**ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
PhD.03.30.12.2019.FM.05.04 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

МУҲАММАД АЛ-ХОРАЗМИЙ НОМИДАГИ ТОШКЕНТ АХБОРОТ ТЕХНОЛОГИЯЛАРИ УНИВЕРСИТЕТИ

АЛИҚУЛОВ ЁЛҚИН ҚОДИРОВИЧ

УЧ ЎЛЧОВЛИ ФАЗОДА АРАЛАШ ТИПДАГИ ЮКЛАНГАН ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ТРИКОМИ ВА ГЕЛЛЕРСТЕДТ МАСАЛАЛАРИ

01.01.02 - Дифференциал тенгламалар ва математик физика

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ
бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
АВТОРЕФЕРАТИ**

Фарғона–2022

УДК: 517.956

Физика – математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико – математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophi (PhD) on physical – mathematical sciences

Аликулов Ёлқин Қодирович
Уч ўлчовли фазода аралаш типдаги юкланган тенгламалар учун Трикоми ва Геллерстедт масалалари 3

Аликулов Ёлкин Кодирович
Трёхмерные аналоги задачи Трикоми и Геллерстедта для нагруженных уравнений смешанного типа 23

Alikulov Yolkin Kodirovich
Three-dimensional analogs of the Tricomi and Gellerstedt problem for loaded equations of mixed type 43

Эълон қилинган ишлар рўйхати
Список опубликованных работ
List of published works 47

**ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
PhD.03.30.12.2019.FM.05.04 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

МУҲАММАД АЛ-ХОРАЗМИЙ НОМИДАГИ ТОШКЕНТ АХБОРОТ ТЕХНОЛОГИЯЛАРИ УНИВЕРСИТЕТИ

АЛИҚУЛОВ ЁЛҚИН ҚОДИРОВИЧ

УЧ ЎЛЧОВЛИ ФАЗОДА АРАЛАШ ТИПДАГИ ЮКЛАНГАН ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ТРИКОМИ ВА ГЕЛЛЕРСТЕДТ МАСАЛАЛАРИ

01.01.02 - Дифференциал тенгламалар ва математик физика

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ
бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
АВТОРЕФЕРАТИ**

Фарғона–2022

Физика – математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosofy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2018.4.PhD/FM288 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Тошкент ахборот технологиялари университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (www.fdu.uz) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида (http://www.ziyonet.uz/) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Исломов Бозор Исломович** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Фаёзов Қудратилло Садридинович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Каримов Шахобиддин Туйчибоевич физика-математика фанлари доктори, доцент
Етакчи ташкилот:	**Самарқанд давлат университети**

Диссертация ҳимояси Фарғона давлат университети ҳузуридаги PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 рақамли Илмий кенгашнинг 2022 йил «30» август соат 10:00 даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 150100, Фарғона шаҳар, Мураббийлар кўчаси, 19-уй. Тел.:(+99873) 244-44-02, факс: (+99873) 244-44-93, e-mail: fardu_info@umail.uz).

Диссертация билан Фарғона давлат университетининг Ахборот - ресурс марказида танишиш мумкин (180 рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 150100, Фарғона шаҳар, Мураббийлар кўчаси, 19- уй. Тел.:(+99873) 244-44-94.

Диссертация автореферати 2022 йил «16» август куни тарқатилди.
(2022 йил «16» август даги 1 рақамли реестр баённомаси).

А. К. Уринов
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

И.У.Хайдаров
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.н.

Ш.Т.Каримов
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси, ф.-м.ф.д., доцент

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация ишининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳонда математик-физика ва биологиянинг кўплаб муҳим муаммоларини ўрганиш иккинчи ва учинчи тартибли аралаш типдаги тенгламалар учун чегаравий масалаларни тадқиқ этишга олиб келинади. Бунда юкланган аралаш параболик-гиперболик ва эллиптик-гиперболик типдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ер ости сувларини узоқ муддатли таҳлил қилиш ва тартибга солиш муаммоларида, заррачаларнинг ҳаракатланиш жараёнларини моделлаштиришда, иссиқлик ва массани чекланган тезликда ўтказиш муаммоларида, ғовак муҳитларда суюқликни фильтрлаш муаммоларида, тескари масала муаммоларини ўрганишда ҳамда агроэкотизимни оптимал бошқаришнинг кўплаб муаммоларини математик моделлаштиришда муҳим ўрин тутади. Бу борада, жумладан, иккинчи ва учинчи тартибли юкланган аралаш типдаги тенгламалар учун коррект локал ва нолокал масалаларни қўйиш ва уларни ечиш учун хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назариясига алоҳида эътибор қаратилмоқда.

Жаҳонда сўнгги йилларда уч ўлчовли чексиз соҳаларда иккинчи тартибли параболик-гиперболик тенглама учун Трикоми масаласига ўхшаш масала ечимининг мавжудлиги ва ягоналигини исботлаш, призматик соҳаларда параболик-гиперболик тенглама учун параллел характеристикалар текислигида Геллерстедт шартлари билан берилган чегаравий масалани қўйиш ва ўрганиш, чексиз цилиндрик соҳаларда иккинчи тартибли эллиптик-гиперболик тенглама учун Трикоми ва Геллерстедт масалаларига ўхшаш масалаларни ўрганиш бўйича илмий тадқиқотлар олиб борилмоқда. Ушбу йўналишда, жумладан, аралаш типдаги юкланган тенгламалар учун чегаравий масалаларни ўрганиш бўйича тадқиқотлар устувор ҳисобланмоқда. Шу билан бирга, уч ўлчовли чексиз соҳада учинчи тартибли аралаш типдаги тенглама учун чегаравий масалаларни қўйиш ва тадқиқ этиш долзарб вазифалардан ҳисобланмоқда.

Республикамизда ҳозирги вақтда фундаментал тадқиқотларни илмий ва амалий тадбиқларга йўналтириш бўйича кенг кўламли чора-тадбирлар амалга оширилмоқда. Жумладан, назарий ва амалий муаммоларни ҳал қилишда уч ўлчовли соҳаларда юкланмаган ва юкланган хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун классик ва ноклассик масалаларни ечишнинг самарали усулларини излашга ва ўрганишга алоҳида эътибор қаратилмоқда. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар, математик- физика, алгебра ва функционал анализ, динамик системалар ва оптимал бошқарув, амалий математика ва математик моделлаштириш, математик анализ ва функциялар назарияси, эҳтимоллар назарияси ва математик статистика фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математик олимларниг асосий вазифалари ва фаолият йўналишлари этиб белгилаб берилган[1]. Ушбу вазифаларни амалга оширишда,

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги 292-сон "Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилаётган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш чора-тадбирлари тўғрисида" ги қарори.

уч ўлчовли соҳаларда иккинчи ва учинчи тартибли юкланган аралаш типдаги тенгламалар учун чегаравий масалалар билан бирга янги коррект локал ва нолокал масалаларни қўйиш ва ўрганиш муҳим ҳисобланади.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон "Республикани янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида"ги Фармони, Ўзбекистон Республикасининг 2017 йил 17-февралдаги ПҚ-2789-сон "Фанлар академияси фаолиятини, илмий-тадқиқот фаолиятини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида", 2017 йил 20-апрелдаги ПҚ-2909-сон "Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида", 2019 йил 09-июлдаги ПҚ-4387-сон "Математик таълим ва фанни янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида" ва 2020 йил 7-майдаги ПҚ-4708-сон "Математика соҳасида таълим сифатини ошириш ва илмий тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида"ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг Республика фан ва технологиялари ривожланиши устивор йўналишларига мослиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. "Математика, механика ва информатика" устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммони ўрганилганлик даражаси. Чегараланган ва чегараланмаган уч ўлчовли соҳаларда юкланмаган аралаш типдаги тенгламалар учун чегаравий масалалар М.Н.Проттер, А.В.Бицадзе, М.С.Салахитдинов, Т.Д.Джураев, А.М.Нахушев, В.Н.Врагов, Т.Ш.Кальменов, Е.И.Моисеев, С.М.Пономарев, К.Б.Сабитов, Г.Д.Каратопраклиев, В.П.Диденко, Н.Г.Сорокина, M.Shneider, С.А.Алдашев, А.М.Ежов, С.П.Пулькин, К.С.Фаязов, А.Б.Хасанов, Ю.П.Апаков ва уларнинг шогирдлари томонидан ўрганилган ва ривожлантирилган.

Илк бора, 1976 йилда юкланган хусусий ҳосилали дифференциал ва интегро-дифференциал тенгламаларни А.М.Нахушев[2,3] ўрганган ҳамда уларнинг тўлиқ классификацияси келтирилган ва турли жараёнларда қўлланилиши айтиб ўтилган. Кейинчалик бу йўналиш хорижий олимлар А.И.Кожанов, К.Б.Сабитов, В.А.Дженалиев, А.Х.Аттаев, П.Агарвал, Б.С.Кишин ва республикамиз олимлари Р.Р.Ашуров, А.Б.Хасанов, Б.И.Исломов, О.С.Зикиров, Ш.Т.Каримов, Д.М.Курьязов, У.И.Болтаева, О.Х.Абдуллаевлар томонидан ривожлантирилган.

Чексиз цилиндрик ва призматик соҳаларда юкланган эллиптик-

---

[2] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа. 1995. 301 с.

[3] Nakhushev A.B. Nonlocal problem and the Goursat problem for loaded hyperbolic equation and their application in prediction of ground moisture.   // Soviet Math. Dokl. 1978. Vol.19. № 5, pp. 1243-1247.

гиперболик ва параболик-гиперболик типдаги тенгламалар учун чегаравий масалалар шу пайтгача ўрганилмаганлиги сабабли, ушбу диссертация ишида уч ўлчовли фазода юкланган параболик-гиперболик ва эллиптик-гиперболик типдаги тенгламалар учун Трикоми ва Геллерстедт масалаларига ўхшаш масалалар ўрганилган.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги.

Диссертация иши Урганч давлат университетининг ЁОТ-Фтех-2018-142 рақамли “Характеристик ва нохарактеристик ўзгариш чизиқларига эга бўлган аралаш типдаги юкланган тенгламалар учун чегаравий масалаларнинг бир қийматли тадқиқлари” (2018-2019 йиллар) номли давлат гранти лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади иккинчи ва учинчи тартибли юкланган аралаш типдаги тенгламалар учун Трикоми ва Геллерстедт масалаларига ўхшаш масалаларни қўйиш ва ўрганишдан иборатдир.

Тадқиқотнинг вазифалари қуйидагилардан иборат:

уч ўлчовли чексиз соҳада иккинчи тартибли юкланган параболик-гиперболик тенглама учун Трикоми масаласига ўхшаш масала ечимининг мавжудлиги ва ягоналигини исботлаш;

параметрнинг етарли катта қийматлари учун уч ўлчовли соҳада юкланган иккинчи тартибли параболик-гиперболик тенглама учун Трикоми масаласи ечимининг баҳосини олиш;

призматик соҳаларда юкланган параболик-гиперболик тенглама учун параллел характеристикалар текислигида Геллерстедт шартлари билан берилган чегаравий масалани ўрганиш;

чексиз цилиндрик соҳаларда иккинчи тартибли юкланган эллиптик-гиперболик тенглама учун Трикоми ва Геллерстедт масалаларига ўхшаш масалаларни ўрганиш;

уч ўлчовли чексиз соҳада учинчи тартибли юкланган параболик - гиперболик типдаги тенглама учун чегаравий масалалар ечимлари учун мавжудлик ва ягоналик теоремаларини исботлаш;

уч ўлчовли чексиз соҳада учинчи тартибли юкланган параболик-гиперболик типдаги тенглама учун турли характеристик текисликларда нормал ҳосилалар билан берилган Трикоми масаласининг аналогини ўрганиш.

Тадқиқотнинг объекти уч ўлчовли соҳаларда иккинчи ва учинчи тартибли аралаш типдаги юкланган тенгламалар ҳисобланади.

Тадқиқотнинг предмети уч ўлчовли соҳаларда иккинчи ва учинчи тартибли юкланган параболик-гиперболик ва эллиптик-гиперболик типдаги тенгламалар учун Трикоми ва Геллерстедт масалаларини ўрганишдан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертация ишида математик таҳлил, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар, математик физика, махсус функциялар назарияси, Фурье алмаштириши, интеграл тенгламалар усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

иккинчи тартибли юкланган параболик-гиперболик тенглама учун уч ўлчовли соҳада Трикоми масаласи ечимининг ягоналиги энергия интеграллари усулида, мавжудлиги эса иккинчи тур Вольтерра интеграл тенгламасига келтирилиб исботланган;

уч ўлчовли юкланган параболик-гиперболик ва эллиптик-гиперболик типдаги тенгламалар учун турли характеристик текисликларда Геллерстедт шартлари қатнашган чегаравий масалалар ечимининг ягоналиги ноанъанавий экстремум принципига кўра, мавжудлиги эса умумий ечим кўриниши ҳамда Фурье алмаштириш формуласидан фойдаланиб исботланган;

уч ўлчовли юкланган эллиптик-гиперболик типдаги тенгламалар учун экстремум принципига кўра Трикоми масаласи ечимининг асимптотик характери топилган ҳамда фазода ва текисликда қўйилган масалаларнинг эквивалентлиги исботланган;

уч ўлчовли чексиз соҳада учинчи тартибли юкланган параболик - гиперболик тенглама учун чегаравий масала ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги теоремалар исботланган;

чексиз призматик соҳада учинчи тартибли юкланган параболик-гиперболик типдаги тенглама учун номаълум функциянинг ўзи ва нормал ҳосилалари характеристик текисликларда берилган чегаравий масалалар ечимининг бир қийматли ечилиши параболик-гиперболик тенгламалар учун ноанъанавий экстремум принципи ва интеграл тенгламалар назарияси ёрдамида асосланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

Уч ўлчовли соҳаларда иккинчи ва учинчи тартибли юкланган аралаш типдаги тенгламалар учун чегаравий масалаларни ечилиши бўйича олинган натижалардан фойдаланиб, иккинчи тартибли параболик-гиперболик тенгламаларнинг нолокал аналоглари учун бир нечта чегаравий масалаларнинг функционал фазоларда кучли ечимларини топиш мумкинлиги асосланган.

Уч ўлчовли соҳаларда аралаш типдаги тенгламалар учун ўрганилган янги масалалар динамик тизимларни моделлаштириш ва бошқарув масаларини ечишда, шунингдек, математикада самарали қўлланиладиган иккинчи ва учинчи тартибли параболик-гиперболик типдаги локал ва нолокал (юкланган ва интегро-дифференциал) тенгламалар учун чегаравий масалаларни тадқиқ этиш ҳамда турли физик ва биологик жараёнларни моделлаштиришда қўллаш мумкинлиги исботланган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ва интеграл тенгламалар назариясининг усулларидан фойдаланиб, дедуктив хулосалар қабул қилинганлиги ҳамда теоремаларнинг қатъий ва тўлиқ исботланганлиги билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти шундан иборатки, ишда олинган илмий натижалар уч ўлчовли чексиз соҳаларда хусусий ҳосилали аралаш юкланган дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар назариясини янада ривожлантиришда фойдаланиш мумкин.

Диссертация ишида олинган натижаларнинг амалий аҳамияти уларни аралаш типдаги тенгламалар ёрдамида уч ўлчовли соҳаларда тасвирланган амалий масалаларга қўллаш билан аниқланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Уч ўлчовли фазода аралаш типдаги юкланган тенгламалар учун Трикоми ва Геллерстедт масалаларини тадқиқ қилиш бўйича олинган натижалар асосида:

уч ўлчовли соҳада аралаш типдаги юкланган тенгламалар учун Трикоми ва Геллерстедт масалалари тадқиқот натижалари “Нолокал хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун чегаравий ва бошланғич-чегаравий масалаларни ечиш масалалари” мавзусидаги халқаро лойиҳада иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларни ўрганишда фойдаланилган (Хўжа Аҳмад Яссавий номидаги халқаро қозоқ-турк университетининг 2022 йил 29 мартдаги №04/792 рақамли маълумотномаси). Натижада, иккинчи тартибли параболик-гиперболик тенгламаларнинг нолокал аналоглари учун бир нечта чегаравий масалаларнинг функционал фазоларда кучли ечими мавжудлигини исботлаш имконини берган;

уч ўлчовли соҳада аралаш типдаги юкланган учинчи тартибли тенгламалар учун Трикоми ва Геллерстедт масалалари ҳамда уларни тадқиқ қилиш усуллари “Аралаш ва бир типдаги тенгламалар учун чегаравий масалалар, уларни бошқариш масалалари ва динамик тизимларни моделлаштиришда қўллаш” мавзусидаги ҳалқаро лойиҳада фойдаланилган (Россия Фанлар академияси Кабардино-Балкар илмий маркази Амалий математика ва автоматлаштириш институтининг 2022 йил 7 апрелдаги №01-14/22 рақамли маълумотномаси). Натижада, динамик тизимларни моделлаштириш ва бошқарув масаларини ечишда, шунингдек, математикада самарали қўлланиладиган иккинчи ва учинчи тартибли параболик-гиперболик типдаги локал ва нолокал (юкланган ва интегро-дифференциал) тенгламалар учун чегаравий масалаларни тадқиқ этиш ҳамда турли физик ва биологик жараёнларни моделлаштириш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Диссертациянинг асосий натижалари 6 та халқаро ва 8 та республика илмий – амалий анжуманларида муҳокама қилинган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича 22 та илмий ишлар чоп этилган бўлиб, улардан 8 таси илмий мақола, шундан, 4 таси хорижий ва 4 таси Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссияси эътироф этган республика журналларида нашр қилинган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 125 бетни ташкил этади.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва техникаси ривожланишининг устувор йўналишларига мувофиқлиги, объектлар ва муаммони ўрганиш даражаси аниқланган, мақсад ва вазифалар шакллантирилган ҳамда тадқиқот мавзуси, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари, натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти кўрсатилган.

Диссертация ишининг **“Чексиз призматик соҳада юкланган иккинчи тартибли параболик-гиперболик типдаги тенглама учун Трикоми ва Геллерстедт масалалари”** деб номланган биринчи боби уч параграфдан иборат. Ушбу бобда иккинчи тартибли хусусий ҳосилали юкланган аралаш типдаги дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар қўйилган ва ўрганилган.

1.1-параграфда уч ўлчовли чексиз соҳада иккинчи тартибли юкланган параболик-гиперболик тенглама учун Трикоми масаласининг аналоги ўрганилган.

Ушбу

$$0=\begin{cases} U_y-U_{xx}-U_{zz}-\mu U(x,0,z) & (x,y,z)\in\Omega_1, \\ U_{yy}-U_{xx}-U_{zz}-\mu U(x,0,z) & (x,y,z)\in\Omega_2 \end{cases} \tag{1}$$

тенгламани қараймиз.

Ω - уч ўлчовли (x,y,z) фазонинг чексиз призматик соҳаси бўлиб, қуйидаги текисликлар билан чегараланган:

$$\Gamma_j:\ x=k,\ 0\le y\le h,\ z\in R=(-\infty,+\infty),\ k=\begin{cases}0 & агар\ j=1,\\ 1 & агар\ j=2,\end{cases}$$

$$\Gamma_3:\ y=h,\ 0\le x\le 1,\ z\in R,\ \Gamma_4:\ x+y=0,\ 0\le x\le 1/2,\ z\in R,$$

$$\Gamma_5:\ x-y=1,\ 1/2\le x\le 1,\ z\in R.$$

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$I=\{\ (x,y,z):0<x<1,\ y=0,\ z\in(-\infty,+\infty)\},$$

$$\Omega_1=\Omega\bigcap\{\ (x,y,z):x>0,\ y>0,\ z\in R\},$$

$$\Omega_2=\Omega\bigcap\{\ (x,y,z):x>0,\ y<0,\ z\in R\},\ l_0=\bar\Gamma_4\cap\bar\Gamma_5,\ l_1=\bar\Gamma_1\cap\bar\Gamma_4,$$

$$l_2=\bar\Gamma_2\cap\bar\Gamma_5,$$

$$D=\Omega\bigcap\{z=0\},\ \ D_k=\Omega_k\bigcap\{z=0\},\ (k=1,2),\ \ \sigma_j=\Gamma_j\bigcap\{z=0\},\ (j=\overline{1,5}),$$

$$\tilde A_k=l_k\bigcap\ \{z=0\},(k=\overline{0,2}),\quad J=I\bigcap\ \{z=0\}.$$

(1) тенглама Ω_1 ва Ω_2 соҳаларда мос равишда параболик ва гиперболик типдаги тенглама бўлади.

AT **масала.** *Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $U(x,y,z)$ функция топилсин: 1) $U(x,y,z)$ функция Ω соҳанинг чегарасигача узлуксиз бўлсин; 2) $U(x,y,z)$ функция Ω соҳада узлуксиз дифференциалланувчи бўлиб, $U_x(x,y,z)$*

ва $U_y(x,y,z)$ *функциялар* l_1 *ва* l_2 *чизиқларда бирдан кичик тартибда чексизликка интилиши мумкин; 3)* $U(x,y,z)$ *функция* $C^{2,1,2}_{x,y,z}(\Omega_1)\bigcap C^{2,2,2}_{x,y,z}(\Omega_2)$ *синфга тегишли бўлиб,* $\Omega_j\,(j=1,2)$ *соҳаларда (1) тенгламани қаноатлантирсин; 4)* $U(x,y,z)$ *функция қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:*

$$U\big|_{\Gamma_1}=\Phi_1(y,z),\quad U\big|_{\Gamma_2}=\Phi_2(y,z),\quad 0\le y\le h,\quad z\in R, \tag{2}$$

$$U\big|_{\Gamma_4}=\Psi(x,z),\quad 0\le x\le 1/2,\ z\in R, \tag{3}$$

$$\lim_{|z|\to\infty}U(x,y,z)=\lim_{|z|\to\infty}U_x(x,y,z)=\lim_{|z|\to\infty}U_y(x,y,z)=\lim_{|z|\to\infty}U_z(x,y,z)=0, \tag{4}$$

бу ерда $\Phi_j(y,z),\Psi(x,z)$ функциялар $(-\infty,+\infty)$ оралиқда z бўйича абсолют интегралланувчи функциялар, бундан ташқари $\Phi_j(y,z)$ функция «y» нинг функцияси сифатида $C[0;h]\cap C^1(0,h)$ синфга тегишли, $\Psi(x,z)$ функция эса «x» нинг функцияси сифатида $C^1[0,1/2\,]\cap C^2(0,1/2\,)$ синфга тегишли бўлсин, шунингдек,

$$\Phi_1(0,z)=\Psi(0,z)=0,\quad \lim_{|z|\to\infty}\Phi_j(y,z)=0,\ (j=1,2),\ \lim_{|z|\to\infty}\Psi(x,z)=0. \tag{5}$$

Ушбу

$$U(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,y;\lambda)e^{-i\lambda z}d\lambda \tag{6}$$

Фурье алмаштириш ёрдамида (1) тенглама қуйидаги кўринишга

$$0=\begin{cases}u_y-u_{xx}+\lambda^2u-\mu u(x,0;\lambda), & (x,y)\in D_1,\\ u_{yy}-u_{xx}+\lambda^2u-\mu u(x,0;\lambda), & (x,y)\in D_2,\quad \lambda\in R,\quad \mu<0,\end{cases} \tag{7}$$

AT масала эса эквивалент равишда қуйидаги масалага келади:

AT_λ ***масала.*** *Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи* $u(x,y;\lambda)$ *функция топилсин:1)* $u(x,y;\lambda)$ *функция* $\bar{D}$ *да узлуксиз ҳамда* $D\cup\sigma_4$ *да узлуксиз дифференциалланувчи бўлсин, шунингдек,* $u_x(x,y;\lambda)$ *ва* $u_y(x,y;\lambda)$ *функциялар* $\tilde{A}_1$ *ва* $\tilde{A}_2$ *нуқталарда бирдан кичик тартибда чексизликка интилиши мумкин; 2)* $u(x,y;\lambda)$ *функция* $C^{2,1}_{x,y}(D_1)\cap C^{2,2}_{x,y}(D_2)$ *синфга тегишли бўлиб,* $D_j,(j=1,2)$ *соҳаларда (7) тенгламани қаноатлантирсин; 3)* $u(x,y,\lambda)$ *функция қуйидаги шартларни бажарсин:*

$$u\big|_{\sigma_1}=\varphi_1(y;\lambda),\quad u\big|_{\sigma_2}=\varphi_2(y;\lambda),\quad 0\le y\le h,\quad \lambda\in R, \tag{8}$$

$$u\big|_{\sigma_4}=\psi(x;\lambda),\quad 0\le x\le 1/2,\quad \lambda\in R, \tag{9}$$

бу ерда $\varphi_1(y;\lambda),\ \varphi_2(y;\lambda),\ \psi(x;\lambda)-$ *берилган функциялар, ҳамда*

$$\varphi_j(y;\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_j(y,z)e^{i\lambda z}dz,\ (j=0,1), \tag{10}$$

$$\psi(x;\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi(x,z)e^{i\lambda z}dz, \tag{11}$$

$$\varphi_j(y;\lambda)\in C\left[0;h\right]\cap C^1(0,h),\ (j=1,2), \tag{12}$$

$$\psi(x;\lambda)\in C^1\left[0,1/2\right]\cap C^2\left(0,1/2\right),\quad \psi(0;\lambda)=\varphi_1(0;\lambda)=0. \tag{13}$$

(7) тенгламанинг ихтиёрий регуляр ечими қуйидаги кўринишда ифодаланади[4]

$$u(x,y;\lambda)=\upsilon(x,y;\lambda)+\omega(x;\lambda), \tag{14}$$

бу ерда $\upsilon(x,y,\lambda)$ функция

$$0=\begin{cases}\upsilon_y-\upsilon_{xx}+\lambda^2\upsilon, & (x,y)\in D_1,\\ \upsilon_{yy}-\upsilon_{xx}+\lambda^2\upsilon, & (x,y)\in D_2\end{cases} \tag{15}$$

тенгламанинг ечими, $\omega(x,\lambda)$ функция эса қуйидаги

$$\omega''(x;\lambda)-\left(\lambda^2-\mu\right)\omega(x;\lambda)=-\mu\upsilon(x,0;\lambda),\ \ (x,0)\in J \tag{16}$$

оддий дифференциал тенгламанинг ечими.

1-изоҳ. Ихтиёрий $ach\lambda x+bsh\lambda x$ функция (15) тенгламанинг ечими бўлганлиги учун умумийликка зид бўлмаган ҳолда (14) формуладаги $\omega(x,\lambda)$ функция учун қуйидаги

$$\omega(0;\lambda)=\omega\left(1;\lambda\right)=0, \tag{17}$$

шартни олиш мумкин.

(16) ва (17) масалани ечиб, унинг ечимини қуйидаги кўринишда топамиз:

$$\omega(x;\lambda)=\frac{\mu\, shx\sqrt{\lambda^2-\mu}}{\sqrt{\lambda^2-\mu}\, sh\sqrt{\lambda^2-\mu}}\int_0^1 sh\left[\left(1-t\right)\sqrt{\lambda^2-\mu}\right]\upsilon(t,0;\lambda)dt-$$

$$-\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2-\mu}}\int_0^x sh\left(x-t\right)\sqrt{\lambda^2-\mu}\,\upsilon(t,0;\lambda)dt,\ x\in\overline{J}, \tag{18}$$

бу ерда $\upsilon(x,0;\lambda)=\tau(x;\lambda),\quad (x,0)\in\overline{J}.$

AT_λ масала ечимининг ягоналигини исботлашда қуйидаги лемма муҳим роль ўйнайди.

1-лемма. *Агар* $\varphi_1(y;\lambda)\equiv\varphi_2(y;\lambda)\equiv 0,\ \forall y\in\left[0,h\right],\ \psi(x;\lambda)\equiv 0,\ \forall x\in\left[0,1/2\right],$ $\lambda\in R$ *бўлса, у ҳолда*

$$\tau(x;\lambda)\equiv 0,\ \ \forall x\in\overline{J}. \tag{19}$$

1-лемма энергия интеграли усули ёрдамида исботланади.

(19) кўра (18) ифодадан қуйидаги тенгликни оламиз:

$$\omega(x;\lambda)\equiv 0,\quad \forall\, x\in\overline{J},\quad \lambda\in R. \tag{20}$$

---

[4] Исломов Б., Курьязов Д.М. Краевые задачи для смешанного нагруженного уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа. // “Узбекский математический журнал”. 2000. № 2. С. 29-35.

1-теорема. *Агар* AT_λ *масаланинг ечими мавжуд бўлиб, 1-лемманинг шартлари, (20) шарт ва* $\mu<0$ *тенгсизлик бажарилса, у ҳолда* D *соҳада (7) тенглама учун қўйилган* AT_λ *масала биттидан кўп бўлмаган ечимга эга бўлади.*

1-теорема параболик ва гиперболик тенгламалар учун маълум бўлган максимум принципи ёрдамида исботланади.

2-теорема. *Агар 1-теорема шартлари бажарилса, у ҳолда* Ω *соҳада (1) тенглама учун қўйилган* AT *масала биттидан кўп бўлмаган ечимга эга бўлади.*

2-теореманинг исботи 1-теоремадан келиб чиқади.

3-теорема. *Агар* $\mu<0$ *ва (8), (9) шартлар бажарилса, у ҳолда* D *соҳада (7) тенглама учун қўйилган* AT_λ *масала ечими мавжуд бўлади.*

3-теорема интеграл тенгламалар усули ёрдамида Коши масаласи ва қуйидаги чегаравий

$$\tau''(x;\lambda)-\lambda^2\tau(x;\lambda)=\nu(x;\lambda),\ x\in J,\ \lambda\in R, \tag{21}$$

$$\tau(0;\lambda)=\varphi_1(0;\lambda), \qquad \tau(1;\lambda)=\varphi_2(0;\lambda) \tag{22}$$

масала ечимидан фойдаланиб исботланади.

(6) интегралнинг мавжудлигини ва (4) шартларнинг бажарилишини таъминлаш учун $|\lambda|$ параметрнинг етарли катта қийматларида AT_λ масала ечимининг баҳосини топиш зарурдир.

4-теорема. *Агар қуйидаги*

$$\varphi_1(y;\lambda)=O\left(\frac{1}{|\lambda|^k ch\lambda}\right), \varphi_2(y;\lambda)=O\left(\frac{1}{|\lambda|^k}\right), y\in[0,h], \omega(x;\lambda)=O\left(\frac{1}{|\lambda|^k}\right), x\in J, \tag{23}$$

$$\omega(x;\lambda)=O\left(\frac{1}{|\lambda|^{k+1}ch\lambda\ th\frac{|\lambda|}{2}}\right), \omega_x'(x;\lambda)=O\left(\frac{1}{|\lambda|^k ch\lambda}\right), x\in\bar{\sigma}_4, \tag{24}$$

$$\psi(x;\lambda)=O\left(\frac{1}{|\lambda|^{k+1}ch\lambda\, th\frac{|\lambda|}{2}}\right), \quad \psi_x'(x;\lambda)=O\left(\frac{1}{|\lambda|^k ch\lambda}\right), \quad x\in\bar{\sigma}_4 \tag{25}$$

шартлар бажарилса, у ҳолда $u(x,y,\lambda)$ *функция учун* $|\lambda|$ *параметрнинг етарли катта қийматларида қуйидаги*

$$u(x,y;\lambda)=O\left(1/|\lambda|^k\right), \quad k>3 \tag{26}$$

баҳо ўринли бўлади.

(23)-(25) шартларга кўра, (26) кўринишдаги баҳонинг ўринлилиги ушбу

$$|u(x,y,\lambda)|\le ch\lambda\left\{\max_{\bar{\sigma}_1}|\varphi_1(y;\lambda)|+\frac{1}{ch|\lambda|}\max_{\bar{\sigma}_2}|\varphi_2(y,\lambda)|+\right.$$

$$+3h\max_{\bar\sigma_4}\left|\psi_x{}'(x,\lambda)\right|+3h|\lambda|th\frac{|\lambda|}{2}\max_{\bar\sigma_4}\left|\psi(x,\lambda)\right|+3h\max_{\bar\sigma_4}\left|\omega'(x;\lambda)\right|+$$

$$\left.+3h|\lambda|th\frac{|\lambda|}{2}\max_{\bar\sigma_4}\left|\omega(x;\lambda)\right|\right\}+|\omega(x;\lambda)|\le\frac{c_1}{|\lambda|^k},\quad k>3,\quad c_1=const>0 \qquad (27)$$

кўринишдаги баҳодан келиб чиқади.

2-изоҳ. (27) баҳодан AT_λ масала ечимининг ягоналиги, шунингдек, ҳар қандай тайинланган λ ларда ечимнинг турғунлиги келиб чиқади.

3-изоҳ. (26) баҳо AT масала ечимининг ва (6) интегралнинг мавжудлигини таъминлайди.

1-4 теоремаларга кўра, (1) тенглама учун қўйилган AT масаланинг ечими Ω соҳада мавжуд, ягона ва (6) формула орқали топилади, бу ерда $u(x,y;\lambda)=\upsilon(x,y;\lambda)+\omega(x;\lambda)$, $\upsilon(x,y;\lambda)$ ва $\omega(x;\lambda)$ функция мос равишда қуйидаги

$$\upsilon(x,y;\lambda)=\frac{1}{2}\left[\tau(x+y;\lambda)+\tau(x-y;\lambda)\right]+\frac{\lambda y}{2}\int_{x-y}^{x+y}\tau(\xi,\lambda)\overline{I_1}\left[\lambda\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right]d\xi-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}\nu(\xi,\lambda)I_0\left[\lambda\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right]d\xi,\ (x,y)\in D_2, \qquad (28)$$

$$\upsilon(x,y;\lambda)=\upsilon_0(x,y;\lambda)+\int_0^y d\eta\int_0^1 M_1(x,y;\xi,\eta;\lambda)\upsilon_0(\xi,\eta;\lambda)d\xi,\ (x,y)\in D_1 \qquad (29)$$

формулалар орқали топилади, бунда

$$\upsilon_0(x,y;\lambda)=\int_0^y G_{1\xi}(x,y;0,\eta)\varphi_1(\eta,\lambda)d\eta+\int_0^y G_{1\xi}(x,y;1,\eta)\varphi_2(\eta,\lambda)d\eta+$$

$$+\int_0^1 G_1(x,y;\xi,0)\tau(\xi;\lambda)d\xi, \qquad (30)$$

$G_1(x,y;\xi,\eta)$ функция $\upsilon_{xx}-\upsilon_y=0$ тенглама учун биринчи чегаравий масаланинг Грин функцияси, $M_1(x,y;\xi,\eta;\lambda)$ эса $-\lambda^2G_1(x,y;\xi,\eta)$ ядро резольвентаси, $\omega(x;\lambda)$ - (18) формула орқали аниқланади.

5-теорема. *Агар текисликда (7) тенглама учун қўйилган AT_λ масаланинг ечими мавжуд бўлиб, (14), (18), (28), (29) формулалар орқали топилса ва $|\lambda|$ параметрнинг етарли катта қийматларида (26) баҳо ўринли бўлса, у ҳолда Ω соҳада (1) тенглама учун қўйилган AT масаланинг ечими мавжуд бўлиб, (6) формула орқали топилади.*

5-теорема Риман леммаси[5] ва Фурье алмаштиришнинг хоссаларидан фойдаланиб исботланади.

4-изоҳ. 5-теоремадан AT и AT_λ.масалаларнинг эквивалентлиги келиб

[5] Самко С.Г., Кильбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, Наука и Техника, 1987. 668 с.

чиқади (ёки 5-теореманинг тескари теоремаси ҳам ўринли бўлади).

1.2- ва 1.3-параграфларда уч ўлчовли соҳаларда юкланган параболик-гиперболик тенглама учун параллел ва турли характеристик текисликларда Геллерстедт шартлари билан берилган чегаравий масалалар (AG ва $A\Gamma_j$) ўрганилган. AG масала Фурье алмаштириши усули ёрдамида ечилган. AG масала, (1) тенглама ва чегаравий шартлар Фурье алмаштириши усули ёрдамида текисликда спектрал параметрли Геллерстедт масаласига ўхшаш масалага (AG_λ масала) келтирилади. AG ва AG_λ масалалар ечимининг ягоналиги иккинчи тартибли аралаш типдаги юкланган тенгламалар учун мавжуд бўлган экстремум принципи ёрдамида исботланади. Ечимнинг умумий кўринишидан фойдаланиб, AG ва AG_λ масала ечимининг мавжудлиги интеграл тенгламалар усули ёрдамида исботланади. Бундан ташқари, спектрал параметрнинг етарли катта қийматлари учун AG_λ масала ечимининг асимптотик характери ўрганилган. Бажарилган амалларнинг тўғрилигини таъминловчи етарли шартлар топилган. $A\Gamma_j\left(j=1,2\right)$ масалаларнинг бир қийматли ечилиши ҳам худди шундай усул ёрдамида кўрсатилган.

Диссертациянинг **“Уч ўлчовли фазода эллиптик-гиперболик типдаги юкланган тенглама учун Трикоми ва Геллерстедт масалалари”** деб номланган **иккинчи бобида**, чексиз цилиндрик соҳада иккинчи тартибли юкланган эллиптик-гиперболик типдаги тенглама учун Трикоми ва Геллерстедт масалаларига ўхшаш масалалар ўрганилган.

2.1-параграфда чексиз цилиндрик соҳада юкланган иккинчи тартибли эллиптик-гиперболик типдаги тенглама учун Трикоми масаласига ўхшаш масала ечилган.

Ушбу

$$0=\begin{cases}U_{yy}+U_{xx}+U_{zz}+\mu U\left(x,0,z\right), & \left(x,y,z\right)\in\ \Omega_1,\\ U_{yy}-U_{xx}-U_{zz}-\mu U\left(x,0,z\right), & \left(x,y,z\right)\in\ \Omega_2\end{cases}\qquad(31)$$

тенгламани қараймиз.

Ω -уч ўлчовли соҳа бўлиб, қуйидаги сиртлар билан чегараланган:

$$S_0:\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4},\ y\geq 0,\quad z\in R=(-\infty,+\infty),$$

$$S_1: x+y=0,\quad 0\leq x\leq 1/2,\ z\in R,\qquad S_2: x-y=1,\ 1/2\leq x\leq 1,\ z\in R.$$

(31) тенглама Ω_1 ва Ω_2 соҳаларда мос равишда эллиптик ва гиперболик типдаги тенглама бўлади.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$I=\left\{\left(x,y,z\right):\ 0<x<1,\ y=0,\ z\in R\right\},$$

$$J=I\cap\ \left\{z=0\right\},\ \Omega_1=\Omega\cap\left\{\ (x,y,z): x>0,\ \ y>0,\ z\in R\right\},$$

$$\Omega_2=\Omega\cap\left\{\ (x,y,z): x>0,\ y<0,\ z\in R\right\},$$

$$A_0(0,0,z)=\bar{S}_0\cap\bar{S}_1,\ \ A_1(1,0,z)=\bar{S}_0\cap\bar{S}_2,\ \ A_2\left(1/2,-1/2,z\right)=\bar{S}_1\cap\bar{S}_2,$$
$$D=\Omega\bigcap\left\{z=0\right\},\ D_j=\Omega_j\bigcap\left\{z=0\right\},\ (j=1,2),\ \ \sigma_j=S_j\bigcap\left\{z=0\right\},\ (j=\overline{0,2}),$$
$$\tilde{A}_l=A_l\bigcap\ \left\{z=0\right\},(l=\overline{0,2}).$$

T **масала**. *Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи* $U(x,y,z)$ *функция топилсин: 1)* $U(x,y,z)\in C\left(\bar{\Omega}\right)\bigcap C^1\left(\Omega\bigcup S_1\right)$, *шунингдек,* $U_y(x,y,z)$ *функция* A_0 *чизиқда бирдан кичик тартибда чексизликка интилиши мумкин ва* A_1 *чизиқда чегараланган бўлсин; 2)* $U(x,y,z)$ *функция* Ω_1 *ва* Ω_2 *соҳаларда (7) тенгламанинг икки марта узлуксиз дифференциалланувчи ечими бўлсин; 3)* $U(x,y,z)$ *функция қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:*

$$U\big|_{S_0}=\Phi(x,z),\quad 0\le x\le 1,\quad U\big|_{S_1}=\Psi(x,z),\quad 0\le x\le 1/2,\quad z\in R,\tag{32}$$

$$\lim_{|z|\to\infty}U(x,y,z)=\lim_{|z|\to\infty}U_y(x,y,z)=\lim_{|z|\to\infty}U_x(x,y,z)=\lim_{|z|\to\infty}U_z(x,y,z)=0\,,\tag{33}$$

бу ерда $\Phi(x,z),\Psi(x,z)$ *функциялар* $(-\infty,+\infty)$ *оралиқда z бўйича абсолют интегралланувчи функциялар, бундан ташқари* $\Phi(x,z)$ *ва* $\Psi(x,z)$ *функциялар мос равишда «x» нинг функцияси сифатида* $C\left(\bar{I}\right)$ *ва* $C^3\left[0,1/2\right]$ *синфларга тегишли бўлсин, шунингдек*

$$\Psi(0,z)=\Phi(0,z)\,,\ \lim_{|z|\to\infty}\Phi(x,z)=\lim_{|z|\to\infty}\Psi(x,z)=0\,.\tag{34}$$

(31) тенглама учун T масала ечимини (6) Фурье интеграли кўринишида излаймиз. Натижда ушбу тенглама

$$0=\begin{cases}u_{yy}+u_{xx}-\lambda^2u+\mu u(x,0,\lambda), & (x,y)\in D_1,\\ u_{yy}-u_{xx}+\lambda^2u-\mu u\left(x,0;\lambda\right), & (x,y)\in D_2,\ \lambda\in R,\quad \mu<0,\end{cases}\tag{35}$$

учун (T масалага эквивалент бўлган) қуйидаги масалага эга бўламиз:

T_λ **масала.** *Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи* $u(x,y,\lambda)$ *функция топилсин: 1)* $u(x,y,\lambda)\in C\left(\bar{D}\right)\cap C^1\left(D\cup A_0A_2\right)$, *синфга тегишли бўлиб,* $u_y(x,0,\lambda)$ *функция* $x\to 1$ *да чегараланган,* $x\to 0$ *да эса бирдан кичик тартибда чексизликка интилиши мумкин; 2)* $u(x,y,\lambda)$ *функция* D_1 *ва* D_2 *соҳаларда иккинчи тартибли узлуксиз дифференциалланувчи бўлиб, (35) тенгламани қаноатлантирсин; 3)* $u(x,y,\lambda)$ *функция қуйидаги*

$$u\big|_{\sigma_0}=\varphi(x,\lambda),\quad 0\le x\le 1,\quad u\big|_{A_0A_2}=\psi(x,\lambda),\quad 0\le x\le\frac{1}{2},\quad \lambda\in R\tag{36}$$

шартларни бажарсин, бу ерда $\varphi(x,\lambda)$, $\psi(x,\lambda)$*-берилган функциялар, шунингдек,* $\varphi(0,\lambda)=\psi(0,\lambda)$,

$$\varphi(x,\lambda)=\left[\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]^{\frac{\varepsilon}{2}}\varphi_0(x,\lambda),\varphi_0(x,\lambda)\in C\left(\bar{I}\right),\varepsilon\ge 1,\ \psi(x,\lambda)\in C^3\left[0,1/2\right].\tag{37}$$

(35) тенгламанинг ҳар қандай регуляр ечимини қуйидаги кўринишда

ифодаланади[6]:

$$u(x,y;\lambda)=\vartheta(x,y;\lambda)+\theta(x;\lambda), \qquad (38)$$

бу ерда $\vartheta(x,y;\lambda)$, $\theta(x;\lambda)$ функциялар қуйидаги

$$0=\begin{cases}\vartheta_{yy}+\vartheta_{xx}-\lambda^2\vartheta \quad в \ D_1,\\ \vartheta_{yy}-\vartheta_{xx}+\lambda^2\vartheta \quad в \ D_2,\end{cases} \qquad (39)$$

$$\theta''(x;\lambda)-\left(\lambda^2-\mu\right)\theta\left(x;\lambda\right)=-\mu\vartheta(x,0;\lambda) \qquad (40)$$

тенгламаларнинг ечими.

5-изоҳ. Ихтиёрий $ach\left[\sqrt{\lambda^2-\mu}\cdot x\right]+bsh\left[\sqrt{\lambda^2-\mu}\cdot x\right]$ функция (39) тенгламанинг ечими бўлганлиги учун умумийликка зид бўлмаган ҳолда (38) формуладаги ихтиёрий $\theta(x,\lambda)$ функция учун қуйидаги

$$\theta(0,\lambda)=\theta'(0,\lambda)=0 \qquad (41)$$

шартни бўйсиндириш мумкин.

(40) ва (41) масалани ечимини ушбу

$$\theta(x,\lambda)=-\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2-\mu}}\int_0^x sh\left[\sqrt{\lambda^2-\mu}\cdot(x-t)\right]\tau(t,\lambda)dt, \qquad (42)$$

кўринишда топамиз, бу ерда $\tau(x;\lambda)=\vartheta(x,0;\lambda)$.

D соҳада (38) формулага кўра (35) тенглама учун қўйилган T_λ масала эквивалент ҳолатда қўйидаги

$$\vartheta\big|_{\sigma_0}=\varphi(x,\lambda)-\theta(x,\lambda),\ 0\le x\le 1,\ \vartheta\big|_{A_0A_2}=\psi(x,\lambda)-\theta(x,\lambda), 0\le x\le 1/2, \lambda\in R \qquad (43)$$

шартларни бажарувчи (39) тенглама учун T_λ^* масаласига келтирилади, бу ерда $\theta(x;\lambda)$ функция (42) формула орқали аниқланади.

2-лемма. *Агар* $\varphi(x;\lambda)\equiv\psi(x;\lambda)\equiv 0,\ \forall x\in[0,1],\ \lambda\in R$ *бўлса, у ҳолда*

$$\tau(x;\lambda)\equiv 0,\ \forall x\in[0,1]. \qquad (44)$$

тенглик ўринли бўлади.

2-лемма А.В. Бицадзенинг[6,8] экстремум принципи аналоги ёрдамида исботланади.

(42) ва (44) тенгликлардан

$$\theta(x,\lambda)\equiv 0,\quad \forall x\in[0,1],\quad \lambda\in R \qquad (45)$$

тенглик келиб чиқади.

T_λ^* масала ечимининг ягоналиги қуйидаги баҳодан ва 2-леммадан келиб чиқади:

$$\left|\vartheta(x,y;\lambda)\right|\le ch\left|\lambda\right|\left\{\max_{\bar\sigma_0}\left|\varphi(x;\lambda)\right|+\max_{\bar\sigma_0}\left|\theta(x;\lambda)\right|+\right.$$

$$\left.+M_1\left[\max_{\widetilde{A}_0\widetilde{A}_2}\left|\psi'(x;\lambda)\right|+\max_{\widetilde{A}_0\widetilde{A}_2}\left|\theta'(x;\lambda)\right|+\left|\lambda\right|th\frac{\left|\lambda\right|}{2}\max_{\widetilde{A}_0\widetilde{A}_2}\left|\psi(x;\lambda)\right|+\left|\lambda\right|th\frac{\left|\lambda\right|}{2}\max_{\widetilde{A}_0\widetilde{A}_2}\left|\theta(x;\lambda)\right|\right]\right\}. \qquad 46)$$

---

[6] Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука. 1981. – 448 с.

Ҳақиқатдан ҳам, 2-лемма шартлари ҳамда (45) ва $\mu<0$ шартларга кўра, (46) баҳодан $\vartheta(x,y,\lambda)\equiv 0,\ \ (x,y)\in\bar{D}$ тенгликни оламиз. Бунга ва (45) тенгликка асосан, (38) формуладан $u(x,y,\lambda)\equiv 0,\ (x,y)\in\bar{D}$ тенгликка эга бўламиз. Шундай қилиб, қуйидаги теоремани исботладик:

6-теорема. *2-лемма шартлари ва (45), $\mu<0$ шартлар бажарилса, D соҳада (35) тенглама учун қўйилган T_λ масала биттадан кўп бўлмаган ечимга эга бўлади.*

7-теорема. *Агар 6-теореманинг шартлари бажарилса, у ҳолда Ω соҳада (31) тенглама учун қўйилган T масала биттадан кўп бўлмаган ечимга эга бўлади.*

7-теореманинг исботи 6-теорема ва (6) формуладан келиб чиқади.

T масала ечимининг мавжудлиги интеграл тенгламалар усули ёрдамида исботланади. T масала ечимининг мавжудлигини исботлаш учун, авваламбор (35) ва (39) тенгламалар учун мос равишда қўйилган T_λ ва T_λ^* масалалар ечимининг мавжудлиги исботланади.

8-теорема. *Агар (37) ва $\mu<0$ шартлар бажарилса, у ҳолда D соҳада (35) тенглама учун қўйилган T_λ масаланинг ечими мавжуд бўлади.*

8-теорема (35) тенглама учун қўйилган Коши ва N масалалари ечимидан фойдаланиб, интеграл тенгламалар усули асосида исботланади.

(6) интегралнинг мавжудлигини ва (4) шартларнинг бажарилишини таъминлаш учун $|\lambda|$ параметрнинг етарли катта қийматларида T_λ масала ечимининг баҳоси

$$u(x,y;\lambda)=O\left(1\big/|\lambda|^{\gamma}\right),\quad \gamma>3. \tag{47}$$

кўринишда бўлиши 1-боб § 1.1 келтирилган 4 теоремага ўхшаш исботланади.

6-изоҳ. (6) интегралнинг ва T масала ечимининг мавжудлиги (47) баҳодан келиб чиқади.

6-8 теоремаларга кўра, (31) тенглама учун қўйилган T масаланинг ечими Ω соҳада мавжуд, ягона ва (6) формула орқали топилади, бу ерда $u(x,y;\lambda)=\vartheta(x,y;\lambda)+\theta(x;\lambda)$ бўлиб, $\theta(x;\lambda)$ ва $\vartheta(x,y;\lambda)$ функция мос равишда (42), (28) ва қуйидаги

$$\vartheta(x,y;\lambda)=\vartheta_0(x,y;\lambda)+\iint\limits_{D_1} M_2(x,y;\,\xi,\eta;\lambda)\vartheta_0(\xi,\eta;\lambda)d\xi d\eta \tag{48}$$

формулалар орқали топилади, бунда

$$\vartheta_0(x,y,\lambda)=-\int_0^1 G(x,y;\,\xi,0)\nu(\xi,\lambda)d\xi+$$

$$+\int\limits_{\sigma_0}\left[\varphi(\xi(s),\eta(s);\lambda))-\theta(\xi(s);\lambda)\right]\frac{\partial G(x,y;\xi,\eta)}{\partial n}ds, \tag{49}$$

$G(x;\xi,\eta)=ln\left|\dfrac{x+\zeta-2\zeta x}{x-\zeta}\right|$ функция D_1 соҳада $\upsilon_{xx}+\upsilon_{yy}=0$ Лаплас тенгламаси учун қўйилган N масаланинг Грин функцияси, бу ерда $\zeta=\xi+i\eta$, $\eta^2(s)=1-\xi^2(s)$, $M_2(x,y;\xi,\eta;\lambda)$ эса $-\lambda^2G(x,y;\,\xi,\eta)$ ядро резольвентаси, $n\ -\ \sigma_0$ эгри чизиққа ўтказилган ички нормал, $s\ -\ \sigma_0$ эгри чизиқнинг $\tilde{A}_1(1,0)$ нуқтадан бошлаб ҳисобланган узунлиги.

Қуйидаги теорема ўринли:

9-теорема. *Текисликда (35) тенглама учун қўйилган T_λ масаланинг ечими мавжуд ва (38), (42), (28), (48) формулалар орқали берилган бўлиб, $|\lambda|$ параметрнинг етарлича катта қийматларида (47) баҳо ўринли бўлса, у ҳолда Ω соҳада (31) тенглама учун қўйилган T масаланинг ечими мавжуд бўлиб, (6) формула орқали топилади.*

9-теорема худди 5-теорема каби исботланади.

2.2 параграфда 2.1 параграфда қўланилган усулдан фойдаланиб, юкланган эллиптик-гиперболик тенглама учун Ω соҳада уч ўлчовли Геллерстедт масаласи (Γ масала) ечилади.

Қуйидаги теорема ўринли.

10-теорема. *Агар текисликда (35) тенглама учун қўйилган Γ_λ масаланинг $u(x,y;\lambda)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}U(x,y,z)e^{i\lambda z}dz$ ечими мавжуд ва $|\lambda|$ параметрнинг етарлича катта қийматларида (47) баҳо ўринли бўлса, у ҳолда Ω соҳада (31) тенглама учун қўйилган Γ масаланинг ечими мавжуд бўлади ва (6) формула ёрдамида аниқланади.*

7-изоҳ. (47) баҳо Γ масала ечимининг ва (6) интегралнинг мавжудлигини таъминлайди.

8-изоҳ. Фурье алмаштиришининг хоссаларидан[7] фойдаланиб, (33) тенгликнинг ўринли бўлиши исботланган, яъни $U(x,y,z)$, $U_x(x,y,z)$, $U_y(x,y,z)$, $U_z(x,y,z)$ функциялар $|z|\to\infty$ да нолга интилади ва барча хосмас интеграллар мавжуд бўлади.

9-изоҳ. 10-теоремадан Γ ва Γ_λ масалаларнинг эквивалентлиги келиб чиқади (ёки 10-теореманинг тескари теоремаси ҳам ўринли бўлади).

Диссертациянинг “**Уч ўлчовли чексиз соҳада юкланган учинчи тартибли параболик-гиперболик типдаги тенглама учун чегаравий масалалар**” деб номланган **учинчи бобида** чексиз уч ўлчовли соҳада юкланган учинчи тартибли параболик-гиперболик типдаги тенгламалар учун чегаравий масалалар ўрганилган.

3.1-параграфда уч ўлчовли соҳада учинчи тартибли юкланган параболик-гиперболик типдаги тенглама учун $G_j\ (j=1,2)$ масалалар қўйилган ва ўрганилган.

Ушбу

$$0=\frac{\partial}{\partial y}\begin{cases}U_y-U_{xx}-U_{zz}-\mu U(x,0,z), & (x,y,z)\in\Omega_0,\\ U_{yy}-U_{xx}-U_{zz}-\mu U(x,0,z), & (x,y,z)\in\Omega_1\bigcup\Omega_2\bigcup\Omega_3,\end{cases} \tag{50}$$

$$\mu=const<0 \tag{51}$$

тенгламани қараймиз.

Ω - уч ўлчовли соҳа бўлиб, қуйидаги сиртлар билан чегараланган:

$$\Gamma_k:\ x=k,\ 0\le y\le h,\ z\in R=(-\infty,+\infty),\ k=0,1,$$

$$\Gamma_2:\ y=h>0,\ 0\le x\le 1,\ z\in R,$$

$$S_1:\ x+y=0,\ 0\le x\le 1/2,\ z\in R,\qquad S_2:\ x-y=1,\ 1/2\le x\le 1,\ z\in R.$$

Белгилашлар киритамиз: $I_0=\{(x,y,z):\ 0<x<1,\ y=0,\ z\in R\}$,

$$I_1=\{(x,y,z):\ 0<x<x_0,\ y=0,\ z\in R\},\quad I_2=\{(x,y,z):\ x_0<x<1,\ y=0,\ z\in R\},$$

$$S_{11}:\ x+y=0,\ 0\le x\le x_0/2,\ z\in R,\quad S_{21}:\ x-y=x_0,\ x_0/2\le x\le x_0,\ z\in R,$$

$$S_{12}:\ x+y=x_0,\ x_0\le x\le (1+x_0)/2,\ z\in R,$$

$$S_{22}:\ x-y=1,\ (1+x_0)/2\le x\le 1,\ z\in R;\ \ (x_0,0,z)\in I_0,\ h>0,$$

$$A_1(0,0,z)=\overline{\Gamma}_0\cap\overline{S}_1,\quad A_3(1,h,z)=\overline{\Gamma}_1\cap\overline{\Gamma}_2,\quad A_2(1,0,z)=\overline{\Gamma}_1\cap\overline{S}_2,$$

$$A_4(0,h,z)=\overline{\Gamma}_0\cap\overline{\Gamma}_2,\quad C\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},z\right)=\overline{S}_1\cap\overline{S}_2,\ C_1\left(\frac{x_0}{2},-\frac{x_0}{2},z\right)=\overline{S}_{11}\cap\overline{S}_{21},$$

$$C_2\left(\frac{1+x_0}{2},\frac{x_0-1}{2},z\right)=\overline{S}_{12}\cap\overline{S}_{22},\ E(x_0,0,z)=\overline{S}_{21}\cap\overline{S}_{22},$$

$$\Omega_0=\Omega\bigcap\{(x,y,z):x>0,y>0,z\in R\}=\square A_1A_2A_3A_4,$$

$$\Omega_1=\Omega\bigcap\{(x,y,z):0<x<x_0,\ -x<y<x-x_0,\ z\in R\}=\Delta A_1C_1E,$$

$$\Omega_2=\Omega\bigcap\{(x,y,z):x_0<x<1,\ x_0-x<y<x-1,\ z\in R\}=\Delta EC_2A_2,$$

$$\Omega_3=\square C_1CC_2E,$$

$$D=\Omega\bigcap\{z=0\},\ D_j=\Omega_j\bigcap\{z=0\},\ (j=\overline{0,3}),\quad \gamma_j=\Gamma_j\bigcap\{z=0\},\ (j=\overline{0,2}),$$

$$\sigma_{1j}=S_{1j}\bigcap\{z=0\},\ \sigma_{2j}=S_{2j}\bigcap\{z=0\},(j=1,2),\quad \tilde{A}_j=A_j\bigcap\{z=0\},(j=\overline{1,4}),$$

$$\tilde{E}=E(x_0,0,z)\bigcap\{z=0\},\quad J_j=I_j\bigcap\{z=0\},(j=\overline{0,2}),\quad (x_0,0)\in J_0.$$

G_1 **масала**. *Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $U(x,y,z)$ функция топилсин: 1) $U(x,y,z)$ функция Ω нинг чегарасигача узлуксиз бўлсин; 2) $U(x,y,z)$ функция $C^1(\Omega\bigcup S_{12}\bigcup S_{21})\bigcap C^{2,1,2}_{x,y,z}(\Omega_0)\bigcap C^{2,2,2}_{x,y,z}(\Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3)$ синфга тегишли бўлиб, $\Omega_k\left(k=\overline{0,3}\right)$ соҳаларда (50) тенгламани қаноатлантирсин; 3) $U(x,y,z)$ функция учун қуйидаги шартлар бажарилсин:*

$$U\big|_{\Gamma_0}=\Phi_0(y,z),U\big|_{\Gamma_1}=\Phi_1(y,z),\ 0\le y\le h,\ U\big|_{\Gamma_2}=\Psi_1(x,z),0\le x\le 1,z\in R, \tag{52}$$

$$U\big|_{S_{21}} = \Psi_2(x,z),\ \frac{x_0}{2} \le x \le x_0, \qquad U\big|_{S_{12}} = \Psi_3(x,z),\ x_0 \le x \le \frac{x_0+1}{2},\ z \in R, \qquad (53)$$

$$\lim_{|z|\to\infty} U(x,y,z) = \lim_{|z|\to\infty} U_x(x,y,z) = \lim_{|z|\to\infty} U_y(x,y,z) = \lim_{|z|\to\infty} U_z(x,y,z) = 0, \qquad (54)$$

бу ерда $\Phi_0(y,z), \Phi_1(y,z), \Psi_j(x,z),\ (j=\overline{1,3})-$ *берилган функциялар бўлиб, 1-боб 1.1 параграфдаги T масалада қўйилган шартларни бажаради, шунингдек,* $\Psi_2(x_0,z) = \Psi_3(x_0,z) = 0, \quad \Phi_0(h,z) = \Psi_1(0,z), \quad \Phi_1(h,z) = \Psi_1(1,z),$

$$\lim_{|z|\to\infty} \Phi_l(y,z) = 0,\ (l=0,1), \qquad \lim_{|z|\to\infty} \Psi_j(x,z) = 0,\ (j=\overline{1,3}). \qquad (55)$$

G_2 **масала.** Ω *соҳада* G_1 *масаланинг (53) шартидаги биринчи шартдан бошқа барча шартларни қаноатлантирувчи ва (53) шартнинг биринчиси ўрнига қуйидаги* $U\big|_{S_{11}} = \Psi_4(x,z),\ 0 \le x \le x_0/2,\ z \in R$ *шартни бажарувчи* $U(x,y,z)$ *функция топилсин, бу ерда* $\Psi_4(x,z)-$ *етарлича силлиқ берилган функция, шунингдек,* $\Psi_4(0,z) = \Phi_0(0,z)$, $\lim\limits_{|z|\to\infty} \Psi_4(x,z) = 0.$

G_1 масаланинг бир қийматли ечилиши қуйидаги теоремалардан келиб чиқади.

11-теорема. *Агар (51),* $\Phi_0(y;z) \equiv \Phi_1(y;z) \equiv 0,\ \forall y \in [0,h],\quad \Psi_1(x;z) \equiv 0,$ $\forall x \in [0,1],\quad \Psi_2(x;z) \equiv 0,\ \forall x \in \left[0, \frac{x_0}{2}\right],$ *ва* $\Psi_3(x;z) \equiv 0,\ \forall x \in \left[x_0, \frac{x_0+1}{2}\right],\ z \in R$ *бажарилса, у ҳолда* Ω *соҳада (50) тенглама учун қўйилган* G_1 *масала биттидан кўп бўлмаган ечимга эга бўлади.*

12-теорема. *Агар берилган функциялар* G_1 *масала шартларини бажарса, у ҳолда* Ω *соҳада (50) тенглама учун қўйилган* G_1 *масаланинг ечими мавжуд бўлади.*

11-изоҳ. Фурье алмаштириш хоссаларидан[7] фойдаланиб, (54) тенгликни ўринли бўлиши исботланган, яъни $U(x,y,z)$, $U_x(x,y,z)$, $U_y(x,y,z)$, $U_z(x,y,z)$ функциялар $|z| \to \infty$ да нолга интилади ва барча хосмас интеграллар мавжуд бўлади.

12-изоҳ. Худди шундай, юқоридаги усуллардан фойдаланиб, G_2 масаланинг бир қийматли ечилиши исботланган.

3.2-параграфда чексиз уч ўлчовли соҳада (50) юкланган тенглама учун характеристик текисликларда нормал ҳосилалар билан берилган Трикоми масаласининг аналоги ўрганилган.

G_3 масала Фурье алмаштириши усули ёрдамида ечилган. G_3 масала, (50) тенглама ва чегаравий шартлар Фурье алмаштириш усули ёрдамида текисликда спектрал параметрли $G_{3\lambda}$ келтирилади. G_3 ва $G_{3\lambda}$ масалалар ечимининг ягоналиги учинчи тартибли юкланган аралаш типдаги тенгламалар учун янгидан топилган экстремум принципи ёрдамида исботланади. Ечимнинг умумий кўринишидан фойдаланиб, G_3 ва $G_{3\lambda}$ масала ечимининг мавжудлиги интеграл тенгламалар усули ёрдамида исботланади. Бундан ташқари, спектрал параметрнинг етарли катта қийматлари учун $G_{3\lambda}$ масала ечимининг асимптотик характери ўрганилган. Бажарилган амалларнинг тўғрилигини таъминловчи етарли шартлар топилган.

ХУЛОСА

Диссертация иши уч ўлчовли цилиндрик ва призматик соҳаларда иккинчи ва учинчи тартибли юкланган аралаш типдаги тенгламалар учун Трикоми ва Геллерстедт масалаларининг аналогларини ўрганишга бағишланган.

Тадқиқот натижаларига асосланиб, қуйидаги хулосаларни чиқариш мумкин:

иккинчи тартибли юкланган параболик-гиперболик тенглама учун уч ўлчовли соҳада Трикоми масаласи ечимининг ягоналиги энергия интеграллари усулида, мавжудлиги эса иккинчи тур Вольтерра интеграл тенгламасига келтирилиб исботланган;

уч ўлчовли юкланган параболик-гиперболик ва эллиптик-гиперболик типдаги тенгламалар учун турли характеристик текисликларда Геллерстедт шартлари қатнашган чегаравий масалалар ечимининг ягоналиги ноанъанавий экстремум принципига кўра, мавжудлиги эса умумий ечим кўриниши ҳамда Фурье алмаштириш формуласидан фойдаланиб исботланган;

уч ўлчовли юкланган эллиптик-гиперболик типдаги тенгламалар учун экстремум принципига кўра Трикоми масаласи ечимининг асимптотик характери топилган ва унинг эквивалентлиги исботланган;

цилиндрик соҳада юкланган эллиптик-гиперболик типдаги тенглама учун Геллерстедт масаласи ечимининг бир қийматли ечилиши Фурье алмаштириши ва умумий ечим кўринишидан фойдаланиб исботланган;

уч ўлчовли чексиз соҳада учинчи тартибли юкланган параболик - гиперболик тенглама учун чегаравий масала ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги теоремалар исботланган;

уч ўлчовли чексиз соҳада учинчи тартибли юкланган параболик-гиперболик типдаги тенглама учун номаълум функциянинг нормал ҳосилалари характеристик текисликларда берилган чегаравий масала ечимининг бир қийматли ечилиши параболик-гиперболик тенгламалар учун ноанъанавий экстремум принципи ва интеграл тенгламалар назарияси ёрдамида асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти шундан иборатки, ишда олинган илмий натижалар уч ўлчовли чексиз соҳаларда хусусий ҳосилали аралаш юкланган дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар назариясини янада ривожлантиришда фойдаланилиши мумкин.

Диссертация ишида олинган натижаларнинг амалий аҳамияти уларни аралаш типдаги тенгламалар ёрдамида уч ўлчовли соҳаларда тасвирланган амалий масалаларга қўллаш мумкинлиги билан аниқланади.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ФЕРГАНСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

ТАШКЕНТСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ИМЕНИ МУХАММАДА АЛ-ХОРАЗМИЙ

АЛИКУЛОВ ЁЛКИН КОДИРОВИЧ

ТРЁХМЕРНЫЕ АНАЛОГИ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ И ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ НАГРУЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Фергана–2022

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико – математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за №B 2021.3.PhD/FM627.

Диссертация выполнена в Ташкентском университете информационных технологий.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб – странице Научного совета (www.fdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель: **Исломов Бозор Исломович**
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Фаязов Кудратилла Садридинович**
доктор физико-математических наук, профессор

Каримов Шахобиддин Туйчибоевич
доктор физико-математических наук, доцент

Ведущая организация: **Самаркандский государственный университет**

Защита диссертации состоится «30» 08 2022 года в 10[00] часов на заседании Научного совета PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 при Ферганском государственном университете. (Адрес: 150100, г. Фергана, ул. Мураббийлар, дом 19. Тел: (+99873) 244-44-02, факс: (+99873) 244-44-93, e-mail: fardu_info@umail.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно – ресурсном центре Ферганского государственного университета (зарегистрирована за №180). (Адрес: 150100, г. Фергана, ул. Мураббийлар, дом 19).Тел.: (+99873) 244-44-94.

Автореферат диссертации разослан «16» 08 2022 г.
(протокол рассылки № 1 от «16» 08 2022 г.).

А.К.Уринов
Председатель научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф-м.н., профессор

И.У. Хайдаров
Ученый секретарь научного совета по присуждению ученых степеней, к.ф-м.н.

Ш.Т.Каримов
Председатель научного семинара при научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф-м.н., доцент

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. В мире изучение многих важных проблем математической физики и биологии сводится к изучению краевых задач для уравнений смешанного типа второго и третьего порядка. В этом случае дифференциальные уравнения с частными производными нагруженного смешанного параболико-гиперболического и эллиптическо-гиперболического типа занимают важное место в задачах долгосрочного анализа и регулирования подземных вод, в моделировании процессов движения частиц, в задачах проводимости тепла и массы с ограниченной скоростью, задач фильтрации жидкости в пористых средах, в изучении обратных задач и математическом моделировании многих проблем в оптимальном управлении агроэкосистем. В связи с этим особое внимание уделяется теории дифференциальных уравнений с частными производными, в том числе для уравнений смешанного типа с нагрузкой второго и третьего порядка, для постановки и решения коррекционных локальных и нелокальных задач.

В мире за последние годы проводятся научные исследования для таких задач, как доказательства существования и единственности решения задачи, аналогичной задаче Трикоми для параболико-гиперболического уравнения второго порядка в трехмерных бесконечных областях, ставится и изучается краевая задача в призматических областях для параболико-гиперболического уравнения в плоскости параллельных характеристик заданную условиями Геллерстедта, в бесконечно цилиндрических областях для эллептико-гиперболического уравнения второго порядка аналогичных задачам Трикоми и Геллерстедтта. В этом направлении, включая изучение краевых задач для нагруженных уравнений смешанного типа, исследования считаются приоритетными. В то же время постановка и исследование краевых задач для уравнения смешанного типа третьего порядка в трехмерной бесконечной области считаются актуальными задачами.

В настоящее время в нашей республике реализуются масштабные меры по направлению фундаментальных исследований в научно-практическую деятельность. В частности, при решении теоретических и практических задач особое внимание уделяется поиску и изучению эффективных методов решения классических и неклассических задач для загруженных и незагруженных дифференциальных уравнений с частными производными в трехмерных областях. В качестве основных задач и направлений определено проведение научных исследований на уровне международных стандартов в приоритетных областях дифференциальных уравнений с частными производными, математической физики, алгебры и функционального анализа, динамических систем и оптимального управления, прикладной математики и математического моделирования, математического анализа и теории функций, теории вероятностей и математической статистики.

деятельности ученых– математиков[1]. При реализации этих задач важно ставить и исследовать новые корректные локальные и нелокальные задачи, а также краевые задачи для нагруженных уравнений смешанного типа второго и третьего порядка в трехмерных областях.

Проблема исследования настоящей диссертации находится в русле задач, обозначенных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», ПП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии Наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», ПП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан», ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно–правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. "Математика, механика и информатика".

Степень изученности проблемы. Краевые задачи для ненагруженных уравнений смешанного типа в ограниченных и неограниченных трехмерных областях изучались и разрабатывались М.Н.Проттера, А.В.Бицадзе, М.С.Салахитдинова, Т.Д.Джураева, А.М.Нахушева, В.Н.Врагова, Т.Ш.Калменова, Е.И.Моисеева, С.М.Пономарева, К.Б.Сабитова, Г.Д.Каратопраклиева, В.П.Диденко, Н.Г.Сорокиной, М.Шнейдера, С.А.Алдашева, А.М.Ежова, С.П.Пулькина, А.Б.Хасанова, К.С.Фаязова, Ю.П.Апакова и их учениками.

В первые в 1976 г. А.М.Нахушев[2,3] изучил дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных, а также представил их полную классификацию и упомянул об их использовании в различных процессах. Позднее это направление развивали зарубежные ученые А.И.Кожанов, К.Б.Сабитов, В.А.Дженалиев, А.Х.Аттаев, П.Агарвал, Б.С.Кишин и ученые нашей республики Р.Р.Ашуров, А.Б.Хасанов, Б.И.Исломов, О.С.Зикиров, Ш.Т.Каримов, Д.М.Курьязов, У.И.Болтаева и О.Х.Абдуллаев.

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан»

[2] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа. 1995. 301 с.

[3] Nakhushev A.B. Nonlocal problem and the Goursat problem for loaded hyperbolic equation and their application in prediction of ground moisture // Soviet Math. Dokl. 1978. Vol.19. № 5, pp. 1243-1247.

Поскольку краевые задачи для нагруженных эллиптико-гиперболических и параболо-гиперболических уравнений в бесконечных цилиндрических и призматических областях, до сих пор не рассматривались, поэтому в данной диссертационной работе изучаются трёхмерные аналоги задач Трикоми и Геллерстедта для нагруженных уравнений параболо-гиперболического и эллиптико-гиперболического типов.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего образовательного учреждения, где выполнена диссертация. Диссертационная работа выполнена в рамках проекта государственного гранта Ургенчского государственного университета под названием "Однозначные исследования краевых задач для нагруженных уравнений смешанного типа с характеристическими и нехарактеристическими линиями изменения" (2018-2019 гг.) под номером ЁОТ-Фтех-2018-142.

Цель исследования основной целью диссертационной работы является постановка и изучение трёхмерных аналогов краевых задач Трикоми и Геллерстедта для нагруженных уравнений смешанного типа второго и третьего порядка.

Задачи исследования, решаемые в данной работе, следующие:

доказать теоремы существования и единственности решения аналога задачи Трикоми для нагруженного уравнения параболо - гиперболического типа второго порядка в бесконечной трёхмерной области;

получить оценки решения трехмерного аналога задачи Трикоми для нагруженного уравнения параболо - гиперболического типа второго порядка при больших значениях параметра;

изучить краевые задачи с условиями Геллерстедта на параллельных характеристических плоскостях для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа в призматических областях;

исследовать аналоги задач Трикоми и Геллерстедта для нагруженного уравнения эллиптико-гиперболического типа второго порядка в бесконечных цилиндрических областях;

доказать теоремы существования и единственности решения краевой задачи для нагруженного уравнения параболо - гиперболического типа третьего порядка в бесконечной трёхмерной области;

изучить аналог задачи Трикоми с заданными значениями нормальных производных на характеристических плоскостях для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка в бесконечной трёхмерной области.

Объектом исследования является нагруженные уравнения смешанного типа второго и третьего порядка в трёхмерных областях.

Предметом исследования являются исследование задач Трикоми и Геллерстедта для нагруженного уравнения параболо-гиперболического и эллиптико-гиперболического типов второго и третьего порядка в трехмерных областях.

Методы исследований. В диссертации использованы методы математического анализа, дифференциальных уравнений в частных производных, математической физики, теории специальных функций, преобразований Фурье, интегральных уравнений.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

единственность решения задачи Трикоми для трехмерного нагруженного параболо-гиперболического уравнения второго порядка доказана методом интегралов энергии, а существование – сведением к интегральному уравнению Вольтерра второго рода;

применяя нетрадиционный принцип экстремума и преобразование Фурье, а также общее представление решения трехмерных нагруженных уравнений параболо-гиперболического, эллиптико- гиперболического типов доказаны однозначной разрешимости краевых задач с условиями Геллерстедта на разных характеристических плоскостях;

на основе принципа экстремума для нагруженных трехмерных уравнений эллиптико-гиперболического типа найдено асимптотическое поведение решения задачи Трикоми и доказана эквивалентность поставленных задач как в пространстве, так и на плоскости;

доказаны теоремы существования и единственности решения краевой задачи для нагруженного параболо-гиперболического уравнения третьего порядка в трехмерной бесконечной области;

однозначная разришимость краевых задач, у которых нормальные производные и сама искомая функция заданы в характеристических плоскостях для нагруженного параболо-гиперболического уравнения третьего порядка в бесконечной призматической области, основано на нетрадиционном принципе экстремума для параболо-гиперболических уравнений и теория интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

Практические результаты исследования заключаются в следующем:

На основе результатов, полученных при решении краевых задач для нагруженных уравнений смешанного типа второго и третьего порядка в трехмерных областях, она основана на возможности нахождения сильных решений нескольких краевых задач в функциональных пространствах для нелокальных аналогов параболо-гиперболических уравнений второго порядка.

Новые задачи, изучаемые для уравнений смешанного типа в трехмерных областях, используются при моделировании динамических систем и решении задач управления, а также при исследовании краевых задач для локальных и нелокальных (нагруженных и интегро-дифференциальных) уравнений второго и третьего порядка. параболо-гиперболического типа, которые эффективно используются в математике, и доказано, что его можно использовать при моделировании в различных физических биологических процессов.

Достоверность результатов исследования. Используя методы теории специальных производных дифференциальных уравнений и интегральных уравнений, дедуктивные выводы основаны на принятии, а также на строгом и полном доказательстве теорем.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования заключается в том, что полученные в работе научные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории краевых задач для смешанных нагруженных уравнений с частными производными в бесконечных трёхмерных областях.

Практическое значение результатов, полученных в диссертационной работе, определяется их приложением к практическим задачам, описываемым в трехмерных областях при помощи уравнений смешанного типа.

Внедрение результатов исследования. На основе исследования задач Трикоми и Геллерстедта для нагруженных уравнений смешанного типа в трехмерном пространством:

трёхмерные аналоги задачи Трикоми и Геллерстедта для нагруженных уравнений смешанного типа второго порядка были использованы в зарубежном гранте на тему «Вопросы разрешимости краевых и начально-краевых задач для нелокальных дифференциальных уравнений в частных производных». (Справка № 04/792 от 29.03.2022 Международный казахско-турецкий университет имени Ходжа Ахмеда Яссави). Применение этих научных результатов позволило исследовать сильную разрешимость ряда задач для нелокальных аналогов параболических и гиперболических уравнений второго порядка в функциональных пространствах;

результаты по исследованию трёхмерных аналогов задач Трикоми и Геллерстедта для нагруженных уравнений смешанного типа в зарубежном проекте «Краевые задачи для уравнений основных и смешанных типов, их применение к задачам управления и моделирования динамических систем» (№ НИОКТР АААА-А19-119013190078-8, 2019-2021 гг.) в Институте прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН (Справка № 01-14/22 от 07.04.2022 Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балгарского научного центра РАН). Применение при решении краевых задач для локальных и нелокальных (нагруженных и интегро-дифференциальных) уравнений параболо-гиперболического типа второго и третьего порядков, имеющих эффективное применение при моделировании динамических систем и решении задач управления, а также при математическом моделировании различных физических и биологических процессов.

Апробация результатов исследования. Результаты обсуждались на 14 научно–практических конференциях, в том числе, на 6 международных и 8 республиканских научно–практических конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 22 научные работы, 8 из них опубликованы в виде научных статей, 4 из них зарубежные и 4 опубликованы в республиканских журналах, признанных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 125 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объекты и предмет исследования, изложена научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, а также об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первая глава диссертации, названная «З**адачи Трикоми и Геллерстедта для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа второго порядка в бесконечной призматической области**», состоит из трех параграфов. В ней сформулированы и изучены краевые задачи для нагруженных уравнений в частных производных смешанного типа второго порядка.

В 1.1 параграфе изучается аналог задачи Трикоми для нагруженного уравнения параболо - гиперболического типа второго порядка в бесконечной трёхмерной области.

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} U_y-U_{xx}-U_{zz}-\mu U(x,0,z) & (x,y,z)\in\Omega_1, \\ U_{yy}-U_{xx}-U_{zz}-\mu U(x,0,z) & (x,y,z)\in\Omega_2. \end{cases} \tag{1}$$

Пусть Ω - бесконечная призматическая область трёхмерного пространства, ограниченная поверхностями:

$$\Gamma_j:\ x=k,\ 0\le y\le h,\ z\in R=(-\infty,+\infty),\ k=\begin{cases}0 & при\ j=1,\\ 1 & при\ j=2,\end{cases}$$

$$\Gamma_3:\ y=h,\ 0\le x\le 1,\ z\in R,\ \Gamma_4:\ x+y=0,\ 0\le x\le 1/2,\ z\in R,$$

$$\Gamma_5:\ x-y=1,\ 1/2\le x\le 1,\ z\in R.$$

Введём обозначения $I=\{\ (x,y,z):0<x<1,\ \ y=0,\ z\in(-\infty,+\infty)\}$,
$\Omega_1=\Omega\bigcap\{\ (x,y,z):x>0,y>0,\ z\in R\}$, $\quad\Omega_2=\Omega\bigcap\{(x,y,z):x>0,y<0,z\in R\}$,
$l_0=\bar\Gamma_4\cap\bar\Gamma_5$, $l_1=\bar\Gamma_1\cap\bar\Gamma_4$, $l_2=\bar\Gamma_2\cap\bar\Gamma_5$, $D=\Omega\bigcap\{z=0\}$, $D_i=\Omega_i\bigcap\{z=0\}$,
$(i=1,2)$, $\sigma_j=\Gamma_j\bigcap\{z=0\}$, $(j=\overline{1,5})$, $\tilde A_k=l_k\bigcap\ \{z=0\}$, $(k=\overline{0,2})$,
$J=I\bigcap\ \{z=0\}$.

Уравнение (1) является уравнением параболического и гиперболического типа в областях Ω_1 и Ω_2 соответственно.

Задача AT. *Найти функцию* $U(x,y,z)$ *со следующими свойствами: 1)* $U(x,y,z)$ *функция непрерывна вплоть до границы области* Ω*; 2)* $U(x,y,z)$ *непрерывно дифференцируемая функция в области* Ω, *причем* $U_x(x,y,z)$ *и*

$U_y(x,y,z)$ *могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы на линиях* l_1 *и* l_2*;* *3)*$U(x,y,z)\in C^{2,1,2}_{x,y,z}(\Omega_1)\bigcap C^{2,2,2}_{x,y,z}(\Omega_2)$ *и удовлетворяет уравнению (1) в областях* $\Omega_j\left(j=1,2\right)$*;* *4)* $U(x,y,z)$ *удовлетворяет условиям*

$$U\big|_{\Gamma_1}=\Phi_1(y,z),\quad U\big|_{\Gamma_2}=\Phi_2(y,z),\quad 0\le y\le h,\quad z\in R, \tag{2}$$

$$U\big|_{\Gamma_4}=\Psi\left(x,z\right),\quad 0\le x\le\frac{1}{2},\ z\in R, \tag{3}$$

$$\lim_{|z|\to\infty}U(x,y,z)=\lim_{|z|\to\infty}\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}=\lim_{|z|\to\infty}\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}=\lim_{|z|\to\infty}\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}=0, \tag{4}$$

где $\Phi_j(y,z),\Psi(x,z)$ – абсолютно интегрируемые функции по z в интервале $(-\infty,+\infty)$, кроме этого, функция $\Phi_j(y,z)$, как функция от «*y*», принадлежит классу $C\left[0;h\right]\cap C^1(0,h)$, а $\Psi(x,z)$, как функция от «*x*», принадлежит классу $C^1\left[0,\frac{1}{2}\right]\cap C^2\left(0,\frac{1}{2}\right)$, причем $\Phi_1(0,z)=\Psi(0,z)=0$,

$$\lim_{|z|\to\infty}\Phi_j(y,z)=0,\ (j=1,2),\qquad \lim_{|z|\to\infty}\Psi(x,z)=0. \tag{5}$$

Применяя преобразование Фурье

$$U\left(x,y,z\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u\left(x,y;\lambda\right)e^{-i\lambda z}d\lambda \tag{6}$$

к уравнению (1), получаем следующее уравнение:

$$0=\begin{cases}u_y-u_{xx}+\lambda^2u-\mu u\left(x,0;\lambda\right), & (x,y)\in D_1,\\ u_{yy}-u_{xx}+\lambda^2u-\mu u\left(x,0;\lambda\right), & (x,y)\in D_2,\quad \lambda\in R,\quad \mu<0.\end{cases} \tag{7}$$

В силу (6), задача AT эквивалентно сводится к следующей задаче:

Задача AT_λ**.** *Определить функцию* $u(x,y;\lambda)$ *такую, что 1)* $u(x,y;\lambda)$ *непрерывная функция в* $\bar{D}$ *и непрерывно-дифференцируемая в* $D\cup\sigma_4$*, причем* $u_x\left(x,y\,;\lambda\right)$ *и* $u_y\left(x,y\,;\lambda\right)$ *могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы в точках* $\tilde{A}_1$ *и* $\tilde{A}_2$*;* *2)* $u(x,y;\lambda)\in C^{2,1}_{x,y}(D_1)\cap C^{2,2}_{x,y}(D_2)$ *и удовлетворяет уравнению (7) в областях* $D_j,(j=1,2)$*;* *3)* $u(x,y,\lambda)$ *удовлетворяет условиям*

$$u\big|_{\sigma_1}=\varphi_1(y;\lambda),\quad u\big|_{\sigma_2}=\varphi_2(y;\lambda),\quad 0\le y\le h,\quad \lambda\in R, \tag{8}$$

$$u\big|_{\sigma_4}=\psi(x;\lambda),\quad 0\le x\le\frac{1}{2},\quad \lambda\in R, \tag{9}$$

где $\varphi_1(y;\lambda)$, $\varphi_2(y;\lambda)$, $\psi(x;\lambda)-$ *заданные функции, причем*

$$\varphi_j(y;\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_j(y,z)e^{i\lambda z}dz,\ (j=0,1), \tag{10}$$

$$\psi(x;\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Psi(x,z)e^{i\lambda z}dz, \tag{11}$$

$$\varphi_j(y;\lambda)\in C[0;h]\cap C^1(0,h),\ (j=1,2), \tag{12}$$

$$\psi(x;\lambda)\in C^1[0;0,5]\cap C^2(0;0,5),\quad \psi(0;\lambda)=\varphi_1(0;\lambda)=0. \tag{13}$$

Любое регулярное решение уравнения (7) представимо в виде[4]

$$u(x,y;\lambda)=\upsilon(x,y;\lambda)+\omega(x;\lambda), \tag{14}$$

где $\upsilon(x,y,\lambda)$ – решение уравнения

$$0=\begin{cases}\upsilon_y-\upsilon_{xx}+\lambda^2\upsilon & в\ D_1,\\ \upsilon_{yy}-\upsilon_{xx}+\lambda^2\upsilon & в\ D_2,\end{cases} \tag{15}$$

а $\omega(x,\lambda)$–решение следующего обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\omega''(x;\lambda)-\left(\lambda^2-\mu\right)\omega(x;\lambda)=-\mu\upsilon(x,0;\lambda),\ (x,0)\in J. \tag{16}$$

Замечание 1. Учитывая, что функция $ach\lambda x+bsh\lambda x$ удовлетворяет уравнению (15), при исследовании задачи AT_λ без ограничения общности можно предполажить, что

$$\omega(0;\lambda)=\omega(1;\lambda)=0, \tag{17}$$

Решение задач (16) и (17) представимо в виде

$$\omega(x;\lambda)=\frac{\mu\, shx\sqrt{\lambda^2-\mu}}{\sqrt{\lambda^2-\mu}\,sh\sqrt{\lambda^2-\mu}}\int\limits_0^1 sh\left[\left(1-t\right)\sqrt{\lambda^2-\mu}\right]\upsilon(t,0;\lambda)dt-$$

$$-\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2-\mu}}\int\limits_0^x sh\left(x-t\right)\sqrt{\lambda^2-\mu}\,\upsilon(t,0;\lambda)dt,\ x\in\bar{J}, \tag{18}$$

здесь $\upsilon(x,0;\lambda)=\tau(x;\lambda),\quad (x,0)\in\bar{J}$.

Для доказательства единственности решения задачи AT_λ важную роль играет следующая лемма:

Лемма 1. Если

$\varphi_1(y;\lambda)\equiv\varphi_2(y;\lambda)\equiv 0,\ \forall y\in[0,h],\qquad \psi(x;\lambda)\equiv 0,\ \forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right],\ \lambda\in R$, то

$$\tau(x;\lambda)\equiv 0,\ \ \forall x\in\bar{J}. \tag{19}$$

Лемма 1 доказывается методом интегралов энергии.

В силу (19) из (18) с учетом (17), получим

$$\omega(x;\lambda)\equiv 0,\qquad \forall\, x\in\bar{J},\qquad \lambda\in R. \tag{20}$$

Теорема 1. *Если выполнены условия леммы 1, $\mu<0$ и условия (20), то в области D задача AT_λ для уравнения (7) может иметь не более одного*

[4] Исломов Б., Курьязов Д.М. Краевые задачи для смешанного нагруженного уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа. // “Узбекский математический журнал”. 2000. № 2. С. 29-35.

решения.

Теорема 1 доказывается с использованием известного принципа максимума для параболических и гиперболических уравнений.

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы 1, то в области* Ω *задача* AT *для уравнения (1) может иметь не более одного решения.*

Теорема 3. *Если выполнены условия* $\mu<0$ *и (12) - (13), то в области* D *решение задачи* AT_λ *для уравнения (7) существует.*

Теорема 3 доказывается методом интегральных уравнений с использованием решения задачи Коши и следуюшей задачи:

$$\tau''(x;\lambda)-\lambda^2\tau(x;\lambda)=\nu(x;\lambda), \quad x\in J, \quad \lambda\in R, \tag{21}$$

$$\tau(0;\lambda)=\varphi_1(0;\lambda), \qquad \tau(1;\lambda)=\varphi_2(0;\lambda). \tag{22}$$

Для обеспечения существования интеграла (6) и выполнения условий (4) найдены оценки решения задачи AT_λ при больших значениях параметра $|\lambda|$.

Теорема 4. *Если выполнены условия*

$$\varphi_1(y;\lambda)=O\left(\frac{1}{|\lambda|^k ch\lambda}\right), \varphi_2(y;\lambda)=O\left(\frac{1}{|\lambda|^k}\right), y\in[0,h], \omega(x;\lambda)=O\left(\frac{1}{|\lambda|^k}\right), x\in J, \tag{23}$$

$$\omega(x;\lambda)=O\left(\frac{1}{|\lambda|^{k+1} ch\lambda\ th\frac{|\lambda|}{2}}\right), \quad \omega_x'(x;\lambda)=O\left(\frac{1}{|\lambda|^k ch\lambda}\right), \quad x\in\bar\sigma_4, \tag{24}$$

$$\psi(x;\lambda)=O\left(\frac{1}{|\lambda|^{k+1} ch\lambda\, th\frac{|\lambda|}{2}}\right), \quad \psi_x'(x;\lambda)=O\left(\frac{1}{|\lambda|^k ch\lambda}\right), \quad x\in\bar\sigma_4, \tag{25}$$

то функция $u(x,y,\lambda)$ *при больших значениях* $|\lambda|$ *допускает оценку*

$$u(x,y;\lambda)=O\left(\frac{1}{|\lambda|^k}\right), \quad k>3. \tag{26}$$

При условиях (23)-(25) справедливость оценки (26) следует из следущего неравенства:

$$\begin{aligned}|u(x,y,\lambda)|\le ch\lambda\Bigg\{&\max_{\bar\sigma_1}|\varphi_1(y;\lambda)|+\frac{1}{ch|\lambda|}\max_{\bar\sigma_2}|\varphi_2(y,\lambda)|+\\ &+3h\max_{\bar\sigma_4}|\psi_x'(x,\lambda)|+3h|\lambda|th\frac{|\lambda|}{2}\max_{\bar\sigma_4}|\psi(x,\lambda)|+3h\,max_{\bar\sigma_4}|\omega'(x;\lambda)|+\\ &+3h|\lambda|th\frac{|\lambda|}{2}max_{\bar\sigma_4}|\omega(x;\lambda)|\Bigg\}+|\omega(x;\lambda)|\le\frac{c_1}{|\lambda|^k}, \quad k>3, \quad c_1=const>0.\end{aligned} \tag{27}$$

Замечание 2. Из оценки (27) следует единственность решения задачи AT_λ, а также непрерывная зависимость решения от заданных функций при любом фиксированном λ.

Замечание 3. Оценка (26) обеспечивает существование интеграла (6), дающего решение задачи AT.

На основании теорем 1-4 заключаем, что решение задачи AT для уравнения (1) в области Ω существует, единственно и даётся формулой (6), где $u(x,y;\lambda)=\upsilon(x,y;\lambda)+\omega(x;\lambda)$, здесь $\omega(x;\lambda)$ и $\upsilon(x,y;\lambda)$ - имеють вид (18) и

$$\upsilon(x,y;\lambda)=\frac{1}{2}\left[\tau(x+y;\lambda)+\tau(x-y;\lambda)\right]+\frac{\lambda y}{2}\int_{x-y}^{x+y}\tau(\xi,\lambda)\overline{I_1}\left[\lambda\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right]d\xi-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}\nu(\xi,\lambda)I_0\left[\lambda\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right]d\xi,\ (x,y)\in D_2, \tag{28}$$

$$\upsilon(x,y;\lambda)=\upsilon_0(x,y;\lambda)+\int_0^y d\eta\int_0^1 M_1(x,y;\xi,\eta;\lambda)\upsilon_0(\xi,\eta;\lambda)d\xi,\ (x,y)\in D_1, \tag{29}$$

где

$$\upsilon_0(x,y;\lambda)=\int_0^y G_{1\xi}(x,y;0,\eta)\varphi_1(\eta,\lambda)d\eta+\int_0^y G_{1\xi}(x,y;1,\eta)\varphi_2(\eta,\lambda)d\eta+$$

$$+\int_0^1 G_1(x,y;\xi,0)\tau(\xi;\lambda)d\xi, \tag{30}$$

$G_1(x,y;\xi,\eta)$-функция Грина первой краевой задачи для уравнения $\upsilon_{xx}-\upsilon_y=0$, $M_1(x,y;\xi,\eta;\lambda)$ резольвента ядра $-\lambda^2 G_1(x,y;\xi,\eta)$.

Теорема 5. *Пусть решение $u(x,y,\lambda)$ плоской задачи AT_λ для уравнения (7) существует и дается формулой (14), (18), (28), (29) и при больших значениях $|\lambda|$ допускает оценку (26). Тогда в области Ω решение задачи AT для уравнения (1) существует и находится формулой (6).*

Теорема 5 доказывается с использованием свойства преобразований Фурье и леммы Римана[5].

Замечание 4. Из теоремы 5 следует эквивалентность задач AT и AT_λ (т.е. справедливо обратная теорема 5).

В 1.2 и 1.3 параграфах изучаются задачи с условиями Геллерстедта на параллельных и разных характеристических плоскостях (задачи AG и $A\Gamma_j$) для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа в трехмерной области. Основным методом исследования задачи AG является преобразование Фурье. На основе преобразования Фурье задача AG и уравнение сводится к плоскому аналогу задачи Геллерстедта (задача AG_λ) со спектральным параметром, как в уравнении, так и в граничных условиях. Доказана единственность решения задачи AG и AG_λ с помощью принципа экстремума для нагруженных уравнений смешанного типа второго порядка.

[5]Самко С.Г., Кильбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, Наука и Техника, 1987. 668 с.

Используя общее представление решения уравнения, доказывается существование решений задачи AG и AG_{λ} методом интегральных уравнений.

Кроме того, изучено асимптотическое поведение решения задачи AG_{λ} при больших значениях спектрального параметра. Найдены достаточные условия, при которых все операции законны. Аналогичным методом исследована однозначная разрешимость задачи $A\Gamma_j$ $(j=1,2)$.

Во второй главе диссертации, названной «**Задачи Трикоми и Геллерстедта для нагруженного уравнения эллиптико-гиперболического типа в трёхмерном пространстве**», изучаются аналоги задач Трикоми и Геллерстедта для нагруженного уравнения эллиптико-гиперболического типа второго порядка в бесконечной цилиндрической области.

В 2.1 параграфе изучается аналог задачи Трикоми для нагруженного уравнения эллиптико-гиперболического типа второго порядка в бесконечной цилиндрической области.

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} U_{yy}+U_{xx}-U_{zz}+\mu U(x,0,z) & в\ \Omega_1, \\ U_{yy}-U_{xx}-U_{zz}-\mu U(x,0,z) & в\ \Omega_2. \end{cases} \qquad (31)$$

Пусть Ω-область трёхмерного пространства, ограниченная поверхностями

$$S_0:\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4},\ y\ge 0,\quad z\in R=(-\infty,+\infty),$$

$$S_1: x+y=0,\ 0\le x\le\frac{1}{2},\ z\in R, \qquad S_2: x-y=1,\ \frac{1}{2}\le x\le 1,\ z\in R.$$

Уравнение (31) является уравнением эллиптического и гиперболического типа в областях Ω_1 и Ω_2 соответственно.

Введём обозначения: $I=\{(x,y,z):\ 0<x<1,\ y=0,\ z\in R\}$, $J=I\cap\{z=0\}$,

$$\Omega_1=\Omega\cap\{(x,y,z): x>0, y>0, z\in R\},\quad \Omega_2=\Omega\cap\{(x,y,z): x>0, y<0, z\in R\},$$

$$A_0(0,0,z)=\bar S_0\cap\bar S_1,\ \ A_1(1,0,z)=\bar S_0\cap\bar S_2,\ \ A_2\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},z\right)=\bar S_1\cap\bar S_2,$$

$$D=\Omega\cap\{z=0\},\ D_j=\Omega_j\cap\{z=0\},\ (j=1,2),\ \sigma_j=S_j\cap\{z=0\},\ (j=\overline{0,2}),$$

$$\tilde A_l=A_l\cap\{z=0\},\ (l=\overline{0,2}).$$

Задача T. *Определить функцию* $U(x,y,z)$ *такую, что: 1)* $U(x,y,z)\in C(\bar\Omega)\cap C^1(\Omega\cup S_1)$, *причем* $U_y(x,0,z)$ *может обращаться в бесконечность порядка меньше единицы на линии* A_0 *и ограничена на линии* A_1*; 2)* $U(x,y,z)$ *- дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (7) в областях* Ω_1 *и* Ω_2*; 3)* $U(x,y,z)$ *удовлетворяет условиям*

$$U\big|_{S_0}=\Phi(x,z),\quad 0\le x\le 1,\quad U\big|_{S_1}=\Psi(x,z),\quad 0\le x\le \frac{1}{2},\quad z\in R, \tag{32}$$

$$\lim_{|z|\to\infty}U(x,y,z)=\lim_{|z|\to\infty}U_y(x,y,z)=\lim_{|z|\to\infty}U_x(x,y,z)=\lim_{|z|\to\infty}U_z(x,y,z)=0\,, \tag{33}$$

где $\Phi(x,z), \Psi(x,z)$ *- абсолютно интегрируемые функции по z в интервале* $(-\infty,+\infty)$, *кроме этого, функции* $\Phi(x,z)$ *и* $\Psi(x,z)$ *соответственно, как функции от «x», принадлежат классу* $C\left(\bar{I}\right)$ *и* $C^3\left[0,\frac{1}{2}\right]$, *причем*

$$\Psi(0,z)=\Phi(0,z)\,,\ \lim_{|z|\to\infty}\Phi(x,z)=\lim_{|z|\to\infty}\Psi(x,z)=0\,. \tag{34}$$

Решение задачи T будем искать в классе функций, представимых интегралом Фурье (6). Применяя преобразование Фурье (6) к уравнению (31), получаем следующее уравнение

$$0=\begin{cases}u_{yy}+u_{xx}-\lambda^2u+\mu u(x,0,\lambda), & (x,y)\in D_1,\\ u_{yy}-u_{xx}+\lambda^2u-\mu u\left(x,0;\lambda\right), & (x,y)\in D_2,\ \lambda\in R,\quad \mu<0,\end{cases} \tag{35}$$

и, в силу (6), задача T эквивалентно сводится к следующей задаче:

Задаче T_λ. *Найти функцию* $u(x,y,\lambda)$ *со следующими свойствами:*

1) $u(x,y,\lambda)\in C\left(\bar{D}\right)\cap C^1\left(D\cup A_0A_2\right)$, *причем* $u_y(x,0,\lambda)$ *может обращаться в бесконечность порядка меньше единицы при* $x\to 0$, *а при* $x\to 1$ *ограничена;* *2)* $u(x,y,\lambda)$ *- дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (35) в областях* D_1 *и* D_2; *3)* $u(x,y,\lambda)$ *удовлетворяет условиям*

$$u\big|_{\sigma_0}=\varphi(x,\lambda),\quad 0\le x\le 1,\quad u\big|_{A_0A_2}=\psi(x,\lambda),\quad 0\le x\le\frac{1}{2},\quad \lambda\in R, \tag{36}$$

где $\varphi(x,\lambda),\quad \psi(x,\lambda)$ *- заданные функции, причем* $\varphi(0,\lambda)=\psi(0,\lambda)$,

$$\varphi(x,\lambda)=\left[\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]^{\frac{\varepsilon}{2}}\varphi_0(x,\lambda),\varphi_0(x,\lambda)\in C\left(\bar{I}\right),\ \varepsilon\ge 1,\ \psi(x,\lambda)\in C^3\left[0,\frac{1}{2}\right]. \tag{37}$$

Любые регулярные решения уравнения (35) представимы в виде[6]

$$u(x,y,\lambda)=\vartheta(x,y,\lambda)+\theta(x,\lambda)\,, \tag{38}$$

где $\vartheta(x,y,\lambda)$ - решение уравнения

$$0=\begin{cases}\vartheta_{yy}+\vartheta_{xx}-\lambda^2\vartheta & в\ D_1,\\ \vartheta_{yy}-\vartheta_{xx}+\lambda^2\vartheta & в\ D_2,\end{cases} \tag{39}$$

а $\theta(x,\lambda)$ - решение следующего обыкновенного дифференциального уравнения

$$\theta''(x,\lambda)-\left(\lambda^2-\mu\right)\theta\left(x,\lambda\right)=-\mu\vartheta(x,0,\lambda)\,. \tag{40}$$

Замечание 5. Учитывая, что функция $ach\left[\sqrt{\lambda^2-\mu}\cdot x\right]+bsh\left[\sqrt{\lambda^2-\mu}\cdot x\right]$ удовлетворяет уравнению (39), при исследовании задачи T_λ без ограничения общности можно предположить, что

$$\theta(0,\lambda)=\theta'(0,\lambda)=0\,. \qquad (41)$$

Решение задачи (40) и (41) представимо в виде

$$\theta(x,\lambda)=-\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2-\mu}}\int_0^x sh\left[\sqrt{\lambda^2-\mu}\cdot(x-t)\right]\tau(t,\lambda)dt\,, \qquad (42)$$

где $\tau(x,\lambda)=\vartheta(x,0;\lambda)$.

В силу представления (38), задача T_λ редуцируется задаче T_λ^* о нахождении регулярного в области D решения $\vartheta(x,y,\lambda)$ уравнения (39), удовлетворяющего условиям

$$\vartheta\big|_{\sigma_0}=\varphi(x,\lambda)-\theta(x,\lambda),\ 0\le x\le 1,\ \vartheta\big|_{\tilde{A}_0\tilde{A}_2}=\psi(x,\lambda)-\theta(x,\lambda),\ 0\le x\le\frac{1}{2},\ \lambda\in R, \quad (43)$$

где $\theta(x,\lambda)$ определяются из (42).

Лемма 2. Если $\varphi(x;\lambda)\equiv\psi(x;\lambda)\equiv 0,\ \ \forall x\in[0,1],\ \ \lambda\in R$, то

$$\tau(x;\lambda)\equiv 0\,,\ \forall x\in[0,1]. \qquad (44)$$

Лемма 2 доказывается с помощью аналога принципа экстремума А.В. Бицадзе[6].

В силу (45) из (42) имеем

$$\theta(x,\lambda)\equiv 0,\quad \forall x\in[0,1],\quad \lambda\in R. \qquad (45)$$

Единственность решения задачи T_λ^* вытекает из леммы 2 и следующей оценки:

$$\left|\vartheta(x,y;\lambda)\right|\le ch\left|\lambda\right|\left\{\max_{\bar{\sigma}_0}\left|\varphi(x;\lambda)\right|+\max_{\bar{\sigma}_0}\left|\theta(x;\lambda)\right|+\right.$$

$$\left.+M_1\left[\max_{\tilde{A}_0\tilde{A}_2}\left|\psi'(x;\lambda)\right|+\max_{\tilde{A}_0\tilde{A}_2}\left|\theta'(x;\lambda)\right|+\left|\lambda\right|th\frac{|\lambda|}{2}\max_{\tilde{A}_0\tilde{A}_2}\left|\psi(x;\lambda)\right|+\left|\lambda\right|th\frac{|\lambda|}{2}\max_{\tilde{A}_0\tilde{A}_2}\left|\theta(x;\lambda)\right|\right]\right\}. \quad (46)$$

Таким образом, из оценки (46) заключаем, что однородная задача T_λ^* с учетом (46) не имеет отличного от нуля решения. Следовательно, $\vartheta(x,y,\lambda)\equiv 0$ в $\bar{D}$. Отсюда, в силу (38) и (45), имеем $u(x,y,\lambda)\equiv 0$ в $\bar{D}$.

Доказана следующая теорема:

Теорема 6. *Если выполнены условия леммы 2, (45) и* $\mu<0$, *то в области* D *задача* T_λ *для уравнения (35) может иметь не более одного решения.*

Теорема 7. *Если выполнены условия теоремы 6, то в области* Ω *задача* T *для уравнения (31) может иметь не более одного решения.*

Доказательство теоремы 7 следует из (6) и теоремы 6.

Существование решения задачи T доказывается методом интегральных уравнений. Чтобы доказать существование решения задачи T, сначала докажем существование решения задач T_λ и T_λ^* для уравнения (35) и (39) соответственно.

---

[6] Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука. 1981. – 448 с.

Теорема 8. *Если выполнены условия (37) и* $\mu < 0$, *то в области* D *решение задачи* T_λ *для уравнения (35) существует.*

Теорема 8 доказывается методом интегральных уравнений с использованием задачи Коши и N для уравнения (35).

Для обеспечения существования интеграла (6) и выполнения условий (4) найдены оценки решения задачи T_λ при больших значениях параметра $|\lambda|$ вида:

$$u(x,y;\lambda) = O\left(1/|\lambda|^\gamma\right), \quad \gamma > 3. \tag{47}$$

Оценка (47) доказывается точно так же, как теорема 4, приведенная в § 1.1, гл. 1.

Замечание 6. Оценка (47) обеспечивает существование интеграла (6), дающего решение задачи T.

На основании теорем 6-8 заключаем, что решение задачи T для уравнения (31) в области Ω существует, единственно и даётся формулой (6), где $u(x,y;\lambda) = \vartheta(x,y;\lambda) + \theta(x;\lambda)$, $\vartheta(x,y;\lambda)$ - определяются из (28) и

$$\vartheta(x,y;\lambda) = \vartheta_0(x,y;\lambda) + \iint\limits_{D_1} M_2\left(x,y;\xi,\eta;\lambda\right)\vartheta_0(\xi,\eta;\lambda)d\xi d\eta, \tag{48}$$

$$\vartheta_0\left(x,y,\lambda\right) = -\int_0^1 G\left(x,y;\xi,0\right)\nu\left(\xi,\lambda\right)d\xi +$$

$$+\int\limits_{\sigma_0}\left[\varphi\left(\xi(s),\eta(s);\lambda\right)\right) - \theta(\xi(s);\lambda)\right]\frac{\partial G\left(x,y;\xi,\eta\right)}{\partial n}ds, \tag{49}$$

$G\left(x;\xi,\eta\right) = ln\left|\dfrac{x+\zeta-2\zeta x}{x-\zeta}\right|$ – функция Грина задачи N для уравнения Лапласа $\vartheta_{xx} + \vartheta_{yy} = 0$ в области D_1, $\zeta = \xi + i\eta$, $\eta^2(s) = 1-\xi^2(s)$, а $M_2(x,y;\xi,\eta;\lambda)$ резольвента ядра $-\lambda^2 G\left(x,y;\xi,\eta\right)$, n – внутренняя нормаль к кривой σ_0, s – длина дуги кривой σ_0, отсчитываемая от точки $\tilde{A}_1(1,0)$, $\theta(x;\lambda)$ – определяется из (42).

Справедлива

Теорема 9. *Пусть решение* $u(x,y,\lambda)$ *плоской задачи* T_λ *для уравнения (35) существует и дается формулой (38), (42), (28), (48) и при больших значениях* $|\lambda|$ *допускает оценку (47)**.** *Тогда в области* Ω *решение задачи* T *для уравнения (31) существует и находится формулой (6).*

Доказательство теоремы 9 проводится точно так же, как теоремы 5.

В 2.2 параграфе в области Ω точно так же, как и в параграфе 2.1, решается трехмерный аналог задачи Геллерстедта (задача Γ) для нагруженного уравнения эллиптико-гиперболического типа.

Имеет место.

Теорема 10. *Пусть решение* $u(x,y,\lambda)$ *плоской задачи* Γ_λ *для уравнения*

(35) существует и дается формулой $u(x,y;\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}U(x,y,z)e^{i\lambda z}dz$,

причем при больших значениях $|\lambda|$ *допускает оценку (47)*. *Тогда в области* Ω *решение задачи* Γ *для уравнения (31) существует и находится формулой (6).*

Замечание 7. Оценка (47) обеспечивает существование интеграла (6), дающего решение задачи Γ.

Замечание 8. Используя свойства преобразования Фурье[7] можно доказать справедливость (33), т.е. $U(x,y,z)$, $U_x(x,y,z)$, $U_y(x,y,z)$, $U_z(x,y,z)$ стремятся к нулю при $|z|\to\infty$ и существуют все соответствующие несобственные интегралы [см. § 1.1, гл. 1].

Замечание 9. Из теоремы 10 следует эквивалентность задач Γ и Γ_λ (т.е. справедлива обратная теорема 10).

В третьей главе диссертации, названной **«Краевые задачи для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка в бесконечной трехмерной области»,** изучаются краевые задачи для нагруженных уравнений параболо - гиперболического типа третьего порядка в бесконечной трёхмерной области.

В 3.1 параграфе дается постановка и исследование задачи $G_j\ (j=1,2)$ для нагруженных уравнений параболо-гиперболического типа третьего порядка в бесконечной трёхмерной области.

Рассмотрим уравнение

$$0=\frac{\partial}{\partial y}\begin{cases}U_y-U_{xx}-U_{zz}-\mu U(x,0,z) & в\ \Omega_0,\\ U_{yy}-U_{xx}-U_{zz}-\mu U(x,0,z) & в\ \Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3,\end{cases}\tag{50}$$

$$\mu=const<0.\tag{51}$$

Пусть Ω - трехмерная область, ограниченная поверхностями:

$$\Gamma_k:\ x=k,\ 0\le y\le h,\ z\in R=(-\infty,+\infty),\ k=0,1,\quad \Gamma_2:\ y=h>0,\ 0\le x\le 1,\ z\in R,$$

$$S_1:\ x+y=0,\ 0\le x\le 1/2,\ z\in R,\qquad S_2:\ x-y=1,\ 1/2\le x\le 1,\ z\in R.$$

Введём обозначения: $I_0=\{(x,y,z):\ 0<x<1,\ y=0,\ z\in R\}$,

$$I_1=\{(x,y,z):\ 0<x<x_0,\ y=0,\ z\in R\},\quad I_2=\{(x,y,z):\ x_0<x<1,\ y=0,\ z\in R\},$$

$$S_{11}:\ x+y=0,\ 0\le x\le x_0/2,\ z\in R,\qquad S_{21}:\ x-y=x_0,\ x_0/2\le x\le x_0,\ z\in R,$$

$$S_{12}:\ x+y=x_0,\ x_0\le x\le(1+x_0)/2,\ z\in R,$$

$$S_{22}:\ x-y=1,\ (1+x_0)/2\le x\le 1,\ z\in R;\ (x_0,0,z)\in I_0,\ h>0,$$

$$A_1(0,0,z)=\overline{\Gamma}_0\cap\overline{S}_1,\ A_2(1,0,z)=\overline{\Gamma}_1\cap\overline{S}_2,\ A_3(1,h,z)=\overline{\Gamma}_1\cap\overline{\Gamma}_2,\ A_4(0,h,z)=\overline{\Gamma}_0\cap\overline{\Gamma}_2,$$

$$C\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},z\right)=\overline{S}_1\cap\overline{S}_2,\ C_1\left(\frac{x_0}{2},-\frac{x_0}{2},z\right)=\overline{S}_{11}\cap\overline{S}_{21},\ C_2\left(\frac{1+x_0}{2},\frac{x_0-1}{2},z\right)=\overline{S}_{12}\cap\overline{S}_{22},$$

$$E(x_0,0,z)=\bar{S}_{21}\cap\bar{S}_{22},\qquad \Omega_0=\Omega\bigcap\left\{(x,y,z):x>0,y>0,z\in R\right\}=\square A_1A_2A_3A_4,$$
$$\Omega_1=\Omega\bigcap\left\{(x,y,z):0<x<x_0,\ -x<y<x-x_0,\ z\in R\right\}=\Delta A_1C_1E,$$
$$\Omega_2=\Omega\bigcap\left\{(x,y,z):x_0<x<1,\ x_0-x<y<x-1,\ z\in R\right\}=\Delta EC_2A_2,$$
$$\Omega_3=\square C_1CC_2E,$$
$$D=\Omega\bigcap\{z=0\},\ D_j=\Omega_j\bigcap\{z=0\},\ (j=\overline{0,3}),\quad \gamma_j=\Gamma_j\bigcap\{z=0\},\ (j=\overline{0,2}),$$
$$\sigma_{1j}=S_{1j}\bigcap\{z=0\},\ \sigma_{2j}=S_{2j}\bigcap\{z=0\},(j=1,2),\quad \tilde{A}_j=A_j\bigcap\{z=0\},(j=\overline{1,4}),$$
$$\tilde{E}=E(x_0,0,z)\bigcap\{z=0\},\qquad J_j=I_j\bigcap\{z=0\},(j=\overline{0,2}),\quad (x_0,0)\in J_0.$$

Задача G_1. *Найти функцию* $U(x,y,z)$ *со следующими свойствами: 1)* $U(x,y,z)$ *функция непрерывна вплоть до границы области* Ω*;*
2) $U(x,y,z)\in C^1(\Omega\bigcup S_{12}\bigcup S_{21})\bigcap C^{2,1,2}_{x,y,z}(\Omega_0)\bigcap C^{2,2,2}_{x,y,z}(\Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3)$ *и удовлетворяет уравнению (50) в областях* $\Omega_k\left(k=\overline{0,3}\right)$*; 3)* $U(x,y,z)$ *удовлетворяет условиям*

$$U\big|_{\Gamma_0}=\Phi_0(y,z),U\big|_{\Gamma_1}=\Phi_1(y,z),\ 0\le y\le h,\ U\big|_{\Gamma_2}=\Psi_1(x,z),0\le x\le 1,\ z\in R,\quad (52)$$
$$U\big|_{S_{21}}=\Psi_2(x,z),\ \frac{x_0}{2}\le x\le x_0,\qquad U\big|_{S_{12}}=\Psi_3(x,z),\ x_0\le x\le\frac{x_0+1}{2},\ z\in R,\quad (53)$$
$$\lim_{|z|\to\infty}U(x,y,z)=\lim_{|z|\to\infty}U_x(x,y,z)=\lim_{|z|\to\infty}U_y(x,y,z)=\lim_{|z|\to\infty}U_z(x,y,z)=0,\quad (54)$$

где $\Phi_0(y,z),\Phi_1(y,z),\Psi_j(x,z)\ (j=\overline{1,3})$ *заданные функции, причем выполняются условия задачи T в главе 1 § 1.1 и* $\Psi_2(x_0,z)=\Psi_3(x_0,z)=0,$ $\Phi_0(h,z)=\Psi_1(0,z),\quad \Phi_1(h,z)=\Psi_1(1,z),$

$$\lim_{|z|\to\infty}\Phi_l(y,z)=0,\ (l=0,1),\qquad \lim_{|z|\to\infty}\Psi_j(x,z)=0,\ (j=\overline{1,3}).\quad (55)$$

Задача G_2**.** *Найти регулярное в области* Ω *решение* $U(x,y,z)$ *уравнения (50), удовлетворяющее всем условиям задачи* G_1, *кроме первого условия (53), которое заменяется условием* $U\big|_{S_{11}}=\Psi_4(x,z),\ 0\le x\le x_0/2,\ z\in R,$ *где* $\Psi_4(x,z)-$ *заданная достаточно гладкая функция, причем* $\Psi_4(0,z)=\Phi_0(0,z)$, $\lim\limits_{|z|\to\infty}\Psi_4(x,z)=0.$

Однозначная разрешимость задачи G_1 следует из следующих теорем:

Теорема 11. *Если выполнены условия (51),* $\Phi_0(y;z)\equiv\Phi_1(y;z)\equiv 0,\ \forall y\in[0,h],$ $\Psi_1(x;z)\equiv 0,\ \forall x\in[0,1],$ $\Psi_2(x;z)\equiv 0,\ \forall x\in\left[0,\frac{x_0}{2}\right]$ *и* $\Psi_3(x;z)\equiv 0,\ \forall x\in\left[x_0,\frac{x_0+1}{2}\right],\ z\in R$*, то в области* Ω *задача* G_1 *для уравнения (50) может иметь не более одного решения.*

Теорема 12. *Если выполнены заданные функции условиям задачи* G_1*, то в области* Ω *решение задачи* G_1 *для уравнения (50) существует.*

Замечание 11. Используя свойства преобразования Фурье[7], можно доказать справедливость (54), т.е. $U(x,y,z)$, $U_x(x,y,z)$, $U_y(x,y,z)$, $U_z(x,y,z)$ стремятся к нулю при $|z| \to \infty$ и существуют все соответствующие несобственные интегралы [см. § 1.1, гл. 1].

Замечание 12. Аналогично, вышеизложенным методом, можно исследовать однозначную разрешимость задачи G_2.

В 3.2 параграфе изучается аналог задачи Трикоми с заданными значениями нормальных производных на характеристических плоскостях для нагруженного уравнения (50) в бесконечной трёхмерной области.

Основным методом исследования задачи G_3 является преобразование Фурье. На основе преобразования Фурье задача G_3 и уравнения сводятся к плоской задаче (задача $G_{3\lambda}$) со спектральным параметром, как в уравнении, так и в граничных условиях. Доказана единственность решения задач G_3 и $G_{3\lambda}$ с помощью нового принципа экстремума для нагруженных уравнений смешанного типа второго порядка. Используя общее представление решения уравнения, доказывается существование решений задач G_3 и $G_{3\lambda}$ методом интегральных уравнений. Кроме того, изучено асимптотическое поведение решения задачи $G_{3\lambda}$ при больших значениях спектрального параметра. Найдены достаточные условия, при которых все операции законны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена исследованию разрешимости краевых задач типа Трикоми и Геллерстедта для нагруженных уравнений смешанного типа второго и третьего порядка в трехмерной цилиндрической и призматической области.

По результатам исследований можно сделать следующие выводы:

единственность решения задачи Трикоми для трехмерного нагруженного параболо-гиперболического уравнения второго порядка доказана методом интегралов энергии, а существование – сведением к интегральному уравнению Вольтерра второго рода;

применяя нетрадиционный принцип экстремума и общее представление решения трехмерного нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа доказана однозначная разрешимость краевой задачи с условиями Геллерстедта на разных характеристических плоскостях;

на основе преобразование Фурье доказана однозначная разрешимость краевой задачи с условиями Геллерстедта на параллельных характеристических плоскостях для нагруженного параболо-гиперболического уравнения в призматической области;

на основе принципа экстремума для нагруженных трехмерных уравнений эллиптико-гиперболического типа найдено асимптотическое поведение решения задачи Трикоми и доказана эквивалентность поставленных задач как в пространстве, так и на плоскости;

используя преобразование Фурье и общее представление решения нагруженного уравнения эллиптико-гиперболического типа в цилиндрической области доказана однозначная разрешимость задачи Геллерстедта;

доказаны теоремы существования и единственности решения краевой задачи для нагруженного параболо-гиперболического уравнения третьего порядка в трехмерной бесконечной области;

на основе нетрадиционного принципа экстремума для уравнений параболо-гиперболического типа и теории интегральных уравнений обоснована однозначная разрешимость краевой задачи с нормальной производной на характеристических плоскостях для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка в бесконечной трёхмерной области.

Научная значимость результатов исследования заключается в том, что полученные в работе научные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории краевых задач для смешанных нагруженных уравнений с частными производными в бесконечных трёхмерных областях.

Практическое значение результатов, полученных в диссертационной работе, определяется их приложением к практическим задачам, описываемым в трехмерных областях при помощи уравнений смешанного типа.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 FERGANA STATE UNIVERSITY

TASHKENT UNIVERSITY OF INFORMATION TECHNOLOGIES NAMED AFTER MUHAMMAD AL-KHWARIZMI

ALIKULOV YOLKIN KODIROVICH

THREE-DIMENSIONAL ANALOGIES OF THE TRICOMI AND GELLERSTEDT PROBLEM FOR LOADED MIXED TYPE EQUATIONS

01.01.02 – Differential equations and mathematical physics

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Fergana – 2022

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number №B 2021.3.PhD/FM627.

Dissertation has been prepared at Tashkent University of Information Technologies.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website (www.fdu.uz_) and the "ZiyoNet" information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisors:	**Islomov Bozor Islomovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Fayozov Kudratillo Sadriddinovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Karimov Shaxobiddin Tuychiboyevich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Docent
Leading organization:	**Samarkand State University**

Defense will take place «30» 08 2022 at 10^{00} at the meeting of Scientific Council number PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 at Fergana State University. (Address: Murabb iylar str. 19, Fergana, Uzbekistan, 150100, Phone: (+99873)244-44-02, fax: (+99873)244-44-93, e-mail: fardu_info@umail.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Fergana State University (is registered №180). (Address: Murabbiylar str. 19, Fergana, Uzbekistan, 150100, Phone: (+99873)244-44-94.

Abstract of dissertation sent out on «16» 08 2022 year.
(Mailing report №1 on «16» 08 2022 year).

A.K.Urinov
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.Ph.M.S., Professor

I.U.Khaydarov
Scientific Secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, C.Ph.M.S

Sh.T.Karimov
Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.Ph.M.S.

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is to study of three deminsional analogue Tricomi and Gellerstedt boundary value problems for loaded equations of mixed type of the second and third order.

The object of the research work is the second and third order mixed type for loaded differential equations in three-deminsional domain.

The scientific novelty of the research consists of the following:

the uniqueness of the solution of the Tricomi problem for a three-dimensional loaded second-order parabolic-hyperbolic equation is proved by the method of energy integrals, and the existence is proved by reduction to the Volterra integral equation of the second kind;

applying the non-traditional extremum principle and the Fourier transform, as well as the general representation of the solution of three-dimensional loaded equations of parabolic-hyperbolic, elliptic-hyperbolic types, we prove the unique solvability of boundary value problems with Gellerstedt conditions on different characteristic planes;

on the basis of the extremum principle for loaded three-dimensional equations of elliptic-hyperbolic type, the asymptotic behavior of the solution of the Tricomi problem is found and the equivalence of the formulated problems both in space and on the plane is proved;

existence and uniqueness theorems for the solution of a boundary value problem for a loaded third-order parabolic-hyperbolic equation in a three-dimensional infinite domain are proved;

the unique solvability of boundary value problems, whose normal derivatives and the desired function itself are given in the characteristic planes for a loaded parabolic-hyperbolic equation of the third order in an infinite prismatic domain, is based on the non-traditional extremum principle for parabolic-hyperbolic equations and the theory of Volterra integral equations of the second kind.

Implementation of research results. The results of the study of problems for loaded equations of mixed types are implemented in the following research projects:

three-dimensional analogues of the Tricomi and Gellerstedt problem for loaded equations of mixed type of the second order were used in a foreign grant on the topic “Issues of solvability of boundary and initial-boundary value problems for nonlocal partial differential equations”. (Reference No. 04/792 dated March 29, 2022 International Kazakh-Turkish University named after Khoja Ahmed Yasawi). The application of these scientific results made it possible to study the strong solvability of a number of problems for non-local analogues of second-order parabolic and hyperbolic equations in function spaces;

results of the study of three-dimensional analogues of the Tricomi and Gellerstedt problem for loaded equations of mixed type in the foreign project "Boundary value problems for equations of basic and mixed types, their application to control problems and modeling of dynamic systems" (No. NIOKTR AAAA-A19-119013190078-8, 2019- 2021) at the Institute of Applied Mathematics and Automation of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. (Reference No. 01-14/22 dated April 07, 2022 Institute of Applied Mathematics and Automation of the Kabardino-Balgar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences). Application in solving boundary value problems for local and non-local (loaded and integro-differential) equations of parabolic-hyperbolic type of the second and third orders, which are effectively used in modeling dynamic systems and solving control problems, as well as in mathematical modeling of various physical and biological processes.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS
I бўлим (I часть; I part)

1. Аликулов Ё. Единственность решения трехмерного аналога задачи Геллерстедта для нагруженного уравнения смешанного типа // Узбекский математический журнал. 2011, №2, С.29-39. (01.00.00, №6)

2. Исломов Б., Аликулов Ё. Аналог задачи Трикоми для нагруженного уравнения эллиптико-гиперболического типа в двухмерной и трехмерной областях // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук, 2011, Т.13, №1, С.50-54.

3. Аликулов Ё. Трёхмерной аналог задачи Геллерстедта для нагруженного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Вестник НУУ, 2011, Специальный выпуск, С.231-233. (01.00.00; №8)

4. Исломов Б., Аликулов Ё. О трёхмерной анологе задачи Геллерстедта для нагруженного уравнения эллиптико-гиперболического типа // Узбекский математический журнал, 2012, №1, С.61-73. (01.00.00, №6)

5. T.K. Yuldashev, B.I. Islomov, E.K. Alikulov. Boundary-value problems or loaded third-order parabolic-hyperbolic equations in infinite three-dimensional domains // Lobachevskii journal of mathematics, 2020, Vol.41, No.5, pp.922-940. **DOI**:10.1134/S1995080220050145 (3.Scopus, IF 0.422)

6. Аликулов Ё. Краевая задача для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка // Бюллетень Института Математики, 2020, №4, С.37-57, ISSN-2181-9483. (01.00.00; №17)

7. B.I. Islomov, E.K. Alikulov. Analogues of the Cauchy-Goursat problem for a loaded third-order hyperbolic type equation in an infinite three-dimensional domain. //Siberian Electronic Mathematical Reports, 2021, Vol.18, No.1, pp.72-85, **DOI:**10.33048/semi.2021.18.007 (Scopus. IP=0.38)

8. B.I. Islomov, Y.K. Alikulov. Boundary value problem for loaded equation of parabolic-giperbolic type of the third order in an infinite three-dimensional domain. //International journal of applied mathematics, 2021, Vol.34, No.2, pp.158-170, **DOI**: http://dx.doi.org/10.12732/ijam.v34i2.13 (Scopus. IP=0.24)

II бўлим (II часть; II Part)

1. Исломов Б., Аликулов Ё. Оценка решения аналога задачи Трикоми для одного класса нагруженных уравнений смешанного типа // Международный Российско-Болгарский симпозиум “Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики” материалы, г. Нальчик - Хабез Кабардино-Балгарская республика, Россия; 25-30 июня 2010 г. С. 101-103.

2. Аликулов Ё. Краевая задача для нагруженного уравнения эллиптико-гиперболического типа в трехмерной области // Международная конференция молодых ученых “Математическое моделирование

фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики”, г. Нальчик, 5-8 декабря 2011 г. С. 39-43.

3. Аликулов Ё. Об одной краевой задаче для параболо-гиперболического уравнения в трехмерной призматической области // Второй Российско-Узбекский симпозиум “Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики”, г. Эльбрус, с 28 мая по 1 июня 2012 г. С. 29-32.

4. Исломов Б., Аликулов Ё. Трехмерный аналог задачи Геллерстедта для нагруженного уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа // Материалы республиканской научной конференции “Актуальные проблемы математического анализа”, г. Ургенч, Узбекистан; 9-10 ноября 2012 г. С. 104-106.

5. Исломов Б., Аликулов Ё. Об одной трехмерной аналоге задаче Трикоми для уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка // Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием ученых из стран СНГ “Современные проблемы дифференциальных уравнений и их применения”, г. Ташкент, Узбекистан; 21-23 ноября 2013 г. С. 49-51.

6. Аликулов Ё. Об одной трехмерной аналоге задачи Геллерстедта для уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка // Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых “Неклассические уравнения математической физики и их приложения”, г. Ташкент, Узбекистан; 23-25 октября 2014 г. С. 126-128.

7. Аликулов Ё. Аналог задачи Геллерстедта для уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка в бесконечной призматической области // Республиканская научная конференция “Современные методы математической физики и их приложения”, г. Ташкент, Узбекистан; 2015 г. С. 266-268.

8. Аликулов Ё. Уч ўлчовли фазода учинчи тартибли параболик-гиперболик типдаги тенглама учун Геллерстедт масаласи // “Математик физика ва замонавий анализнинг турдош масалалари” республика илмий-амалий анжумани материаллари, 26-27 ноябрь 2015 йил. 181-183 бетлар.

9. Исломов Б., Аликулов Ё. Об одном трехмерном аналоге задачи Трикоми для уравнения третьего порядка эллиптико-гиперболического типа // “Динамик системаларнинг долзарб муаммолари ва уларнинг тадбиқлари” Республика илмий конференцияси (хорижий олимлар иштирокида) материаллари, Ташкент, Узбекистан; 1-3 май 2017 йил. 116-117 бетлар.

10. Аликулов Ё. Об одном трехмерном аналоге задачи Геллерстедта для уравнения третьего порядка с эллиптико-гиперболическим операторам // Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых “Актуалные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения”, г. Ташкент, Узбекистан; 15-17 декабрь 2017 г. С. 28-29.

11. Islomov B., Alikulov E. The new boundary value problem for the loaded third order hyperbolic type equation in an infinite three dimensional domain //

ABSTRACTS of Uzbek-Israel joint international conference STEMM, Bukhara-Samarkand-Tashkent, Uzbekistan 13-17 may 2019. Pp. 69-70.

12. Исломов Б., Аликулов Ё. Краевая задача для уравнения третьего порядка смешанного типа с разрывными условиями склеивания // “Таҳлилнинг долзарб муаммолари ва татбиқлари” илмий конференция материаллари, Карши, Узбекистан; 4-5 октябрь 2019 йил. 152-153 бетлар.

13. Аликулов Ё. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка смешанного типа с разрывными условиями склеивания // Международной научной конференции на тему “Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики”, Фергана, Узбекистан; 12-13 марта, 2020 г. С.29-30.

14. Исломов Б., Аликулов Ё. Краевая задача для нагруженного уравнения смешанно-составного типа, когда нагруженной часть уравнения содержит след от искомой функции // The elevens international scientific-practical conferense “Global scince and innovations: Central Asia”, Nur-Sultan, Kazakhstan; No. 6(11). December, 2020. Pp.60-63.

Автореферат Фарғона давлат университети «FarDU. Ilmiy xabarlar – Научный вестник. ФерГУ» илмий – методик журнал таҳририятида таҳрирдан ўтказилиб, ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги матнлар ўзаро мувофиқлаштирилди.

Босмахона лицензияси:

9338

Бичими: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» гарнитураси.
Рақамли босма усулда босилди.
Шартли босма табоғи: 3,5. Адади 100 дона. Буюртма № 1/22.

Гувоҳнома № 851684.
«Tipograff» МЧЖ босмахонасида чоп этилган.
Босмахона манзили: 100011, Тошкент ш., Беруний кўчаси, 83-уй.