r=1$, $n_1=1$, $m_1=1$, $s=0$ ва $Der(L)\cong G\oplus R_2$, бу ерда R_2 алгебра $[x, y] = -[y, x] = x$ каби кўпайтма ёрдамида аниқланган.

ii) $dimG \ne dimI$ бўлсин, у ҳолда $r=1$, $n_1=1$, $m_1=0$, $s=1$, $m_2=1$ ва $Der(L)\cong G\oplus\mathbb{C}$ бўлади.

Диссертациянинг иккинчи боби “**Ко-ўлчами *k*-1 бўлган *k*-ўлчамли Абел нилрадикалига эга бўлган ечилувчан Лейбниц алгебраларининг классификацияси**” деб номланиб, ко-ўлчами k-1 бўлган k-ўлчамли абел нилрадикалга эга ечилувчан Лейбниц алгебраларининг классификацияси келтирилган ва нилрадикали максимал ранга эга бўлган ҳамда нилрадикалга тўлдирувчи қисм фазонинг ўлчами нильрадикалнинг рангидан кичик бўлган ечилувчан Ли алгебралари ташқи дифференциаллашга эга эканлиги исбот қилинган.

Иккинчи бобнинг биринчи параграфида k ўлчамли Абел нилрадикалга эга бўлган барча (2k-1) ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебралари таснифланган. k ўлчамли a_k Абел нилрадикалга эга бўлган барча (2k-1) ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебралари тўпламини $R(a_k, k$-1) каби белгилайлик. У ҳолда, $R(a_k, k$-1) тўпламдаги алгебраларнинг кўпайтириш жадвали қуйидаги кўринишда бўлади:

$$R(a_k,k-1)=\begin{cases}[e_i,x_i]=e_i+\beta_{i,i}e_k, & 1\le i\le k-1,\\ [e_i,x_j]=\beta_{i,j}e_k, & 1\le i\le k,\ \ 1\le j\le k-1,\quad i\ne j,\\ [x_i,e_i]=\alpha_i e_i+\gamma_{i,i}e_k, & 1\le i\le k-1,\\ [x_i,e_j]=\gamma_{i,j}e_k, & 1\le i\le k-1,\ 1\le j\le k-1,\quad i\ne j,\\ [x_i,e_k]=\sum\limits_{j=1}^{k}\nu_{i,j}e_j, & 1\le i\le k-1,\\ [x_i,x_j]=\delta_{i,j}e_k, & 1\le i,j\le k-1,\end{cases}$$

бу ерда $\alpha_i\in\{-1,0\}$.

3-теорема. L – $R(a_k, k\text{-}1)$ тўпламга тегишли Лейбниц алгебраси бўлсин ва барча $1\le i\le k\text{-}1$ лар учун $\alpha_i=0$ бўлсин. У ҳолда L қуйидаги алгебраларнинг бирига изоморф бўлади:

$$L_1(\beta_i):\ [e_i,x_i]=e_i,\qquad 1\le i\le k-1,\qquad [e_k,x_i]=\beta_i e_k,\quad 1\le i\le k-1,$$

$$L_2(\beta_i):\begin{cases}[e_i,x_i]=e_i, & 1\le i\le k-1,\quad [e_k,x_i]=\beta_i e_k,\quad 1\le i\le k-1,\\ [x_i,e_k]=-\beta_i e_k, & 1\le i\le k-1,\end{cases}$$

$$L_3(\beta_i):\begin{cases}[e_1,x_1]=e_1+\beta_1 e_k, & [e_i,x_i]=e_i, \qquad 2\le i\le k-1,\\ [e_k,x_1]=e_k, & [e_1,x_i]=\beta_i e_k, \qquad 2\le i\le k-1,\end{cases}$$

$$L_4(\nu_i):\begin{cases}[e_i,x_i]=e_i, & 1\le i\le k-1,\qquad [e_k,x_1]=e_k,\\ [x_1,e_k]=-e_k, & [x_i,e_k]=\nu_i e_1,\qquad 2\le i\le k-1,\end{cases}$$

$$L_5(\delta_{i,j}):\begin{cases}[e_i,x_i]=e_i, & 1\le i\le k-1,\\ [x_i,x_j]=\delta_{i,j}e_k, & 1\le i,j\le k-1,\end{cases}\qquad \beta_i,\delta_{i,j},\nu_i\in\mathbb{C}.$$

4-теорема. L – $R(a_k, k–1)$ тўпламдаги ечилувчан Лейбниц алгебраси бўлиб, барча $1\le i\le k–1$ лар учун L нинг кўпайтириш жадвалида $\alpha_i=–1$ тенглиги бажарилсин. У ҳолда L қуйидаги алгебраларнинг бирига изморф бўлади:

$$L_6\left(\beta_j\right):\begin{cases}[e_i,x_i]=e_i, & 1\le i\le k-1,\\ [e_k,x_j]=\beta_j e_k, & 1\le j\le k-1,\\ [x_i,e_i]=-e_i, & 1\le i\le k-1,\end{cases}$$

$$L_7\left(\beta_j\right):\begin{cases}[e_i,x_i]=e_i, & 1\le i\le k-1,\qquad [e_k,x_j]=\beta_j e_k,\quad 1\le j\le k-1,\\ [x_i,e_i]=-e_i, & 1\le i\le k-1,\qquad [x_j,e_k]=-\beta_j e_k,\quad 1\le j\le k-1,\end{cases}$$

$$L_8\left(\gamma_j\right):\begin{cases}[e_i,x_i]=e_i, & 1\le i\le k-1,\qquad [e_k,x_1]=e_k,\\ [x_i,e_i]=-e_i, & 1\le i\le k-1,\qquad [x_i,e_1]=\gamma_i e_k,\qquad 2\le i\le k-1,\end{cases}$$

$$L_9(\beta_i):\begin{cases}[e_1,x_1]=e_1+\beta_1e_k, & [e_i,x_i]=e_i, \quad 2\le i\le k-1,\\ [e_k,x_1]=e_k, & [e_1,x_i]=\beta_ie_k, \quad 2\le i\le k-1,\\ [x_1,e_1]=-e_1-\beta_1e_k, & [x_i,e_i]=-e_i, \quad 2\le i\le k-1,\\ [x_1,e_k]=-e_k, & [x_i,e_1]=-\beta_ie_k, \quad 2\le i\le k-1,\end{cases}$$

$$L_{10}\left(\delta_{i,j}\right):\begin{cases}[e_i,x_i]=e_i, & 1\le i\le k-1,\\ [x_i,e_i]=-e_i, & 1\le i\le k-1, \qquad \beta_i,\delta_{i,j},\gamma_i\in\mathbb{C}.\\ [x_i,x_j]=\delta_{i,j}e_k, & 1\le i,j\le k-1,\end{cases}$$

Иккинчи бобнинг иккинчи параграфида k ўлчамли Абел нилрадикалга эга бўлган барча ($2k$–1) ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебралари классификация қилинган.

5-теорема. L – $R(a_k, k-1)$ тўпламдаги ечилувчан Лейбниц алгебраси бўлиб, $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_{t-1}=-1$ ва $\alpha_t=\alpha_{t+1}=\ldots=\alpha_{k-1}=0$ шартлари бажарилсин. У ҳолда L алгебра қуйидаги алгебраларининг бирига изморф бўлади:

$$M_{1,t}(\beta):\begin{cases}[e_i,x_i]=e_i, & 1\le i\le k-1,\\ [e_k,x_i]=\beta_ie_k, & 1\le i\le k-1,\\ [x_i,e_i]=-e_i, & 1\le i\le t-1,\end{cases}\qquad M_{2,t}(\beta):\begin{cases}[e_i,x_i]=e_i, & 1\le i\le k-1,\\ [e_k,x_i]=\beta_ie_k, & 1\le i\le k-1,\\ [x_i,e_k]=-\beta_ie_k, & 1\le i\le k-1,\\ [x_i,e_i]=-e_i, & 1\le i\le t-1,\end{cases}$$

$$M_{3,t}(\beta):\begin{cases}[e_t,x_t]=e_t+\beta_te_k,\\ [e_i,x_i]=e_i, & 1\le i\le k-1,\\ [e_t,x_i]=\beta_ie_k, & 1\le i\le k-1,\\ [e_k,x_t]=e_k,\\ [x_i,e_i]=-e_i, & 1\le i\le t-1,\end{cases}\quad M_{4,t}(\beta):\begin{cases}[e_1,x_1]=e_1+\beta_1e_k,\\ [e_i,x_i]=e_i, & 2\le i\le k-1,\\ [e_1,x_i]=\beta_ie_k, & 2\le i\le k-1,\\ [e_k,x_1]=e_k,\\ [x_1,e_1]=-e_1-\beta_1e_k,\\ [x_i,e_i]=-e_i, & 2\le i\le t-1,\\ [x_i,e_1]=-\beta_ie_k, & 2\le i\le k-1,\\ [x_1,e_k]=-e_k,\end{cases}$$

$$M_{5,t}(\gamma):\begin{cases}[e_i,x_i]=e_i, & 1\le i\le k-1,\\ [e_k,x_1]=e_k,\\ [x_i,e_i]=-e_i, & 1\le i\le t-1,\\ [x_i,e_1]=\gamma_ie_k, & 2\le i\le k-1,\end{cases}\qquad M_{6,t}(\beta):\begin{cases}[e_i,x_i]=e_i, & 1\le i\le k-1,\\ [e_k,x_t]=e_k,\\ [x_i,e_i]=-e_i, & 1\le i\le t-1,\\ [x_t,e_k]=-e_k,\\ [x_i,e_k]=\beta_ie_t, & 1\le i\le k-1,\end{cases}$$

$$M_{7,t}(\delta_{i,j}):\begin{cases}[e_i,x_i]=e_i, & 1\le i\le k-1,\\ [x_i,e_i]=-e_i, & 1\le i\le k-1,\\ [x_i,x_j]=\delta_{i,j}e_k, & 1\le i,j\le k-1,\end{cases}$$

бу ерда $2\le t\le k-2$, $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_{k-1})$, $\gamma=(\gamma_2,\ldots,\gamma_{k-1})$ ва $\beta_i,\delta_{i,j},\gamma_i\in\mathbb{C}$.

6-теорема. L – ($2k$–1) ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебраси бўлсин. У ҳолда, L қуйидаги ўзаро изоморф бўлмаган алгебраларнинг бирига изморф бўлади:

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{M}_{1,\,t}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{k-1}), & 1 \le t \le k-1; \\
\mathrm{M}_{2,\,t}(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_{t-1}, 0, \ldots, 0), & 1 \le t \le k-1; \\
M_{3,t}(1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_{t-1}, \beta_t, \beta_{t+1}, \beta_{t+2}, \ldots, \beta_{k-1}), & 1 \le t \le k-2; \\
M_{3,t}(0,0,0, \ldots, 0,1, \beta_{t+1}, \beta_{t+2}, \ldots, \beta_{k-1}), & 1 \le t \le k-2; \\
M_{3,t}(0,0,0, \ldots, 0,0,1, \beta_{t+2}, \ldots, \beta_{k-1}), & 1 \le t \le k-2; \\
M_{4,t}(1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_{t-1}, \beta_t, \beta_{t+1}, \beta_{t+2}, \ldots, \beta_{k-1}), & 2 \le t \le k-1; \\
M_{4,t}(0,1, \beta_3, \ldots, \beta_{t-1}, \beta_t, \beta_{t+1}, \beta_{t+2}, \ldots, \beta_{k-1}), & 2 \le t \le k-1; \\
M_{4,t}(0,0,0, \ldots, 0,1, \beta_{t+1}, \beta_{t+2}, \ldots, \beta_{k-1}), & 2 \le t \le k-1; \\
M_{5,t}(1, \gamma_3, \ldots, \gamma_{t-1}, \gamma_t, \gamma_{t+1}, \gamma_{t+2}, \ldots, \gamma_{k-1}), & 2 \le t \le k-1; \\
M_{5,t}(0,0,0, \ldots, 0,1, \gamma_{t+1}, \gamma_{t+2}, \ldots, \gamma_{k-1}), & 2 \le t \le k-1; \\
\mathrm{M}_{7,\,t}(\delta_{i,j}), & 1 \le t \le k-1,
\end{array}
$$

бу ерда ҳеч бўлмаганда битта нолдан фарқли $\delta_{i,j}$ параметрни бир сонига тенг деб ҳисобласа бўлади.

Иккинчи бобнинг учинчи параграфида максимал рангга эга бўлган нилпотент Ли алгебраларининг ечилувчан кенгайтмалари орасида фақат максимал кенгайтмалар ташқи дифференциаллашга эга эмаслиги исбот қилинган.

7-теорема. $R=N\oplus Q'$ ечилувчан Ли алгебраси бўлиб, $N\in N_{max}$ ва $\dim Q' < \dim N/N^2$ бўлсин. У ҳолда R ташқи дифференциаллашга эга.

Бу ерда, $N_{max}=\{N$ нильпотент алгебра | нилрадикали N ва $\operatorname{codim} N = \dim N / N^2$ бўлган R ечилувчан Ли алгебраси мавжуд$\}$.

Диссертациянинг учинчи боби «**Максимал гипонильпотент идеали $NGF_{m,n}$ филиформ бўлган максимал ўлчамли ечилувчан n-Ли алгебралари**» деб номланиб, унда табиий усулда градуирланган n-Ли алгебраларнинг таърифи киритилган ва табиий усулда градуирланган m ўлчамли филиформ n-Ли алгебраларининг таснифи келтирилган. Бундай алгбраларни $NGF_{m,n}$ каби белгилайлик. Бундан ташқари, максимал гипонильпотент идеали берилган максимал ечилувчан n-Ли алгебралари тасниф қилинган.

1-тасдиқ. m ўлчамли n-Ли алгебраси филиформ бўлиши учун унинг характеристик кетма-кетлиги $(m-n+1,\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n-1})$ га тенг бўлиши зарур ва етарли.

3-лемма. N – n-Ли алгебраси бўлсин. У ҳолда барча $i_1,\ldots,i_k \in \mathbb{N}$, $2 \le k \le n$ лар учун қуйидаги муносабат ўринли бўлади:

$$[N^{i_1}, N^{i_2}, \ldots, N^{i_k}, N, \ldots, N] \subseteq N^{i_1+i_2+\ldots+i_k-k+2}.$$

2-натижа. N – n-Ли алгебраси бўлсин. У ҳолда қуйидагилар ўринли:

- $[N^{i_1}, N^{i_2}, \ldots, N^{i_n}] \subseteq N^{i_1+i_2+\ldots+i_n-n+2}$,
- $[N^{i_1}, N^{i_2}, \ldots, N^{i_n}] \subseteq [N^{i_1+i_2+\ldots+i_n-n+1}, N, N, \ldots, N]$.

Айтайлик, N n-Ли алгебраси бўлсин ва

$$N_i := N^i/N^{i+1},\ 1 \le i \le s-1 \text{ ва } grN = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_{s-1},$$

бу ерда, $N^{s-1} \neq 0$ и $N^s = 0$.

17-таъриф. Агар $grN \cong N$ муносабат ўринли бўлса, у ҳолда N n-Ли алгебраси табиий усулда градуирланган алгебра дейилади.

8-теорема. N табиий усулда градуирланган m ўлчамли филиформ n-Ли алгебраси бўлсин. У ҳолда N да шундай $\{e_1,\ldots,e_m\}$ базис мавжудки, ушбу базисда кўпайтириш жадвали қуйидагича бўлади:

$$NGF_{m,n}(\beta_{i,j}): \begin{cases} [e_1,e_2,\ldots,e_{n-1},e_j] = e_{j+1}, & n \le j \le m-1, \\ [e_1,\ldots,\hat{e}_i,\ldots,e_n,e_{n+j}] = \beta_{i,n+j}e_{n+j+1}, & 1 \le i \le n-1, \quad 3 \le j \le m-n, \\ [e_1,\ldots,\hat{e}_i,\ldots,\hat{e}_j,\ldots,e_n,e_{n+p},e_{n+q}] = \gamma_{i,j}^{p,q}e_{n+p+q+1}, & 1 \le i < j \le n, \\ [e_1,\ldots,\hat{e}_{i_1},\ldots,\hat{e}_{i_k},\ldots,e_n,e_{n+j_1},\ldots,e_{n+j_k}] = \gamma_{i_1,i_2,\ldots,i_k}^{j_1,j_2,\ldots,j_k}e_{n+j_1+j_2+\ldots+j_k+1}, & \\ [e_{n+j_1},e_{n+j_2},\ldots,e_{n+j_n}] = \delta_{j_1,j_2,\ldots,j_n}e_{n+j_1+j_2+\ldots+j_n+1}, & \end{cases}$$

бу ерда,

$$\begin{cases} \gamma_{i,j}^{1,q} = \beta_{i,n+q}\beta_{j,n+q+1} - \beta_{j,n+q}\beta_{i,n+q+1}, & 1 \le i < j \le n-1, \quad 2 \le q \le m-n-2, \\ \gamma_{i,n}^{1,q} = \beta_{i,n+q} - \beta_{i,n+q+1}, & 1 \le i \le n-1, \quad 2 \le q \le m-n-2, \\ \gamma_{i,j}^{p,q} = \gamma_{i,j}^{p-1,q} + \beta_{i,n+q}\gamma_{j,n}^{p-1,q+1} - \beta_{j,n+q}\gamma_{i,n}^{p-1,q+1}, & 1 \le i < j \le n-1, \quad 1 \le p < q \le m-n-p-1, \\ \gamma_{i,n}^{p,q} = \gamma_{i,n}^{p-1,q} - \gamma_{i,n}^{p-1,q+1}, & 1 \le i \le n-1, \quad 1 \le p < q \le m-n-p-1, \end{cases}$$

$$\gamma_{i_1,i_2,\ldots,i_k}^{j_1,j_2,\ldots,j_k} = \sum_{t=1}^{k}(-1)^{k-1}\gamma_{i_1,\ldots,\hat{i}_t,\ldots,i_k}^{j_2,\ldots,j_k}\gamma_{i_t,n}^{n+j_1-1,n+j_2+\ldots+j_k+1},$$

ва $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$, $1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_k \le m-n-1$, $1 \le k \le n-1$,

$$\delta_{j_1,j_2,\ldots,j_n} = \sum_{t=1}^{n-1}(-1)^{n+t}\gamma_{1,\ldots,\hat{t},\ldots,n}^{j_2,\ldots,j_n}\gamma_{t,n}^{n+j_1-1,n+j_2+\ldots+j_n+1} + \delta_{j_1-1,j_2,\ldots,j_n}.$$

ва $1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_n \le m-n-j_1-j_2-\ldots-j_{n-1}-1$.

Учинчи бобнинг иккинчи параграфида максимал гипонильпотент идеали табиий усулда градуирланган m-ўлчамли филиформ n-Ли алгебраси $NGF_{m,n}$ бўлган n-Ли алгебралари классификация қилинган.

9-теорема. R – максимал гипонильпотент идеали $NGF_{m,n}$ ва ўлчами $(m+2)$ бўлган ечилувчан n-Ли алгебраси бўлсин (яъни $\dim Q=2$). У ҳолда R да шундай $\{x, y, e_1, \ldots, e_m\}$ базис мавжудки, R даги кўпайтириш жадвали ушбу базисда қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$R(NGF_{m,n}): \begin{cases} [e_1,e_2\ldots,e_{n-1},e_i] = e_{i+1}, & n \le i \le m-1, \\ [x,e_1,e_2,\ldots,e_{n-2},e_{n-1}] = e_{n-1}, & \\ [x,e_1,e_2,\ldots,e_{n-2},e_i] = (i-n)e_i, & n+1 \le i \le m, \\ [y,e_1,e_2,\ldots,e_{n-2},e_i] = e_i, & n \le i \le m, \end{cases}$$

бу ерда келтирилмаган барча базис элементларининг n-ар кўпайтмалари нолга тенг.

10-теорема. R – максимал гипонильпотент идеали $NGF_{m,n}$ ва ўлчами $(m+k)$ бўлган ечилувчан n-Ли алгебраси бўлсин. У ҳолда $k \le 2$.

Учинчи бобнинг учинчи параграфида максимал гипонильпотент идеали табиий усулда градуирланган m-ўлчамли филиформ n-Ли алгебраси $NGF_{m,n}$

бўлган ечилувчан n-Ли алгебраларининг дифференциаллашлари таснифланган.

11-теорема. Қуйидаги акслантиришлар (m+2)-ўлчамли ечилувчан n-Ли алгебраси $R(NGF_{m,n})$ нинг дифференциаллашлар фазоси базиси бўлади:

$$Der(R(\mathcal{NGF}_{m,n})):\begin{cases} d_{i,j}(e_i)=e_j, & 1\le i\le n-1, \quad 1\le j\le m,\\ d_{i,i}(e_k)=(k-n)e_k, & 1\le i\le n-1, \quad n+1\le k\le m,\\ d_{i,i}(x)=-x, & d_{i,i}(y)=-y, \quad 1\le i\le n-2,\\ d_{n-1,j+1}(x)=(j-n)e_j, & n+1\le j\le m-1,\\ d_{n-1,j+1}(y)=(-1)^n e_j, & n\le j\le m-1,\\ d_{i,m+1}(e_i)=x, & d_{i,m+2}(e_i)=y, \quad 1\le i\le n-2,\\ d_{n,n}(e_k)=e_k, & n\le k\le m, \quad d_{n,n+1}(e_k)=e_{k+1}, \quad n\le k\le m-1,\\ d_{n,n+1}(x)=(-1)^{n-1}e_{n-1} & n\le k\le m-1, \quad d_{n+1}(x)=e_m, \quad d_{n+2}(y)=e_m. \end{cases}$$

11-теоремадан фойдаланиб $R(NGF_{m,n})$ ечилувчан n-Ли алгебрасининг ички дифференциаллашларини қуйидаги натижада келтирамиз.

3-натижа. Қуйидаги дифференциаллашлар $Der(R(NGF_{m,n}))$ n-Ли алгебрасининг ички дифференциаллашлар фазоси базиси бўлади:

$$Ad(R(NGF_{m,n})):\begin{cases} d_{i,j}(e_i)=e_j, & 1\le i\le n-1, \quad n-1\le j\le m,\\ d_{n-1,n-1}(e_k)=(k-n)e_k, & n+1\le k\le m,\\ d_{n-1,j+1}(x)=(j-n)e_j, & n+1\le j\le m-1,\\ d_{n-1,j+1}(y)=(-1)^n e_j, & n\le j\le m-1,\\ d_{n,n}(e_k)=e_k, & n\le k\le m,\\ d_{n,n+1}(e_k)=e_{k+1}, & n\le k\le m-1,\\ d_{n,n+1}(x)=(-1)^{n-1}e_{n-1}, & n\le k\le m-1,\\ d_{n+1}(x)=e_m, & d_{n+2}(y)=e_m. \end{cases}$$

ХУЛОСА

Диссертация иши Абел алгебраларининг Лейбниц кенгайтмаларини ва гипонильпотент идеали берилган ечилувчан n-Ли алгебраларни таснифлашга бағишланган.

Асосий натижалар қуйидагилардан иборат:

1. Ярим содда Лейбниц алгебраларининг дифференциаллашлар фазосининг Ли структураси таснифланган.
2. Нилрадикали k ўлчамли Абел алгебраси ва ко-ўлчами (k–1) бўлган ечилувчан Лейбниц алгебралари классификация қилинди.
3. Нилрадикали максимал ранга эга бўлган ва нилрадикалга тўлдирувчи фазосининг ўлчами нилрадикал рангидан кичик бўлган ечилувчан Ли алгебраларининг ташқи дифференциаллаши мавжуд эканлиги исбот қилинган.
4. Табиий усулда градуирланган n-Ли алгебраси тушунчаси киритилган бўлиб, табиий усулда градуирланган филиформ n-Ли алгебраси тасниф қилинган.
5. Олинган алгебраларнинг орасида энг содда структурага эга бўлган n-Ли алгебрасининг дифференциаллашлари таснифланган.
6. Максимал гипонильпотент идеали табиий усулда градуирланган содда структурали филиформ алгебраси бўлган ечилувчан n-Ли алгебралари классификация қилинди.
7. Бундай ечилувчан n-Ли алгебраларининг дифференциаллашлари таснифланган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ГАЙБУЛЛАЕВ РУСТАМЖОН КАХРАМОНОВИЧ

ОПИСАНИЯ ЛЕЙБНИЦЕВЫХ РАСШИРЕНИЙ АБЕЛЕВЫХ АЛГЕБР И *n*-ЛИЕВЫХ РАЗРЕШИМЫХ АЛГЕБР С ЗАДАННЫМ ГИПОНИЛЬПОТЕНТНЫМ ИДЕАЛОМ

01.01.06 – Алгебра

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PHD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент-2022

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2021.2.PhD/FM349.

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана им. Мирзо Улугбека.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу http://www.ziyonet.uz.

Научный руководитель:	**Омиров Бахром Абдазович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Эшматов Фарход Хасанович** Доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник
	Курбанбаев Тууелбай Кадирбаевич кандидат физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	**Андижанский государственный университет**

Защита диссертации состоится «____»__________ 2022 года в ____ на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9.Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № _______). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9.Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан «__» ___________ 2022 года.
(протокол рассылки № __ от «__» __________ 2022 года).

У.А.Розиков
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

Ж.К.Адашев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

А.Р.Хаётов
Заместитель председателя научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научные и практические исследования, проводимые во всем мире, часто приводятся к алгебраическим и геометрическим задачам. В результате использования теории структурного строения алгебр Ли при решении некоторых задач математики и физики возникли обобщения алгебр Ли, такие как n-лиевые алгебры, супералгебры Ли, алгебры Мальцева и Лейбница. Теория n-лиевых алгебр Ли и Лейбница, являющаяся обобщением алгебр Ли, является одной из наиболее быстро развивающихся областей современной алгебры. Доказательство теоремы Леви для алгебр Лейбница привело к проблеме описания конечномерных алгебр Лейбница, к изучению конечномерных разрешимых алгебр Лейбница. Поэтому важной является классификация конечномерных разрешимых алгебр Лейбница.

В настоящее время в мире изучение теории конечномерных n-лиевых алгебр во всем мире создало новое направление в теории алгебр Ли. Также важно изучать эти алгебры благодаря возможности приложений n-лиевых алгебр в различных областях динамических систем, геометрии и физики. Существует аналог теоремы Энгеля для конечномерных n-лиевых алгебр, однако разложение Леви, вообще говоря, не является верным и это означает, что изучение конечномерных n-лиевых алгебр является сложным вопросом и требует дополнительных ограничений. Одним из таких ограничений является установка условия гипонилпотентности на максимальный идеал при изучении разрешимых n-лиевых алгебр, например, описание разрешимых n-лиевых алгебр, расширение данной n-лиевой алгебры. В связи с этим описание максимальных разрешимых n-лиевых алгебр с заданным максимальным гипонильпотентным идеалом является целью целенаправленных научных исследований.

В нашей стране уделяется внимание актуальным направлениям прикладной математики, информатики, цифровой экономики, которые имеют научное и практическое применение в фундаментальных науках. В частности, в последние годы значительные результаты были достигнуты в решении практических задач путем классификации конечномерных алгебр Лейбница и n-лиевых алгебр. Научные исследования на международном уровне по таким важным направлениям математической науки, как «Алгебра и функциональный анализ», рассматриваются в качестве основной задачи фундаментальных исследований[1]. Исследования по теории конечномерных разрешимых n-лиевых и Лейбницевых алгебр играют важную роль при исполнении указанного постановления.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан №УП–4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан № 292 “О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии Наук Республики Узбекистан” от 18 мая 2017 года.

развитию Республики Узбекистан», в постановлениях №ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В.И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан» и №ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» и в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологии республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Проблема описания конечномерных алгебр Ли была решена благодаря основной теореме Леви, и в результате проблема классификации разрешимых алгебр Ли вышла на первый план. При построении конечномерных разрешимых алгебр Ли с использованием их нильрадикалов с помощью метода А.Мальцева и Г.Мубаракзянова было получено описание разрешимых алгебр Ли, у которых нильрадикал - филиформный, квазифилиформный, абелевый, гейзенберговый и других типов нильпотентных алгебр. В работах Ж.М. Касаса, М. Ладры, Б.А. Омирова, И.А. Каримжанова описаны разрешимые алгебры Лейбница, у которых нильрадикал абелевый, гейзенберговый, квазифилиформный, естественно градуированный и p-филиформный.

В 1970-х годах Й. Намбу, описывая одновременную классическую динамику трех частиц как предварительный шаг к квантовой статистике для кварковой модели, обобщил скобку Пуассона и получил трехлинейное произведение. В 1994 году Л. Тахтаджан развил геометрические идеи механики Намбу и ввел фундаментальное тождество, аналогичное тождеству Якоби. Это позволило ему установить связь между обобщенной механикой Намбу и теорией n-лиевых алгебр, предложенных В. Филипповым. В. Линг доказал, что существует единственная простая n-лиевая алгебра при $n > 2$ над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики, причем данная алгебра имеет размерность n+1. Кроме того, в диссертации Линга был доказан аналог теоремы Леви, то есть доказано, что произвольная конечномерная n-лиева алгебра разлагается в полупрямую сумму полупростой подалгебры и разрешимого радикала. Аналогично случаю алгебр Ли, изучение разрешимых n-лиевых алгебр является одной из важных задач в теории n-лиевых алгебр. Описанию некоторых классов нильпотентных и разрешимых алгебр посвящены работы Р. Байя, М. Гозе и Ш.Касымова.

В настоящее время структура и описание конечномерных алгебр Лейбница, пространство дифференцирования, а также описания когомологических групп получены в работах Ш.А. Аюпова, Б.А. Омирова, К. Кудайбергенова, И.С. Рахимова, А.Х. Худойбердиева, Ж.К. Адашева, Я.

Касаса, М. Ладра, Л. Комачо, А. Шабанской и других авторов. В то же время структра и описание конечномерных n-лиевых алгебр и пространств дифференцирований приведены в работах Р. Байя, М. Гозе и Ш. Касымова.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего образовательного учреждения, где выполнена диссертация. Диссертационное исследование выполнено в соответствии с намеченной темой научного исследования ОТ-Ф4-31 “Некоммутативные модули, алгебры Лейбница и полиномиальные каскады на симплексах” в Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека (2017–2020 гг.).

Целью исследования является построение расширений разрешимых алгебр Лейбница с k-мерным абелевым нильрадикалом коразмерности k–1 и описание разрешимых n-лиевых алгебр с заданным максимальным филиформным гипонильпотентным идеалом.

Задачи исследования:

описание лиевой структуры на пространстве дифференцирований полупростых алгебр Лейбница;

классификация разрешимых алгебр Лейбница с абелевым k-мерным нильрадикалом коразмерности (k–1);

изучение свойства внутренности дифференцирований разрешимых алгебр Ли с нильрадикалом максимального ранга;

описание естественным образом градуированных филиформных n-лиевых алгебр;

классификация разрешимых n-лиевых алгебр с заданным максимальным гипонильпотентным филиформным идеалом и исследование дифференцирования таких разрешимых n-лиевых алгебр.

Объектом исследования являются разрешимые алгебры Лейбница с абелевым нильрадикалом, дифференцирования разрешимых алгебр Ли с нильрадикалом максимального ранга и n-лиевые разрешимые алгебры.

Предметом исследования являются дифференцирования полупростых алгебр Лейбница, разрешимые алгебры Лейбница и разрешимые n-лиевые алгебры.

Методы исследования. В диссертации использованы методы линейной алгебры, методы теории инвариантов, а также структурные и классификационные методы не ассоциативных алгебр.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

классифицированы разрешимые алгебры Лейбница с абелевым k-мерным нильрадикалом коразмерности (k–1);

доказано, что разрешимые алгебры Ли с нильрадикалом максимального ранга и размерностью дополняющего подпространства к нильрадикалу менее, чем ранг нильрадикала, допускают внешние дифференцирования;

получено описание естественным образом градуированных филиформных n-лиевых алгебр;

классифицированы максимальные разрешимые n-лиевые алгебры с максимальным гипонильпотентным идеалом.

Практические результаты исследования состоят в следующем.

Результаты и методы, классификация разрешимых n-лиевых алгебр позволит выдвинуть ряд гипотез относительно структуры разрешимых n-лиевых алгебр с заданными максимальными гипонильпотеными идеалами.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием известных методов исследования других многообразий не ассоциативных алгебр, применением фундаментальных результатов структурной теории алгебр Ли и алгебр Лейбница, а также строгостью математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования обосновывается использованием полученных в работе научных результатов для классификации конечномерных разрешимых алгебр Лейбница с заданным нильрадикалом и возможностью применения этих результатов в теории разрешимых n-Лейбницевых алгебр.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что результаты, касающиеся классификации разрешимых n-лиевых алгебр с заданным максимальным филиформным гипонильпотентным идеалом, позволят установить ряд гипотез относительно описания разрешимых n-лиевых алгебр с другими типами максимальных гипонильпотентных идеалов.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

результаты классификации разрешимых алгебр Лейбница с k-мерным абелевым нильрадикалом коразмерности k–1 использованы в зарубежном проекте под номером FRGS/1/2016/STG06/UPM/03/2 «Обобщенные дифференцирования некоторых классов алгебр и их приложений» для описания разрешимых алгебр Лейбница с нильрадикалом максимального ранга и размерностью дополняющего подпространства на единицу меньше, чем ранг нильрадикала, а также для описания дифференцирований таких разрешимых алгебр Лейбница (Справка от 22 ноября 2021 года Университета Технологий МАРА, Малайзия). Научные результаты были применены для описания алгебр дифференцирований некоторых классов конечномерных не ассоциативных алгебр;

результаты об описании дифференцирований разрешимых n-лиевых алгебр с максимальным филиформным гипонильпотентным идеалом использованы в проектах "Гомологии, гомотопические и категориалные инварианты в группах и не ассоциативных алгебрах" № MTM2016-79661-P, при описании свойств некоторых нильпотентных n-алгебр Лейбница (Справка от 24 ноября 2021 года Университета Сантьяго де Компостела, Испания). Применение результатов позволило проверить некоторые гипотезы для разрешимых (нильпотентных) лейбницевых n-алгебр и найти новые примеры разрешимые (нильпотентные) лейбницевые n-алгебры.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертационного исследования обсуждались на 3 международных и 7 республиканских научных конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 15 научных работ, из них 5 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций на степень доктора философии, в том числе 2 опубликованы в зарубежных журналах, 3 в республиканских научных изданиях, а также в 10 тезисах докладов на научных конференциях.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 85 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **“Лиевая структура на пространстве дифференцирований полупростых алгебр Лейбница”**, приведены необходимые понятия и вспомогательные результаты по теории алгебр Ли, алгебр Лейбница и n-лиевых алгебр. Описана лиевая структура на пространстве дифференцирований полупростых алгебр Лейбница.

Определение 1. Алгебра G над полем F называется *алгеброй Ли*, если для любых элементов $x, y, z\in G$ выполняются следующие два тождества:

$[x, x] = 0$ – тождество антикоммутативности,

$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ – тождество Якоби,

где [-,-] – умножение в алгебре G.

Определение 2. Алгебра L над полем F называется *алгеброй Лейбница,* если для любых $x, y, z\in L$ выполняется тождество Лейбница

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] – [[x, z], y],$$

где [-,-] – умножение в алгебре L.

Нетрудно видеть, что если в алгебре Лейбница выполняется тождество $[x, y] = - [y, x]$, то тождество Лейбница преобразуется в тождество Якоби. Таким образом, алгебра Ли является частным случаем алгебры Лейбница.

Следует отметить, что идеал, порожденный квадратами элементов не лиевой алгебры Лейбница, отличен от нуля. В дальнешйем данный идеал будем обозначать через I, т.е., $I=Span\{[x,x] \mid x\in L\}$.

Последние исследования теории алгебр Лейбница показывают, что данные алгебры, в отличие от других обобщений алгебр Ли, являются наиболее естественными и близкими к алгебрам Ли.

Отметим, что понятия правого идеала, левого идеала, двустороннего идеала и подалгебры для алгебр Лейбница определяются обычным образом.

Множества $Ann_r(L) = \{x \in L \mid [L, x] = 0\}$ и $Ann_l(L) = \{x \in L \mid [x, L] = 0\}$ называются *правым* и *левым аннуляторами* алгебры L, соответственно. Используя тождество Лейбница, нетрудно проверить, что $Ann_r(L)$ – двусторонний идеал алгебры L и для любых элементов $x, y \in L$ элементы $[x,x]$ и $[x, y] + [y, x]$ принадлежат $Ann_r(L)$.

Множество $Center(L):=\{x \in L:[x,L]=[L,x]=0\}$ называется *центром* алгебры Лейбница L.

Для заданной алгебры Лейбница L следующие последовательности двусторонних идеалов определяются таким образом:

$$L^{[1]}=L,\ L^{[k+1]}=[L^{[k]}, L^{[k]}]; \qquad L^1=L,\ L^{k+1}=[L^k, L^1], \qquad k \geq 1.$$

Они, соответственно, называются *нижним центральным и производным рядами* алгебры L.

Определение 3. Алгебра Лейбница L называется *нильпотентной* (соответственно, *разрешимой*), если существует такое $n \in \mathbb{N}$ $(m \in \mathbb{N})$, что $L^n=0$ (соответственно, $L^{[m]}=0$).

Известно, что сумма любых двух нильпотентных идеалов является нильпотентным идеалом. Поэтому мы можем рассмотреть максимальный нильпотентный идеал (сумма всех нильпотентных идеалов). Аналогичные рассуждения справедливы также для разрешимых идеалов.

Определение 4. Максимальный нильпотентный идеал алгебры Лейбница называется *нильрадикалом* алгебры.

Приведем понятия простоты и полупростоты алгебр Ли, необходимые для формулирования одного из основных результатов структурной теории алгебр Лейбница.

Определение 5. Алгебра Лейбница L называется *простой,* если $L^2 \neq I$ и ее идеалы исчерпываются следующими: $\{0\}$, I, L.

Определение 6. Алгебра Лейбница L называется *полупростой*, если ее максимальный разрешимый идеал совпадает с идеалом I.

Так как в случае алгебр Ли идеал $I=\{0\}$, то понятия простоты и полупростоты алгебры Лейбница согласуются с аналогичными понятиями для алгебр Ли.

Определение 7. Линейное отображение $d : L \to L$ алгебры Лейбница $(L, [-,-])$ называется *дифференцированием,* если для любых $x, y \in L$ выполняется правило Лейбница:

$$d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)].$$

Множество всех дифференцирований L обозначается $Der(L)$. При этом пространство $Der(L)$ является алгеброй Ли относительно операции коммутирования.

Нетрудно проверить, что для элемента x алгебры Лейбница L оператор правого умножения $R_x : L \to L$, определенный как $R_x(y) = [y, x]$, $y \in L$, является дифференцированием. Дифференцирования такого вида называются *внутренними дифференцированиями*.

Следует отметить, что алгебры Лейбница можно также определить условием, что операторы правого умножения являются дифференцированиями.

Определение 8. Максимальная абелева подалгебра алгебры Ли *Der(L)*, состоящая из диагонализируемых преобразований алгебры L, называется *максимальным тором* алгебры Ли L.

Другим обобщением алгебр Ли, отличным от алгебр Лейбница, являются n-лиевые алгебры.

Определение 9. Векторное пространство A над полем F называется *n-лиевой алгеброй,* если существует n-арная полилинейная операция [-,-,…,-], удовлетворяющая следующим двум тождествам

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n]=(-1)^{sign(\sigma)}[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}],$$

$$\left[[x_1, x_2, \ldots, x_n], y_2, \ldots, y_n\right] = \sum_{i=1}^{n}[x_1, \ldots, x_{n-1}, [x_i, y_2, \ldots, y_n], x_{i+1}, \ldots, x_n],$$

где $\sigma \in S_n$, а число $sign(\sigma)$ – четность перестановки σ.

Определение 10. Подпространство B n-лиевой алгебры A называется *n-лиевой подалгеброй*, если $[B, B, \ldots, B] \subseteq B$. Подпространство J n-лиевой алгебры A называется идеалом, если $[J, A, \ldots, A] \subseteq J$.

Если $[J, J, A, \ldots, A]=0$, то J называется *абелевым идеалом*. n-лиева алгебра A называется *простой*, если A не абелева (т.е. $[A, A, \ldots, A] \neq 0$) и она не имеет нетривиальных идеалов.

Для произвольного идеала J n-лиевой алгебры A определим, соответственно, нижний центральный и производный ряды:

$$J^1 = J, \quad J^{k+1} = [J^k, J, A, \ldots, A], \qquad k \geq 1,$$
$$J^{(1)} = J, \quad J^{(s+1)} = [J^{(s)}, J^{(s)}, A, \ldots, A], \ s \geq 1.$$

Определение 11. Идеал J n-лиевой алгебры A называется *разрешимым,* если существует натуральное число r такое, что $J^{(r)}=\{0\}$. В частности, алгебра A называется *разрешимой n-лиевой алгеброй*, если $A^{(r)}=\{0\}$ для некоторого $r \in \mathbb{N}$.

Аналогично определим понятие нильпотентности для идеала n-лиевой алгебры A.

Определение 12. Идеал J называется *нильпотентным,* если $J^r = \{0\}$ для некоторого $r \in \mathbb{N}$. В случае, когда $J = A$, то A называется нильпотентной n-лиевой алгеброй.

Приведем определение дифференцирования n-лиевой алгебры.

Определение 13. Линейное отображение D: $A \to A$ называется *дифференцированием n-лиевой алгебры* A, если для любых элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ выполняется условие

$$D([x_1, x_2, \ldots, x_n]) = \sum_{i=1}^{n} [x_1, \ldots, D(x_i), \ldots, x_n].$$

Множество всех дифференцирований n-лиевой алгебры A обозначается $Der(A)$ и они образуют подалгебру алгебры Ли $gl(A)$, которая называется алгеброй дифференцирований n-лиевой алгебры A.

Отображение $ad(x_2, \ldots, x_n) : A \to A$, определенное следующим образом

$$ad(x_2, \ldots, x_n)(y)=[y, x_2, x_3, \ldots, x_n], \quad \forall y\in A,$$

называется *правым умножением*. Нетрудно проверить, что $ad(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ является дифференцированием n-лиевой алгебры A. Множество всех конечных линейных комбинаций операторов правого умножения образует идеал алгебры Ли $Der(A)$ и обозначается $Ad(A)$. Элементы пространства $Ad(A)$ называются *внутренними дифференцированиями*.

Надо отметить, что для произвольных элементов $x_2, x_3, \ldots, x_n$, $y_2, y_3, \ldots, y_n \in A$ выполняется равенство

$$[ad(x_2, \ldots, x_n), ad(y_2, \ldots, y_n)]=\sum_{i=1}^{n} ad(y_2, \ldots, [x_2, \ldots, x_n, y_i], \ldots, y_n).$$

Пусть A – нильпотентная n-лиева алгебра. Для элементов $x_1, \ldots, x_{n-1} \in A \setminus A^2$ рассмотрим упорядоченную последовательность $C(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = (m_1, m_2, \ldots, m_s)$, состоящую из размеров жордановых блоков оператора $ad(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$.

Условие n-лиевости алгебры A влечет

$$C(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})=(m_1, m_2, \ldots, m_k, \underbrace{1,1,\ldots,1}_{n-1}),$$

где $m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_k \geq 1$.

На множестве последовательностей $C(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ определим лексикографический порядок.

Определение 14. Последовательность

$$C(A)= \max_{x_i \in A \setminus A^2} \{C(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$$

назовем характеристической последовательностью нильпотентной n-лиевой алгебры A.

Приведем определение филиформной n-лиевой алгебры.

Определение 15. n-Лиева алгебра A размерности m называется филиформной, если $dimA^i = m - n + 2 - i$ для $2 \leq i \leq m - n + 2$.

Пусть A – n-лиева алгебра и J – ее идеал.

$$J \text{ – нильпотентный идеал } \Leftrightarrow \; \exists\, k \in \mathbb{N} : [J^{k-1}, J, A, \ldots, A] = \{0\},$$

$$J \text{ – нильпотентная подалгебра } \Leftrightarrow \; \exists\, s \in \mathbb{N} : [J^{s-1}, J, J, \ldots, J] = \{0\}.$$

Следует отметить, что в случае алгебр Ли (n=2) из условия нильпотентности подалгебры, являющейся также идеалом, вытекает ее нильпотентность как идеала. Однако в случае n-лиевой алгебры при $n > 2$ данный факт, вообще говоря, не верен.

Определение 16. Пусть A – n-лиева алгебра ($n > 2$) и J – идеал алгебры A. Если J является нильпотентной подалгеброй, но не является нильпотентным идеалом, то J называется *гипонильпотентным идеалом* n-лиевой алгебры A.

Если J не является собственным подмножеством никакого другого гипонильпотентного идеала, то J называется максимальным гипонильпотентным идеалом A.

Во втором параграфе первой главы описана лиевая структура на пространстве дифференцирований полупростых алгебр Лейбница. Пусть L – полупростая алгебра Лейбница. В работе Ш.А.Аюпова, Б.А.Омирова, К.К.Кудайбергенова и других доказаны следующие леммы 1, 2 и теорема 1.

Лемма 1. Пусть $L = L_1 \oplus L_2$ – полупростая алгебра Лейбница, такая, что $[L_i, L_i] = L_i$. Тогда

$$Der(L) = Der(L_1) \oplus Der(L_2).$$

Здесь и далее в этом параграфе мы будем предполагать, что $L=S\dotplus I$ является неразложимой полупростой алгеброй Лейбница. Предположим, что

$$S=\bigoplus_{i=1}^{r} n_i S_i \tag{1}$$

– разложение в прямую сумму простых лиевых идеалов полупростой алгебры Ли S, где $S_i\not\simeq S_j$ при $i \neq j$, и

$$I=\bigoplus_{i=1}^{r+s} m_i I_i \tag{2}$$

– разложение в сумму простых S-модулей идеала I, где $I_i\not\simeq I_j$ при $i \neq j$.

Далее мы будем считать, что $S_i\simeq I_i$ – S-модули и $m_i \geq 0$ для $i\in\{1,2,\ldots,r\}$.

Введем обозначения

$$R_S=\{R_x: x\in S\},$$
$$Der(L)_{S,I}=\{d\in Der(L): d(S)\subset I, d(I)=0\},$$
$$Der(L)_{I,I}=\{d\in Der(L): d(I)\subset I, d(S)=0\}.$$

Лемма 2. Пусть $L=S\dotplus I$ – полупростая алгебра Лейбница. Тогда

$$Der(L)=R_S\dotplus Der(L)_{S,I}\dotplus Der(L)_{I,I}.$$

Теорема 1. Пусть $L=S\dotplus I$ – полупростая алгебра Лейбница с разложениями, приведенными в (1) и (2). Тогда

a) любое $d\in Der(L)_{S,I}$ однозначно определяется отображением из $\oplus_{i=1}^{r}\hom_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{n_i},\mathbb{C}^{m_i})$

b) любое $d\in Der(L)_{I,I}$ однозначно определяется отображением из $\oplus_{i=1}^{r+s}\hom_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{m_i},\mathbb{C}^{m_i})$;

c) $\dim Der(L)=dimS+\sum_{i=1}^{r}n_i m_i+\sum_{i=1}^{r+s}m_i^2.$

В этом абзаце с использованием приведенных выше результатов доказывается следующая теорема для полупростых алгебр Лейбница.

Теорема 2. Пусть $L=(\oplus_{i=1}^{r}n_iS_i)\dotplus(\oplus_{i=1}^{r+s}m_iI_i)$ – полупростая алгебра Лейбница. Тогда

$$Der(L)\cong(\oplus_{i=1}^{r}n_iS_i)\dotplus((\oplus_{i=1}^{r}(M_{n_i,m_i}\dotplus M_{m_i,m_i}))\oplus(\oplus_{i=r+1}^{r+s}M_{m_i,m_i}),$$

где произведения заданы следующим образом:

$[M_{m_i,m_i},M_{m_i,m_i}]$, $1 \leq i \leq r+s$ – коммутаторное произведение матриц;

$[M_{m_i,m_i},M_{m_j,m_j}]=0$, $1 \leq i \neq j \leq r+s$;

$[M_{n_i,m_i},M_{m_i,m_i}]$, $1 \leq i \leq r$ – коммутаторное произведение матриц;

$[M_{n_i,m_i}, M_{m_j,m_j}] = 0$, $1 \le i \ne j \le r$.

$[M_{n_i,m_i}, n_i S_i]$: для $A \in M_{n_i,m_i}$ и $x \in n_i S_i$ произведение $[A, x]$ отождествляется с коммутатором $[A, B]$, где $B \in M_{n_i,n_i}$ - матрица линейного оператора ad_z, соответствующего элементу *x* при изоморфизме $n_i S_i \cong Inder(n_i S_i)$;

$[M_{n_i,m_i}, n_j S_j] = 0$, $1 \le i \ne j \le r$;

$[M_{m_i,m_i}, n_j S_j] = 0$ для $r+1 \le i \le r+s$, $1 \le j \le r$.

Следствие 1. Пусть $L=G \oplus I$ – простая алгебра Лейбница. Тогда алгебра Ли ($Der(L)$,[-,-]) изоморфна одной из следующих двух алгебр:

i) если $dimG = dimI$, то $r=1$, $n_1=1$, $m_1=1$, $s=0$ и $Der(L) \cong G \oplus R_2$, где алгебра R_2 задана таблицей умножения $[x, y] = -[y, x] = x$;

ii) если $dimG \ne dimI$, то $r=1$, $n_1=1$, $m_1=0$, $s=1$, $m_2=1$ и $Der(L) \cong G \oplus \mathbb{C}$.

Во второй главе диссертации, названной **“Классификация разрешимых алгебр Лейбница с *k*-мерным абелевым нильрадикалом коразмерности *k*-1”**, приведена классификация разрешимых алгебр Лейбница с абелевым *k*-мерным нильрадикалом коразмерности (*k*–1) и доказано, что разрешимые алгебры Ли с нильрадикалом максимального ранга и дополняющим подпространством к нильрадикалу, имеющем размерность менее, чем ранг нильрадикала, допускают внешние дифференцирования.

В первом параграфе первой главы описаны все (2*k*–1)-мерные разрешимые алгебры Лейбница с *k*-мерным абелевым нильрадикалом.

$$R(a_k, k-1) = \begin{cases} [e_i, x_i] = e_i + \beta_{i,i} e_k, & 1 \le i \le k-1, \\ [e_i, x_j] = \beta_{i,j} e_k, & 1 \le i \le k, \ 1 \le j \le k-1, \quad i \ne j, \\ [x_i, e_i] = \alpha_i e_i + \gamma_{i,i} e_k, & 1 \le i \le k-1, \\ [x_i, e_j] = \gamma_{i,j} e_k, & 1 \le i \le k-1, \ 1 \le j \le k-1, \quad i \ne j, \\ [x_i, e_k] = \sum_{j=1}^{k} \nu_{i,j} e_j, & 1 \le i \le k-1, \\ [x_i, x_j] = \delta_{i,j} e_k, & 1 \le i, j \le k-1, \end{cases}$$

где $\alpha_i \in \{-1, 0\}$.

Теорема 3. Пусть *L* – алгебра Лейбница из множества $R(a_k, k-1)$ и пусть $\alpha_i = 0$ для $1 \le i \le k-1$. Тогда *L* изоморфна одной из следующих алгебр

$$L_1(\beta_i): [e_i, x_i] = e_i, \quad 1 \le i \le k-1, \quad [e_k, x_i] = \beta_i e_k, \quad 1 \le i \le k-1$$

$$L_2(\beta_i): \begin{cases} [e_i, x_i] = e_i, & 1 \le i \le k-1, \quad [e_k, x_i] = \beta_i e_k, \quad 1 \le i \le k-1, \\ [x_i, e_k] = -\beta_i e_k, & 1 \le i \le k-1, \end{cases}$$

$$L_3(\beta_i): \begin{cases} [e_1, x_1] = e_1 + \beta_1 e_k, \ [e_i, x_i] = e_i, & 2 \le i \le k-1, \\ [e_k, x_1] = e_k, \quad [e_1, x_i] = \beta_i e_k, & 2 \le i \le k-1, \end{cases}$$

$$L_4(\nu_i): \begin{cases} [e_i, x_i] = e_i, & 1 \le i \le k-1, \quad [e_k, x_1] = e_k, \\ [x_1, e_k] = -e_k, \quad [x_i, e_k] = \nu_i e_1, & 2 \le i \le k-1, \end{cases}$$

$$L_5(\delta_{i,j}):\begin{cases}[e_i,x_i]=e_i, & 1\le i\le k-1,\\ [x_i,x_j]=\delta_{i,j}e_k, & 1\le i,j\le k-1,\end{cases}\qquad \text{где параметры } \beta_i,\delta_{i,j},\nu_i\in\mathbb{C}.$$

Теорема 4. Пусть L – разрешимая алгебра Лейбница из множества $R(a_k, k–1)$, такая, что в таблице умножения алгебры L выполняются равенства $\alpha_i = –1$ для любого $1 \le i \le k–1$. Тогда L изоморфна одной из следующих алгебр:

$$L_6\left(\beta_j\right):\begin{cases}[e_i,x_i]=e_i, & 1\le i\le k-1,\\ [e_k,x_j]=\beta_j e_k, & 1\le j\le k-1,\\ [x_i,e_i]=-e_i, & 1\le i\le k-1,\end{cases}$$

$$L_7\left(\beta_j\right):\begin{cases}[e_i,x_i]=e_i, & 1\le i\le k-1, & [e_k,x_j]=\beta_j e_k, & 1\le j\le k-1,\\ [x_i,e_i]=-e_i, & 1\le i\le k-1, & [x_j,e_k]=-\beta_j e_k, & 1\le j\le k-1,\end{cases}$$

$$L_8\left(\gamma_j\right):\begin{cases}[e_i,x_i]=e_i, & 1\le i\le k-1, & [e_k,x_1]=e_k, & \\ [x_i,e_i]=-e_i, & 1\le i\le k-1, & [x_i,e_1]=\gamma_i e_k, & 2\le i\le k-1,\end{cases}$$

$$L_9(\beta_i):\begin{cases}[e_1,x_1]=e_1+\beta_1 e_k, & [e_i,x_i]=e_i, & 2\le i\le k-1,\\ [e_k,x_1]=e_k, & [e_1,x_i]=\beta_i e_k, & 2\le i\le k-1,\\ [x_1,e_1]=-e_1-\beta_1 e_k, & [x_i,e_i]=-e_i, & 2\le i\le k-1,\\ [x_1,e_k]=-e_k, & [x_i,e_1]=-\beta_i e_k, & 2\le i\le k-1,\end{cases}$$

$$L_{10}\left(\delta_{i,j}\right):\begin{cases}[e_i,x_i]=e_i, & 1\le i\le k-1,\\ [x_i,e_i]=-e_i, & 1\le i\le k-1,\\ [x_i,x_j]=\delta_{i,j}e_k, & 1\le i,j\le k-1,\end{cases}\qquad \text{где параметры } \beta_i,\delta_{i,j},\gamma_i\in\mathbb{C}.$$

Во втором параграфе второй главы классифицированы все $(2k–1)$-мерные разрешимые алгебры Лейбница с k-мерным абелевым нильрадикалом.

Теорема 5. Пусть L – разрешимая алгебра из класса $R(a_k, k–1)$ и пусть $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{t–1} = –1$ и $\alpha_t = \alpha_{t+1} = \ldots = \alpha_{k–1} = 0$. Тогда алгебра L изоморфна одной из следующих алгебр:

$$M_{1,t}(\beta):\begin{cases}[e_i,x_i]=e_i, & 1\le i\le k-1,\\ [e_k,x_i]=\beta_i e_k, & 1\le i\le k-1,\\ [x_i,e_i]=-e_i, & 1\le i\le t-1,\end{cases}\qquad M_{2,t}(\beta):\begin{cases}[e_i,x_i]=e_i, & 1\le i\le k-1,\\ [e_k,x_i]=\beta_i e_k, & 1\le i\le k-1,\\ [x_i,e_k]=-\beta_i e_k, & 1\le i\le k-1,\\ [x_i,e_i]=-e_i, & 1\le i\le t-1,\end{cases}$$

$$M_{3,t}(\beta):\begin{cases}[e_t,x_t]=e_t+\beta_t e_k, & \\ [e_i,x_i]=e_i, & 1\le i\le k-1,\\ [e_t,x_i]=\beta_i e_k, & 1\le i\le k-1,\\ [e_k,x_t]=e_k, & \\ [x_i,e_i]=-e_i, & 1\le i\le t-1,\end{cases}\quad M_{4,t}(\beta):\begin{cases}[e_1,x_1]=e_1+\beta_1 e_k, & \\ [e_i,x_i]=e_i, & 2\le i\le k-1,\\ [e_1,x_i]=\beta_i e_k, & 2\le i\le k-1,\\ [e_k,x_1]=e_k, & \\ [x_1,e_1]=-e_1-\beta_1 e_k, & \\ [x_i,e_i]=-e_i, & 2\le i\le t-1,\\ [x_i,e_1]=-\beta_i e_k, & 2\le i\le k-1,\\ [x_1,e_k]=-e_k, & \end{cases}$$

$$M_{5,t}(\gamma):\begin{cases}[e_i,x_i]=e_i, & 1\le i\le k-1,\\ [e_k,x_1]=e_k, & \\ [x_i,e_i]=-e_i, & 1\le i\le t-1,\\ [x_i,e_1]=\gamma_i e_k, & 2\le i\le k-1,\end{cases}\qquad M_{6,t}(\beta):\begin{cases}[e_i,x_i]=e_i, & 1\le i\le k-1,\\ [e_k,x_t]=e_k, & \\ [x_i,e_i]=-e_i, & 1\le i\le t-1,\\ [x_t,e_k]=-e_k, & \\ [x_i,e_k]=\beta_i e_t, & 1\le i\le k-1,\end{cases}$$

$$M_{7,t}(\delta_{i,j}):\begin{cases}[e_i,x_i]=e_i, & 1\le i\le k-1,\\ [x_i,e_i]=-e_i, & 1\le i\le k-1,\\ [x_i,x_j]=\delta_{i,j}e_k, & 1\le i,j\le k-1,\end{cases}$$

где $2\le t\le k-2$, $\beta=(\beta_1, \dots, \beta_{k-1})$, $\gamma=(\gamma_2,\dots,\gamma_{k-1})$ и где параметры $\beta_i, \delta_{i,j}, \gamma_i \in \mathbb{C}$.

Теорема 6. Пусть L – $(2k–1)$-мерная разрешимая алгебра Лейбница с таблицей умножения. Тогда L изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$M_{1,t}(\beta_1, \beta_2,\dots, \beta_{k-1})$, $1\le t\le k-1$;
$M_{2,t}(\beta_1, \beta_2, \beta_3,\dots, \beta_{t-1},0,\dots,0)$, $1\le t\le k-1$;
$M_{3,t}(1, \beta_2, \beta_3,\dots, \beta_{t-1}, \beta_t, \beta_{t+1}, \beta_{t+2},\dots, \beta_{k-1})$, $1\le t\le k-2$;
$M_{3,t}(0,0,0, \dots, 0,1, \beta_{t+1}, \beta_{t+2},\dots, \beta_{k-1})$, $1\le t\le k-2$;
$M_{3,t}(0,0,0, \dots, 0,0,1, \beta_{t+2},\dots, \beta_{k-1})$, $1\le t\le k-2$;
$M_{4,t}(1, \beta_2, \beta_3,\dots, \beta_{t-1}, \beta_t, \beta_{t+1}, \beta_{t+2},\dots, \beta_{k-1})$, $2\le t\le k-1$;
$M_{4,t}(0,1, \beta_3, \dots, \beta_{t-1}, \beta_t, \beta_{t+1}, \beta_{t+2},\dots, \beta_{k-1})$, $2\le t\le k-1$;
$M_{4,t}(0,0,0, \dots, 0,1, \beta_{t+1}, \beta_{t+2},\dots, \beta_{k-1})$, $2\le t\le k-1$;
$M_{5,t}(1, \gamma_3, \dots, \gamma_{t-1}, \gamma_t, \gamma_{t+1}, \gamma_{t+2},\dots, \gamma_{k-1})$, $2\le t\le k-1$;
$M_{5,t}(0,0,0, \dots, 0,1, \gamma_{t+1}, \gamma_{t+2},\dots, \gamma_{k-1})$, $2\le t\le k-1$;
$M_{7,t}(\delta_{i,j})$, $1\le t\le k-1$,

где, по крайней мере, один из не нулевых параметров $\delta_{i,j}$ можно считать равным единице.

В третьем параграфе второй главы доказывается, что среди разрешимых расширений нильпотентных алгебр максимального ранга только максимальные расширения не имеют внешних дифференцирований.

Пусть N_{max}={нильпотентная алгебра N | и существует разрешимая алгебра Ли R с нильрадикалом N, такая, что $\operatorname{codim} N = \dim N / N^2$ }.

Теорема 7. Пусть $R=N\oplus Q'$ – разрешимая алгебра Ли, такая, что $N\in N_{max}$ и $\dim Q' < \dim N/N^2$. Тогда R допускает внешнее дифференцирование.

В третьей главе диссертации, названной **“Разрешимые n-лиевые алгебры максимальной размерности с максимальным гипонильпотентным филиформным идеалом $NGF_{m,n}$”**, предложено определение естественным образом градуированных n-лиевых алгебр и описаны естественным образом градуированные филиформные n-лиевые алгебры. Кроме того, описаны максимальные разрешимые n-лиевые алгебры с заданным максимальным гипонильпотентным идеалом.

Предложение 1. n-Лиева алгебра размерности m является филиформной тогда и только тогда, когда ее характеристическая последовательность равна $(m-n+1,\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n-1})$.

Лемма 3. Пусть N – n-лиева алгебра. Тогда для любых $i_1,\ldots,i_k \in N$, $2\le k \le n$ верно следующее вложение:

$$[N^{i_1},N^{i_2},\ldots,N^{i_k},N,\ldots,N]\subseteq N^{i_1+i_2+\ldots+i_k-k+2}.$$

Следствие 2. Пусть N – n-лиева алгебра. Тогда

- $[N^{i_1},N^{i_2},\ldots,N^{i_n}]\subseteq N^{i_1+i_2+\ldots+i_n-n+2}$,
- $[N^{i_1},N^{i_2},\ldots,N^{i_n}]\subseteq [N^{i_1+i_2+\ldots+i_n-n+1},N,N,\ldots,N]$.

Для n-лиевой алгебры N положим

$$N_i:=N^{i}/N^{i+1},\ 1\le i\le s-1,\ grN:=N_1\oplus N_2\oplus\cdots\oplus N_{s-1},$$

где $N^{s-1}\ne 0$ и $N^s=0$.

Определение 17. n-Лиева алгебра N называется естественным образом градуированной алгеброй, если $grN\cong N$.

Теорема 8. Пусть N естественным образом градуированная m-мерная филиформная n-лиева алгебра. Тогда в N существует такой базис $\{e_1,\ldots,e_m\}$, что таблица умножения в этом базисе имеет вид:

$$NGF_{m,n}(\beta_{i,j}):\begin{cases}[e_1,e_2,\ldots,e_{n-1},e_j]=e_{j+1}, & n\le j\le m-1,\\ [e_1,\ldots,\hat{e}_i,\ldots,e_n,e_{n+j}]=\beta_{i,n+j}e_{n+j+1}, & 1\le i\le n-1,\quad 3\le j\le m-n,\\ [e_1,\ldots,\hat{e}_i,\ldots,\hat{e}_j,\ldots,e_n,e_{n+p},e_{n+q}]=\gamma_{i,j}^{p,q}e_{n+p+q+1}, & 1\le i<j\le n,\\ [e_1,\ldots,\hat{e}_{i_1},\ldots,\hat{e}_{i_k},\ldots,e_n,e_{n+j_1},\ldots,e_{n+j_k}]=\gamma_{i_1,i_2,\ldots,i_k}^{j_1,j_2,\ldots,j_k}e_{n+j_1+j_2+\ldots+j_k+1}, & \\ [e_{n+j_1},e_{n+j_2},\ldots,e_{n+j_n}]=\delta_{j_1,j_2,\ldots,j_n}e_{n+j_1+j_2+\ldots+j_n+1}, & \end{cases}$$

где

$$\begin{cases}\gamma_{i,j}^{1,q}=\beta_{i,n+q}\beta_{j,n+q+1}-\beta_{j,n+q}\beta_{i,n+q+1}, & 1\le i<j\le n-1,\quad 2\le q\le m-n-2,\\ \gamma_{i,n}^{1,q}=\beta_{i,n+q}-\beta_{i,n+q+1}, & 1\le i\le n-1,\quad 2\le q\le m-n-2,\\ \gamma_{i,j}^{p,q}=\gamma_{i,j}^{p-1,q}+\beta_{i,n+q}\gamma_{j,n}^{p-1,q+1}-\beta_{j,n+q}\gamma_{i,n}^{p-1,q+1}, & 1\le i<j\le n-1,\quad 1\le p<q\le m-n-p-1,\\ \gamma_{i,n}^{p,q}=\gamma_{i,n}^{p-1,q}-\gamma_{i,n}^{p-1,q+1}, & 1\le i\le n-1,\quad 1\le p<q\le m-n-p-1,\end{cases}$$

$$\gamma_{i_1,i_2,\ldots,i_k}^{j_1,j_2,\ldots,j_k}=\sum_{t=1}^{k}(-1)^{k-1}\gamma_{i_1,\ldots,\hat{i}_t,\ldots,i_k}^{j_2,\ldots,j_k}\gamma_{i_t,n}^{n+j_1-1,n+j_2+\ldots+j_k+1},$$

при $1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n$, $1\le j_1<j_2<\ldots<j_k\le m-n-1$, $1\le k\le n-1$,

$$\delta_{j_1,j_2,\dots,j_n} = \sum_{t=1}^{n-1}(-1)^{n+t}\gamma_{1,\dots,\hat{t},\dots,n}^{j_2,\dots,j_n}\gamma_{t,n}^{n+j_1-1,n+j_2+\dots+j_n+1} + \delta_{j_1-1,j_2,\dots,j_n}.$$

при $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_n \le m - n - j_1 - j_2 - \dots - j_{n-1} - 1$.

Во втором параграфе третьей главы классифицированы разрешимые n-лиевые алгебры с максимальным гипонильпотентным идеалом $NGF_{m,n}$.

Теорема 9. Пусть R – $(m+2)$-мерная разрешимая n-лиева алгебра с максимальным гипонильпотентным идеалом $NGF_{m,n}$ (т.е. $\dim Q=2$). Тогда в R существует такой базис $\{x, y, e_1, \dots, e_m\}$, что таблица умножения R в этом базисе имеет следующий вид:

$$R(NGF_{m,n}):\begin{cases}[e_1,e_2\dots,e_{n-1},e_i]=e_{i+1}, & n\le i\le m-1,\\ [x,e_1,e_2,\dots,e_{n-2},e_{n-1}]=e_{n-1}, & \\ [x,e_1,e_2,\dots,e_{n-2},e_i]=(i-n)e_i, & n+1\le i\le m,\\ [y,e_1,e_2,\dots,e_{n-2},e_i]=e_i, & n\le i\le m,\end{cases}$$

где все остальные n-арные произведения базисных элементов равны нулю.

Теорема 10. Пусть R – разрешимая $(m+k)$-мерная n-лиева алгебра с максимальным гипонильпотентным идеалом $NGF_{m,n}$. Тогда $k \le 2$.

В третьем параграфе третьей главы описаны дифференцирования разрешимых n-лиевых алгебр с максимальным гипонильпотентным идеалом $NGF_{m,n}$.

Теорема 11. Следующие отображения образуют базис пространства дифференцирований $(m+2)$-мерной разрешимой n-лиевой алгебры $R(NGF_{m,n})$:

$$Der(R(\mathcal{NGF}_{m,n})):\begin{cases}d_{i,j}(e_i)=e_j, & 1\le i\le n-1, \quad 1\le j\le m,\\ d_{i,i}(e_k)=(k-n)e_k, & 1\le i\le n-1, \quad n+1\le k\le m,\\ d_{i,i}(x)=-x, & d_{i,i}(y)=-y, \quad 1\le i\le n-2,\\ d_{n-1,j+1}(x)=(j-n)e_j, & n+1\le j\le m-1,\\ d_{n-1,j+1}(y)=(-1)^n e_j, & n\le j\le m-1,\\ d_{i,m+1}(e_i)=x, & d_{i,m+2}(e_i)=y, \quad 1\le i\le n-2,\\ d_{n,n}(e_k)=e_k, & n\le k\le m, \quad d_{n,n+1}(e_k)=e_{k+1}, \quad n\le k\le m-1,\\ d_{n,n+1}(x)=(-1)^{n-1}e_{n-1} & n\le k\le m-1, \quad d_{n+1}(x)=e_m, \quad d_{n+2}(y)=e_m.\end{cases}$$

Из теоремы 11 нетрудно выделить внутренние дифференцирования разрешимой n-лиевой алгебры $R(NGF_{m,n})$. В частности, верно

Следствие 3. Следующие дифференцирования образуют базис пространства внутренних дифференцирований алгебры $Der(R(NGF_{m,n}))$

$$Ad(R(NGF_{m,n})):\begin{cases} d_{i,j}(e_i)=e_j, & 1\le i\le n-1, \quad n-1\le j\le m,\\ d_{n-1,n-1}(e_k)=(k-n)e_k, & n+1\le k\le m,\\ d_{n-1,j+1}(x)=(j-n)e_j, & n+1\le j\le m-1,\\ d_{n-1,j+1}(y)=(-1)^n e_j, & n\le j\le m-1,\\ d_{n,n}(e_k)=e_k, & n\le k\le m,\\ d_{n,n+1}(e_k)=e_{k+1}, & n\le k\le m-1,\\ d_{n,n+1}(x)=(-1)^{n-1}e_{n-1}, & n\le k\le m-1,\\ d_{n+1}(x)=e_m, & d_{n+2}(y)=e_m. \end{cases}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация посвящена описанию лейбницевых расширений абелевых алгебр и n-лиевых разрешимых алгебр с заданным гипонильпотентным идеалом

Основные результаты исследования состоят в следующем:

1. Описана лиева структура на пространстве дифференцирований полупростых алгебр Лейбница.
2. Классификацированы разрешимые алгебры Лейбница с абелевым k-мерным нильрадикалом коразмерности (k–1).
3. Доказано, что разрешимые алгебры Ли с нильрадикалом максимального ранга и дополняющим подпространством к нильрадикалу, имеющем размерность менее, чем ранг, нильрадикала, допускают внешние дифференцирования.
4. Введено понятие естественным образом градуированных n-лиевых алгебр и получено описание естественным образом градуированных филиформных n-лиевых алгебр.
5. Описаны дифференцирования n-лиевой алгебры, имеющей наиболее простую структуру среди полученных алгебр.
6. Классифицированы разрешимые n-лиевые алгебры, максимальный гипонильпотентный идеал которых является естественным образом градуированная филиформная n-лиева алгебра с простейшей структурой.
7. Описаны дифференцирования таких разрешимых n-лиевых алгебр.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V.I. ROMANOVSKIY

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

GAYBULLAEV RUSTAMJON KAKHRAMONOVICH

DESCRIPTIONS OF LEIBNIZ EXTENSIONS OF ABELIAN ALGEBRAS AND *n*-LIE SOLVABLE ALGEBRAS WITH A GIVEN HYPO-NILPOTENT IDEAL

01.01.06-Algebra

ABSTRACT OF THESIS OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT-2022

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2021.2.PhD/FM349.

Dissertation has been prepared at National university of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, English, Russian (summary)) on the website website http://kengash.mathinst.uz and in the website of “ZiyoNet” Information and educational portal http://www.ziyonet.uz.

Scientific supervisor:	**Omirov Bakhrom Abdazovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
Official opponents:	**Eshmatov Farkhod Khasanovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Senior researcher
	Kurbanbaev Tuuelbay Kadirbaevich Candidate of Physical and Mathematical Sciences, docent
Leading organization:	**Andijan State University**

Defense will take place “_____”_________ 2022 at _____at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky. (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

Dissertation is possible to review in Information-resource center at Institute of Mathematics named alter V.I.Romanovsky (is registered №________). (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871) 207-91-40).

Abstract of dissertation sent out on «___» _________ 2022 year
(Mailing report № __ on «___» ________ 2022 year)

U.A.Rozikov
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., Professor

J.K.Adashev
Scientific secretary of Scientific Councilon award of scientific degrees, D.F.-M.S., Senior researcher

A.R.Hayotov
Deputy-Chairman of Scientific seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., Professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is to construct extensions of Leibniz algebras with k-dimensional Abelian nilradical of codimension (k-1) and to describe solvable n-Lie algebras with a given hypo-nilpotent ideal.

The objects of the researchwork are solvable Leibniz algebras with Abelian nilradical, the derivations of Lie algebras with the nilradical of maximal rank and solvable n-Lie algebras.

Scientific novelty of the research work consists of the following:

solvable Leibniz algebras with k-dimensional Abelian nilradical of codimension (k-1) are described;

it is proved that solvable Lie algebras with a nilradical of maximal rank and the dimension of the complementary subspace to the nilradical less than the rank of the nilradical admit outer derivations.

a description of naturally graded filiform n-Lie algebras is obtained;

solvable n-Lie algebras with maximal hypo-nilpotent ideal are described;

Implementation of the research results. The obtained results of descriptions of Leibniz extensions of abelian algebras and n-Lie solvable algebras with a given hypo-nilpotent ideal were used in the implementation of the tasks of the projects:

results on the classifications of solvable Leibniz algebras with k-dimensional Abelian nilradical of codimension (k-1) were used to describe the solvable Leibniz algebras with maximal rank and the nilradical with the co-dimension is less than the rank of the nilradical in a foreign project “Generalized derivations of some classes of algebras and their applications”, Project ID: FRGS/1/2016/STG06/UPM/03/2 at Universiti Putra Malaysia (reference from November 22, 2021, Malaysia). The scientific results allowed to obtain descriptions of the algebras of derivations of some classes of finite-dimensional non-associative algebras;

results on the descriptions of derivations of solvable n-Lie algebras with maximal filiform hypo-nilpotent ideal were used to describe some nilpotent n-Leibniz algebras in the project “Homology, Homotopy and Catagorical invariants in groups and nonasociative algebras”, No. MTM2016-79661-P at University of Santiago de Compostela (reference from November 24, 2021, Spain). The scientific results allowed to check validity of some conjectures regarding solvable (nilpotent) n-Leibniz algebras and construct new examples of solvable (nilpotent) n-Leibniz algebras.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the dissertationis 85 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙҲАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (1 часть; part 1)

1. K. K. Abdurasulov, R. K. Gaybullaev, B. A. Omirov, A. Kh. Khudoyberdiyev. Maximal solvable extension of naturally graded filiform *n*-Lie algebras // Siberian Mathematical Journal. – 2022, – Vol. 63, – №1. – P. 1-18. (3. Scopus IF=0.778).
2. Р.К. Гайбуллаев. Максимальное 4-лиевое разрешимое расширение филиформных алгебр // Бюллетень Института математики. – 2021, –Vol. 4, №4. – С.61-69. (01.00.00; № 17).
3. R.K. Gaybullaev, A. Kh. Khudoyberdiyev, K. Pohl. Classification of solvable Leibniz algebras with abelian nilradical and *k*–1 dimensional extension // Communications in Algebra – 2020. – 48. – 7. P. 3061-3078. (3. Scopus IF=0.554).
4. R.K. Gaybullaev. Outer derivations of complex solvable Lie algebras with the nilradical of maximal rank // Uzbek Mathematical Journal – 2020. – 4. P. 40-43. (01.00.00; № 6).
5. K.K. Abdurasulov, R.K. Gaybullaev. Lie structure on derivations of semi-simple Leibniz algebras // Uzbek Mathematical Journal – 2018. – 4. – P. 4-12. (01.00.00; № 6).

II бўлим (2 часть; part 2)

6. Гайбуллаев Р.К., Омиров Б.А., Норматов Э.П. Локальные автоморфизмы простой алгебры Лейбница $L = sl_2 \dotplus I$ // Тезисы докладов научной конференции с участием зарубежных ученых “Актуальные проблемы динамических систем и их приложения”, 1-3 мая 2017 г. (Ташкент), С. 242-243.
7. Гайбуллаев Р.К., Норматов Э.П. О свойстве автоморфизмов простой алгебры Лейбница $L = sl_2 \dotplus I\ (\dim I = 3)$ // Тезисы докладов научной конференции с участием зарубежных ученых “Проблемы современной топологии и её приложения” 11-12 мая 2017 г. (Ташкент), С. 193-194.
8. Khudoyberdiyev A.Kh., Gaybullaev R.K., Pohl K. On description of solvable Leibniz algebras with abelian nilradical // Problems of modern topology and its applications. 11-12 September 2018, Tashkent, P. 67-68.
9. Omirov B.A., Gaybullaev R.K. Lie structure on $Der(sl_2{+}I)$ // Abctracts of the VI international scientific conference “Modern problems of the applied mathematics and information technology-Al-Khorezmiy 2018 ”, NUUz, Tashkent, September 13-15, 2018, P. 146-147.
10. Khudoyberdiyev A.Kh., Gaybullaev R.K., The description of 12-dimensional solvable Lie algebras whose nilradical has characteristic sequence $C(L)$ = (6,3,1) // Abstracts of the Joint International Conference STEMM Science -

Technology-Education-Mathematics-Medicine, May 13-17, 2019, Tashkent, P. 57-59.
11. Abdurasulov K.K., Gaybullaev R.K. Outer derivations of some Lie algebras // Abstracts of the Joint International Conference Modern problems of geometry and topology and its applications. 21-23 November 2019, Tashkent, Uzbekistan, P. 15-16.
12. Khudoyberdiyev A.Kh., Gaybullaev R.K., Pohl K. Classification of solvable Leibniz algebras with abelian nilradical // “Математика, физика ва ахборот технологияларининг долзарб муаммолари” мавзусидаги Республика миқёсидаги онлайн илмий-амалий анжумани тезислар тўплами, 15 апрель 2020 йил, Бухоро. 74-76 б.
13. Гайбуллаев Р.К. , Кунградбаева А.К. Описание разрешимых 4-лиевых алгебр // “Глобаллашув даврида математика ва амалий математиканинг долзарб масалалари” мавзусидаги Республика миқёсида илмий-амалий анжуман, 1-2 июн 2021 йил. Тошкент. 30-32 б.
14. Гайбуллаев Р.К. Разрешимые *n*-лиевые алгебры с максимальным гипо-нильпотентным филиформным идеалом $NGF_{m,n}$ // Сарымсаковские чтения, Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых, 16-18 сентября 2021 г. Ташкент. С. 43-46.
15. Gaybullaev R.K. Abstracts of the international scientific conference of "Contemporary mathematics and its applications", November 19-21, 2021, Tashkent. P. 59-61.

Автореферат “Ўзбекистон математика журнали” таҳририятидан 2022 йил 1 мартда таҳрирдан ўтказилиб, ўзбек, рус, ва инглиз тилларидаги матнлар ўзаро мувофиқлаштирилди.

Босмахона лицензияси:

9338

Бичими: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» гарнитураси.
Рақамли босма усулда босилди.
Шартли босма табоғи: 3,5. Адади 100. Буюртма № 15/22.

Гувоҳнома № 851684.
«Tipograff» МЧЖ босмахонасида чоп этилган.
Босмахона манзили: 100011, Тошкент ш., Беруний кўчаси, 83-уй.