МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО

ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ТАШКЕНТСКИЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и контрольные задания
для студентов-заочников строительных специаль-
ностей высших учебных заведений.

ЧАСТЬ I

Ташкент - 2000

Составители: Абдурахимов А., Хуррамов Ш.Р., Анорбаев Х.,
Мирзаев С.Т., Исомов Р.Д., Бабакаев С.Н., Кодиров И. Хушбекова Р.А.

Высшая математика. Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников строительных специальностей высших учебных заведений. Часть I.

Ташкентский архитектурно-строительный институт.
Составители: Абдурахимов А., Хуррамов Ш., Анорбаев Х.,
Мирзаев С.Т., Исомов Р.Д., Бабакаев С.Н., Кодиров И. Хушбекова Р.А.,
Ташкент 2000 г.

Методическое указание предназначено для студентов-заочников, первокурсников строительных специальностей высших учебных заведений и содержит 1 ÷ 3 контрольные задания. Каждая контрольная работа составлена по двадцати пяти вариантной системе. В методическом указании приведена программа курса, а также образцы решения примеров и задач по каждой контрольной работе, которые помогут студенту-заочнику самостоятельно выполнить задания.

Кафедра “Высшая и прикладная математика”. Печатается по решению секции “Фундаментальных и общеинженерных дисциплин” НМС ТАСИ.

Рецензенты: д.ф-м. н. проф. Хошимов Ш.А.
к.т.н. доц. Маматкулов М.

Программа курса “ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА” для студентов-заочников строительных специальностей высших учебных заведений(I - 3 контрольные работы).

I.ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ.

1.1 Определители, их свойства. Вычисление определителей.
1.2 Системы линейных уравнений. Правило Крамера. Метод Гаусса.
1.3 Матрицы, действия над ними. Теорема Кроникера-Капелли. Матричный метод решения систем линейных уравнений.
1.4 Векторы. Линейные операции над векторами. Базис. Разложение вектора по базису. Скалярные произведение. Угол между двумя векторами. Векторное и смещенное произведение векторов.
1.5 Уравнение плоскости. Уравнение прямой. Взаимное расположение плоскости и прямой в пространстве. Угол между плоскостями. Угол между прямыми. Расстояние от точки до плоскости. Расстояние от точки до прямой.
1.6 Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола и их уравнения.
1.7 Канонические уравнения поверхностей второго порядка.

II. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ..

2.1 Простейшие элементарные функции. Числовые последовательности. Предел числовой последовательности
2.2 Непрерывность функции. Точка разрыва функции, их классификация.
2.3 Производная. Вычисление производной. Дифференциал функций. Производная сложной и обратной функции. Дифференцирование параметрически заданной и неявной функции. Производные и дифференциалы высших порядков.
2.4 Исследование функций с помощью производных.

III. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

3.1 Неопределенный интеграл. Методы интегрирования неопределенных интегралов: замена переменной и интегрирование по частям.
3.2 Интегрирование рациональных функций. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции. Интегрирование иррациональных функций.
3.3 Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Методы вычисления определенного интеграла: замена переменной и интегрирование по частям
3.4 Приложение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур, длин дуг кривых и объемов тел.
3.5 Несобственные интегралы и их сходимость. Вычисление несобственных интегралов.
3.6 Частные производные и полный дифференциал функций нескольких переменных, экстремумы функций нескольких переменных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я.С. Бугров, С.М. Никольский. “Элементы линейной алгебры и и аналитической геометрии.”. М.: Наука , 1980 г.
2. Я.С. Бугров , С.М. Никольский. “Дифференциальное и интегральное исчисление”. М.Наука, 1980 г.
3. Ё.У. Соатов “Олий математика” 3 т. Т.: Узбекистон, 1996 й.
4. Р.Е. Шнейдер, А.И. Слуцкий, А.С. Шумов. “Краткий курс высшей математики” т.1. М. :Высшая школа, 1978 г.
5. Г.Н. Берман “Сборник задач по курсу математического анализа” М.: Наука, 1975 г.
6. П.Е Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова “Высшая математика в упражнениях и задачах”. Часть I., М. Высшая школа, 1986 г.
7. “Олий математика” фанидан дастур. Профессионал олий таълим давлат стандарти. Техника йуналишилари буйича бакалаврлар тайёрлаш учун Т.: 1997 й.

I- КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ.

1.1 Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} X_1-X_2+3X_3=7 \\ 2X_1-X_2-2X_3=-3 \\ 4X_1+5X_2+4X_3=3 \end{cases}$$

Проверить ее совместность, если она совместна, решить ее тремя способами:
а) по правилу Крамера, б) матричным методом, в) методом Гаусса.

Решение: Для установления совместности системы применим способ элементарных преобразований для расширенной матрицы системы

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & -2 & -4 \\ 4 & 5 & 4 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}=A.$$

Вычислим определитель матрицы A:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 4 \end{vmatrix}. = 64 \neq 0$$

Отсюда следует, что rangA=rangB=3

и согласно теореме Кроникера-Капелли система совместна.
Теперь определим решения системы:
а) Используя правило Крамера:
Так как, $\Delta=|A|=64\neq0$ Решение системы существует, и притом единственное. Находим.

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & -2 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -64; \quad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & -3 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 128.$$

Следовательно, $x_1 = \Delta x_1 / \Delta = 0 / 64 = 0$; $x_2 = \Delta x_2 / \Delta = -64 / 64 = -1$;

$$x_3 = \Delta x_3 / \Delta = 128 / 64 = 2$$

б) Матричным методом:
Имеем

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -16; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \; 14;$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 19; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -8; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \; -9;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 8; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \; 1;$$

Вычислим матрицу A^{-1}, так как, $|A| \neq 0$ и матрица невырожденная

$$A^{-1} = 1 / |A| \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = 1 / 64 \, | \begin{pmatrix} 6 & 19 & 5 \\ -16 & -8 & 8 \\ 14 & -9 & 1 \end{pmatrix}$$

Теперь находим матрицу X:

$$x = 1 / 64 \begin{pmatrix} 6 & 19 & 5 \\ -16 & -8 & 8 \\ 14 & -9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 / 64 \begin{pmatrix} 42 & -57 & +15 \\ -112 & +24 & +24 \\ 98 & +27 & +3 \end{pmatrix} =$$

$$= 1/64 \begin{pmatrix} 0 \\ -64 \\ 128 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Итак, решение системы: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$

в) Методом Гаусса:

$$\begin{cases} X_1-X_2+3X_3=7 \\ 2X_1-X_2-2X_2=-3 \\ 4X_1+5X_2+4X_3=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1-X_2+3X_3=7 \\ X_2-8X_3=-17 \\ 9X_2-8X_3=-25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} X_1-X_2+3X_3=7 \\ X_2-8X_3=-17 \\ 64X_3=128 \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} X_3=2 \\ X_2=-17+8\times2=-1 \\ X_1=7+(-1)-3\times2=0 \end{matrix}$$

Итак, $x_1=0$, $x_2=-1$, $x_3=2$

1.2 Даны векторы $\vec{a} = \{1, 0, 4\}$, $\vec{b} = \{-1, 3, 1\}$, $\vec{c} = \{1, 0, -2\}$, $\vec{d} = \{-1, 15, 33\}$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ в трехмерном пространстве R^3 образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Решение: Находим смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$

$$\Delta = \vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$$

Так как $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} \neq 0$, то заданные векторы некомпланарны и в пространстве R^3 образуют базис. Пусть x_1, x_2, x_3 координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Тогда получим векторное уравнение в виде :

$\vec{d}=x_1\vec{a}+x_2\vec{b}+x_3\vec{c}$, равносильное системе уравнений $\begin{cases} X_1-X_2-X_3=-1, \\ 3X_2=15, \\ 4X_1+X_2-2X_2=33. \end{cases}$

Решим систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} X_1-X_2+X_3=-1 \\ 4X_1+X_2-2X_3=33 \\ 3X_2=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_2=5 \\ X_1+X_3=4 \\ 4X_1-2X_3=28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_2=5 \\ X_1+X_3=4 \\ 6X_3=-12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_2=5 \\ X_3=-2 \\ X_1=4-X_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1=6 \\ X_2=5 \\ X_3=-2 \end{cases}$$

Найденные решения есть координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Таким образом $\vec{d} = \{6, 5, -2\}$ или $\vec{d}=6\vec{a}+5\vec{b}-2\vec{c}$

1.3 Даны координаты точек A (5, -4, 3), B (2, -1, 0), C (3,-2,1).

Найти: а) косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

б) проекцию вектора $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ на направление вектора $\vec{a}$, где

$\vec{a}=\vec{BC}+\vec{AC}$, $\vec{b}=2\vec{AB}-3\vec{CA}$, $\alpha=-5$, $\beta=3$.

Решение: Применяя формулу, выражающую координаты вектора $\vec{M_1M_2}$ через координаты его концов $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Находим

$\vec{M_1M_2} = \{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$

$\vec{BC} = \{3-2, -2-(-1), 1-0\} = \{1, -1, 1\}$

$\rightarrow$

$\vec{AC} = \{3-5, -2-(-4), 1-3\} = \{-2, 2, -2\}$

$\vec{AB} = \{2-5, -1-(-4), 0-3\} = \{-3, 3, 3\}$

Используя векторы $\vec{BC}, \vec{AC}, \vec{AB}$ и формулы:

$$\vec{a_1} \pm \vec{b_1} = \{x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2\},$$

$$\lambda\vec{a_1} = \{\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3\}$$

получим

$$\vec{a} = \vec{BC} + \vec{AC} = \{1-2, -1+2, 1-2\} = \{-1, 1, -1\},$$

$$\vec{b} = 2\vec{AB} - 3\vec{CA} = 2\vec{AB} + 2\vec{AC} = \{2\times(-3)+3\times(-2)\}$$
$$2\times3+3\times2,\ 2\times(-3)+3\times(-2) = \{-12, 12, -12\}.$$

а) Известно, что косинус угла φ между двумя векторами, вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \vec{a}\ \vec{b} / |\vec{a}| \times |\vec{b}| = (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) / \left(\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\ \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}\right)$$

Искомый угол φ образован векторами $\vec{a} = \{-1, 1, -1\}$ и $\vec{b} = \{-12, 12, -12\}$
Следовательно,

$$\cos\varphi = ((-1)\times(-12)+1\times12+(-1)\times(-1)\ (-12)) / \left(\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}\ \sqrt{(-12)^2+12+(-12)^2}\right) =$$

$$= (12+12+12) / (\sqrt{3}\sqrt{3\times144}) = 36 / (3 \cdot 12) = 1$$

б) Сначала находим вектор

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = -5\vec{a} + 3\vec{b} = \{-5\times(-1)+3\times(-12), (-5)\times1+3\times12$$
$$-5\times(-1)+3\times(-12)\} = \{-31, 31, -31\}$$

и потом определим

$\rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow$

$$\text{пр}_{\vec a}(\alpha \vec a+\beta \vec b)=(\vec a\,(\alpha \vec a+\beta \vec b))/\,|\,\vec a\,|$$

Итак, $\text{пр}_{\vec a}(-5\vec a+3\vec b)=((-1)\times(-31)+1\times 31+(-1)\times(-31))\,/\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}$ $=(31+31+31)/\sqrt{3}=31\sqrt{3}$

1.4 Даны координаты вершин пирамиды ABCD:

A(-7, -8, 10), B(-3, 6, 3), C(-3, 0, 6), D(2, -5, -1)

Найти:

а) уравнение плоскости ABC;

б) уравнение ребра AB;

в) уравнение прямой, проходящей через вершину D и перпендикулярной грани ABC;

г) уравнение прямой, проходящей через вершину C и параллельной ребру AB;

д) уравнение плоскости, проходящей через вершину D и перпендикулярной ребру AB;

е) синус угла между ребром AD и гранью ABC;

ж) косинус угла между гранями ABC и ABD;

з) расстояние от вершины D до грани ABC

Решение: а) Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$ определяется по формуле:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Применяя её, находим уравнение плоскости ABC:

$$\begin{vmatrix} x-(-7) & y-(-8) & z-10 \\ -3-(-7) & 6-(-8) & 3-10 \\ -3-(-7) & 0-(-8) & -6-10 \end{vmatrix}=0; \qquad \begin{vmatrix} x+7 & y+8 & z-10 \\ 4 & 14 & -7 \\ 4 & 8 & -6 \end{vmatrix}=0;$$

$$(x+7)\begin{vmatrix} 14 & -7 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} - (y+8)\begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} + (z-10)\begin{vmatrix} 4 & 14 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$-168(x+7)+36(y+8)-24(z-10)=0;$$
$$14x-3y+2z+54=0$$

б) Уравнение ребра AB находим используя уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1 (x_1, y_1, z_1)$, $M_2 (x_2, y_2, z_2)$

$$(x-x_1) / (x_2-x_1)=(y-y_1) / (y_2-y_1)=(z-z_1) / (z_2-z_1)$$

Следовательно:

$$(x-(-7)) / (-3-(-7))= (y-(-8)) / (6-(-8))=(z-10) /(3-10)$$
$$(x+7) / 4= (y+8) / 14= (z-10) / -7$$

в) Пусть искомая прямая задана уравнением:

$$(x-x_1)/ l= (y-y_1) / m=(z-z_1) / p.$$

Так, как прямая проходит через точки $D(2, -5, -1)$, то

$$(x-2)/ l= (y+5) / m=(z+1)/ p$$

Учитывая коллинеарность направляющего вектора искомой прямой $\vec{S}=\{l, m, p\}$ и нормального вектора плоскости ABC $n=\{14, -3, 2\}$, получим $14 / l=-3 / m=2 / p$

Откуда, $l=-(14 / 3)m$, $p=-(2 / 3)m$

Следовательно уравнение прямой проходящей через вершину D и перпендикулярной грани ABC, имеет вид:

$$(x-2)/ -(14 / 3)m=(y+5) / m=(z+1) / -(2 / 3)m;$$
$$(x-2)/ -(14 / 3)=(y+5) / 1=(z+1) / -(2 / 3);$$

г) Искомая прямая проходит через точку C. Поэтому, уравнение её будем искать в виде:

$$(x+3) / l=y / m=(z+6) / p$$

Эта прямая параллельна ребру AB.

$$(x+7) / 4=(y+8) / 14=(z-10) / 7.$$

Используя условия параллельности прямых, находим: $4 / l=14 / m=-7 / p$

Итак, уравнение искомой прямой имеет вид:

$$(x+3) / (2/7)m=y / m=(z+6) / -(1/2)m \text{ или}$$

$$(x+3) / (2/7)=y / 1=(z+6)/ -(1/2)$$

д) Искомая плоскость проходит через точку D. Поэтому, уравнение её имеет вид:

$$A(x-2)+B(y+5)+C(z+1)=0 \Rightarrow \vec{n}=\{A, B, C\}$$

(нормальный вектор плоскости)

Эта плоскость перпендикулярна к ребру AB

$$(x+7)/ 4= (y+8) / 14=(z-10) / -7 .$$

Используя условия перпендикулярности прямой и плоскости имеем:

$$A / 4=B / 14=C / -7.$$

Следовательно, уравнение искомой плоскости имеет вид:

$$(2/7)B(x-2)+B(y+5)-(1/2) B(z+1)=0 \quad \text{или}$$

$$4X+14Y-7Z-55=0.$$

е) Определим сначала уравнение ребра AD:

$$(x-(-7)) / (2-(-7)) =(y-(-8)) / (-5-(-8))=(z-10)/ (-1-10);$$

$$(x+7)/ 9=(y+8)/ 3=(z-10) / -11.$$

Откуда $\vec{S}=\{9, 3, -11\}$

Учитывая, что нормальный вектор грани ABC равен $\vec{n}=\{14, -3, 2\}$, определим синус угла между ребрами AD и гранью ABC:

$$\mathrm{Sin}\varphi= (Al+Bm+Cp)/ (\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{l^2+m^2+p^2}|)$$

$$\mathrm{Sin}\varphi=(14\times9+(-3) \times3+2\times(-11)) / (\sqrt{14^2+(-3)^2+2^2}\,\sqrt{9^2+3^2+(-11)^2})=$$

$$= 95 / (\sqrt{209}\,\sqrt{211}) \approx 0.45$$

ж) Определим сначала уравнение грани ABD

$$\begin{vmatrix} x(-7) & y-(-8) & z-10 \\ -3-(-7) & 6-(-8) & 3-10 \\ 2-(-7) & -5-(-8) & -1-10 \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} x+7 & y+8 & z-10 \\ 4 & 14 & -7 \\ 9 & 13 & -11 \end{vmatrix}=0,$$

$$7x+y+6z-3=0.$$

Пременяя формулу, определяющую угол между двумя плоскостями, находим косинус угла между гранями ABC и ABD:

$$Cos\varphi=(7\times14+1\times(-3)+6\times2)/(\sqrt{7^2+1^2+6^2}\sqrt{14^2+(-3)^2+2^2})=$$

$$=107 / (\sqrt{86}\sqrt{209}) \approx 0.8$$

е) Расстояние от вершины D до грани ABC определим по формуле расстояние от точки до плоскости:

$$d=|Ax_0+By_0+Cz_0+D| / \sqrt{A^2+B^2+C^2}=$$

$$=|14\times2+(-3)\times(-5)+2\times(-1)+54| / \sqrt{14^2+(-3)^2+2^2}=95 / \sqrt{209} \approx 6.57$$

ед. длины

1.5 Найти точку пересечения прямой $(x+3) / 2=y / 0=(z-1) / 1$ и плоскости

$$4x-y+2z=0.$$

Решение: Рассмотрим два вектора $\vec{n}\{A, B, C\}=\{4, -1, 2\}$ и $\vec{S}\{l, m, p\}=$ $=\{2, 0, 1\}$ Первый из них перпендикулярен заданной плоскости, а второй параллелен заданной прямой. Прямая пересекается с плоскостью, так как

$$Al+Bm+Cp=4\times2+(-1)\times0+2\times1=10\neq0$$

Чтобы найти точку пересечения, запишем уравнение прямой в параметрической форме:

$$(x+3) / 2=y / 0=(z-1) / 1=t;$$

$x=2t-3, y=0, z=t+1$ и подставим эти выражения для x, y, z в уравнение плоскости:

$$4(2t-3)-0+2(t+1)=0$$

Решая его находим $t=1$. Следовательно, координаты точки пересечения $x=-1, y=0, z=2$.

1.6 Составить уравнение геометрического места точек, отношения расстояний которых до данных точек $A(3, -2)$ и $B(4, 6)$ равно числу 3/5

Решение: Пусть M(x, y)- произвольная точка искомого геометрического места точек. Расстояние /AM/ и /BM/ находим по формуле расстояние между двумя точками:

$$/AM/=\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2} \text{ и } /BM/=\sqrt{(x-4)^2+(y-6)^2}$$

По условию задачи /AM/ : /BM/=3/5

Следовательно

$$\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2} / \sqrt{(x-4)^2+(y-6)^2}=3/5$$

$$5\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2} = 3\sqrt{(x-4)^2+(y-6)^2}$$

Возведя в квадрат левую и правую части, получим

$$25(x^2-6x+9+y^2+4y+4)=9(x^2-8x+16+y^2-12y+36)$$

$$16x^2-78x+16y^2+208y=143,$$

$$16(x^2-(39/8)x+y^2+13y)=143,$$

$$x^2-2\times(39/16)x+(39/16)^2+y^2+2\times(13/2)y+(13/2)^2=143/16+(39/16)^2+(13/2)^2;$$

$$(x-39/16)^2+(y+13/2)^2=14625/256,$$

$$(x-39/16)^2+(y+13/2)^2=(15\sqrt{65} / 16)^2.$$

Полученное уравнение представляет собой окружность, с центром в точке $M_0(39/16, -13/2)$ и радиусом равным $15\sqrt{65} / 16$

ЗАДАНИЕ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №1

1.1.1-1.1.25. Дана система линейных уравнений. Проверить её совместность, если она совместна, решить её тремя способами:

а) по правилу Крамера;

б) матричным методом;

в) методом Гаусса;

1.1.1 $\begin{cases} X_1-X_2+2X_2=-3 \\ 3X_1+X_2+7X_3=-1 \\ X_1-4X_2+3X_3=7 \end{cases}$
1.1.2 $\begin{cases} 3X_1-2X_2+X_3=5 \\ 2X_1-3X_2-2X_3=6 \\ 4X_1-X_2+4X_3=4 \end{cases}$
1.1.3 $\begin{cases} X_1+4X_2-3X_3=-2 \\ 2X_1+5X_2+X_3=-1 \\ X_1+7X_2-10X_3=-5 \end{cases}$

1.1.4 $\begin{cases} 3X_1+2X_2-2X_3=3 \\ X_1+X_2+X_3=0 \\ 4X_1+X_2-5X_3=1 \end{cases}$
1.1.5 $\begin{cases} 2X_1+X_2-X_3=9 \\ 2X_1-3X_2=0 \\ 5X_1-4X_2-2X_3=9 \end{cases}$
1.1.6 $\begin{cases} 5X_1+6X_2+2X_3=-9 \\ 2X_1+5X_2-3X_3=-1 \\ 4X_1-3X_2+2X_3=-15 \end{cases}$

1.1.7 $\begin{cases} 3X_1-2X_2-5X_3=-14 \\ X_1-2X_2+3X_3=0 \\ 2X_1+3X_2-4X_3=10 \end{cases}$
1.1.8 $\begin{cases} 4X_1+X_2-3X_3=-6 \\ 8X_1+3X_2-6X_3=-15 \\ X_1+X_2-X_3=-4 \end{cases}$
1.1.9 $\begin{cases} 2X_1+7X_2-X_3=10 \\ 3X_1-5X_2+3X_3=-14 \\ X_1+2X_2+X_3=-1 \end{cases}$

1.1.10 $\begin{cases} 2X_1+3X_2+4X_3=-10 \\ 4X_1+11X_3=-29 \\ 7X_1-5X_2=7 \end{cases}$

1.1.11 $\begin{matrix} 2X_1+X_2-5X_3=-11 \\ 4X_1+11X_3=-29 \\ 7X_1-5X_2=7 \end{matrix}$

$\begin{matrix} 2X_1-X_2+5X_3=10 \\ 5X_1+2X_2-13X_3=21 \\ 3X_1-X_2+5X_3=12 \end{matrix}$

1.1.13 $\begin{cases} X_1-4X_2-2X_3=0 \\ 3X_1-5X_2-6X_3=7 \\ 3X_1+X_2+X_3=6 \end{cases}$

1.1.14 $\begin{cases} 2X_1-3X_2+2X_3=-6 \\ 5X_1+8X_2-X_3=0 \\ X_1-2X_2+3X_3=6 \end{cases}$

1.1.15 $\begin{cases} X_1-5X_2+X_3=-2 \\ 2X_1-4X_2-3X_3=0 \\ 3X_1+4X_2+2X_3=3 \end{cases}$

1.1.16 $\begin{cases} X_1+2X_2+4X_3=31 \\ 5X_1+X_2+2X_3=20 \\ 3X_1-X_2+X_3=0 \end{cases}$

1.1.17 $\begin{cases} X_1-4X_2-2X_3=-7 \\ 3X_1+X_2-X_3=5 \\ -3X_1+5X_2+6X_3=7 \end{cases}$

1.1.18 $\begin{cases} 3X_1+4X_2+2X_3=8 \\ 2X_1-X_2-3X_3=-1 \\ X_1+5X_2+X_3=-7 \end{cases}$

1.1.19 $\begin{cases} X_1+X_2+3X_3=-1 \\ 2X_1-X_2+2X_3=-4 \\ 4X_1+X_2+4X_3=-2 \end{cases}$

1.1.20 $\begin{cases} X_1-2X_2-3X_3=6 \\ 2X_1+3X_2-4X_3=20 \\ 3X_1-2X_2-5X_3=6 \end{cases}$

1.1.21 $\begin{cases} 7X_1-5X_2=31 \\ 4X_1+11X_3=-43 \\ 2X_1+3X_2+4X_3=-20 \end{cases}$

1.1.22 $\begin{cases} X_1+X_2-X_3=1 \\ 8X_1+3X_2-6X_3=2 \\ -4X_1-X_2+3X_3=-3 \end{cases}$

1.1.23 $\begin{cases} 2X_1-X_2-X_3=4 \\ 3X_1+4X_2-2X_3=11 \\ 3X_1-2X_2+4X_3=11 \end{cases}$

1.1.24 $\begin{cases} 4X_1-3X_2+2X_3=9 \\ 2X_1+5X_2-3X_3=4 \\ 5X_1+6X_2+2X_3=18 \end{cases}$

1.1.25 $\begin{cases} 3X_1+2X_2+X_3=5 \\ 2X_1+3X_2+X_3=1 \\ 2X_1+X_2+3X_3=11 \end{cases}$

1.2.1-1.2.25 Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{в}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{в}$, $\vec{c}$ в трехмерном пространстве R^3 образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

1.2.1 $\vec{a}=\{1, 2, -1\}$ $\vec{в}=\{3, 0, 2\}$ $\vec{c}=\{1, 1, 4\}$ $\vec{d}=\{-13, 2, 18\}$

1.2.2 $\vec{a}=\{-1, 1,1\}$ $\vec{в}=\{3, 2, 0\}$ $\vec{c}=\{1, -1, 2\}$ $\vec{d}=\{11,-1, -4\}$

1.2.3 $\vec{a}=\{2, -1, 0\}$ $\vec{в}=\{1, -1, 2\}$ $\vec{c}=\{0, 3, 1\}$ $\vec{d}=\{-1, 7, 0\}$

1.2.4 $\vec{a}=\{4, 2, 1\}$ $\vec{в}=\{1, 0, 1\}$ $\vec{c}=\{2, 1, 0\}$ $\vec{d}=\{3, 1, 3\}$

1.2.5 $\vec{a}=\{-3, 2, 5\}$ $\vec{в}=\{1, -1, 0\}$ $\vec{c}=\{2, 1, 0\}$ $\vec{d}=\{-9, 3, 15\}$

1.2.6 $\vec{a}=\{1, 3, 0\}$ $\vec{в}=\{0, -2, 1\}$ $\vec{c}=\{1, 0, 1\}$ $\vec{d}=\{-13, 2, 18\}$

1.2.7 $\vec{a}=\{-1, 1, 0\}$ $\vec{в}=\{3, 2, -1\}$ $\vec{c}=\{0, 5, 1\}$ $\vec{d}=\{5, 0, -3\}$

1.2.8 $\vec{a}=\{4, 1, 0\}$ $\vec{в}=\{3, -1, 1\}$ $\vec{c}=\{0, 1,- 2\}$ $\vec{d}=\{1,-4, 1\}$

1.2.9 $\vec{a}=\{1, -1, 2\}$ $\vec{в}=\{-3, 2, 0\}$ $\vec{c}=\{1, 2,-1\}$ $\vec{d}=\{8, 8, 7\}$

1.2.10 $\vec{a}=\{-1, 1,1\}$ $\vec{в}=\{3, 0, 2\}$ $\vec{c}=\{1, 2, -1\}$ $\vec{d}=\{8,-5, 7\}$

1.2.11 $\vec{a}=\{2, 0, -1\}$ $\vec{в}=\{1, 2, -1\}$ $\vec{c}=\{0, 1, 3\}$ $\vec{d}=\{5, -4, 5\}$

1.2.12 $\vec{a}=\{4, 1, 2\}$ $\vec{в}=\{1, 1, 0\}$ $\vec{c}=\{2, 0, 1\}$ $\vec{d}=\{3, 5, 0\}$

1.2.13	$\vec{a}=\{2, 5, -3\}$	$\vec{\text{в}}=\{-1,\ 0,\ 1$	$\vec{c}=\{1, 0, 2\}$	$\vec{d}=\{-3, -5, 7\}$
1.2.14	$\vec{a}=\{1, 0, 3\}$	$\vec{\text{в}}=\{0, 1, -2\}$	$\vec{c}=\{1, 1, 0\}$	$\vec{d}=\{7, -1, 19\}$
1.2.15	$\vec{a}=\{0, -1, 1\}$	$\vec{\text{в}}=\{-1, 3, 2\}$	$\vec{c}=\{1, 0, 5\}$	$\vec{d}=\{5, -15, 0\}$
1.2.16	$\vec{a}=\{1, 0, 4\}$	$\vec{\text{в}}=\{-1, 1, 3\}$	$\vec{c}=\{1, -2, 0\}$	$\vec{d}=\{-6, 2, 0\}$
1.2.17	$\vec{a}=\{2, 1, -1\}$	$\vec{\text{в}}=\{0, -3, 2\}$	$\vec{c}=\{1, 1, 4\}$	$\vec{d}=\{-6, -14, -9\}$
1.2.18	$\vec{a}=\{1, 0, 4\}$	$\vec{\text{в}}=\{-1, 1, 3\}$	$\vec{c}=\{1, -2, 0\}$	$\vec{d}=\{0, 7, 29\}$
1.2.19	$\vec{a}=\{2, 1, -1\}$	$\vec{\text{в}}=\{0, -3, 2\}$	$\vec{c}=\{1, 1, 4\}$	$\vec{d}=\{4, -9, 14\}$
1.2.20	$\vec{a}=\{2, 0, 3\}$	$\vec{\text{в}}=\{1, 1, 1\}$	$\vec{c}=\{-1, 2, 1\}$	$\vec{d}=\{-11, 11, -14\}$
1.2.21	$\vec{a}=\{1, -2, 1\}$	$\vec{\text{в}}=\{-1, 0, 2\}$	$\vec{c}=\{-3, 1, 0\}$	$\vec{d}=\{16, -19, 10\}$
1.2.22	$\vec{a}=\{1, 0, 2\}$	$\vec{\text{в}}=\{3, -3, 4\}$	$\vec{c}=\{0, 1, 1\}$	$\vec{d}=\{-16, 13, -25\}$
1.2.23	$\vec{a}=\{0, 3, 1\}$	$\vec{\text{в}}=\{1, -2, 0\}$	$\vec{c}=\{1, 0, 1\}$	$\vec{d}=\{2, 7, 5\}$
1.2.24	$\vec{a}=\{-1, 0, 1\}$	$\vec{\text{в}}=\{3, -1, 2\}$	$\vec{c}=\{0, 1, 5\}$	$\vec{d}=\{8, -7, -13\}$
1.2.25	$\vec{a}=\{4, 0, 1\}$	$\vec{\text{в}}=\{3, 1, -1\}$	$\vec{c}=\{0, -2, 1\}$	$\vec{d}=\{0, -8, 9\}$

1.3.1-1.3.25 Даны координаты точек A, B, C. Найти:

а) косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

б) проекцию вектора $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ на направление вектора $\vec{a}$

1.3.1 A(9, 10, 1), B(7, 6, -1), C(4, 0, -4)
$\vec{a}=2\vec{AB}-3\vec{AC}$, $\vec{b}=4\vec{BC}+\vec{AC}$, $\alpha=1$, $\beta=2$

1.3.2 A(0, 2, 1), B(1, 2, 0), C(0, 3, -1)
$\vec{a}=3\vec{AC}+3\vec{BC}$, $\vec{b}=\vec{AB}+5\vec{BC}$, $\alpha=-1$, $\beta=2$

1.3.3 A(0, 4, 8), B(-5, 4, -2), C(-1, 4, 1)
$\vec{a}=\vec{AB}-4\vec{AC}$, $\vec{b}=3\vec{AC}+2\vec{AB}$, $\alpha=-2$, $\beta=3$

1.3.4 A(3, 0, 1), B(-2, 3, 2), C(1, 1, -2)
$\vec{a}=3\vec{BC}-\vec{AB}$, $\vec{b}=6\vec{BC}+5\vec{AC}$, $\alpha=1$, $\beta=2$

1.3.5 A(4, 1, -3), B(5, 1, -2), C(-1, 3, 3)
$\vec{a}=4\vec{AC}-2\vec{CB}$, $\vec{b}=7\vec{AB}+5\vec{BC}$, $\alpha=$, $\beta=3$

1.3.6 A(4, 1, 1), B(3, 1, 2), C(0, 1, -2)
$\vec{a}=3\vec{BC}-4\vec{CA}$, $\vec{b}=6\vec{BA}-\vec{AC}$, $\alpha=1$, $\beta=2$

1.3.7 A(-3, 4, -5), B(0, 1, -2), C(-1, 2, 3)
$\vec{a}=4\vec{AB}-3\vec{BC}$, $\vec{b}=5\vec{CA}-2\vec{BA}$, $\alpha=-2$ $\beta=5$

1.3.8 $A(7, 5, -2)$, $B(6, 0, 0)$, $C(7, 2, 2)$
$\vec{a}=4\vec{AB}-3\vec{BC}$, $\vec{b}=2\vec{CB}+5\vec{AC}$, $\alpha=-4$ $\beta=2$

1.3.9 $A(-3, 27, -3)$, $B(-1, -3, -1)$, $C(2, 3, 2)$
$\vec{a}=2\vec{BC}-5\vec{AB}$, $\vec{b}=5\vec{AC}-\vec{CB}$, $\alpha=-3$, $\beta=1$

1.3.10 $A(2,-1,8)$, $B(3, 1, 7)$, $C(2, 0, 7)$
$\vec{a}=\vec{AB}-3\vec{BC}$, $\vec{b}=6\vec{CB}-2\vec{AC}$, $\alpha=5$ $\beta=6$

1.3.11 $A(-1, -1, 8)$ $B(4, -1, -2)$, $C(0, -1, 1)$
$\vec{a}=6\vec{BC}+2\vec{AB}$, $\vec{b}=2\vec{AC}-5\vec{AB}$, $\alpha=1$, $\beta=2$

1.3.12 $A(-2, 4, -2)$, $B(3, 1, 0)$, $C(0, 3, -4)$
$\vec{a}=3\vec{AB}-4\vec{AC}$, $\vec{b}=2\vec{BC}+5\vec{CA}$, $\alpha=3$, $\beta=-6$

1.3.13 $A(1, 1, 4)$, $B(-2, 1, 5)$, $C(-1, 3, 3)$
$\vec{a}=4\vec{AC}-2\vec{BC}$, $\vec{b}=2\vec{AC}+3\vec{AB}$, $\alpha=-5$, $\beta=3$

1.3.14 $A(4, 2, 6)$, $B(2, 2, 8)$, $C(-4, 2, 0)$
$\vec{a}=5\vec{AB}-7\vec{AC}$, $\vec{b}=2\vec{BC}+3\vec{BA}$, $\alpha=9$, $\beta=12$

1.3.15 $A(15, -12, 0)$, $B(6, -3, 0)$, $C(9, -6, 8)$
$\vec{a}=\vec{AC}-6\vec{BC}$, $\vec{b}=\vec{AB}+3\vec{BC}$, $\alpha=-7$, $\beta=6$

1.3.16 $A(-1, -5, -2)$, $B(0, -6, 4)$, $C(-1, -8, 2)$
$\vec{a}=3\vec{BC}+5\vec{AB}$, $\vec{b}=5\vec{AC}-3\vec{AB}$, $\alpha=-3$, $\beta=4$

1.3.17 $A(-1,-10,-5)$, $B(1, -8, -3)$, $C(0, 0, 4)$
$\vec{a}=2\vec{BC}-3\vec{AC}$, $\vec{b}=4\vec{AB}+3\vec{AC}$, $\alpha=4$, $\beta=-6$

1.3.18 $A(-3, 3, 7)$, $B(-2, 3, 6)$, $C(-3, 2, 6)$
$\vec{a}=4\vec{AB}+\vec{AC}$, $\vec{b}=2\vec{BC}-3\vec{BA}$, $\alpha=-3$, $\beta=8$

1.3.19 $A(2, -2, -8)$, $B(5, -2, -4)$, $C(1, -2, -4)$
$\vec{a}=5\vec{AB}-3\vec{BC}$, $\vec{b}=4\vec{CA}+\vec{AB}$, $\alpha=-4$, $\beta=1$

1.3.20 $A(1, 2, 4)$, $B(-4, -1, 6)$, $C(-1, 1, 2)$
$\vec{a}=3\vec{CA}-2\vec{AB}$, $\vec{b}=2\vec{BA}+4\vec{CB}$, $\alpha=3$, $\beta=-5$

1.3.21 $A(1, 1, 4)$, $B(-1, 5, 1)$, $C(-1, 3, 3)$
$\vec{a}=\vec{AB}+\vec{AC}$, $\vec{b}=2\vec{BC}-3\vec{AB}$, $\alpha=3$, $\beta=-4$

1.3.22 $A(0, 1, -2)$, $B(3, 1, 2)$, $C(4, 1, 1)$
$\vec{a}=2\vec{AC}+3\vec{BA}$, $\vec{b}=3\vec{BC}-4\vec{AB}$, $\alpha=-2$, $\beta=6$

1.3.23 $A(6, -8, 10)$, $B(0, -2, 4)$, $C(2, -4, 6)$
$\vec{a}=3\vec{AB}+6\vec{CB}$, $\vec{b}=2\vec{AC}-5\vec{AB}$, $\alpha=2$, $\beta=8$

1.3.24 $A(0, 3, 2)$, $B(-2, -1, 0)$, $C(-5, -7, -3)$
$\vec{a}=5\vec{BC}-2\vec{CA}$, $\vec{b}=6\vec{AB}+4\vec{AC}$, $\alpha=-2$, $\beta=5$

1.3.25 $A(-1, 4, 6)$, $B(0, 2, 5)$, $C(-1, 3, 5)$
$\vec{a}=8\vec{AC}-4\vec{AB}$, $\vec{b}=2\vec{BC}-6\vec{AB}$, $\alpha=-3$, $\beta=-4$

1.4.1-1.4.25 Даны координаты вершин пирамиды ABCD. Найти:

а) уравнение плоскости ABC;
б) уравнение ребра AB;
в) уравнение прямой, проходящей через вершину D и перпендикулярной грани ABC;
г) уравнение прямой, проходящей через вершину C и параллельной ребру AB;
д) уравнение плоскости, проходящей через вершину D и перпендикулярной ребру AB;
е) синус угла между ребром AD и гранью ABC;
ж) косинус угла между гранями ABC и ABD;
з) расстояние от вершины D до грани ABC;

1.4.1	A(7, 3, 5)	B(5, 3, 2)	C(10, 2, 4)	D(7, -2, 1)
1.4.2	A(-8, -6, -3)	B(4, 2, 1)	C(0, 5, 2)	D(0, 2, 5)
1.4.3	A(-7, -13,14)	B(-6, 0, 5)	C(1, 2, 1)	D(-2,-1, 2)
1.4.4	A(5, 5, -6)	B(-4, -8, 4)	C(1, 7, -1)	D(-4, 0, -2)
1.4.5	A(7, -8, -1)	B(-3, -6, -2)	C(2, -3, -5)	D(5, 4, 14)
1.4.6	A(16, -8, -13)	B(5, 3, 2)	C(-3, 0, 3)	D(0, 2, 1)
1.4.7	A(7, 3, -5)	B(1, 2, 3)	C(-1, 2, 1)	D(2, -1,2)
1.4.8	A(8, 3, 2)	B(4, -2, 2)	C(3, 1, -1)	D(2, 1, 1)
1.4.9	A(8,-4,-5)	B(7, 3, 6)	C(-2, 1, 4)	D(1, 3, 2)
1.4.10	A(6,-7,-3)	B(1, 2, 3)	C(1, 3, 2)	D(7, -2, 1)
1.4.11	A(12,7, -1)	B(0,-2,-5)	C(-4, 5, 1)	D(-7, 4,3)
1.4.12	A(-5, -6, 1)	B(-2, 1, 2)	C(0, -1, 4)	D(-3, 2, 1)
1.4.13	A(-1, 0, -7)	B(4, -5, 3)	C(-2, 1,-9)	D(1, -1, 3)
1.4.14	A(2, 4, -2)	B(-1, 1, 2)	C(3, 0, -2)	D(1, -1, 1)
1.4.15	A(4, -1, 2)	B(-1, 1, 0)	C(2, -1, 1)	D(0, 2, 1)
1.4.16	A(16, -9, -5)	B(1, -2, 2)	C(-1, 2, 1)	D(2, 0, 1)
1.4.17	A(-9, -2, 3)	B(6, -1, -2)	C(1, 0, 1)	D(-3, 2,1)
1.4.18	A(-10, 7,-6)	B(-3, 0, -6)	C(-5, -3, -2)	D(-1, 10, 3)
1.4.19	A(5, 3, -2)	B(-1, 0, 3)	C(-4, -2, -1)	D(4, 2, -1)
1.4.20	A(-5, 4, -3)	B(5, -1, 2)	C(2, 1, -4)	D(1, -3, 0)
1.4.21	A(0, 3, 4)	B(1, 0, 3)	C(2, -1, 4)	D(0, 3, 1)
1.4.22	A(-16, 20, -21)	B(-4, 1, 3)	C(2, 3, 0)	D(-1, -1, -2)
1.4.23	A(2, -1, 1)	B(3, 7, -2)	C(3, 6, 3)	D(-7, 5, 1)
1.4.24	A(8, -10,2)	B(-3, 3, -1)	C(0, -6, 5)	D(-3, -4, 2)
1.4.25	A(7, 2, -3)	B(4, 1, 1)	C(2, 1, 2)	D(2, -1, 1)

1.5.1-1.5.25 Найти точку пересечения данной прямой и плоскости.

1.5.1 $(x-3) / 0=(y+2) / 3=(z-5) / 10$, $x+2y-2z+25=0$

1.5.2 (x+1) / 1=(y+3) / 0=(z-2) / -2 , 2x-7y-3z-21=0
1.5.3 (x-1) / 2=(y-2) / -3=(z-3) / 1, 5x-2y-z-13=0
1.5.4 (x+2) / -2=(y-1) / 4=(z-2) / 3, 4x-y+3z+6=0
1.5.5 (x+5) / 3=(y-3) / 1=(z-1) / 6, 5x-2y+3z-3=0
1.5.6 (x+1) / 3=(y) / 0=(z+1) / -2 , 5x-2y+3z-3=0
1.5.7 (x-8) / 0=(y+2) / -1=(z-3) / 1, 4x+9y+5z=0
1.5.8 (x+8) / 7=(y-2) / 1=(z-1) / -1, 6x-y-4z-3=0
1.5.9 (x-1) / 2=(y+3) / 5=(z-5) / -1, 5x-7y-3z+11=0
1.5.10(x+5) / 0=(y-1) / -1=(z-3) / 1, 3x+7y+z+11=0
1.5.11(x+5) / 12=(y-8) / -5=(z-1) / 8, 3x-2y-z-6=0
1.5.12(x+y) / -1=(y-2) / 0=(z-5) / -2/, 4x-5y+2z+24=0
1.5.13(x+3) / 2=(y+1) / 3=(z-3) / 2, 7x+4y+3z-16=0
1.5.14(x-3) / 3=(y+5) / 2=(z) / 1, 3x+4y-5z+20=0
1.5.15(x-1) / 5=(y-1) / 3=(z+3) / 2, 7x-3y+2z-28=0
1.5.16(x-4) / 2=(y-4) / 5=(z-3) / -1, 4x+y-7z-19=0
1.5.17(x-4) / 3=(y-2) / -1=(z+2) / 2, 5x-3y+z-36=0
1.5.18(x+2) / 3=(y-2) / -5=(z+3) / 1, 4x+y+5z+3=0
1.5.19(x+3) / 2=(y-1) / -1=(z-3) / 1, x-2y-z+2=0
1.5.20(x-1) / -1=(y+1) / 0=(z-1) / 1, 4x+2y-3z+8=0
1.5.21(x+2) / 3=(y-2) / -1=(z-1) / 2, x-2y-4z+11=0
1.5.22(x+3) / 0=(y-2) / 0=(z+2) / 1, 5x+3y-2z+7=0
1.5.23(x+4) / -1=(y-1) / 1=(z+2) / -1, 3x-y+2z+23=0
1.5.24(x-4) / 1=(y-2) / 6=(z-1) / 2, 4x-2y+z-19=0
1.5.25(x+1) / 4=(y-3) / -1=(z-2) / 1, 3x+2y+z-8=0

1.6.1-1.6.10 Составить уравнение геометрического места точек, отношение расстояний, которых до данных точек A(x, y) и B(x, y) равно числу a

1.6.1 A(0, 0), B(5, 0), a=2
1.6.2 A(4, 0), B(1, 0), a=2
1.6.3 A(3, 0), B(26, 0), a=1/2
1.6.4 A(-4, 0), B(0, 0), a=3
1.6.5 A(4, 1), B(-2, -1), a=4
1.6.6 A(-3, 3), B(5, 1), a=3
1.6.7 A(4,-2), B(1, 6), a=2
1.6.8 A(3, 0), B(26, 1), a=1/2
1.6.9 A(0, 0), B(5, 0), a=2
1.6.10 A(-4, 0), B(0, 0), a=3

1.6.11-1.6.25 Составить уравнение геометрических мест точек отношение расстояний, которых от данной точки A(x, y) и до данной прямой x=B равно числу m

1.6.11 A(2, 0), x=5/2, m=4/5
1.6.12 A(2, 0), x=-8/5, m=5/4
1.6.13 A(-1, 0), x=-4, m=1/2
1.6.14 A(2, 0), x=-9/2, m=2/3
1.6.15 A(1, 3), x=6, m=1/2
1.6.16 A(4, 0), x=-2, m=1/2
1.6.17 A(6, 1), x=-5, m=1/3
1.6.18 A(-1, 2), x=9, m=1/4

1.6.19 A(1, 0), x=8, m=1/5

1.6.20 A(2, 1), x=-5, m=3

1.6.21 A(0,-5), x=3, m=1/2

1.6.22 A(-3, 4), x=5, m=3

1.6.23 A(1, 5), x=-1, m=1/4

1.6.24 A(3, 0), x=12, m=1/2

1.6.25 A(6, 0), x=3/2, m=2

II КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННООЙ. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ.
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №2.

1.2.1 Найти а) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2-5x+4}-x$; б) $\lim\limits_{x\to 0} (\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}) / (\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})$

в) $\lim\limits_{x\to 0} (2^{3x}-3^{2x}) / (\sin 7x-\sin 2x)$

Решение:

а) Так как $\sqrt{x^2-5x+4} \to \infty$ и $x\to \infty$ при $x\to 0$,

имеем неопределенность вида $\infty - \infty$ преобразуем данное выражение

$$(\sqrt{x^2-5x+4}-x)(\sqrt{x^2-5x+4}+x) / (\sqrt{x^2-5x+4}+x)=$$
$$(x^2-5x+4-x^2) / (\sqrt{x^2-5x+4}+x)=(-5x+4) / (\sqrt{x^2-5x+4}+x)=$$
$$(-5+(4/x)) / (\sqrt{1-(5/x)+(4/x^2)}+1)$$

Тогда

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2-5x+4}-x = \lim_{x\to\infty} (-5+(4/x)) / \lim_{x\to\infty} (\sqrt{1-(5/x)+(4/x^2)}+1)=-5/2$$

б) Предел знаменателя и числителя при $X\to 0$ равен нулю, поэтому имеем неопределенность вида 0/0, которая раскрывается следеующем образом:

$$[(\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}) (\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}) / (\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})]/$$
$$/ [(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}) (\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}) / (\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})]=$$

$$=[2x/ (\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})] / [2x/ (\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})]= (\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}) / (\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 0} (\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}) / (\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})=$
$=\lim\limits_{x\to 0} (\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}) / (\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})=2/6=1/3$

в) Имеем неопределенность вида 0/0, которая раскрывается следующим образом:

$$(2^{3x}-3^{2x}) / (\sin 7x-\sin 2x)= 9^x[(8/9)^x-1] / (2\sin(5/2)x)\times(\cos(9/2)x)=$$

$$[\, 9^x\times x \times [(8/9)^x-1) / x \,]/ [(2\times(5x/2))\times((\, \sin(5/2)x)\times(\cos(9/2)x) / 5x/2)]=$$

$$[(9x\times[(8/9)^x-1^2]) / x] / [5\times((\sin(5/2)x) / (5/2)x)]$$

Так как, $\lim\limits_{x\to 0} (8/9)^x-1) / x=\ln 8/9$; $\lim\limits_{x\to 0} 9^x = 1$

и $\lim\limits_{x\to 0} (\sin(5/2)x) / (5/2)x=1$, $\lim\limits_{x\to 0} \cos(9/2)x=1$, то

$$\lim((2^{3x}-3^{2x}) / (\sin 7x-\sin 2x))= (1\times\ln(8/9)) / (5\times1\times1)=(\ln 8/9)/5$$

2.2 Исследовать данную функцию на непрерывность и построить ее график.

$$f(x)=\begin{cases} X^2+1, \text{ если } X<0 \\ 1-X, \text{ если } 0\le X\le 2 \\ X+2, \text{ если } X>2 \end{cases}$$

Решение : Функция $f(x)$ определена и непрерывна на итервалах $(\infty, 0)$, $(0, 2)$ и $(2, +\infty)$, где она задана непрерывными фунциями. Следовательно, разрыв возможен только в точках $x_1=0$ и $x_2=2$.
Для точек $x_1=0$ имеем:

$\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0}$ $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}$

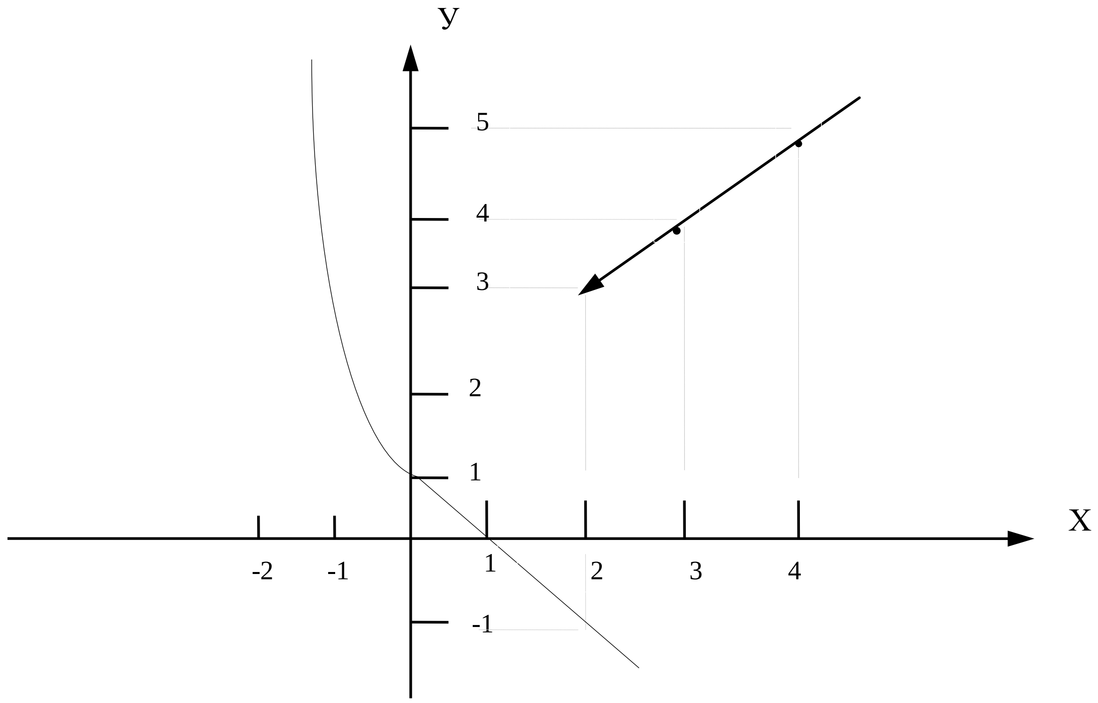
$$x^2+1=1, \qquad (1-x)=1$$

$f(0)=1-x\,|_{x=0} = 1$ т.е. функция $f(x)$ в точке $x_1=0$ непрерывна.

Для точки $x_2=2$ находим:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}(1-x)=-1 \qquad \lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}(x+1)=3$$

$f(2)\ 1-x\,|_{x=2} =1$ в точке $x_2=2$ функция имеет разрыв первого рода. Построим график.



2.3 Продифференцировать данные функции

а) $y=\ln \operatorname{arctg} x^2$; б) $y=(\sin x)^{\cos x}$

в) $x^3+\ln y-x^2\, e^y=0$

Решение:

а) $$y^{|}=(\ln \operatorname{arctg} x^2)^{|}=(1 / \operatorname{arctg} x^2)\times(\operatorname{arctg} x^2)^{|}=$$
$$=(1 / \operatorname{arctg} x^2)\times (x^2)^{|} /(1+ (x^2)^2)= (2x / (1+x^4)) \operatorname{arctg} x^2$$

б)Прологарифмируем данную фунуцию

$$\ln y=\cos x \ln(\sin x)$$

Тогда $(1/y)\ y^{|}=-\sin\ x\ \ln(\sin\ x)+\cos x\ (1/\sin x)(\sin x)^{|}.$

$$(1/y)\ y^{|}=-\sin x\ln(\sin x)+(\cos^2 x / \sin x)$$

Отсюда выразим $y^{|}$

$$y^{|}=-y((\sin x\ln(\sin x)-(\cos^2 x / \sin x))$$

$$y=-(\sin x)^{\cos x}[\sin x\ln(\sin x)-(\cos^2 x / \sin x)]$$

в) Дифференцируя имеем равенство

$$3x^2+(y^{|}/y)-2xe^y-x^2e^yy^{|}=0$$

Откуда

$$y^{|}=(2xye^y-3x^2y) / (1-x^2y\ e^y)=xy(2e^y-3x) / (1-x^2y\ e^y)$$

2.4 Найти $y^{|}$ и $y^{||}$

а) $y=e^{-x}\sin x$ б) $\begin{cases} x=2\cos^2 t \\ y=\sin^2 2t \end{cases}$

Решение:

а) $y^{|}=(e^{-x})^{|}\times\sin x+e^{-x}(\sin x)^{|}=(e^{-x})(-x)^{|}\sin x+e^{-x}\cos x=$

$$=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x=e^{-x}(\cos x-\sin x)$$

$$y^{||}=[e^{-x}(\cos x-\sin x)]^{|}=-e^{-x}(\cos x-\sin x)+e^{-x}(-\sin x-\cos x)=$$

$$=-e^{-x}(\cos x-\sin x+\sin x+\cos x)=-2e^{-x}\cos x$$

б) Так как $\begin{cases} x_t^{|}=-4\cos t\sin t=-2\sin 2t \\ y_t^{|}=(2\sin 2t\cos 2t)\times 2=4\sin 2t\times\cos 2t \end{cases}$

то $y_x^{|}=(y_t^{|} / x_t^{|})=(4\sin 2t\times\cos 2t / (-2\sin 2t)=-2\cos 2t$

Откуда согласно формуле

$$y_x^{||}=[(y_x^{|})_t^{|}] / x_t^{|}=[(-2\cos 2t)^{|}t] / (-2\sin 2t)=$$

$$=[-2(-\sin 2t)2] / (-2\sin 2t)=4\sin 2t / (-2\sin 2t)=-2$$

2.5 Провести полное исследование функции $y=(x-1)^2 / (x+1)$ и построить ее график

1) Областью определения функции является множество

$$x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$$

2) Ордината точки графика $y\geq 0$ при $x>-1$, $y\leq 0$ при $x<-1$

3) Точки пересечения графика данной функции с осями координат: (0, -1) и (1, 0)

4) X=-1 - вертикальная ассимптота, так как $\lim\limits_{x\to 1-0} -1)^2 / (x+1)=$

$=-\infty \lim\limits_{x\to -1t^0} (x-1)^2 / (x+1)=+\infty$

Находим наклонные ассимптоты

$$k=\lim_{x\to\pm\infty} f(x) / x=\lim_{x\to\pm\infty} (x-1)^2 / (x(x+1))=\lim_{x\to\pm\infty} (x^2-2x+1) / (x^2+x)=1$$

$$B=\lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty} [(x-1)^2 / (x+1)]-x=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty} (x^2-2x+1-x^2-x) / (x+1)=\lim_{x\to\pm\infty} (-3x+1) / (x+1)=-3$$

Таким образом, наклонная ассимптота $y=kx+b=x-3$.

5. Исследуем функцию на возрастание, убывание: локальный экстремум:

$$y^{|}=[2(x-1)(x+1)-(x-1)^2] / (x+1)^2=(x-1)(x+3) / (x+1)^2$$

Из $y^{|}=0$ следует $(x-1)\ (x+3)=0$, откуда $x_1=-3$, $x_2=1$ Составим таблицу $y(-3)=-8$, $y(1)=0$

x	$(-\infty; -3)$	(-3)	(-3; -1)	(-1)	(-1; 1)	(1)	$(1; +\infty)$
y	+	0	--	не сущ.	--	0	+
y	↗	$У_{max}=$ (-8)	↘	не имеет экстремум	↘	$У_{min}=0$	↗

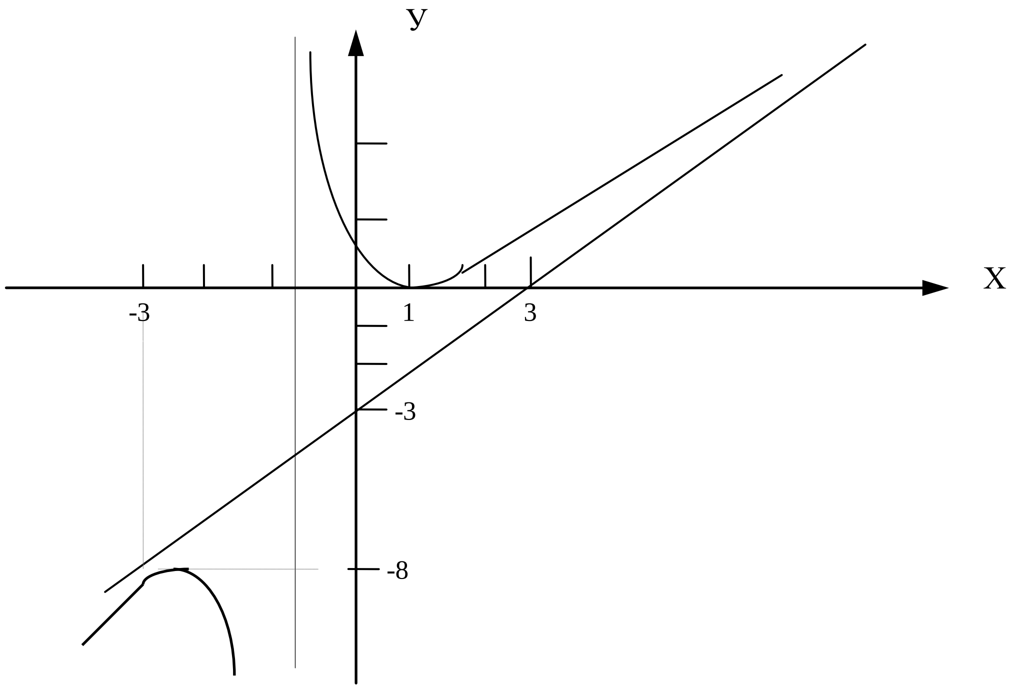
6. Исследуем график функции на выпуклость, вогнутость и определим точки перегиба. Для этого найдем

$$y^{||}=((x^2+2x-3) / (x+1)^2)^{|}=[(2x+2)(x+1)^2-2(x+1)(x^2+2x-3)] /(x+1)^4= 8 / (x+1)^3$$

Так как $y^{||}\neq 0$, то составим таблицу

y	[(-∞; -1)	(-1)	[-1;+∞]
y	**-**	**0**	**+**
график	Выпуклый	Точка перегиба отсутствует	Вогнутый

Построим график функции:



2.6 Вычислить $e^{0,1}$ точностью до 0,001 с помощью формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

Решение: Для функции $f(x)=e^x$ формула Тейлора с остаточным членом Лагранжа имеет вид:

$$e^x=1+x+(x^2/ 2!)+(x^3/3!)+...+(x^4/n!)+Rn \qquad (1)$$

где $Rn=[(x^{n+1}) / (n+1)!]\times e^{\theta,x}, \quad 0 < \theta < 1 \qquad (2)$

Формулу (1) с учетом (2) можно написать в виде:

$$e^x\approx(1+x)+ (x^2/ 2!)+(x^3/3!)+...+(x^4/n!) \qquad (3)$$

так как $x_1=0.1\in(0.05)$ и для любого значения x находящегося в $0 < x < 0.5$ выполняется $0< \theta x< 0.5$ и $e^{\theta x}< e^{\theta,5} < 2$. Тогда

$$|Rn|=((x^{n+1}) / (n+1)!) \quad e^{\theta x}<(2x^{n+1}) / (n+1)!$$

Если $\overline{(2x^{n+1}) / (n+1)!} < \alpha/10$ то $| Rn| < \bar{\alpha}/10$

откуда $(x^{n+1}) / (n+1)! < 0.5 (\alpha/10)$ (4)

Из этого неравенства можно определить n. Для $\alpha=0.001$ имеем:

$$(x^{n+1}) / (n+1)! < 0.5 (1/10^4)$$

Вычисляем для x=0.1

$n_0=1$ x=1.0000

$n_1=0.1/1!$ x=0.1000

$n_2=0.1/2!$ x=0.0050

$n_3=0.1/3!$ x=0.0002

$n_4=0.1/4! < 0.5\times10^{-4}$

$$e^{0.1}\approx1.2052\approx1.105$$

ЗАДАНИЕ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №2

2.1.1-2.1.25 Найти указаные пределы

2.1.1 а) $\lim\limits_{x\to\infty} (x^2-\sqrt{x^4+x^2+1})$ б) $\lim\limits_{x\to4} (\sqrt[3]{x^2-16}) / (\sqrt{x+12}-\sqrt{3x+4})$

в) $\lim\limits_{x\to0} (2^{3X}-3^{2X}) / (\sin 3x+2x)$

2.1.2 а) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2-5x+6}-x)$ б) $\lim\limits_{x\to3} (\sqrt{4x-3} -\sqrt{5x-6}) / (\sqrt[3]{x^2-9})$

в) $\lim\limits_{x\to0} (\ln (1+\sin x)) / \sin4x$

2.1.3 а) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2-2x+6} - \sqrt{x^2+2x-6}$ б) $\lim\limits_{x\to2} (\sqrt[3]{2-3x} - \sqrt[3]{6-x}) / \sqrt[3]{8+x^3}$

в) $\lim\limits_{x\to0} (x+a^{rc} \sin x^2) / (3^{5x}-5^{3x})$

2.1.4 а) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2-2x+3} - \sqrt{x^2-x+4}$ б) $\lim\limits_{x\to5} \sqrt{4x+5} -\sqrt{6x-5}) / (\sqrt{4+x}-\sqrt{2x-1})$

в) $\lim\limits_{x\to0} \sin7(x+\pi) / (e^{3x}-1)$

2.1.5 а) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^4+7x+1}-x^2)$ б) $\lim\limits_{x\to8} (\sqrt[3]{x}-2) / (\sqrt{2x+9}-\sqrt{3x+1})$

в) $\lim\limits_{x\to0} (e^{2x} -e^{x}) / (x+tgx^3)$

2.1.6 а) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x-1} - \sqrt{x^2-x+2})$ б) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{27+x}-\sqrt[3]{27-x})/(\sqrt[3]{8+x}-\sqrt[3]{8-x})$

в) $\lim\limits_{x\to 0} (1-\cos x)/(\cos 2x-\cos x)$

2.1.7 а) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+x}$ б) $\lim\limits_{x\to 0} -\sqrt[3]{5-x})/(\sqrt[3]{x^2+x^4})$

в) $\lim\limits_{x\to 0} (\sin 3x-\sin x)/(e^{3x}-e^{-x})$

2.1.8 а) $\lim\limits_{x\to\infty} (x\sqrt{x^4+3} - \sqrt{x^4-2})$ б) $\lim\limits_{x\to 2/3} (\sqrt{1/3+x}-\sqrt{2x-1/3})/(\sqrt[3]{3x-2})$

в) $\lim\limits_{x\to 0} 2\sin 2\pi(x+1)/\ln(1+2x)$

2.1.9 а) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x-\sqrt{x(x-1)})$ б) $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt[3]{x-3}-\sqrt[3]{2x-7})/(\sqrt{1+2x}-3)$

в) $\lim\limits_{x\to 0} (e^{3x}-e^{2x})/(\sin 3x-\operatorname{tg} 2x)$

2.1.10а) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+3})-\sqrt{x-4}$ б) $(\lim\limits_{x\to 2} \sqrt[3]{10x}-3x)/(\sqrt{2-x}-2)$

в) $\lim\limits_{x\to 0} (9\ln(1-3x))/4\operatorname{arctg} 4x$

2.1.11а) $\lim\limits_{x\to +\infty} 1)(x^2-1)-\sqrt{x^6-1}$ б) $(\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{8-x})/(x^2+2\sqrt[3]{x})$

в) $\lim\limits_{x\to 0} (5^{2x}-2^{5x})/(\sin x+\sin x^2)$

2.1.12а) $\lim\limits_{x\to +\infty} 1)(x^2+2)-(\sqrt{(x^2-1)(x^2-2)}$

б) $\lim\limits_{x\to 2} (\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+x})/(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x})$

в) $\lim\limits_{x\to 0} (1-\cos x)/(e^{x2}-1)$

2.1.13а) $\lim\limits_{x\to +\infty} -1)(x^2+3)-(\sqrt{x(x^4+2)})$

б) $\lim\limits_{x\to -2} (x^3+8)/(\sqrt[3]{4-2x}-2)$

в) $\lim\limits_{x\to 0} (7^{x}-5^{-2x}) / (2\arcsin x-x^{2})$

2.1.14а) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x^{2}-2}-\sqrt{x^{3}-1})$

б) $\lim\limits_{x\to -8} (\sqrt{1-x}-\sqrt{2x+25}) / (\sqrt[3]{x}+2)$

в) $\lim\limits_{x\to 0} (\arcsin 2x) / (\ln(e-x)-1)$

2.1.15а) $\lim\limits_{x\to +\infty}$ $+5)-x)$ б) $\lim\limits_{x\to 0}$ $-3x+x^{2}-3) / (x^{2}-3x)$

в) $\lim\limits_{x\to 0} (10^{2x}-5^{-x}) / (2\mathrm{tg}x-\mathrm{arctg}x)$

2.1.16а) $\lim\limits_{x\to +\infty}$ $+2-\sqrt{x-3})$ б) $\lim\limits_{x\to 0}$ $^{2}-2x+4-2) / (\sqrt{9-x}-3)$

в) $\lim\limits_{x\to 0} (\mathrm{tg}x-\sin x) / x(1-\cos 2x)$

2.1.17а) $\lim\limits_{x\to +\infty}$ $-2)^{2}-\sqrt[3]{(x-3)^{2}})$ б) $\lim\limits_{x\to -8}$ $-1-\sqrt{9+2x}) / (\sqrt[3]{x}-2)$

в) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x\sin x)(x-\cos 2x) / \sin^{2}x$

2.1.18а) $\lim\limits_{x\to +\infty}$ $+8x^{3}-2x)$ б) $\lim\limits_{x\to 3}$ $+3-3) / (\sqrt{4x-3}-\sqrt{x+6})$

в) $\lim\limits_{x\to 0} (\mathrm{tg}\pi(1-x/2) / \ln(x+1)$

2.1.19а) $\lim\limits_{x\to +\infty}$ $-2)-\sqrt{(x^{2}-2x+3)}$ б) $\lim\limits_{x\to 1}$ $-1/ \sqrt{2x^{2}-3x+5}-2)$

в) $\lim\limits_{x\to 0} (\ln(1+2x) / (2^{x}-1)$

2.1.20а) $\lim\limits_{x\to +\infty}$ $+2)-\sqrt{x^{2}-2x+3})$ б) $\lim\limits_{x\to -1}$ $x-\sqrt[3]{3+2x}) / (x^{3}+x^{2})$

в) $\lim\limits_{x\to 0} (e^{\sin 2x}-e^{\sin x}) / \mathrm{tg}x$

2.1.21а) $\lim\limits_{x\to 0}$ $4-x^{3})$ б) $\lim\limits_{x\to 4}$ $+2x) / (\sqrt{x}-2)$

в) $\lim\limits_{x\to \pi} (1-\sin(x/2) / (\pi-x)$

2.1.22а) $\lim\limits_{x\to 1}$ $3-x\sqrt{x(x^{2}+8)}$ б) $\lim\limits_{x\to 3}$ $-9-\sqrt{3x+6}) / (x^{2}-9)$

в) $\lim\limits_{x\to\pi} (\sin 7\pi x) / (\sin 8\pi x)$

2.1.23а) $\lim\limits_{x\to+\infty}$ 3x+2-x) б) $\lim\limits_{x\to-5}$ -13-$\sqrt{8+x}$) / ($\sqrt{4-x}$-3)

в) $\lim\limits_{x\to\pi} (\sin 5x) / (\mathrm{tg} 3x)$

2.1.24а) $\lim\limits_{x\to\infty}$ +1)(x^2-4)-$\sqrt{x^4-9}$) б) $\lim\limits_{x\to1}$ -$\sqrt{6+2x}$) / ($\sqrt{8-x}$-3)

2.1.25а) $\lim\limits_{x\to2}$ ^{3}-5) б) $\lim\limits_{x\to3}$ -$\sqrt{x+6}$) / ($\sqrt{x+3}$-$\sqrt{3x-3}$

в) $\lim\limits_{x\to2} \ln(9-2x^2) / \sin 2\pi x$

2.2.1-2.2-25 Исследовать данную функцию на непрерывность и построить её график

2.2.1 $f(x)=\begin{cases} -x^2, \text{ если } x \le 0 \\ x^3, \text{ если } 0< x \le 1 \\ x+1, \text{ если } x > 1 \end{cases}$

2.2.2 $f(x)=\begin{cases} \cos x, \text{ если } x \le 0 \\ 1-x, \text{ если } 0< x \le 2 \\ x^2, \text{ если } x > 2 \end{cases}$

2.2.3 $f(x)=\begin{cases} x-1, \text{ если } x \le 0 \\ x^2, \text{ если } 0< x<1 \\ 2x, \text{ если } x \ge 1 \end{cases}$

2.2.4 $f(x)=\begin{cases} x-3, \text{ если } x < 0 \\ x+1, \text{ если } 0 \le x \le 4 \\ 3+\sqrt{x}, \text{ если } x > 4 \end{cases}$

2.2.5 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, \text{ если } x \le 1 \\ 2x, \text{ если } 0< x<3 \\ x+2, \text{ если } x \ge 3 \end{cases}$

2.2.6 $f(x)=\begin{cases} x+4, \text{ если } x < 1 \\ x^2+2, \text{ если } 1\le x< 2 \\ 2x, \text{ если } x \ge 3 \end{cases}$

2.2.7 $f(x)=\begin{cases} 1-x^2, \text{ если } x \le 0 \\ 1, \text{ если } 0< x<2 \\ x-2, \text{ если } x \ge 1 \end{cases}$

2.2.8 $f(x)=\begin{cases} x+1, \text{ если } x \le 0 \\ (x+1)^2, \text{ если } 0< x \le 2 \\ 4-x, \text{ если } x > 2 \end{cases}$

2.2.9 $f(x)=\begin{cases} x-2, \text{ если } x \le -1 \\ x^2+1, \text{ если } -1< x \le 1 \\ 3-x, \text{ если } x > 1 \end{cases}$

2.2.10 $f(x)=\begin{cases} -x, \text{ если } x \le 0 \\ -(x-1)^2, \text{ если } 0< x<2 \\ x-3, \text{ если } x \ge 2 \end{cases}$

2.2.11 $f(x)=\begin{cases} -2(x+1), \text{ если } x \le -1 \\ (x+1)^3, \text{ если } -1< x<0 \\ x, \text{ если } x \ge 0 \end{cases}$

2.2.12 $f(x)=\begin{cases} -x^2, \text{ если } x \le 0 \\ x^2, \text{ если } 0< x \le 2 \\ x+1, \text{ если } x > 2 \end{cases}$

2.2.13 $f(x)=\begin{cases}(x-3), \text{ если } x<0\\(x+1), \text{ если } 0\le x\le 4\\3+x, \text{ если } x>4\end{cases}$

2.2.14 $f(x)=\begin{cases}-x^2, \text{ если } x\le 0\\x^2, \text{ если } 0<x\le 2\\x+1, \text{ если } x>2\end{cases}$

2.2.15 $f(x)=\begin{cases}-x, \text{ если } x\le 0\\1-x^3, \text{ если } -0<x\le 2\\x+4, \text{ если } x\ge 2\end{cases}$

2.2.16 $f(x)=\begin{cases}2, \text{ если } x<-1\\\ln\text{-}x, \text{ если } -1\le x\le 1\\x, \text{ если } x>1\end{cases}$

2.2.17 $f(x)=\begin{cases}-1, \text{ если } x<0\\\cos x, \text{ если } 0\le x\le\pi\\1-x, \text{ если } x>\pi\end{cases}$

2.2.18 $f(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\le -1\\x^2-1, \text{ если } -1<x\le 2\\2x, \text{ если } x>2\end{cases}$

2.2.19 $f(x)=\begin{cases}x+3, \text{ если } x\le 0\\-x+4, \text{ если } 0<x<2\\x-2, \text{ если } x\ge 2\end{cases}$

2.2.20 $f(x)=\begin{cases}x-1, \text{ если } x\le 1\\x^2+2, \text{ если } 1<x\le 2\\-2x, \text{ если } x>2\end{cases}$

2.2.21 $f(x)=\begin{cases}x, \text{ если } x\le 1\\(x-2)^2, \text{ если } 1<x<3\\6-x, \text{ если } x\ge 3\end{cases}$

2.2.22 $f(x)=\begin{cases}3x+4, \text{ если } x\le -1\\x^2-2, \text{ если } -1<x\le 2\\x, \text{ если } x\ge 2\end{cases}$

2.2.23 $f(x)=\begin{cases}2-x, \text{ если } x\le -2\\x^3, \text{ если } 2<x<1\\2, \text{ если } x>1\end{cases}$

2.2.24 $f(x)=\begin{cases}x-1, \text{ если } x<0\\\sin x, \text{ если } 0\le x<\pi\\3, \text{ если } x\ge\pi\end{cases}$

2.2.25 $f(x)=\begin{cases}-x+1, \text{ если } x\le -1\\x^2+1, \text{ если } -1<x\le 2\\2x, \text{ если } x>2\end{cases}$

2.3.1-2.3.25 Продифференцировать данные функции

3.3.1 а)$y=\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}$,	б)$y=x^{(2/x)}$	в)$x\sin 2y-y\cos 2x=10$
3.3.2 а)$y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$	б)$y=x^e$	в)$(e^y-x)^2=x^2+4$
3.3.3 а)$y=\operatorname{arctg}(1/x)$	б)$y=x^{\arcsin x}$	в)$x\times\operatorname{tg}y-x^2+y^2=-4$
3.3.4 а)$y=3^{\cos^2 x}$	б)$y=(\cos x)^{\cos x}$	в)$y-x^2=\operatorname{arctg} y$
3.3.5 а)$y=\ln\operatorname{ctg}^3\sqrt{x}$	б)$y=x^{1/x}$	в) $e^{xy}-x^2+y^3=0$
3.3.6 а)$y=x^3\sqrt{2/(1+x)}$	б)$y=2x^{\sqrt{x}}$	в) $e^{2y}-e^{-3x}+(y/x)=1$
3.3.7 а)$y=(e^{\sin x}-1)^2$	б)$y=(\ln x)^x$	в)$y=x+x\sin y$
3.3.8 а)$y=-e^{1/x}$	б)$y=(\cos x)^x$	в) $e^y+3x^2e^{-y}=4x$
3.3.9 а)$y=e^{-\cos 5x}$	б)$y=(\sin x)^{\cos x}$	в) $\ln(x^2+y^2)+\operatorname{arctg}(x/y)=0$
3.3.10 а)$y=x\operatorname{arctg}^3 5x+\ln\operatorname{tg} x$	б)$y=(\operatorname{arctg} 2x)^{\sin x}$	в) $x\sin y-y\cos x=0$
3.3.11 а)$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$	б)$y=x^{\arccos x}$	в) $3^{x+y}+y\ln 3=15$
3.3.12 а)$y=x^2e^{-2x}$	б)$y=x^{\operatorname{tg} x}$	в) $e^{xy}-x^2+y^2=0$
3.3.13 а)$y=2^{1/x}$	б)$y=(\ln(5x-4))^{\operatorname{arctg} x}$	в) $y\sin x+\cos(x-y)=\cos y$
3.3.14 а)$y=x\ln^2 y$	б)$y=(\sin(7x+4))^{\arccos x}$	в) $\cos(x-y)-2x+4y=0$

3.3.15 а) $y=3e^{\sin 2x}$ б) $y=xe^{y}+ye^{x}=xy$ в) $y=(\arcsin 2x)^{ctg(x+1)}$

3.3.16 а) $y=\ln((1+x)(1-x))$ б) $y=(\sin 3x)^{\arccos x}$ в) $\cos^{xy}=y/x$

3.3.17 а) $y=(4\ln x) / (1-\ln x)$ б) $y=(\sqrt{3x+2})^{arctg\, 3x}$ в) $xy+\ln y-2\ln x=0$

3.3.18 а) $y=7^{x+2x}$ б) $y=(\arccos x)^{\sqrt{\cos x}}$ в) $e^{x+y}=\sin(y/x)$

3.3.19 а) $y=e^{-x}\, x^{\ln x}$ б) $y=(ctg 2x^{3})^{\sin \sqrt{x}}$ в) $(x+y)^{2}-(x-2y)^{3}=0$

3.3.20 а) $y=x / \sqrt{8-x^{2}}$ б) $y=(\cos(x+5))^{\arcsin 3x}$ в) $y \ln x-x \ln y=x+y$

3.3.21 а) $y=2/5\ln^{2}(3ctg 5x+2)$ б) $y=(tg\, 3x^{4})^{\sqrt{x+3}}$ в) $y^{3}-3y+6x=0$

3.3.22 а) $y=\ln \sqrt[5]{10/(e^{5x}-e^{-5x})}$ б) $y=(\ln(x+3))^{\sin\sqrt{x}}$ в) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=5y$

3.3.23 а) $y=(1/3)\ln(x+1) / \sqrt{x^{2}-2x}$ б) $y=(arctg 2x)^{\sin x}$ в) $x^{2}+y^{3}-10x+y=0$

3.3.24 а) $y=\ln\sqrt{1+e^{2x}+e^{4x}}$ б) $y=(\ln(7x+4))^{tg\, x}$ в) $x^{2}=6y-y^{3}$

3.3.25 а) $y=\ln^{3}\sqrt{3tg(x/2)+4}$ б) $y= (\ln(7x-5)^{tarctg\, 2x}$ в) $x^{2}+2xy-y^{3}=12$

2.4.1-2.4.25 Найти $y^{|}$ и $y^{||}$

2.4.1 а) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})$ б) $\begin{cases} x=\ln\cos 2t \\ y=\sin^{2}2t \end{cases}$

2.4.2 а) $y= x/(x^{2}-1)$ б) $\begin{cases} x=1-e^{3t} \\ y=(1/3)(e^{3t}+e^{-3t}) \end{cases}$

2.4.3 а) $y=x^{3}\ln x$ б) $\begin{cases} x=(1-t)/ t^{2} \\ y=(1+t)/ t^{2} \end{cases}$

2.4.4 а) $y=arctg(2x/(1-x^{2})$ б) $\begin{cases} x=\sin^{3}4t \\ y=1/2\cos 4t \end{cases}$

2.4.5 а) $y=\ln tg(\pi/4+x)$ б) $\begin{cases} x=1/3(t^{3}+t) \\ y=\ln(t^{2}+1) \end{cases}$

2.4.6 а) $y=x\, e^{x}$ б) $\begin{cases} x=tg\, t \\ y=1/(\sin^{2} t) \end{cases}$

2.4.7 а) $y=x\, arctg x$ б) $\begin{cases} x=\ln(1+t^{2}) \\ y=t-arctg\, t \end{cases}$

2.4.8 а) $y= x\, arctg x$ б) $\begin{cases} x=\sin t/(1+\sin t) \\ y=\cos t/(1+\sin t) \end{cases}$

2.4.9 а) $y=\cos x-(1/3)\cos^{3}x$ б) $\begin{cases} x=4-e^{2t} \\ y=3/(e^{2t}+1) \end{cases}$

2.4.10 а) $y=arcctg\, x$ б) $\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$

2.4.11а) $y=((x-1)(x+1))e^{-x}$ б) $\begin{cases} x=t\cos t \\ y=t\sin t \end{cases}$

2.4.12а) $y=\operatorname{arctg}x^2$ б) $\begin{cases} x=\cos(t/2) \\ y=t-\sin t \end{cases}$

2.4.13а) $y=x^2 \ln x$ б) $\begin{cases} x=t+\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$

2.4.14а) $y=\sqrt{(1-x^2)/x}$ б) $\begin{cases} x=t^2 \\ y=(t^3/3)-t \end{cases}$

2.4.15а) $y=\ln \operatorname{ctg}4x$ б) $\begin{cases} x=\cos 3t \\ y=\sin 3t \end{cases}$

2.4.16а) $y=\sqrt[3]{(1-x)^2}$ б) $\begin{cases} x=\sin(t/2) \\ y=\cos t \end{cases}$

2.4.17а) $y=\cos^2 x$ б) $\begin{cases} x=e^{2t} \\ y=\cos t \end{cases}$

2.4.18а) $y=x\, e^{1/x}$ б) $\begin{cases} x=\operatorname{tg} t+\operatorname{ctg} t \\ y=2\ln \operatorname{ctg} t \end{cases}$

2.4.19а) $y=x\, e^{-x}$ б) $\begin{cases} x=t^2+1 \\ y=e^{t} \end{cases}$

2.4.20а) $y=\ln(\ln x)$ б) $\begin{cases} x=3\cos^2 t \\ y=2\sin^3 t \end{cases}$

2.4.21а) $y=(1+x^2)\operatorname{arctg} x$ б) $\begin{cases} x=t+\ln\cos t \\ y=t-\ln\sin t \end{cases}$

2.4.22а) $y=e^{\sqrt{x}}$ б) $\begin{cases} x=2t-\sin 2t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$

2.4.23а) $y=1/(1+x^2)$ б) $\begin{cases} x=t+1/2(\sin 2t) \\ y=\cos^3 t \end{cases}$

2.4.24а) $y=\sqrt{4-x^2}$ б) $\begin{cases} x=t^5+2t \\ y=t^3+8t-1 \end{cases}$

2.4.25а) $y=1/(4+\sqrt{x})$ б) $\begin{cases} x=(1/3)t^3+(1/2)t^2+t \\ y=(1/2)t^2+1/t \end{cases}$

2.5.1-2.5.25 Провести полное исследование и построить график функции

2.5.1 $y=(x-1) / (x^2-2x)$
2.5.2 $y=(2-4x^2) / (1-4x^2)$
2.5.3 $y=2x^2 / (4x^2-1)$
2.5.4 $y=(2x+1) / x^2$
2.5.5 $y=1 / (x^2-9)$
2.5.6 $y=4x^2 / (x^2-1)$
2.5.7 $y=x^4 / (x^3-1)$
2.5.8 $y=(x^2-x-1) / (x^2-2x)$
2.5.9 $y=(x-3)^2 / 4(x-1)$
2.5.10 $y=(x^2+4x+1) / x^2$
2.5.11 $y=(x^2+16) / 4x$
2.5.12 $y=3x / (1+x^2)$
2.5.13 $y=(3-x^2) / (x+2)$
2.5.14 $y=5x^2 /(x^2-25)$
2.5.15 $y=(x^2+1) / x$
2.5.16 $y=(x-1)^2 / (x^2+1)$
2.5.17 $y=(x^3+1) / x^2$
2.5.18 $y=x / (3-x^2)$
2.5.19 $y=(x+1)^2 / (x-1)^2$
2.5.20 $y=x / (x-1)^2$
2.5.21 $y=(2x-1) / (x-1)^2$
2.5.22 $y=x^3 / 2(x+1)^2$
2.5.23 $y=1 / (1-2x^2)$
2.5.24 $y=2 / x^2+x+1$
2.5.25 $y=(x^3-1) / 4x^2$

2.6.1-2.6.25 Вычислить e^a с точностью до 0.001 с помощью формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

2.6.1 a=0.49;
2.6.2 a=0.33;
2.6.3 a=0.75;
2.6.4 a=0.63;
2.6.5 a=0.21;
2.6.6 a=0.56;
2.6.7 a=0.37;
2.6.8 a=0.83;
2.6.9 a=0.13;
2.6.10 a=0.59;
2.6.11 a=0.48;
2.6.12 a=0.43;
2.6.13 a=0.41;
2.6.14 a=0.31;
2.6.15 a=0.26;
2.6.16 a=0.28;
2.6.17 a=0.29;
2.6.18 a=0.93;
2.6.19 a=0.94;
2.6.20 a=0.96;
2.6.21 a=0.97;
2.6.22 a=0.98;
2.6.23 a=0.99;
2.6.24 a=0.13;
2.6.25 a=0.16;

III-КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ И ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №3

3.1 Вычислить интегралы. Результаты пункте а)проверить дифференцированием.

$$а)\int \sin \sqrt{x}\, dx$$

Решение:

Пусть $\sqrt{x}=t$ откуда $x=t^2, dx=2tdt$

$$J=\int \sin \sqrt{x}\, dx=2\int t \sin t\, dt$$

Далее, интегрируем по частям. Положим $u=t,\ d\nu=\sin t\, dt$

Тогда $du=dt,\ \nu=-\cos t$. По формуле $\int u d\nu=u\nu-\int \nu du$ имеем:

$$J=2\int t \sin tdt=2(-t \cos t+\int \cos tdt)=-2t \cos t+2\sin t+c$$

Возвращаясь к переменной x, получим

$$J=-2\sqrt{x} \cos \sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+c$$

Теперь, проверим результат дифференцированием:

$$dJ=d(-2\sqrt{x} \cos \sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+c)=(- \cos \sqrt{x}) / (\sqrt{x})+(2\sqrt{x} \sin\sqrt{x}) / 2\sqrt{x}+$$
$$+((2 \cos \sqrt{x}) / 2\sqrt{x}))dx = \sin\sqrt{x}\, dx$$

Получено подинтегральное выражение. Значит интеграл вычислен правильно.

$$б)\int((x^2-x+2) / (x^4-5x+4))\, dx$$

Решение:

Разложим подинтегральную функцию на элементарные дроби.

Так как $x^4-5x^5+4=(x-1)\times(x+1)\times(x-2)\times(x+2)$

имеем:

$$(x^2-x+2)/(x^4-5x^2+4)=A/(x+1)+B/(x-1)+C/(x+2)+D/(x-2)$$

Умножая обе части равенства на x^4-5x^2+4 получаем

$$x^2-x+2=A (x-1)(x+2)(x-2)+B(x+1)(x+2)(x-2)+C(x+1)(x-1)(x-2)+$$
$$+D(x+1)(x-1)(x+2)$$ или

$$x^2-x+2=(A+B+C+D)x^3+(-A+B-2C+2D)x^2+(-4A-4B-C-D)x+$$
$$+(4A-4B+2C-2D)$$

Сравнивая коэффициенты при x^0, x^1, x^2 и x^4 придем к системе уравнений

$$\begin{cases} 4A-4B+2C-2D=2 \\ -4A-4B-C-D=-1 \\ -A+B-2C+2D=1 \\ A+B+C+D=0 \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A=2/3$; $B=-1/3$; $C=(-2)/3$; $D=1/3$.
Таким образом,

$$\int((x^2-x+2) / (x^4-5x+4))\, dx=2/3\int dx/(x+1) -1/3\int dx/(x-1)- 2/3\int dx/(x+2)+$$
$$+1/3\int dx/(x-2)=2/3\ln |x+1|-1/3\ln |x-1|-2/3\ln |x+2|+1/3\ln |x-2|+C=$$
$$=1/3\ln |((x+1)^2(x-2)) / ((x+2)^2(x-1))|+C$$

в) $\int dx/ \sin^3 x$

Решение. Положим $tg(x/2)=t$, откуда $dx=2dt / (1+t^2)$, $\sin x =(2t) / (1+t^2)$

$$\text{Тогда } \int dx/ \sin3x=\int((2dt) / (1+t^2)) / (2t/(1+t^2)^3=$$
$$=\int((1+t^2)^2 / 4t^3)\times dt=1/4\int((1+2t^2+t^4+1) / t^3)\, dt=$$
$$=1/4\int dt / t^3+1/2\int dt / t+1/4\int tdt=1/4(-(1/2t^2))+1/2\ln |t|+(t^2/8)+C=$$
$$=1/2\ln |t|+((t^4-1)/8t^2)+C$$

3.2 Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость

$$а)\int_{-\infty}^{\infty} dx / (x^2+4x+9)$$

Решение

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx / (x^2+4x+9)= \int_{-\infty}^{0} dx / (x^2+4x+9)+\int_{0}^{\infty} dx / (x^2+4x+9)=$$

$$\lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} dx / ((x+2)^2+5)+ \lim_{в\to\infty}\int_{0}^{в} dx /((x+2)^2+5)=$$

$$=\lim_{a\to-\infty} (1 / \sqrt{5})\, arctg\, (x+2)/5\Big|_{0}^{a} +\lim_{в\to\infty} (1 / \sqrt{5})\, arctg\, (x+2)/ \sqrt{5}\Big|_{0}^{в} =$$

$$-\lim_{a\to-\infty} (1\sqrt{5})\, arctg(a+2)/5+(1\sqrt{5})\, arctg\, 2/\sqrt{5}+\lim_{в\to\infty} (1/\sqrt{5})\, arctg\, (b+2)/\sqrt{5}-$$
$$-(1\sqrt{5})\, arctg\, 2\sqrt{5}=(-(1/\sqrt{5})(-\pi/2))+ (1/\sqrt{5})(\pi/2)=(\pi\sqrt{5})/5$$

$$б)\ \int_{-1}^{1} ((3x^2+2) / \sqrt[3]{x^2})\,dx = 3\int_{-1}^{1} x^{4/3}\,dx + 2\int_{-1}^{1} x^{-2/3}\,dx = 3J_1+2J_2$$

$$J_1=\int_{-1}^{1} x^{4/3}\,dx=(3/7)x^{7/3}\Big|_{-1}^{1}=6/7.$$

В интеграле J_2 существует точка $x=0$, где подинтегральная функция разрывна. Поэтому J_2 представим в виде:

$$J_2=\int_{-1}^{1} x^{-2/3}\,dx=\int_{-1}^{0} x^{-2/3}\,dx+\int_{0}^{1} x^{-2/3}\,dx$$

Таким образом

$$J_2=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_{-1}^{0-\varepsilon_1} x^{-2/3}\,dx+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{0+\varepsilon_2}^{1} x^{-2/3}\,dx=\lim_{\varepsilon_1\to 0}3x^{1/3}\Big|_{-1}^{-\varepsilon_1}-\lim_{\varepsilon_2\to 0}3x^{1/3}\Big|_{-1}^{-\varepsilon_2}=3+3=6$$

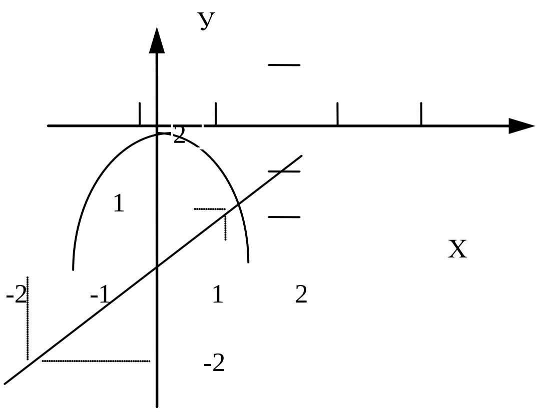
Тогда

$$\int_{-1}^{1} (3x^2+2) / \sqrt[3]{x^2})\,dx=3(6/7)+2\times 6=102/7.$$

3.3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой y=x и параболой $y=2-x^2$

Решение:
На рисунке видно, что пределами интегрирования являются абсциссы точек пересечения графиков данных функций. Для этого решаем систему уравнений:

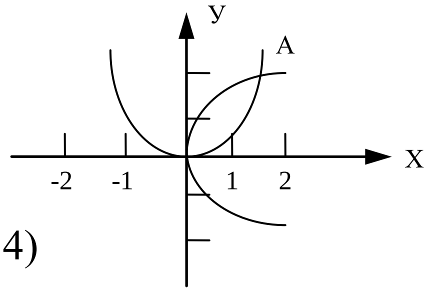
$$\begin{cases} y=x \\ y=2-x^2 \end{cases}$$



В результате получаем, $x_1=-2$, $x_2=1$. Так как $y_1=2-x^2>x=y_2$, $-2 \le x \le 1$, то

$$S=\int_{-2}^{1}[(2-x^2)-x]dx=[2x-x^3/3-x^2/2]\Big|_{-2}^{1}=9/2$$

3.4 Вычислить объём тела, полученный вращением параболы
$y=x^2$ и $8x=y^2$ вокруг оси 0y.



Решение. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y^2=8x \end{cases}$$

находим точки пересечения парабол: Q(0, 0), A(2, 4)
Так как $x_2(y)=\sqrt{y} \geq x_1(y)=y^2/8$ и $0 \leq y \leq 4$,то

$$V=\pi\int_c^d (x_2^2-x_1^2)dy=\pi\int_0^4 (y-(y^4/64))dy=\pi((y^2/2)-(y^5/320)\Big|_0^4=24\pi / 5$$

3.5 Даны функция $Z=3x^2-xy+x+y$ и две точки A(1, 3), B(1, 06; 2, 92)
Требуются а) Вычислить значение функции в точке B;
б) Вычислить приближенно значение функции в точке B, используя значение функции в точке A и заменив преращения функции от точки A до точки B с полным дифференциалом;
в) Оценить относительную погрешность приближенного вычисления в процентах;
г) Найти уравнение касательной плоскости к поверхности $Z=3x^2-xy+x+y$ в точке $C(x_0, y_0, z_0)$.

Решение:
а) $Z_1=Z(B)=3(1, 06)^2-1, 06 \times 2, 92+1, 06+2, 92=4, 2556$.
б) Приближенное значение функции Z в точке B вычислим заменив прира щения с полным дифференциалом, по формуле :

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\approx f(x_0y_0)+f'_x(x_0y_0)\Delta x+f'_y(x_0y_0)\Delta y.$$

Так как

$$Z_0=Z(A)=3\times1^2-1\times3+1+3=4,$$

$$\partial z/\partial x=6x-y+1, \qquad \partial z/\partial x|_A=6\times1-3+1=4,$$

$$\partial z/\partial y=-x+1, \qquad \partial z/\partial y|_A=-1+1=0,$$

$$\Delta x=1.06-1=0.06, \qquad \Delta y=2.92-3=-0.08,$$

то,

$$Z_1(B)=Z(A)+(\partial z/\partial x)|_A\,\Delta x+(\partial z/\partial y)|_A\,\Delta y=4+4\times0.06+0(-0.08)=4.24.$$

в) Определим относительную погрешность:

$$\delta=|(z_1-z_1)/z_1|\times100\%=|(4.24-4.2556)/4.24|\times100\%=0.37\%.$$

г) Положим $C(x_0, y_0, z_0)=C(1, 3, 4)$. Тогда уравнение касательной плоскости в точке C к поверхности Z будет иметь вид:

$$z-z_0=(\partial z/\partial x)|_c\,(x-x_0)+(\partial z/\partial y)|_c\,(y-y_0)$$

Так как $\partial z/\partial x=4$; $(\partial z/\partial y)|_c=0$ Следовательно:

$$z-4=4(x-1)+0(y-3) \text{ или } z=4x$$

3.6 Исследовать на экстремум функцию $z=xy\,(x+y-2)$

Решение: Находим первые частные производные данной функции

$$Z_x^{|}=2xy+y^2-2y,\ \ Z_y^{|}=x^2+2xy-2x$$

Приравнивая их нулю, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2yx+y^2-2y=0 \\ x^2+2xy-2x=0 \end{cases}$$

Из которой определяем стационарные точки данной функции:

$$P_1(0, 0),\ P_2(2, 0),\ P_3(0, 2),\ P_4(2/3, 2/3)$$

Найдем вторые частные производные данной функции:

$$Z^{|}_{xx}=2y,\ \ Z^{||}_{xy}=2x+2y-2,\ \ Z^{||}_{yy}=2x$$

Подставляя в полученные выражения для производных координаты стационарных точек и используя достаточные условия экстремума

$\Delta=Z^{||}_{xx}\,Z^{||}_{yy}-(Z^{||}_{xy})^2$ имеем :

для точки M_1 $\Delta=-4<0$, для точки M_2 $\Delta=4<0$, для точки M_3 $\Delta=-4<0$, для точки $M_4 \Delta=12/9>0$, $A=4/3>0$

Таким образом для точек M_1, M_2, M_3 эстремума нет.

В точке M_4 фунукция имеет минимум $Z_{min}=Z(2/3, 2/3)=-(8/27)$

– –

ЗАДАНИЕ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ №3

3.1.1-3.1.25 Вычислить интегралы. Результат в пункте а) проверить дифференцированием;

3.1.1 а) $\int x^3 \ln x\, dx$ б) $\int dx/(4x^3+x)$

в) $\int dx/(x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}))$ г) $\int (\sin x\, dx)/(5+3\sin x)$

3.1.2 а) $\int x\, dx/(\cos^2 x)$ б) $\int ((x-1)/(x^3+1))dx$

в) $\int ((\sqrt[3]{x-1})/(1+\sqrt{x}))dx$ г) $\int dx/(\cos x(1+\cos x))$

3.1.3 а) $\int x\, \mathrm{arctg}\, x\, dx$ б) $\int x dx/(x^3-3x+2)$

в) $\int ((\sqrt{x+1})(\sqrt[4]{x^3-1}))dx$ г) $\int (\sin^2 x\, dx)/(1+\cos x+\sin x)^2$

3.1.4 а) $\int \sqrt{x} \ln x\, dn$ б) $\int ((x^2-3)/(x^4+5x^2+6))dx$

в) $\int ((\sqrt{x+1}-1)/(\sqrt[3]{x+1}+1))dx$ г) $\int ((1-\sin x)/(\cos x(1+\cos x))dx$

3.1.5 а) $\int x^2 e^{-2x} dx$ б) $\int (x^2 dx)/(x^4-16)$

в) $\int (\sqrt{x}\, dx)/(1+\sqrt[3]{x^2})$ г) $\int (\cos x\, dx)/(1+\cos x+\sin x)$

3.1.6 а) $\int ((\ln x)/x^2)dx$ б) $\int ((x+3)/(x^3+2x-12))dx$

в) $\int ((\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}+1))dx$ г) $\int ((1+\sin x)/(1+\cos x+\sin x)$

3.1.7 а) $\int x^2 \cos 5x\, dx$ б) $\int ((x-2)/(x^4+4x^2))dx$

в) $\int (\sqrt{x}\, dx)/(\sqrt[3]{x}+2)$ г) $\int ((\cos x-\sin x)/(1+\sin x)^2)dx$

3.1.8 а) $\int \ln^2 x\, dx$ б) $\int ((2x^2-3x-12)/(x^3+x^2-6x))dx$

в) $\int (\sqrt[3]{x}/(1+\sqrt{x})\, dx$ г) $\int ((8+\mathrm{tg}\, x)/(18\sin^2 x+2\cos^2 x))dx$

3.1.9 а) $\int x \arcsin x\, dx$ б) $\int (x^4 dx)/(x^4+6x^2+8)$

в) $\int dx/(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})$ г) $\int ((1+\mathrm{ctg}\, x)/(\sin x+2\cos x)^2)dx$

3.1.10а) $\int \mathrm{arctg}\sqrt{4x-1}\, dx$ б) $\int ((6x^4-1)/(2x^3-x+1))dx$

в) $\int ((1+\sqrt[3]{x-1})/(\sqrt{x-1}))dx$ г) $\int ((6+\mathrm{tg}\, x)/(9\sin^2 x+4\cos^2 x))dx$

3.1.11а) $\int \ln(4x^2+1)dx$ б) $\int ((x-1)/(2x^3+3x^2+x))dx$

в) $\int x\, dx/\sqrt[3]{1+x}$ г) $\int ((5\mathrm{tg}\, x+2)/(2\sin 2x+5))dx$

3.1.12а) $\int ((x\cos x)/(\sin^3 x))dx$ б) $\int ((x+4)/(x^3+6x^2+9x))dx$

в) $\int dx/(x\sqrt{1+x})$ г) $\int 36dx/(6-\mathrm{tg}\, x)\sin 2x$

3.1.13а) $\int(x-\sin^2x)\,dx$ б) $\int((x^2+x-1)/(x^3+x^2-6x))dx$

в) $\int x\,dx/((2+5x)\sqrt{2+5x})$ г) $\int((tg^2x)/(4+3\cos2x))dx$

3.1.14а) $\int x\,tg^2x\,dx$ б) $\int dx/(x^4+x^3+x^2+x)$

в) $\int x\,dx/\sqrt[3]{5x-1}$ г) $\int((\sin^3x)/\sqrt{\sin x})dx$

3.1.15а) $\int x\,dx/\sin^2x$ б) $\int(x^3-6)/(x^4+6x+8))dx$

в) $\int dx/(\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x})$ г) $\int((\sin^3x)/(\cos^4x))dx$

3.1.16а) $\int((x\sin x)/(\cos^2x))dx$ б) $\int dx/(x^4+5x^2+4)$

в) $\int\sqrt[6]{x}\,dx/(1+\sqrt[3]{x})$ г) $\int((\sin2x)/(\cos^3x))dx$

3.1.17а) $\int\sqrt{x}\ln^2x\,dx$ б) $\int x^2dx/(x^4+x^2+x)$

в) $\int dx/(3\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt[3]{x^2})$ г) $\int dx/(\sin^3x)$

3.1.18а) $\int(\ln^2x\,dx)/\sqrt[3]{x^2}$ б) $\int((2x^2-3x-3)/(x-1)(x^2-x+5))dx$

в) $\int((\sqrt{x}-1)/(\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1))dx$ г) $\int\sin(4x/2)\,dx$

3.1.19а) $\int x\ln^2x\,dx$ б) $\int dx/(x^4-x^3+x^2-x)$

в) $\int dx/(\sqrt{x})(\sqrt[4]{x^3}-1)$ г) $\int\cos^5x\,dx$

3.1.20а) $\int x^2\ln^2x\,dx$ б) $\int((3x-7)dx)/(x^3+x^2+4x+4)$

в) $\int dx/(\sqrt{x-2})(1+\sqrt[3]{x-2})$ г) $\int\cos^2x\sin^4x\,dx$

3.1.21а) $\int((\ln^2x)/\sqrt{x})dx$ б) $\int((x+2)/(x^3-2x^2+2x))dx$

в) $\int((\sqrt{x+3})(1+\sqrt[3]{x+3}))dx$ г) $\int ctg^3x\,dx$

3.1.22а) $\int(x^2+2)e^{x/2}dx$ б) $\int((x-1)/(x^3+x))dx$

в) $\int((\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}-1))dx$ г) $\int tg^4x\,dx$

3.1.23а) $\int(x+3)^2\sin2x\,dx$ б) $\int x\,dx/(x^3-1)$

в) $\int((x+1)/(\sqrt[3]{2x+1}))dx$ г) $\int(\cos^4x)(\sin^2x\,dx)$

2.1.24а) $\int\ln(x^2+4)dx$ б) $\int((x^3-6)/(x^4+6x^2+8))dx$

в) $\int(\sqrt[4]{x}+1)/(\sqrt{x}+4)\sqrt[4]{x^3}$ г) $\int dx/\sin^6x$

2.1.25а) $\int arctg(1/x)dx$ б) $\int(x^4dx)/(x^4+5x^2+4)$

в) $\int(x\,dx)/(2+\sqrt{2x+1})$ г) $\int\sin^6x\,dx$

3.2.1-3.2.25 Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

3.2.1 а) $\int_1^{\infty} x\,dx/(x^2+4x+5)$ б) $\int_0^{\pi/2}((e^{tgx})/(\cos^2x))dx$

∞ $\pi/6$

0 0

3.2.2. а) $\int ((3-x^2)/(x^2+4))dx$ б) $\int (\cos x\, dx)/(\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5})$

3.2.3 а) $\int_0^\infty ((\mathrm{arctg}2x)/(1+4x^2))dx$ б) $\int_1^2 dx/(\sqrt{4x-x^2-4})$

3.2.4 а) $\int_0^\infty ((x+2)dx/(\sqrt[3]{(x^2+4x+1)^4})$ б) $\int_{\pi/2}^{\pi}$ sinx dx)/($\sqrt[7]{(\cos^2 x)}$

3.2.5 а) $\int_{1/2}^\infty dx/(4x^2+4x+5)$ б) $\int_{-1/3}^{0} dx/\sqrt[3]{1+3x}$

3.2.6 а) $\int_0^\infty dx/(x(1+\ln^2 x)$ б) $\int (2x\, dx)/\sqrt{1+x^4}$

3.2.7 а) $\int_0^\infty ((\sqrt{\mathrm{arctg}2x)}/(1+4x^2)$ б) $\int_{3/4}^{1} dx/\sqrt[5]{3-4x}$

3.2.8 а) $\int_0^\infty x\, dx/(4x^2+4x+5)$ б) $\int_1^2 dx/\sqrt[5]{4x-x^2-4}$

3.2.9 а) $\int_0^\infty x \sin x\, dx$ б) $\int_{1/2}^{1} dx/\sqrt[9]{1-2x}$

3.2.10а) $\int$ dx $\substack{-1\\-\infty}$ -4x) б) $\int$ x^2d $\substack{2\\0}$ 64-x^6

3.2.11а) $\int$ dx $\substack{\infty\\1/3}$ $9x^2$)arctg^{2}3x б) $\int$ x^4c $\substack{1\\0}$ $\sqrt[3]{1-x^5}$

3.2.12а) $\int$ dx/ $\substack{\infty\\2}$ +x^2) $\sqrt{\mathrm{arctg}(x/2)}$ б) $\int$ ($\sqrt[3]{9}$ $\substack{3\\0}$ dx)/ ($\sqrt[3]{9-x^2}$)

3.2.13а) $\int$ dx/ $\substack{\infty\\1}$ +2x) б) $\int$ ($\sin^3 x$ dx $\substack{\pi/2\\0}$ cosx)

3.2.14а) $\int$ dx/ $\substack{\infty\\1}$ +x ^{2}) б) $\int$ dx /(2x-1 $\substack{1/2\\0}$

3.2.15а) $\int$ dx/ $\substack{\infty\\e^{-2}}$ lnx-1)^2 б) $\int$ dx $\substack{1/4\\0}$ 1-4x)

3.2.16а) $\int$ dx/($\substack{\infty\\1}$ ^{2}-5x+1) б) $\int$ x d $\substack{2\\0}$ $\sqrt[4]{(4-x^2)^3}$

3.2.17а) $\int$ dx/ $\substack{\infty\\-1}$ +4x+5 б) $\int$ dx/ $\substack{3\\1}$ 3-x)^5

3.2.18а) $\int$ x d $\substack{\infty\\1}$ $\sqrt{16x^4-1}$ б) $\int$ dx ^{3} x^2-6x+9)

3.2.19а) $\int$ x ^{3}d $\substack{\infty\\0}$ $\sqrt{16x^4+1}$ б) $\int$ x $\substack{1\\0}$ (1-x^4)

3.2.20а) $\int$ x d $\substack{\infty\\1}$ $\sqrt{x^2-4x+1}$ б) $\int$ (($\substack{1/3\\0}$ $^{1/2}$)/(x^2))dx

$\substack{\infty\\1}$ $\substack{2/3\\0}$

3.2.21 а) $\int x\,dx/(16x^4-1)$ б) $\int \sqrt{\ln(2-3x)/(2-3x)}\,dx$

3.2.22а) $\int_0^{\infty} x\,dx/\sqrt{(x^2+4)^3}$ б) $\int_{1/3}^{1} (\ln(3x-1)/(3x-1))\,dx$

3.2.23а) $\int_0^{\infty} x^2\,dx/\sqrt{(x^3+8)^4}$ б) $\int_{1/2}^{1} dx/((1-x)\ln^2(1-x))$

3.2.24а) $\int_0^{\infty} x\,dx/\sqrt{(16+x^2)^5}$ б) $\int_{1/4}^{1} dx/(20x^2-9x+1)$

3.2.25а) $\int_1^{\infty} dx/(x^2-9x+2)$ б) $\int_0^{1/3} dx/\sqrt{1-3x}$

3.3.1-3.3.25 Вычислить площади фигур, ограниченных заданными линиями.

3.3.1 $x=4-(y-1)^2$, $x=y^2-4y-3$
3.3.2 $x=2\sqrt{2}\cos t, y=3\sqrt{2}\sin t$ $(y\geq 3)$
3.3.3 $z=6\cos 3\varphi$, $(z\geq 3)$
3.3.4 $x=(y-2)^3$, $x=4y-8$
3.3.5 $x=8\cos^3 t$, $y=4\sin^3 t$ $(x\geq 3\sqrt{3})$
3.3.6 $z=\cos\varphi$, $z=\sin\varphi$ $(0\leq\varphi\leq\pi/2)$
3.3.7 $y=(x+1)^2$, $y^2=x+1$
3.3.8 $x=4(t-\sin t)$, $y=4(1-\cos t)$ $(0< x< 8\pi,\ y\geq 4)$
3.3.9 $z=4\cos 3\varphi$
3.3.10 $y=(x-2)^3$, $y=4x-8$
3.3.11 $x=\sqrt{2}\cos t$, $y=4\sqrt{2}\sin t$ $(y\geq 4)$
3.3.12 $z=2(1-\cos\varphi)$
3.3.13 $y=(x-1)^2$, $y^2=x-1$
3.3.14 $x=24\cos^3 t$, $y=2\sin^3 t$ $(x\geq 9\sqrt{3})$
3.3.15 $z=2\sin 24$
3.3.16 $y=4-x^2$, $y=x^2-2x$
3.3.17 $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$ $(02x<2\pi,\ y\geq 1)$
3.3.18 $z=3\sin 4\varphi$
3.3.19 $xy=4$, $x-y=5$
3.3.20 $x=6\cos t$, $y=4\sin t$
3.3.21 $x=z=2(1+\cos 4)$
3.3.22 $y^2=16-8x$, $y^2=24x+18$
3.3.23 $x=32\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$ $(x\geq 4)$
3.3.24 $z=2\sin 3\varphi$
3.3.25 $y=x^2-3x$, $3x+y-4=0$

3.4.1-3.4.25 Вычислить объем тела, полученого вращением фигуры, ограниченная графиками данных функций, вокруг указанной оси координат.

3.4.1	$y=(x-1)^2$,	x=0,	x=2,	y=0	(oy)
3.4.2	$y=-x^2+5x-6$, y=0				(ox)
3.4.3	$x=3\cos^3 t$,	$y=4\sin^3 t$	$(0\le t \le \pi/2)$		(oy)
3.4.4	$y^2=(x-1)^3$,	x=2			(ox)
3.4.5	$y=x^3$,	y=x			(oy)
3.4.6	x=6(t-sin t),	y=6(1-cos t)			(ox)
3.4.7	$y=x^2-2x+1$,	x=2,	y=0		(oy)
3.4.8	$y=2x-x^2$,	y=0,	$2x^2$-4ч+y=0		(ox)
3.4.9	x=2cos t,	y=5sin t			(oy)
3.4.10	y=3sin x,	y=sin x	$(0\le x \le \pi)$		(ox)

3.4.11	y=arcsin x,	y=arccos x	y=0		(oy)
3.4.12	$x=7\cos^3 t$,	$y=7\sin^3 t$			(ox)
3.4.13	$y=(x-1)^2$,	y=1			(oy)
3.4.14	$x=\sqrt[3]{y-2}$,	x=1	y=1		(ox)
3.4.15	$x=\sqrt{3}\cos t$,	y=2sin t			(oy)
3.4.16	$y=2x-x^2$,	y=-x+2			(ox)
3.4.17	$y=\sqrt{x-1}$,	y=0,	y=1,	x=0.5	(oy)
3.4.18	x=2(t-sin t),	y=2(1-cos t)			(ox)
3.4.19	$y=x^2+1$,	y=x,	x=0,	x=1	(oy)
3.4.20	$y=e^{1-x}$,	y=0,	x=0,	x=1	(ox)
3.4.21	x=2cos t,	y=6sin t			(oy)
3.4.22	$y^2=4x$,	$x^2=4y$			(ox)
3.4.23	$y=2-(x^2/2)$,	x+y=2			(oy)
3.4.24	$y=\cos^3 t$,	$y=\sin^3 t$			(ox)
3.4.25	y=5cos 2,	y=cos x	$(x\ge 0)$		(ox)

3.5.1-3.5.25 Даны функция Z=Z(x, y) и две точки $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$.

Требуется: а) Вычислить значение функции Z в точке B.

б) Вычислить приближенно значение функции Z в точке B, используя значения функции в точке A и заменив приращения функции от точки A до точки B с полным дифференцалом.

в) Оценить относительную погрешность приближенного вычисления в процентах.

г) Найти уравнение касательной плоскости к поверхности Z=Z(x, y) в точке $Z(x_0, y_0, z_0)$

3.5.1	$Z=x^2+xy+y^2$	A(1. 2)	B(1.02, 1.96)
3.5.2	$Z=3x^2-xy+x+y$	A(1. 3)	B(1.06, 2.92)
3.5.3	$Z=x^2+3xy-6y$	A(4. 1)	B(3.96, 1.03)
3.5.4	$Z=x^2-y^2+6x+3y$	A(2. 3)	B(2.02, 2.97)
3.5.5	$Z=x^2+2xy+3y^2$	A(2. 1)	B(1.96, 1.04)

3.5.6	$Z=x^2+y^2+2x+y-1$	A(2. 4)	B(1.98, 3.91)
3.5.7	$Z=3x^2+2y^2-xy$	A(-1. 3)	B(-0.98, 2.97)
3.5.8	$Z=x^2-y^2+5x+4y$	A(3. 2)	B(3.05, 1.98)
3.5.9	$Z=2xy+3y^{2-}5x$	A(3. 4)	B(3.04, 3.95)
3.5.10	$Z=xy+2y^2-2x$	A(1. 3)	B(1.03, 2.98)
3.5.11	$Z=2x^2+3xy+4$	A(1. 2)	B(0.97, 2.04)
3.5.12	$Z=2xy+3x-2y$	A(2. 2)	B(1.93, 2.05)
3.5.13	$Z=2y^2-3xy+4y$	A(1. 3)	B(1.07, 2.95)
3.5.14	$Z=x^2-y^2-2x+y$	A(4. 1)	B(3.98, 1.06)
3.5.15	$Z=x^2+y^2+2x+3y$	A(1. 2)	B(1.05, 1.98)
3.5.16	$Z=y^2+6xy-3y$	A(3. 2)	B(2.94, 2.05)
3.5.17	$Z=3xy+2x+y$	A(1. 2)	B(1.05, 1.93)
3.5.18	$Z=x^2+y^2+3x+3y$	A(3. 2)	B(3.04, 1.95)
3.5.19	$Z=x^2+2xy+3y^2$	A(2. 1)	B(1.95, 1.04)
3.5.20	$Z=2xy+3y^2-5x$	A(3. 4)	B(3.04, 3.95)
3.5.21	$Z=x^2+xy+y^2$	A(1. 1)	B(1.08, 1.85)
3.5.22	$Z=2x^2+3xy+y^2$	A(2. 1)	B(2.01, 0.95)
3.5.23	$Z=5x^2+6xy$	A(3. 4)	B(2.95, 4.02)
3.5.24	$Z=3x^2+2xy^2$	A(1. 3)	B(1.05, 2.97)
3.5.25	$Z=3x^2y^2+5y^2x$	A(1. 1)	B(1.01, 1.04)

3.6.1-3.6.25 Исследовать на экстремум функции $Z=Z(x, y)$

3.6.1 $Z=2(x+y)-x^2-y^2$

3.6.2 $Z=xy(12-x-y)$

3.6.3 $Z=(x-5)^2+y^2+1$

3.6.4 $Z=x^2-xy+y^2+x-y+1$

3.6.5 $Z=x^2+3(y+2)^2$

3.6.6 $Z=(x-2)^2+2y^2-10$

3.6.7 $Z=3x^3+3y^2-9xy+10$

3.6.8 $Z=1+6x-x^2-xy-y^2$

3.6.9 $Z=xy-3x^3-2y^2$

3.6.10 $Z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$

3.6.11 $Z=2xy-5x^2-3y^2+2$

3.6.12 $Z=2x^3+2y^3-6xy+5$

3.6.13 $Z= y\sqrt{x}-2y^2-x+14y$

3.6.14 $Z=(x-1)^2+2y^2$

3.6.15 $Z=x^3+8y^3-6xy+1$

3.6.16 $Z= x\sqrt{y}-x^2-y+6x+3$

3.6.17 $Z=x^2+xy+y^2-6x-9y$

3.6.18 $Z=x^3+y^2-6xy-39x+18y+20$

3.6.19 $Z=x^2+xy+y^2-2x-y$

3.6.20 $Z=2xy-3x^2-2y^2+10$

3.6.21 $Z=2xy-2x^2-4y^2$
3.6.22 $Z=6(x-y)-3x^2-3y^2$
3.6.23 $Z=1+15x-2x^2-xy-2y^2$
3.6.24 $Z=x^2+y^2-xy+x+y$
3.6.25 $Z=xy-x^2-y^2+9$

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Вариант контрольной работы студента определяется следующим образом:

- если последные две цифры учебного шифра 00, то выполняется 25-вариант;
- если от 01 до 25, то выполняется соответсвующий вариант;
- если число, состоящее из этих последних двух цифр больше 25, то номер варианта соответсвует остатку от деления этого числа на 25; если остаток будет равен нулю, то берется 25-вариант. Например последние две цифры будут 67, тогда 67/25=2(17/25) остаток равен 17 и студент выполняет вариант № 17.

При выполнении и оформлении контрольных работ необходимо соблюдать следеющие правила:

1. Контрольная работа выполняется в тетради, а не на листах, с полями для замечаний рецензента.
2. На обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия и инициалы студента, учебный номер (шифр), номер контрольной работы. Здесь же следует указать дату отсылки работы в институт и адрес студента. В конце работы следует проставить дату её выполнения и расписаться.
3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по положенному варианту. Контрольные работы, содержащие не все задачи задания, а также содержащие задачи не своего варианта, не зачитываются.
4. Решение задачи надо распологать в порядке номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.
5. Решение задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решении делая необходимые чертежи.
6. После получения проренцензированной работы, как незачтенной, так и зачтенной, студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты и выполнить все рекомендации. Если работа не зачтена, она должна быть в короткий срок либо выполнена заново, целиком, либо должны быть заново решены задачи, указанные рецензентом.

Исправленную работу следует посылать в институт вместе с незачтенной. Вносить исправления в сам текст работы после рецензирования запрещается.

СОДЕРЖАНИЕ