

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ

ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

Наманган муҳандислик-педагогика институти

Қўлёзма ҳуқуқида
УДК 002-007:377

Эшонжонов Жаҳонгир

Тема: Разработка и исследование эффективности пассивных виброзащитных систем, устраиваемых в грунте.

5A140901 Касб таълими (Бинолар ва иншоотлар қурилиши) бўйича магистр мутахассислиги даражасини олиш учун

МАГИСТРЛИК ДИССЕРТАЦИЯСИ

Раҳбар: т.ф.н. проф. Ш.С.Юлдашев

Каф.мудир: доц. Х.Алимов

Наманган 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

Аннотация.....	
1. Введение.....	
1.1 Распространение колебаний от тоннеля метрополитена мелкого заложения	
1.2 Вариационная постановка задачи	
1.3 Физические параметры для уравнения колебаний наследственно- упругого тела	
1.4 Некоторые сведения о конечно-элементной аппроксимации плоской задачи теории упругости	
1.5 Проверка достоверности разработанной программы	
2.1 Исследование эффективности различных виброзащитных систем, устраиваемых в грунте	
2.2 Некоторые сведения о санитарных нормах и характере вибраций	
2.3 Железобетонные виброзащитные системы	
2.4 Преграда-щель	
Основные выводы	
Приложение	

ВВЕДЕНИЕ

Интенсивное развитие жилищного и промышленного строительства в крупных городах страны требует значительного расширения их площадей, резкого увеличения времени, затрачиваемого на передвижение жителей до места работы. В связи с этим возникает необходимость в строительстве метрополитена. В следствии развития промышленности и роста численности населения повышается плотность графиков движения поездов.

В Ферганской долине железнодорожные пути проходят в непосредственной близости жилых домов и производственных помещений. Вибрации, распространяющиеся от железнодорожных путей, оказывают негативное влияние на здоровье людей и производственные машины. Немало проблем возникло перед наукой в связи со строительством ташкентского метрополитена, сооружаемого в сейсмическом районе в зоне возможных 9-бальных землетрясений.

Актуальность темы. Вибрация приводит к индуцированию шума, являющегося важным экологическим показателем среды обитания человека. Вибрация оказывает непосредственное влияние на человека, снижая его функциональные возможности и работоспособность. В условиях вибрации нарушается острота зрения и цветоощущения, ухудшается координация движений, меняется реакция и пороги чувствительности, ослабевает память, повышаются энергетические затраты. Длительное действие вибраций может привести к ухудшению самочувствия и поражению отдельных систем организма: сердечно-сосудистой, нервной, кровеносной систем, вестибулярного аппарата, изменению мышечных и костных тканей и т.д.

Из-за вибрации увеличивают динамические нагрузки в элементах конструкций, стыках и сопряжениях, снижается несущая способность деталей, инициируются трещины, возникают усталостные разрушения. Действие вибрации может привести к трансформированию внутренних структур материалов и поверхностных слоёв, изменению условий трения и износа на контактных поверхностях деталей машин, нагреву конструкций. Поэтому особое значение приобретают методы и средства уменьшения вибраций. Совокупность таких методов и средств принято называть виброзащитой.

При выборе средств, уменьшающих нежелательные вибрации, и для оценки требуемой эффективности различных возможных приёмов виброзащиты необходимо изучить процесс распространения колебаний в грунте.

Таким образом, упругие волны, распространяющиеся в грунте от различных промышленных и транспортных источников, вредно влияют на сооружения, технологические процессы и на людей. Поэтому изучение действия этих волн на сооружения и разработка способов уменьшения вибраций до уровня требований санитарных норм имеют большое практическое значение.

Цель и задачи исследований. Целью настоящей работы является:

- исследование влияния различных физических и геометрических параметров грунта, тоннеля на уровень вибраций, возникающих при прохождении поездов метро в тоннелях прямоугольного сечения;
- защита различных объектов от вибраций путём экранирования упругих волн в грунте.

Научная новизна работы заключается в следующем:

- разработана методика численного исследования динамических процессов вокруг тоннелей прямоугольного сечения, находящихся на упругом грунте, с использованием метода конечных элементов (МКЭ);
- определены влияния различных физических и геометрических параметров на уровень колебаний поверхности грунта;
- предложены различные типы преград, способствующих уменьшению уровня колебаний поверхности грунта при вибрационных воздействиях подземного транспорта;
- на основе численного исследования предложены эффективные типы виброзащитного экрана.

Практическая ценность диссертации. Разработанные численные методы расчета и прикладные программы могут применяться при динамических расчетах наземных и подземных сооружений с учетом различных физических и геометрических параметров. Полученные численные результаты и рекомендации могут быть использованы при проектировании различных подземных сооружений.

Достоверность полученных результатов подтверждается строгой математической постановкой, применением известных и апробированных методов решения динамических задач, а также удовлетворительным соответствием полученных в диссертации теоретических результатов с данными экспериментальных исследований.

Апробация -основные содержания работы доложены на ежегодной конференции магистрантов НамИПИ и на семинара кафедры «Сопротивление материалов и строительная механика»

Объект диссертации – метрополитены и другие транспортные сооружения.

Предмет диссертации – разработка и исследование эффективности пассивных виброзащитных систем, устраиваемых в грунте.

1.1. Распространение колебаний от тоннеля метрополитена мелкого заложения. Постановка задачи.

При движении поездов в метрополитене мелкого заложения в окружающую среду распространяются вибрации, которые наносят ощутимый вред окружающим строениям и проживающему вблизи населению. Для выбора средств, уменьшающих нежелательные вибрации, необходимо изучить процесс распространения колебаний во время движения поездов.

На основании результатов экспериментальных исследований можно считать, что колебания грунта, как утверждают многочисленные авторы, происходят во времени по гармоническому закону [8, 9, 10, 14].

Задачу можно рассматривать в линейной постановке, так как амплитуда колебаний мала [1, 10, 13].

Отметим, что длина поезда, т.е. участка тоннеля, возбуждающего колебания грунта, составляет около 150 метров. Это превышает длину обычных зданий, и можно принять, что задача плоская, т.е. колебания тоннеля по всей его длине происходят в одной фазе [5].

Примем прямоугольную систему координат. Ось x направим по свободной границе полуплоскости вправо. Ось y направим вглубь упругой среды (рис. 1.1.1), свойства которой характеризуются упругими постоянными, E - модуль Юнга, ν - коэффициент Пуассона, ρ - плотность. Если ось y проводить через центр прямоугольника, имитирующего однопутный тоннель, то задача становится симметричной относительно оси y .

Эта задача математически моделируется следующим образом.

В полуплоскости с прямоугольным отверстием, расположенном вблизи свободной границы, распространяется волна от двух параллельных гармонических нагрузок, сосредоточенно приложенных в отверстии.

Предполагается, что полуплоскость неоднородна и обладает свойством внутреннего трения, т.е. является наследственно-упругим телом.

1. Уравнения движения системы записываются так:

$$\begin{cases} (\lambda + \mu) \frac{d \Delta}{d x} + \mu \nabla^2 u = \rho \frac{d^2 u}{d t^2} \\ (\lambda + \mu) \frac{d \Delta}{d y} + \mu \nabla^2 v = \rho \frac{d^2 v}{d t^2} \end{cases} \quad (1.1.1)$$

$$\Delta = \frac{d u}{d x} + \frac{d v}{d y}$$

где

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{d x^2} + \frac{d^2}{d y^2}$$

λ и μ коэффициенты Ламе; в общем случае они являются меняющимися по координате операторами.

2. Геометрические соотношения перемещения и деформации.

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}, \quad \varepsilon_y = \frac{dv}{dy}, \quad \gamma_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}, \quad (1.1.2)$$

3. Физические соотношения.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \Delta + 2\mu \cdot \varepsilon_x \\ \sigma_y &= \lambda \Delta + 2\mu \cdot \varepsilon_y \\ \tau_{xy} &= \mu \gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.3)$$

4. Граничные условия в напряжениях:

$$\text{При } y = 0, \quad \sigma_y = 0 \text{ и } \tau_{xy} = 0 \quad (1.1.4)$$

5. Граничные условия в перемещениях

$$v = v_0(t) \text{ на } S, \quad (1.1.5)$$

а также при

$$\left\{ \begin{aligned} x &\rightarrow \pm \infty \\ y &\rightarrow \infty \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} u &= 0 \\ v &= 0 \end{aligned} \right. \quad (1.1.6)$$

6. Начальные условия,

$$\text{при } t = 0 \quad \left\{ \begin{aligned} u(0) &= u_0 \\ v(0) &= v_0 \end{aligned} \right. \quad \text{И} \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{u}(0) &= \dot{u}_0 \\ \dot{v}(0) &= \dot{v}_0 \end{aligned} \right.$$

Итак, имеем следующую задачу динамической теории упругости: необходимо определить перемещения в упругой неоднородной изотропной полуплоскости, ограниченной прямой линией, от действия гармонической во времени кинематической нагрузки, распределенной по контуру прямоугольника, находящегося под свободной границей полуплоскости.

1.2 Вариационная постановка задачи.

Во многих случаях задачу интегрирования дифференциальных уравнений, приведенных в предыдущем параграфе, можно заменить равносильной вариационной задачей об отыскании функции, сообщающей некоторому интегралу наименьшее значение.

Используем известный принцип классической механики Остроградского-Гамильтона. Пусть в пространстве R_3 задано некоторое вязкоупругое тело, занимающее площадь s и ограниченное линией $L = L_n + L_p$. При этом для L_n заданы кинематические граничные условия, на L_p действует система нагрузок $P = (P_x + P_y)$. Система объёмных сил отсутствует.

Определим \vec{U} вектор-функцию.

$$\vec{U}(x, y, t) = (U(x, y, t), V(x, y, t))$$

придающую минимум функционалу полной энергии системы:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (\Pi - T + A) dt = \int_{t_1}^{t_2} \iint_s F \left(u, v, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \quad (1.2.1)$$

при ограничении

$$\left. \begin{aligned} \vec{U} \Big|_{L_n} &= \vec{U}_n(x, y, t) \\ \vec{U} \Big|_{t=0} &= \vec{U}_0(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.2)$$

где $U_n(x, y, t)$ и $U_0(x, y)$ -заданные функции на L_n и при $t = 0$.

$$T = \frac{1}{2} \iint_s p \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right) dx dy \quad (1.2.3)$$

$$A = \iint_s p (P_x \cdot u + P_y \cdot v) dx dy \quad (1.2.4)$$

$$\Pi = \iint_s \bar{\Pi} dx dy \quad (1.2.5)$$

Здесь $\bar{\Pi} = \bar{\Pi}_y - \bar{\Pi}_b$, (1.2.6)

$\overline{\Pi}_y$ - упругий потенциал (потенциальная энергия) в единичной площади;

$\overline{\Pi}_b$ - «вязкий» потенциал в единичной площади.

Если заранее не ввести вместо упругого вязкоупругий потенциал (1.2.6) то функционал Лагранжа не будет потенциальным, и необходимое условие минимума ее не дает прямую, эквивалентную вариационной постановке задачи [16, 25].

Согласно наследственной теории Больцмана - Вольтерра обобщенный закон Гука записывается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2\mu(1-R^*)\varepsilon_x + \lambda(1-R^*)\Delta \\ \sigma_y &= 2\mu(1-R^*)\varepsilon_y + \lambda(1-R^*)\Delta \\ \tau_{xy} &= \mu(1-R^*)\gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.7)$$

где $\Delta = \varepsilon_x + \varepsilon_y$;

λ и μ - постоянные Ламе, т.е.

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1-2\nu)(1+\nu)};$$

R^* - интегральный оператор Вольтерра

$$R^* f(t) = \int_0^t R(t-\tau) f(\tau) \partial \tau \quad (1.2.8)$$

$R(t)$ - ядро наследственности типа Абеля.

Выражения для $\overline{\Pi}_y$ и $\overline{\Pi}_b$ записывается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \overline{\Pi}_y &= \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) \\ \overline{\Pi}_b &= \sigma_x^* \varepsilon_x + \sigma_y^* \varepsilon_y + \tau_{xy}^* \gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.9)$$

С учетом физических соотношений (1.2.7) потенциальную энергию (1.2.6) запишем следующим образом [10]:

$$\overline{\Pi}_x = \frac{1}{2} \left[(2\mu \varepsilon_x^2 + \lambda \Delta \varepsilon_x) + (2\mu \varepsilon_y^2 + \lambda \Delta \varepsilon_y) + \mu \gamma_{xy}^2 \right] - \left[(2\mu \varepsilon_x^* \varepsilon_x + \lambda \Delta^* \varepsilon_x) + (2\mu \varepsilon_y^* \varepsilon_y + \lambda \Delta^* \varepsilon_y) + \mu \gamma_{xy}^* \gamma_{xy} \right] \quad (1.2.10)$$

$$\varepsilon_x^* = \int_0^t R(t - \tau) \varepsilon_x(\tau) \partial \tau$$

$$\varepsilon_y^* = \int_0^t R(t - \tau) \varepsilon_y(\tau) \partial \tau$$

где
$$\gamma_{xy}^* = \int_0^t R(t - \tau) \lambda_{xy}(\tau) \partial \tau$$

$$\Delta^* = \int_0^t R(t - \tau) \Delta(\tau) \partial \tau$$

Не трудно убедиться, что $\overline{\Pi}$ является потенциальным, т.е.

$$\frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial \varepsilon_x} = \sigma_x, \quad \frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial \varepsilon_y} = \sigma_y, \quad \frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial \gamma_{xy}} = \tau_{xy}, \quad (1.2.11)$$

Выражение (1.2.11) представляет собой формулу Грина для вязкоупругого тела.

В работе [10] доказывается, что функционал полной энергии (1.2.1) выпуклый вниз и, следовательно, в точке стационарности имеет минимум.

Единственность решения задачи теории вязкоупругости, аналогично теории упругости, гарантируется теоремой Кирхгофа. Следовательно, функционал полной энергии (1.2.1) имеет единственный минимум, и задача отыскания минимума выражения (1.2.1) унимодальна.

Уравнения Эйлера-Пуассона

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial u_1} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial u_y} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial v_1} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial v_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial v_y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2.12)$$

с заданными граничными и начальными условиями, которая является условием стационарности функционала (1.2.1) должно быть эквивалентно прямой постановке задачи.

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y},$$

Здесь

$$v_t = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad v_x = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial v}{\partial y},$$

Напишем выражение F для двумерной задачи.

$$\begin{aligned}
F = & \mu \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - \\
& - 2 \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} R^* \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} R^* \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} R^* \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) R^* \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \\
& - \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) R^* \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{P}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) + P_x u + P_y v
\end{aligned} \tag{1.2.13}$$

(1.4.13) подставим в (1.4.12) и получим

$$\left. \begin{aligned}
(\lambda + 2 \mu) (1 - R^*) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu (1 - R^*) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) (1 - R^*) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= p \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + P_x \\
(\lambda + 2 \mu) (1 - R^*) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu (1 - R^*) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) (1 - R^*) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= p \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + P_y
\end{aligned} \right\} \tag{1.2.14}$$

Это есть уравнения Ламе.

Следовательно, решение динамических уравнений Ламе (1.2.14) при граничных и начальных условиях (1.2.2) эквивалентно нахождению минимума функционала (1.2.1) при ограничениях (1.2.2).

Соблюдение такой эквивалентности и условия унимодальности функционала дает возможность применению для решения задачи вариационных методов, в частности, метода конечных элементов (МКЭ).

1.3 Физические параметры для уравнения колебаний наследственно-упругого тела.

Предположим, что наследственно-упругой тело подвержено действию периодического возмущения в течение достаточно долгого времени. Пусть, например $\varepsilon(t)$ есть периодическая функция.

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cdot e^{i\omega t} \quad (1.3.1)$$

Соответственно, можем написать

$$\sigma(t) = \sigma_0 \cdot e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (1.3.2)$$

Мы знаем, что напряженно-деформированное состояние наследственно-упругого тела описывается уравнениями

$$\sigma(t) = E \left(1 - R^* \right) \cdot \varepsilon(t) \quad (1.3.3)$$

или

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left(1 + K^* \right) \cdot \sigma(t) \quad (1.3.4)$$

где R^* и K^* - операторы релаксации и ползучести.

Поставляя (1.3.1) и (1.3.2) в (1.3.3), получим

$$\sigma_0 \exp i(\omega t + \varphi) = E \cdot \varepsilon_0 \left[\exp(i\omega t) - \int_{-\infty}^t \exp(i\omega t) \cdot R(t - \tau) \partial \tau \right] \quad (1.3.5)$$

Заменяв переменную интегрирования, переведем это выражение к следующему виду:

$$\sigma_0 \exp i(\omega t + \varphi) = E \cdot \varepsilon_0 \exp(i\omega t) \cdot [1 - R_c + iR_s] \quad (1.3.6)$$

Здесь

$$R_c = \int_0^{\infty} R(z) \cos \omega z \partial z \quad (1.3.7)$$

$$R_s = \int_0^{\infty} R(z) \sin \omega z \partial z \quad (1.3.8)$$

Введем следующие обозначения:

$$E'(\omega) = E(1 - R_c), \quad E''(\omega) = E R_s \quad (1.3.9)$$

и $E' + iE''$, которое называется комплексным модулем.

Тогда уравнение (1.3.6) может быть записано в форме обычного закона Гука, только с комплексным модулем.

$$\sigma = (E' + i E'') \cdot \varepsilon \quad (1.3.10)$$

Если коэффициента Пуассона считать не релаксирующей величиной, то

$$E' + i E'' = 2(1 + \nu)(G' + i G'') \quad (1.3.11)$$

отсюда

$$E' = 2(1 + \nu)G' \quad \text{и} \quad E'' = 2(1 + \nu)G''$$

Теперь запишем выражения для коэффициентов Ламе:

$$\mu^* = G^* = G' + i G'' = \frac{1}{2(1 + \nu)}(E' + i E'') \quad (1.3.12)$$

$$\lambda^* = \frac{2\nu}{1 + 2\nu} G^* = \frac{\nu}{(1 + \nu)(1 + 2\nu)}(E' + i E'') \quad (1.3.13)$$

Если в (1.3.12) и (1.3.13) подставить (1.3.9), то получим

$$\mu^* = \frac{E}{2(1 + \nu)}(1 - R_c + i R_s) \quad (1.3.14)$$

$$\lambda^* = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 + 2\nu)}(1 - R_c + i R_s) \quad (1.3.15)$$

В случае, если ядро релаксации принять как ядро Абеля типа

$$I_{-a} = \frac{t^{-a}}{\Gamma(1 - a)} \quad (\text{здесь } \Gamma\text{-гамма-функция}) \quad (1.3.16)$$

то

$$R_c = \int_0^{\infty} \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} \cos \omega z dz = \sin \frac{\pi \alpha}{2} \cdot \omega^{\alpha-1}$$

$$R_s = \int_0^{\infty} \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} \sin \omega z dz = \cos \frac{\pi \alpha}{2} \cdot \omega^{\alpha-1} \quad (1.3.17)$$

В (1.3.14) и (1.3.15) подставим (1.3.17) и (1.3.18)

$$\mu^* = \frac{E}{2(1 + \nu)} \left(1 - \sin \frac{\pi \alpha}{2} \cdot \omega^{\alpha-1} + i \cos \frac{\pi \alpha}{2} \cdot \omega^{\alpha-1} \right)$$

$$\lambda^* = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 + 2\nu)} \left(1 - \sin \frac{\pi \alpha}{2} \cdot \omega^{\alpha-1} + i \cos \frac{\pi \alpha}{2} \cdot \omega^{\alpha-1} \right)$$

или

$$\mu^* = G \left(1 - i \omega^{\alpha-1} e^{i \frac{\pi \alpha}{2}} \right) \quad (1.3.19)$$

$$\mu^* = \frac{2 \nu G}{(1 + 2 \nu)} \left(1 - i \omega^{\alpha-1} e^{i \frac{\pi \alpha}{2}} \right) \quad (1.3.20)$$

В работе [16] коэффициент Ламе без учета мгновенной деформации определяется следующими формулами:

$$\mu^* = \mu_1 + i \mu_2; \quad \mu_1 = |\omega|^\alpha \cos \frac{\pi \alpha}{2} K_0; \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \operatorname{arctg} \gamma;$$

$$\mu_2 = |\omega|^\alpha \sin \omega \cdot \sin \frac{\pi \alpha}{2} K_0; \quad K_0 = \mu_0 \omega_0^{-\alpha}, \quad \omega = \omega_0$$

где

μ_0 - динамический модуль сдвига,
 γ - коэффициент потерь материала.

1.4 Некоторые сведения о конечно-элементной аппроксимации плоской задачи теории упругости.

В данной работе в качестве численного аппарата применяется метод конечных элементов (МКЭ), ставший популярным благодаря универсальности и гибкости и решению различных задач строительной механики и механики сплошных сред. В настоящее время увеличивается число работ [44, 59] по усовершенствованию метода и применению его для решения различных задач физики и техники. Подробно метод в работе не рассматривается. Приведем пример по применению МКЭ к плоским задачам теории упругости. Это выполняется следующим образом:

1-сплошная разбивается воображаемыми линиями на некоторое количество конечных элементов;

2-предполагается, что элементы связаны между собой в узловых точках, основными неизвестными будут перемещения этих точек;

3-выбирается система функции, однозначно определяющая перемещение внутри каждого элемента через перемещения узловых точек;

4-функции перемещений однозначно определяют деформации внутри элемента через узловые перемещения, известные начальные деформации и упругие свойства элемента позволяют определить напряжения внутри элемента и на его границах;

5-определяется система сил, сосределяется узловыми точками i, j, m и т.д. (рис.10.1) и прямолинейными границами. Пусть перемещения любой точки внутри элемента задаются вектор-столбцом.

Рис. 1.4.1. Плоская область, разбитая на конечные элементы.

Рис1.4.2. Элемент сплошной среды для расчета плоского напряженного или плоского деформированного состояния.

$$\{f\} = [N] \{q\}^e = [N_i, N_j, N_m \dots] \begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \\ q_m \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (1.4.1)$$

где компоненты $[N]$ в общем случае являются функциями положения, а $\{q\}^e$ вектор представляет собой перемещения узловых точек рассматриваемого элемента.

В случае плоского напряженного состояния вектор-столбец

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} U(x, y) \\ V(x, y) \end{Bmatrix}$$

содержит горизонтальное и вертикальное перемещения произвольной точки внутри элемента, а столбец

$$\{q_i\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix}$$

соответствующие перемещения узла i .

Функции N_i, N_j, N_m должны выбираться так, чтобы при подстановке в (1.4.1) координаты узлов соответствовали узловым перемещениям. Очевидно, что в общем случае $N_i(x_i, y_i) = [1]$ (единичная матрица), тогда как $N_i(x_i, y_i) = N_i(x_m, y_m) = 0$ и т.д., что, в частности, достигается соответствующим выбором линейных функций относительно x и y .

На рис. (1.4.2) показан треугольный элемент с узлами.

На протяжении всей работы мы используем треугольные элементы.

(Выбор формы элемента и функции перемещений для конкретных задач зависит от самого исследователя). Перемещения каждого узла имеет два компонента

$$\{q_i\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix} \quad (1.4.2)$$

шесть компонентов перемещений элемента образуют вектор

$$\{q\}^e = \begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \\ q_m \end{Bmatrix} \quad (1.4.3)$$

Перемещения внутри элемента должны однозначно определяться указанными шестью величинами. Ясно, что простейшими представлениями служат линейные полиномы

$$\begin{aligned} U &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ V &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

Значения шести постоянных α_i легко найти из двух систем, состоящих из трех уравнений, которые получаются в результате подстановки в (1.4.4) узловых координат и приравнивая перемещения к соответствующим перемещениям узловых точек.

Записав, например,

$$\left. \begin{aligned} U_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i, \\ U_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j, \\ U_m &= \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m, \end{aligned} \right\} \quad (1.4.5)$$

выразим $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ через величины узловых перемещений U_i, U_j, U_m .

$$U = \frac{1}{2\Delta} \{ (\alpha_i + b_i x + c_i y) U_i + (\alpha_j + b_j x + c_j y) U_j + (\alpha_m + b_m x + c_m y) U_m \} \quad (1.4.6)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_i &= x_i y_i - x_m y_j, \\ b_i &= y_i - y_m = y_{jm}, \\ c_i &= x_m - x_j = x_{mj} \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

Остальные коэффициенты получаются циклической перестановкой индексов i, j, m . Величина Δ - площадь треугольника i, j, m .

Аналогично можно представить перемещение V в вертикальном направлении и получим

$$V = \frac{1}{2\Delta} \{ (\alpha_i + b_i x + c_i y) V_i + (\alpha_j + b_j x + c_j y) V_j + (\alpha_m + b_m x + c_m y) V_m \} \quad (1.4.8)$$

Соотношения (1.6.6) и (1.6.8) напомним в стандартной форме (1.6.1) т.е.

$$\{f\} = \left\{ \frac{U}{V} \right\} = [N] \{q\}^e = [N_i, N_m] \{q\}^e \quad (1.4.9)$$

где I-единичная матрица размерности 2 x 2, а

$$N_i = (\alpha_i + b_i x + c_i y) / 2\Delta \quad (1.4.10)$$

Выбранная функция перемещений автоматически гарантирует непрерывность перемещений между смежными элементами. Если известны перемещения во всех точках элемента, то в них можно определить и деформации. Они находятся с помощью соотношения, которое в матричной форме может быть записано в виде

$$\{\varepsilon\} = [B] \{q\}^e \quad (1.4.11)$$

В случае плоского напряженного состояния полную деформацию в любой точке внутри элемента можно охарактеризовать тремя составляющими, которые дают вклад во внутреннюю работу

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial U / \partial x \\ \partial V / \partial y \\ \partial U / \partial y + \partial V / \partial x \end{Bmatrix} \quad (1.4.12)$$

Используя равенства (1.6.9) или (1.6.6) и (1.6.8), имеем

$$\{ \varepsilon \} = \begin{Bmatrix} \partial N_i / \partial x & 0 & \partial N_j / \partial x & 0 & \partial N_m / \partial x & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial x & 0 & \partial N_j / \partial x & 0 & \partial N_m / \partial x \\ \partial N_i / \partial x & \partial N_i / \partial x & \partial N_j / \partial x & \partial N_j / \partial x & \partial N_m / \partial x & \partial N_m / \partial x \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_m \\ V_m \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2 \Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \{ q \}^e \quad (1.4.13)$$

что явно определяет матрицу [B] из равенства (1.4.11)

Закон Гука для наследственно-упругого тела в случае плоского напряженного состояния в матричном виде можно написать так:

$$\{ \sigma (t) \} = [D] \left(1 - R^* \right) \{ \varepsilon (t) \} \quad (1.4.14)$$

R^* -оператор релаксации, т.е.

$$\{ \sigma (t) \} = [D] \left[\begin{array}{c} ie \\ \{ \varepsilon (t) \} - \int R (t - \tau) \{ \varepsilon (\tau) \} \partial \tau \\ 0 \end{array} \right]$$

где

$$[D] = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu) / 2 \end{bmatrix}$$

Пусть столбец

$$\{ F \}^e = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_m \end{Bmatrix}$$

определяет узловые силы, статически эквивалентные граничным напряжениям и распределенным нагрузкам, действующими на элемент. Каждая из сил $\{ F_i \}$ должна иметь столько же компонент, сколько соответствующее узловое перемещение $\{ q_i \}$ и действовать в соответствующем направлении.

Распределенные силы $\{ P \}$ определяются как нагрузки, приходящиеся на единицу объема материала элемента и действующие в направлениях, соответствующих направлениям перемещений $\{ f \}$ в этой точке.

Пусть $\delta \{ q \}^e$ – виртуальное перемещение в узле. С помощью соотношений (1.4.1) и (1.4.11) получим соответственно перемещение и деформации в элементе в виде

$$\delta \{f\} = [N] \delta \{q\}^e \quad \text{и} \quad \delta \{\varepsilon\} = [B] \delta \{q\}^e \quad (1.4.15)$$

Аналогично внутренняя работа напряжений и распределенных сил, приходящаяся на единицу объема, равна

$$\delta \{\varepsilon\}^T = \{\sigma\} - \delta \{f\}^T \{p\} \quad (1.4.16)$$

или

$$\left(\delta \{q\}^e \right)^T \left([B]^T \{\sigma\} - [N]^T \{p\} \right) \quad (1.4.17)$$

Приравнивая работу внешних сил к суммарной внутренней работе, получаемой интегрированием по объему элемента, имеем

$$\left(\delta \{q\}^e \right)^T \{f\}^e = \left(\delta \{q\}^e \right)^T \left(\int [B]^T \{\sigma\} dV - \int [N]^T \{p\} dV \right) \quad (1.4.18)$$

Коэффициенты в правой и левой частях должны быть равны, так как это соотношение справедливо для любого виртуального перемещения. После постановки (1.4.11) и (1.4.14) получаем

$$\{F\}^e = \left(\int [B]^T [D] [B] dV \right) \{q\}^e - \int [N]^T \{p\} dV \quad (1.4.19)$$

Эта зависимость - одна из основных характеристик любого элемента.

Здесь

$$[K]^e = \int [B]^E [D] [B] dV \quad (1.4.20)$$

слижут матрицей жесткости элемента. Узловые силы, обусловленные распределенными нагрузками, имеют вид

$$[F]_p^e = - \int [N]^T \{P\} dV \quad (1.4.21)$$

Выводим уравнение равновесия для всего сплошного тела. Можно считать, что соотношение (1.4.1) относится ко всей конструкции, т.е.

$$\{f\} = [\bar{N}] \{q\} \quad (1.4.22)$$

где столбец $\{q\}$ содержит все узловые перемещения, а

$$\bar{N}_i = N_i^e \quad (1.4.23)$$

если рассматриваемая точка принадлежит элементу e , т.е. точка i сопряжена с этим элементом. Если точка i не принадлежит рассматриваемому элементу, то

$$\bar{N}_i = 0 \quad (1.4.24)$$

Аналогично матрица $[B]$. Затем принцип виртуальной работы может быть применен ко всей конструкции. Внешняя работа на виртуальных перемещениях $\delta \{q\}$ равна

$$\delta \{q\}^T \{R\} - \int_v \delta \{q\}^T \{P\} dV - \int_s \delta \{f\}^T \{q\} dS, \quad (1.4.25)$$

первый член означает работу внешних сосредоточенных сил в узлах, а третий-работу распределенных сил на границах тела. Внутренняя виртуальная работа принимает вид

$$\int_V \delta \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad (1.4.26)$$

где интеграл берется по всей области. После учета

$$\delta \{f\} = [\bar{N}] \delta \{q\} \quad \text{и} \quad \delta \{\varepsilon\} = [\bar{B}] \delta \{q\} \quad (1.4.27)$$

приравнивая внутреннюю и внешнюю работу, получаем

$$[K] \{q\} + \{F\}_p + \{F\}_b - \{R\} = 0 \quad (1.4.28)$$

где

$$\{F\}_b = - \int_S \{N\}^T \{q\} dS$$

Произвольный элемент матрицы жесткости имеет

$$[K_{ij}] = \int [B_i] [D] [B_j] dV, \quad (1.4.29)$$

где интеграл берется по всей области.

Учитывая соотношение между $[B_i]$ и $[B_j]$ имеем

$$[K_{ij}] = \Sigma [K_{ij}]^e$$

где оценивается вклад каждого элемента.

Основная версия метода конечных элементов - формирование матрицы и векторов, входящих в уравнение (1.4.28), и решение этого уравнения.

Любая упругая система, подверженная действию статических нагрузок, может быть проанализирована с помощью матричного уравнения метода конечных элементов в форме метода перемещений вида

$$[K] \{q\} = \{P\} \quad (1.4.30)$$

Каждое $i - oе$ уравнение системы (1.4.30) выражает условие равновесия дискретной системы по направлению $i - ой$ связи, равносильно тому, что сумма реакций от всех сходящихся в данном узле элементов равна узловой внешней силе. Это условие справедливо для любой упругой системы, причем в общем нас не интересует природа самих сил сопротивления, возникающих при действии на систему изменяющихся во времени внешних нагрузок. Согласно известному принципу Даламбера, силы инерция могут быть заменены их статическими эквивалентами.

$$- P \partial^2 \{f\} / \partial t^2 \quad (1.4.31)$$

Здесь $\{f\}$ -обобщенное перемещение. Эти силы совпадают по направлению с перемещениями $\{f\}$, а p -масса единицы объема.

Эквивалентная статическая задача в каждый момент времени дискретизируется, причем распределенная сила $\{P\}$ заменяется эквивалентом

$$\{P\} = p \frac{\partial^2 \{f\}}{\partial t^2} \quad (1.4.32)$$

Узловые силы элемента принимают теперь вид

$$\{F\}_p^e = \{\bar{F}\}_p^e + \int [N]^T p \frac{\partial^2 \{f\}}{\partial t^2} dV \quad (1.4.33)$$

Перемещения аппроксимируются соотношением

$$\{f\} = [N]\{q\}^e \quad (1.4.34)$$

Подставив выражение (1.4.33) в общее уравнение равновесия, окончательно получим следующее матричное дифференциальное уравнение:

$$[K]\{q\} + [M] \frac{\partial^2 \{q\}}{\partial t^2} + \{\bar{F}\} = 0 \quad (1.4.35)$$

где $[K]$ и $\{\bar{F}\}$ - матрицы жесткости и сил, полученные обычным суммированием коэффициентов жесткости и сил элементов, вызванных заданными внешними нагрузками. Матрица $[M]$ составляет по обычному правилу элементов, заданных в виде

$$[m_{ij}]^e = \int [N_i]^T \cdot p [N_j] dV \quad (1.4.36)$$

Матрица $[m_{ij}]$ известна как матрица масс элементов, а $[M]$ - как матрица масс системы.

Приведём матрицу массы для типичного треугольного элемента.

$$[m]^e = (p \delta \Delta / 3) \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (1.4.37)$$

где Δ – площадь треугольника, а b - толщина элемента, которая считается постоянной в пределах элемента.

Если предполагать, что материал обладает наследственно-упругими свойствами, то уравнение движения (1.4.35) записывается следующим образом:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \cdot \left(\{q\} - \int_0^t R(t-\tau) \{q(\tau)\} d\tau \right) + \{F\} = 0 \quad (1.6.38)$$

где $R(t)$ -ядро релаксации.

МКЭ реализуется на ЭВМ различными способами, в зависимости от характера решаемой задачи. При решении статических задач теории упругости после дискретизации задачи приводят к нахождению корней систем алгебраических уравнений высокого порядка, которые легко программируются и решаются на современных ЭВМ.

При решении динамических задач в случае действия произвольной нагрузки задача сводится либо к нахождению собственных чисел и форм свободного колебания с последующим разложением решения задачи по собственным формам свободного колебания, либо к решению большого порядка конечно-разностным методом.

В случае распространения установившихся волн в упругой среде задача сводится к решению комплексных алгебраических уравнений высокого порядка, так как в этом случае матрица жесткости и амплитуда колебаний являются комплексными.

Программа, которая реализует методы конечных элементов (в случае установившегося колебания системы), состоит из следующих этапов: формирования матриц жесткости, массы, демпфирования и решения системы комплексных уравнений.

Для формирования матрицы жесткости мы используем подпрограмму, составленную в работе [12], но с некоторыми изменениями. В этой процедуре для простых элементов основными операциями являются:

- а) описания элемента в локальных координатах;
- б) составления матрицы $[B]$, связывающей деформации с перемещениями;
- в) составления матрицы $[D]$, связывающей напряжения и деформации;
- г) получения матричного произведения $[B]^T [D] [B]$;
- д) интегрирование по площади элемента произведения матриц (в случае плоского напряженного состояния эта операция сводится к простому умножению на площадь треугольника).

Подпрограмма формирования матрицы жесткости может быть использована и для формирования матрицы массы, так как они имеют одинаковую структуру. На формирование матрицы демпфирования, в случае предположения пропорциональности ее матрице жесткости, особая программа не составляется.

В любой программе, реализующей метод конечных элементов, ключевой является программа решения систем уравнений. Выбор метода решения зависит от числа уравнений задачи и от типа используемой вычислительной машины.

Для решения систем линейных уравнений разработаны следующие два метода: а) прямой метод, позволяющий получить точное решение; б) итерационный метод, использующий сходящийся к точному решению процесс последовательных приближений.

В качестве прямого метода мы используем метод исключения Гаусса. Приведем алгоритм этого метода.

Пусть система N уравнений представлена в блочном виде

$$\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \end{Bmatrix} \quad (1.4.39)$$

где $[K_{11}]$ – матрица размерности 1×1 ,
 $[K_{12}]$ – $1 \times (N - 1)$,
 $[K_{21}]$ – $(N - 1) \times 1$,
 $[K_{22}]$ – $(N - 1) \times (N - 1)$,

$\{q\}$ - вектор неизвестных величин,
 $\{F\}$ - вектор известных величин.

Метод исключения Гаусса позволяет уменьшить размерность матрицы и получить матричное уравнение размерности $(N - 1)$ в виде

$$[K^*] \{q\} = \{F^*\} \quad (1.4.40).$$

где

$$[K^*]=[K_{22}]- [K_{21}] [K_{11}]^{-1} [K_{12}], \{F^*\}=\{F_2\}-[K_{21}] [K_{11}]^{-1} \{F_1\}.$$

Этот прием можно повторить, разбивая на блоки матрицу $[K^*]$. Когда размерность матрицы $[K]$ будет сведена к последнему неизвестному 1×1 , q_n можно будет найти непосредственно.

Используя обратный ход, остальные неизвестные определяем из уравнения типа

$$q_1=[K_{11}]^{-1}\{K_1\}-[K_{11}]^{-1}[K_{12}]\{q_2\} \quad (1.4.41)$$

При составлении программы для экономии оперативной памяти ЭВМ учитывается симметричность и ленточность матриц жесткости и масс, что характерно для задач теории упругости.

1.5. Проверка достоверности разработанной программы.

Для любого алгоритма и программ необходима проверка их на достоверность, которая состоит из следующих этапов:

- а) проверка точности решения системы комплексных алгебраических уравнений;
- б) проверка правильности формирования матрицы жесткости;
- в) проверка применимости всего комплекса подпрограмм к динамическим задачам теории упругости.

Для проверки решения системы алгебраических уравнений, осуществляемой методом Гаусса, составляем систему алгебраических уравнений с плотной матрицей 12 порядка, после чего не представляет трудности составить систему уравнений таким образом, чтобы все корни системы были единицами.

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 - 6x_6 - 2x_7 + 8x_8 - 10x_9 + 9x_{10} - 11x_{11} + 12x_{12} &= 9 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 + 3x_7 - 9x_8 + 3x_9 - 8x_{10} + 4x_{11} - 2x_{12} &= 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 6x_5 - 2x_6 + 4x_7 - 6x_8 - 7x_9 + 9x_{10} - 3x_{11} + 7x_{12} &= 5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 7x_5 - 8x_6 + 9x_7 - 6x_8 + 10x_9 - 11x_{10} + 8x_{11} - 7x_{12} &= 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 6x_3 + 7x_4 - 3x_5 + 5x_6 - 7x_7 + 9x_8 - 3x_9 + 4x_{10} - 5x_{11} + 9x_{12} &= 19 \\ -6x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 8x_4 + 5x_5 + 3x_6 + 6x_7 - 8x_8 + 9x_9 - 10x_{10} + 6x_{11} - 5x_{12} &= -4 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 9x_4 - 7x_5 + 6x_6 - 3x_7 + 4x_8 + 5x_9 - 12x_{10} + 7x_{11} - 8x_{12} &= 6 \\ 8x_1 - 9x_2 - 6x_3 - 6x_4 + 9x_5 - 8x_6 + 4x_7 - 6x_8 + 6x_9 - 7x_{10} + 8x_{11} + 9x_{12} &= 2 \\ -10x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 10x_4 - 3x_5 + 9x_6 + 5x_7 + 6x_8 - 3x_9 + 4x_{10} + 5x_{11} - 6x_{12} &= 13 \\ 9x_1 - 8x_2 + 9x_3 - 11x_4 + 4x_5 - 10x_6 - 12x_7 - 7x_8 + 4x_9 - 6x_{10} + 7x_{11} + 4x_{12} &= -17 \\ -11x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 8x_4 - 5x_5 + 6x_6 + 7x_7 + 8x_8 + 5x_9 + 7x_{10} - 6x_{11} + 7x_{12} &= 27 \\ 12x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 9x_5 - 5x_6 - 8x_7 - 9x_8 - 6x_9 + 4x_{10} + 7x_{11} + 5x_{12} &= 25 \end{aligned} \right\}$$

В матричной форме система уравнений будет выглядеть таким образом:

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 & -6 & -2 & 8 & -10 & 9 & -11 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & -4 & 5 & 6 & 3 & -9 & 3 & -8 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & 5 & -6 & -2 & 4 & -6 & -7 & 9 & -3 & 7 \\ 3 & -4 & 5 & -4 & 7 & -8 & 9 & -6 & 10 & -11 & 8 & -7 \\ 4 & 5 & -6 & 7 & -3 & 5 & -7 & 9 & -3 & 4 & -5 & 9 \\ -6 & 6 & -2 & -8 & 5 & 3 & 6 & -8 & 9 & -10 & 6 & -5 \\ -2 & 3 & 4 & 9 & -7 & 6 & -3 & 4 & 5 & -12 & 7 & -8 \\ 8 & -9 & -6 & -6 & 9 & -8 & 4 & -6 & 6 & -7 & 8 & 9 \\ 10 & 3 & -7 & 10 & -3 & 9 & 5 & 6 & -3 & 4 & 5 & -6 \\ 9 & -8 & 9 & -11 & 4 & -10 & -12 & -7 & 4 & -6 & 7 & 4 \\ -11 & 4 & -3 & 8 & -5 & 6 & 7 & 8 & 5 & 7 & -6 & 7 \\ 12 & -2 & 7 & -7 & 9 & -5 & -8 & 9 & -6 & 4 & 7 & 5 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 9 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \\ 19 \\ -4 \\ 6 \\ 2 \\ 13 \\ -17 \\ 27 \\ 25 \end{array} \right)$$

Применяя к этой системы составленную программу, получаем идеально точное решение.

Проверка решения системы алгебраических уравнений, матрица которой является ленточной.

Здесь тоже составляем систему алгебраических уравнений, корни которой являются единицами, а основная матрица - ленточной.

$$\left. \begin{aligned}
 x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 + 0x_{10} + 0x_{11} + 0x_{12} &= 9 \\
 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 + 0x_{10} + 0x_{11} + 0x_{12} &= 12 \\
 -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 6x_5 - 2x_6 + 4x_7 + 0x_8 + 0x_9 + 0x_{10} + 0x_{11} + 0x_{12} &= 5 \\
 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 7x_5 - 8x_6 + 9x_7 - 6x_8 + 0x_9 + 0x_{10} + 0x_{11} + 0x_{12} &= 2 \\
 4x_1 + 5x_2 - 6x_3 + 7x_4 - 3x_5 + 5x_6 - 7x_7 + 9x_8 - 3x_9 + 0x_{10} + 0x_{11} + 0x_{12} &= 19 \\
 0x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 8x_4 + 5x_5 - 3x_6 + 6x_7 - 8x_8 + 9x_9 - 10x_{10} + 0x_{11} + 0x_{12} &= -4 \\
 0x_1 + 0x_2 + 4x_3 + 9x_4 - 7x_5 + 6x_6 - 3x_7 + 4x_8 + 5x_9 - 12x_{10} + 7x_{11} + 0x_{12} &= 6 \\
 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 6x_4 + 9x_5 - 8x_6 + 4x_7 - 6x_8 + 6x_9 - 7x_{10} + 8x_{11} + 9x_{12} &= 2 \\
 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 - 3x_5 + 9x_6 + 5x_7 + 6x_8 - 3x_9 + 4x_{10} + 5x_{11} - 6x_{12} &= 13 \\
 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - 10x_6 - 12x_7 - 7x_8 + 4x_9 - 6x_{10} + 7x_{11} + 4x_{12} &= -17 \\
 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 7x_7 + 8x_8 + 5x_9 + 7x_{10} - 6x_{11} + 7x_{12} &= 27 \\
 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 9x_8 - 6x_9 + 4x_{10} - 7x_{11} + 5x_{12} &= 25
 \end{aligned} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc}
 1 & 2 & -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 2 & 1 & 2 & -4 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 2 & 3 & 5 & -6 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 3 & -4 & 5 & -4 & 7 & -8 & 9 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 4 & 5 & -6 & 7 & -3 & 5 & -7 & 9 & -3 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 6 & -2 & -8 & 5 & 3 & 6 & -8 & 9 & -10 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 4 & 9 & -7 & 6 & -3 & 4 & 5 & -12 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -6 & 9 & -8 & 4 & -6 & 6 & -7 & 8 & 9 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 9 & 5 & 6 & -3 & 4 & 5 & -6 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & -12 & -7 & 4 & -6 & 7 & 4 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 8 & 5 & 7 & -6 & 7 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & -6 & 4 & 7 & 5
 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 9 \\ 12 \\ 5 \\ 2 \\ 19 \\ -4 \\ 6 \\ 2 \\ 13 \\ -17 \\ 27 \\ 25 \end{array} \right)$$

И в этом случае применения составленной программы дает идеально точное решение.

Чтобы продолжить проверку алгоритма, рассмотрим пример на решение системы комплексных алгебраических уравнений методом

исключения Гаусса. В этом случае подпрограмма для решения систем уравнений будет несколько иной, нежели в случае вещественной системы алгебраических уравнений, т.е.

$$\begin{pmatrix} 1+i & 2+i & 1-i & 0 & 0 \\ 2+i & 1-2i & 3-i & 4 & 0 \\ 1-i & 3-i & 2+i & 1+i & 1+i \\ 0 & 0 & 2-i & 3+i & 1 \\ 0 & 0 & 1+i & 1 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2-3i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.5.1)$$

где $\bar{x} = x_i + ix_i^*$

Решая данную систему уравнений, получим

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15159 & +i & 0,32274 \\ 0,2248 & -i & 0,20725 \\ -0,35726 & -i & 0,79347 \\ 0,67021 & +i & 0,54553 \\ -0,85531 & -i & 0,25111 \end{pmatrix}$$

Подставив полученные решения в исходную систему уравнений, можно убедиться, что эти результаты полностью удовлетворяют системе уравнений и обращают ее в тождество.

Для проверки правильности формирования матрицы жесткости решаем простой пример, который приведен в работе [12] на стр. 495. Приведем значения перемещений, полученные при рабиении треугольной пластины, работающей на растяжение, на треугольные конечные элементы,.

Таблица 1.5.1

Значения перемещений по книге О.Зенкевича		Результаты, полученные автором	
u	v	u	v
0,0000	0,0000	0,00000	0,00000
1,0941	17,7565	1,09411	17,75647
-1,0941	17,7565	-1,09411	17,75647
0,0000	0,0000	0,00000	0,00000
-1,6412	16,6785	-1,64116	16,67852
0,0000	0,0000	0,00000	0,00000
1,6412	16,6785	1,64116	16,67852
0,8206	25,3126	0,82058	25,31266
-0,8206	25,3126	-0,82058	25,31266
0,0000	44,4729	0,00000	44,47295

Из таблицы 1.5.1 видно, что результаты полностью совпадают, и этим подтверждается правильность формирования матрицы жесткости. Основной этап проверки алгоритма и программы-решения задачи о распространении волн в грунтах от штампа, расположенного на поверхности грунта, и сопоставления полученных численных результатов с известным решением. Такая задача была решена в работе [1], где получено аналитическое выражение для асимптотического решения, которое найдено с помощью решения задачи Лэмба, Там же приводятся результаты экспериментального исследования.

Авторами работ [13, 20] эта задача решена при таких же исходных данных, Площадь подошвы штампа $F = 65,6 \text{ м}^2$; коэффициент упругого равномерного сжатия грунта $C_z = 6,0 \cdot 10^4 \text{ кН/м}$; амплитуда вертикальных колебаний штампа $A_z = 0,85 \cdot 10^{-3} \text{ м}$. Частота вертикальных колебаний штампа $\theta = 70 \text{ сек}$; скорость распространения поперечных волн $V_s = 100 \text{ м/сек}$; модуль сдвига для грунта $\sigma = 17 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2$

$$[M] \{\ddot{u}\} + (1 - R^*) [K] \{u\} = \{P(t)\} \quad (1.5.2)$$

где R^* - интегральный оператор Вольтера.

$$R^* u(t) = \int_0^1 R(t - \tau) u(\tau) d\tau$$

Здесь предполагается, что колебания системы происходят гармонически по времени, поэтому уравнение принимает вид:

$$[\bar{K}] \{\bar{U}\} = \{\bar{P}\} \quad (1.5.3)$$

где $\{\bar{U}\}$ - вектор амплитуд колебания системы;

$\{\bar{P}\}$ - вектор амплитуд внешних нагрузок.

Подробное описание применения метода к бесконечным системам и выбора граничных условий приводится в следующих параграфах. Результаты численных расчетов приведены на рисунках 1.5.1, 1.5.2. Пунктирной линией показан график асимптотического решения, точки соответствуют результатам опытного исследования. После произведения расчетов для различных значений γ обнаружилось, что максимальные приближения к опытными данным наблюдаются при значении $\gamma = 0,001$

Анализ графиков показывает, что результаты, полученные численным методом, более соответствуют результатам эксперимента, нежели полученные асимптотическим решением.

2.1. Исследование эффективности различных виброзащитных систем, устраиваемых в грунте.

Особенностью вибраций, возникающих от прохождения поездов метрополитена, железнодорожного транспорта и трамваев является большая амплитуда колебаний источника возмущения. Поэтому такие вибрации оказывают ощутимое влияние на сооружения, находящиеся вблизи трассы. Устранение вибраций в сооружениях от вредных воздействий является актуальной задачей современного градостроительства.

Проблема защиты зданий от вибраций, возникающих при движении поездов метрополитена мелкого заложения в таких крупных городах как, например, Ташкент. Спектральный состав этих вибраций находится в пределах от 5 до 100 Гц, т.е. достигает уровня, ощутимого для людей [2]. Строительство жилых зданий разрешено на расстоянии не ближе, чем в 40 м от тоннеля; при более близком расположении уровень вибраций следует определять расчетом и, в случае необходимости, разрабатывать виброзащитные устройства [2]. Снижение уровня вибраций, распространяющихся в грунтах от прохождения поездов метрополитена мелкого заложения, осуществляется различными способами [3,5,9,14].

В последние годы за рубежом для борьбы с шумом и вибрациями, вызванными прохождением поездов метрополитена, успешно используют различные упругие демпфирующие прокладки между верхним строением пути и летком тоннеля [25]

В работах [6,9] исследовались вибрации в тоннелях с виброизолированным основанием путей.

Одним из направлений борьбы с шумом и вибрацией, создаваемых в жилых застройках поездами метрополитена мелкого заложения, служит применение утяжеленных тоннельных обделок. В работе [6] приводятся результаты экспериментального исследования по уменьшению уровня вибраций с помощью утяжеленных тоннельных обделок. Такие виды обделок можно применять на стадии строительства метрополитена. Рациональным методом уменьшения уровня вибраций в зданиях, расположенных вблизи трассы действующих метрополитенов, является устройство различных виброзащитных экранов в грунте между тоннелем метрополитена и зданием.

В работах [9,11] теоретически исследуется эффективность использования различных железобетонных и вязкоупругих преград, а также различных траншей на пути волны, распространяющейся от движения поездов метрополитена мелкого заложения. Показано, что существенное уменьшение колебаний поверхности грунта за экраном. Эти результаты получены при использовании модели грунта с диссипацией, пропорциональной жесткости.

Для уменьшения уровня вибраций сооружений рекомендуется также оградить сооружение от передачи ему энергии упругих волн, распространяющихся в грунте, путем устройства рвов с засыпкой и без

засыпки, обычных шпунтовых ограждений или ограждений специальной конструкции, созданием уплотненных зон и т.п.

В работе [8] экспериментально исследованы виброзащитные системы типа шпунтовых ограждений и рвов для защиты зданий от вибраций распространяющихся от фундаментов под машинами. В результате исследований сделан вывод, что при низкочастотном режиме эти ограждения малоэффективны.

В работах [20,23] теоретически и экспериментально исследована защита сооружений от поверхностных Рэлеевских волн различными виброзащитными системами. Получено удовлетворительное уменьшение амплитуд (интенсивности) волн. В работе [11] рекомендуется защита сооружений от взрывных волн путем создания экранирующей зоны типа цепочки скважин на пути распространения сейсмических волн. Но такая виброзащитная система не эффективна для длительного использования .

Как показывает литературный обзор, работы, посвященные снижению уровня вибраций от движения поездов метрополитена мелкого заложения, железнодорожного транспорта и трамваев, в основном носят экспериментальный характер.

Основные требования к виброзащитным системам определяются условиями их эксплуатации. Общее в этих требованиях – сравнительно небольшие габаритные размеры, стабильность виброзащитных свойств, простота в изготовлении, надежность в эксплуатации и низкая стоимость. Упругие и демпфирующие характеристики виброзащитных систем не должны существенно зависеть от изменения окружающей температуры, условий среды, влажности и других факторов.

Под требованиями подразумевают предельно допустимые уровни вибраций, которые нельзя превысить без нарушения социально – бытовых и экологических условий. Требования устанавливаются без учета возможности их выполнения в данный момент. Под нормами понимают установленные с помощью статических методов реально допустимые уровни вибрации; выполнение норм является обязательным и обеспечивает нормальную жизнь людей, функционирование и работоспособность оборудования.

В данной главе работы теоретически изучаются колебания, распространяющиеся от движения поездов метрополитена мелкого заложения, железнодорожного транспорта и трамваев, предлагаются различные виброзащитные системы путем устройства препятствий между источником возмущения и защищаемым объектом. В качестве предлагаемых пассивных виброизоляционных систем используются различные виды преград и исследуется их эффективность.

2.2. Некоторые сведения о санитарных нормах и характере вибрации.

Допустимый уровень колебаний сооружений, подвергающихся динамическим воздействиям, определяется: а) физиологическим воздействием на людей; б) несущей способностью (прочностью, устойчивостью и долговечностью) колеблющихся конструкций; в) влиянием колебаний на производственный процесс (технологическими условиями.)

Иногда к этим трем условиям добавляют четвертое, ограничивающее колебания предельно допустимыми динамическими прогибами и деформациями.

Нормирование допустимого уровня колебаний представляет сложную проблему. Многие вопросы нормирования освещены в литературе еще недостаточно полно. В ряде случаев данные о допустимых колебаниях отсутствуют, а имеющиеся носят качественный или предварительный характер.

Менее обоснованными являются данные, зависящие от санитарно-гигиенических условий, поскольку они определяются особенностями воздействия колебаний на людей и зависят от индивидуального характера их восприятия.

Вопрос заключается не только в установлении безопасного уровня колебаний, не вызывающего того или иного заболевания человека, но и в нахождении уровня колебаний, обеспечивающего нормальные санитарно – гигиенические условия работы человека без снижения производительности труда с учетом профессиональной специфики работы. Несомненно, что допустимые уровни колебаний для производственных предприятий с различными режимами работы, проектных и научно – исследовательских институтов, медицинских и учебных учреждений не могут быть одинаковыми. Совершенно обособленно вопрос о допустимом уровне колебаний в жилых, зрелищных, административных зданиях.

Многочисленные обследования колебаний эксплуатируемых зданий и сооружений, а также расчеты строительных конструкций на прочность при колебаниях показали, что в большинстве случаев необходимость уменьшения уровня колебаний конструкций, на которых находятся люди, определяется физиологическим воздействием колебаний на людей, а не влиянием колебаний на прочность конструкций.

Допустимый уровень колебаний строительных конструкций, обусловленный санитарно-гигиеническими условиями, определяется характером и интенсивностью воздействия колебаний на людей. Превышение допустимого уровня колебаний может вызвать повышенное утомление, снизить производительность труда и даже вызвать вибрационную болезнь.

В последние годы действие механических вибраций на люди по аналогии с акустическим действием звука оценивается с помощью децибельной шкалы.

Децибел не физическая величина, а математическое безразмерное понятие, характеризующее отношение двух независимых одноименных величин, принципиально самых различных, независимо от их природы.

В санитарных нормах [18,22,23] уровень допускаемых механических колебаний конструкций определяется в децибелах для среднеквадратических значений смещения (S), скорости (V) и ускорения (W) по формулам:

$$\text{Уровень смещения } L_s = 20 \lg S_{\text{ср. кв}} / S_0 \quad (2.2.1)$$

$$\text{Уровень скорости } L_v = 20 \lg V_{\text{ср. кв}} / V_0 \quad (2.2.2)$$

$$\text{Уровень ускорения } L_w = 20 \lg W_{\text{ср. кв}} / W_0 \quad (2.2.3)$$

Здесь $S_0=8 \cdot 10^{-9}$ пороговое смещения при колебаниях, мм; $V_0=5 \cdot 10^{-5}$ - то же скорости колебаний, мм/с; $W_0=3 \cdot 10^{-1}$ - то же, ускорения колебаний, мм/с, принятые в нормах [22].

При этом под среднеквадратичным значением некоторой непрерывной периодической функции $A(t)$ Периодом T понимается значение

$$A = \sqrt{(1/T) \int_0^T [A(t)]^2 dt}$$

Для гармонической функции ее среднеквадратичное значение $A_{\text{ср. кв}} = A_{\text{max}} / \sqrt{2}$, где A_{max} – амплитудное значение функции.

К достоинствам децибельной системы относятся: а) универсальность, т.е. возможность использования при оценке различных параметров и явлений; б) возможность отображения числами первой сотни явлений, характеризующих большими перепадами числовых параметров.

Перерасчет абсолютного среднеквадратичного среднеквадратичного значения того или иного параметра колебаний в уровень с дБ и наоборот производится с помощью таблиц десятичных логарифмов (2.2.1-2.2.3) или с помощью графиков рис. 2.2.1.

Данные о характере восприятия человеком гармонических колебаний впервые были введены в строительные нормы проектирования и расчета несущих конструкций зданий под машины с динамическими нагрузками в 1954 г. Е.С.Сорокиным. Качественная оценка восприятия колебаний, приведенная в нормах [18] и работе [39], позволила проектировать промышленные сооружения с безопасным для здоровья людей уровнем колебаний. При этом практика проектирования промышленных сооружений показала, что несмотря на отсутствие указаний о допустимых параметрах колебаний, как правило, назначались разумные границы допускаемых колебаний, которые в основном получили подтверждение в утвержденных Минздравом ССР в 1959 г. «Санитарных нормах проектирования промышленных предприятий» В настоящее время колебания рабочих мест в производственных помещениях ограничиваются требованиями [23], а также [22]. Между данными, до пускаемыми в [22] и [23], имеются небольшие расхождения амплитуд гармонических колебаний, что объясняется различием интерполяционных формул между основными базовыми параметрами. В практической работе необходимо пользоваться данными [23].

Качественные оценки характера действия колебаний на людей не утратили своего значения до настоящего времени в связи с отсутствием норм для сооружений. Нормы ориентированы на применение их в практике санитарно-эпидемиологических станций.

Обозначая амплитуду гармонических колебаний строительной конструкции, на которой находятся люди, Z_0 , а допускаемую по санитарно-гигиеническим условиям труда амплитуду колебаний a_0 , получаем условие, обеспечивающее безопасное для здоровья людей пребывание на колеблющейся конструкции

$$Z_0 \leq [a_0] \quad (2.2.5)$$

Амплитуда скорости гармонических колебаний определяется выражением

$$V_{\max} = 2\pi n a \quad (2.2.6)$$

Таблица 2.2.1. Характеристики воздействия гармонических колебаний на людей в зависимости от скорости и ускорения с амплитудой перемещений не более 1 мм.

Таблица 2.2.1

Характеристика Воздействий	Для частот 1-10 Гц			Для частот 10-100Гц		
	Верхнее значение ускорения Колебаний			Верхнее значение скорости Колебаний		
	Пиковое (амплитудное) W_{\max} мм/с	Средне-квадратичное $W_{\text{ср.кв}}$ мм/с	Уровень Ускорения L_{ω} дБ	Пиковое (амплитудное) W_{\max} Мм/с	Средне-квадратичное $W_{\text{ср.кв}}$ мм/с	Уровень Ускорения L_{ω} дБ
Неощутимы	10	7,1	27,4	0,16	0,113	67,1
Слабо ощутимы	40	28,3	39,5	0,64	0,452	79,1
Хорошо ощутимы	125	88,4	49,4	2	1,41	89
Сильно ощутимы	400	283	59,6	6,4	4,52	99,1
Вредны при длительном Воздействии	1000	707	67,5	16	11,3	107,1
Безусловно вредны	Более 1000	Более 707	Более 67,5	Более 16	Более 11,3	Более 107,1

Амплитуда ускорения

$$W = (2\pi n)^2 a \quad (2.2.7)$$

где a - амплитуда колебаний;
 n - частота колебаний.

Таблица 2.2.3

Средне геометрические и граничные (даны в скобах) частоты октавных полос, Гц	Частота Гц	Амплитуда пиковое значение) перемещения при гармонически х колебаниях, мм	Среднеквадратичное значение Скорости колебаний	
			Абсолютное значение, мм/сек	Уровень в дБ относительно $5 \cdot 10^{-5}$ мм

Данные табл. 2.2.1 позволяют по формулам (2.2.6) и (2.2.7) вычислить гармонические колебания амплитуды колебаний, соответствующие тому или иному характеру воздействия колебаний на людей.

Таблица 2.2.3. Допустимые параметры колебаний рабочих мест в производственных помещениях (по СН 245-71)

Характеристики Воздействия гармонических колебаний на людей по октавным полосам СН 247-71 в зависимости от уровня скорости L_0 в децибелах (дБ) при амплитудах колебаний не более 1 мм.

Таблица 2.2.4

Характеристика ощущения кол.	Частота, Гц					
	<u>2</u> (1,4-2,8)	<u>4</u> (2,8-5,6)	<u>8</u> (5,6-11,2)	<u>16</u> (11,2-22,4)	<u>31,5</u> (22,4-45)	<u>63</u> (45-90)
Не ощутимы	<u>81</u> - 84,1-78,1	<u>75</u> 78,1-72,1	<u>69</u> 72,1-67,1	67,1	67,1	67,1
Слабо ощутимы	<u>93,1</u> - 96,2-90,2	<u>87</u> 90,2-84,1	<u>81,1</u> - 84,1-79,1	79,1	79,1	79,1
Хорошо ощутимы	<u>103</u> - 106,1-100,1	<u>97</u> 100,1-94	<u>91</u> 94-87	89	89	89
Сильно ощутимы	<u>113,1</u> - 116,2-110,2	<u>107</u> - 110,2-104,1	<u>101,1</u> - 104,1-99,1	99,1	99,1	99,1

Вредны при длит. воздейст- вии	<u>121,1</u> - 124,1- 118,1	<u>115</u> - 118,1- 112,1	<u>109</u> - 112,1- 107,1	107,1	107,1	107,1
Безусловн о вредны	<u>Более12</u> <u>1,1</u> 124,1- 118,1	<u>более115</u> <u>118,1-</u> 11,1	<u>Более109</u> <u>112,1-</u> 107,1	Более 107,1	Более 107,1	Более 107,1

В большинстве случаев требования уменьшения колебаний конструкции, где находятся люди, определяется характером физиологического действия колебаний, т.е. нарушением условия (3.1.5)

С проблемой обеспечения безопасного для здоровья людей санитарно- гигиенического уровня колебаний приходится встречаться чаще, чем с проблемой обеспечения прочности конструкции при действии динамических нагрузок. Это объясняется тем, что человек чрезвычайно чувствителен к механическим колебаниям. Он способен ощущать весьма малые колебания с амплитудой порядка 0,0001-0,001 мм. При этом, чем больше частота колебаний, тем сильнее человек воспринимает меньшую амплитуду. При частоте 100 кол./мин. человек почти не ощущает колебания с амплитудой 0,1 мм, а при частоте 3000 кол./мин. он ощущает колебания с амплитудой 0,001 мм [2]. Систематическое и продолжительное действие повышенных колебаний, превышающих некоторый допустимый уровень, оказывает вредное влияние на здоровье и, в отдельных случаях, может привести к заболеванию вибрационной болезнью. В связи с этим необходимо при проектировании зданий и сооружений учитывать динамический характер действия нагрузок и принимать меры по уменьшению вредных колебаний.

Известные экспериментальные данные о влиянии колебаний на людей относятся к колебаниям со сравнительно низким частотным диапазоном от 1 до 100 Гц [2] . Это объясняется тем, что частоты изменения динамических нагрузок от применяемого промышленного оборудования находится, как правило, в этом частотном диапазоне. Несмотря на многочисленные исследования влияния колебаний на людей, оно еще разработано недостаточно и требует дальнейшего его изучения, а также установления допустимых колебаний для различных условий жизни человека (производственных, жилищно-бытовых и т.п.)

Имеющиеся экспериментальные данные [2] позволяют в ряде случаев определить характер восприятия колебаний человеком, а также установить безопасные для здоровья границы колебаний.

Характер восприятия колебаний людьми обычно определяется несколькими категориями чувствительности, а именно: неощутимые колебания, слабо ощутимые, хорошо ощутимые, сильно ощутимые, вредные при кратковременном действии.

Чувствительность людей к колебаниям изменяется в довольно широких пределах и поэтому результаты различных исследователей взаимно

отличаются и показывают лишь общую тенденцию к тем или иным показателям. При этом в качестве критериев оценки воздействия колебаний на людей исследователями предлагаются различные характеристики: амплитуда перемещения a в мм, скорость $V_{\max} = a \cdot \omega$ в мм/с, ускорение $W_{\max} = a \cdot \omega^2$ в мм/с², скорость изменения ускорения $U_{\max} = a \cdot \omega^3$ в мм/с³ и некоторые другие. Здесь ω – круговая частота колебаний в сек⁻¹.

В нормах проектирования строительных конструкций, подвергающихся действию динамических нагрузок [18], характер восприятия людьми гармонических колебаний для частот менее 10 Гц определяется амплитудой ускорения W_{\max} , а для частот равных и более 10 Гц амплитудой скорости V_{\max} (табл. 2.2.1).

Одним из основных нормативных документов, определяющих допустимый уровень колебаний рабочих мест в производственных условиях в настоящее время являются [22]. В нормах в диапазоне частот 1,4-90 Гц рассматриваются три вида колебаний: гармонические, полигармонические и колебания со сплошным частотным спектром. Этот диапазон делится на шесть частей (октавных полос) (табл. 2.2.2) В нормах принят принцип независимости влияния на людей механических колебаний различных октавных полос, т.е. колебания считаются допустимыми, если в каждой из октавных полос параметры колебаний не превышают нормативных. (Впервые этот принцип в нормы был введен Институтом гигиены им. Ф.Ф. Эрисмана в 1966 г. Аналогичный принцип применяется, как известно, при нормировании шума, частотный спектр которого изменяется от 16 Гц до 15-16 кГц. Принимая указанный принцип также и для механических колебаний со спектром 1-100 Гц за обоснованный биологами и врачами-гигиенистами факт, нельзя не отметить его дискуссионности).

В качестве допустимых параметров в нормах принимаются: при гармонических колебаниях – амплитуда перемещения, а при полигармонических колебаниях и со сплошным частотным спектром – среднеквадратичной скорости в нормах дано значение ее уровня L в дБ. Для жилых помещений допустимые уровни колебаний определяются в децибелах для смещения, скорости и ускорения в октавных полосах, также в предположении независимости влияния колебаний различных октав (табл. 2.2.4).

Таблица 2.2.5. Допустимые нормативные уровни колебаний в жилых помещениях.

Среднегеометрические частоты октавных полос, дБ	2	4	8	16	31,5	63
Уровень скорости колебаний	79	73	67	67	67	67
Уровень ускорения колебания	25	25	25	31	37	43
Уровень смещения колебания	133	121	109	103	97	91

2.3 Железобетонные виброзащитные системы.

Здесь мы будем рассматривать защиту сооружений от вибрации, распространяющейся от тоннелей метрополитена мелкого заложения, различными бетонными преградами. Для этого необходимый участок дискретизируем на конечные элементы. Записываем уравнение равновесия для установившегося режима без временного множителя

$$[\bar{K}]\{\bar{u}\} = \{\bar{P}\}$$

Гибкость метода конечных элементов позволяет формировать матрицу $[\bar{K}]$ с учетом локальной неоднородности около тоннеля, а также железобетонного включения на пути волны.

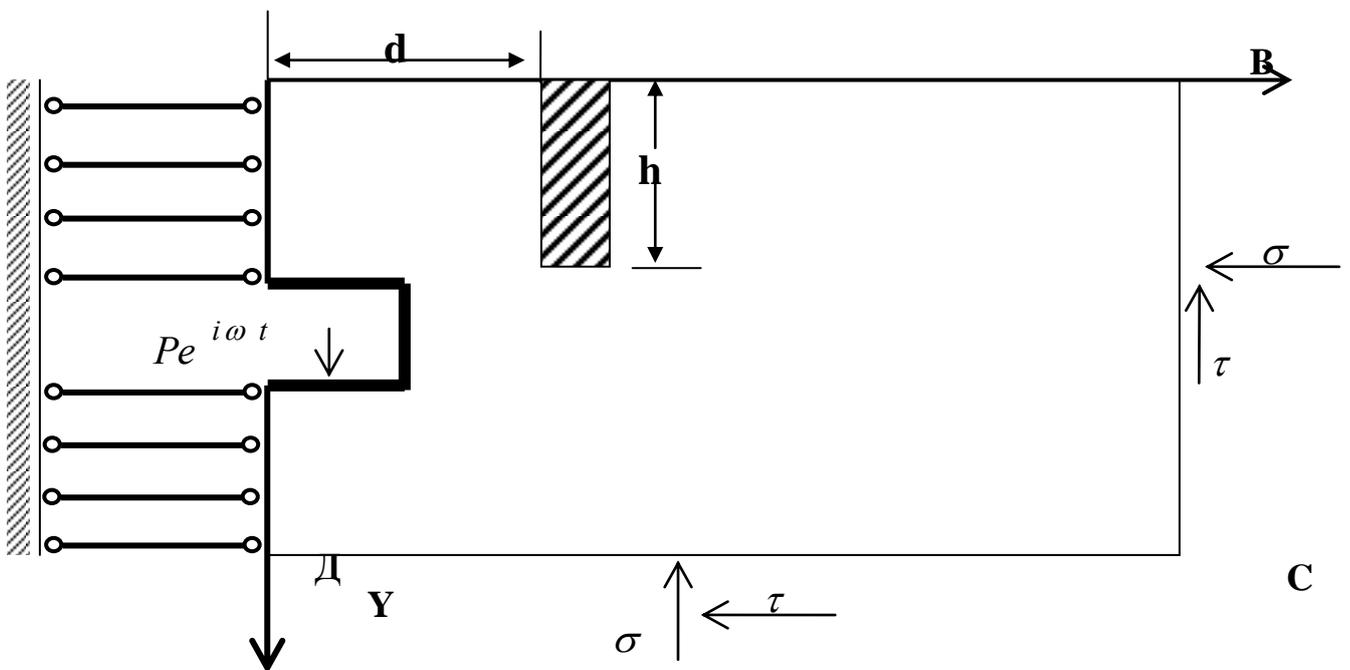


Рис. 2.3.1 Схема устройства железобетонной преграды.

Типы различных преград, устраиваемых в грунте, показаны на рисунке 2.3.1

Задачу решаем при следующих исходных данных грунта:

$$E_1 = 2,85 \cdot 10^8 \text{ Па}, \nu = 0,35$$

Параметры тоннеля и железобетонной преграды принимаем

$$E_{ж.б.} = 2,85 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \nu = 0,15$$

1. Рассмотрим преграду типа А (рис.2.3.1), т.е. вертикальную бетонную стену толщиной 1 м и высотой 7 м, уложенную в траншее параллельно боковой стене тоннеля.

На рисунках 2.3.3, 2.3.4 показаны изменения огибающих максимальных значений амплитуд колебаний поверхности грунта в зависимости от расстояния до оси тоннеля при значениях частоты нагрузки $f=30,40,50$ Гц. Здесь пунктирной линией показаны изменения модуля амплитуды на свободной границе полуплоскости, когда отсутствует преграда. Преграда находится в 6 м от тоннеля.

Сравнение результатов показывает, что при частоте $f=30$ Гц наблюдается увеличение амплитуды на 2,5 % относительно амплитуды колебаний на свободной границе полуплоскости, полученной без учета преграды. После преграды амплитуда свободной границы уменьшается на 41 %, но после прохождения расстояния 35 м эта разница почти исчезает.

При частоте $f=40$ Гц амплитуда колебания грунта над тоннелем в случае наложения преграды уменьшается на 2 %, а после преграды на 66 %. После прохождения расстояния 30 м эта разница уменьшается до 50 %.

При частоте $f=50$ Гц амплитуда над тоннелем опять увеличивается, а после преграды уменьшается на 56 %. После прохождения 22 м волна затухает. Это явление в случае без преграды происходит в 30 м от тоннеля.

2. Рассмотрим преграду типа Б, т.е. бетонную плиту шириной 7 м и толщиной 1 м, уложенную на горизонтальную поверхность полупространства.

На рисунках 2.3.5, 2.3.6 показаны изменения амплитуды на свободной границе полуплоскости. Плита уложена, начиная с 3 м от тоннеля. В этом случае наблюдается значительное уменьшение амплитуды в месте, где уложена плита.

При частоте нагрузки $f=20$ Гц бетонная плита снижает амплитуду на свободной границе по всей протяженности, примерно, на 50 %. При $f=30$ Гц наблюдается резонансное явление, а при $f=40$ Гц амплитуда над тоннелем увеличивается на 18 %. В месте уложения плиты она уменьшается на 70 %, а затем изменяется более монотонно. Но после 18 м от тоннеля эффект преграды сводится к минимуму. Такое же явление можно наблюдать и при частоте нагрузки $f=50$ Гц.

3. Рассмотрим случай распространения вибрации с учетом преграды типа В.

На рисунках 2.3.6, 2.3.7. приведены результаты вычислений. Детально изучать кривые изменения амплитуды на поверхности грунта мы не будем, так как этот тип преграды снижает колебание только около себя. После некоторого расстояния эффект такой преграды минимальный.

В заключение можно сказать, что наибольший эффект дает бетонная преграда типа А. С увеличением частоты нагрузки возрастает эффект бетонной стены. Бетонная преграда типа Б дает хороший эффект лишь при низких частотах. Эффект преграды типа В почти не зависит от частоты нагрузки.

2.4 Преграда-щель.

Решение задачи методом конечных элементов о снижении колебаний, распространяющихся в грунтах от тоннелей метрополитена мелкого заложения, с помощью виброзащитных систем типа щелей трудностей не представляет. Для этого при формировании матриц жесткости и массы необходимо приравнять к нулю толщину элементов, находящихся там, где предполагается щель.

Предположим, что на пути распространения волн от тоннелей вырыта траншея шириной 1 м и глубиной 7 м (тип преграды Г, рис. 2.3.1.). Результаты, полученные с учетом этой траншеи, показаны на рисунках 2.4.1-2.4.9. Для сравнения пунктирными линиями даны изменения модуля амплитуды на поверхности грунта, полученные без учета траншеи.

Анализ изменения амплитуды по координате при частоте $f=10$ Гц. Траншея находится в 6,5 м от тоннеля. Перед траншеей наблюдается увеличение амплитуды в 4 раза относительно амплитуды, полученной без учета траншеи. После прохождения траншеи изменение одной амплитуды относительно, полученной без учета траншеи, происходит на расстоянии 15-40 м кривые на графике сливаются, т.е. эффект траншеи исчезает.

При частоте нагрузки $f=15$ Гц преграда-щель даёт очень хороший эффект, хотя перед траншеей амплитуда грунта увеличивается за счет отраженных волн, после прохождения щели амплитуда уменьшается в 10-12 раз относительно амплитуды, полученной без учета траншеи.

Изменение амплитуды поверхности грунта при частоте нагрузки $f=20$ Гц. Здесь до траншеи наблюдается явление, близкое к резонансному, а за траншеей происходит снижение амплитуды на 25%. На расстоянии 40 м амплитуда снижается в 2 раза.

При частоте нагрузки $f=25$ Гц перед траншеей амплитуда увеличивается за счет отражения от стенки щели на 70%, а после прохождения преграды амплитуда снижается на 65%. На расстоянии 40 м амплитуда снижается в 6 раз.

При частоте нагрузки $f=30$ Гц (рис.2.4.2) перед траншеей амплитуда увеличивается более чем в 2 раза, а после траншеи она снижается на 73%. На расстоянии 35 м от тоннеля колебание полностью поглощается.

При частоте нагрузки $f=35$ Гц (рис.2.4.3) после траншеи наблюдается снижение амплитуды колебания в 2 раза, а на расстоянии 33 м от тоннеля колебание на поверхности грунта полностью исчезает.

При частоте $f=40$ Гц снижение колебания составляет 50% амплитуды, полученной без учета преграды. В 20 м от тоннеля колебание полностью поглощается. При частотах $f=45$ и 50 Гц преграда-щель даёт примерно такой же эффект.

Приведённые анализы показывают, что преграда-щель даёт очень хороший эффект при всех частотах, кроме $f=10$ Гц, снижение колебаний колеблется от 50 до 100%.

Исследования показывают, что траншеи имеют большую способность по снижению вибраций от прохождения поездов метрополитена мелкого

заложения. Однако траншеи не устойчивы к длительному периоду непрерывных воздействий вибрации, поэтому они не соответствуют постоянным изоляционным мероприятиям.

1. Допустим, что щель запломбирована бетонной крышкой в виде буквы П, толщина крышки – 0,5 м.

По результатам видно, что амплитуда снижается только около преграды, а через некоторое расстояние разница незначительная, т.е. крышка, которой мы закрепляем щель, снижает изоляционную способность щели.

2. Рассмотрим теперь закрепление щели так, как показано на схеме Д (рис.2.3.1). Считается, что стенки и дно щели закреплены бетоном толщиной 0,5 м. Результаты этого случая показаны на рисунке 2.4.6 .

Сравнение модулей амплитуд, полученных с учетом типа Д и без учета её, показывает, что при частоте нагрузки $f=30$ Гц после преграды амплитуда снижается в 2 раза, но постепенно эта разница уменьшается и после прохождения 35 м от тоннеля эффект преграды не замечается.

При частоте нагрузки $f=40$ Гц после преграды амплитуда уменьшается на 60%, а на расстоянии 30 м от тоннеля колебание затухает.

При частоте нагрузки $f=50$ Гц после 50 м за преградой амплитуда уменьшается на 66%, и в 23 м от тоннеля колебания поглощаются.

Во всех графиках не наблюдались скачки перед преградой, как это имело место в случае преграды щели без закрепления.

3. Теперь рассмотрим вариант закрепления щели, показанный на схеме Е, т.е. закрепляются две вертикальные стены щели, а дно остаётся без изменения. Результаты, полученные с учётом такой преграды, показаны на рисунках 2.4.7, 2.4.8. Сопоставление результатов показывает, что при частоте $f=30$ Гц такая преграда снижает колебание на 73%, и оно полностью поглощается в 37 м от тоннеля.

При частоте $f=40$ Гц амплитуда колебания грунта после преграды снижается на 81%, и колебание полностью поглощается на расстоянии 20 м от тоннеля; при частоте нагрузки $f=50$ Гц преграда типа Е снижает колебание на 94% и оно сразу же поглощается. И в этом случае скачок амплитуды перед ней наблюдается.

Как известно, вязкоупругие материалы имеют большую способность по поглощению энергии колебаний.

4. Рассмотрим случай заполнения щели вязкоупругим материалом (тип Ж). Здесь при формировании матрицы жесткости необходимо иметь в виду, что конечные элементы, находящиеся на месте щели, обладают большой вязкостью. В данном случае считаем, что коэффициент демпфирования в даны результаты, полученные для этого случая. Графики показывают, что эффект такой виброзащитной системы имеет локальный характер, и с удалением от неё эффект становится незначительным.

5. Теперь рассмотрим виброзащитную систему типа З, т.е. щель, укрепленную с двух сторон бетонной стеной и заполненную вязкоупругим материалом. Результаты, полученные использованием такой преграды, приведены на рисунках 2.4.9-2.4.10. На рисунке 2.4.9 показано изменение

модуля амплитуды на свободной границе полуплоскости при частоте нагрузки $f=20$ Гц. Здесь снижение амплитуды после преграды составляет 35%, при $f=30$ Гц (рис.2.4.10) уменьшение амплитуды после преграды составляет 60%, в остальных местах –50%, при $f=40$ Гц уменьшение амплитуды за преградой составляет 80% от амплитуды колебания на поверхности грунта без преграды. При $f=50$ Гц наблюдается примерно такое же соотношение.

Исследования показывают, что наиболее эффективна преграда типа Е, поэтому исследуем её несколько подробнее. Интересно узнать, при какой глубине преграда будет самой эффективной. Рассматривались случаи глубины щели от 20 до 8 м, находящейся на расстоянии 7,5 от тоннеля, при распространении гармонической волны от однопутного метрополитена, находящегося на глубине 9 м.

На рис.2.4.11-2.4.13 показаны изменения амплитуды отдельных точек свободной границы полуплоскости, расположенных за преградой, в зависимости от глубины преграды и различных частот нагрузки.

Линия со звёздочками означает изменение амплитуды точки, находящегося на расстоянии от тоннеля $x=8,5$ м, линия с кружочками означает изменение амплитуды точки на расстоянии $x=21$ м, линия с треугольничками означает изменение амплитуды точки, находящейся на расстоянии $x=33,5$ м.

В указанных графиках наблюдается тенденция к увеличению глубины преграды, амплитуды точек уменьшаются, но очень малое изменение наблюдается от 6 м до 8 м. Это приводит к выводу, что преграда типа Е с глубиной 6 м вполне достаточна для защиты от вибраций, возникающих от прохождения поездов в тоннеле, находящемся на глубине 9 м.

В заключении можно сказать, что преграды типа Е и З наиболее стабильно поглощают вибрации, возникающие от прохождения поездов метрополитена. С увеличением частоты и глубины преграды поглощающая способность таких преград растёт. Для конкретного случая, зная глубину заложения тоннеля, можно установить эффективную глубину преграды.

Основные выводы

1. Разработаны метод, алгоритм и программа численного решения сформулированной в диссертации задачи динамической теории упругости об определении перемещений в неоднородной упругой полуплоскости от заглубленного источника, совершающего гармонические колебания. Этот метод служит расчётной схемой для задачи о распространении вибраций в грунте вблизи тоннелей мелкого заложения при движении поездов метрополитена. Программа написана на языке ФОРТРАН, вычисления проведены на IBM .

2. Решены задачи об установившихся вынужденных колебаниях полоской системы «тоннель -грунтовая среда» с учётом внутренней и волновой диссипации для различных грунтовых условий:

- амплитуда вертикальных смещений свободной поверхности грунта существенно зависит от частоты внешних воздействий и немонотонно уменьшается с увеличением расстояния от оси тоннеля

- учёт вязких свойств уменьшает и сглаживает немонотонный характер вертикальных смещений свободной поверхности грунта и, при высокочастотном воздействии, заметно уменьшает уровень вибрационных волн вдали от источника возмущения.

3. С увеличением глубины заложения тоннеля и частоты нагрузки амплитуда колебаний волн над осью симметрии тоннеля и вокруг него значительно уменьшается, и затухание волны происходит быстрее.

4. Предложено использовать различные заглубленные конструкции для уменьшения уровня колебаний, распространяющихся в грунте от тоннелей метрополитена. Исследована эффективность использования этих преград при различных частотах колебаний. Рекомендована к использованию на практике наиболее эффективная из них для условий Ташкентского метрополитена.

5. Предложены различные виды пассивной виброизоляционной системы для уменьшения уровня метрополитена мелкого заложения. Выявлена целесообразность использования преграды, представляющих собой закрепленные бетонными стенами рвы с гасителями или вязкоупругой прослойкой, на всех рассматриваемых частотах внешних воздействий и расстояниях от оси тоннеля.

6. Установлено оптимальное расстояние установки преграды от сооружения, которое составляет 2-6 м при высокочастотном воздействии и увеличивается вплоть до источника по мере включения в спектр внешнего воздействия низких частот.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баркан Д.Д. Динамика оснований и фундаментов. М., Стройиздат, 1948, 411 с.
2. Борщаговский И.Я. Общая вибрация и её влияние на организм человека. М., Медгиз, 1963 с.
3. Буланов Ю.А., Ильичев В.А., Шехтер О.Я. Определение уровня колебаний грунта вблизи тоннеля метрополитена мелкого заложения, имеющего противовибрационную защиту. Тр. ин-та НИИ оснований и подземных сооружений. 1980, вып. 72, с. 16-27.
4. Вовк А.А. и др. Основы динамики грунтов. Киев, «наука думка», 1968, 320 с.
5. Голубцова М.Н., Ильичев В.А., Шахтер О.Я. Колебания многослойного основания от заглубленного вибрационного источника. В кн.: Динамика оснований, фундаментов и подземных сооружений. Материалы V Всесоюзной конф., Ташкент, 8-10 декабря 1981 г., с. 281-283.
6. Гольдман М.Н., Дашевский М.А., Фомичева И.Н. Оценка эффективности виброзащиты жилой застройки утяжелёнными тоннельными обделками. В кн.: Динамика осн. Фундаментов и подземных сооружений. Матер. V Всесоюзн. Конф. Ташкент, 8-10 декабря 1981 г., с. 308-310.
7. Горбунов-Посадов Б.П., Маликова Т.А. Расчет конструкций на упругом основании. М., Стройиздат, 1973, 673 с.
8. Дашевский М.А. Распространения волн при колебаниях тоннелей метро. СМ и РС, 1974, № 6, с. 29-34.
9. Дашевский М.А., Ильичев В.А., Поляков В.С. Экспериментальное исследование системы «тоннель-грунт» с помощью вибратора. В кн.: Динамика оснований фундаментов и подземных сооружений. Материалы V Всесоюзн. конф. Ташкент, 8-10 декабря 1981 г., с. 2877-288.
10. Динамический расчет сооружений на специальные воздействия. Справочник проектировщика. Под ред. Б.Г.Коренева, И.М. Рабиновича. М., Стройиздат, 1981, 215 с.
11. Дорман И.Я., Соловьёв В.С., Хазанов С.Ю. Результаты испытаний строительных виброзащитных конструкций на Московском метрополитене. Материалы V Всесоюзн. конф. «Динамика оснований, фундаментов и подземных сооружений». Ташкент, 8-10 декабря 1981 г., с. 314-316.
12. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М., «Мир», 1975, 541 с.
13. Ильичев В.А. О динамическом расчете фундаментов. В кн.: Основания и фундаменты при сейсмических и динамических воздействиях. М., Стройиздат, 1967, с. 3-26.
14. Ильичев В.А., Юлдашев Ш.С. Результаты численного определения параметров колебания грунта при колебании тоннеля метрополитена

- мелкого заложения. В кн.: «Динамика оснований, фундаментов и подземных сооружений», т.2. Материалы V Всесоюзн. конф. Ташкент, 8-10 декабря 1981 г.
15. Сидоров В.Н., Юлдашев Ш.С., Булгакова М.В. Колебания полуплоскости с внутренним трением. В кн.: Численные методы и алгоритмы. М., ЦНИИСК им. Кучеренко, 1981, с. 135-144.
 16. Справочник по динамике сооружений. Под ред. Б.Г. Коренева. М., Стройиздат, 1984, 304 с.
 17. Юлдашев Ш. С. Расширение расчетной области при решении динамических задач теории упругости методом конечных элементов. ДАН Уз ССР, 1982, N 1, с. 8-10.
 18. Академия Наук СССР, Государственный научно-исследовательский институт машиноведения. Влияние вибраций на организм человека и проблемы защиты. М., «Наука», 1974, 278 с.
 19. Андреева-Галанина Е.И. Вибрационная болезнь. Л., Медгиз, 1961, 867 с.
 20. Забылин М.И., Игольников В.В. Исследование параметров упругих волн, распространяющихся в грунтах от промышленных источников. В сб. «Строительство и архитектура». Изв. №11, с. 30-37.
 21. Коренов Б.Г. и др. Использование динамических гасителей для виброзащиты сооружений, взаимодействующих с грунтом. В кн. Динамика оснований, фундаментов и подземных сооружений. Материалы V Всесоюзн. конф. Ташкент, 8-10 декабря 1981 г., с.331-333.
 22. Санитарные нормы допустимых вибраций в жилых домах (№1304-75). М., изд. Минстерства здравоохранения СССР, 1975, 248 с.
 23. Система стандартов безопасности труда. Вибрация. Общие требования безопасности. ГОСТ 12.1.012-78. М., Стандартгиз, 1978, 230с.
 24. Haupt A. Surface-waves in non-homogeneous half-space. In «dynamic Response and Wave Propagation in Soils». A.A.Balkoma, Rotterdam? 1996, p. 335-368.
 25. Lysmer J., Udaka T, Tsai G-F, Seed H B «Flash-A Computer Program for Approximate 3-D Analysis of Soil-Strbctbre Interaction Probiems», University of California, Berkeley, Report No EERS 75-30, November, 1975.