В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

НАРКУЗИЕВ БОБОМУРАД АБДУВАКИЛОВИЧ

ЭВОЛЮЦИОН АЛГЕБРАЛАР ВА УЛАРНИНГ УЧ ЎЛЧАМЛИ ЗАНЖИРЛАРИ

01.01.06 – Алгебра

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2022

УДК: 512.554.1

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Наркузиев Бобомурад Абдувакилович
Эволюцион алгебралар ва уларнинг уч ўлчамли занжирлари..…….... 3

Narkuziyev Bobomurad Abduvakilovich
Evolution algebras and their three-dimensional chains……. 21

Наркузиев Бобомурад Абдувакилович
Эволюционные алгебры и их трехмерные цепи……... 37

Эълон қилинган ишлар рўйхати
List of published works
Список опубликованных работ……..…….…… 40

В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

НАРКУЗИЕВ БОБОМУРАД АБДУВАКИЛОВИЧ

ЭВОЛЮЦИОН АЛГЕБРАЛАР ВА УЛАРНИНГ УЧ ЎЛЧАМЛИ ЗАНЖИРЛАРИ

01.01.06 – Алгебра

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2022

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2022.1.PhD/FM672 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация В.И.Романовский номидаги Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, инглиз, рус(резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://kengash.mathinst.uz) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида (http://www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Розиков Уткир Абдуллоевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Омиров Бахром Абдазович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Муродов Шерзод Нормонович физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD)
Етакчи ташкилот:	**Самарқанд давлат университети**

Диссертация ҳимояси В.И.Романовский номидаги Математика Институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2022 йил « 5 » июл соат 17:00 даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Диссертация билан В.И. Романовский номидаги Математика Институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (141-рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40).

Диссертация автореферати 2022 йил « 17 » июн куни тарқатилди.
(2022 йил « 17 » июндаги 2-рақамли реестр баённомаси).

А.Азамов
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш раис ўринбосари,
ф.-м.ф.д., академик

Ж.К.Адашев
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш илмий котиби,
ф.-м.ф.д., катта илмий ходим

Б.А.Омиров
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш ҳузуридаги илмий семинар
раиси ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурияти. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий ва амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда ноассоциатив алгебралар ва алгебраик системалар назариясидан фойдаланиб баъзи алгебраларни тадқиқ қилишга келтирилади. Математиклар ва генетиклар бир пайтлар ноассоциатив алгебраларни Мендел генетикасини ўрганишда қўллашган. Мендел биринчи бўлиб ўзининг генетик қонунларини ифодалаш учун алгебраик жиҳатдан жуда мос бўлган белгилардан фойдаланган. Улар кейинчалик бир қанча бошқа муаллифлар томонидан «Мендел алгебралари» номини олди. Мендел генетикаси орқали математикага янги соҳалар умумий генетик алгебралар ва эволюцион алгебралар тушунчалари кириб келди. Бу алгебралар умумий ҳолда коммутатив аммо ассоциатив эмас, бундан ташқари улар бирорта яхши ўрганилган Ли, Жордан ёки алтернатив алгебралар каби ноассоциатив алгебралар синфига тегишли эмас.

Ҳозирги вақтда замонавий алгебранинг муҳим йўналишларидан бири бўлган эволюцион алгебралар назариясини тадқиқ қилиш муҳим аҳамиятга эга. Бу соҳада кўплаб математиклар томонидан илмий изланишлар олиб борилди ва янги йўналишлар очилди. Эволюцион алгебралар математиканинг кўплаб соҳалари билан алоқаларга эга. Бу алгебралар бир қанча математик муаммоларни янгича ҳал қилиш имконини беради. Эволюция қонунларини математик ўрганиш орқали популяциянинг бирор бир турининг ёки унинг хусусиятининг ривожланишига ёки бутунлай йўқолиб кетишига асосли башорат беришимиз мумкин. Ҳозирги кунда керакли хусусиятларга эга бўлган турни кўпайтириш ва унинг фойдали хусусиятларини ривожлантириш ҳам илмий, ҳам иқтисодий муҳим муаммолардан биридир. Бу борада: эволюцион алгебралар хоссаларини ўрганиш ва уларнинг занжирларини таснифлаш долзарб илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда сўнгги йилларда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий татбиқига эга бўлган математика, физика, геология ва биология фанларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, популяцион биология ва генетикада учрайдиган асосий объектлардан бири бўлган эволюцион алгебралар назариясини ривожлантиришга алоҳида эътибор қаратилди. Эволюцион алгебралар ва уларнинг занжирларини ўрганиш борасида салмоқли натижаларга эришилди. «Алгебра ва функционал анализ» фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалари ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Қарор ижросини таъминлашда эволюцион алгебралар назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамаси 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори.

ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича харакатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив–ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Умумий генетик алгебра бу биология ва математиканинг ўзаро таъсири натижасидир. Бу йўналишдаги кўплаб натижаларни Ю.И.Любичнинг асарларидан топиш мумкин. У томонидан биринчи марта 1992 йилда эволюцион алгебралар синфи (evolutionary algebras номи билан) таклиф қилинган. 2006 йилда Ж.П.Тиан ўзининг монографиясида эволюцион алгебранинг янги турини тақдим етди. У ўзиниг илмий ишларида бу алгебралар назариясининг асосларини яратди. Шундан сўнг эволюцион алгебраларга қизиқиш кескин ортиб кетди. Эволюцион алгебра тушунчаси алгебралар ва динамик системалар орасида ётади. Алгебраик жиҳатдан эволюцион алгебралар ноассоциатив Банах алгебралари бўлса, динамик жиҳатдан дискрет динамик системани ифодалайди.

2010 йилда Ж.М.Касас, М.Ладра ва У.А.Розиковлар томонидан илк бор эволюцион алгебраларнинг занжири тушунчаси киритилди ва бундай занжирларнинг кенг синфи қурилди. Бу занжир ҳар бир берилган вақт моментида эволюцион алгебрани ҳосил қиладиган динамик системадир. Бундай занжирлар Б.А.Омиров, К.М.Туленбаев, М.Ладра, Ш.Н.Муродов, М.В.Веласко, А.Н.Имомкуловлар томонидан ҳам қурилган ва уларнинг баъзи хоссалари ўрганилган. Шунингдек, 2016 йилда М.Ладра ва У.А.Розиковлар томонидан эволюцион алгебраларнинг занжири тушунчасининг умумлашмаси сифатида чекли ўлчамли алгебралар оқими тушунчаси киритилди. Ушбу соҳадаги натижалар ҳақида умумий маълумотларни У.А.Розиковнинг «Популяция динамикаси» номли китобидан топишимиз мумкин.

Ё.К.Касадо, М.С.Молина ва М.В.Веласколар томонидан уч ўлчамли эволюцион алгебралар таснифланган. Улар характеристикаси иккидан фарқ қилувчи ва ихтиёрий $x^n - k$, n = 2, 3, 7 ва $k \in \mathbb{K}$ кўринишдаги кўпҳад илдизга

эга бўладиган $\mathbb{K}$ майдон устида аниқланган E эволюцион алгебраларни ўрганган ва бундай алгебралар изоморфизм аниқлигида жами 116 та эканлигини исботлашган. Ш.Н.Муродовнинг ишларида эволюцион алгебраларнинг икки ўлчамли занжирлардаги таснифлари ўрганилган. Аммо бу каби тасниф уч ўлчамли эволюцион алгебралар занжирларида ҳали қаралмаган эди. Чекли ўлчамли алгебраларни эволюцион алгебралар билан яқинлаштириш масаласи А.Н.Имомкулов томонидан ўрганилган. Шунингдек, у томонидан квадратининг ўлчами бирга тенг бўлган уч ўлчамли ҳақиқий эволюцион алгебралар таснифи топилган ва жуфт-жуфти билан ўзаро изоморф бўлмаган ўн иккита алгебра мавжудлиги кўрсатилган. Ўрин алмаштиришларга мос эволюцион алгебраларни ўрганиш ғояси илк бор А.С.Жумадилдаев томонидан илгари сурилди. Шундан кейин бу йўналишга алоқадор бир нечта илмий мақолалар чоп этилди. Бу мақолаларда фақат битта ўрин алмаштиришларга мос эволюцион алгебралар ва уларнинг занжирлари ўрганилган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти В.И.Романовский номидаги Математика институтининг ОТ-F4-82 + ОТ-F4-87 «Операторли ва ноассоциатив алгебралар локал дифференциаллашлари ва автоморфизмлари, чизиқли бўлмаган динамик системаларда фазали ўтиш ва тартибсизлик» + «Евклид ва псевдо-Евклид фазоларидаги эгри чизиқлар ва уларнинг механикада қўлланилиши» (2017-2019 йиллар) мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади ўрин алмаштиришларга мос эволюцион алгебраларни қуриш ва маълум бўлган ҳақиқий эволюцион алгебраларни уч ўлчамли занжирларда таснифини беришдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари қуйидагилардан иборат:

структуравий ўзгармаслар матрицасининг ранги $n-2$ га тенг бўлган n ўлчамли эволюцион алгебранинг ягона абсолют нильпотент элементга эга бўлишининг зарурий ва етарли шартини топиш;

ўрин алмаштиришларга мос эволюцион алгебраларнинг абсолют нильпотент ва идемпотент элементлари тўпламини топиш;

эволюцион алгебраларининг уч ўлчамли занжирлардаги таснифини бериш;

изоморфизм аниқлигида барча маълум бўлган алгебраларни ўз ичига олган занжирни топиш.

Тадқиқотнинг объекти: чекли ўлчамли эволюцион алгебралар, ўрин алмаштиришларга мос эволюцион алгебралар, эволюцион алгебраларининг уч ўлчамли занжирлари.

Тадқиқотнинг предмети: чекли ўлчамли эволюцион алгебраларининг абсолют нильпотен элементлари, ўрин алмаштиришларга мос эволюцион алгебраларнинг абсолют нильпотент ва идемпотент элементлари, эволюцион алгебраларнинг уч ўлчамли занжирлардаги таснифи.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертацияда ассоциатив бўлмаган алгебралар назарияси, ночизиқли динамик системалар назарияси, структуравий ўзгармаслар ҳамда классификациялаш усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

структуравий ўзгармаслар матрицасининг ранги $n-2$ га тенг бўлган n ўлчамли эволюцион алгебранинг ягона абсолют нильпотент элементга эга бўлишининг зарурий ва етарли шарти топилган;

битта ва иккита ўрин алмаштиришларга мос эволюцион алгебраларнинг барик бўлиш мезонлари топилган ва берилган ўрин алмаштиришга мос эволюцион алгебранинг абсолют нильпотент ва идемпотент элементларга эга эканлиги исботланган;

иккита ўрин алмаштиришларга мос эволюцион алгебранинг абсолют нильпотент элементлари ва икки ўлчамли ҳол учун идемпотент элементларининг тўлиқ таҳлили ҳамда бу алгебранинг баъзи изоморфизмлари топилган;

уч ўлчамли ҳақиқий эволюцион алгебраларнинг бир нечта занжирлардаги таснифлари, жумладан квадратининг ўлчами бирга тенг бўлган барча ҳақиқий эволюцион алгебраларни ўз ичига олган занжирдаги эволюцион алгебралар таснифланган.

Тадқиқотнинг амалий натижаси. Диссертацияда олинган натижаларни ва фойдаланилган методларни олий ўқув юртларининг магистрантларини ва таянч докторантларини махсус курсларда ўқитишда қўллаш мумкин. Шунингдек, эволюцион алгебралар занжирларида олинган тасниф бизга биологик ҳамда физик жараёнлар эволюциясини ва занжирлардаги алгебраларнинг динамикасини текшириш имконини беради.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги чизиқли алгебра, абстракт алгебра, ночизиқли анализ ва эволюцион алгебралар усуллари ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган. Олинган натижаларнинг исботлари математик жиҳатдан тўғри.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти шундан иборатки, ишда олинган натижалардан эволюцион алгебралар ва уларнинг занжирларини тадқиқ қилишда, хусусан, диссертацияда келтирилган усул ва методларни қўллаб, барча эволюцион алгебралар занжирларини таснифлашда фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти шундан иборатки, олинган натижалардан эволюцион алгебраларининг занжирлари ёрдамида ифодаланадиган биологик ва физик жараёнлар динамикаси ва эволюциясини таснифлашда фойдаланиш мумкин.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Эволюцион алгебралар ва уларнинг уч ўлчамли занжирлари бўйича олинган натижалар асосида:

ўрин алмаштиришларга мос эволюцион алгебралар ва эволюцион алгебралар занжирларидаги таснифлар ҳақидаги натижалардан МТМ2016-

76327-С3-2-Р рақамли хорижий лойиҳада эволюцион алгебраларни таснифлашда фойдаланилган (Гранада университетининг 2022 йил 20 апрелдаги маълумотномаси, Испания). Илмий натижаларнинг қўлланилиши эволюцион алгебраларнинг занжирларини таснифлаш имконини берган;

эволюцион алгебраларнинг абсолют нильпотент, идемпотент элементлари ва эволюцион алгебралар занжирларидаги таснифларидан G00003447 рақамли «Квант генетик алгебралар ва уларнинг татбиқлари» мавзусидаги хорижий грант лойиҳасида квадратик стохастик операторларнинг динамикасини текширишда фойдаланилган (Бирлашган Араб Амирлиги университетининг 2022 йил 26 майдаги маълумотномаси, БАА). Илмий натижанинг қўлланилиши стандарт симплексда аниқланган бир нечта квадратик стохастик операторлар томонидан яратилган динамик системаларнинг эргодик хоссаларини текшириш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот асосий натижалари 4 та халқаро ва 5 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 14 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 5 та илмий мақола, жумладан, 2 таси хорижий ва 3 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисм, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат. Диссертациянинг ҳажми 113 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмда диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ҳамда диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг «**Эволюцион алгебралар ва уларнинг занжирлари ҳақида асосий фактлар**» деб номланувчи биринчи бобида диссертацияда қўлланиладиган эволюцион алгебралар ва уларнинг занжирлари ҳақида керакли асосий тушунчалар келтирилган ва чекли ўлчамли эволюцион алгебранинг ягона абсолют нильпотент элементга эга бўлиши ҳақидаги натижалар берилган.

1-таъриф. (*E*,·) *бирор* $\mathbb{F}$ *майдон устидаги алгебра бўлсин. Агар*

$$e_i e_j = \begin{cases} 0, & \text{агар } i \neq j \\ \sum_k a_{ik} e_k, & \text{агар } i = j, \end{cases}$$

шартни қаноатлантирувчи $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ *базис мажуд бўлса у ҳолда бу алгебрага эволюцион алгебра дейилади. Бу базисга эса табиий базис дейилади.*

$\mathcal{M} = (a_{ij})$ орқали E эволюцион алгебранинг структуравий ўзгармаслар матрицасини белгилаймиз.

Эволюцион алгебралар биринчи марта Ж.П.Тиан томонидан киритилган. У бу алгебраларни генетика эволюцияси қонунлари асосида яратди.

Ж.М.Касас, М.Ладра ва У.А.Розиковлар томонидан эволюцион алгебралар занжири (ЭАЗ) тушунчаси киритилди. У қуйидагича аниқланган: $\mathbb{R}$ майдон устида аниқланган n ўлчамли эволюцион алгебраларнинг $e_1, e_2, \ldots, e_n$ базис ва ушбу $e_i e_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{[s,t]} e_j, \quad i = 1, \ldots, n; \; e_i e_j = 0, \; i \neq j$ кўпайтириш жадвали билан берилган $\{E^{[s,t]} : s, t \in \mathbb{R}, \; 0 \leq s \leq t\}$ оиласини қараймиз. Бу ерда s, t параметрларни вақт сифатида қараймиз. $\mathcal{M}^{[s,t]} = \left(a_{ij}^{[s,t]}\right)_{i,j=1,\ldots n}$ орқали $E^{[s,t]}$ нинг структуравий ўзгармаслар матрицасини белгилаймиз.

2-таъриф. *Агар* $\mathcal{M}^{[s,t]}$ *структуравий ўзгармаслар матрицаси қуйидаги*

$$\mathcal{M}^{[s,t]} = \mathcal{M}^{[s,\tau]} \mathcal{M}^{[\tau,t]}$$

Колмогоров-Чепмен тенгламасини барча $s < \tau < t$ *лар учун қаноатлантирса, у ҳолда* $\mathbb{R}$ *майдон устида аниқланган* n *ўлчамли эволюцион алгебраларнинг* $\{E^{[s,t]} : s, t \in \mathbb{R}, \; 0 \leq s \leq t\}$ *оиласи эволюцион алгебраларнинг занжири дейилади.*

Таъкидлаб ўтамизки, ҳар бир эволюцион алгебра структуравий ўзгармасларнинг квадрат матрицаси орқали аниқланади. ЭАЗ бу $(s, t) \; 0 \leq s \leq t$ вақтга боғлиқ эволюцион алгебраларнинг (саноқсиз) оиласидир. Унинг структуравий ўзгармаслар матрицаси ((s, t) вақтга боғлиқ) Колмогоров-Чепмен тенгламасини қаноатлантиради. Бошқача айтганда ЭАЗ фиксирланган вақтда эволюцион алгебра ҳосил қилувчи узлуксиз вақтли динамик системадир.

$\mathcal{A}$ да аниқланган нольдан фарқли мультипликатив чизиқли форма $\mathcal{A}$ алгебранинг характери дейилади яъни характер $\mathcal{A}$ ни $\mathbb{R}$ га акслантирувчи нольдан фарқли алгебра гомоморфизмидир. Ҳамма алгебралар учун ҳам характер мавжуд бўлавермайди. Масалан ноль кўпайтмали алгебра характерга эга эмас.

3-таъриф. $\mathcal{A}$ *алгебра ва унинг* σ *характеридан иборат* $(\mathcal{A}, \sigma)$ *жуфтлик барик алгебра дейилади.* σ *гомоморфизм* $\mathcal{A}$ *нинг вазн (ёки бариклик) функцияси,* $\sigma(x)$ *эса* x *нинг вазни (барик қиймати) дейилади.*

$\mathbb{R}$ майдон устида аниқланган n ўлчамли E эволюцион алгебра учун $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \; x \mapsto V(x) = x'$ операторни қуйидагича аниқлаймиз

$x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i^2,\ j = 1,...,n.$ Бу оператор эволюцион оператор деб номланади.

4-таъриф. *$\mathcal{A}$ алгебранинг x элементи учун $x^2 = 0$ бўлса, у абсолют нильпотент элемент дейилади.*

5-таъриф. *$x \in \mathcal{A}$ элемент учун $x^2 = x$ тенглик ўринли бўлса, у идемпотент элемент дейилади.*

Бу элементлар $V(x)$ эволюцион операторнинг ноль ва қўзғалмас нуқталари бўлгани учун муҳим ҳисобланади.

E^n эволюцион алгебра, $\mathcal{M}$ унинг структуравий ўзгармаслар матрицаси бўлсин, шунингдек $\mathcal{M}^T$ матрица $\mathcal{M}$ нинг транспонирлангани бўлсин.

$$\mathcal{M}_{ij}^T = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{i-1,1} & a_{j1} & a_{i+1,1} \dots & a_{r1} \\ a_{12} \dots a_{i-1,2} & a_{j2} & a_{i+1,2} \dots & a_{r2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1r} \dots a_{i-1,r} & a_{jr} & a_{i+1,r} \dots & a_{rr} \end{pmatrix}$$

матрица ёрдамида $d_{ij} = \dfrac{det(\mathcal{M}_{ij}^T)}{det(\mathcal{M}_r)},\ \mathcal{M}_r = (a_{ik})_{i,k=1,...,r}$ белгилашни олайлик.

Қизиқарли муаммолардан бири E^n эволюцион алгебра ягона абсолют нильпотент элементга эга бўлиш шарти остида, $D = (d_{ij})_{i=1,...,r;\ j=r+1,...,n}$ матрицага боғлиқ зарурий ва етарли шартни топишдир. Бу муаммо Ж.М.Касас, М.Ладра ва У.А.Розиковлар томонидан $rank(\mathcal{M}) = n-1$ ҳол учун ечилган. Биз $rank(M) = n-2$ ҳолни қараймиз.

1-теорема. *$rank(M) = n-2$ бўлсин. E^n эволюцион алгебра ягона $(0,...,0)$ абсолют нильпотент элементга эга бўлиши учун қуйидаги шартлардан бири бажарилиши зарур ва етарли:*

(i) $\begin{cases} d_{i_0,n-1} > 0 \\ d_{i_0,n} > 0 \end{cases}$ *баъзи* $i_0 \in \{1,...,n-2\}$ *учун;*

(ii) $\begin{cases} d_{k,n-1} > 0 \\ d_{k,n} = 0 \\ d_{m,n} > 0 \end{cases}$ *ёки* $\begin{cases} d_{k,n-1} = 0 \\ d_{k,n} > 0 \\ d_{m,n-1} > 0 \end{cases}$ *баъзи* $k,m \in \{1,...,n-2\}$ *учун;*

(iii) $\begin{cases} d_{s,n-1} > 0 \\ d_{s,n} < 0 \end{cases}$ *ва* $\begin{cases} d_{t,n-1} < 0 \\ d_{t,n} > 0 \end{cases}$ *баъзи* $s,t \in \{1,...,n-2\}$ *ва*

$$\max_t \left\{ \frac{-d_{t,n}}{d_{t,n-1}} : d_{t,n-1} < 0,\ d_{t,n} > 0 \right\} > \min_s \left\{ \frac{-d_{s,n}}{d_{s,n-1}} : d_{s,n-1} > 0, d_{s,n} < 0 \right\}$$ *лар учун.*

Шунигдек, бу бобда икки ва уч ўлчамли эволюцион алгебраларнинг маълум занжирлари берилган.

Диссертациянинг «**Ўрин алмаштиришларга мос эволюцион**

алгебралар» деб номланувчи иккинчи боби битта ва иккита ўрин алмаштиришларга мос эволюцион алгебраларни тадқиқ қилишга бағишланган. Бу алгебраларнинг муҳим хоссаларини ва элементларини топганмиз. Хусусан, бу алгебраларнинг абсолют нильпотент ва идемпотент элементлари тўлиқ тасвирланган ва аниқ кўриниши берилган.

А.Х.Худойбердиев, Б.А.Омиров ва Иззат Қараллеҳларнинг ишларида битта ўрин алмаштиришларга мос эволюцион алгебралар ўрганилган ва унинг тавсифи берилган.

S_n ўрин алмаштиришлар группаси ва $\pi \in S_n$ бўлсин. $\mathbb{R}$ майдон устида аниқланган $e_1, e_2, ..., e_n$ базис ва ушбу: барча i учун $e_i \cdot e_i = a_{i\pi(i)} e_{\pi(i)}$, агар $i \neq j$ бўлса $e_i \cdot e_j = 0$, кўпайтма билан аниқланган E_π^n эволюцион алгебрани қарайлик. Бу алгебра π ўрин алмаштиришга мос эволюцион алгебра деб аталади. $\mathcal{M} = (a_{ij})$ орқали E_π^n эволюцион алгебранинг структуравий ўзгармаслар матрицасини белгиласак, у ҳолда унинг элементларини қуйидагича аниқлаймиз: агар $j = \pi(i)$ бўлса $a_{ij} = a_{i\pi(i)}$, агар $j \neq \pi(i)$ бўлса $a_{ij} = 0$, $i = 1, ..., n$.

1-натижа. *$\mathbb{R}$ майдон устида аниқланган E_π^n эволюцион алгебра $M = (a_{ij})$ структуравий ўзгармаслар матрицасининг элементи учун $a_{kk} \neq 0$ шарт бажарилса ва фақат шундагина барик алгебра бўлади. Бундан ташқари мос вазн функцияси $\sigma(x) = a_{kk} x_k$ кўринишда бўлади.*

6-таъриф. *E эволюцион алгебранинг a элементи учун $(\cdots(\underbrace{(a \cdot a) \cdots a)}_{n(a)} = 0$ тенглик ўринли бўладиган $n(a) \in N$ натурал сон мавжуд бўлса, у ҳолда у нил элемент дейилади. E эволюцион алгебранинг барча элементлари нил бўлса у нил алгебра дейилади.*

2-теорема. *E_π^n эволюцион алгебра учун ихтиёрий $i \in \{1, ..., n\}$ ва $\pi^k(i) = i, k \in \{1, ..., n\}$, $\pi^q(i) \neq \pi^p(i)$, $q \neq p$ учун $a_{i\pi(i)} \cdot a_{\pi(i)\pi^2(i)} \cdot ... \cdot a_{\pi^{k-1}(i)i} = 0$ шарт бажарилса ва фақат шундагина у нил алгебра бўлади.*

$\pi, \tau \in S_n$ ва $\pi \neq \tau$ бўлсин. $\mathbb{R}$ майдон устида аниқланган $E_{\pi,\tau}^n$ эволюцион алгебра чекли $e_1, e_2, \ldots, e_n$ базис ва ушбу: ихтиёрий i учун $e_i \cdot e_i = a_{i\pi(i)} \cdot e_{\pi(i)} + a_{i\tau(i)} \cdot e_{\tau(i)}$, агар $i \neq j$ бўлса $e_i \cdot e_j = 0$, кўпайтириш жадвали билан берилган бўлса, у ҳолда бу алгебра π ва τ ўрин алмаштиришга мос эволюцион алгебра деб аталади.

1-тасдиқ. *$\mathbb{R}$ майдон устида аниқланган $E_{\pi,\tau}^n$ эволюцион алгебра барик алгебра бўлиши учун қуйидаги шартлардан бири бажарилиши зарур ва етарли:*

1) *k_0 π $(\text{or } \tau)$ учун қўзғалмас нуқта, $\tau(k_0) \neq k_0$ $(\text{or } \pi(k_0) \neq k_0)$ ва унинг структуравий ўзгармаслар матрицаси $M = (a_{ij})$ $i, j = 1, ..., n$ учун*

$a_{k_0k_0} \neq 0,\ a_{\tau^{-1}(k_0)k_0} = 0 \quad (or\ a_{\pi^{-1}(k_0)k_0} = 0)$ *шарт ўринли бўлсин. Бу ҳолда мос вазн функцияси* $\sigma(x) = a_{k_0k_0}x_{k_0}$. *кўринишда бўлади.*

2) k_0 *бир вақтда* π *ва* τ *учун қўзғалмас нуқта ва* $a_{k_0k_0} \neq 0$. *Бу ҳолда мос вазн функцияси* $\sigma(x) = 2a_{k_0k_0}x_{k_0}$ *кўринишда бўлади.*

2-натижа. *1-тасдиқда келтирилган* π *ва* τ *ўрин алмаштиришлари 1-тасдиқ шартларини қаноатлантирувчи* m *та* $k_m, m \leq n$ *қўзғалмас нуқталарга эга бўлса, у ҳолда* $E^n_{\pi,\tau}$ *эволюцион алгебра мос равишда* m *та* $\sigma(x) = a_{k_mk_m} \cdot x_{k_m}$ *(ёки* $\sigma(x) = 2a_{k_mk_m} \cdot x_{k_m}$*) вазн функциясиларига эга бўлади.*

$\alpha, \beta \in S_n$ лар ўзаро қўшма ўрин алмаштиришлар бўлсин, у ҳолда шундай $\gamma \in S_n$ ўрин алмаштириш топилиб $\gamma \circ \alpha = \beta \circ \gamma$ тенглик бажарилади. G_π берилган π га ўзаро қўшма бўлган барча ўрин алмаштиришлар тўплами бўлсин. Биз қуйидаги теоремада G_π даги махсус типли ўрин алмаштиришларни қараймиз.

3-теорема. $E^n_{\pi,\tau}$ *қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи иккита ўрин алмаштиришларга мос эволюцион алгебра бўлсин:*

(1) $a_{i\pi(i)} \cdot a_{i\tau(i)} \neq 0,\ 1 \leq i \leq n;$

(2) $\pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ ... \circ \pi_r$, $\tau = \tau_1 \circ \tau_2 \circ ... \circ \tau_r$, *бу ерда* $\pi_1 = (\pi_{11}\ \pi_{12}\ ...\ \pi_{1k_1})$,

$\pi_2 = (\pi_{21}\ \pi_{22}\ ...\ \pi_{2k_2}), ..., \pi_r = (\pi_{r1}\ \pi_{r2}\ ...\ \pi_{rk_r})$ *ва* $\tau_1 = (\tau_{11}\ \tau_{12}\ ...\ \tau_{1k_1})$,

$\tau_2 = (\tau_{21}\ \tau_{22}\ ...\ \tau_{2k_2}), ..., \tau_r = (\tau_{r1}\ \tau_{r2}\ ...\ \tau_{rk_r})$ *лар мос равишда* π *ва* τ *ларнинг эркин цикллари ва* $k_1 + k_2 + ... + k_r = n.$

(3) $\tau_{im} \in \{\pi_{i1}\ \pi_{i2}\ ...\ \pi_{ik_i}\}, 1 \leq i \leq r, 1 \leq m \leq k_i$ *ўринли, яъни* π_k *ва* τ_k *лар бир хил элементлардан ташкил топган бўлса, фақат уларнинг жойлашувида фарқ бор. У ҳолда қуйидаги ифода ўринли*

$$E^n_{\pi,\tau} \cong E^{k_1}_{\pi_1,\tau_1} \oplus E^{k_2}_{\pi_2,\tau_2} \oplus ... \oplus E^{k_r}_{\pi_r,\tau_r}.$$

Айний ўрин алмаштиришни τ_0 орқали белгилайлик.

2-тасдиқ. $\pi = (k_1, k_2, ..., k_n)$ *ва* τ_0 *ўрин алмаштиришларга мос ихтиёрий* E^n_{π,τ_0} *эволюцион алгебра учун* $a_{i\pi(i)} \cdot a_{ii} \neq 0, 1 \leq i \leq n$ *шарт бажарилса, у ҳолда бу алгебра ушбу*

$$\begin{cases} e'_i \cdot e'_i = a_{\pi^{i-1}(1)\pi^i(1)}e'_{i+1} + a_{\pi^{i-1}(1)\pi^{i-1}(1)}e'_i,\ 1 \leq i \leq n, \\ e'_i \cdot e'_j = 0,\ i \neq j \end{cases}$$

кўпайтма орқали берилган ва $a_{\pi^{i-1}(1)\pi^i(1)} \cdot a_{\pi^{i-1}(1)\pi^{i-1}(1)} \neq 0, \pi^0(1) = 1$ *шарт ўринли бўладиган,* $\pi_* = (1\,2\,...\,n)$, τ_0 ларга мос $E^n_{\pi_*,\tau_0}$ *эволюцион алгебрага изоморф.*

1-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} \eta_i \cdot \eta_i = \eta_{i+1} + \eta_i, \ 1 \le i \le n-1, \\ \eta_n \cdot \eta_n = \eta_1 + \eta_n, \\ \eta_i \cdot \eta_j = 0, \ i \ne j \end{cases}$$

кўпайтириш жадвали билан берилган $A^n_{\pi_*,\tau_0}$ эволюцион алгебрани қарайлик. $A^n_{\pi_*,\tau_0}$ бу $\pi_* = (1\,2\,\ldots\,n), \tau_0$ ўрин алмаштиришларга мос ва барча нолмас структуравий ўзгармаслари бирга тенг бўлган эволюцион алгебра.

4-теорема. *$\pi = (k_1, k_2, ..., k_n), \tau_0$ ўрин алмаштиришга мос ихтиёрий E^n_{π,τ_0} эволюцион алгебранинг структуравий ўзгармаслари учун қуйидаги $a_{i\pi(i)} \cdot a_{ii} \ne 0, \ (a_{\pi^{i-1}(1)\pi^{i-1}(1)})^2 = a_{\pi^{i-1}(1)\pi^i(1)} a_{\pi^i(1)\pi^i(1)}, \ 1 \le i \le n$ шарт бажарилса, у ҳолда у $A^n_{\pi_*,\tau_0}$ алгебрага изоморф.*

Маълумки, $\alpha, \beta \in S_n$ ўзаро қўшма ўрин алмаштиришлар бўлса, у ҳолда $\gamma \circ \alpha = \beta \circ \gamma$ тенгликни қаноатлантирувчи $\gamma \in S_n$ ни топиш мумкин.

5-теорема. *$\alpha, \beta \in S_n$ ўзаро қўшма ўрин алмаштиришлар бўлса ва структуравий ўзгармаслар матрицаси элементлари учун $a_{i\alpha(i)} = b_{\gamma(i)\beta(\gamma(i))}, \ a_{ii} = b_{\gamma(i)\gamma(i)}, 1 \le i \le n$ шарт бажарилса, у ҳолда E^n_{α,τ_0} ва E^n_{β,τ_0} эволюцион алгебралар изоморф.*

3-тасдиқ. *$\tau \circ \pi = \tau_0$ шартни қаноатлантирувчи $\pi = (k_1, k_2, ..., k_n), \tau = (l_1, l_2, ..., l_n)$ ўрин алмаштиришларга мос ихтиёрий $E^n_{\pi,\tau}$ эволюцион алгебра*

$$\begin{cases} e'_i \cdot e'_i = a_{\pi^{i-1}(1)\pi^i(1)} e'_{i+1} + a_{\pi^{i-1}(1)\pi^{i-2}(1)} e'_{i-1}, \ 1 \le i \le n, \\ e'_i \cdot e'_j = 0, \ i \ne j \end{cases}$$

кўпайтма орқали берилган ва $a_{\pi^{i-1}(1)\pi^i(1)} \cdot a_{\pi^{i-1}(1)\pi^{i-2}(1)} \ne 0$ шарт ўринли бўладига, $\pi_* = (1, 2, ..., n)$ ва $\tau_* = (1, n, n-1, ..., 2)$ ўрин алмаштиришларга мос $E^n_{\pi_*,\tau_*}$ эволюцион алгебрага изоморф.

Қуйидаги теорема E^n_π нинг идемпотент элементларини тўлиқ тасвирлайди.

6-теорема.

(i) Фараз қиламиз $a_{i\pi(i)} \ne 0$, $i = 1, \ldots, n$ ва $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ идемпотент элемент, у ҳолда унинг координаталарини қуйидаги формула ёрдамида аниқланади: $x_i = (a^{2^{k-1}}_{i\pi(i)} \cdot a^{2^{k-2}}_{\pi(i)\pi^2(i)} \cdot a^{2^{k-3}}_{\pi^2(i)\pi^3(i)} \cdot \ldots \cdot a_{\pi^{k-1}(i)i})^{-\frac{1}{2^k-1}}$,

бу ерда $\pi^k(i) = i$.

(ii) Агар баъзи i лар учун $a_{i\pi(i)} = 0$ бўлса, у ҳолда i билан бир циклга кирувчи барча m лар учун $x_m = 0$ ва идемпотент элементнинг қолган координаталари (1) формула ёрдамида аниқланади.

E^n_π нинг абсолют нилпотент элементларини қарайлик. У ҳолда

$x^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)} x_i^2 e_{\pi(i)}$ эканлигидан фойдаланиб, $x^2 = 0$ дан $a_{i\pi(i)} x_i^2 = 0$, $i = 1,...,n$ ни ҳосил қиламиз. Бу система ечимлари:

1) *Агар* $a_{i\pi(i)} \neq 0$ *бўлса ,у ҳолда* $x = (0,0,...,0)$.

2) *Агар баъзи* k *лар учун* $a_{k\pi(k)} = 0$ *бўлса, у ҳолда абсолют нильпотент элемент* $x = (0,0,..., x_k ,...,0)$ *кўринишда бўлади, бу ерда* x_k. *ихтиёрий ҳақиқий сон.*

Қуйидаги теорема $E_{\pi,\tau}^n$ нинг абсолют нильпотент элементларини тўлиқ тасвирлайди

7-теорема. $x^* = (x_1^*, x_2^*,..., x_n^*)$ $E_{\pi,\tau}^n$ *нинг абсолют нильпотент элементи ва* $(l_1\, l_2 \,...\, l_p)$ *эса* $\tau^{-1} \circ \pi, (p \leq n)$ *нинг эркин цикларидан бири бўлсин.*

1) Агар барча $k = 1,2,..., p$ *лар учун* $a_{l_k \pi(l_k)} \cdot a_{l_{k+1}\tau(l_{k+1})} \neq 0$ *шарт бажарилса, у ҳолда* $x_{l_1}^* = x_{l_2}^* = ... = x_{l_p}^* = 0$ *ёки* $\prod_{i=1}^{p} x_{l_i}^* \neq 0$ *бўлади ва бу ҳолда:*

1.a) Агар баъзи $k_0 = 1,..., p$ *лар учун* $a_{l_{k_0}\pi(l_{k_0})} \cdot a_{l_{k_0+1}\tau(l_{k_0+1})} > 0$ *бўлса, у ҳолда* $x_{l_1}^* = x_{l_2}^* = ... = x_{l_p}^* = 0$, *бу ерда* $l_{p+1} = l_1$;

1.b) Агар барча $k = 1,..., p$ *лар учун* $a_{l_k \pi(l_k)} \cdot a_{l_{k+1}\tau(l_{k+1})} < 0$ *ва* $(-1)^p \prod_{i=1}^{p} a_{l_i \pi(l_i)} \neq \prod_{i=1}^{p} a_{l_i \tau(l_i)}$ *шартлар бажарилса, у ҳолда* $x_{l_1}^* = x_{l_2}^* = ... = x_{l_p}^* = 0$;

1.c) Агар барча $k = 1,..., p$ *лар учун* $a_{l_k \pi(l_k)} \cdot a_{l_{k+1}\tau(l_{k+1})} < 0$ *ва* $(-1)^p \prod_{i=1}^{p} a_{l_i \pi(l_i)} = \prod_{i=1}^{p} a_{l_i \tau(l_i)}$ *шартлар бажарилса, у ҳолда*

$$| x_{l_k}^* | = \sqrt{\frac{(-1)^{k-1} a_{l_1\pi(l_1)} a_{l_2\pi(l_2)} \cdot ... \cdot a_{l_{k-1}\pi(l_{k-1})}}{a_{l_2\tau(l_2)} a_{l_3\tau(l_3)} \cdot ... \cdot a_{l_k\tau(l_k)}}} \cdot | x_{l_1}^* |, \quad k = 2,..., p,$$

бу ерда $x_{l_1}^*$ *ихтиёрий ҳақиқий сон;*

2) Агар баъзи k_0 $(1 \leq k_0 \leq p)$ *учун* $a_{l_{k_0}\pi(l_{k_0})} = 0$ *(ёки* $a_{l_{k_0}\tau(l_{k_0})} = 0$*) ва барча* $k = 1,..., p$ *лар учун* $a_{l_k\tau(l_k)} \neq 0$ *(ёки* $a_{l_k\pi(l_k)} \neq 0$*) шартлар бажарилса, у ҳолда* $x_{l_1}^* = x_{l_2}^* = ... = x_{l_p}^* = 0$;

3) Агар баъзи k_0 *учун* $a_{l_{k_0}\pi(l_{k_0})} = 0$, $a_{l_{k_0}\tau(l_{k_0})} = 0$ *ва барча* $k \neq k_0$ *лар учун* $a_{l_k\pi(l_k)} \neq 0$ *ёки* $a_{l_k\tau(l_k)} \neq 0$ *шартлар бажарилса, у ҳолда* $x_{l_{k_0}}^*$ *ихтиёрий ҳақиқий сон ва барча* $k \neq k_0, k = 1,..., p$ *лар учун* $x_{l_k}^* = 0$ *бўлади;*

4) Қолган барча ҳолларда ёки $x_{l_1}^* = x_{l_2}^* = ... = x_{l_p}^* = 0$ *ёки баъзилари нолга тенг ва қолганлари эркин параметрларга боғлиқ.*

Диссертациянинг «**Чекли ўлчамли эволюцион алгебраларнинг**

занжирлардаги таснифи» деб номланувчи учинчи боби эволюцион алгебраларнинг икки ва уч ўлчамли занжирлардаги таснифига бағишланган. Эволюцион алгебраларнинг бир нечта уч ўлчамли занжирларини қарадик ва ушбу занжирлардаги эволюцион алгебраларнинг таснифини бердик.

Биз қуйидаги $\mathcal{M}_i^{[s,t]}, i=1,2,3$ структуравий ўзгармаслар матрицаларига мос $E_i^{[s,t]}$ эволюцион алгебраларнинг занжирларини қараймиз (улар А.Н.Имомкулов ва М.В.Веласко томонидан қурилган).

$$\mathcal{M}_1^{[s,t]} = \frac{h(t)}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{h(s)}+f(s) & \frac{1}{h(s)}+f(s) & \frac{1}{h(s)}+f(s) \\ \frac{1}{h(s)}-g(s) & \frac{1}{h(s)}-g(s) & \frac{1}{h(s)}-g(s) \\ g(s)-f(s) & g(s)-f(s) & g(s)-f(s) \end{pmatrix}$$

h, g ва f ихтиёрий функциялар ва $h(s)\neq 0$;

$$\mathcal{M}_2^{[s,t]} = \frac{1}{2}\begin{cases} \begin{pmatrix} 1+\psi(s) & 1+\psi(s) & 1+\psi(s) \\ 1-\varphi(s) & 1-\varphi(s) & 1-\varphi(s) \\ \varphi(s)-\psi(s) & \varphi(s)-\psi(s) & \varphi(s)-\psi(s) \end{pmatrix}, & \text{агар } s\le t<a, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{агар } t\ge a, \end{cases}$$

бу ерда $a>0$ ва φ, ψ лар ихтиёрий функциялар;

$$\mathcal{M}_3^{[s,t]} = \theta(s)\begin{pmatrix} \eta(t) & \vartheta(t) & \kappa(t) \\ \varphi_1(s)\eta(t) & \varphi_1(s)\vartheta(t) & \varphi_1(s)\kappa(t) \\ \varphi_2(s)\eta(t) & \varphi_2(s)\vartheta(t) & \varphi_2(s)\kappa(t) \end{pmatrix}$$

бу ерда $\theta(s)=\dfrac{1}{\eta(s)+\varphi_1(s)\vartheta(s)+\varphi_2(s)\kappa(s)}$ ва η, ϑ, κ, φ_1, φ_2 лар $\eta(s)+\varphi_1(s)\vartheta(s)+\varphi_2(s)\kappa(s)\neq 0$ шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий функциялар.

А.Имомкулов томонидан квадратининг ўлчами бирга тенг бўлган уч ўлчамли ҳақиқий эволюцион алгебралар таснифланган (комплекс ҳол учун Ё.К.Касадо, М.С.Молина ва М.В.Веласколар таснифлаган) ва жуфт-жуфти билан ўзаро изоморф бўлмаган ўн иккита алгебра топилган. Улар қуйидагилар

$$E_1:\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2:\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3:\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4:\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_5:\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad E_6:\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\quad E_7:\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad E_8:\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},$$

$$E_9:\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\quad E_{10}:\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad E_{11}:\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad E_{12}:\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}.$$

8-теорема. *$E_1^{[s,t]}$ занжир (s,t) вақтнинг берилган қийматларида E_4, E_5, E_6, E_7, E_8, E_9 ларнинг бирига изоморф.*

8-теореманинг моҳиятини тушунтириш учун, ушбу мисолни қараймиз.

2-мисол. Агар $g(s)=4s-16,\ f(s)=4s^2-24s+32,\ \dfrac{1}{h(s)}=s+1$ функцияларни олсак, у ҳолда $0\le s\le t$ учун

a) $s=3$ бўлганда E_4;

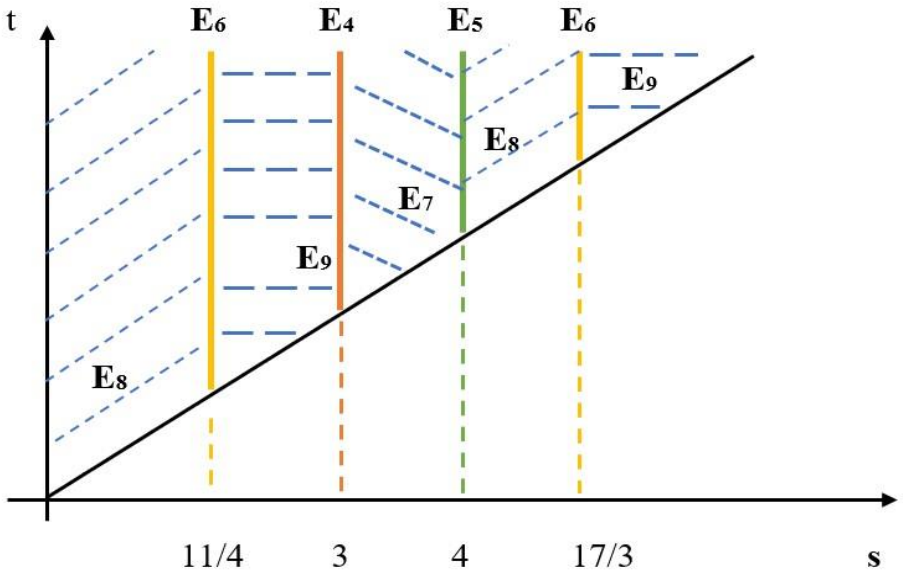
b) $s=4$ бўлганда E_5;

c) $s=\dfrac{11}{4}$ ва $s=\dfrac{17}{3}$ бўлганда E_6;

d) $s\in(3;4)$ бўлганда E_7;

e) $s\in[0;\dfrac{11}{4})\cup(4;\dfrac{17}{3})$ бўлганда E_8;

f) $s\in(\dfrac{11}{4};3)\cup(\dfrac{17}{3};\infty)$ бўлганда E_9 ни ҳосил қиламиз (1-шаклга қаранг).



1-шакл. $E_1^{[s,t]}$ ЭАЗидаги эволюцион алгебраларга мос $\{(s,t):0\le s\le t\}$ вақт тўпламининг тақсимоти.

E_0 орқали тривиал эволюцион алгебрани белгилаймиз (яъни нол

кўпайтмали).

9-теорема. *$E_2^{[s,t]}$ занжир $(s,t)\in\{(s,t):0\le s\le t<a\}$ вақтнинг берилган қийматларида E_4, E_5, E_6, E_7, E_8, E_9 ларнинг бирига изоморф. Барча $(s,t)\in\{(s,t):t\ge a\}$ да $E_2^{[s,t]}$ занжир E_0 га изоморф.*

10-теорема. *$E_3^{[s,t]}$ занжир (s,t) вақтнинг берилган қийматларида юқорида келтирилган ўн иккита алгебранинг бирига изоморф.*

10-теореманинг моҳиятини тушунтириш учун, ушбу мисолни қараймиз

3-мисол. $E_3^{[s,t]}$ занжирдаги функцияларни

$$\eta(t)=\begin{cases}t+1, & 0\le t<6\\ 0, & t\ge 6\end{cases},\quad \vartheta(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}(t+1), & 0\le t<2\\ \sqrt{(t-1)^2+4}, & 2\le t<3\\ 0, & 3\le t<6\\ t-2, & t\ge 6\end{cases},\quad \kappa(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<1\\ t-3, & 1\le t<6,\\ 0, & t\ge 6\end{cases}$$

$$\varphi_1(s)=\begin{cases}-2, & 0\le s<3\\ 0, & 3\le s\le 5\\ s-5{,}7, & s>5\end{cases},\quad \varphi_2(s)=\begin{cases}-1, & 0\le s<1\\ 0, & 1\le s<2\\ 1, & 2\le s<3\\ s-4, & s\ge 3\end{cases}.$$

кўринишда оламиз. У ҳолда қуйидаги ҳолларга эга бўламиз (2-шаклга қаранг):

1-ҳол. Агар $0\le s<1$ бўлса, у ҳолда 1) $0\le t<1$ учун E_3; 2) $1\le t<3$ учун E_8; 3) $3\le t<6$ учун E_9; 4) $t\ge 6$ учун E_8;

2-ҳол. Агар $1\le s<2$ бўлса, у ҳолда $1\le t<2$ учун E_1 ва $t\ge 2$ учун E_6 бўлади;

3-ҳол. Агар $2\le s<3$ бўлса, у ҳолда $2\le t<3$ учун E_2, $3\le t<6$ учун E_8; $t\ge 6$ учун E_9 ни ҳосил қиламиз;

4-ҳол. Агар $3\le s<4$ бўлса, у ҳолда $3\le t<6$ учун E_6, $t\ge 6$ учун E_{12};

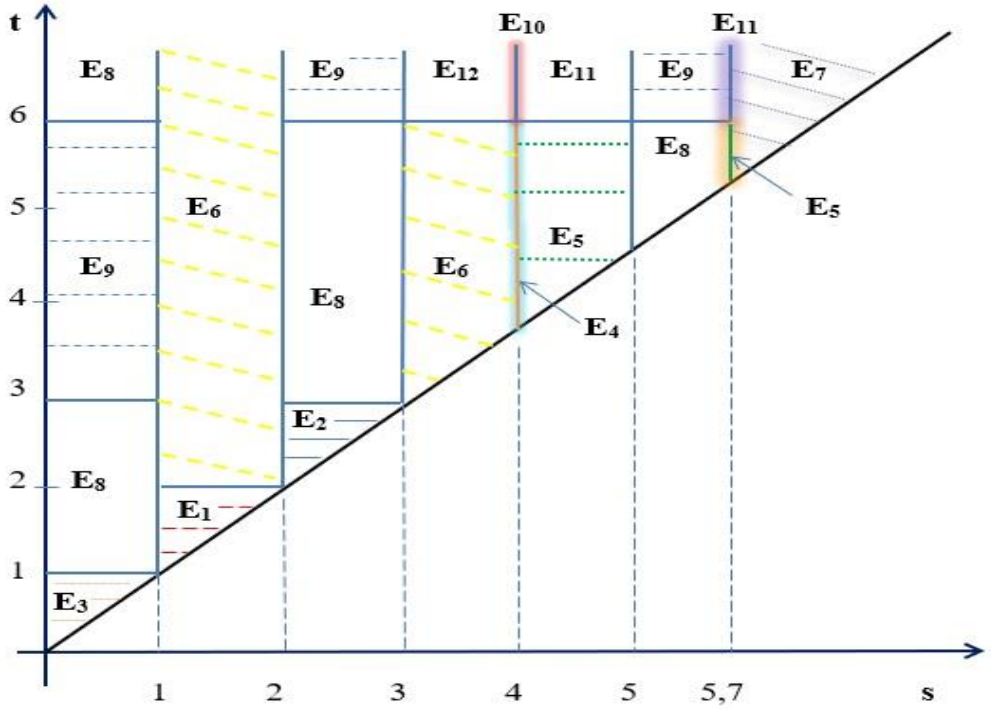
5-ҳол. Агар $s=4$ бўлса, у ҳолда $4\le t<6$ б учун E_4, $t\ge 6$ учун E_{10};

6-ҳол. Агар $4<s\le 5$ бўлса, у ҳолда $4<t<6$ учун E_5, $t\ge 6$ учун E_{11};

7-ҳол. Агар $5<s<5{,}7$ бўлса, у ҳолда $5<t<6$ учун E_8, $t\ge 6$ учун E_9

8-ҳол. Агар $s=5{,}7$ бўлса, у ҳолда $5{,}7\le t<6$ учун E_5, $t\ge 6$ учун E_{11};

9-ҳол. Агар $s>5{,}7$ бўлса, у ҳолда $t>5{,}7$ учун E_7 ҳосил бўлади.



2-шакл. $E_3^{[s,t]}$ ЭАЗидаги эволюцион алгебраларга мос $\{(s,t):0\le s\le t\}$ вақт тўпламининг тақсимоти.

ХУЛОСА

Ушбу диссертация чекли ўлчамли эволюцион алгебраларни, ўрин алмаштиришларга мос эволюцион алгебраларни ва эволюцион алгебраларнинг уч ўлчамли занжирларидаги таснифини ўрганишга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Структуравий ўзгармаслар матрицасининг ранги $n-2$ га тенг бўлган n ўлчамли эволюцион алгебра ягона абсолют нильпотент элементга эга бўлишининг зарурий ва етарли шарт топилган;
2. Битта ва иккита ўрин алмаштиришларга мос эволюцион алгебраларнинг барик бўлиш мезонлари топилган;
3. Берилган ўрин алмаштиришга мос эволюцион алгебранинг нил алгебра бўлиш шарти ва унинг абсолют нильпотент ва идемпотент элементлари топилган;
4. Иккита ўрин алмаштиришларга мос эволюцион алгебранинг абсолют нильпотент элементлари ва икки ўлчамли ҳол учун идемпотент элементларнинг тўлиқ таҳлили топилган;
5. Иккита ўрин алмаштиришларга мос эволюцион алгебранинг баъзи изоморфизмлари топилган;
6. Бир нечта занжирлардаги эволюцион алгебраларнинг таснифлари топилган;
7. Квадратининг ўлчами бирга тенг бўлган барча уч ўлчамли ҳақиқий эволюцион алгебраларни ўз ичига олган занжирдаги эволюцион алгебралар таснифланган.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V.I. ROMANOVSKIY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

NARKUZIYEV BOBOMURAD ABDUVAKILOVICH

EVOLUTION ALGEBRAS AND THEIR THREE-DIMENSIONAL CHAINS

01.01.06-Algebra

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT-2022

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2022.1.PhD/FM672.

Dissertation has been prepared at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, English, Russian (summary)) on the website website http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz.

Scientific supervisor:	**Rozikov Utkir Abdulloevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Omirov Bakhrom Abdazovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Murodov Sherzod Normonovich Doctor of Philosophy (PhD) physical and mathematical sciences
Leading organization:	**Samarkand state university**

Defense will take place « 5 » July 2022 at 17:00 at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky. (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource center at Institute of Mathematics named alter V.I.Romanovsky (is registered № 141). (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871)-207-91-40).

Abstract of dissertation sent out on « 17 » June 2022 year
(Mailing report № 2 on « 17 » June 2022 year)

A.Azamov
Deputy Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Academician

J.K.Adashev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, D.F.-M.S., Senior researcher

B.A.Omirov
Chairman of Scientific seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

INTRODUCTION (abstract of PhD dissertation)

Actuality and demand of the theme of the dissertation. Numerous scientific and practical researches conducted worldwide are often brought to the study of some algebras using the non-associative algebras and the theory of algebraic systems. In history, mathematicians and geneticists once used nonassociative algebras to study Mendelian genetics. Mendel first exploited symbols that are quite algebraically suggestive to express his genetic laws. They were later termed "Mendelian algebras" by several other authors. Mendelian genetics introduced new subjects to mathematics: general genetic algebra and evolution algebra. These algebras are generally commutative, but not associative; moreover, they do not belong to any of the well-known classes of non-associative algebras, such as Lie algebras, Jordan algebras, or alternative algebras.

It is important to study the theory of evolution algebras, which is currently one of the most important areas of modern algebra. Many mathematicians have done scientific work in this field and introduced new lines of investigations. Evolution algebras have many connections with other mathematical fields. These algebras provide new solutions to a number of mathematical problems. Through a mathematical study of the laws of evolution, we can make a reasonable prediction of the development or complete disappearance of a species or feature of a population. Nowadays, the reproduction of a species with the required characteristics and the development of its beneficial properties is one of the most important problems, both scientifically and economically. In this regard: the study of the properties of evolution algebras and the classification of their chains is one of the targeted scientific studies.

In recent years, our government much attention has been paid to mathematics, physics, geology and biological sciences, which have scientific and practical applications of fundamental sciences. In particular, special attention was paid to the development of the theory of evolution algebras, one of the main objects encountered in population biology and genetics. Within the frame of this fundamental research, significant results have been obtained in the study of evolution algebras and their chains. Conducting research[1] at the level of international standards on the priority areas "Algebra and Functional Analysis" is the main task and direction of activity of mathematics. To ensure the fulfillment of the task, it is important to further develop the theory of evolution algebras in order to apply scientific results in the relevant field of science.

The subject and object of research of this dissertation are in line with tasks identified in the Decrees of the President of the Republic of Uzbekistan UP-4947 of February 7, 2017 "On the strategy of action for the further development of the Republic of Uzbekistan", PD-2789 dated February 17, 2017 "On measures to further improvement of the activities of the Academy of Sciences, organization,

[1] Decree of Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan at the 2017, 18 May « On measures on the organization of activities of the first created scientific research institutions of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan» № 292 dated May 17, 2017.

management and financing of research activities", PD-4387 from July 9, 2019 "On measures to further development of mathematical education and science, and also root improvement of the activity of the Uzbekistan Academy of Sciences V.I.Romanovsky Institute of Mathematics" and also PD-4708 from May 7, 2020 "On measures to improve the quality of education and research in mathematics" as well as in other regulations related to basic science.

Connection of research to priority directions of development of science and technologies of the Republic. This study was performed in accordance with the priority areas of science and technology of Republic of Uzbekistan IV, "Mathematics, Mechanics and Computer Science".

The degree of scrutiny of the problem. General genetic algebras are the product of interaction between biology and mathematics. More recent results, such as genetic evolution in genetic algebras, are obtained by Y.I.Lyubich. He first proposed a class of evolution algebras (called evolutionary algebras) in 1992. In 2006 J.P.Tian introduced a new type of evolution algebra. He established a foundation of the framework of the theory of these algebras in his scientific work. Since then, interest in evolution algebras has greatly increased. The concept of evolution algebra lies between algebras and dynamical systems. Algebraically, evolution algebras are non-associative Banach algebras; dynamically, they represent discrete dynamical systems.

A notion of a chain of evolution algebras was first introduced in 2010 by J.M.Casas, M.Ladra and U.A.Rozikov and wide classes of chains were constructed. The chain of evolution algebras is a dynamical system the state of which at each given time is an evolution algebra. Such chains were also built by B.A.Omirov, K.M.Tulenbayev, M.Ladra, Sh.N.Murodov, M.V.Velasco, A.N.Imomkulov and some of their properties were studied. Also in 2016, Ladra and Rozikov introduced the concept of flow of finite-dimensional algebra as a generalization of the concept of a chain of evolution algebras. One of the recents in this field is the book "Population dynamics" by U.A.Rozikov.

Three-dimensional evolution algebras are classified in the work of Y.C.Casado, M.S.Molina and M.V.Velasco. They studied the evolution algebras E over a field $\mathbb{K}$ of characteristic different from 2 and in which every polynomial of the form $x^n - k$, for n = 2, 3, 7 and $k \in \mathbb{K}$ has a root in the field. They proved that there are 116 types of three-dimensional evolution algebras (up to isomorphism). We can see the classification of algebras in some two-dimensional real evolution chains in Murodov's scientific works. However such a classification has not yet been considered in the chains of three-dimensional evolution algebras. The approximation of finite-dimensional algebras with evolution algebras studied by A.N.Imomkulov. Moreover, he classified three-dimensional real evolution algebras with $dim(E^2) = 1$ and showed the existence of twelve pairwise non-isomorphic algebras.

The idea of studying evolution algebras corresponding to permutations was first put forward by A.S.Dzhumadil'daev. Since then, several scientific articles related to this area have been published. In those papers, evolution algebras and their chains corresponding to only one permutation are considered.

Connection of the theme of the dissertation with the research works of higher education, where the dissertation is carried out. The dissertation work is carried out in accordance with the given topic of scientific research OT-F4-82 + OT-F4-87 «Local derivations and automorphisms of operator and nonassociative algebras, phase transitions and chaos in nonlinear dynamical systems» + «The theory of global invariants of curves and surfaces in Euclidean and pseudo-Euclidean spaces and its applications in mechanics» at V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics (2017-2019).

The aim of research work is to study evolution algebras corresponding to permutations and to classify known real evolution algebras in three-dimensional chains of evolution algebras.

Research problems:

to find necessary and sufficient condition for a n-dimensional evolution algebra with the the matrix of structure constants having rank $n-2$ to have a unique absolute nilpotent element;

to find set of absolute nilpotent and idempotent elements of evolution algebra corresponding to permutations;

to give classification of evolution algebras in three-dimensional chains;

to find a chain that up to isomorphism contains all known algebras.

The research object: finite-dimensional evolution algebras, evolution algebra corresponding to permutations, three-dimensional chains of evolution algebras.

The research subject: absolute nilpotent elements of finite dimensional evolution algebras, absolute nilpotent and idempotent elements of evolution algebras corresponding to permutations, classification in chains of three-dimensional real evolution algebras.

Research methods: in the dissertation the methods of the theory of non-associative algebras, theory of non-linear dynamical systems, the methods of structure constants, classification methods are applied.

Scientific novelty of the research work consists of the following:

a necessary and sufficient condition for a n-dimensional evolution algebra with the matrix of structure constants having rank $n-2$ to have a unique absolute nilpotent element is found;

the criteria for evolution algebras corresponding to one and two permutations to be baric, absolute nilpotent and idempotent elements of evolution algebra corresponding to a permutation are found;

absolute nilpotent elements of evolution algebra corresponding to two permutations and detailed analysis of idempotent elements for a two-dimensional case, also some isomorphisms of evolution algebra corresponding to two permutations are found;

classifications of real evolution algebras in some three-dimensional chains, in particular, classification of real evolution algebras in a chain containing all three-dimensional real evolution algebras with $\dim(E^2)=1$ are found;

Practical results of the research. The obtained results and used methods in the dissertation can be taught as a graduate course for masters and PhD students of

higher education institutions. Furthermore, obtained classification in chains of evolution algebras allow us to investigate the evolution of biological and physical systems and dynamics of algebras in chains.

The reliability of the results of the study. The results have been obtained by using the methods of linear algebra, abstract algebra, non-linear analysis and evolution algebra, as well as the rigorous of mathematical reasoning. The proofs of obtained results are mathematically correct.

Scientific and practical significance of the research results. The scientific significance of the research results is explained by the fact that the obtained scientific results in the work can be used for further study of evolution algebras and their chains. In particular, the techniques and methods developed in this dissertation can be used to classify the chains of all evolution algebras.

The practical significance of the research results is that they can be used to classify the evolution and dynamics of biological and physical processes represented by chains of evolution algebras.

Implementation of the research results. The results were used in the following scientific studies:

the obtained results about evolution algebras corresponding to permutations and classifications in chains of evolution algebras have been used in the foreign research project No. MTM2016-76327-C3-2-P for investigation of evolution algebras (Reference of the University of Granada dated April 20, 2022, Spain). The application of the scientific results allowed to classify chains of evolution algebras.

the obtained results about absolute nilpotent, idempotent elements of evolution algebras and classifications in chains of evolution algebras have been used in the research project “Quantum Genetic Algebras and their applications” Grant, No. G00003447 for investigation of dynamics of quadratic stochastic operators (Reference of the University of the United Arab Emirates dated May 26, 2022, UAE). The application of the scientific results made it possible to investigate the ergodic properties of dynamic systems generated by several quadratic stochastic operators defined in the standard simplex.

Approbation of the research results. The main results of the research have been discussed at 4 international and 5 national scientific conferences.

Publications of the research results. On the topic of the dissertation, 14 scientific papers were published, 5 of which are included in the list of scientific publications proposed by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for the defense of thesis of the Doctor of Philosophy, including 2 of them published in foreign journals and 3 in national scientific journals and 9 abstracts.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of the introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The total volume of the thesis is 113 pages.

MAIN CONTENT OF THE DISSERTATION

In **introduction** the motivation of research theme and correspondence to the priority research areas of science and technology of the Republic are given, we

present the review of foreign research on the topic, degree of scrutiny of the problem, formulate our goals and objectives, identify the object and subject of study, and state scientific novelty and practical results of the research. Moreover, we give the theoretical and practical importance of the obtained results, the implementation of the research results, the published works and the structure of dissertation.

In the first chapter of the dissertation, titled "**Basic facts about evolution algebras and their chains**", we introduced necessary basic notions and concepts of evolution algebras and their chains which are used in dissertation and have given some results that a finite-dimensional evolution algebra has unique absolute nilpotent element.

Definition 1. *Let* $(E,\cdot)$ *be an algebra over a field* $\mathbb{F}$. *If it admits a basis* $e_1, e_2, \ldots,$ *such that* $e_i e_j = \begin{cases} 0, & \text{if } i \neq j \\ \sum_k a_{ik} e_k, & \text{if } i = j, \end{cases}$ *then this algebra is called an evolution algebra and such a basis is called a natural basis.*

We denote by $\mathcal{M} = (a_{ij})$ the matrix of the structure constants of the evolution algebra E.

Evolution algebras were first introduced by J.P.Tian. He motivated this algebras by evolution laws of genetics.

J.M.Casas, M.Ladra and U.A.Rozikov introduced a notion of chain of evolution algebras (CEA). Following this paper we consider a family $\{E^{[s,t]} : s, t \in \mathbb{R},\ 0 \le s \le t\}$ of n-dimensional evolution algebras over the field $\mathbb{R}$, with the basis $e_1, e_2, \ldots, e_n$ and the table of multiplication

$$e_i e_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{[s,t]} e_j, \quad i = 1, \ldots, n;\ e_i e_j = 0,\ i \neq j.$$

Here the parameters s, t are considered as time. Denote by $\mathcal{M}^{[s,t]} = \left(a_{ij}^{[s,t]}\right)_{i,j=1,\ldots n}$ the matrix of structure constants of $E^{[s,t]}$.

Definition 2. *A family* $\{E^{[s,t]} : s, t \in \mathbb{R},\ 0 \le s \le t\}$ *of* n*-dimensional evolution algebras over the field* $\mathbb{R}$*, is called a chain of evolution algebras (CEA) if the matrix* $\mathcal{M}^{[s,t]}$ *of structure constants satisfies the Chapman-Kolmogorov equation*

$$\mathcal{M}^{[s,t]} = \mathcal{M}^{[s,\tau]} \mathcal{M}^{[\tau,t]}, \quad \text{for any } s < \tau < t.$$

It is known that each evolution algebra is determined by a quadratic matrix of structure constants. A CEA is a (uncountable) family of evolution algebras depending on the time (s, t), $0 \le s \le t$. The matrices of structure constants (depending on (s, t)) of a CEA satisfy the Chapman-Kolmogorov equation. In other words, a CEA is a continuous-time dynamical system which in a fixed time is an EA.

A *character* for an algebra $\mathcal{A}$ is a nonzero multiplicative linear form on $\mathcal{A}$, that is, a nonzero algebra homomorphism from $\mathcal{A}$ to $\mathbb{R}$. Not every algebra admits a character. For example, an algebra with the zero multiplication has no character.

Definition 3. *A pair* $(\mathcal{A}, \sigma)$ *consisting of an algebra* $\mathcal{A}$ *and a character* σ *on* $\mathcal{A}$ *is called a baric algebra. The homomorphism* σ *is called the weight (or baric) function of* $\mathcal{A}$ *and* $\sigma(x)$ *the weight (baric value) of* x.

For an n-dimensional evolution algebra E over the field $\mathbb{R}$ consider the operator $V:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto V(x) = x'$ defined as $x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, x_i^2,\ j = 1,...,n.$

This operator is called *evolution operator*.

Definition 4. *An element* x *of an algebra* $\mathcal{A}$ *is called an absolute nilpotent if* $x^2 = 0.$

Definition 5. *An element* $x \in \mathcal{A}$ *is called idempotent if* $x^2 = x$.

Such elements of an evolution algebra are especially important, because they are zero point and fixed point of the evolution map $V(x)$.

Let E^n be evolution algebra and $\mathcal{M}$ be its matrix of the structure constants, $\mathcal{M}^T$ is transposed matrix of $\mathcal{M}$ and $d_{ij} = \dfrac{det(\mathcal{M}_{ij}^T)}{det(\mathcal{M}_r)}$ with $\mathcal{M}_r = (a_{ik})_{i,k=1,...,r}$,

$$\mathcal{M}_{ij}^T = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{i-1,1} & a_{j1} & a_{i+1,1} \dots & a_{r1} \\ a_{12} \dots a_{i-1,2} & a_{j2} & a_{i+1,2} \dots & a_{r2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1r} \dots a_{i-1,r} & a_{jr} & a_{i+1,r} \dots & a_{rr} \end{pmatrix}.$$

An interesting problem is to find a necessary and sufficient condition on matrix $D = (d_{ij})_{i=1,...,r;\ j=r+1,...,n}$ under which the evolution algebra E^n has a unique absolute nilpotent element. This problem solved by J.M.Casas, M.Ladra and U.A.Rozikov for the case $rank(\mathcal{M}) = n-1$. We consider the case $rank(M) = n-2$.

Theorem 1. *Let* $rank(\mathcal{M}) = n-2$. *The evolution algebra* E^n *has a unique absolute nilpotent element* $(0,...,0)$ *if and only if one of the following conditions is satisfied:*

(i) $\begin{cases} d_{i_0,n-1} > 0 \\ d_{i_0,n} > 0 \end{cases}$ *for some* $i_0 \in \{1,...,n-2\}$;

(ii) $\begin{cases} d_{k,n-1} > 0 \\ d_{k,n} = 0 \\ d_{m,n} > 0 \end{cases}$ *or* $\begin{cases} d_{k,n-1} = 0 \\ d_{k,n} > 0 \\ d_{m,n-1} > 0 \end{cases}$ *for some* $k,m \in \{1,...,n-2\}$;

(iii) $\begin{cases} d_{s,n-1} > 0 \\ d_{s,n} < 0 \end{cases}$ *and* $\begin{cases} d_{t,n-1} < 0 \\ d_{t,n} > 0 \end{cases}$ *for some* $s,t \in \{1,...,n-2\}$ *and*

$$\max_t \left\{ \frac{-d_{t,n}}{d_{t,n-1}} : d_{t,n-1} < 0,\ d_{t,n} > 0 \right\} > \min_s \left\{ \frac{-d_{s,n}}{d_{s,n-1}} : d_{s,n-1} > 0, d_{s,n} < 0 \right\}.$$

Also, we have given some known two- and three-dimensional chains of real evolution algebras.

The second chapter, titled "**Evolution algebras corresponding to permutations**" is devoted to investigate evolution algebras corresponding to one and two permutations. In this chapter we studied important properties and elements of these algebras. In particular we have described in detail absolute nilpotent and idempotent elements of these algebras and given clear views of theirs.

In the works of A.Kh.Khudoyberdiyev, B.A.Omirov and Izzat Qaralleh some properties of evolution algebra corresponding to one permutation are studied and a description of this algebra is given.

Let S_n be a group of the permutations and $\pi \in S_n$,

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & ... & \pi(n) \end{pmatrix}, \quad \pi(i) \in \{1,2,...,n\}.$$

Consider an evolution algebra E_π^n over the field $\mathbb{R}$ with a finite natural basis $e_1, e_2, ..., e_n$, and a table of multiplication given by $\begin{cases} e_i \cdot e_i = a_{i\pi(i)} e_{\pi(i)}, & for \quad any \quad i \\ e_i \cdot e_j = 0, & if \quad i \neq j \end{cases}$.

Then an evolution algebra E_π^n is called *an evolution algebra corresponding to permutation* π. We note that if $\mathcal{M} = (a_{ij})$ the matrix of the structure constants of the evolution algebra E_π^n then $a_{ij} = \begin{cases} a_{i\pi(i)}, & if \quad j = \pi(i) \\ 0 \ , & if \quad j \neq \pi(i) \end{cases}, \quad i = 1,...,n.$

Corollary 1. *An evolution algebra* E_π *over the field* $\mathbb{R}$*, is baric if and only if there is an element* $a_{kk} \neq 0$ *of its matrix* $M = (a_{ij})$ *of structure constants. Moreover, the corresponding weight function is* $\sigma(x) = a_{kk} x_k$.

Definition 6. *An element* a *of an evolution algebra* E *is called nil if there exists* $n(a) \in N$ *such that* $(\cdots(\underbrace{(a \cdot a)\cdots a}_{n(a)}) = 0$. *Evolution algebra* E *is called nil if every element of the algebra is nil.*

Theorem 2. *The algebra* E_π^n *is a nil evolution algebra if only if the following condition holds*

$$a_{i\pi(i)} \cdot a_{\pi(i)\pi^2(i)} \cdot ... \cdot a_{\pi^{k-1}(i)i} = 0 \qquad (2.1)$$

for all $i \in \{1,...,n\}$ *and* $\pi^k(i) = i, k \in \{1,...,n\}$ *, with* $\pi^q(i) \neq \pi^p(i)$ *for* $q \neq p$.

Let $\pi, \tau \in S_n$, and assume that $\pi \neq \tau$. Consider an n-dimensional evolution algebra $E_{\pi,\tau}^n$ over the field $\mathbb{R}$ with a finite natural basis $e_1, e_2, ...e_n$, and a table of multiplication given by: $e_i \cdot e_j = 0$, *if* $i \neq j$; $e_i \cdot e_i = a_{i\pi(i)} \cdot e_{\pi(i)} + a_{i\tau(i)} \cdot e_{\tau(i)}$, *for any* i, then this algebra is called *an evolution algebra corresponding to permutations* π *and* τ.

Proposition 1. *An evolution algebra* $E_{\pi,\tau}^n$ *over the field* $\mathbb{R}$*, is baric if and only if one of the following conditions holds:*

1) *k_0 is a fixed point for π (or τ), $\tau(k_0) \neq k_0$ (or $\pi(k_0) \neq k_0$) and its matrix $M = (a_{ij})$ $i, j = 1,...,n$ of structure constants satisfies $a_{k_0 k_0} \neq 0$, $a_{\tau^{-1}(k_0)k_0} = 0$ $(or\ a_{\pi^{-1}(k_0)k_0} = 0)$. In this case the corresponding weight function is $\sigma(x) = a_{k_0 k_0} x_{k_0}$.*

2) *k_0 is a fixed point for both π and τ, and $a_{k_0 k_0} \neq 0$. In this case the corresponding weight function is $\sigma(x) = 2a_{k_0 k_0} x_{k_0}$.*

Corollary 2. *If the permutations π and τ, mentioned in Proposition 1 have m fixed points $k_m, m \leq n$ which satisfy conditions of Proposition 1, then the evolution algebra $E^n_{\pi,\tau}$ has exactly m weight functions $\sigma(x) = a_{k_m k_m} \cdot x_{k_m}$ (or $\sigma(x) = 2a_{k_m k_m} \cdot x_{k_m}$).*

Let $\alpha, \beta \in S_n$ are conjugated, then there exists $\gamma \in S_n$ such that $\gamma \circ \alpha = \beta \circ \gamma$ and G_π be set of all conjugate permutations to fixed π. In the following theorem we consider special type of permutations in G_π.

Theorem 3. *Let $E^n_{\pi,\tau}$ be an evolution algebra corresponding to two permutations with the following conditions:*

1) $a_{i\pi(i)} \cdot a_{i\tau(i)} \neq 0, 1 \leq i \leq n$;

2) *$\pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ ... \circ \pi_r$, $\tau = \tau_1 \circ \tau_2 \circ ... \circ \tau_r$, where $\pi_1 = (\pi_{11}\ \pi_{12} ... \pi_{1k_1})$, $\pi_2 = (\pi_{21}\ \pi_{22} ... \pi_{2k_2}), ..., \pi_r = (\pi_{r1}\ \pi_{r2} ... \pi_{rk_r})$ and $\tau_1 = (\tau_{11}\ \tau_{12} ... \tau_{1k_1})$, $\tau_2 = (\tau_{21}\ \tau_{22} ... \tau_{2k_2}), ..., \tau_r = (\tau_{r1}\ \tau_{r2} ... \tau_{rk_r})$ are independent cycles of π and τ respectively, and $k_1 + k_2 + ... + k_r = n$.*

3) *$\tau_{im} \in \{\pi_{i1}\ \pi_{i2} ... \pi_{ik_i}\}, 1 \leq i \leq r, 1 \leq m \leq k_i$, i.e. π_k and τ_k consist of one and the same elements, only has difference between seats of elements. Then*

$$E^n_{\pi,\tau} \cong E^{k_1}_{\pi_1,\tau_1} \oplus E^{k_2}_{\pi_2,\tau_2} \oplus ... \oplus E^{k_r}_{\pi_r,\tau_r}.$$

Let τ_0 be identity permutation.

Proposition 2. *Any evolution algebra E^n_{π,τ_0} corresponding to permutations $\pi = (k_1, k_2, ..., k_n), \tau_0$ and with the condition $a_{i\pi(i)} \cdot a_{ii} \neq 0, 1 \leq i \leq n$, is isomorphic to the evolution algebra $E^n_{\pi_*,\tau_0}$, with the table of multiplications given by:*

$$\begin{cases} e'_i \cdot e'_i = a_{\pi^{i-1}(1)\pi^i(1)} e'_{i+1} + a_{\pi^{i-1}(1)\pi^{i-1}(1)} e'_i,\ 1 \leq i \leq n \\ e'_i \cdot e'_j = 0,\ i \neq j \end{cases}$$

where $\pi_* = (1\,2 ... n)$, and $a_{\pi^{i-1}(1)\pi^i(1)} \cdot a_{\pi^{i-1}(1)\pi^{i-1}(1)} \neq 0, \pi^0(1) = 1.$

Example 1. Consider the following evolution algebra $A^n_{\pi_*,\tau_0}$, with the table of multiplications given by:

$$\begin{cases} \eta_i \cdot \eta_i = \eta_{i+1} + \eta_i, \ 1 \le i \le n-1 \\ \eta_n \cdot \eta_n = \eta_1 + \eta_n, \\ \eta_i \cdot \eta_j = 0, \ i \ne j \end{cases}$$

the algebra $A^n_{\pi_*,\tau_0}$ is an evolution algebra corresponding to permutations $\pi_* = (1\,2\,...\,n)$, τ_0 and all non-zero structure constants a_{ij} are equal to one.

Theorem 4. *Any evolution algebra E^n_{π,τ_0} corresponding to permutations $\pi = (k_1, k_2, ..., k_n)$, τ_0 and with the following condition*

$$a_{i\pi(i)} \cdot a_{ii} \ne 0, \ (a_{\pi^{i-1}(1)\pi^{i-1}(1)})^2 = a_{\pi^{i-1}(1)\pi^i(1)} a_{\pi^i(1)\pi^i(1)}, \ 1 \le i \le n$$

is isomorphic to the algebra $A^n_{\pi_*,\tau_0}$.

Let $\alpha, \beta \in S_n$ are conjugated, then there exists $\gamma \in S_n$ such that $\gamma \circ \alpha = \beta \circ \gamma$.

Theorem 5. *If permutations $\alpha, \beta \in S_n$ are conjugated and the condition $a_{i\alpha(i)} = b_{\gamma(i)\beta(\gamma(i))}, a_{ii} = b_{\gamma(i)\gamma(i)}, 1 \le i \le n$ is satisfied for the elements of the matrix of structure constants then the evolution algebras E^n_{α,τ_0} and E^n_{β,τ_0} are isomorphic.*

Proposition 3. *Any evolution algebra $E^n_{\pi,\tau}$ corresponding to permutations $\pi = (k_1, k_2, ..., k_n)$, $\tau = (l_1, l_2, ..., l_n)$ and with the condition $\tau \circ \pi = \tau_0$ is isomorphic to the evolution algebra $E^n_{\pi_*,\tau_*}$, which a table of multiplications given by:*

$$\begin{cases} e'_i \cdot e'_i = a_{\pi^{i-1}(1)\pi^i(1)} e'_{i+1} + a_{\pi^{i-1}(1)\pi^{i-2}(1)} e'_{i-1}, \ 1 \le i \le n \\ e'_i \cdot e'_j = 0, \ i \ne j \end{cases}$$

with permutations $\pi_* = (1, 2, ..., n)$, $\tau_* = (1, n, n-1, ..., 2)$ *and* $a_{\pi^{i-1}(1)\pi^i(1)} \cdot a_{\pi^{i-1}(1)\pi^{i-2}(1)} \ne 0$.

The following theorem describes idempotent elements of E^n_π.

Theorem 6.

(i) Assume that $a_{i\pi(i)} \ne 0$, $i = 1, ..., n$ and $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ be an idempotent element, then coordinates of this element defined by the following formula:

$$x_i = (a^{2^{k-1}}_{i\pi(i)} \cdot a^{2^{k-2}}_{\pi(i)\pi^2(i)} \cdot a^{2^{k-3}}_{\pi^2(i)\pi^3(i)} \cdot ... \cdot a_{\pi^{k-1}(i)i})^{-\frac{1}{2^k-1}}, \ \text{where } \pi^k(i) = i.$$

(ii) If $a_{i\pi(i)} = 0$ for some i, then for the number m which belongs to the same cycle where is i, then $x_m = 0$, and other coordinates of the idempotent element are defined by the formula (1).

Now we consider absolute nilpotent elements of E^n_π. We know that $x^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)} x_i^2 e_{\pi(i)}$. Hence from $x^2 = 0$ we have $a_{i\pi(i)} x_i^2 = 0$, $i = 1, ..., n$. Solutions of this system of equations are :

1) If $a_{i\pi(i)} \ne 0$, then $x = (0, 0, ..., 0)$.

2) $a_{k\pi(k)} = 0$ for some k, k then absolute nilpotent element defined by

$x = (0,0,..., x_k ,...,0)$, where x_k is an arbitrary real number.

The following theorem describes absolute nilpotent elements of $E^n_{\pi,\tau}$.

Theorem 7. *Let* $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ *be an absolute nilpotent element for* $E^n_{\pi,\tau}$ *and* $(l_1\, l_2 \,...\, l_p)$ *be one of the independent cycles of* $\tau^{-1} \circ \pi, (p \le n)$.

1) If $a_{l_k \pi(l_k)} \cdot a_{l_{k+1}\tau(l_{k+1})} \neq 0$, *for all* $k = 1,2,..., p$, *then* $x^*_{l_1} = x^*_{l_2} = ... = x^*_{l_p} = 0$ *or* $\prod_{i=1}^{p} x^*_{l_i} \neq 0$ *and in this case:*

1.a) If $a_{l_{k_0} \pi(l_{k_0})} \cdot a_{l_{k_0+1}\tau(l_{k_0+1})} > 0$ *for some* $k_0 = 1,..., p$ *then* $x^*_{l_1} = x^*_{l_2} = ... = x^*_{l_p} = 0$, *where* $l_{p+1} = l_1$;

1.b) If $a_{l_k \pi(l_k)} \cdot a_{l_{k+1}\tau(l_{k+1})} < 0$ *for all* $k = 1,..., p$ *and* $(-1)^p \prod_{i=1}^{p} a_{l_i \pi(l_i)} \neq \prod_{i=1}^{p} a_{l_i \tau(l_i)}$ *then* $x^*_{l_1} = x^*_{l_2} = ... = x^*_{l_p} = 0$;

1.c) *If* $a_{l_k \pi(l_k)} \cdot a_{l_{k+1}\tau(l_{k+1})} < 0$ *for all* $k = 1,..., p$ *and* $(-1)^p \prod_{i=1}^{p} a_{l_i \pi(l_i)} = \prod_{i=1}^{p} a_{l_i \tau(l_i)}$ *then*

$$| x^*_{l_k} | = \sqrt{\frac{(-1)^{k-1} a_{l_1 \pi(l_1)} a_{l_2 \pi(l_2)} \cdot ... \cdot a_{l_{k-1} \pi(l_{k-1})}}{a_{l_2 \tau(l_2)} a_{l_3 \tau(l_3)} \cdot ... \cdot a_{l_k \tau(l_k)}}} \cdot | x^*_{l_1} |, \; k = 2,..., p,$$

where $x^*_{l_1}$ *is any real number.*

2) If $a_{l_{k_0} \pi(l_{k_0})} = 0$ *(or* $a_{l_{k_0} \tau(l_{k_0})} = 0$ *) for some* k_0 $(1 \le k_0 \le p)$ *and* $a_{l_k \tau(l_k)} \neq 0$ *(or* $a_{l_k \pi(l_k)} \neq 0$ *) for any* $k = 1,..., p$ *then* $x^*_{l_1} = x^*_{l_2} = ... = x^*_{l_p} = 0$.

3) If $a_{l_{k_0} \pi(l_{k_0})} = 0$, $a_{l_{k_0} \tau(l_{k_0})} = 0$ *for some* k_0 *and* $a_{l_k \pi(l_k)} \neq 0$ *or* $a_{l_k \tau(l_k)} \neq 0$ *for any* $k \neq k_0$ *then* $x^*_{l_{k_0}}$ *will be any real number and* $x^*_{l_k} = 0$ *for all* $k \neq k_0, k = 1,..., p$. *In this case the number of free parameters is equal to the number of such* k_0.

4) In all other cases either $x^*_{l_1} = x^*_{l_2} = ... = x^*_{l_p} = 0$ *or some of them are equal to zero and the rest depends on the free parameters.*

The third chapter of the dissertation, titled "**Classification in chains of finite-dimensional evolution algebras**" is devoted to the classification of real evolution algebras in two- and three-dimensional chains of evolution algebras. We have studied some three-dimensional chains of evolution algebras and given a classification of real evolution algebras in these chains.

We consider the following known CEAs (constructed by A.N.Imomkulov and M.V.Velasco):

$E_i^{[s,t]}$, which correspond to the $\mathcal{M}_i^{[s,t]}$, $i = 1,2,3$ defined as:

$$\mathcal{M}_1^{[s,t]} = \frac{h(t)}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{h(s)}+f(s) & \frac{1}{h(s)}+f(s) & \frac{1}{h(s)}+f(s) \\ \frac{1}{h(s)}-g(s) & \frac{1}{h(s)}-g(s) & \frac{1}{h(s)}-g(s) \\ g(s)-f(s) & g(s)-f(s) & g(s)-f(s) \end{pmatrix}$$

where h, g and f are arbitrary functions with $h(s)\neq 0$;

$$\mathcal{M}_2^{[s,t]} = \frac{1}{2}\begin{cases} \begin{pmatrix} 1+\psi(s) & 1+\psi(s) & 1+\psi(s) \\ 1-\varphi(s) & 1-\varphi(s) & 1-\varphi(s) \\ \varphi(s)-\psi(s) & \varphi(s)-\psi(s) & \varphi(s)-\psi(s) \end{pmatrix}, & if \ \ s\le t<a, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & if \ \ t\ge a, \end{cases}$$

where $a>0$ and φ, ψ are arbitrary functions.

$$\mathcal{M}_3^{[s,t]} = \theta(s)\begin{pmatrix} \eta(t) & \vartheta(t) & \kappa(t) \\ \varphi_1(s)\eta(t) & \varphi_1(s)\vartheta(t) & \varphi_1(s)\kappa(t) \\ \varphi_2(s)\eta(t) & \varphi_2(s)\vartheta(t) & \varphi_2(s)\kappa(t) \end{pmatrix}$$

where

$$\theta(s) = \frac{1}{\eta(s)+\varphi_1(s)\vartheta(s)+\varphi_2(s)\kappa(s)}$$

and η, ϑ, κ, φ_1, φ_2 are arbitrary functions with $\eta(s)+\varphi_1(s)\vartheta(s)+\varphi_2(s)\kappa(s)\neq 0$.

Three-dimensional real evolution algebras with $dim(E^2)=1$ are classified by Imomkulov (for complex case by Y.C.Casado, M.S.Molina, M.V.Velasco) and twelve pairwise non-isomorphic evolution algebras are described. They are

$$E_1:\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2:\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3:\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4:\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_5:\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_6:\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_7:\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_8:\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_9:\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{10}:\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{11}:\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12}:\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Theorem 8. *For given values* (s,t) *of time the algebra* $E_1^{[s,t]}$ *is isomorphic to* E_4, E_5, E_6, E_7, E_8, E_9.

To illustrate the essence of Theorem 8, consider the following example.

Example 2. Let $g(s)=4s-16,\ f(s)=4s^2-24s+32,\ \dfrac{1}{h(s)}=s+1$ then we obtain:

a) E_4 when $s=3$;

b) E_5 when $s=4$;

c) E_6 when $s=\dfrac{11}{4}$ and $s=\dfrac{17}{3}$;

d) E_7 when $s\in(3;4)$;

e) E_8 when $s\in[0;\dfrac{11}{4})\cup(4;\dfrac{17}{3})$;

f) E_9 when $s\in(\dfrac{11}{4};3)\cup(\dfrac{17}{3};\infty)$, where $0\le s\le t$ (see Fig. 1).

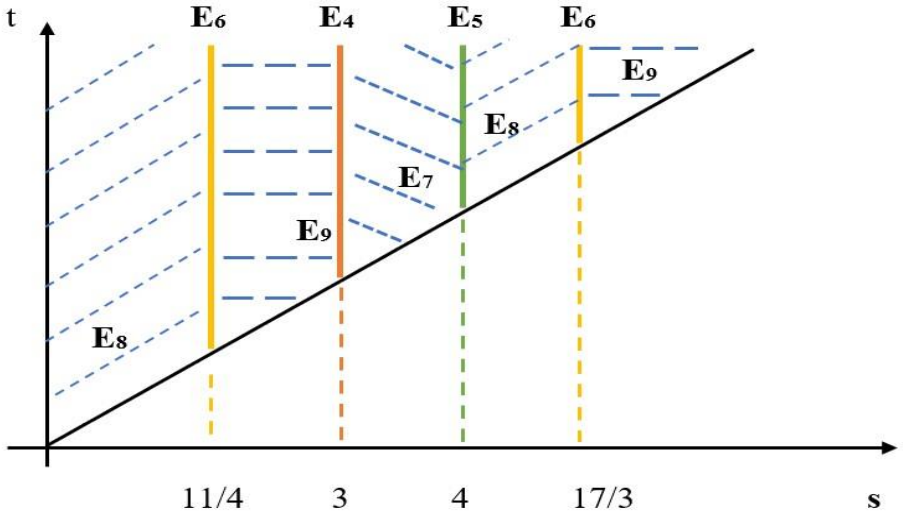


Figure 1: The partition of the time set $\{(s,t):0\le s\le t\}$ corresponding to the classification of EAs in the CEA $E_1^{[s,t]}$.

Let us denote the trivial evolution algebra by E_0 (i.e. with zero multiplication).

Theorem 9. *For given values* $(s,t)\in\{(s,t):0\le s\le t<a\}$ *of time the algebra* $E_2^{[s,t]}$ *is isomorphic to* E_4, E_5, E_6, E_7, E_8, E_9.

For all $(s,t)\in\{(s,t):t\ge a\}$ *the algebra* $E_2^{[s,t]}$ *is isomorphic to* E_0.

Theorem 10. *For given values* (s,t) *of time, the algebra* $E_3^{[s,t]}$ *is isomorphic to to all the twelve algebras mentioned above.*

To illustrate the essence of Theorem 10, consider the following example.

Example 3. *Let* $\eta(t)=\begin{cases} t+1, & 0\le t<6 \\ 0, & t\ge 6 \end{cases}$, $\vartheta(t)=\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(t+1), & 0\le t<2 \\ \sqrt{(t-1)^2+4}, & 2\le t<3, \\ 0, & 3\le t<6 \\ t-2, & t\ge 6 \end{cases}$

$$\kappa(t)=\begin{cases} 0, & 0\le t<1 \\ t-3, & 1\le t<6 \\ 0, & t\ge 6 \end{cases},\ \varphi_1(s)=\begin{cases} -2, & 0\le s<3 \\ 0, & 3\le s\le 5 \\ s-5{,}7, & s>5 \end{cases},\ \varphi_2(s)=\begin{cases} -1, & 0\le s<1 \\ 0, & 1\le s<2 \\ 1, & 2\le s<3 \\ s-4, & s\ge 3 \end{cases}.$$

We consider the next cases (see Fig. 2):

Case 1. If $0\le s<1$ then we have 1) E_3 when $0\le t<1$; 2) E_8 when $1\le t<3$; 3) E_9 when $3\le t<6$; 4) E_8 when $t\ge 6$;

Case 2. If $1\le s<2$ then we have 1) E_1 when $1\le t<2$; 2) E_6 when $t\ge 2$;

Case 3. If $2\le s<3$ then we have 1) E_2 when $2\le t<3$; 2) E_8 when $3\le t<6$; 3) E_9 when $t\ge 6$;

Case 4. If $3\le s<4$ then we have 1) E_6 when $3\le t<6$; 2) E_{12} when $t\ge 6$;

Case 5. If $s=4$ then we have 1) E_4 when $4\le t<6$; 2) E_{10} when $t\ge 6$;

Case 6. If $4<s\le 5$ then we have 1) E_5 when $4<t<6$; 2) E_{11} when $t\ge 6$;

Case 7. If $5<s<5{,}7$ then we have 1) E_8 when $5<t<6$; 2) E_9 when $t\ge 6$;

Case 8. If $s=5{,}7$ then we have 1) E_5 when $5{,}7\le t<6$; 2) E_{11} when $t\ge 6$;

Case 9. If $s>5{,}7$ then we have E_7 when $t>5{,}7$.

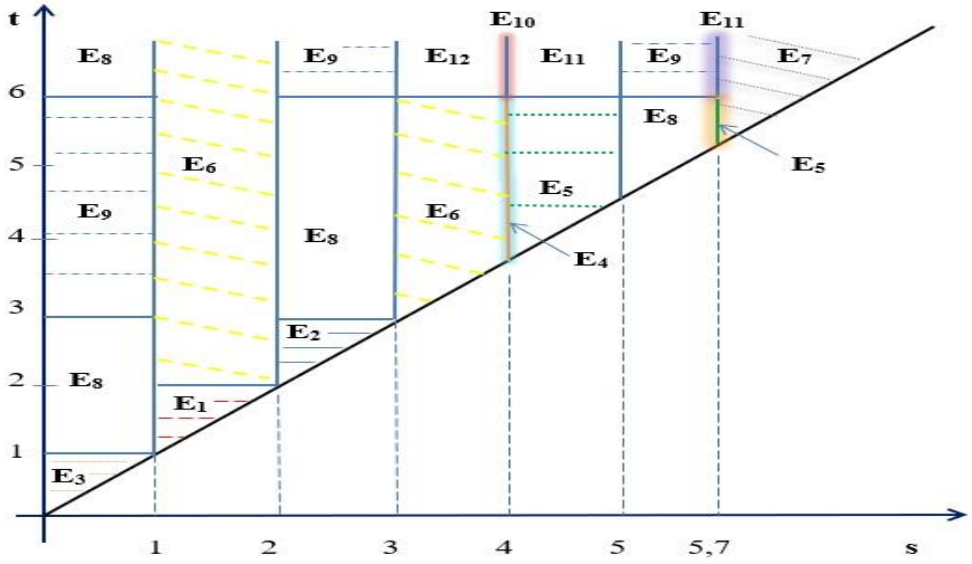


Figure 2: The partition of time set $\{(s,t):0\le s\le t\}$ corresponding to the classification of EAs in the CEA $E_3^{[s,t]}$.

CONCLUSION

The dissertation is devoted to study finite-dimensional evolution algebras, evolution algebras corresponding to one and two permutations and classification of evolution algebras in three-dimensional real chains.

The main results of the research are as follows:

1. A necessary and sufficient condition for n-dimensional evolution algebra, which rank of matrix of structure constants equals to $n-2$, to have a unique absolute nilpotent element is found;
2. The creteria for evolution algebras corresponding to one and two permutations to be baric are given;
3. The condition that the evolution algebra corresponding to a permutation be nil algebra is given, its absolute nilpotent and idempotent elements are found;
4. Absolute nilpotent elements of evolution algebra corresponding to two permutations are found and detailed analysis of idempotent elements for a two-dimensional case is given;
5. Some isomorphisms of evolution algebra corresponding to two permutations are found;
6. Classifications of real evolution algebras in some chains are found;
7. Classification of real evolution algebras in a chain containing all three-dimensional real evolution algebras with $\dim(E^2)=1$ is found.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

НАРКУЗИЕВ БОБОМУРАД АБДУВАКИЛОВИЧ

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ АЛГЕБРЫ И ИХ ТРЕХМЕРНЫЕ ЦЕПИ

01.01.06 –Алгебра

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ТАШКЕНТ-2022

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2022.1.PhD/FM672.

Диссертация выполнена в Институте Математики имени В.И.Романовского.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, английский, русский(резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу http://www.ziyonet.uz.

Научный руководитель:	**Розиков Уткир Абдуллоевич** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Омиров Бахром Абдазович** доктор физико-математических наук, профессор
	Муродов Шерзод Нормонович доктор философии по физико-математическим наукам (PhD)
Ведущая организация:	**Самаркандский государственный университет**

Защита диссертации состоится « 5 » июля 2022 года в 17:00 на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И. Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9.Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И. Романовского (зарегистрирована за № 132). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9.Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан « 17 » июня 2022 года.
(протокол рассылки № 2 от « 17 » июня 2022 года).

А.Азамов
Заместитель председателя Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

Ж.К.Адашев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

Б.А.Омиров
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Целью исследования является изучение эволюционных алгебр, соответствующих перестановкам, и классификация известных вещественных эволюционных алгебр в трехмерных цепях эволюционных алгебр.

Объект исследования: конечномерные эволюционные алгебры, эволюционные алгебры, соответствующие перестановкам, трехмерные цепи эволюционных алгебр.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

найдено необходимое и достаточное условие для того, чтобы n-мерная эволюционная алгебра со структурной матрицей ранга $n-2$ имела единственный абсолютный нильпотентный элемент;

найдены критерии баричности эволюционных алгебр, соответствующих одному и двум перестановкам и доказано, что эволюционная алгебра, соответствующая данным перестановкам, имеет абсолютно нильпотентные и идемпотентные элементы;

найдены абсолютные нильпотентные элементы эволюционной алгебры, соответствующие двум перестановкам, и полный анализ идемпотентных элементов для двумерного случая, а также некоторые изоморфизмы эволюционных алгебр, соответствующим двум перестановкам;

найдены классификации вещественных эволюционных алгебр в некоторых трехмерных цепях, в частности классификация вещественных эволюционных алгебр в цепе, содержащей все трехмерные вещественные эволюционные алгебры с размерностью квадрата алгебры равной единице.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

результаты эволюционных алгебр соответствующих перестановкам, и классификация эволюционных алгебр в цепах эволюционных алгебр использовались в исследованиях эволюционных алгебр в зарубежном проекте № MTM2016-76327-C3-2-P (Справка Университета Гранады, 20 апреля 2022 г, Испания). Применение научных результатов позволило классифицировать цепи эволюционных алгебр;

результаты по абсолютным нильпотентным, идемпотентным элементам эволюционных алгебр и классификация в цепах эволюционных алгебр использовались в зарубежном научном проекте № G00003447 «Квантовые генетические алгебры и их приложения» для описания динамики квадратичных стохастических операторов (Справка Университета Объединенных Арабских Эмиратов, 26 мая 2022 г., ОАЭ). Применение научных результатов позволило исследовать эргодические свойства динамических систем, порожденных несколькими квадратичными стохастическими операторами, определенными в стандартном симплексе.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и библиографии. Объем диссертации составляет 113 страниц.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
LIST OF PUBLISHED WORKS
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

I бўлим (1 часть; part 1)

1. Narkuziev B.A. Evolution algebra corresponding to permutations. // Uzbek Mathematical Journal. – 2014. – No. 4. – P. 109-114. (01.00.00, № 6).
2. Narkuziev B.A. On absolutely nilpotent elements of an evolution algebra corresponding to permutations. // Doklady Acad. Nauk Ruz. – 2017– N. 1. – P. 5-7. (01.00.00, № 7).
3. Narkuziyev B.A. Some remarks on evolution algebras corresponding to permutations. // Journal of Algebra and Its Applications. – 2022. – Vol. 21(6). – P. 2250112 (15 pages). (3.Scopus. IF=0.736).
4. Rozikov U.A., Narkuziyev B.A. Classification of algebras in two chains of real evolution algebras. // Doklady. Acad. Nauk Ruz. – 2021.– N. 4. – P.8-12. (01.00.00, № 7).
5. Narkuziyev B.A., Rozikov U.A. Classification in chains of three-dimensional real evolution algebras. // Linear and Multilinear Algebra. – 2022.– DOI:10.1080/03081087.2022.2025754, (34 pages), (3.Scopus. IF=1.626).

II бўлим (2 часть; part 2)

6. Narkuziev B.A. Evolution algebras corresponding to permutations. // Abstracts of the Republican scientific conference “New theorems of young mathematicians-2013”. – Namangan, 15-16 April, 2013. – P. 143-144.
7. Narkuziev B.A. On absolute nilpotent elements of an evolution algebra corresponding to permutations. // Abstracts of the Republican scientific conference “Related problems of mathematical physics and modern analysis”. – Bukhara, 26-27 November, 2015. – P. 44-46.
8. Narkuziev B.A. On absolutely nilpotent elements of an evolution algebra corresponding to permutations. // Abstracts of the International scientific conference “Nonlinear analysis and its applications”. – Samarkand, 19-21 September, 2016. – P. 12-14.
9. Narkuziev B.A. On idempotent elements of an evolution algebras corresponding to permutations. // Abstracts of the International scientific conference “Modern problems of applied mathematics and information technology - Al Khorezmiy 2016”. – Bukhara, 9-10 November, 2016. – P. 293-294.
10. Narkuziev B.A. Evolution algebra constructed by two permutations. // Abstracts of the Republican scientific conference “New results of mathematics and their applications”. – Samarkand, 14-15 May, 2018. – P. 114-115.
11. Narkuziev B.A. On absolute nilpotent elements of an evolution algebra. // Abstracts of the International scientific conference “Modern problems of

differential equations and related branches of mathematics". – Fergana, 12-13 March, 2020. – P. 156-158.
12. Narkuziev B.A. Isomorphism of evolution algebra corresponding to permutations. // Abstracts of the Republican scientific online conference "Modern problems of mathematics: problems and solutions". – Termez, 21-23 Oktober, 2020. – P. 31-32.
13. Narkuziyev B.A. On isomorphisms of algebras in chains of three-dimensional real evolution algebras. // Abstracts of the 41st International Conference on "Quantum Probability and related topics". – United Arab Emirates University, UAE. March 28- April 1, 2021. – P. 76-77.
14. Rozikov U.A., Narkuziyev B.A. On classification in some chains of evolution algebras. // Abstracts of the Republican scientific conference with participation of foreign scientists "Sarymsakov readings". – Tashkent, 16-18 September, 2021. – P. 263-265.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида
2022 йил 6 июнда таҳрирдан ўтказилди.

Босмахона лицензияси:

9338

Бичими: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» гарнитураси.
Рақамли босма усулда босилди.
Шартли босма табоғи: 3,5. Адади 100 дона. Буюртма № 1/22.

Гувоҳнома № 851684.
«Tipograff» МЧЖ босмахонасида чоп этилган.
Босмахона манзили: 100011, Тошкент ш., Беруний кўчаси, 83-уй.