ҚАРШИ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ҚАРШИ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ДЖАЛИЛОВ ШУХРАТ АХТАМОВИЧ

МАХСУСЛИККА ЭГА БЎЛГАН АЙЛАНА ГОМЕОМОРФИЗМЛАРИНИНГ ҚЎШМА АКСЛАНТИРИШЛАРИ ВА ЭҲТИМОЛЛИК ИНВАРИАНТ ТАҚСИМОТЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Қарши – 2022 йил

УДК: 517.55

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

ҚАРШИ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ
ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ҚАРШИ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ДЖАЛИЛОВ ШУХРАТ АХТАМОВИЧ

МАХСУСЛИККА ЭГА БЎЛГАН АЙЛАНА ГОМЕОМОРФИЗМЛАРИНИНГ ҚЎШМА АКСЛАНТИРИШЛАРИ ВА ЭҲТИМОЛЛИК ИНВАРИАНТ ТАҚСИМОТЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Қарши – 2022 йил

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида № B2021.4.PhD/FM645 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Қарши Давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш вебсаҳифаси (http:www.qarshidu.uz) ва «ZiyoNet» таълим ахборот тармоғида (http:www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Жабборов Насриддин Мирзоодилович** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Ганиходжаев Расул Набиевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Яхшибоев Махмадиёр Умирович физика-математика фанлари доктори (DSc)
Етакчи ташкилот:	Бердақ номидаги Қорақалпоқ давлат университети

Диссертация ҳимояси Қарши давлат университети ҳузуридаги PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 рақамли Илмий кенгашнинг 2022 йил «____» ____________ соат ____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 180103, Қарши ш., Кўчабоғ кўчаси, 17-уй. Тел.: (+998 75) 225 34 13, факс: (+998 75) 221 00 56, e-mail: qarshidu@umail.uz). Қарши давлат университети, Физика-математика факультети, 102-хона.

Диссертация билан Қарши давлат университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (____ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 180103, Қарши ш., Кўчабоғ кўчаси, 17-уй. Тел.: (+998 75) 225 34 13).

Диссертация автореферати 2022 йил «____» ____________ куни тарқатилди.
(2022 йил «____» ____________ даги ____ рақамли реестр баённомаси).

Б.А. Шоимкулов
Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш раиси,
ф.-м.ф.д., профессор

М.С. Рустамова
Илмий даражалар берувчи
илмий кенгаш илмий котиби,
ф.-м.ф.ф.д. (PhD), доцент

А.А. Имомов
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш
қошидаги илмий семинар раиси ф.-м.ф.д., (DSc)

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида фундаментал фанлар соҳасида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар замонавий динамик системалар масалаларига хусусан айлана акслантиришлари назарияси масалаларини тадқиқ қилишга келтирилади. Замонавий айлана акслантиришлари назариясида махсусликка эга бўлган акслантиришларни, уларнинг юкори даражаларини ва орбиталарининг асимптотик холатини тадқиқ қилиш долзарб масала хисобланади.

Йўналишни сақловчи айлана гомеоморфизмларини ўрганиш дастлаб 19-чи асрнинг охирида осмон механикаси муаммоларини тадқиқ этиш жараёнида бошланган. Ночиқли жараёнларнинг кўплаб масалалари, ахборотлар назариясида учрайдиган тасодифий шовқинлар ва табиий фанларнинг муаммолари айлана гомеоморфизмлари билан яқиндан боғлиқ.

Жаҳонда динамик системалар назариясининг актуал масалаларидан бири бўлган айлана диффеоморфизмларини, критик айлана акслантиришларини, бўлакли-силлиқ айлана акслантиришларинини тадкик килиш ва ночизикли жараёнларни моделлаштириш бўйича илмий изланишлар олиб борилмоқда. Динамик системалар назариясида айлана акслантиришларнинг эхтимоллик инвариант ўлчовларини тадқиқ килишга, кўшма акслантиришларни топишга ва махсусликка эга бўлган бўлакли-силлиқ акслантиришларнинг асиимптотикасини аниклашга алоҳида эътибор берилмоқда.

Мамлакатимизда математиканинг фундаментал ва амалий тадбиқига эга бўлган динамик системалар назариясига эътибор кучайтирилди. Жумладан, сўнги йилларда динамик системалар замонавий математиканинг мухим ташкил этувчиси сифатида замонавий математика масалаларини ечишга оид салмоқли натижаларга эришилди. Шунингдек, “алгебра, динамик тизимлар назарияси, геометрия ва топология” фанларининг устувор йўналишлари бўйича ҳалқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифалар ва фаолият этиб белгиланди[1]. Бу борада айлана акслантиришларини тадкик этиш назарий ва аҳамиятга эга бўлиб ҳисобланади.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида” ги ПФ-4947 Фармони, 2019 йил 9 июлдаги “Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-4387-сонли ва 2020 йил 7 майдаги “Математика соҳасидаги таьлим сифатини ошириш ва илмий тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-4708 сонли Қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида”ги 292-сонли қарори.

бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. “Математика, механика ва информатика” устивор йўналиши айланасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Айлананинг йўналишни сақловчи, нодаврий гомеоморфизмлари учун эҳтимоллик инвариант ўлчовининг абсолют узлуксизлиги масаласи динамик системалар назариясида муҳим аҳамиятга эга. Ушбу масала билан чамбарчас боғлиқ бўлган, қўшма акслантиришларининг силлиқлиги масаласидир. Айлананинг аналитик диффеоморфизмлари учун биринчи натижалар В.И. Арнольднинг фундаменталь ишларида олинган. Диффеоморфизмларнинг силлиқлиги бўйича кейинги фундаментал натижалар М. Эрман, Ю. Мозер, Ж. Йоккоз, Х. Катцнельсон, Д. Орнстейн, Я. Г. Синай, К.М. Ханин ва бошқаларнинг ишларида олинган. Бугунги кунга келиб диффеоморфизмлар учун инвариант ўлчовнинг абсолют узлуксизлиги масаласи яхши ўрганилган. Сўнгги энг мухим натижалар Ҳ. Кацнелсон ва Д. Орнштейн, Ж. G. Синай ва К. М. Ханин ишларида исботланган. Айлананинг $C^{2+\tau}$ $-$ диффеоморфизмларининг буриш сони типик иррационал сон бўлганда, инвариант ўлчовни айланадаги Лебег ўлчовига нисбатан абсолют узлуксиз эканлиги исботланган.

Синишларга эга бўлган, бўлакли-силлиқ айлана гомеоморфизмлари диффеоморфизмларнинг табиий умумлашмасидир. Айлананинг бўлакли-чизиқли гомеоморфизмлари М. Эрман, И. Лиоус, И. Коело ва А. Лопес ишларида ўрганилган. Бўлакли-силлиқ гомеоморфизмларнинг инвариант ўлчовлари А. Джалилов, К. Ханин, А., Д. Майер, И. Лиоусс, Д. Майер, У. Сафаров, А. Теплинский ва бошқаларнинг ишларида ўрганилган. А. Джалилов, Д. Майер ва У. Сафаровлар айлананинг нодаврий, бўлакли-силлиқ гомеоморфизмлари учун, синишлар катталиклари купайтмаси 1 га тенг бўлмаган холда, инвариант ўлчов сингуляр эканлигини исботланган.

Айлана акслантиришларининг яна бир муҳим синфи-бу нодаврий, битта критик нуқтага эга бўлган критик акслантиришлардир. Дастлаб, Ж. Йоккоз уларнинг чизиқли бурилишга топологик эквивалентлигини исботлаган. Грачек ва Г. Свентек айлананинг критик акслантиришларининг инвариант ўлчови сингуляр эканлигини исботлаган. Битта критик нуқта ёки ўзилиш нуқтаси бўлган айлананинг гомеоморфизмлари орасидаги қўшма акслантиришнинг силлиқлиги масаласи “қаттиклик” масаласи деб аталади. Шуни таъкидлаш лозимки, “қаттиқлик” масаласи охирги 20 йил давомида К. Ханин ва Д. Хмелев, К. Ханин ва А. Теплинский, С. Кошич, А. Джалилов, Д. Смания ва К. Куня ва бошқаларнинг ишларида кенг равишда тадқиқ этилган.

Шуни таъкидлаш лозимки, юқорида такидлаб ўтилган куплаб мухим натижаларга қарамасдан бўлакли-силлиқ ва критик айлана гомеоморфизмлари учун эхтимоллик инвариант ўлчовлари абсолют узлуксизлиги ва ренормализацияларининг асиптотик холати масалалари охиригача тадқиқ этилмаган ва очик масаладир.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация мавзуси Қарши Давлат университети илмий Кенгашида тасдиқланган (2020 йил 25 ноябрдаги 4-сонли баённома) ва Қарши Давлат университети "Математик анализ ва дифференциал тенгламалар" кафедрасининг режалаштирилган мавзусига мувофиқ бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади айлананинг бўлакли-силлиқ, синиш нуқталарига эга бўлган гомеоморфизмларининг эҳтимоллик инвариант ўлчовларини ва ҳар хил турдаги махсусликларга эга айлана акслантиришлари орасидаги қўшма гомеоморфизмларни аниқлашдан иборатдир.

Тадқиқотнинг вазифалари:

айлананинг нодаврий, иккита синишга эга бўлган бўлакли-силлиқ гомеоморфизмлари учун синиш нуқталари орбиталарининг ҳолатларини аниқлаш;

айлана нуқтасининг символик тасвири ва эҳтимоллик инвариант ўлчови орасидаги, шунингдек, иккита синишга эга, бўлакли-силлиқ ночизикли айлана гомеоморфизмлари ва бўлакли-чизиқли Эрман акслантиришлари ўртасидаги боғланишларни топиш;

бўлакли-силлиқ, ночизиқли ва буриш сони "чегараланмаган типдаги" иррационал бўлган айлана гомеоморфизмлари учун эҳтимоллик инвариант ўлчовни текшириш;

айлананинг нодаврий, критик акслантиришларининг иккиланганлик муносабатларини силжишининг асимптотик ҳолатини кўрсатиб бериш;

айлананинг критик акслантиришлари ва синишга эга бўлган акслантиришлари орасидаги қўшма гомеоморфизмларни аниқлаш.

Тадқиқотнинг объекти сифатида бўлакли-силлиқ, синиш нуқталарига эга бўлган гомеоморфизмлар, инвариант ўлчовлар, қўшма гомеоморфизмлар олинган.

Тадқиқотнинг предметини динамик системалар, айлана гомеомор-физмлари назарияси, инвариант ўлчовларлар ташкил қилади.

Тадқиқотнинг усуллари. Ишда математик анализ, функционал анализ, эргодик назария, бир ўлчовли динамика, эҳтимоллар назарияси усуллари қўлланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

иккита бўлакли-силлиқ айлана гомеоморфизмлари бир хил сондаги синиш нуқталарига, бир хил орбита тузилишга ва иррационал буриш сонига эга бўлганда, иккала акслантиришнинг синиш нуқталари бир хил символик тасвирга эга эканлиги, нуктавий орбиталарнинг айланада жойлашишидан ва динамик бўлинишларнинг тузилишидан фойдаланиб исботланган;

иккита синиш нуқталарига эга бўлган f айлана акслантиришининг синиш нуқталари b_1 ва b_2 ларни бирлаштирувчи кесма инвариант ўлчови учун b_2 нуқтани символик динамикаси ёрдамида ошкор кўриниши топилган.

бўлак-силлиқ, иккита синишга, оддий синиш катталигига эга ва нодаврий айлана гомеоморфизми f га топологик эквивалент бўлган бўлак-чизиқли иккита синишга эга Эрман акслантириши h топилган, f ни синиш нуқталари h ни синиш нуқталарига акслантирилиши ва синиш катталиклари сақланиб қолиши аниқланган;

чекли сондаги синишга эга бўлган, нодаврий ва бўлак-силлиқ айлана гомеоморфизмлари учун, ҳар бир синиш нуқтасининг атрофида синиш катталиги бирдан фарқли бўлиши ва Тейлор ейилмаси ёрдамида биринчи қайтиш акслантиришларининг ҳосилалари бирдан қатъий равишда фаркли булишлиги исботланган;

бўлак-силлиқ, нодаврий, битта орбитада етмаган иккита синиш нуқтасига эга ва синиш катталиги бирга тенг бўлган айлана гомеоморфизми учун иккала синиш нуқталари орбиталарининг узоқлаши ва синиш нуқталари очилганда биринчи қайтиш акслантиришларининг ҳосилалари бирдан фаркли бўлишлигидан фойдаланиб эхтимоллик инвариант ўлчовни сингуляр эканлиги исботланган;

айлананинг нодаврий, критик акслантиришларининг иккиланганлик муносабати силжишлари учун учта ёнма-ён жойлашган кесмаларни узунликларини критик нуқта атрофидан акслантирилганда кичиклашишини ва динамик бўлинишларга тегишли кесмаларни метрик хоссаларидан фойдаланиб баҳо олинган;

айлананинг буриш сони бир хил ва иррационал бўлган кубик критик акслантириши ва чеклита синишга эга акслантиришларининг қўшмаси бу акслантиришларнинг махсус нуқталарининг ҳар хил типда бўлганлиги сабабли айланада сингуляр функция бўлишлиги исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

айлананинг ночизиқли бўлакли-силлиқ акслантиришлари ва бўлакли-чизиқли Эрман акслантиришлари ўртасидаги топилган боғлиқлик, ҳар хил орбиталарда жойлашган иккита нуқталарининг орбиталарини ҳолати, шунингдек бир хил параметрларга эга акслантиришлар орасидаги қўшма акслантиришлардан динамик системалар, математик анализ ва уларнинг тадбиқларида фойдаланилади.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги математик фикрлаш ва исботларнинг қатъийлиги, динамик системанинг, эргодиклар назариясининг ва математик анализнинг маълум усулларидан фойдаланиш билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти.

Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти шундан иборатки, олинган натижалар бир ўлчовли акслантиришларнинг инвариант ўлчовининг сонли кўрсаткичларини топишда ва айлананинг нодаврий гомеоморфизмлари учун қўшма акслантиришларни тадқиқ қилишда фойдаланилади.

Амалий аҳамияти шундаки, диссертация натижаларидан айлана акслантиришларини моделлаштиришда, шунингдек орбиталарнинг асимптотикасини топишда ва дастурлаш ёрдамида инвариант ўлчовнинг сонли кўрсаткичларини ҳисоблашда фойдаланилади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Махсусликка эга бўлган айлана гомеоморфизмларининг қўшма акслантиришлари ва эҳтимоллик инвариант тақсимотларининг натижалари MRU-OT-9/2017 рақамли “Многомерный комплексный анализ” мавзусидаги амалий лойиҳада фойдаланилган, бунда комплекс сонлар текислигида кўпҳадлар ва бошқа акслантиришлар динамикасини ёпиқ чизиқ устида ўрганиш муҳим аҳамиятга эга ва бу масала айлана акслантиришларини тадқиқ этиш билан боғланган ҳисобланади. Мана шу сабабли диссертация ишида олинган натижалардан ва уларни исботлаш методларидан юқорида келтирилган амалий лойиҳада фойдаланилган (Ўзбекистон Миллий университети 2022 йил 19 майдаги 04/11-2863-сон маълумотномаси). Натижада бўлакли-силлиқ айлана акслантиришларнинг синиш нуқталари ҳолати тўғрисидаги теорема ва эхтимоллик инвариант ўлчовининг сингулярлигини исботлаш имконини берган;

Махсусликка эга бўлган айлана гомеоморфизмларининг қўшма акслантиришлари ва эҳтимоллик инвариант тақсимотларининг натижалари ОТ-Ф-4-42 рақамли “Ярим аддитив τ -силлиқ ва Радон функционаллар фазоларининг кардинал ва топологик хоссалари” мавзусидаги амалий лойиҳада турли типдаги акслантиришларни топологик эквивалентлиги тўғрисидаги теоремаларни исботлаш методларидан, ҳамда инвариант ўлчовларни характери тўғрисидаги натижадан топологик фазолар гомеоморфизмлари учун инвариант ўлчовлар қуриш ва уларнинг хоссаларини тадқиқ этишда, юқорида келтирилган амалий лойиҳада фойдаланилган (Ўзбекистон Миллий университети 2022 йил 19 майдаги 04/11-2864-сон маълумотномаси). Натижада бўлакли-силлиқ, ночизиқли, айлана гомеоморфизмлари таъсирида иккиланганлик муносабатларининг (cross-ratio) динамикасини ва ҳар хил типга эга айлана акслантиришлари ўртасидаги қўшмаларни таҳлил қилиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 3 та халқаро ва 4 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация тадқиқоти мавзуси бўйича жами 13 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг фалсафа докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 6 та, жумладан, 1 таси хорижий ва 5 таси республика журналларида, шунингдек, 7 та маъруза тезислари илмий конференция материалларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, 11 параграфга бўлинган бўлиб, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг умумий ҳажми 100 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг "**Эргодиклар назарияси ва айлана акслантришларидан керакли маълумотлар** " номли биринчи бобида эргодиклар назариясидан, синишларга эга бўлган, бўлакли-силлиқ айлана гомеоморфизмлари ва критик айлана акслантиришлари учун зарур бўлган дастлабки маълумотлар келтирилган.

1.1 параграфда эргодиклар назариядан баъзи таърифлар ва теоремалар келтирилган: инвариант ўлчов тушунчаси, эргодиклик ва эҳтимоллик инвариант ўлчов мавжудлиги ҳақидаги Боголюбов-Крилов теоремаси. Ушбу маълумотларнинг барчаси диссертация натижаларини баён этишда қўлланилади.

1.2 параграфда айлана гомеоморфизмлари, динамик бўлинишлар ва символик динамика назариясидан дастлабки маълумотлар келтирилган.

Айтайлик $S^1 = R/Z \cong [0,1)$ бирлик айлана бўлсин. 0 дан 1 гача бўлган йўналиш айлана бўйича *мусбат йўналиш* дейилади.

1-таъриф. $f : S^1 \to S^1$ *акслантириш айлана гомеоморфизми деб аталади, агар қуйидаги шартлар бажарилса:*

1) f *-ўзаро бир қийматли акслантириш* S^1*;*

2) f *ва* f^{-1} *акслантиришлар* S^1 *айланада узлуксиз.*

Айлананинг йўналишини сақловчи гомеоморфизми f ни қуйидаги формула орқали аниқлаш мумкин:

$$f(x) = \{F(x)\}, \quad \forall x \in S^1,$$

бу ерда $\{\cdot\}$ қавслар соннинг каср қисмини билдиради, бу ерда $F : R^1 \to R^1$ функция қуйидаги хоссаларга эга:

b_1) F функция R^1 да қатъий ўсувчи ва узлуксиз функция;

b_2) ҳар қандай $x \in R^1$ учун $F(x+1) = F(x) + 1$ бўлади.

Ушбу F функция f учун *аниқловчи функция* ёки *қутқарувчи* дейилади.

Агар F_1 ва F_2 битта гомеоморфизмни аникловчи функциялари бўлса, у ҳолда $\forall x \in R^1$ учун $F_1(x) = F_2(x) + k$ бўлади, k бутун сон .

f гомеоморфизмнинг F аниқловчи функцияси бўлсин, у холда f^n учун F^n, $n \in Z$ аниқловчи функция бўлади, бу ерда f^n қуйидагича аникланади:

$$f^1(x) = f(x), \qquad f^n(x) = f\left(f^{n-1}(x)\right).$$

2-таъриф. *Айлана гомеоморфизми $f : S^1 \to S^1$ диффеоморфизм дейилади, агар f ва f^{-1} функциялар S^1 да чекли ҳосилаларга эга бўлса.*

Агар $F \in C^r(R^1)$, $r \geq 1$ бўлса, f диффеоморфизм C^r синфга тегишли деб айтамиз.

3-таъриф. *$f : S^1 \to S^1$ айлана гомеоморфизмини қараймиз. Агар $f^{(i)}(x_0) \neq f^{(j)}(x_0)$, $0 \leq i < j \leq k-1$. $k > 1$ ва $f^{(k)}(x_0) = x_0$ бўлса, $x_0 \in S^1$ нуқта $k-$ даврли даврий нуқта дейилади.*

Ушбу $f(x_0) = x_0$ бўлган ҳолда, x_0 нуқта f акслантиришнинг *қўзғалмас нуқтаси* дейилади.

А. Пуанкаренинг фундаментал теоремасини келтирамиз.

1-теорема (Пуанкаре). *Айтайлик $f : S^1 \to S^1$- йўналишни сақловчи айлана гомеоморфизми ва F- ушбу гомеоморфизмнинг ихтиёрий аниқловчи функцияси бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $x \in R^1$ лар учун қуйидаги*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n} = \rho(T_f, f)$$

лимит мавжуд ва унинг қиймати $x \in R^1$ нуқтани танлаб олишга боғлиқ эмас. $\rho(f, F)$ рационал сон бўлиши учун f даврий траекторияга эга бўлиши зарур ва етарли.

Агар $F_1(x) = F_2(x) + k$, $k \in Z$ бўлса, у ҳолда равшанки,

$$\rho(f, F_1) = \rho(f, F_2) + k$$

бўлади.

4-таъриф. *Айтайлик, f йўналишни сақловчи айлана гомеоморфизми ва $F-$ ушбу гомеоморфизмнинг аниқловчи функцияси бўлсин. $\rho(f) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F^n(x)}{n}$ (mod1) сони f гомеоморфизмнинг буриш сони дейилади.*

f гомеоморфизмни аниқловчи функциялари ичида $0 \leq F(0) < 1$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ягона аниқловчи функция F мавжуд. Кейинги ўринларда гомеоморфизмни аниқловчи функцияси ҳақида деганда, айнан ушбу функцияни назарда тутамиз.

Келгусида ρ буриш сонини иррационал сон деб фараз қиламиз. $f_\rho(x) = \{x + \rho\}$, $x \in S^1$ гомеоморфизм ρ бурчакга *чизиқли буриш* дейилади.

5-таъриф . *T_1 ва T_2 айлана гомеоморфизмлари топологик эквивалент дейилади, агарда шундай йўналишни сақловчи $\varphi : S^1 \to S^1$ гомеоморфизм мавжуд бўлиб, $\forall x \in S^1$ учун қуйидаги $\varphi(T_f x) = T_\rho(\varphi(x))$ тенглик ўринли бўлса, φ га қўшма гомеоморфизм ёки қўшмаси дейилади.*

Топологик эквивалент айлана гомеоморфизмлари учун буриш сони инвариант сон бўлади.

2-теорема (Данжуа). *Фараз қилайлик* f *айлана диффеоморфизми бўлиб , унинг буриш сони* $\rho = \rho(T_f)$ *иррационал бўлсин. Агар* $f \in C^1(S^1)$ *бўлиб,* $f' \geq Const > 0$ *ва* $\underset{S^1}{\operatorname{var}} \ln f'(x) < \infty$ *шартлар бажарилса, у ҳолда* f *ва* f_r *топологик эквивалент бўлади.*

Бурилиш сони r иррационал бўлган $P_n(x_0)$ айлана гомеоморфизмини қараймиз. r сонининг узлуксиз касрга ёйилиши қуйидаги $r = [k_1, k_2, ..., k_n, ...]$ кўринишга эга. $\frac{p_n}{q_n} = [k_1, k_2, ..., k_n]\,, n \geq 1$ деб белгилаймиз.

Ихтиёрий нуқта $x_0 \in S^1$ учун $\Delta_0^{(n)}(x_0)$ билан четки нуқталари x_0 ва $x_{q_n} = T_f^{(q_n)} x_0$ бўлган ёпиқ кесмани белгилаймиз. Агар n тоқ бўлса, x_{q_n} нуқта x_0 нинг чап томонида жойлашган, ва n жуфт бўлса ўнгда. $\Delta_i^{(n)}(x_0) = T_f^{(i)} \Delta_0^{(n)}(x_0),\ \ i \geq 1$ деб белгилаймиз. Орбитанинг бир қисми бўлган $\left\{x_i = T_f^{(i)} x_0,\ 0 \leq i < q_n + q_{n+1}\right\}$ айланани кесишмайдиган (охирги нуқталардан ташқари) сегментларга ажратади: $\Delta_i^{(n)}(x_0),\ 0 \leq i < q_{n+1},\ \ \Delta_j^{(n+1)}(x_0),\ \ 0 \leq j < q_n$. Олинган бўлинишни $P_n(x_0)$ билан белгиланади. $P_n(x_0)$ бўлиниш n-чи динамик бўлиниш дейилади. Динамик бўлинишлар кетма-кетлигидан фойдаланиб, символик динамикани қуриш мумкин.

1.3 параграфда бўлакли-силлиқ айлана гомеоморфизмлари синфига оид зарурий таъриф ва тасдиқлар келтирилган. Бундай акслантиришлашлар айлана диффеоморфизмларининг табиий умумлашмаси ҳисобланади. Сўнгги 20 йилда синиш нуқталарига эга бўлган айлана акслантиришлари К. Ханин, Д. Хмелев, А. Теплинский, Д. Смания, К.Кун, И.Люус, С.Косич, Д. Майер, А. Джалилов ва бошқалар ишларида кенг ўрганилди.

$b \in [0,1)$ нуқта f акслантиришнинг синиш нуқтаси дейилади, агар шу нуқтада унинг биринчи тартибли ҳосиласи сакрашга эга бўлса. Синиш нуқталарига эга бўлган содда гомеоморфизмлар сифатида бўлакли-чизиқли айлана гомеоморфизмларини кўриш мумкин. М. Эрман иккита синиш нуқтасига ва иррационал буриш сонига эга бўлакли-чизиқли айлана гомеоморфизмларининг инвариант ўлчови абсолют узлуксиз бўлиши учун ушбу иккита синиш нуқтаси битта орбитада ётиши зарур ва етарли эканлигини кўрсатган.

Синиш нуқталарига эга бўлган ночизиқли бўлакли-силлиқ айлана гомеоморфизмларининг инвариант ўлчовлари К. Ханин, А. Джалилов, Д. Майер, И. Лиусс, У. Сафаров, Д. Смания, Х. Марзагуй ва бошқаларнинг ишларида ўрганилган. Диффеоморфизмлардан фарқли равишда бундай гомеоморфизмларнинг инвариант ўлчовлари Лебег ўлчовига нисбатан сингуляр бўлади (К. Ханин, А. Джалилов, Д. Майер, И. Лиусс). Синиш нуқталарига эга булакли-силлиқ гомеоморфизмлар ренормализацияси каср-чизиқли акслантиришларга апроксимацияланади (К. Ханин, Д. Хмелев, А. Теплинский, Д. Смания, К. Куня, С. Косич ва бошқалар).

1.4 параграфда айлананинг критик акслантиришларига оид зарур таъриф ва теоремалар келтирилган.

Диссертациянинг **«Айлананинг бўлакли-силлиқ акслантиришлари инвариант ўлчовлари ва синиш нуқталарининг орбиталари ҳолати"** номли иккинчи боби иккита синишга ва иррационал буриш сонига эга бўлган, бўлакли-силлиқ айлана гомеоморфизмларини ўрганишга бағишланган. Бурилишлар сони иррационал бўлган айлана гомеоморфизмлари даврий орбиталарга эга бўлмагани учун бундай гомеоморфизмлар нодаврий дейилади.

2.1 параграфида синиш нуқталари орбиталарининг тўзилиши, инвариант ўлчови ва символик динамикаси ўртасидаги боғлиқлик ўрганилган.

Айлана гомеоморфизмларининг $P-$ синфи йўналишини сақлайдиган, айлана гомеоморфизмлари f ларни ўз ичига олади, бунда, f чекли сондаги нуқталардан ташқари барча нуқталарда дифференциалланувчи, уни $BP(f)=\{x_b \in S^1\}$ деб белгилаймиз, бир томонлама ҳосилалар $f_-'(x_b)$, $f_+'(x_b)$ ва $0<c_1<c_1<\infty$ ўзгармаслар мавжуд, шу билан биргаликда қуйидагилар бажарилади:

- $c_1 < f'_-(x_b) < c_2, \qquad c_1 < f'_+(x_b) < c_2, \qquad \forall x_b \in BP(f);$
- $c_1 < f'(x) < c_2, \qquad \forall x \in BP(f);$
- $V = \operatorname{var}_{S^1} f' < \infty.$

Айлананинг буриш сони $\rho := \rho_f$ иррационал бўлган гомеоморфизмини қараймиз. Ихтиёрий $x_0 \in S^1$ нуқтани оламиз, уни $n-$чи динамик бўлинишини $P_n(x_0) := P^f{}_n(x_0) = \{\ \Delta_0^{(n-1)}, \Delta_1^{(n-1)}, ..., \Delta_{q_n-1}^{(n-1)}\ \} \bigcup \{\ \Delta_0^{(n)}, \Delta_1^{(n)}, ..., \Delta_{q_{n-1}-1}^{(n)}\ \}$ қараймиз. $P_n(x_0)$ бўлинишдан $P_{n+1}(x_0)$ га ўтишда барча $\Delta_i^{(n)}(x_0)$, $0 \le i \le q_{n-1}-1$кесмалар сақланади ва ҳар бир $\Delta_j^{(n-1)}(x_0)$ кесма $(k_{n+1}+1)$ та кесмаларга бўлинади. $P_n(x_0)$ бўлинишлар ёрдамида f учун символик динамика қуриш мумкин.

Энди символик кетма-кетликни киритамиз. $\varepsilon_0 := \varepsilon_0(x) = 0, \ \ \forall x \in \Delta_0^{(1)}(x_0),$ $\varepsilon_0 := \varepsilon_0(x) = a, \quad \forall x \in \Delta_0^{(0)}(x_0),$ $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x) = k_1 - s, \quad \forall x \in \Delta_s^{(0)}(x_0), \quad 1 \le s \le k_1 - 1.$ Шунингдек,

$$\varepsilon_n := \varepsilon_n(x) = 0, \quad \forall x \in \Delta_j^{(n+1)}(x_0),$$

$$\varepsilon_n := \varepsilon_n(x) = k_{n+1} - s, \quad \forall x \in \Delta_{i+q_{n-1}+sq_n}^{(n)}(x_0), \quad 0 \le s \le k_{n+1} - 1.$$

Биз, шу тарзда қуйидаги ўзаро бир қийматли акслантиришга эга бўламиз. $\psi : S^1 \setminus O_f(x_0) \leftrightarrow \{\ \underline{\varepsilon} = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n, \ldots), \varepsilon_n \in \{a, 0, 1, ..., k_{n+1}\}$ бунда, $\varepsilon_{n+1} = a,$ шунда ва фақат шундаки, агар $\varepsilon_n = 0,\ n \ge 1\} =: \Theta(\rho).$ Келгусида биз факат b_1 синиш нуқтасига мос бўлинишларни ва символик фазони қараймиз.

Иккита айланада аниқланган $P-$синфга тегишли f_1 ва f_2 гомеоморфизмларни қараймиз, уларни синиш нуқталари тупламлари $BP(f_1)$ ва $BP(f_2)$ бўлсин. Фараз қилайлик, f_1 ва f_2 ларни синишлари сони бир хил бўлсин, яьни $|BP(f_1)|=|BP(f_2)|=m.$ Шунингдек, $\rho(f_1)=\rho(f_2)=\rho\in[0,1]\setminus Q.$

f_1 ва f_2 гомеоморфизларни инвариант ўлчовларини μ_1 ва μ_2 орқали белгилаймиз. $BP(f_1)$ ва $BP(f_2)$ синиш тўпламлари бир хил орбитали тўзилишга эга дейилади, агарда шундай ўрин алмаштиришлар $\overline{b}^{(1)}=\left(b_1^{(1)},b_2^{(1)},...,b_m^{(1)}\right)$, $\overline{b}^{(2)}=\left(b_1^{(2)},b_2^{(2)},...,b_m^{(2)}\right)$ мавжуд бўлсаки, қуйидаги шартлар бажарилса:

1) $b_1^{(1)}\prec b_2^{(1)}\prec...\prec b_m^{(1)}\prec b_1^{(1)}$ ва $b_1^{(2)}\prec b_2^{(2)}\prec...\prec b_m^{(2)}\prec b_1^{(2)}$;

2) $\mu_1\left(\left[b_s^{(1)},b_{s+1}^{(1)}\right]\right)=\mu_2\left(\left[b_s^{(2)},b_{s+1}^{(2)}\right]\right),\quad 1\le s\le m-1.$

Синиш нуқтаси орбиталарининг тузилиши ва символик динамика ўртасидаги боғланиши ҳақидаги натижамизни келтирамиз.

3-теорема. *f_1 ва f_2 гомеоморфизмлар $P-$синфга тегишли бўлиб, бир хил $\rho(f_1)=\rho(f_2)=\rho$ иррационал буриш сонига эга ва уларнинг символик фазоси $\Theta_+(\rho)$ бўлсин. У ҳолда ҳар бир $1\le s\le m$ учун $b_s^{(1)}$ ва $b_s^{(2)}$ синиш нуқталарининг символик тасвирлари устма-уст тушади, яъни.* $\underline{\varepsilon}^{(1)}\left(b_s^{(1)}\right)=\underline{\varepsilon}^{(2)}\left(b_s^{2}\right).$

Ушбу

$$\eta(\varepsilon_n)=\begin{cases}k_{n+1}-\varepsilon_n,\ агар\ \ \varepsilon_n\in\{0,1,2,...,k_{n+1}\}\ ;\\ 0,\ \ агар\ \ \varepsilon_n=a\end{cases}$$

функцияни аниқлаймиз. 2.1-параграфнинг иккинчи асосий натижасини келтирамиз.

4-теорема. *Айтайлик $f\in C^1\left(S^1\setminus\{b_1,b_2\}\right)$ бурииш сони $\rho:=\rho(f)$ иррационал бўлган бўлак-силлиқ айлана гомеоморфизми бўлиб, b_1 ва b_2 унинг синиш нуқталари бўлсин. Фараз қилайлик $\varepsilon(b_2)=(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,...)$ иккинчи синиш нуқтаси b_2 ни символик ифодаси бўлсин. У ҳолда ушбу*

$$\mu_f([b_1,b_2]):=\sum_{n=1}^{\infty}\ (-1)^n\,\eta(\varepsilon_n)\Delta_n\,,$$

тенглик уринли бўлади, бу ерда $\Delta_n=\mu_f([b_1,f^{q_n}(b_1)])$.

2.2 парагрфда биз иккита синишга эга бўлган бўлак-силлиқ гомеоморфизм ва айлананинг бўлак-чизиқли, иккита синишга эга Эрман акслантириши ўртасидаги боғликликни урганамиз.

М. Эрман ўзининг фундаментал ишида иккита синишли бўлакли-чизиқли айлана гомеоморфизмлари оиласини инвариант ўлчовларини ўрганган. М. Эрман бундай гомеоморфизмлар учун уларнинг инвариант ўлчовлари ва қўшмаларини ўрганган. $\lambda>1$ ва $\beta>0$ бўлсин. Ушбу

$$H_{\beta,\lambda}(x)=\begin{cases}\lambda x, & агар\ \ 0\le x\le c_0\ ,\\ \lambda^{-\beta}(x-1)+1, & агар\ \ c_0\le x\le 1\end{cases}$$

функцияни киритамиз.

Энди $H_{\beta,\lambda}(x)$ функция ёрдамида айлана гомеоморфизмларининг бир параметрли $h_{\beta,\lambda,\theta}(x)=H_{\beta,\lambda}(x)+\theta \mod 1,\ x\in S^1$ оиласини аниқлаймиз, бу ерда $\theta\in[0,1)$ параметр.

Ушбу $\{h_{\beta,\lambda,\theta},\ \lambda>1,\ \beta>0,\ 0<\theta<1\}$ акслантиришлар оиласи *Эрман оиласи* деб аталади. $h_{\beta,\lambda,\theta}$ гомеоморфизмнинг буриш сонини $\rho_\theta:=\rho_{\beta,\lambda,\delta}$ орқали белгилаймиз. Ҳар бир $\alpha\in[0,1)$ сон учун ягона $\theta:=\theta(\alpha)\in[0,1)$ мавжуд ва бунда $\rho_\theta=\alpha$ бўлади.

Энди 2.2 параграфдаги асосий натижани келтирамиз.

5-теорема. *f айлана гомеоморфизми $P-$ синфга тегишли, буриш сони $\rho=\rho_f$ иррационал ва $b_1,\ b_2$ синиш нуқталари бўлсин, $\sigma:=\sigma_f(b_1),\ \sigma_f(b_2)=\sigma^{-1}$ синиш катталиклари ва μ_f унинг инвариант ўлчови бўлсин. У ҳолда $a_0=0,\ c_0\in(0,1)$ синиш нуқтали, бўлакли-чизиқли $h:=h_{\beta,\lambda,\bar\theta}$ Эрман акслантириши мавжуд, бунда*

(1) $\beta:=\dfrac{\mu_f([b_1,b_2])}{1-\mu_f([b_1,b_2])},$ *ва* $\lambda:=\sigma^{-\frac{1}{1+\beta}}$

(2) $\rho_h=\rho_f;$

(3) $\sigma_h(a_0)=\sigma$ *ва* $\mu_h([a_0,c_0])=\mu_f([b_1,b_2]);$

(4) f ва h ўртасида ϕ қўшма гомеоморфизм мавжуд ва $\phi(b_1)=a_0,\ \ \phi(b_2)=c_0.$

2.3 параграфда иккита синиш нуқтали акслантиришлашлар учун синиш нуқталари орбиталарининг ҳолати ўрганилади. Турли орбиталарда ётган b_1 ва b_2 синиш нуқталарига эга бўлган ва буриш сони ρ иррационал бўлган f акслантиришни қараймиз. У ҳолда f^{q_n} акслантириш $2q_n$ та синиш нуқталарига эга:

$$a_0,\ f^{-1}(a_0),...,\ f^{-q_n+1}(a_0),\ c_0,\ f^{-1}(c_0),...,\ f^{-q_n+1}(c_0).$$

f^{q_n} акслантиришнинг юкоридаги синиш нуқталарини мос равишда А- ва С- типидаги синиш нуқталари деб аталади.

Қуйидаги $J_i^{(n)}=[a_{q_n},a_{q_{n-1}}]=\Delta_i^{(n)}\cup\Delta_i^{(n-1)},\ \ 0\le i\le q_n-1$ кесмаларни киритамиз. Равшанки, ушбу $\left\{J_0^{(n)}\cup J_1^{(n)}...\cup J_{q_{n-1}-1}^{(n)}\right\}\bigcup\left\{\Delta_0^{(n-1)}\cup\Delta_1^{(n-1)}...\cup\Delta_{q_n-1}^{(n-1)}\right\}$ кесмалар системаси айлана бўлинишларини ҳосил қилади. Юқоридаги тасдиқлардан фойдаланиб, биз охирги бўлинишнинг ҳар бир кесмаси битта А- типидаги синиш нуқтасини ва битта С- типидаги синиш нуқтасини сақлайди. $J_i^{(n)}$ кесмадаги синиш нуқталарини бирлаштирувчи кесмани $A_i^{(n)}$, $0 \le i \le q_{n-1} - 1$ орқали, $\Delta_i^{(n)}$ даги синиш нуқталарини бирлаштирувчи кесмани $B_j^{(n)}$, $0 \le j \le q_n - 1$ орқали белгилаймиз. Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$A_n := \bigcup_{s=0}^{q_{n-1}-1} J_s^{(n)}, \qquad B_n := \bigcup_{t=q_{n-1}}^{q_n-1} B_s^{(n)}.$$

Берилишидан кўриниб турибдики, A_n ва B_n тўпламлар кесишмайди. Агар $\{n_m, m \ge 1\}$, $\omega \in (0,1)$ лар мавжуд ва $\lim\limits_{m\to\infty} \mu_f(A_{n_m} \cup B_{n_m}) = \omega$ бўлса,

$\mathbf{O}_-(a_0) = \{ f^{(-s)}(a_0),\ s = 0,1,...,n,...\}$ ва $\mathbf{O}_-(c_0) = \{ f^{(-s)}(c_0),\ s = 0,1,...,n,...\}$ орбиталар узоқлашувчи дейилади.

Айлана акслантиришлари учун синиш нуқтаси орбиталарининг узоқлашувчилиги ҳақидаги асосий натижасини келтирамиз.

6-теорема. *Айтайлик f $P-$ гомеоморфизм бўлиб, турли орбиталарда ётувчи иккита b_1 ва b_2 синиш нуқталарига эга булсин ва* буриш сони $\rho = \rho_f$ *"чекланган типдаги"* иррационал сон *бўлсин. Фараз қилайлик, синиш катталикларининг купайтмаси 1 га тенг бўлсин. У ҳолда $f-$синиш нуқталари орбиталари $\mathbf{O}_-(b_1) := \left\{ f^{-s}(b_1),\ s \ge 0 \right\}$ ва $\mathbf{O}_-(b_2) := \left\{ f^{-s}(b_2),\ s \ge 0 \right\}$ ўзоқлашади.*

2.4-параграфда чекли сондаги синиш нуқталарига эга бўлган бўлак-силлиқ ва нодаврий гомеоморфизмлар учун $\left(f^{q_n}(x) \right)'$ ҳосиланинг ҳолати ўрганилади. 2.4.1-теоремада ажратилган синиш нуқтаси атрофида $\left(f^{q_n}(x) \right)'$ ҳосила 1 дан катта фарқ қилиши, аниқроғи

$$|\left(f^{q_n}(x) \right)' - 1| \ge Const > 0, \quad \forall x \in S^1 \setminus BP(f^{q_n})$$

эканлиги исботланган.

2.5 параграфда иккита синишга эга бўлган, бўлак-силлиқ айлана акслантирининг инвариант ўлчовлари ҳарактери ўрганилган. Ушбу иррационал сонлар тўпламини қараймиз:

$$\Gamma := \{\rho \in [0,1] : \rho = [k_1, k_2, ..., k_n, ...] \in R \setminus Q,\ \exists N = N(\rho),\ \forall n > N\ \ k_n \ge 3\}.$$

Бўлакли-силлиқ айлана акслантиришлари учун инвариант ўлчовлар ҳақида асосий натижамизни келтирамиз.

7-теорема. *Майли $f \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{b_1, b_2\})$ $P-$ гомеоморфизм ва μ_f унинг инвариант ўлчов булсин. Фараз килайлик*

1) унинг буриш сони $\rho \in \Gamma$ бўлсин;

2) f иккита турли орбиталарда ётган b_1, $b_2 \in S^1$ синиш нуқталарига эга ва $\sigma_f = \sigma_f(b_1) \cdot \sigma_f(b_2) = 1$ бўлсин.

У ҳолда, факат ρ га боглик булган шундай қисм тўплам $M_\rho \subset [0,1]$, $l(M_\rho) = 1$ мавжудки, бунда, агар $\mu_f\left([b_1, b_2]\right) \in M_\rho$ бўлса, инвариант ўлчов μ_f Лебег *ўлчовига нисбатан сингуляр булади.*

Диссертациянинг учинчи боби "Махсусликка эга бўлган, нодаврий айлана акслантиришларининг қўшмалари ” деб номланган ва иккиланганлик муносабатларнинг силжиши, критик акслантириш ва синишга эга бўлган айлана акслантиришларининг қўшмасини ўрганишга бағишланган.

3.1 параграфда иккиланганлик муносабатлари (cross-ratio) ва уларнинг критик акслантиришлар учун силжиши ўрганилган.

6-таъриф. (z_1, z_2, z_3, z_4), $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$ *тўртта қатъий ўсувчи сонларни қараймиз. Бу тўртликнинг иккиланганлик муносабати ушбу формула билан аниқланади*

$$Cr(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_2 - z_1)(z_4 - z_3)}{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}.$$

$[z_1, z_2]$ *кесмада қатъий ўсувчи* f *функция учун иккиланганлик муносабати* $(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4))$ *тўртта сон учун ҳам аниқлаш мумкин:*

$$Cr(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) = \frac{f(z_2) - f(z_1)}{f(z_3) - f(z_1)} \cdot \frac{f(z_4) - f(z_3)}{f(z_4) - f(z_2)}.$$

Мухим савол - f функцияни (z_1, z_2, z_3, z_4) нуқталарга таьсиридан кейин иккиланганлик муносабати қандай ўзгаради.

7-таъриф. $f:\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ *қатъий ўсувчи функция бўлсин. Тўртта қатъий ўсиб борувчи* (z_1, z_2, z_3, z_4), $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$ *сонларни қараймиз.* f *функция таьсирида иккиланганлик муносабатининг силжиши деб, қуйидаги*

$$Dist(z_1, z_2, z_3, z_4; f) = \frac{Cr(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4))}{Cr(z_1, z_2, z_3, z_4)}.$$

сонга айтилади.

Айлананинг критик акслантиришлари учун иккиланганлик муносабатининг силжишини баҳолаш ҳақидаги асосий натижани келтирамиз.

8-теорема. *Нодаврий, ягона кубик критик нуқта* x_c *эга бўлган* $f_{cr} \in C^3(S^1)$ *айлана критик акслантиришини, яъни* $f'(x_c) = f''(x_c) = 0$, $f'''(x_c) \neq 0$ *ва* $R_1 > 0$ *ни қараймиз. Фараз қилайлик, учта* $[z_s, z_{s+1}]$ $s = 1,2,3$ *кесмалар мавжуд бўлиб, қуйидаги шартларни қоноатлантирсин:*

(1) $\left\{\left(f_c^i([z_1, z_2]), f_c^i([z_2, z_3]), f_c^i([z_3, z_4])\right), \quad 0 \le i \le q_n - 1\right\}$ *кесмалар системаси қандайдир* $R_1 > 1$ *ўзгармас билан* x_{cr} *критик нуқтани тўғри коплайди.*

(2) $x_c = f_c^{i_0}(z_2)$ *кандайдир* $1 \le i_0 < q_n$ *учун;*

У ҳолда қуйидаги баҳо ўринли

$$Dist(z_1, z_2, z_3, z_4; f_c^{q_n}) < K_4 \cdot \left(Cr\left(f_c^{i_0}(z_1), f_c^{i_0}(z_2), f_c^{i_0}(z_3), f_c^{i_0}(z_4)\right)\right)^2,$$

бу ерда $K_4 > 0$ *ўзгармас сон фақат* f_c *акслантиришга ва* R_1 *сонга боғлиқ бўлади.*

3.2 параграфда синишга эга бўлган айлана акслантириши ва критик акслантириши орасидаги қўшма ўрганилади. Энди 3.2-параграфдаги асосий натижани келтирамиз.

9-теорема. *Айлана критик акслантириши* $f_c \in C^3(S^1)$ *битта* x_c *кубик критик нуқтага эга ва битта* x_b *синиш нуқтасига эга бўлган* $f_b \in C^{2+\varepsilon}\left(S^1 \setminus \{x_b\}\right),\ \varepsilon > 0$, гомеоморфизмни *қараймиз. Фараз қилайлик, иккала* f_c *ва* f_b *акслантиришлар бир хил иррационал буриш сонига, яъни* $\rho(f_c) = \rho(f_b) = \rho$ эга бўлсин. У ҳолда f_c *ва* f_b *орасида* ψ *қўшма акслантириш* S^1 *да сингуляр функциядир, яъни айланани деярли (Лебег ўлчовига нисбатан) барча нуқталарида* ψ *узлуксиз ва* $\psi'(x) = 0$ *бўлади.*

ХУЛОСА

Умуман олганда, эришилган натижалар диссертация ишининг мақсади ҳақида гапириш имконини беради. Барча асосий натижалар янги ва биргаликда бир ўлчовли динамик системалар назариясига маълум ҳисса қўшади. Иш айлананинг нодаврий синишга эга акслантиришларини ва айлананинг критик акслантиришларини ўрганишга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

иккита бўлак-силлиқ айлана гомеоморфизмлари бир хил сондаги синишларга, бир хил орбитал тузилишига ва бир хил иррационал буриш сонига эга бўлса уларнинг мос синиш нуқталари бир хил символик кўринишга эга булиши тўғрисида теорема исботланган.

f акслантириш синиш нуқталари b_1 ва b_2 ларини бирлаштирувчи $[b_1, b_2]$ кесманинг инвариант ўлчови учун, b_2 нуқтанинг символик динамикаси ёрдамида ошкор ифода топилган;

нодаврий, бўлак-силлиқ , иккита синишга эга f айлана гомеоморфизми учун топологик эквивалент бўлган, бўлак-чизиқли иккита синишга эга Эрман акслантириши h қурилган. Бунда, f ни синиш нуқталари h ни синиш нуқталарига ўтказилади;

чекли сондаги синишга эга бўлган нодаврий, бўлак-силлиқ айлана гомеоморфизмларини ҳар бир синиш нуқтасининг атрофида биринчи қайтиш акслантиришларининг ҳосилалари бирдан қатъий равишда ажралиши кўрсатилган;

бўлак-силлиқ, икиита ҳар хил орбитада ётган синиш нуқталарига эга ва синиш катталиклари кўпайтмаси 1 бўлган, нодаврий айлана гомеоморфизмининг

инвариант ўлчови Лебег ўлчовига нисбатан сингуляр эканлиги исботланган;

айлананинг критик акслантиришлари иккиланганлик муносабатининг силжишини учун баҳо олинган;

бир хил иррационал буриш сонига эга бўлган критик акслантириш ва битта синишга эга бўлган акслантириш ўртасидаги қўшма акслантириш сингуляр функция эканлиги исботланган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

КАРШИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ДЖАЛИЛОВ ШУХРАТ АХТАМОВИЧ

СОПРЯГАЮЩИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ИНВАРИАНТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГОМЕОМОРФИЗМОВ ОКРУЖНОСТИ С ОСОБЕННОСТЯМИ

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Карши – 2022 год

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2018.2.PhD/FM208 .

Диссертация выполнена в Каршинском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz/) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (http://www.ziyonet.uz/).

Научный руководитель:	**Жабборов Насриддин Мирзоодилович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Ганиходжаем Расул Набиевич** доктор физико-математических наук, профессор
	Яхшибоев Махмадиёр Умирович доктор физико-математических наук
Ведущая организация:	Каракалпакский государственный университет им.Бердаха

Защита диссертации состоится «____» ____________ 2022 года в ____ на заседании Научного совета PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 при Каршинском государственном университете. (Адрес: 180103, г. Карши, ул. Кучабаг, 17. Тел.: (+998 75) 225 34 13, факс: (+998 75) 221 00 56, e-mail: qarshidu@umail.uz). Каршинский государственный университет, физико-математический факультет, аудитория 102.

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Каршинского государственного университета (зарегистрирована за №____). (Адрес: 180103, г. Карши, ул. Кучабаг, 17. Тел.: (+998 75) 225 34 13).

Автореферат диссертации разослан «____» ____________ 2022 года.
(протокол рассылки №____ от «____» ____________ 2022 года).

Б.А. Шоимкулов
Председатель научного совета по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н., профессор

М.С. Рустамова
Ученый секретарь научного совета по присуждению научных степеней, д.ф.ф.-м.н. (PhD), доцент

А.А. Имомов
Председатель научного семинара при научном совете по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н., (DSc)

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научно-прикладные исследования по фундаментальным наукам, проводимые на мировом уровне, приводится к проблемам современной динамических систем, в частности, к проблемам теории отображений окружности. В современной теории отображений окружности исследование отображений с особенностями, их высших степеней и асимптотического поведения орбит считается актуальной задачей.

Сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы окружности впервые изучались в конце 19-го века при исследованиях задач небесной механики. Многие исследования нелинейных явлений, случайные шумы в теории информации и задачи естественных наук тесно связаны с гомеоморфизмами окружности.

В мире ведутся научные исследования по изучению диффеоморфизмов окружности, критических отображений окружности, кусочно-гладких отображений окружности и моделированию нелинейных процессов, что является одним из актуальных вопросов теории динамических систем. В теории динамических систем особое внимание уделяется изучению вероятностно инвариантных мер отражений окружности, нахождению сопрягающих отображений и определению асимптотики кусочно-гладких отражений с особенностями.

В нашей стране большое внимание уделяется теории динамических систем с фундаментальным и практическим применением математики. В частности, в последние годы динамические системы как важное направление современной математики достигли значительных результатов в решении современных математических задач. Также в качестве основных задач и направлений деятельности определено проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям «алгебра, теория динамических систем, геометрия и топология». В связи с этим изучение отображений окружности является важным с теоретической и практической точки зрения[2].

Данное диссертационное исследование в определенной степени служит решению задач, указанных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», № ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В.И. Романовского академии Наук Республики Узбекистан» и ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах образования и развитию нучных исследований в области математики», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

---

[2]Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно исследовательских учреждений академии наук Республики Узбекистан»

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствие с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Проблема абсолютной непрерывности вероятностной инвариантной меры для сохраняющей ориентацию, апериодических гомеоморфизмах окружности является важным в теории динамических систем. С этой проблемой тесно связан вопрос о гладкости сопрягающих отображений. Первые результаты для аналитических диффеоморфизмов окружности получены в фундаментальных работах В.И. Арнольда. В дальнейшем фундаментальные результаты о гладкости диффеоморфизмов были получены в работах М. Эрмана, Ю. Мозера, Ж. Йоккоза, Х. Катцнельсона и Д. Орнстейна, Я. Г. Синая, К.М. Ханина и др. К настоящему времени проблема абсолютной непрерывности инвариантной меры для диффеоморфизмов хорошо изучена. Последние наиболее сильные результаты доказаны в работах Х. Катцнельсона и Д. Орнстейна, Я. Г. Синая, К.М. Ханина. Доказано, что для $C^{2+\tau}$ – диффеоморфизмов окружности с типичным иррациональным числом вращения, инвариантная мера является абсолютно непрерывной относительно меры Лебега на окружности.

Кусочно-гладкие гомеоморфизмы окружности с изломами являются естественным обобщением диффеоморфизмов. Кусочно-линейные гомеоморфизмы окружности изучены в работах М. Эрмана, И. Лиоусс, Коэло и А. Лопес. Инвариантные меры кусочно-гладких гомеоморфизмов окружности с конечным числом изломов изучены в работах А. Джалилова, К. Ханина, Д. Майера, И. Лиоусс, Д. Майера, У Сафарова, А. Теплинского и др. В работе А. Джалилова, Д. Майера и У. Сафарова доказано, что для апериодических, кусочно-гладких гомеоморфизмов окружности, в случае если произведение величин изломов не равно 1, инвариантная мера является сингулярной.

Другим важным классом отображений окружности является апериодические, критические отображения с одной критической точкой. Впервые Ж. Йоккоз для гладких критических отображений окружности доказал их топологическую эквивалентность линейному повороту. Грачек и Г. Святек доказали, что инвариантная мера критических отображений окружности является сингулярной. Вопрос о гладкости сопряжений между гомеоморфизмами окружности с одной критической точкой или точкой излома называется *проблемой жесткости*. Отметим, что проблема жесткости интенсивно изучалась в течении последних 20 лет в работах К.Ханина и Д. Хмелева, К. Ханина и А. Теплинского, С. Кошича, А. Джалилова, Д. Смания и К.Куня и др.

Следует отметить, что, несмотря на многие важные результаты, упомянутые выше, вопросы абсолютной непрерывности инвариантных мер и асимптотического поведения ренормализаций для кусочно-гладких и критических гомеоморфизмов окружности до сих пор остаются открытыми.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждения высшего образования, где выполнялась диссертация. Тема диссертационной работы утверждена на Ученом Совете Каршинского Государственного университета (протокол №4 от 25 ноября 2020 года) и выполнена в соответствии с плановой темой кафедры "Математический анализ и дифференциальные уравнения" Каршинского Государственного университета.

Целью исследования является изучение вероятностных инвариантных мер кусочно-гладких гомеоморфизмов окружности с изломами и сопрягающих гомеоморфизмов между отображениями окружности с особенностями различных типов.

Задачи исследования:

исследовать поведение орбит точек изломов для апериодических, кусочно-гладких гомеоморфизмов окружности с двумя изломами;

найти связь между символическим представлением точки окружности и вероятностной инвариантной мерой, а также между нелинейными, кусочно-гладкими гомеоморфизмами окружности с двумя изломами и кусочно-линейными отображениями Эрмана;

изучить вероятностную инвариантную меру для нелинейных, кусочно-гладких гомеоморфизмов окружности с двумя изломами и иррациональным числом вращения "неограниченного типа";

изучить асимптотическое поведение для искажения двойных отношений апериодических, критических отображений окружности;

исследовать сопрягающие гомеоморфизмы между критическими, отображениями окружности и отображениями окружности с изломами.

Объект исследования — кусочно-гладкие гомеоморфизмы с изломами, инвариантные меры, сопрягающие гомеоморфизмы.

Предмет исследования. Динамические системы, теория гомеоморфизмов окружности, инвариантные меры.

Методы исследования. В работе используются методы математического анализа, функционального анализа, эргодической теории, одномерной динамики, теории вероятностей.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

для двух кусочно-гладких гомеоморфизмов окружности с одинаковым числом изломов, с той же орбитной структурой и иррациональным числом вращения, используя расположения орбит точек на окружности и структура динамических разбиений доказано, что точки излома обеих отображений имеют одинаковое символическое представление.

найдено явное выражение для инвариантной меры отрезка соединяющего точки изломов b_1 и b_2 отображения окружности f, при помощи символической динамики точки b_2.

для кусочно-гладкого гомеоморфизма окружности f с двумя изломами и тривиальной величиной излома, построено топологически эквивалентное кусочно-линейное отображение Эрмана h с двумя изломами. Кроме того, точки излома f переходят в точки излома h, а величины изломов сохраняются.

для апериодических, кусочно-гладких гомеоморфизмов окружности с конечным числом изломов используя тот факт, что в окрестности точки излома величина излома отличается от единицы, а также разложение Тейлора показано, что производные отображения первого возвращения в окрестности каждой точки излома строго отделены от единицы.

для апериодических, кусочно-гладких гомеоморфизмом окружности с двумя точками излома лежащими на разных орбитах и с величиной излома ровной 1, используя расходимость орбит точек изломов и отличие от 1 производных отображений первого возвращения доказано, что вероятностная нвариантная мера является сингулярной относительно меры Лебега.

для апериодических критических отображений окружности, учитывая уменьшение длин трех соседних отрезков в окрестности критической точки и метрические свойства отрезков получена оценка для искажения двойных отношений;

для критического отображения и отображения окружности с изломом имеющие одинаковое иррациональное число вращения учитывая, что их точки излома разного типа доказано, что сопряжение является сингулярной функцией

Практические результаты исследования – найденную связь между нелинейными апериодическими кусочно-гладкими отображениями окружности и кусочно-линейными отображениями Эрмана, поведение орбит двух точек изломов, лежащих на разных орбитах, а также, сопряжения между отображениями с одинаковыми параметрами используется при решении задач динамических систем, математического анализа и в их применениях.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений и доказательств, использованием известных методов динамических систем, эргодической теории и математического анализа.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость результатов исследования состоит в том, что полученные результаты используются при изучении числовых показателей инвариантной меры одномерных отображений и сопряжений для апериодических гомеоморфизмов окружности с особенностями.

Практическая значимость состоит в том, что результаты диссертации используются при нахождении асимптотического поведения орбит, вычислении числовых показателей инвариантной меры при помощи компьютера.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты о сопрягающих отображениях и вероятностных инвариантных распределениях гомеоморфизмов окружности с особенностями были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

Результаты о поведении орбит и вероятностных инвариантных мерах кусочно-гладких гомеоморфизмов окружности с особенностями использованы в гранте под номером МРУ-ОТ-9/2017 «Многомерный комплексный анализ». В практическом проекте Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (2018-2019 гг.) полученные результаты играет важную роль при изучении динамики многочленов и других отображений на замкнутой кривой в комплексной плоскости, и этот вопрос связан с изучением отображений окружности. Поэтому полученные в диссертации результаты и методы доказательств использованы в вышеупомянутом фундаментальном проекте (справка Национального университета Узбекистана от 19 мая 2022 года, № 04/11-2863). Применяя полученные результаты, доказана теорема о поведении орбит точек изломов для кусочно-гладких отображений и сингулярность вероятностной инвариантной меры.

Результаты о сопрягающих отображениях и вероятностных инвариантных распределениях гомеоморфизмов окружности с особенностями использованы в гранте под номером OT-F-4-42 «Полуаддитивные τ-гладкие и радоновские кардинальные и топологические свойства функциональных пространств» в практическом проекте Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (2017-2020 гг.) при изучении топологической эквивалентности отображений окружности с особенностями и инвариантных мер в топологических пространствах (справка Национального университета Узбекистана от 19 мая 2022 года, № 04/11-2864). Применение научных результатов позволило исследовать динамику двойных отношений под действием кусочно-гладких нелинейных гомоморфизмов окружности и сопряжения между отображениями с особенностями различного типа.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на 3 международных и 4 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 13 научных работ, из них 6 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора философии, в том числе, из них 1 опубликована в зарубежном журнале и 5 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на 11 параграфов, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 100 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлен объект и предмет исследования, изложена научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации, названная **“Необходимые факты из эргодической теории и отображений окружности”** содержит необходимые сведения из эргодической теории, кусочно-гладких гомеоморфизмов окружности с изломами и критических отображений окружности.

Параграф 1.1 содержит некоторые определения и факты из эргодической теории: понятие инвариантной меры, эргодичности и теорема Боголюбова-Крылова о существовании вероятностной инвариантной меры. Все эти сведения использованы при изложении результатов диссертации.

В параграфе 1.2 даны предварительные сведения из теории гомеоморфизмов окружности, динамических разбиений и символической динамики.

Пусть $S^1 = R/Z \cong [0,1)$ единичная окружность. Направление от 0 в сторону 1 называется положительным направлением на окружности.

Определение 1. *Отображение* $f : S^1 \to S^1$ *называется гомеоморфизмом окружности, если выполнены следующие условия:*

1) f *- взаимно-однозначное отображение* S^1 *;*

2) *Отображения* f *и* f^{-1} *непрерывны на окружности* S^1.

Сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности f можно определить по формуле:

$$f(x) = \{F(x)\} \text{ для всех } x \in S^1 \quad ,$$

где скобка $\{\cdot\}$ обозначает дробную часть числа, где функция $F : R^1 \to R^1$ обладает следующими свойствами:

b_1) F - строго возрастающая и непрерывная функция на R^1;

b_2) $F(x+1) = F(x) + 1$ для любого $x \in R^1$.

Функция F называется определяющей функцией или поднятием гомеоморфизма f.

Отметим, что если F_1 и F_2 представляют один и тот же гомеоморфизм, то $F_1(x) = F_2(x) + k$ при всех $x \in R^1$, k - целое число .

Пусть F определяющая функция гомеоморфизма f, тогда $F^n, n \in Z$ является определяющей функцией f^n, где f^n определяется рекуррентным соотношением:

$$f^1(x) = f(x), \qquad f^n(x) = f\left(f^{n-1}(x)\right).$$

Определение 2. *Гомеоморфизм* $f : S^1 \to S^1$ *называется диффеоморфизмом, если* f *и* f^{-1} *имеют конечные производные на* S^1.

Если $F \in C^r(R^1)$, $r \geq 1$, то f называется диффеоморфизмом класса C^r.

Определение 3. *Рассмотрим гомеоморфизм окружности* $f : S^1 \to S^1$. *Точка* $x_0 \in S^1$ *называется периодической точкой периода* k, $k > 1$, *если* $f^{(i)}(x_0) \neq f^{(j)}(x_0)$, $0 \leq i < j \leq k-1$ *и* $f^{(k)}(x_0) = x_0$.

В случае $f(x_0) = x_0$ точка x_0 называется неподвижной точкой отображения f.

Теорема 1 (Пуанкаре). *Пусть $f: S^1 \to S^1$ - сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности и F - любая определяющая функция этого гомеоморфизма.*

1) Тогда для любой точки $x \in R^1$ существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x)}{n} = \rho(f, F),$$

более того, значение предела не зависит от выбора точки $x \in R^1$.

2) Число $\rho(f, F)$ рационально тогда и только тогда, когда f имеет периодическую точку.

Если $F_1(x) = F_2(x) + k,\ k \in Z$, то, очевидно, что $\rho(f, F_1) = \rho(f, F_2) + k$.

Определение 4. *Пусть f - сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности S^1, а $F(x)$ - определяющая его функция. Число*

$$\rho(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x)}{n} \ (\mathrm{mod} 1)$$

называется числом вращения гомеоморфизма f.

Среди функций $F(x)$, определяющих гомеоморфизм f, имеется ровна одна такая, что $0 \le F(0) < 1$. В дальнейшем, говоря о функции, определяющей гомеоморфизм, мы будем иметь ввиду именно ее.

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что число вращений ρ является иррациональным. Гомеоморфизм $f_\rho(x) = \{x + \rho\},\ x \in S^1$ называется линейным поворотом на угол ρ.

Определение 5. *Два гомеоморфизма окружности T_1 и T_2 называются топологически эквивалентными, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $\varphi: S^1 \to S^1$ такой, что $\varphi(T_f x) = T_\rho(\varphi(x))$ для любого $x \in S^1$. При этом отображение φ называется сопряжением.*

Отметим, что число вращения является инвариантом для топологически эквивалентных гомеоморфизмов окружности.

Теорема 2 (Данжуа). *Пусть f – диффеоморфизм окружности с иррациональным числом вращения ρ. Если функция $f \in C^1(S^1)$, $f' > Const > 0$ и $\operatorname{var}_{S^1} \ln f'(x) < \infty$, то f топологически эквивалентен линейному повороту f_ρ.*

Рассмотрим гомеоморфизм f окружности S^1 с иррациональным числом вращения ρ. Пусть разложение ρ на непрерывную дробь имеет вид $\rho = [k_1, k_2, ..., k_n, ...]$. Обозначим $\frac{p_n}{q_n} = [k_1, k_2, ..., k_n]$, $n \ge 1$. Для произвольной точки $x_0 \in S^1$ обозначим через $\Delta_0^{(n)}(x_0)$ замкнутый интервал с концевыми точками x_0 и $x_{q_n} = T_f^{(q_n)} x_0$. Заметим, что при нечетном n точка x_{q_n} лежит слева от

x_0, а при четном n- справа. Положим $\Delta_i^{(n)}(x_0) = T_f^{(i)}\Delta_0^{(n)}(x_0),\quad i \geq 1$. Часть орбиты $\{x_i = T_f^{(i)}x_0,\ 0 \leq i < q_n + q_{n+1}\}$ разбивает окружность на непересекающиеся (за исключением концевых точек) отрезки: $\Delta_i^{(n)}(x_0),\ 0 \leq i < q_{n+1}$, $\Delta_j^{(n+1)}(x_0),\quad 0 \leq j < q_n$. Возникающее разбиение обозначим через $P_n(x_0)$ и назовем n-ым динамическим разбиением. При помощи последовательности динамических разбиений можно построить символическую динамику.

В параграфе 1.3 даны необходимые определения и факты относящихся к классу кусочно-гладких гомеоморфизмов окружности с изломами. Такие отображения являются естественным обобщением диффеоморфизмов окружности. Отметим, что в течении последних 20 лет отображения окружности с изломами интенсивно изучались в работах К. Ханина, Д. Хмелева, А. Теплинского, Д. Смания, К. Куня, И. Лиоусс, С. Кошич, Д. Майера, А. Джалилова и др.

Точка $b \in [0,1)$ называется точкой излома отображения f если в ней имеется скачок первой производной. Простейшими гомеоморфизмами с изломами являются кусочно-линейные гомеоморфизмы окружности. М. Эрман показал, что инвариантная мера кусочно-линейного гомеоморфизма с двумя изломами и с иррациональным числом вращения является абсолютно непрерывной тогда и только тогда, когда обе точки излома лежат на одной орбите.

Инвариантные меры нелинейных кусочно-гладких гомеоморфизмов окружности с изломами изучены в работах К. Ханина, А. Джалилова, Д. Майера, И. Лиусс, Х.Марзагуй, Д. Смания и др. В отличие от диффеоморфизмов инвариантные меры таких гомеоморфизмов являются сингулярными относительно меры Лебега (К. Ханин, А. Джалилов, Д. Майер, И. Лиусс). Для кусочно-гладких гомеоморфизмов с изломом, их ренормализации аппроксимируются дробно-линейными отображениями (К. Ханин, Д. Хмелев, А. Теплинский, Д. Смания, К. Куня, С. Косич и др.).

В параграфе 1.4 приведены необходимые определения и факты относящихся к классу критических отображений окружности.

Вторая глава диссертации, названная “**Поведение орбит точек изломов и инвариантные меры кусочно-гладких отображений окружности**” посвящена изучению кусочно-гладких гомеоморфизмов окружности с двумя изломами и иррациональным числом вращения. Поскольку гомеоморфизмы окружности с иррациональным числом вращения не имеет периодических орбит, такие гомеоморфизмы называются апериодическими.

В параграфе 2.1 изучается связь между структурой орбит точек изломов, с инвариантной мерой и символической динамикой.

Класс $P-$гомеоморфизмов окружности состоит из сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов окружности f дифференцируемых за исключением конечного числа точек, обозначаемое $BP(f) = \{x_b \in S^1\}$, в которых существуют односторонние производные $f_-'(x_b)$ и $f_+'(x_b)$ и существуют константы $0 < c_1 < c_1 < \infty$, такие, что

- $c_1 < f'_{-}(x_b) < c_2, \qquad c_1 < f'_{+}(x_b) < c_2,$ для $\forall x_b \in BP(f)$;
- $c_1 < f'(x) < c_2,$ для $\forall x \in BP(f)$;
- $V = \operatorname*{var}_{S^1} f' < \infty.$

Пусть f гомеоморфизм окружности с иррациональным числом вращения $\rho := \rho_f$. Возьмём $\forall x_0 \in S^1$. Рассмотрим $n-$ое динамических разбиение $P_n(x_0) := P^f{}_n(x_0) = \{ \ \Delta_0^{(n-1)}, \Delta_1^{(n-1)}, ..., \Delta_{q_n-1}^{(n-1)} \ \} \bigcup \{ \ \Delta_0^{(n)}, \Delta_1^{(n)}, ..., \Delta_{q_{n-1}-1}^{(n)} \ \}$, и при переходе от разбиения $P_n(x_0)$ к $P_{n+1}(x_0)$ все отрезки $\Delta_i^{(n)}(x_0), 0 \le i \le q_{n-1}-1$, сохраняются, а каждый из отрезков $\Delta_j^{(n-1)}(x_0)$, разбивается на $(k_{n+1}+1)$ отрезков. При помощи последовательности динамических разбиений $P_n(x_0)$ можно построить символическую динамику. Определим $\varepsilon_0 := \varepsilon_0(x) = 0,$ если $x \in \Delta_0^{(1)}(x_0)$, $\varepsilon_0 := \varepsilon_0(x) = a,$ если $x \in \Delta_0^{(0)}(x_0)$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x) = k_1 - s,$ *если*. $x \in \Delta_s^{(0)}(x_0)$, $1 \le s \le k_1 - 1$. Пусть $x \in S^1 \setminus O_f(x_0)$. Положим $\varepsilon_n = \varepsilon_n(x) = a,$ если $x \in \bigcup_{i=0}^{q_{n-1}-1} \Delta_i^{(n)}(x_0)$. Пусть $x \in \Delta_j^{(n-1)}(x_0)$ при некотором $j, 0 \le j < q_n$. Положим $\varepsilon_n := \varepsilon_n(x) = 0,$ *если* $x \in \Delta_j^{(n+1)}(x_0)$, $\varepsilon_n := \varepsilon_n(x) = k_{n+1} - s,$ *если* $x \in \Delta_{i+q_{n-1}+sq_n}^{(n)}(x_0)$, $0 \le s \le k_{n+1} - 1$.

Таким образом, мы получим взаимно-однозначное соответствие $\psi : S^1 \setminus O_f(x_0) \leftrightarrow \{ \underline{\varepsilon} = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n, \ldots), \varepsilon_n \in \{a, 0, 1, ..., k_{n+1}\}$ при этом, $\varepsilon_{n+1} = a,$ тогда и только тогда, когда $\varepsilon_n = 0, n \ge 1\} =: \Theta(\rho)$.

В дальнейшем рассматривается только разбиения и символическое пространства точки излома b_1.

Рассмотрим на двух экземпляра окружности $P-$гомеоморфизмы окружности f_1 и f_2 с множествами изломов $BP(f_1)$ и $BP(f_2)$, соответственно. Пусть число точек изломов f_1 и f_2 совпадает, т.е. $|BP(f_1)| = |BP(f_2)| = m.$ Предположим, что их числа вращения иррациональные и совпадают т.е. $\rho(f_1) = \rho(f_2) = \rho \in [0,1] \setminus Q.$

Инвариантные меры гомеоморфизмов f_1 и f_2 обозначим через μ_1 и μ_2, соответственно. Мы скажем, что множества точек изломов $BP(f_1)$ и $BP(f_2)$ имеют одинаковую орбитную структуру, если существуют перестановки $\bar{b}^{(1)} = \left(b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, ..., b_m^{(1)}\right)$, $\bar{b}^{(2)} = \left(b_1^{(2)}, b_2^{(2)}, ..., b_m^{(2)}\right)$ точек изломов гомеоморфизмов f_1 и f_2, такие, что

1) $b_1^{(1)} \prec b_2^{(1)} \prec ... \prec b_m{}^{(1)} \prec b_1^{(1)}$ и $b_1^{(2)} \prec b_2^{(2)} \prec ... \prec b_m^{(2)} \prec b_1^{(2)}$;
2) $\mu_1\left(\left[b_s^{(1)}, b_{s+1}^{(1)}\right]\right) = \mu_2\left(\left[b_s^{(2)}, b_{s+1}^{(2)}\right]\right), \quad 1 \le s \le m-1.$

Сформулируем наш результат о связи между структурой орбит точек изломов и символической динамикой.

Теорема 3. *Рассмотрим* $P-$*гомеоморфизмы* f_1 *и* f_2 *с одинаковым иррациональным числом вращения* $\rho(f_1)=\rho(f_2)=\rho$ *и* $\Theta_+(\rho)$ *их символическое пространство. Тогда для каждого* $1\le s\le m$ *символические представления точек изломов* $b_s^{(1)}$ *и* $b_s^{(2)}$ *совпадают т.е.* $\underline{\varepsilon}^{(1)}\left(b_s^{(1)}\right)=\underline{\varepsilon}^{(2)}\left(b_s^{2}\right)$.

Определим функцию

$$\eta(\varepsilon_n)=\begin{cases}k_{n+1}-\varepsilon_n \text{ } при \text{ } \varepsilon_n\in\{0,1,2,...,k_{n+1}\};\\ 0 \text{ } при \text{ } \varepsilon_n=a.\end{cases}$$

Сформулируем второй основной результат параграфа 2.1.

Теорема 4. *Пусть* $f\in C^1\left(S^1\setminus\{b_1,b_2\}\right)$ *кусочно-гладкий гомеоморфизм окружности с иррациональным числом вращения* $\rho:=\rho(f)$ *и точками изломов* b_1 *и* b_2. *Предположим, что* $\varepsilon(b_2)=(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,...)$ *символическое представление* b_2. *Тогда*

$$\mu_f([b_1,b_2]):=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\eta(\varepsilon_n)\Delta_n,$$

где $\Delta_n=\mu_f([b_1,f^{q_n}(b_1)])$.

В параграфе 2.2 мы изучаем связь между кусочно-гладким гомеоморфизмом с двумя изломами и отображением кусочно-линейных гомеоморфизмов окружности Эрмана с двумя изломами.

М. Эрман в своей фундаментальной работе исследовал инвариантные меры семейства кусочно-линейных гомеоморфизмов окружности с двумя изломами. Пусть $\lambda>1$ и $\beta>0$. Определим

$$H_{\beta,\lambda}(x)=\begin{cases}\lambda x, & при \quad 0\le x\le c_0,\\ \lambda^{-\beta}(x-1)+1, & при \quad c_0\le x\le 1.\end{cases}$$

Теперь при помощи $H_{\beta,\lambda}(x)$ определим однопараметрическое семейство гомеоморфизмов окружности $h_{\beta,\lambda,\theta}(x)=H_{\beta,\lambda}(x)+\theta \mod 1$, $x\in S^1$, где параметр $\theta\in[0,1)$.

Семейство отображений $\{h_{\beta,\lambda,\theta},\ \lambda>1,\ \beta>0,\ 0<\theta<1\}$ называется семейством Эрмана. Обозначим через $\rho_\theta:=\rho_{\beta,\lambda,б}$ число вращения гомеоморфизма $h_{\beta,\lambda,\theta}$. Отметим, что для каждого числа $\alpha\in[0,1)$ существует единственное $\theta:=\theta(\alpha)\in[0,1)$, такое, что $\rho_\theta=\alpha$.

Теперь сформулируем основной результат параграфа 2.2.

Теорема 5. *Рассмотрим* $P-$*гомеоморфизм окружности* f *с иррациональным числом вращения* $\rho=\rho_f$, *точками изломов* b_1, b_2, *величинами изломов* $\sigma:=\sigma_f(b_1)$, $\sigma_f(b_2)=\sigma^{-1}$ *и инвариантной мерой* μ_f. *Тогда существует кусочно-линейное (КЛ) отображение Эрмана* $h:=h_{\beta,\lambda,\bar\theta}$ *с изломами в точках* $a_0=0$, $c_0\in(0,1)$, *такое, что*

(1) $\beta := \dfrac{\mu_f\left(\left[b_1,b_2\right]\right)}{1-\mu_f\left(\left[b_1,b_2\right]\right)},$ *и* $\lambda := \sigma^{-\frac{1}{1+\beta}}$

(2) $\rho_h = \rho_f;$

(3) $\sigma_h\left(a_0\right)=\sigma$ *и* $\mu_h\left(\left[a_0,c_0\right]\right)=\mu_f\left(\left[b_1,b_2\right]\right);$

(4) существует сопряжение ϕ между f и h, такое что $\phi\left(b_1\right)=a_0,\ \ \phi\left(b_2\right)=c_0$.

В параграфе 2.3. изучается поведение орбит точек изломов для отображений с двумя изломами. Рассмотрим отображение f с точками излома b_1 и b_2 лежащие на разных орбитах и с иррациональным числом вращения ρ. Тогда отображение f^{q_n} имеет $2q_n$ точек изломов:

$$a_0,\ f^{-1}(a_0),\dots,\ f^{-q_n+1}(a_0),\qquad c_0,\ f^{-1}(c_0),\dots,\ f^{-q_n+1}(c_0).$$

Последние точки излома отображения f^{q_n} называются точками излома типа-A и типа-C, соответственно.

Введем следющие отрезки $J_i^{(n)}=[a_{q_n},a_{q_{n-1}}]=\Delta_i^{(n)}\cup\Delta_i^{(n-1)},\quad 0\le i\le q_n-1$. Ясно, что ситема отрезков $\left\{J_0^{(n)}\cup J_1^{(n)}\dots\cup J^{(n)}_{q_{n-1}-1}\right\}\bigcup$ $\left\{\Delta_0^{(n-1)}\cup\Delta_1^{(n-1)}\dots\cup\Delta_{q_n-1}^{(n-1)}\right\}$ образует разбиение окружности. Используя вышеприведенные факты получим, что каждый отрезок последнего разбиения содержит одну точку излома типа-A и одну типа-C. Обозначим через $A_i^{(n)},\ \ 0\le i\le q_{n-1}-1$ отрезок соединяющий точки излома в $J_i^{(n)}$, а через $B_j^{(n)},\ \ 0\le j\le q_n-1$ отрезок соединяющий точки излома в $\Delta_i^{(n)}$. Определим

$$A_n := \bigcup_{s=0}^{q_{n-1}-1} J_s^{(n)},\qquad B_n := \bigcup_{t=q_{n-1}}^{q_n-1} B_s^{(n)}.$$

Из построения видно, что множества A_n и B_n не пересекаются. Орбиты $\mathbf{O}_-(a_0)=\{f^{(-s)}(a_0),\ s=0,1,\dots,n,\dots\}$ и $\mathbf{O}_-(c_0)=\{f^{(-s)}(c_0),\ s=0,1,\dots,n,\dots\}$ называются расходящимися, если существуют $\{n_m, m\ge 1\}$ и $\omega\in(0,1)$, такие, что $\lim\limits_{m\to\infty}\mu_f(A_{n_m}\cup B_{n_m})=\omega.$

Сформулируем основной результат нашей работы о расхождении орбит точек изломов для отображений окружности.

Теорема 6. Пусть f является $P-$гомеоморфизмом с двумя изломами b_1 и b_2 лежащие на разных орбитах и иррациональным числом вращения $\rho=\rho_f$ “ограниченного типа”. Продположим, что произведение величин изломов ровно 1. Тогда, f $-$орбиты точек изломов $\mathbf{O}_-(b_1):=\left\{f^{-s}(b_1),\ s\ge 0\right\}$ и $\mathbf{O}_-(b_2):=\left\{f^{-s}(b_2),\ s\ge 0\right\}$ расходятся.

В параграфе 2.4 изучается поведение производной $\left(f^{q_n}(x)\right)'$ для апериодических кусочно-гладких гомеоморфизмов окружности с конечным числом изломов. Доказана теорема 2.4.1 о том, что в окрестности изолированной точки излома $\left(f^{q_n}(x)\right)'$ сильно отличается от 1, более точно, $|\left(f^{q_n}(x)\right)'-1|\geq Const>0, \quad \forall x\in S^1\setminus BP(f^{q_n})$.

В параграфе 2.5 изучается характер инвариантных мер для кусочно-гладких отображений окружности с двумя изломами. Определим подмножество иррациональных сисел

$$\Gamma:=\{\rho\in[0,1]:\rho=[k_1,k_2,...,k_n,...]\in R\setminus Q,\ \exists N=N(\rho),\ \forall n>N,\ k_n\geq 3\}.$$

Сформулирум наш основной результат об инвариантных мерах для кусочно-гладких отображений окружности.

Теорема 7. *Пусть* $f\in C^{2+\varepsilon}(S^1\setminus\{b_1,b_2\})$ $P-$*гомеоморфизм окружности с инвариантной мерой* μ_f *удовлетворяет следующим условиям:*

1) *его число вращения* $\rho\in\Gamma$;
2) f *имеет две точки излома* b_1, $b_2\in S^1$ *лежащие на разных орбитах и* $\sigma_f=\sigma_f(b_1)\cdot\sigma_f(b_2)=1.$

Тогда существует подмножество $M_\rho\subset[0,1]$, $l(M_\rho)=1$, *зависящее только от числа* ρ, *такое, что инвариантная мера* μ_f *является сингулярной относительно меры Лебега, если* $\mu_f\left([b_1,b_2]\right)\in M_\rho$.

Третья глава диссертации названная “**Сопряжения между апериодическими отображениями окружности с особенностями**” посвящена изучению искажения двойных отношений и сопряжения между критическим отображением и отображением окружности с изломом.

В параграфе 3.1 изучается двойные отношения (cross-ratio) и их искажения для критических отображений.

Определение 6. *Рассмотрим четверку строго возрастающих чисел* (z_1,z_2,z_3,z_4), $z_1<z_2<z_3<z_4$. *Двойным отношением этой четверки называется следующее число определяемое по формуле*

$$Cr(z_1,z_2,z_3,z_4)=\frac{(z_2-z_1)(z_4-z_3)}{(z_3-z_1)(z_4-z_2)}.$$

Для строго возрастающей на отрезке $[z_1,z_2]$ функции f можно определить двойные отношения и для четверки чисел $(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4))$:

$$Cr(f(z_1),f(z_2),f(z_3),f(z_4))=\frac{f(z_2)-f(z_1)}{f(z_3)-f(z_1)}\cdot\frac{f(z_4)-f(z_3)}{f(z_4)-f(z_2)}.$$

Интересным является вопрос как меняется двойные отношения (z_1,z_2,z_3,z_4) после действия функции f.

Определение 7. *Пусть* $f:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$ *строго возрастающая функция. Рассмотрим четверку строго возрастающих чисел* (z_1,z_2,z_3,z_4), $z_1<z_2<z_3<z_4$.

Искажением двойного отношения при действии функции f называется следующее число

$$Dist(z_1,z_2,z_3,z_4;f)=\frac{Cr(f(z_1),f(z_2),f(z_3),f(z_4))}{Cr(z_1,z_2,z_3,z_4)}.$$

Сформулируем наш основной результат об оценке искажения двойных отношений для критических отображений окружности.

Теорема 8. *Рассмотрим апериодическое, критическое отображение окружности $f_c\in C^3(S^1)$ с единственной кубической критической точкой x_c т.е. $f^{'}(x_c)=f^{''}(x_c)=0,\ f^{'''}(x_c)\neq 0$ и $R_1>0$. Предположим, что существует тройка отрезков $[z_s,z_{s+1}]$ $s=1,2,3$ удовлетворяющих следующим условиям:*

(1) *система отрезков* $\left\{\left(f_c^i([z_1,z_2]),f_c^i([z_2,z_3]),f_c^i([z_3,z_4])\right),\quad 0\le i\le q_n-1\right\}$ *правильно покрывает критическую точку x_{cr} с некоторой постоянной $R_1>1$;*

(2) $x_c=f_c^{i_0}(z_2)$, *для некоторого $1\le i_0<q_n$;*

Тогда справедлива следующая оценка

$$Dist(z_1,z_2,z_3,z_4;f_c^{q_n})<K_4\cdot\left(Cr\left(f_c^{i_0}(z_1),f_c^{i_0}(z_2),f_c^{i_0}(z_3),f_c^{i_0}(z_4)\right)\right)^2,$$

где постоянная $K_4>0$ зависит только от отображения f_c и числа R_1.

В параграфе 3.2 изучается сопряжение между критическим отображением и отображением окружности с изломом.

Сформулируем основной результат параграфа 3.2.

Теорема 9. *Рассмотрим критическое отображение окружности $f_c\in C^3(S^1)$ с одной кубической критической точкой x_c и гомеоморфизм окружности $f_b\in C^{2+\varepsilon}\left(S^1\setminus\{x_b\}\right)$, $\varepsilon>0$, с одной точкой излома x_b. Предположим, что оба отображения f_c и f_b имеют одинаковое иррациональное число вращения т.е. $\rho(f_c)=\rho(f_b)=\rho$. Тогда сопрягающее отображение ψ между f_c и f_b является сингулярной функцией на S^1 т.е. ψ является непрерывной на S^1 и $\psi'(x)$ =0 п. в. относительно меры Лебега ℓ.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В целом, полученные результаты позволяют говорить о достижении цели диссертационной работы. Все основные результаты являются новыми и в совокупности вносят определенный вклад в теорию одномерных динамических систем. Работа посвящена изучению апериодических отображений окружности с изломами и критических отображений окружности.

Основные результаты исследования состоят в следующем:

Доказана теорема о том, что для двух кусочно-гладких гомеоморфизмов окружности с одинаковым числом изломов, с той же орбитной структурой и с одинаковым иррациональным числом вращения подходящие точки изломов имеют одинаковые символические представления;

найдено явное выражение для инвариантной меры отрезка $[b_1,b_2]$соединяющего точки изломов b_1 и b_2 отображения f, при помощи символической динамики точки b_2;

для апериодического кусочно-гладкого гомеоморфизма окружности f с двумя изломами и тривиальной величиной излома построен кусочно-линейное отображение Эрмана h с двумя изломами, которое является топологически эквивалентным. При этом точки излома f переходят в точки излома h и величины изломов сохраняются;

показано, что для апериодических кусочно-гладких гомеоморфизмов окружности с конечным числом изломов, производные отображений первого возвращения в окрестности каждой точки излома строго отделена от единицы;

доказано, что для апериодических, кусочно-гладких гомеоморфизмом окружности с двумя точками излома лежащими на разных орбитах и с тривиальной величиной излома, инвариантная мера является сингулярной относительно меры Лебега;

получена оценка для искажения двойных отношений апериодических критических отображений окружности;

доказано, что сопряжение между критическим отображением и отображением окружности с изломом с одинаковым иррациональным числом вращения является сингулярной функцией.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIK DEGREES PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 KARSHI STATE UNIVERSITY

KARSHI STATE UNIVERSITY

DJALILOV SHUXRAT AXTAMOVICH

CONJUGATING MAPS AND PROBABILITY INVARIANT DISTRIBUTIONS OF CIRCLE HOMEOMORPHISMS WITH SINGULARITIES

01.01.01-Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Karshi – 2022

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number № B2021.4. PhD/FM645.

Dissertation has been prepared at Karshi State university.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website of Scientific Council (http: qarshidu.uz) and the "ZiyoNet" Information and educational portal (http: www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Jabborov Nasriddin Mirzoodilovich** Doctor of physical and mathematical sciences, Professor
Official opponents:	**Ganikhodjaev Rasul Nabievich** Doctor of physical and mathematical sciences, Professor
	Yakhshiboev Makhmadiyor Umirovich Doctor of physical and mathematical sciences (DSc)
Leading organization:	Karakalpak State University named after Berdakh

Defense will take place «____» _____________2022 at ____ at the meeting of Scientific Council number PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 at Karshi State University. (Address: Kuchabag street, 17, Karshi city, 180103, Uzbekistan. Ph.: (+998 75) 225 34 13, fax: (+998 75) 221 00 56, e-mail: qarshidu@umail.uz). Karshi State University, Faculty of Physics and Mathematics, room 102.

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Karshi State University (is registered №_____). (Address: Kuchabag street, 17, Karshi city, 180103, Uzbekistan. Ph.: (+998 75) 225 34 13).

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2022 year.
(Mailing report №___________ on «____» _______________2022 year)

B.A. Shoimkulov
Chairman of scientific council on award of scientific degree, D.F.M.S., professor

M.S. Rustamova
Scientific secretary of scientific council on award of scientific degree, Doctor of Philosophy in Physics and Mathematics (PhD), docent

A.A. Imomov
Chairman of scientific seminar under scientific council on award of scientific degree, D.F.M.S., (DSc)

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of research work is to study the probability invariant measures of piecewise-smooth circle homeomorphisms with breaks and conjugations between circle homeomorphisms with different type of singularities**.**

The object of the research work is piecewise smooth homeomorphisms with breaks, invariant measures, conjugating maps.

Scientific novelty of the research work is as follows:

It is proved that for two piecewise-smooth circle homeomorphisms with the same orbit structure and irrational rotation number the break points of both maps has the same symbolic representation.

It is found the explicit expression for $\mu_f -$ invariant measure of interval $[b_1, b_2]$ with endpoints at the break points b_1 and b_2 of map f, by symbolic dynamics of point b_2.

It is built for aperiodic, piecewise-smooth circle homeomorphism with two breaks and trivial total jump the topologically equivalent piecewise-linear Herman's map with two breaks. The other hand the break points transferred to break points and the values of breaks preserves.

It is showed that for aperiodic, pricewise-smooth circle map with finite number of breaks the derivative of first return map in some neighborhood of each break point is strongly separated of one.

It is proved that for aperiodic, pricewise-smooth circle homeomorphisms with two break points lying on different orbits and trivial total jump the invariant measure is singular with respect to Lebesque measure.

It is obtained the estimates of cross-ratio distortions for aperiodic, critical circle maps.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (Часть I ; Part I)

1. Dzhalilov A., Mayer D., Djalilov S., Aliyev A. // An Extension of Herman’s Theorem for Nonlinear Circle Maps with Two Breaks. Russian Journal of Nonlinear Dynamics, 2018, vol. 14, no. 4, pp. 553-577. (Scopus IF=0,34).
2. Джалилов Ш. Сопряжения и вероятностные распределения отображений окружности с особенностями. // ДАН РУз. 2018, № 4, стр. 5-10. (01.00.00, № 7).
3. Каршибоев Х., Джалилов Ш. Перенормированные координаты для гомеоморфизмов окружности с одной точки излома. // Самарқанд Давлат университети. Ilmiy axborotnoma, 2018-yil, 5-son (111), bet 12-16. (01.00.00; №02).
4. Каршибоев Х., Джалилов Ш. Предельная теорема для времени попадания// Самарқанд Давлат университети. Ilmiy axborotnoma, 2020-yil, 1-son (119), bet 26-30 ((01.00.00; №02).
5. Djalilov Sh. Conjugations between two circle maps with one singularity point. // Uzbek Mathematical Journal, 2020. №3, pp.56-69. (01.00.00, № 6).
6. Джаббаров Н., Джалилов Ш. О расхождении орбит точек изломов для отображений окружности с двумя изломами // Бюллетень Института математики, 2022, №3, стр.-. (01.00.00; №17).

II бўлим (Часть 2 ; Part 2)

7. Джалилов А.А., Джалилов Ш.А., Абдукасимов У.Б. Кусочно-линейные отображения окружности с двумя изломами // Тезисы докладов конференции с участием зарубежных ученых «Проблемы современной топологии и её приложения», г. Ташкент, 5-6 мая 2016 г., стр. 151-153.
8. Джалилов Ш.А., Инвариантные меры кусочно-линейных отображений окружности // “Dinamik sistemalarning dolzarb muammolari va ularning tadbiqlari” Respublika ilmiy konferensiyasi (xorijiy olimlar ishtirokida) materiallari, Toshkent shahridagi Turin politexnika universiteti, 1-3 may 2017 yil, bet 203.
9. Дусмуродова Г.Х., Джалилов Ш.А. Вероятностные распределения и отображения окружности с особенностями // Материалы Республиканской научной конференции «Современные проблемы теории вероятностей и математической статистики» г. Ташкент, 30 апреля-1 мая 2019 г. стр. 14-17.
10. Djalilov Sh. Circle Homeomorphisms with Different Kind of Singularities. // Abstracts of the International scientific conference on the theme “Modern problems of differential equations and related branches of mathematics” Fergana, March 12-13, 2020, pp. 388-390.
11. Jabborov N.A., Djalilov Sh.A. The circle maps with several breaks and total trivial jump ratios // Тезисы докладов республиканской научной конференции «Сарымсаковские чтения», г. Ташкент, 16–18 сентября 2021 года, стр. 210-211.

12. Jabborov N.M., Djalilov Sh.A. The remark on conjugation of circle maps with break points. // Abstracts of the international scientific conference of “Contemporary mathematics and its application”, 19-21 November 2021, Tashkent, Uzbekistan, pp. 115-116.
13. Жабборов Н.М., Джалилов Ш.А. Сопрягающие отображения кусочно-гладких гомеоморфизмов окружности // XIII Белорусская математическая конференция: материалы Международной научной конференции, Минск, Беларуская наука, 22–25 ноября 2021 г., стр. 22-23.