САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

БУХОРО ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ТУРДИЕВ ҲАЛИМ ҲАМРОЕВИЧ

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛ МАКСВЕЛЛ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ УЧУН ТЕСКАРИ МАСАЛАЛАР

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика

физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И

Бухоро – 2022

УДК: 517.958

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

БУХОРО ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ТУРДИЕВ ҲАЛИМ ҲАМРОЕВИЧ

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛ МАКСВЕЛЛ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ УЧУН ТЕСКАРИ МАСАЛАЛАР

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика
(физика-математика фанлари)

физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И

Бухоро – 2022

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2020.4.PhD/FM533 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Бухоро давлат университети ва ЎзР ФА В.И.Романовский номидаги Математика институти Бухоро бўлинмасида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://ik-fizmat.nuu.uz/) ва «Ziyonet» таълим ахборот тармоғида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Дурдиев Дурдимурод Қаландарович** физика–математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Ишанкулов Толиб** физика–математика фанлари доктори, профессор
	Рузиев Менглибай Холтожибаевич физика–математика фанлари доктори
Етакчи ташкилот:	**Урганч давлат университети**

Диссертация ҳимояси Самарқанд давлат университети ҳузуридаги DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2022 йил «30» 09 соат 10^{00} даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866) 231–06–32, факс: (+99866) 235–19–38, e–mail: patent@samdu.uz).

Диссертация билан Самарқанд давлат университетининг Ахборот–ресурс марказида танишиш мумкин (№82 рақам билан рўйхатга олинган). (Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866) 231–06–32, факс: (+99866) 235–19–38.)

Диссертация автореферати 2022 йил « 7 » 09 куни тарқатилди.

(2022 йил « 7 » 09 даги 2 рақамли реестр баённомаси).

А.С. Солеев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, физика-математика фанлари доктори, профессор

А.М. Халхўжаев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, физика-математика фанлари доктори

А.Б. Хасанов
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси, физика-математика фанлари доктори, профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган аксарият илмий ва амалий тадқиқотлар, изланишлар хусусий ҳосилали интегро-дифференциал тенгламалар, улар учун қўйилган тўғри ва тескари масалаларни ечиш усулларини ўрганишга олиб келинади. Бугунги кунда хусусий ҳосилали интегро-дифференциал тенгламалар учун тескари масалалар геология, электродинамика, тўлқин тарқалиш жараёнлари, геофизика ва бошқа кўплаб соҳалардаги тадқиқотларнинг энг кўп ўрганилаётган асосий масаласи ҳисобланади. Тўғри масала ечими ҳақида қўшимча маълумотга асосланиб, тўғри масала ечимини, интегро-дифференциал тенглама ядросини аниқлаш ва уларни сонли ечиш масаласига доир тадқиқотларни олиб бориш бугунги кунда математик физиканинг муҳим вазифаларидан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳон миқёсида математик физиканинг энг тез ривожланаётган соҳаси-тескари масалаларни тадқиқ қилиш усулларига оид тадқиқотлар олиб борилмоқда. Бу соҳа физика ва техник фанлардаги энг муҳим йўналишлардан бири электродинамикада математик нуқтаи назардан, муҳитнинг хотирасини ҳисобга олиш қаралаётган электромагнит тўлқинлар тарқалиш назариясининг математик моделига жараённинг олдинги ҳолатини ифодаловчи ўрама кўринишдаги интеграл ҳадни киритишга олиб келинилади. Шундай қилиб, хотирали электромагнит майдонларда интегро-дифференциал тенгламалари учун қўйилган тўғри ва тескари масалаларнинг корректлигини ўрганиш зарурати туғилди. Айнан шу типдаги долзарб илмий тадқиқотлар ушбу диссертация ишида қаралади.

Республикамизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий тадбиқига эга бўлган интегро-дифференциал тенгламалар ва математик физиканинг долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, охирги йилларда электромагнит тўлқинларнинг хотирали муҳитларда тарқалиши жараёнларини ифодаловчи интегро-дифференциал тенгламалар учун бошланғич-чегаравий масалаларни тадқиқ этиш, улар учун тескари масалаларни ечиш орқали амалий муаммоларни ҳал этишга алоҳида эътибор қаратилди. Электромагнит тўлқинларнинг хотирали муҳитларда тарқалиши интегро-дифференциал тенгламалари учун тескари масалалар ечимининг мавжудлиги, ягоналигини исботлашга ва муҳитнинг хотира функциясини аниқлашга оид салмоқли натижаларга эришилди. Дифференциал тенгламалар, математик физика ва функционал анализ фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Бу борада математик физиканинг интегро-

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги "Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида"ги 292-сонли қарори.

дифференциал тенгламалар учун тескари масалалар назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга ҳисобланади.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги № ПФ-4947 “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантриш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисидаги” Фармони, 2017 йил 17 февралдаги № ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909-сон «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2018 йил 27 апрелдаги № ПҚ-3682 “Инновацион ғоялар, технологиялар ва лойиҳаларни амалиётга жорий қилиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисидаги” қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Математик физиканинг тескари масалалари назариясини ривожлантиришга А.С. Алексеев, А.В. Баев, А.Л. Бухгейм, А.В. Гончарский, В.В. Васин, С.И. Кабанихин, М.Г. Крейн, М.М. Лаврентьев, А.И. Прилепко, В.Г. Романов, А.Н. Тихонов, В.Г. Яхно ва бошқа олимлар ўз ҳиссаларини қўшганлар. Гиперболик тенгламалар ва системалар учун дастлабки динамик тескари масалалар А.С. Алексеев, М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, А.С. Благовещенский томонидан таърифланган ва тадқиқ қилинган. Гиперболик типдаги тенгламалар ва системалар учун динамик тескари масалалар тизимли тарзда М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский, А.Л. Бухгейм, Л.П. Нижник, С.И. Кабанихин ва бошқалар томонидан тадқиқ қилинган.

Электромагнит тўлқинларнинг тарқалиш назарияси, эластиклик назарияси, магнитотеллурик зондлашнинг тескари масалалари бевосита амалиёт заруратидан келиб чиққан. Электромагнит тўлқинлар тарқалиш назариясининг тўғри ва тескари масалалари В.Г. Романов, С.П. Белинский, Т.П. Пухначева ва бошқалар томонидан ўрганилган. Уларнинг ишларида муҳитнинг диэлектрик ва магнит ўтказувчанлигини аниқлаш, шунингдек, муҳитнинг электр ўтказувчанлигини топиш масалалари ўрганилган.

Тез ўзгарувчан электромагнит майдонларда, зарраларнинг электромагнит қутбланишини аниқлаш учун характерли частоталар билан солиштирганда кичиклик шарти билан чегараланмаган частоталарда индукцияларнинг мос майдонлар кучланганлиги қийматларига бир қийматли боғлиқлиги бузилади. Бундай жараёнларнинг математик моделларига Максвелл тенгламалари системаси учун муҳит хотирасини ифодаловчи матрица ядроли ўрама типидаги интеграл ҳадлар қўшилади. Ушбу ядроларни аниқлаш тескари масалаларнинг янги турини келтириб чиқаради. В.Г. Романов, Д.К. Дурдиевлар томонидан электр майдон кучланганлиги векторининг битта компоненти учун ёзилган иккинчи тартибли гиперболик интегро-дифференциал тенгламалардан ядроларни топишнинг тескари масалалари ўрганилган. Бундай ҳолларда маълум ва аниқланиши лозим бўлган функциялар жараён кечаётган соҳанинг геометриясига қаттиқ талаблар қўйилишига олиб келади. Ушбу тадқиқот ишида Максвелл интегро-дифференциал тенгламаларнинг дастлабки система ҳолига тўғри ва тескари масалалар қўйилган ҳамда ўрганилган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги.

Диссертация тадқиқоти Бухоро давлат университетининг М-02.2018 “Математик физиканинг тескари масалалари” (2020-2022 йй.) мавзусидаги илмий-тадқиқот йўналиши доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади икки ва уч ўлчамли интегро-дифференциал Максвелл тенгламалар системасидан интеграл ҳадлар ядроларини аниқлаш учун тўғри ва тескари масалаларни ечиш усулларини қуриш, шунингдек ечимларнинг ягоналиги ва мавжудлигини тадқиқ қилишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

- хотирага эга биринчи тартибли гиперболик системадан диагонал матрица кўринишдаги ядрони аниқлаш масаласининг ягона ечими мавжудлиги ҳақидаги локал теоремани исбот қилиш;
- ўрама типидаги интеграл ҳадга эга бўлган биринчи тартибли гиперболик интегро-дифференциал тенгламалар системаси учун қўйилган бошланғич-чегаравий масаланинг бир қийматли ечилишини исбот қилиш;
- икки ўлчамли Максвелл интегро-дифференциал тенгламалари системаси учун ядроларни аниқлаш масаласини қўйиш ва тадқиқ этиш;
- экспоненциал вазнли функциялар синфида уч ўлчамли Максвелл интегро-дифференциал тенгламалар системасидан хотира функциясини аниқлаш масалаларининг ягона ечими мавжудлиги ҳақида глобал теоремани исбот қилиш.

Тадқиқотнинг объекти биринчи тартибли гиперболик типдаги интегро-дифференциал тенгламалар системаси учун тўғри ва тескари масалалардан иборат.

Тадқиқотнинг предмети биринчи тартибли гиперболик интегро-дифференциал тенгламалар системалари ва Максвелл интегро-дифференциал тенгламалари учун тўғри ва тескари масалалардан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида функционал анализ, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ва интеграл тенгламалар назарияси усулларидан фойдаланилган. Тўғри ва тескари масалаларнинг бир қийматли ечилувчанлигини кўрсатиш учун масалалар Вольтерра типидаги иккинчи тур чизиқли бўлмаган ёпиқ интеграл тенгламалар системасига олиб келиниб, сўнгра уларга кетма-кет яқинлашиш усули, сиқилувчан акслантиришлар принципи қўлланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

- хотирага эга биринчи тартибли гиперболик системадан диагонал матрица кўринишдаги ядрони аниқлаш масаласининг ечими мавжудлиги ва ягоналиги ҳақида локал теорема сиқиб акслантириш принципига асосан исбот қилинган;

- ўрама типидаги интеграл ҳадга эга бўлган биринчи тартибли гиперболик интегро-дифференциал тенгламалар системаси учун қўйилган бошланғич-чегаравий масаланинг бир қийматли ечилиши ҳақидаги теорема исбот қилинган;

- икки ўлчамли Максвелл интегро-дифференциал тенгламалари системаси нормал кўринишга келтирилган, нормал кўринишдаги икки ўлчамли Максвелл интегро-дифференциал тенгламалари системаси учун ядроларни аниқлашнинг тескари масаласи қўйилган ва тескари масала ечими мавжудлиги ва ягоналиги экспоненциал вазнли функциялар синфида исбот қилинган;

- уч ўлчамли Максвелл интегро-дифференциал тенгламалари системаси нормал кўринишга келтирилган, нормал кўринишдаги Максвелл интегро-дифференциал тенгламалари системасидан хотирани аниқлаш масалаларининг ягона ечими мавжудлиги ҳақида глобал теорема экспоненциал вазнли функциялар синфида сиқиб акслантириш принципига асосан исбот қилинган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари. Иш назарий характерга эга, лекин мавжуд илмий тажрибага оид натижаларга асосланади. Тадқиқот натижаларидан сейсмологияда, нефт ва газ конларини ўзлаштиришда ҳамда юқори босқич бакалавриат ва магистратура талабалари учун математик физика фанидан махсус курсларни ўқишда фойдаланиш мумкин.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги. Математик анализ, функционал анализ, дифференциал тенгламалар, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар, интеграл тенгламалар ва тескари масалалар назарияси усулларидан фойдаланилганлиги ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти математик физиканинг интегро-дифференциал тенгламалари учун тескари масалалар назариясини янада ривожлантириши, бир ўлчамли ядрони аниқлаш усуллари қурилганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти сейсмологияда, нефт ва газ конларини қидиришда, иссиқлик ўтказувчи хотирали муҳитларда иссиқлик тарқалиш жараёнларини текширишда тадбиқ этилиши билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Интегро-дифференциал Максвелл тенгламалар системаларидан ядроларни аниқлаш масалаларига оид олинган натижалар асосида:

интегро-дифференциал Максвелл тенгламалари системаси учун тескари масалаларни ечилиш усулларидан ОТ-Ф4-01 рақамли «Қовушқоқ суюқлик оқувчи кўп қатламли композит қувурлар эгри чизиқли бўлакларининг ҳарорат ва динамик юкланишлар таъсирида чизиқли бўлмаган динамик кучланиш-деформация ҳолатини ўрганиш усулларини ишлаб чиқиш ва назариясини ривожлантириш» мавзусидаги фундаментал лойиҳада қўлланилган (Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги, Тошкент кимё-технология институтининг 2022 йил 30 майдаги № 7-01-1371 рақамли маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши ядрони аниқлаш масаласи ечимининг мавжудлиги ва ягоналигини исботлаш имконини берган;

интегро-дифференциал Максвелл тенгламалар системаси ядроларини аниқлаш масалалари АААА-А19-119032590069-3 рақамли «Геофизика ва муҳандислик масалаларида туташ механика ва иссиқлик-масса алмашинуви масалаларини математик моделлаштириш ва сонли ечиш» номли хорижий лойиҳасида фойдаланилган (Россия Фанлар Академиясининг Владикавказ илмий маркази Федерал давлат илмий муассасаси Федерал илмий маркази филиали Жанубий математика институтининг 2022 йил 26 майдаги № 77 рақамли маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши анизотроп муҳитлар учун интегро-дифференциал Максвелл тенгламалари системасидаги бир ўлчовли тескари масала ечимининг мавжудлиги ва ягоналигини локал ва глобал аниқлаш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Диссертациянинг асосий натижалари 2 та халқаро ва 5 та республика, жами 7 та илмий-амалий анжуманларда муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 12 та илмий иш чоп этилган, шулардан, 2 таси Scopus рўйхатига киритилган халқаро илмий журналларда, 3 таси Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертацияларини ҳимоя қилишда тавсия этилган миллий журналларда чоп қилинган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 112 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий ва маҳаллий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг биринчи боби **“Хотирага эга биринчи тартибли гиперболик тенгламалар системаси учун тескари масалалар”** деб аталади. Бу бобнинг биринчи параграфида диссертация натижаларини исботлашда фойдаланилган асосий тушунчалар, теоремалар келтирилган. Иккинчи параграфда хотирага эга биринчи тартибли гиперболик тенгламалар система учун тўғри ва тескари масалалар ўрганилган.

$D=\{(x,t): 0<x<H,\ t>0\}$ соҳада $u(x,t)$ функцияга нисбатан n та тенгламадан иборат қуйидаги системани қарайлик:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A\frac{\partial u}{\partial x}+B(x)u(x,t)=\int_0^t K(\tau)u(x,t-\tau)d\tau+f(x,t), \qquad (1)$$

бу ерда $u(x,t)-\ u_1, u_2, \dots, u_n$ компонентали номаълум вектор функция, $A,\ B$ ва $K-\ n\times n$ ўлчамли квадрат матрицалар ва бунда

$$A=diag(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n), K(t)=diag\big(K_1(t),K_2(t),\dots,K_n(t)\big),$$
$$B(x)=\big(b_{ij}\big)_{i,j=1}^{n}(x),$$

λ_i- ҳақиқий, турли ўзгармас сонлар бўлиб, қуйидаги шартларни қаноатлантиради:

$$\lambda_i>0,\ i=\overline{1,s};\ \ \lambda_i<0,\ \ i=\overline{s+1,n};\ 0\le s\le n,$$

$f(x,t)=\big(f_1(x,t),f_2(x,t),\dots,f_n(x,t)\big)$ $-$берилган вектор функция.

Тўғри масалада A, $B(x)$, $K(t)$ матрицалар ва $f(x,t)$ вектор функция берилганда D соҳада (1) тенгламалар системасини қаноатлантирувчи $u(x,t)$ вектор функцияни қуйидаги бошланғич ва чегаравий шартлар асосида аниқлаш талаб қилинади:

$$u(x,0)=\varphi(x),\ 0\le x\le H, \qquad (2)$$
$$u_i(0,t)=g_i(t),\ i=\overline{1,s},\quad u_i(H,t)=g_i(t),\ i=\overline{s+1,n}. \qquad (3)$$

бунда $\varphi(x)$ ва $g_i(t),\ i=\overline{1,n}-$ берилган функциялар.

Тескари масала тўғри масала (1)–(3) ечими ҳақида

$$u_i(0,t)=h_i(t),\ i=\overline{s+1,n},\qquad u_i(H,t)=h_i(t),\ i=\overline{1,s} \qquad (4)$$

қўшимча шартлар асосида $K(t),\ t>0$ матрица функциясини аниқлашдан иборат, бу ерда $h_i(t)\,, i=\overline{1,n}-$ берилган функциялар.

Қуйидаги келишувчанлик шартларининг бажарилишини талаб қиламиз:

$$\varphi_i(0)=g_i(0),\quad i=\overline{1,s};\quad \varphi_i(H)=g_i(0),\quad i=\overline{s+1,n}. \qquad (5)$$

$v(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)$ вектор функцияни киритамиз. Натижада $v(x,t)$ га нисбатан қуйидаги масалани ҳосил қиламиз:

$$\left(E\frac{\partial}{\partial t}+A\frac{\partial}{\partial x}+B(x)\right)v=K(t)\varphi(x)+\int_0^t K\,(\tau)v(x,t-\tau)d\tau+\frac{\partial}{\partial t}f(x,t),\quad (6)$$

$$v(x,0)=f(x,0)-A\frac{d}{dx}\varphi(x)-B(x)\varphi(x)=:\Phi(x),\ 0\le x\le H,\qquad (7)$$

$$v_i(0,t)=\frac{d}{dt}g_i(t),\ i=\overline{1,s};\ \ v_i(H,t)=\frac{d}{dt}g_i(t),\ i=\overline{s+1,n},\qquad (8)$$

$$v_i(0,t)=\frac{d}{dt}h_i(t),\ i=\overline{s+1,n};\quad v_i(H,t)=\frac{d}{dt}h_i(t),\ i=\overline{1,s}.\qquad (9)$$

(7), (8) бошланғич ва чегаравий шартлардан қуйидаги мувофиқлик шартлари келиб чиқади:

$$f_i(0,0)-\lambda_i\frac{d}{dx}\varphi_i(x)|_{x=0}-\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\,(0)\varphi_j(0)=\frac{d}{dt}g_i(t)|_{t=0},\qquad i=\overline{1,s},$$

$$f_i(H,0)-\lambda_i\frac{d}{dx}\varphi_i(x)|_{x=H}-$$

$$-\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\,(H)\varphi_j(H)=\frac{d}{dt}g_i(t)|_{t=0},\ \ i=\overline{s+1,n}.\qquad (10)$$

$D_T=\{(x,t)\in \mathrm{D}\colon 0\ \le\ x\ \le\ H,\ 0\ \le\ t\ \le\ T\}$ тўртбурчак соҳада (6)-(8) масалани қараймиз, бунда $T\ >\ 0$ –тайинланган бирор сон.

1-теорема. *Фараз қилайлик* $\varphi(x)\in C^1[0,H]$, $g(t)\in C^1[0,+\infty)$, $B(x)\in C^1[0,H]$, $K(t)\in C[0,+\infty)$, $f(x,t)\in C^{0,1}(D)$ *бўлиб,* (5), *(10) шартлар бажарилсин. У ҳолда (6)-(8) масаланинг* D_T *соҳага тегишли ягона узлуксиз ечими мавжуд.*

(6)-(9) тескари масалани тадқиқ этишда қуйидаги шартлар бажарилишини талаб қиламиз:

$$-\frac{1}{\lambda_i}\frac{d^2}{dt^2}g_i(0)+\frac{1}{\lambda_i}K_i(0)\varphi_i(0)+\frac{1}{\lambda_i}\frac{\partial}{\partial t}f_i(0,0)-\frac{1}{\lambda_i}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\,(0)\frac{d}{dt}g_i(0)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}f_i(0,0)-\lambda_i\frac{d^2}{dx^2}\varphi_i(0)-\sum_{j=1}^{n}\frac{d}{dx}\left[b_{ij}(x)\varphi_i(x)\right]_{x=0},\qquad i=\overline{1,s},$$

$$-\frac{1}{\lambda_i}\frac{d^2}{dt^2}g_i(0)+\frac{1}{\lambda_i}K_i(0)\varphi_i(H)+\frac{1}{\lambda_i}\frac{\partial}{\partial t}f_i(H,0)-\frac{1}{\lambda_i}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\,(H)\frac{d}{dt}g_i(0)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}f_i(H,0)-\lambda_i\frac{d^2}{dx^2}\varphi_i(H)-\sum_{j=1}^{n}\frac{d}{dx}\left[b_{ij}(x)\varphi_i(x)\right]_{x=H},i=\overline{s+1,n},\qquad (11)$$

ва D соҳанинг бурчак нуқталарида ушбу

$$f_i(0,0)-\lambda_i\frac{d}{dx}\varphi_i(x)|_{x=0}-\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\,(0)\varphi_j(0)=\frac{d}{dt}h_i(t)\Big|_{t=0},\quad i=\overline{s+1,n},$$

$$f_i(H,0)-\lambda_i\frac{d}{dx}\varphi_i(x)|_{x=H}-$$

$$-\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\,(H)\varphi_j(H) = \frac{d}{dt}h_i(t)\Big|_{t=0}, \qquad i=\overline{1,s} \tag{12}$$

келишувчанлик шартлари ўринли бўлсин.

2-теорема. *Фараз қилайлик* $\varphi(x)\in C^2[0,H]$, $g_i(t)\in C^2[0,+\infty)$, $B(x)\in C^1[0,H]$, □$(t)\in C^2[0,+\infty), f(x,t)\in C^{2,1}(D)$ *ва (5), (10), (11), (12) келишувчанлик шартлари бажарилсин. У ҳолда шундай* $H^*>0$ *сон топиладики, барча* $H\in(0,H^*)$ *учун* $\left[0,\frac{H}{\mu}\right]$ *сегментда (6)-(9) тескари масаланинг ягона ечими мавжуд ва бу ечим* $K(t)\in C[0,H/\mu]$ *синфга тегишли бўлади, бунда* $\mu=\min_{1\le i\le n}\{|\lambda_i\,|\}$.

Диссертациянинг биринчи боб учинчи парагрифида хотирали биринчи тартибли гиперболик системадан ихтиёрий квадратик матрица ядросини аниқлаш тескари масаласини аниқлаш масаласи тадқиқ қилинган.

(1)-(4) кўринишдаги n та масалани қараймиз, бунда ҳар бир масала ўзининг берилган $f=f^l,\ \varphi=\varphi^l,\ g=g^l\quad (l=\overline{1,n})$, функциялар тўпламига эга, $A=diag(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)-$ матрица олдинги масаладаги матрица билан бир хил ва $K-n$ тартибли квадрат матрица

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+A\frac{\partial}{\partial x}\right)u^l=\int_0^t K\,(\tau)u^l(x,t-\tau)d\tau+f^l(x,t), \tag{13}$$

$$u^l|_{t=0}=\varphi^l(x),\ 0\le x\le H, \tag{14}$$

$$u_i^l(0,t)=g_i^l(t),\ i=\overline{1,s};\ u_i^l(H,t)=g_i^l(t),\ i=\overline{s+1,n},\ l=\overline{1,n}, \tag{15}$$

бу ерда $u^l=u^l(x,t)=\left(u_1^l(x,t),u_2^l(x,t),\dots,u_n^l(x,t)\right)^*$, $*-$ транспонирлаш белгиси.

Тескари масалада (13)-(15) тўғри масала ечими ҳақида

$$u_i^l(0,t)=h_i^l(t),\ i=\overline{s+1,n},\ \ u_i^l(H,t)=h_i^l(t),\ i=\overline{1,s},\ l=\overline{1,n} \tag{16}$$

қўшимча маълумотлар бўйича $K(t)=\left(k_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}(t),\ t>0$ матрица функцияси аниқланади, бу ерда $h_i^l(t)\,,i=\overline{1,n},\ l=\overline{1,n}-$ берилган функциялар.

Тескари масалани ўрганишда қулайлик учун $w^l(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}u^l(x,t)$, $l=\overline{1,n}$ функцияларни киритамиз. У ҳолда қуйидаги масалага эга бўламиз:

$$\left(E\frac{\partial}{\partial t}+A\frac{\partial}{\partial x}\right)w^l=K'(t)\varphi^l(x)+K(t)\left[f^l(x,0)-A\frac{d}{dx}\varphi^l(x)\right]$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial t^2}f^l(x,t)+\int_0^t K\,(\tau)w^l(x,t-\tau)d\tau, \tag{17}$$

$$w^l(x,0)=\frac{\partial}{\partial t}f^l(x,0)+K(0)\varphi^l(x)-A\frac{\partial}{\partial x}f^l(x,0)+A^2\frac{d^2}{dx^2}\varphi^l(x), \tag{18}$$

$$w_i^l(0,t)=\frac{d^2}{dt^2}g_i^l(t),\ i=\overline{1,s},\ w_i^l(H,t)=\frac{d^2}{dt^2}g_i^l(t),\ i=\overline{s+1,n}, \tag{19}$$

$$w_i^l(0,t)=\frac{d^2}{dt^2}h_i^l(t),\ i=\overline{1,s},\ w_i^l(H,t)=\frac{d^2}{dt^2}h_i^l(t),\ i=\overline{s+1,n}. \qquad (20)$$

Бу ерда ва кейинги ўринларда «$'$» белги бир аргументли функциянинг ҳосиласини билдиради.

Шу билан бирга қуйидаги келишувчанлик шартларининг бажарилишини талаб қиламиз:

$$\varphi_i^l(0)=g_i^l(0),\ i=\overline{1,s}, \varphi_i^l(H)=g_i^l(0),\ i=\overline{s+1,n},\ l=\overline{1,n}, \qquad (21)$$

$$f_i^l(0,0)-\lambda_i\frac{d\varphi_i^l(x)}{dx}\bigg|_{x=0}=\frac{dg_i^l(t)}{dt}\bigg|_{t=0},\quad i=\overline{1,s}, \qquad (22)$$

$$f_i^l(H,0)-\lambda_i\frac{d\varphi_i^l(x)}{dx}\bigg|_{x=H}=\frac{dg_i^l(t)}{dt}\bigg|_{t=0},\quad i=\overline{s+1,n},\quad l=\overline{1,n}. \qquad (23)$$

Устунлари $\varphi^l(x)$, $l=\overline{1,n}$ функциялардан тузилган матрицани $\Phi(x)=(\varphi^1,\varphi^2,\dots,\varphi^n)(x)$ орқали белгилаймиз. Кейинчалик қуйидаги шартлар бажарилсин деб ҳисоблаймиз

$$det\ \Phi\,(0)\neq 0,\ det\ \Phi\,(H)\neq 0. \qquad (24)$$

(18), (19) бошланғич ва чегаравий шартлардан қуйидаги муносабатларни оламиз:

$$k_{il}(0)=\frac{1}{\det\,\Phi\,(0)}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{d^2}{dt^2}g_i^j(t)\bigg|_{t=0}+\lambda_i f_i^j(0,0)-\lambda_i\frac{d^2}{dx^2}\varphi_i^j(x)\bigg|_{x=0}-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial t}f_i^j(0,t)\bigg|_{t=0}\right]\Psi_j^l(0),\ i=\overline{1,s},\ l=\overline{1,n}; \qquad (25)$$

$$k_{il}(0)=\frac{1}{\det\,\Phi\,(H)}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{d^2}{dt^2}g_i^j(t)\bigg|_{t=0}+\lambda_i f_i^j(H,0)-\lambda_i\frac{d^2}{dx^2}\varphi_i^j(x)\bigg|_{x=H}-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial t}f_i^j(H,t)\bigg|_{t=0}\right]\Psi_j^l(H),\ \ i=\overline{s+1,n},\ l=\overline{1,n}, \qquad (26)$$

бу ерда $\Psi_j^l(\cdot)-$ $\Phi(\cdot)$ матрица $\varphi_l^j(\cdot)$ элементининг алгебраик тўлдирувчиси.

1-лемма. *Фараз қилайлик,* $K(t)\in C^1[0,+\infty)$ *матрица ва* $f^l(x,t)\in C^{1,2}(D)$, $\varphi^l(x)\in C^2[0,H]$, $g^l(t)\in C^2[0,+\infty)$ *бўлсин. Бундан ташқари, (21)-(23), (25), (26) келишувчанлик шартлари бажарилсин. У ҳолда ҳар бир фиксирланган* l *лар учун (17)-(19) тўғри масаланинг* D_{t_1} *соҳага тегишли ягона узлуксиз ечими мавжуд, бу ерда* $D_{t_1}(x_1,t_1)=\left\{(x,t):\ (x,t)\in D, t\leq t_1-\frac{|x-x_1|}{\lambda_0}\right\}$, $(x_1,t_1)\in D$ *−соҳасининг ихтиёрий нуқтаси,* $\lambda_0=\max\,\{\,|\lambda_i|:1\leq i\leq n\}$.

Қуйидаги келишувчанлик шартларинг бажарилишини талаб этамиз:

$$\varphi_i^l(0)=h_i^l(0), i=\overline{s+1,n};\ \varphi_i^l(H)=h_i^l(0),\ i=\overline{1,s},\ l=\overline{1,n}, \qquad (27)$$

$$\frac{d}{dt}h_i^l(t)\bigg|_{t=0}=f_i^l(0,0)-\lambda_i\frac{d}{dx}\varphi_i^l(x)\bigg|_{x=0},\ i=\overline{s+1,n}, \qquad (28)$$

$$\frac{d}{dt}h_i^l(t)\bigg|_{t=0}=f_i^l(H,0)-\lambda_i\frac{d}{dx}\varphi_i^l(x)\bigg|_{x=H}, i=\overline{1,s}, l=\overline{1,n}. \qquad (29)$$

Тескари масала ечими ҳақида қуйидаги тасдиқ ўринли:

3-теорема. *Фараз қилайлик 1-лемманинг шартлари ўринли бўлиб,* $h_i^l(t) \in C^2[0,+\infty)$ *бўлсин, бундан ташқари (24) шартлар ва (27)-(29) келишувчанлик шартлари бажарилсин. У ҳолда шундай* $H^* > 0$ *топиладики, барча* $H \in (0, H^*)$ *учун (17)-(20) тескари масаланинг* $\left[0, \frac{H}{\mu}\right]$ *кесмага тегишли ягона ечими мавжуд ва бу ечим берилган* $h_i^l(t)$, $t \in \left[0, \frac{H}{\mu}\right], i, l = \overline{1, n}$ *функциялар билан аниқланади, бу ерда* $\mu = \min_{1 \le i \le n}\{|\lambda_i|\}$.

Диссертациянинг иккинчи боби **“Икки ўлчовли интегро-дифференциал Максвелл тенгламалар системасидан хотирани аниқлаш масаласи”** деб номланган бўлиб, унда интеграл ҳаднинг бир ўлчовли ядросини аниқлаш масаласи ўрганилган. Биринчи параграфда тўғри ва тескари масалаларнинг қўйилиши келтирилган. Ушбу параграфда икки ўлчовли интегро-дифференциал Максвелл тенгламалар системаси дастлаб каноник кўринишга келтирилган. Каноник кўринишдаги интегро-дифференциал тенгламалар учун бошланғич-чегаравий масала ҳамда диагонал кўринишдаги хотира матрицасини аниқлаш тескари масаласи ўрганилган.

Икки ўлчовли Максвелл тенгламалар системасини қараймиз:

$$\varepsilon\frac{\partial E_2}{\partial t} - \frac{\partial H_1}{\partial x_3} + \frac{\partial H_3}{\partial x_1} + (\varphi_0 + \sigma)E_2 + \int_0^t \varphi'(t-\tau)E_2(x_1, x_3, \tau)d\tau + J_2 = 0,$$

$$\mu\frac{\partial H_1}{\partial t} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3} + \psi_0 H_1 + \int_0^t \psi'(t-\tau)H_1(x_1, x_3, \tau)d\tau = 0,$$

$$\mu\frac{\partial H_3}{\partial t} + \frac{\partial E_2}{\partial x_1} + \psi_0 H_3 + \int_0^t \psi'(t-\tau)H_3(x_1, x_3, \tau)d\tau = 0, \qquad (30)$$

бу ерда $E = (0, E_2, 0)$, $H = (H_1, 0, H_3)$ – мос равишда электр ва магнит майдон кучланиши, $\varphi(t) = diag(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, $\psi(t) = diag(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$–хотирани ифодаловчи диагонал матрицалар, $J_2(x_1, x_3, t)$ – ташқи электр токининг зичлиги, $\varepsilon = \varepsilon(x_3)$ ва $\mu = \mu(x_3)$ – мусбат аниқланган функциялар бўлиб, мос равишда электр ва магнит майдонларнинг сингдирувчанлигини ифодалайди, $\sigma = \sigma(x_3)$ муҳитнинг ўтказувчанлигини тавсифлайди, $\varphi_0 = \varphi(0)$, $\psi_0 = \psi(0)$.

(30) система учун

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\varepsilon}E_2 + \sqrt{\mu}H_1\right),\ U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\varepsilon}E_2 - \sqrt{\mu}H_1\right),\ U_3 = \sqrt{\mu}H_3$$

янги функцияларни киритамиз ва ушбу системани t ҳамда x_3 ўзгарувчиларга нисбатан каноник кўринишда қуйидагича ёзамиз:

$$\left(I_3\frac{\partial}{\partial t} + B_1\frac{\partial}{\partial x_1} + B_2\frac{\partial}{\partial x_3} + B_3\right)U =$$

$$=\bar{J}(x_1,x_3,t)+\int_0^t K\,(x_3,\tau)U(x,t-\tau)d\tau. \qquad (31)$$

(31) системада қуйидаги белгилашлар киритилди:

$$I_3=diag(1,1,1), \qquad B_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon\mu}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon\mu}} \\ \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon\mu}} & \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon\mu}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_2=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\Lambda_0,\ \ \Lambda_0=diag(-1,1,0),$$

$$B_3=\begin{pmatrix} \frac{\varphi_0+\sigma}{2\varepsilon}+\frac{\psi_0}{2\mu}+\frac{\mu'}{4\mu\sqrt{\varepsilon\mu}}+\frac{\varepsilon'}{4\varepsilon\sqrt{\varepsilon\mu}} & \frac{\varphi_0+\sigma}{2\varepsilon}-\frac{\psi_0}{2\mu}-\frac{\mu'}{4\mu\sqrt{\varepsilon\mu}}+\frac{\varepsilon'}{4\varepsilon\sqrt{\varepsilon\mu}} & 0 \\ \frac{\varphi_0+\sigma}{2\varepsilon}-\frac{\psi_0}{2\mu}+\frac{\mu'}{4\mu\sqrt{\varepsilon\mu}}-\frac{\varepsilon'}{4\varepsilon\sqrt{\varepsilon\mu}} & \frac{\varphi_0+\sigma}{2\varepsilon}+\frac{\psi_0}{2\mu}-\frac{\mu'}{4\mu\sqrt{\varepsilon\mu}}-\frac{\varepsilon'}{4\varepsilon\sqrt{\varepsilon\mu}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\psi_0}{\mu} \end{pmatrix},$$

$$\overline{K}(x_3,t)=-\begin{pmatrix} \frac{\varphi'}{2\varepsilon}+\frac{\psi'}{2\mu} & \frac{\varphi'}{2\varepsilon}-\frac{\psi'}{2\mu} & 0 \\ \frac{\varphi'}{2\varepsilon}-\frac{\psi'}{2\mu} & \frac{\varphi'}{2\varepsilon}+\frac{\psi'}{2\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\psi'}{\mu} \end{pmatrix},\ \ \bar{J}=\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}J_2(-1,1,0).$$

Янги ўзгарувчи z ни қуйидаги формула орқали аниқлаймиз:

$$z=\theta(x_3)=\int_0^{x_3}\sqrt{\varepsilon(\xi)\mu(\xi)}\,d\xi \qquad (32)$$

$\theta(x_3)$ га тескари функцияни $\theta^{-1}(z)$ орқали белгилаб, қуйидагиларни оламиз:

$$V(x_1,z,t):=U(x_1,\theta^{-1}(z),t),\ C_1(z)\coloneqq B_1\big(\theta^{-1}(z)\big),\ C_2(z)\coloneqq B_3\big(\theta^{-1}(z)\big),$$

$$\hat{\varepsilon}(z)=\varepsilon\big(\theta^{-1}(z)\big),\ \hat{\mu}(z)=\mu\big(\theta^{-1}(z)\big),$$

$$K(z,t):=\overline{K}(\theta^{-1}(z),t)=\big(k_{ij}\big)_{i,j=1}^{3},\ J(x_1,z,t):=\bar{J}(x_1,\theta^{-1}(z),t).$$

У ҳолда (31) система қуйидаги кўринишни олади:

$$\left(I_3\frac{\partial}{\partial t}+\Lambda_0\frac{\partial}{\partial z}+C_1\frac{\partial}{\partial x_1}+C_2\right)V=\int_0^t K\,(z,\tau)V(x_1,z,t-\tau)d\tau+J(x_1,z,t). \quad (33)$$

Тўғри масалада $K,\ C_1,\ C_2$ матрицалар ва J вектор функция берилганда $D=\{(x_1,z,t): 0<z<L,\ t>0,\ x_1\in\mathbb{R}\}$ соҳада (33) тенгламалар системасини қаноатлантирувчи $V(x_1,z,t)$ вектор функцияни қуйидаги бошланғич ва чегаравий шартлар асосида аниқлаш талаб қилинади:

$$V_i(x_1,z,t)|_{t=0}=\phi_i(x_1,z),\ i=\overline{1,3}, \qquad (34)$$

$$V_1(x_1,z,t)|_{z=L}=g_1(x_1,t);\ V_2(x_1,z,t)|_{z=0}=g_2(x_1,t), \qquad (35)$$

бунда $\phi(x_1,z)=(\phi_1,\phi_2,\phi_3)(x_1,z)$ ва $g(x_1,t)=(g_1,g_2)(x_1,t)$-берилган функциялар.

Тескари масала тўғри масала (33)-(35) ечими ҳақида

$$V_1(x_1,z,t)|_{z=0}=h_1(x_1,t),\ V_2(x_1,z,t)|_{z=L}=h_2(x_1,t) \tag{36}$$

қўшимча маълумотлар бўйича $K(t)$ матрица элементлари $\varphi(t),\ \psi(t),\ t>0$ функцияларни аниқлашдан иборат, бу ерда $h_1(t)$, $h_2(t)$ берилган функциялар. Ушбу бобда $\varphi_i(0)$ ва $\psi_i(0)$ ларни маълум сонлар деб ҳисоблаймиз.

Фараз қилайлик, (33) тенглама ва (34)-(36) шартларнинг ўнг томонидаги $J(x_1,z,t),\ \phi_i(x_1,z),\ g_i(x_1,t),\ h_i(x_1,t)$ функциялар ҳар бир фиксирланган z ва t ўзгарувчилар учун x_1 ўзгарувчи бўйича финит функциялар бўлсин. У ҳолда (33) тенгламанинг гиперболик тенгламага мансублигидан (33)-(35) масала ечимининг x_1 ўзгарувчи бўйича финитлиги келиб чиқади.

$\tilde{V}(\eta,z,t)$ функция орқали $V(x_1,z,t)$ функциянинг x_1 ўзгарувчи бўйича Фурье алмаштиришини белгилаймиз:

$$\tilde{V}(\eta,z,t)=\int_{\mathbb{R}} V\,(x_1,z,t)e^{i\eta x_1}dx_1,$$

бу ерда $\eta-$ Фурье алмаштиришининг параметри. η ни фиксирлаб, қулайлик учун $\tilde{V}(\eta,z,t):=\tilde{V}(z,t)$ белгилаш киритамиз.

$\tilde{V}$ функцияга нисбатан (33)-(36) масала қуйидаги кўринишни олади

$$\left(I_3\frac{\partial}{\partial t}+\Lambda_0\frac{\partial}{\partial z}+C(z)\right)\tilde{V}=\int_0^t K\,(z,\tau)\tilde{V}(z,t-\tau)d\tau+\tilde{J}(z,t), \tag{37}$$

$$\tilde{V}_i|_{t=0}\equiv\tilde{\phi}_i(z),\ i=1,2,3, \tag{38}$$

$$\tilde{V}_1|_{z=L}=\tilde{g}_1(t),\ \tilde{V}_2|_{z=0}=\tilde{g}_2(t), \tag{39}$$

$$\tilde{V}_1|_{z=0}=\tilde{h}_1(t),\ \tilde{V}_2|_{z=L}=\tilde{h}_2(t), \tag{40}$$

бу ерда $C(z)=C_2-i\eta C_1=\left(c_{ij}\right)_{i,j=1}^3$.

$w(z,t)=\frac{\partial}{\partial t}\tilde{V}(z,t)$ белгилаш киритиб (37)-(40) тенгламалардан $w(z,t)$ функцияларга нисбатан қуйидаги тенгликларга келамиз:

$$\begin{aligned}\left(I_3\frac{\partial}{\partial t}+\Lambda_0\frac{\partial}{\partial z}+C\right)w(z,t)&=K(z,t)\tilde{\phi}(z)+\\&+\int_0^t K\,(z,\tau)w(z,t-\tau)d\tau+\tilde{J}_t(z,t),\end{aligned} \tag{41}$$

$$w_i(z,t)|_{t=0}=\tilde{J}_i(z,0)-\gamma_i\frac{\partial}{\partial z}\tilde{\phi}_i(z)-\sum_{j=1}^3 c_{ij}\,(z)\tilde{\phi}_j(z)=\Phi_i(z),\ i=\overline{1,3}, \tag{42}$$

$$w_1(z,t)|_{z=L}=\frac{d}{dt}\tilde{g}_1(t),\ w_2(z,t)|_{z=0}=\frac{d}{dt}\tilde{g}_2(t), \tag{43}$$

$$w_1(z,t)|_{z=0}=\frac{d}{dt}\tilde{h}_1(t),\quad w_2(z,t)|_{z=L}=\frac{d}{dt}\tilde{h}_2(t). \tag{44}$$

(41)-(43) тўғри масаланинг ечимига нисбатан қуйидаги тасдиқ ўринли:

4-теорема. *Фараз қилайлик,* $J(x_1,z,t)$, $\phi_i(x_1,z)$, $g_i(x_1,t)$ *функциялар ҳар бир фиксирланган* z *ва* t *ўзгарувчилар учун* x_1 *ўзгарувчи бўйича финит функциялар бўлсин. Бундан ташқари* $\hat{\varepsilon}(z) \in C^1[0,H]$, $\hat{\mu}(z) \in C^1[0,H]$, $\tilde{\phi}(z) \in C^1[0,H]$, $\tilde{g}(t) \in C^1[0,T]$, $K(z,t) \in C(\Omega_T)$, $\tilde{J}(z,t) \in C^1(\Omega_T)$ *бўлиб,* $\tilde{\phi}_1(L) = \tilde{g}_1(0)$, $\tilde{\phi}_2(0) = \tilde{g}_2(0)$, $\Phi_1(L) = \frac{d}{dt}\tilde{g}_1(t)|_{t=0}$, $\Phi_2(0) = \frac{d}{dt}\tilde{g}_2(t)|_{t=0}$ *шартлар бажарилсин. У ҳолда (41)-(43) тўғри масаланинг* Ω_T *соҳага тегишли ягона узлуксиз ечими мавжуд, бу ерда* $\Omega_T = \{(z,t): 0 \le z \le L,\ 0 \le t \le T\}$, $T > 0 -$ *бирор тайинланган сон.*

(41)-(44) тескари масала учун қуйидаги теорема ўринли:

5-Теорема. *Фараз қилайлик 4-теорема шартлари бажарилсин, бундан ташқари* $h(x_1,t)$ *вектор функция фиксирланган* t *да* x_1 *ўзгарувчи бўйича финит,* $\tilde{\phi}(z) \in C^2[0,L]$, $\tilde{g}(t) \in C^2[0,L]$, $\tilde{h}(t) \in C^2[0,L]$, $\tilde{J}(z,t) \in C^{1,1}(\Omega_L)$ *бўлсин ҳамда* $\tilde{\phi}_1(0)\tilde{\phi}_1(L) \neq \tilde{\phi}_2(0)\tilde{\phi}_2(L)$ *шарт ва* $\Phi_1(L) = \frac{d}{dt}\tilde{h}_1(t)|_{t=0}$, $\Phi_2(0) = \frac{d}{dt}\tilde{h}_2(t)|_{t=0}$ *келишувчанлик шартлари бажарилсин. У ҳолда ихтиёрий* $L > 0$ *сон учун (41)-(44) масаланинг* $[0,L]$ *кесмада ягона ечими мавжуд ва бу ечим* $\varphi(t)$, $\psi(t) \in C^1\,[0,L]$ *синфга тегишли бўлади, бу ерда* $\Omega_L := \{(z,t): 0 \le z \le L,\ 0 \le t \le L\}$.

Диссертациянинг **“Уч ўлчамли интегро-дифференциал Максвелл тенгламалари системасидан хотира ядроларини аниқлаш масаласи”** деб номланувчи учинчи бобида уч ўлчовли интегро-дифференциал Максвелл тенгламалар системаси учун бошланғич-чегаравий масала ва бир ўлчамли хотира ядросини аниқлаш тескари масалалари қаралган.

Симметрик интегро-дифференциал гиперболик Максвелл тенгламалари системасини қараймиз:

$$A_0\frac{\partial}{\partial t}U + \sum_{j=1}^{3} A_j \frac{\partial}{\partial x_j}U + A_4 U = \int_0^t K\,(t-\tau)U(x,\tau)d\tau + \hat{J}(x,t), \tag{44}$$

бунда $U = (U_1, \dots, U_6)^* -$ вектор – устун, компоненталари $U_k = E_k$, $U_{k+3} = H_k$, $k = \overline{1,3}$; A_j, $j = \overline{0,4}$ $-$олтинчи тартибли симметрик квадрат матрица, $A_0 -$ мусбат аниқланган; $J = (\chi_1, \dots, \chi_6)^* -$ вектор – устун, ташқи электр токининг зичлиги, унинг компоненталари $\chi_k = \chi_k(x,t)$, $\chi_{k+3} = 0$, $k = \overline{1,3}$, $\chi_k -$ берилган етарлича силлиқ функциялар, $K(t) = -diag\left(\frac{d}{dt}\varphi_1, \frac{d}{dt}\varphi_2, \frac{d}{dt}\varphi_3, \frac{d}{dt}\psi_1, \frac{d}{dt}\psi_2, \frac{d}{dt}\psi_3\right)(t)$ хотирани ифодаловчи диагонал матрица. A_j матрицалар қуйидаги структурага эга:

$$A_0 = \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \hat{\mu} \end{pmatrix}_{6\times 6},\ A_j = \begin{pmatrix} 0 & p_j \\ p_j^* & 0 \end{pmatrix}_{6\times 6},\ j = 1,2,3,\quad p_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$p_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ p_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad A_4 = \begin{pmatrix} \varphi(0) + \hat{\sigma} & 0 \\ 0 & \psi(0) \end{pmatrix}_{6\times 6},$$

$0_{1\times 3} - (0;0;0)$ сатр векторини билдиради.

(44) тенгламани чап томондан A_0^{-1} тескари матрицага кўпайтириб, қуйидаги системани оламиз:

$$I_6 \frac{\partial}{\partial t} U + \sum_{j=1}^{3} B_j \frac{\partial}{\partial x_j} U + B_4 U = \int_0^t K_0\,(x_3, t-\tau) U(x,\tau) d\tau + J_0, \qquad (45)$$

бу ерда $I_6 -$ олтинчи тартибли бирлик матрица, $B_j = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon p_j \\ \mu p_j^* & 0 \end{pmatrix}, j = \overline{1,3}$,

$$B_4 = \begin{pmatrix} \varepsilon\varphi(0) + \sigma & 0 \\ 0 & \mu\psi(0) \end{pmatrix},\ K_0(x_3, t) = \begin{pmatrix} -\varepsilon \frac{d}{dt}\varphi(t) & 0 \\ 0 & -\mu \frac{d}{dt}\psi(t) \end{pmatrix},\ J_0 = A_0^{-1}\hat{J},$$

$\varepsilon = \hat{\varepsilon}^{-1} = (\varepsilon_{ij}), \quad \mu = \hat{\mu}^{-1} = (\mu_{ij}), \quad \sigma = \varepsilon\hat{\sigma} = (\sigma_{ij})$.

t ва x_3 га нисбатан (45) системани каноник кўринишга келтирамиз. Чизиқли алгебра[2] курсидан маълумки, қаралаётган ҳолда шундай хосмас $T\ (detT \neq 0)$ матрица мавжуд бўлиб, $T^{-1} B_3 T = \Lambda$ бўлади, бунда $\Lambda -$ диагонал матрица, унинг диагоналида B_3 матрицанинг хос сонлари ётади.

Юқоридаги хоссага эга бўлган T матрица қуйидаги кўринишда қурилган[3]

$$T(x_3) = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & q_2 & 0 & 0 \\ q_3 & q_4 & q_3 & q_4 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{q_2} & 0 & -\frac{1}{q_2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{q_1} & 0 & \frac{1}{q_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

бу ерда $q_1 = \left(\frac{\varepsilon_{11}}{\mu_{22}}\right)^{1/4}, \quad q_2 = \left(\frac{\varepsilon_{22}}{\mu_{11}}\right)^{1/4}, \quad q_3 = \frac{\varepsilon_{31}}{\varepsilon_{11}^{3/4}\mu_{22}^{1/4}}, \quad q_4 = \frac{\varepsilon_{32}}{\varepsilon_{22}^{3/4}\mu_{11}^{1/4}}.$

(45) тенгламалар системасида $U = T\bar{U}$ тенглик ёрдамида янги функция киритамиз, сўнг ҳосил бўлган системани чапдан T^{-1} матрицага кўпайтириш натижасида қуйидаги тенгламалар системасини оламиз:

$$\left(I_6 \frac{\partial}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial}{\partial x_3} + \sum_{j=1}^{2} C_j \frac{\partial}{\partial x_j} + C \right) \bar{U} = \int_0^t \overline{K}\,(x_3, t-\tau) \bar{U}(x,\tau) d\tau + F, \qquad (46)$$

бунда $C = C_0 + C_4,\ C_0 = T^{-1} B_3 \frac{\partial}{\partial x_3} T, C_i = T^{-1} B_i T, i = \overline{1,4}, C_3 = \Lambda = \sqrt{p}\Lambda_0,$

$\Lambda_0 = diag(-1,-1,1,1,0,0),\ \overline{K}(x_3, t) = T^{-1} K_0(x_3, t) T = (\overline{a}_{ij})_{i,j=1}^{6}(x_3, t),$
$F = T^{-1} J_0\ \ p = \varepsilon_{11}\mu_{22} = \varepsilon_{22}\mu_{11}.$

Янги ўзгарувчи z ни қуйидаги формула орқали киритамиз

[2] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., М, 1988.
[3] В. Г. Романов, Обратные задачи математической физики. М.: Наука. 1984. с. 264.

$$z = \nu(x_3) = \int_0^{x_3} \frac{d\xi}{\sqrt{p(\xi)}}.$$

$\nu(x_3)$ га тескари функцияни $\nu^{-1}(z)$ орқали белгилаб, қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$V(x_1,x_2,z,t) := \bar{U}(x_1,x_2,\nu^{-1}(z),t),\ \hat{C}_j(z) := C_j\big(\nu^{-1}(z)\big),\ \widehat{K}(z,t) := \overline{K}(\nu^{-1}(z),t),\ \hat{C}(z) = C\big(\nu^{-1}(z)\big),\ a_{ij}(z,t) := \overline{a}_{ij}(\nu^{-1}(z),t),\ \hat{F}(x_1,x_2,z,t) := F(x_1,x_2,\nu^{-1}(z),t),\ i,j=\overline{1,6}.$$

У ҳолда (46) система қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\left(I_6\frac{\partial}{\partial t} + \Lambda_0\frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=1}^{2}\tilde{C}_j\frac{\partial}{\partial x_j} + \tilde{C}\right)V =$$

$$= \widehat{F}(x_1,x_2,z,t) + \int_0^t \widehat{K}\,(z,t-\tau)V(x_1,x_2,z,\tau)d\tau. \qquad (47)$$

Тўғри масалада $\widehat{K}$, $\hat{C}_1$, $\hat{C}_2$, $\hat{C}$ матрицалар ва $\hat{F}$ вектор функция берилганда $D = \{(x_1,x_2,z,t)\colon 0<z<L,\ t>0,\ (\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)\in R^2\}$ соҳада (47) тенгламалар системасини қаноатлантирувчи $V(x_1,x_2,z,t)$ вектор функцияни қуйидаги бошланғич ва чегаравий шартлар ёрдамида аниқлаш талаб қиланади:

$$V_i(x_1,x_2,z,t)|_{t=0} = \phi_i(x_1,x_2,z),\ i=\overline{1,6}, \qquad (48)$$

$$V_i(x_1,x_2,z,t)|_{z=0} = g_i(x_1,x_2,t),\ i=1,2;$$

$$V_i(x_1,x_2,z,t)|_{z=L} = g_i(x_1,x_2,t),\ i=3,4, \qquad (49)$$

бу ерда $\phi(x_1,x_2,z) = (\phi_1,\phi_2,\dots,\phi_6)(x_1,x_2,z)$, $g(x_1,x_2,t) = (g_1,g_2,\dots,g_6)(x_1,x_2,t)$ – берилган функциялар.

Тескари масалада тўғри масала (47)-(49) ечими ҳақида

$$V_i(x_1,x_2,z,t)|_{z=L} = h_i(x_1,x_2,t),\ i=1,2;$$

$$V_i(x_1,x_2,z,t)|_{z=0} = h_i(x_1,x_2,t),\ i=\overline{3,6} \qquad (50)$$

қўшимча шартлар бўйича $\widehat{K}(z,t)$ матрицага кирувчи $K(t)$ матрица элементлари $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$, $t>0, i=1,2,3$ функцияларни топиш бўйича масала тадқиқ этилади, бу ерда $h_i(x_1,x_2,t), i=\overline{1,6}$ –берилган функциялар. $\varphi_i(0)$ ва $\psi_i(0)$ лар маълум сонлар деб ҳисобланади.

Фараз қилайлик (47) тенглама ва (48)-(50) шартларнинг ўнг томонида берилган мос равишда $\tilde{F}(x_1,x_2,z,t)$, $\phi(x_1,x_2,z)$, $g(x_1,x_2,t), h(x_1,x_2,t)$ функциялар ҳар бир фиксирланган z, t лар учун x_1, x_2 ўзгарувчилар бўйича финит функциялар бўлсин. У ҳолда (47) тенгламанинг гиперболик тенгламага мансублигидан (47)-(49) масала ечимининг x_1, x_2 ўзгарувчилар бўйича финитлиги келиб чиқади.

$\tilde{V}(\eta_1,\eta_2,z,t)$ функция орқали $V(x_1,x_2,z,t)$ функциянинг x_1,x_2 ўзгарувчилар бўйича Фурье алмаштиришини белгилаймиз:

$$\tilde{V}(\eta_1,\eta_2,z,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} V\,(x_1,x_2,z,t)e^{i(\eta_1 x_1+\eta_2 x_2)}dx_1dx_2,$$

бу ерда $\eta_1,\eta_2 -$ Фурье алмаштиришининг параметрлари. η_1,η_2 ларни фиксирлаб, қулайлик учун $\tilde{V}(\eta_1,\eta_2,z,t) = \tilde{V}(z,t)$ белгилаш киритамиз.

$\tilde{V}(z,t)$ функцияларга нисбатан (47)-(50) масалани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\frac{\partial \tilde{V}_i}{\partial t} + \gamma_i \frac{\partial \tilde{V}_i}{\partial z} = -\sum_{j=1}^{6} b_{ij}\,(z)\tilde{V}_j(z,t) +$$

$$+\int\limits_0^t \sum_{j=1}^{6} a_{ij}\,(z,\tau)\tilde{V}_j(z,t-\tau)d\tau + F_i(z,t),\ i = \overline{1,6}, \tag{51}$$

$$\tilde{V}_i|_{t=0} \equiv \tilde{\phi}_i(z),\ i = \overline{1,6}, \tag{52}$$

$$\tilde{V}_i|_{z=0} = \tilde{g}_i(t),\ i = 1,2;\ \tilde{V}_i|_{z=L} = \tilde{g}_i(t),\ i = 3,4, \tag{53}$$

$$\tilde{V}_i|_{z=L} = \tilde{h}_i(t),\ i = 1,2;\ \tilde{V}_i|_{z=0} = \tilde{h}_i(t),\ i = \overline{3,6} \tag{54}$$

бу ерда $\gamma_i = \begin{cases} -1, & i = 1,2, \\ 1, & i = 3,4, \\ 0, & i = 5,6, \end{cases}$ $B = \left(b_{ij}(z)\right)_{i,j=1}^{6} = \tilde{C} - i\sum_{j=1}^{2}\eta_j\,\tilde{C}_j.$

$w(z,t) = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{V}(z,t)$ вектор функцияни киритамиз ва $w(z,t)$ функцияга нисбатан қуйидаги масалага эга бўламиз:

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + \gamma_i \frac{\partial w_i}{\partial z} = -\sum_{j=1}^{6} b_{ij}\,(z)w_j(z,t) + \sum_{j=1}^{6} a_{ij}\,(z,t)\tilde{\phi}_j(z) +$$

$$+\int\limits_0^t \sum_{j=1}^{6} a_{ij}\,(z,\tau)w_j(z,t-\tau)d\tau + \frac{\partial}{\partial t}F_i(z,t),\ i = \overline{1,6}, \tag{55}$$

$$w_i(z,t)|_{t=0} = F_i(z,0) - \gamma_i\frac{\partial}{\partial z}\tilde{\phi}_i(z) - \sum_{j=1}^{6} b_{ij}\,(z)\tilde{\phi}_i(z) = \Phi_i(z),\ i = \overline{1,6}, \tag{56}$$

$$w_i(z,t)|_{z=0} = \frac{d}{dt}\tilde{g}_i(t),\ i = 1,2;\ w_i(z,t)|_{z=L} = \frac{d}{dt}\tilde{g}_i(t),\ i = 3,4, \tag{57}$$

$$w_i(0,t) = \frac{d}{dt}\tilde{h}_i(t),\ i = \overline{3,6};\quad w_i(L,t) = \frac{d}{dt}\tilde{h}_i(t),\ i = 1,2. \tag{58}$$

Қуйидаги келишувчанлик шартлари бажарилсин:

$$\tilde{\phi}_i(0) = \tilde{g}_i(0),\quad i = 1,2;\ \tilde{\phi}_i(L) = \tilde{g}_i(0),\quad i = 3,4, \tag{59}$$

$$F_i(0,0) - \gamma_i\frac{\partial}{\partial z}\tilde{\phi}_i(z)\bigg|_{z=0} - \sum_{j=1}^{6} b_{ij}\,(0)\tilde{\phi}_i(0) = \frac{d}{dt}\tilde{g}_i(t)\bigg|_{t=0},\ i = 1,2, \tag{60}$$

$$F_i(L,0) - \gamma_i\frac{\partial}{\partial z}\tilde{\phi}_i(z)\bigg|_{z=L} - \sum_{j=1}^{6} b_{ij}\,(L)\tilde{\phi}_i(L) = \frac{d}{dt}\tilde{g}_i(t)\bigg|_{t=0},\ i = 3,4. \tag{61}$$

(55)-(57) масалага нисбатан қуйидаги тасдиқ ўринли:

6-теорема. *Фараз қилайлик,* $F(x_1,x_2,z,t)$, $\phi(x_1,x_2,z)$, $g(x_1,x_2,t)$ *функциялар ҳар бир фиксирланган* z *ва* t *лар учун* x_1,x_2 *ўзгарувчилар бўйича финит функциялар бўлсин. Фараз қилайлик,* $\hat{\varepsilon}(z)\in C^1[0,L]$, $\hat{\mu}(z)\in C^1[0,L]$, $\tilde{\phi}(z)\in C^1[0,L]$, $\tilde{g}(t)\in C^1[0,T]$, $K(t)\in C^1[0,T]$, $\tilde{F}(z,t)\in C^{0,1}(\Omega_T)$ *бўлсин ва (59)-(61) келишувчанлик шартлари бажарилсин. У ҳолда* Ω_T соҳада *(55)-(57) масаланинг ягона узлуксиз ечими мавжуд.*

Энди қуйидаги муносабат

$$\frac{p^2\sqrt{p}q_6}{q_1q_2}q_5\left(\tilde{\phi}_1^2(z)-\tilde{\phi}_3^2(z)\right)\left(\tilde{\phi}_2^2(z)-\tilde{\phi}_4^2(z)\right)\times$$
$$\times\left(q_3\tilde{\phi}_1(z)+q_4\tilde{\phi}_2(z)+q_3\tilde{\phi}_3(z)+q_4\tilde{\phi}_4(z)+\tilde{\phi}_5(z)\right)\neq 0, \qquad (62)$$

ва келишувчанлик шартлари

$$\frac{d}{dt}\tilde{h}_i(t)\Big|_{t=0}=F_i(L,0)-\gamma_i\frac{\partial}{\partial z}\tilde{\phi}_i(z)\Big|_{z=L}-\sum_{j=1}^{6}b_{ij}(L)\tilde{\phi}_i(L),\ i=1,2, \qquad (63)$$
$$\frac{d}{dt}\tilde{h}_i(t)\Big|_{t=0}=F_i(0,0)-\gamma_i\frac{\partial}{\partial z}\tilde{\phi}_i(z)\Big|_{z=0}-\sum_{j=1}^{6}b_{ij}(0)\tilde{\phi}_i(0),\ i=\overline{3,6} \qquad (64)$$

бажарилсин деб фараз қиламиз.

Тескари масала ечими ҳақида қуйидаги теорема ўринли:

7-теорема. *Фараз қилайлик 6-теорема шартлари бажарилсин, бундан ташқари* $h(x_1,x_2,t)$ *вектор функция фиксирланган* t *да* x_1,x_2 *ўзгарувчилар бўйича финит,* $\tilde{\phi}(z)\in C^2[0,L]$, $\tilde{g}(t)\in C^2[0,L]$, $\tilde{h}(t)\in C^2[0,L]$, $F(z,t)\in C^{1,1}(\Omega_L)$, *(62) ва (63), (64) келишувчанлик шартлари бажарилсин. У ҳолда ихтиёрий* $L>0$ *учун (55)-(58) тескари масаланинг* $[0,L]$ *кесмада ягона ечими мавжуд ва бу ечим* $\varphi(t)$, $\psi(t)\in C^1[0,L]$ *синфга тегишли бўлади.*

ХУЛОСА

Диссертацияда гиперболик интегро-дифференциал Максвелл тенгламалар системаси учун бошланғич-чегаравий тўғри масалалар ва интеграл ҳади ядросини аниқлаш бўйича тескари масалалар тадқиқ қилинди.

Асосий тадқиқот натижалари қуйидагилардан иборат:

- хотирага эга биринчи тартибли гиперболик системадан диагонал матрица кўринишдаги ядрони аниқлаш масаласининг ечими мавжудлиги ва ягоналиги ҳақида локал теорема сиқиб акслантириш принципига асосан исбот қилинган;

- ўрама типидаги интеграл ҳадга эга бўлган биринчи тартибли гиперболик интегро-дифференциал тенгламалар системаси учун қўйилган бошланғич-чегаравий масаланинг бир қийматли ечилиши ҳақидаги теорема исбот қилинган;

- икки ўлчамли Максвелл интегро-дифференциал тенгламалари системаси нормал кўринишга келтирилган, нормал кўринишдаги икки ўлчамли Максвелл интегро-дифференциал тенгламалари системаси учун ядроларни аниқлашнинг тескари масаласи қўйилган ва тескари масала ечими мавжудлиги ва ягоналиги экспоненциал вазнли функциялар синфида исбот қилинган;

- уч ўлчамли Максвелл интегро-дифференциал тенгламалари системаси нормал кўринишга келтирилган, нормал кўринишдаги Максвелл интегро-дифференциал тенгламалари системасидан хотирани аниқлаш масалаларининг ягона ечими мавжудлиги ҳақида глобал теорема экспоненциал вазнли функциялар синфида сиқиб акслантириш принципига асосан исбот қилинган.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.02.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
САМАРКАНДСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ**

БУХАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТУРДИЕВ ХАЛИМ ХАМРОЕВИЧ

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Бухара – 2022

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2020.4.PhD/FM533.

Диссертация выполнена в Бухарском государственном университете и Бухарском отделении Института Математики имени В.И. Романовского АН РУз.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz/) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Дурдиев Дурдимурод Каландарович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Ишанкулов Толиб** доктор физико-математических наук, профессор
	Рузиев Менглибай Холтожибаевич доктор физико-математических наук
Ведущая организация:	**Ургенчский государственный университет**

Защита диссертации состоится «30» 09 2022 года в «10[00]» часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 при Самаркандском государственном университете. (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (+99866)231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Самаркандского государственного университета (зарегистрирована за № 82). (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (+99866)231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38).

Автореферат диссертации разослан «7» 09 2022 года.
(протокол рассылки № 2 от «7» 09 2022 года).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI SHAROF RASHIDOV NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

А.С. Солеев
Председатель научного совета по присуждению научных степеней, доктор физико-математических наук, профессор

А.М. Халхужаев
Ученый секретарь научного совета по присуждению научных степеней, доктор физико-математических наук

А.Б. Хасанов
Председатель научного семинара при научном совете по присуждению научных степеней, доктор физико-математических наук, профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научно-прикладные исследования, проводимые в мировом масштабе, сводятся к исследованию методов решению прямых и обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных. На сегодняшний день в геологии, электродинамике, процессах распространения волн, геофизике и многих других областях обратные задачи для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных составляют основу исследуемых задач. На основе дополнительной информации о решении прямой задачи проводить исследования по решению прямых задач, по определению ядер интегро-дифференциальных уравнений, по численному решению этих интегро-дифференциальных уравнений остаются важными задачами математической физики.

В настоящее время во всем мире проводятся исследования в бурно развивающеимся направлении математической физики посвященным методам исследования обратных задач. С математической точки зрения задачи данного направления в одной из важных областей физико-технических наук в электродинамике приводит к введению интегрального члена в виде свертки, представляющего предыдущее состояние процесса в математической модели теории распространения электромагнитных волн, при учитывание памяти среды. Таким образом, возникла необходимость исследования корректности прямых и обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений в электромагнитных полях с памятью. Именно такие актуальные научные проблемы и исследуются в этой диссертационной работе.

В нашей Республике уделяется большое внимание современным направлениям интегро-дифференциальных уравнений и математической физики, имеющим научное и практическое применение в фундаментальных науках. В частности, в последние годы достигнуты значительные результаты в исследовании начально-краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений, описывающих процессы распространения электромагнитных волн в средах с памятью, в решении практических задач путем решения обратных задач для них. Достигнуты значительные результаты по доказательству существования, единственности решения обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений распространения электромагнитных волн в средах с памятью и по определению функций памяти сред. Основными задачами и направлениями деятельности математической науки являются проведения исследований на уровне международных стандартов в приоритетных областях дифференциальных уравнений, математической физики и функционального анализа[1]. В связи с этим представляется важным

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18.05.2017 г. № 292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан».

развитие теории обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений математической физики.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат осуществлению задач, указанных в Указе Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О Стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в постановлениях № ПП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», № ПП -2909 от 20 апреля 2017 г. «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования» и № ПП-3682 от 27 апреля 2018 г. «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», а также других нормативно - правовых актах, по данной деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий в республике. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Обратные задачи для гиперболических уравнений и систем относятся к некорректным задачам математической физики. Теория обратных задач широко освещена в научных работах М.М. Лаврентьева, В.Г. Романова, С.П. Шишатского, А.Л. Бухгейма, Л.П. Нижника, С.И. Кабанихина и других.

Обратные задачи теории распространения электромагнитных волн, теории упругости, магнитотеллурического зондирования возникли непосредственно из потребности практики. Такие задачи теории распространения электромагнитных волн рассматривались В.Г. Романовым, С.П. Белинским, Т. П. Пухначевой и другими. В этих работах ставились задачи по определению диэлектрической и магнитной проницаемостей сред, а также по определению электропроводности среды.

В быстропеременных электромагнитных полях, частоты которых не ограничены условием малости по сравнению с частотами, характерными для установления электромагнитной поляризации вещества нарушается однозначная зависимость индукций от значений напряженности соответствующих полей. Для математического описания таких процессов в систему уравнений Максвелла добавляются интегралы типа свёртки с матричными ядрами, представляющие память среды. Определение этих ядер по условию переопределения представляет новый тип обратных задач. В.Г. Романовым, Д.К. Дурдиевым изучены обратные задачи нахождения ядер из гиперболического интегро-дифференциального уравнения второго порядка, написанного для одной компоненты вектора напряженности электрического поля. В этом случае для известных и искомых функций, на геометрию области приходятся ставить жесткие требования. В этой диссертационной работе ставятся и изучаются прямые и обратные задачи для системы уравнений Максвелла в терминах самой системы.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами института, в котором выполняется диссертация.

Диссертационная работа выполнена соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ М-02.2018 «Обратные задачи математической физики» (2020-2022г.) Бухарского государственного университета.

Цель исследования. Основной целью настоящей диссертационной работы является построение методов решений обратных задач по определению ядер интегральных членов в двумерной и трехмерной системах интегро-дифференциальных уравнений Максвелла, а также исследование единственности и существования решений этих обратных задач.

Задачи исследования:

- доказать существование единственного локального решения обратной задачи определения диагонального матричного ядра из гиперболической системы первого порядка с памятью;

- доказать теорему об однозначной разрешимости начально-краевой задачи, поставленной для гиперболической системы интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с интегральным членом типа свёртки;

- привести к нормальной форме систему двумерных интегро-дифференциальных уравнений Максвелла и в классе непрерывных функций с экспоненциальным весом, доказать теоремы существования и единственности решения обратной задачи определения ядер для системы двумерных интегро-дифференциальных уравнений Максвелла в нормальной форме;

- привести к нормальной форме систему трехмерных интегро-дифференциальных уравнений Максвелла и в классе непрерывных функций с экспоненциальным весом, доказать теорему о глобальной одназначной разрешимости обратной задачи определения памяти из системы трёхмерных интегро-дифференциальных уравнений Максвелла в нормальной форме.

Объектом исследования является одномерные обратные задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа первого порядка.

Предметом исследования является прямые и обратные задачи для гиперболических систем интегро-дифференциальных уравнений первого порядка и интегро-дифференциальных уравнений Максвелла.

Методы исследования. В диссертации использованы методы теории дифференциальных уравнений с частными производными и теории интегральных уравнений, а также методы функционального анализа. Однозначная разрешимость прямых и обратных задач доказана заменой этих задач замкнутой системой нелинейных интегральных уравнений второго рода вольтерровского типа и дальнейшим применением метода последовательных приближений и принципа сжимающих отображений.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

- на основе принципа сжимающих отображений, доказано существование единственного локального решения обратной задачи определения диагонального матричного ядра из гиперболической системы первого порядка с памятью;

- доказана теорема об однозначной разрешимости начально-краевой задачи, поставленной для гиперболической системы интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с интегральным членом типа свёртки;

- система двумерных интегро-дифференциальных уравнений Максвелла приведена к нормальной форме, поставлена и изучена обратная задача определения ядер для системы двумерных интегро-дифференциальных уравнений Максвелла в нормальной форме, также в классе непрерывных функций с экспоненциальным весом доказаны теоремы существования и единственности решения обратной задачи;

- система трехмерных интегро-дифференциальных уравнений Максвелла приведена к нормальной форме, на основе принципа сжимающих отображений в классе непрерывных функций с экспоненциальным весом доказана теорема о глобальной одназначной разрешимости обратной задачи определения памяти из системы трёхмерных интегро-дифференциальных уравнений Максвелла в нормальной форме.

Практические результаты исследования. Работа носит теоретический характер, однако существенно основывается на имеющихся экспериментальных данных. Результаты исследований могут быть использованы в сейсмологии, при разработке нефтяных и газовых месторождений и при чтении специальных курсов лекций по предмету математической физики для старших курсов бакалавриата и магистратуры.

Достоверность результатов исследования. Использовались методы математического и функционального анализа, элементы дифференциальных уравнений и теории обратных задач. Полученные результаты имеют строгие математические доказательства.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость результатов исследования объясняется дальнейшим развитием теории обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений математической физики, построением методов определения одномерных ядер.

Практическая значимость результатов исследований объясняется их применением в сейсмологии, в разведке месторождений нефти и газа, в процессах теплообмена в теплопроводных средах с памятью.

Внедрение результатов исследования. На основе научных результатов по обратным задачам для системы интегро-дифференциальных уравнений Максвелла*:*

- исследовании разрешимости обратных задач для системы интегро-дифференциальных уравнений Максвелла, полученные результаты были использованы в проекте “Развитие теории и разработка методов расчета напряженно-деформированного состояния криволинейного участка композитных труб, с протекающей вязкой жидкостью под воздействием температурных и динамических нагрузок", регистрационный номер ОТ-Ф4-01 (справка № 7-01-1371 от 30.05.2022 года, Министерства высшего и среднего специального образования республики Узбекистан, Ташкентский химико-технологический институт). Применение научных результатов позволило доказать существование и единственность задачи определения ядра;

- исследование задач определения ядер для системы интегро-дифференциальных уравнений Максвелла, были использованы в проекте «Математическое моделирование и численное решение задач механики сплошной среды и тепломассообмена в геофизических и инженерных задачах» регистрационный номер АААА-А19-119032590069-3 (справка № 77 от «26» мая 2022 года, Южного Математического Института филиала ФГНБУ ФНЦ Владикавказский научный центр РАН). В частности, была исследованы локальная и глобальная разрешимости одномерной обратной задачи в системе интегро-дифференциальных уравнений Максвелла для анизотропных сред.

Апробации результатов исследования. Результаты данного исследования обсуждены в 7 научно-практических конференциях, в том числе в 2 международных и 5 республиканских.

Опубликование результатов. По теме диссертации опубликовано 12 научных работ, из них 2 опубликованы в зарубежных журналах, входящих в базу SCOPUS и 3 статьи в республиканских журналах входящих в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора философии.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка использованных литератур. Объем диссертации состовляет 112 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных и отечественных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации называется **«Обратная задача для гиперболической системы первого порядка с памятью»**. В первом параграфе этой главы, приводятся основные понятия, а также известные теоремы, которые используются при доказательствах результатов диссертации. Во втором параграфе изучаются прямая и обратная задачи для гиперболической системы интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с памятью.

Рассмотрим в области $D=\{(x,t): 0<x<H,\ t>0\}$ систему из n уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A\frac{\partial u}{\partial x}+B(x)u(x,t)=\int_0^t K\,(\tau)u(x,t-\tau)d\tau+f(x,t), \qquad (1)$$

относительно вектор-функции $u(x,t)$ с компонентами $u_1,\ u_2\dots u_n$. Здесь $A,\ B$ и $K-$ квадратные матрицы размерности $n\times n$, причем

$$A=diag(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n), K(t)=diag\big(K_1(t),K_2(t),\dots,K_n(t)\big),$$
$$B(x)=\big(b_{ij}\big)_{i,j=1}^{n}(x),$$

λ_i- вещественные, различные постоянные и

$$\lambda_i>0,\ i=\overline{1,s};\ \ \lambda_i<0,\ \ i=\overline{s+1,n};\ 0\le s\le n,$$

$f(x,t)=\big(f_1(x,t),f_2(x,t),\dots,f_n(x,t)\big)-$ заданная вектор-функция.

В прямой задаче при заданных матрицах A, $B(x)$, $K(t)$ и вектор-функции $f(x,t)$ требуется определить в области D вектор-функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению (1) при следующих начальных и граничных условиях:

$$u(x,0)=\varphi(x),\ 0\le x\le H, \qquad (2)$$
$$u_i(0,t)=g_i(t),\ i=\overline{1,s},\quad u_i(H,t)=g_i(t),\ i=\overline{s+1,n}, \qquad (3)$$

при этом $\varphi(x)$ и $g_i(t), i=\overline{1,n}-$ заданные функции.

Обратная задача заключается в определении матричной функции $K(t)$, $t>0$ если относительно решения прямой задачи (1)–(3) известна следующая информация:

$$u_i(0,t)=h_i(t),\ i=\overline{s+1,n},\qquad u_i(H,t)=h_i(t),\ i=\overline{1,s}, \qquad (4)$$

где $h_i(t)\,, i=\overline{1,n}-$ заданные функции.

Пусть выполнены условия согласования

$$\varphi_i(0)=g_i(0),\quad i=\overline{1,s};\quad \varphi_i(H)=g_i(0),\quad i=\overline{s+1,n}. \qquad (5)$$

Введем в рассмотрение вектор-функцию $v(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)$. В результате относительно $v(x,t)$ придём к задаче

$$\left(E\frac{\partial}{\partial t}+A\frac{\partial}{\partial x}+B(x)\right)v=K(t)\varphi(x)+\int_0^t K\,(\tau)v(x,t-\tau)d\tau+\frac{\partial}{\partial t}f(x,t), \quad (6)$$

$$v(x,0)=f(x,0)-A\frac{d}{dx}\varphi(x)-B(x)\varphi(x)=:\Phi(x),\ 0\le x\le H, \qquad (7)$$

$$v_i(0,t)=\frac{d}{dt}g_i(t),\ i=\overline{1,s}; v_i(H,t)=\frac{d}{dt}g_i(t),\ i=\overline{s+1,n}, \qquad (8)$$

$$v_i(0,t)=\frac{d}{dt}h_i(t),\ i=\overline{s+1,n}\,;\quad v_i(H,t)=\frac{d}{dt}h_i(t),\ i=\overline{1,s}. \qquad (9)$$

Из начальных (7) и граничных условий (8) получим следующие соотношения

$$f_i(0,0)-\lambda_i\frac{d}{dx}\varphi_i(x)|_{x=0}-\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\,(0)\varphi_j(0)=\frac{d}{dt}g_i(t)|_{t=0},\qquad i=\overline{1,s};$$

$$f_i(H,0) - \lambda_i \frac{d}{dx}\varphi_i(x)|_{x=H} -$$
$$-\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(H)\varphi_j(H) = \frac{d}{dt}g_i(t)|_{t=0}, \quad i = \overline{s+1,n}. \qquad (10)$$

Рассмотрим задачу (6)-(8) в прямоугольной области $D_T = \{(x,t) \in \mathrm{D}\colon 0 \le x \le H,\ 0 \le t \le T\}$, $T > 0 -$ некоторое фиксированное число.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi(x) \in C^1[0,H]$, $g(t) \in C^1[0,+\infty)$, $B(x) \in C^1[0,H]$, $K(t) \in C[0,+\infty)$, $f(x,t) \in C^{0,1}(D)$ *и выполнены условия (5) и (10). Тогда в области* D_T *существует единственное непрерывное решение задачи (6)-(8).*

При исследовании обратной задачи (6)-(9) потребуем выполнения следующих условий:

$$-\frac{1}{\lambda_i}\frac{d^2}{dt^2}g_i(0) + \frac{1}{\lambda_i}K_i(0)\varphi_i(0) + \frac{1}{\lambda_i}\frac{\partial}{\partial t}f_i(0,0) - \frac{1}{\lambda_i}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(0)\frac{d}{dt}g_i(0) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}f_i(0,0) - \lambda_i\frac{d^2}{dx^2}\varphi_i(0) - \sum_{j=1}^{n}\frac{d}{dx}\left[b_{ij}(x)\varphi_i(x)\right]_{x=0}, \qquad i = \overline{1,s},$$
$$-\frac{1}{\lambda_i}\frac{d^2}{dt^2}g_i(0) + \frac{1}{\lambda_i}K_i(0)\varphi_i(H) + \frac{1}{\lambda_i}\frac{\partial}{\partial t}f_i(H,0) - \frac{1}{\lambda_i}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(H)\frac{d}{dt}g_i(0) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}f_i(H,0) - \lambda_i\frac{d^2}{dx^2}\varphi_i(H) - \sum_{j=1}^{n}\frac{d}{dx}\left[b_{ij}(x)\varphi_i(x)\right]_{x=H}, i = \overline{s+1,n}, \qquad (11)$$

и выполнение условий согласования в угловых точках области D

$$f_i(0,0) - \lambda_i\tfrac{d}{dx}\varphi_i(x)|_{x=0} - \textstyle\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(0)\varphi_j(0) = \tfrac{d}{dt}h_i(t)\Big|_{t=0}, \quad i = \overline{s+1,n},$$
$$f_i(H,0) - \lambda_i\frac{d}{dx}\varphi_i(x)|_{x=H} -$$
$$-\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(H)\varphi_j(H) = \frac{d}{dt}h_i(t)|_{t=0}, \quad i = \overline{1,s}. \qquad (12)$$

Теорема 2. Пусть $\varphi(x) \in C^2[0,H]$, $g_i(t) \in C^2[0,+\infty)$, $B(x) \in C^1[0,H]$, $h(t) \in C^2[0,+\infty)$, $f(x,t) \in C^{2,1}(D)$ и выполнены условия согласования (5), (10), (11) и (12). Тогда найдётся такое $H^* > 0$, что для $H \in (0,H^*)$ решение обратной задачи (6)-(9) существует, единственно на отрезке $\left[0,\frac{H}{\mu}\right]$ и это решение будет принадлежать классу $K(t) \in C\left[0,\frac{H}{\mu}\right]$, где $\mu = \min_{1\le i\le n}\{|\lambda_i|\}$.

В параграфе 3 изучена обратная задача определения произвольного квадратичного матричного ядра из гиперболической системы первого порядка с памятью.

Рассматриваем n задачи вида (1)-(4), каждая со своим набором функций $f = f^l$, $\varphi = \varphi^l$, $g = g^l$ $(l = \overline{1,n})$, но с одними и теми же матрицами $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ и K – произвольная квадратная матрица порядка n :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + A\frac{\partial}{\partial x}\right)u^l = \int_0^t K(\tau)u^l(x, t-\tau)d\tau + f^l(x,t), \tag{13}$$

$$u^l|_{t=0} = \varphi^l(x),\ 0 \le x \le H, \tag{14}$$

$$u_i^l(0,t) = g_i^l(t),\ i = \overline{1,s};\ u_i^l(H,t) = g_i^l(t),\ i = \overline{s+1,n},\ l = \overline{1,n}, \tag{15}$$

где

$$u^l = u^l(x,t) = \left(u_1^l(x,t), u_2^l(x,t), \dots, u_n^l(x,t)\right)^*,$$

$*$ −знак транспонирования.

Обратная задача заключается в определении матричной функции $K(t) = \left(k_{ij}\right)_{i,j=1}^n(t),\ t > 0,$ если относительно решения прямой задачи (13)-(15) известна следующая информация*:*

$$u_i^l(0,t) = h_i^l(t),\ i = \overline{s+1,n},\ \ u_i^l(H,t) = h_i^l(t),\ i = \overline{1,s},\ l = \overline{1,n}\,, \tag{16}$$

где $h_i^l(t)$, $i = \overline{1,n},\ l = \overline{1,n}$ −заданные функции.

Для удобства исследования обратной задачи введем функции $w^l(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}u^l(x,t),\ l = \overline{1,n}$. Относительно введенных функций получим задачи

$$\left(E\frac{\partial}{\partial t} + A\frac{\partial}{\partial x}\right)w^l = K'(t)\varphi^l(x) + K(t)\left[f^l(x,0) - A\frac{d}{dx}\varphi^l(x)\right] + \\ + \frac{\partial^2}{\partial t^2}f^l(x,t) + \int_0^t K(\tau)w^l(x,t-\tau)d\tau, \tag{17}$$

$$w^l(x,0) = \frac{\partial}{\partial t}f^l(x,0) + K(0)\varphi^l(x) - A\frac{\partial}{\partial x}f^l(x,0) + A^2\frac{d^2}{dx^2}\varphi^l(x), \tag{18}$$

$$w_i^l(0,t) = \frac{d^2}{dt^2}g_i^l(t),\ i = \overline{1,s},\ w_i^l(H,t) = \frac{d^2}{dt^2}g_i^l(t),\ i = \overline{s+1,n}, \tag{19}$$

$$w_i^l(0,t) = \frac{d^2}{dt^2}h_i^l(t),\ i = \overline{1,s},\ w_i^l(H,t) = \frac{d^2}{dt^2}h_i^l(t),\ i = \overline{s+1,n}. \tag{20}$$

Здесь и далее символ «$'$» означает производную функции с одним аргументом.

Требуем выполнения условий согласования

$$\varphi_i^l(0) = g_i^l(0),\ i = \overline{1,s}, \varphi_i^l(H) = g_i^l(0),\ i = \overline{s+1,n},\ l = \overline{1,n}, \tag{21}$$

$$f_i^l(0,0) - \lambda_i\frac{d\varphi_i^l(x)}{dx}\bigg|_{x=0} = \frac{dg_i^l(t)}{dt}\bigg|_{t=0},\quad i = \overline{1,s}, \tag{22}$$

$$f_i^l(H,0) - \lambda_i\frac{d\varphi_i^l(x)}{dx}\bigg|_{x=H} = \frac{dg_i^l(t)}{dt}\ _{t=0},\quad i = \overline{s+1,n},\quad l = \overline{1,n}. \tag{23}$$

Пусть $\Phi(x) = (\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n)(x) -$ матрица, образованная столбцами $\varphi^l(x), l = \overline{1,n}$. В дальнейшем будем предполагать, что выполнены условия

$$det\ \Phi\,(0) \ne 0,\ det\ \Phi\,(H) \ne 0. \tag{24}$$

Из начальных и граничных условий (18), (19) получим соотношения

$$k_{il}(0) = \frac{1}{det\ \Phi\,(0)}\sum_{j=1}^n\left[\frac{d^2}{dt^2}g_i^j(t)\bigg|_{t=0} + \lambda_i f_i^j(0,0) - \lambda_i\frac{d^2}{dx^2}\varphi_i^j(x)\bigg|_{x=0} -\right.$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} f_i^j(0,t)\Big|_{t=0}\Bigg] \Psi_j^l(0),\ i=\overline{1,s},\ l=\overline{1,n}; \qquad (25)$$

$$k_{il}(0)=\frac{1}{det\ \Phi(H)}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{d^2}{dt^2}g_i^j(t)\Big|_{t=0}+\lambda_i f_i^j(H,0)-\lambda_i\frac{d^2}{dx^2}\varphi_i^j(x)\Big|_{x=H}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial t} f_i^j(0,t)\Big|_{t=0}\right] \Psi_j^l(H),\ \ i=\overline{s+1,n},\ l=\overline{1,n}, \qquad (26)$$

где $\Psi_j^l(\cdot)$ − алгебраическое дополнение элемента $\varphi_l^j(\cdot)$ матрицы $\Phi(\cdot)$.

Лемма 1. *Пусть матрица* $K(t)\in C^1[0,+\infty)$ *и справедливы включения* $f^l(x,t)\in C^{1,2}(D)$, $\varphi^l(x)\in C^2[0,H]$, $g^l(t)\in C^2[0,+\infty)$. *Кроме того, выполнены условия согласования (21)-(23), (25), (26). Тогда при каждом фиксированном* l *существует непрерывное единственное решение прямой задачи (17)-(19) в области* D_{t_1}, *где* $D_{t_1}(x_1,t_1)=\left\{(x,t):\ (x,t)\in D, t\le t_1-\frac{|x-x_1|}{\lambda_0}\right\}$, (x_1,t_1) − произвольная точка области D, $\lambda_0=\max\{|\lambda_i|: 1\le i\le n\}$.

Пусть выполнении условия согласования:

$$\varphi_i^l(0)=h_i^l(0), i=\overline{s+1,n};\ \varphi_i^l(H)=h_i^l(0),\ i=\overline{1,s},\ \ l=\overline{1,n}, \qquad (27)$$

$$\frac{d}{dt}h_i^l(t)|_{t=0}=f_i^l(0,0)-\lambda_i\frac{d}{dx}\varphi_i^l(x)|_{x=0},\ i=\overline{s+1,n}, \qquad (28)$$

$$\frac{d}{dt}h_i^l(t)|_{t=0}=f_i^l(H,0)-\lambda_i\frac{d}{dx}\varphi_i^l(x)|_{x=H}, i=\overline{1,s},\ \ l=\overline{1,n}. \qquad (29)$$

Относительно решения обратной задачи справедливо следующее утверждение:

Теорема 3. *Пусть выполнены условия леммы 1 и* $h_i^l\in C^2[0,+\infty)$, *кроме того выполнены условия (24) и условия согласования (27)-(29). Тогда найдётся такое* $H^*>0$, *что для* $H\in(0,H^*)$ *решение обратной задачи (17)-(20) существует, единственно на отрезке* $\left[0,\frac{H}{\mu}\right]$ *и определяется заданием функций* $h_i^l(t)$ *при* $t\in\left[0,\frac{H}{\mu}\right]$, $i,l=\overline{1,n}$, $\mu=\min_{1\le i\le n}\{|\lambda_i|\}$.

Во второй главе диссертации, названной «**Задача определения памяти в двумерной системе интегро-дифференциальных уравнений Максвелла**», изучена задача определения одномерного ядра интегрального члена. В первом параграфе формулируются постановки прямой и обратной задач. В этом параграфе в начале двумерная система интегро-дифференциальных уравнений Максвелла приводится к каноническому виду. Для приведенной каноническому виду двумерной системы интегро-дифференциальных уравнений Максвелла ставятся начально-краевая прямая и обратная задача определения поля электромагнитного напряжения и диагональной матрицы памяти, соответственно.

Рассмотрим двумерную систему уравнений Максвелла

$$\varepsilon\frac{\partial E_2}{\partial t}-\frac{\partial H_1}{\partial x_3}+\frac{\partial H_3}{\partial x_1}+(\varphi_0+\sigma)E_2+\int_0^t\varphi'(t-\tau)E_2(x_1,x_3,\tau)d\tau+J_2=0,$$

$$\mu\frac{\partial H_1}{\partial t}-\frac{\partial E_2}{\partial x_3}+\psi_0 H_1+\int_0^t\psi'(t-\tau)H_1(x_1,x_3,\tau)d\tau=0,$$

$$\mu\frac{\partial H_3}{\partial t}+\frac{\partial E_2}{\partial x_1}+\psi_0 H_3+\int_0^t\psi'(t-\tau)H_3(x_1,x_3,\tau)d\tau=0, \qquad (30)$$

здесь $E=(0,E_2,0)$, $H=(H_1,0,H_3)$ −соответственно напряженности электрического и магнитного полей, $\varphi(t)=diag(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$, $\psi(t)=diag(\psi_1,\psi_2,\psi_3)$ −диагональные матрицы, представляющие память. $J_2(x_1,x_3,t)$ −плотность внешнего электрического тока, $\varepsilon=\varepsilon(x_3)$ и $\mu=\mu(x_3)$ −положительно определенные функции, характеризующие электрическую и магнитную проницаемость среды, а $\sigma=\sigma(x_3)$ характеризует проводимость среды, $\varphi_0=\varphi(0)$, $\psi_0=\psi(0)$.

Введем в рассмотрении для системы (30) новые функции

$$U_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\varepsilon}E_2+\sqrt{\mu}H_1\right),\ U_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\varepsilon}E_2-\sqrt{\mu}H_1\right),\ U_3=\sqrt{\mu}H_3$$

и приводим эту систему к каноническому виду относительно переменных t и x_3:

$$\left(I_3\frac{\partial}{\partial t}+B_1\frac{\partial}{\partial x_1}+B_2\frac{\partial}{\partial x_3}+B_3\right)U=\bar{J}(x_1,x_3,t)+\int_0^t K\,(x_3,\tau)U(x,t-\tau)d\tau. \quad (31)$$

В системе (31) введены следующие обозначения:

$$I_3=diag(1,1,1),\qquad B_1=\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon\mu}}\\0&0&\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon\mu}}\\\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon\mu}}&\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon\mu}}&0\end{pmatrix},$$

$$B_2=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\Lambda_0,\ \ \Lambda_0=diag(-1,1,0),$$

$$B_3=\begin{pmatrix}\frac{\varphi_0+\sigma}{2\varepsilon}+\frac{\psi_0}{2\mu}+\frac{\mu'}{4\mu\sqrt{\varepsilon\mu}}+\frac{\varepsilon'}{4\varepsilon\sqrt{\varepsilon\mu}} & \frac{\varphi_0+\sigma}{2\varepsilon}-\frac{\psi_0}{2\mu}-\frac{\mu'}{4\mu\sqrt{\varepsilon\mu}}+\frac{\varepsilon'}{4\varepsilon\sqrt{\varepsilon\mu}} & 0\\ \frac{\varphi_0+\sigma}{2\varepsilon}-\frac{\psi_0}{2\mu}+\frac{\mu'}{4\mu\sqrt{\varepsilon\mu}}-\frac{\varepsilon'}{4\varepsilon\sqrt{\varepsilon\mu}} & \frac{\varphi_0+\sigma}{2\varepsilon}+\frac{\psi_0}{2\mu}-\frac{\mu'}{4\mu\sqrt{\varepsilon\mu}}-\frac{\varepsilon'}{4\varepsilon\sqrt{\varepsilon\mu}} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\psi_0}{\mu}\end{pmatrix},$$

$$\overline{K}(x_3,t)=-\begin{pmatrix}\frac{\varphi'}{2\varepsilon}+\frac{\psi'}{2\mu} & \frac{\varphi'}{2\varepsilon}-\frac{\psi'}{2\mu} & 0\\ \frac{\varphi'}{2\varepsilon}-\frac{\psi'}{2\mu} & \frac{\varphi'}{2\varepsilon}+\frac{\psi'}{2\mu} & 0\\ 0&0&\frac{\psi'}{\mu}\end{pmatrix},\ \bar{J}=\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}J_2(-1,1,0).$$

Новую переменную z определяем следующей формулой:

$$z=\theta(x_3)=\int\limits_0^{x_3}\sqrt{\varepsilon(\xi)\mu(\xi)}\,d\xi. \qquad (32)$$

Обозначим через $\theta^{-1}(z)$ функцию, обратную к $\theta(x_3)$ и имеем

$$\mathrm{V}(x_1,z,t):=U(x_1,\theta^{-1}(z),t),\ C_1(z)\coloneqq B_1\left(\theta^{-1}(z)\right),\ C_2(z)\coloneqq B_3\left(\theta^{-1}(z)\right),$$

$$\hat{\varepsilon}(z)=\varepsilon\left(\theta^{-1}(z)\right),\ \hat{\mu}(z)=\mu\left(\theta^{-1}(z)\right),$$

$$K(z,t):=\overline{K}(\theta^{-1}(z),t)=\left(k_{ij}\right)_{i,j=1}^{3},\ J(x_1,z,t):=\bar{J}(x_1,\theta^{-1}(z),t).$$

Тогда система (31) принимает вид

$$\left(I_3\frac{\partial}{\partial t}+\Lambda_0\frac{\partial}{\partial z}+C_1\frac{\partial}{\partial x_1}+C_2\right)V=\int_0^t K\,(z,\tau)V(x_1,z,t-\tau)d\tau+J(x_1,z,t). \quad (33)$$

В прямой задаче при заданных матрицах $K,\ C_1,\ C_2$ и вектор-функции J требуется определить в области $D=\{(x_1,z,t)\colon 0<z<L,\ t>0,\ x_1\in\mathbb{R}\}$ вектор-функцию $V(x_1,z,t)$, удовлетворяющую уравнению (33) при следующих начальных и граничных условиях:

$$V_i(x_1,z,t)|_{t=0}=\phi_i(x_1,z),\ i=\overline{1,3}, \quad (34)$$

$$V_1(x_1,z,t)|_{z=L}=g_1(x_1,t);\ V_2(x_1,z,t)|_{z=0}=g_2(x_1,t), \quad (35)$$

где $\phi(x_1,z)=(\phi_1,\phi_2,\phi_3)(x_1,z)$ и $g(x_1,t)=(g_1,g_2)(x_1,t)$ –заданные функции.

Обратная задача заключается в нахождении функции $\varphi(t),\ \psi(t),\ t>0$, входящие в матрицу $K(t)$, если относительно решения прямой задачи (33)-(35) известны дополнительные информации:

$$V_1(x_1,z,t)|_{z=0}=h_1(x_1,t),\ V_2(x_1,z,t)|_{z=L}=h_2(x_1,t), \quad (36)$$

где $h_1(t)$, $h_2(t)$ –заданные функции. В этой главе $\varphi_i(0)$ и $\psi_i(0)$ считаются известными.

Пусть функции $J(x_1,z,t),\ \phi_i(x_1,z),\ g_i(x_1,t),\ h_i(x_1,t)$ входящие, в правую часть (33) и данные (34)-(36) финитны по x_1 при каждом фиксированном z,t. Из существования для системы (33) конечной области зависимости и финитности по x_1 правой части (33) и данных (34), (35) следует финитность по x_1 решений задачи (33)-(35).

Обозначим через $\tilde{V}(\eta,z,t)$ преобразование Фурье функции $V(x_1,z,t)$ по переменной x_1:

$$\tilde{V}(\eta,z,t)=\int_{\mathbb{R}}V\,(x_1,z,t)e^{i\eta x_1}dx_1,$$

где $\eta-$ параметр преобразования Фурье. Фиксируем η и для удобства, введем обозначение $\tilde{V}(\eta,z,t)=\tilde{V}(z,t)$.

В терминах функции $\tilde{V}$ задачу (33)-(36) запишем в виде

$$\left(I_3\frac{\partial}{\partial t}+\Lambda_0\frac{\partial}{\partial z}+C(z)\right)\tilde{V}=\int_0^t K\,(z,\tau)\tilde{V}(z,t-\tau)d\tau+\tilde{J}(z,t), \quad (37)$$

$$\tilde{V}_i|_{t=0}\equiv\tilde{\phi}_i(z),\ i=1,2,3, \quad (38)$$

$$\tilde{V}_1|_{z=L}=\tilde{g}_1(t),\ \tilde{V}_2|_{z=0}=\tilde{g}_2(t), \quad (39)$$

$$\tilde{V}_1|_{z=0}=\tilde{h}_1(t),\ \tilde{V}_2|_{z=L}=\tilde{h}_2(t), \quad (40)$$

здесь $C(z)=C_2-i\eta C_1=\left(c_{ij}\right)_{i,j=1}^{3}$.

Введя в рассмотрение вектор-функцию $w(z,t)=\frac{\partial}{\partial t}\tilde{V}(z,t)$ из уравнений (37)-(40) относительно функций $w(z,t)$ получим следующие равенства:

$$\left(I_3\frac{\partial}{\partial t}+\Lambda_0\frac{\partial}{\partial z}+C\right)w(z,t)=K(z,t)\tilde{\phi}(z)+$$

$$+\int_0^t K\,(z,\tau)w(z,t-\tau)d\tau+\tilde{J}_t(z,t), \quad (41)$$

$$w_i(z,t)|_{t=0} = \tilde{J}_i(z,0) - \gamma_i \frac{\partial}{\partial z}\tilde{\phi}_i(z) - \sum_{j=1}^{3} c_{ij}(z)\tilde{\phi}_j(z) = \Phi_i(z),\ i = \overline{1,3}, \quad (42)$$

$$w_1(z,t)|_{z=L} = \frac{d}{dt}\tilde{g}_1(t),\ w_2(z,t)|_{z=0} = \frac{d}{dt}\tilde{g}_2(t), \quad (43)$$

$$w_1(z,t)|_{z=0} = \frac{d}{dt}\tilde{h}_1(t), \quad w_2(z,t)|_{z=L} = \frac{d}{dt}\tilde{h}_2(t). \quad (44)$$

Относительно решения прямой задачи (41)-(43) верно следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть функции* $J(x_1,z,t), \phi_i(x_1,z), g_i(x_1,t)$ *финитны по переменной* x_1 *при каждом фиксированном* z,t. *Кроме того* $\hat{\varepsilon}(z) \in C^1[0,H]$, $\hat{\mu}(z) \in C^1[0,H]$, $\tilde{\phi}(z) \in C^1[0,H]$, $\tilde{g}(t) \in C^1[0,T]$, $K(z,t) \in C(\Omega_T)$, $\tilde{J}(z,t) \in C^1(\Omega_T)$ *и выполнены условия* $\tilde{\phi}_1(L) = \tilde{g}_1(0)$, $\tilde{\phi}_2(0) = \tilde{g}_2(0)$, $\Phi_1(L) = \frac{d}{dt}\tilde{g}_1(t)|_{t=0}$, $\Phi_2(0) = \frac{d}{dt}\tilde{g}_2(t)|_{t=0}$. *Тогда в области* Ω_T *существует единственное непрерывное решение прямой задачи (41)-(43), где* $\Omega_T = \{(z,t): 0 \le z \le L,\ 0 \le t \le T\}, T > 0 -$ *некоторое фиксированное число.*

Относительно решение обратной задачи (41)-(44) справедлива следующая теорема:

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теорема 4 и функция* $h(x_1,t)$ *финитна относительно переменной* x_1 *при каждом фиксированном* t, *кроме того* $\tilde{\phi}(z) \in C^2[0,L]$, $\tilde{g}(t) \in C^2[0,L]$, $\tilde{h}(t) \in C^2[0,L]$ $\tilde{J}(z,t) \in C^{1,1}(\Omega_L)$ *и выполнены условия согласования* $\Phi_1(L) = \frac{d}{dt}\tilde{h}_1(t)|_{t=0}$, $\Phi_2(0) = \frac{d}{dt}\tilde{h}_2(t)|_{t=0}$ *и соотношение* $\tilde{\phi}_1(0)\tilde{\phi}_1(L) \neq \tilde{\phi}_2(0)\tilde{\phi}_2(L)$. *Тогда для любого* $L > 0$ *на отрезке* $[0,L]$ *существует единственное решение обратной задачи (41)-(44) из класса* $\varphi(t),\ \psi(t) \in C^1\,[0,L]$, *где* $\Omega_L := \{(z,t): 0 \le z \le L,\ 0 \le t \le L\}$.

В третьей главе диссертации, названной «**Задача определения ядер памяти из системы трехмерных интегро-дифференциальных уравнений Максвелла**», рассмотрена начально-краевая задача для трехмерной интегро-дифференциальной системы уравнений Максвелла и обратная задача определения одномерного ядра памяти.

Рассмотрим симметрическую интегро-дифференциальную гиперболическую систему уравнений Максвелла:

$$A_0 \frac{\partial}{\partial t} U + \sum_{j=1}^{3} A_j \frac{\partial}{\partial x_j} U + A_4 U = \int_0^t K\,(t-\tau) U(x,\tau) d\tau + \hat{J}(x,t), \quad (44)$$

в которой $U = (U_1, \dots, U_6)^* -$ вектор - столбец с компонентами $U_k = E_k, U_{k+3} = H_k$, $k = \overline{1,3}$; A_j, $j = \overline{0,4} -$ симметрические матрицы, причем $A_0 -$ положительно определена; $J = (\chi_1, \dots, \chi_6)^* -$ вектор - столбец с компонентами $\chi_k = \chi_k(x,t)$, $\chi_{k+3} = 0$, $k = \overline{1,3}$, $\chi_k -$ заданные достаточно гладкие функции, $K(t) = -diag\left(\frac{d}{dt}\varphi_1, \frac{d}{dt}\varphi_2, \frac{d}{dt}\varphi_3, \frac{d}{dt}\psi_1, \frac{d}{dt}\psi_2, \frac{d}{dt}\psi_3\right)(t)$ матричная функция, представляющая память. Матрицы A_j имеют следующую структуру:

$$A_0 = \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \hat{\mu} \end{pmatrix}_{6\times6},\ A_j = \begin{pmatrix} 0 & p_j \\ p_j^* & 0 \end{pmatrix}_{6\times6},\ j = 1,2,3, \quad p_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$p_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ p_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} \varphi(0) + \hat{\sigma} & 0 \\ 0 & \psi(0) \end{pmatrix}_{6\times 6},$$

$0_{1\times 3}$ обозначает вектор-строку $(0; 0; 0)$.

Умножая слева на обратную матрицу A_0^{-1} уравнение (44), получим

$$I_6 \frac{\partial}{\partial t} U + \sum_{j=1}^{3} B_j \frac{\partial}{\partial x_j} U + B_4 U = \int_0^t K_0\,(x_3, t-\tau) U(x,\tau) d\tau + J_0. \tag{45}$$

Здесь I_6 означает единичную матрицу порядка 6,

$$B_j = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon p_j \\ \mu p_j^* & 0 \end{pmatrix}, j = \overline{1,3},\ B_4 = \begin{pmatrix} \varepsilon\varphi(0) + \sigma & 0 \\ 0 & \mu\psi(0) \end{pmatrix},$$

$$K_0(x_3, t) = \begin{pmatrix} -\varepsilon \frac{d}{dt}\varphi(t) & 0 \\ 0 & -\mu \frac{d}{dt}\psi(t) \end{pmatrix},\ J_0 = A_0^{-1}\hat{J},$$

$$\varepsilon = \hat{\varepsilon}^{-1} = (\varepsilon_{ij}), \quad \mu = \hat{\mu}^{-1} = (\mu_{ij}), \quad \sigma = \varepsilon\hat{\sigma} = (\sigma_{ij}).$$

Систему (45), относительно t и x_3 приведём к каноническому виду. Как известно из линейной алгебры[2], в рассматриваемом случае существует такая невырожденная матрица T, что $T^{-1}B_3T = \Lambda$, где $\Lambda -$ диагональная матрица, на диагонали которой стоят собственные числа матрицы B_3.

Матрица T с указанным выше свойством построена в следующем виде[3]

$$T(x_3) = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & q_2 & 0 & 0 \\ q_3 & q_4 & q_3 & q_4 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{q_2} & 0 & -\frac{1}{q_2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{q_1} & 0 & \frac{1}{q_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $q_1 = \left(\frac{\varepsilon_{11}}{\mu_{22}}\right)^{1/4}, \quad q_2 = \left(\frac{\varepsilon_{22}}{\mu_{11}}\right)^{1/4}, \quad q_3 = \frac{\varepsilon_{31}}{\varepsilon_{11}^{3/4}\mu_{22}^{1/4}}, \quad q_4 = \frac{\varepsilon_{32}}{\varepsilon_{22}^{3/4}\mu_{11}^{1/4}}.$

Введём в уравнении (45) новую функцию с помощью равенства $U = T\bar{U}$ и умножим это уравнение слева на матрицу T^{-1}. Тогда для функции $\bar{U}$ получим уравнение

$$\left(I_6 \frac{\partial}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial}{\partial x_3} + \sum_{j=1}^{2} C_j \frac{\partial}{\partial x_j} + C\right)\bar{U} = \int_0^t \overline{K}\,(x_3, t-\tau)\bar{U}(x,\tau) d\tau + F, \tag{46}$$

где $C = C_0 + C_4, \quad C_0 = T^{-1}B_3 \frac{\partial}{\partial x_3} T,\ C_i = T^{-1}B_iT,\ i = \overline{1,4},\ C_3 = \Lambda = \sqrt{p}\Lambda_0,$
$\Lambda_0 = diag(-1,-1,1,1,0,0), \qquad \overline{K}(x_3,t) = T^{-1}K_0(x_3,t)T = (\overline{a}_{ij})_{i,j=1}^{6}(x_3,t),$
$F = T^{-1}J_0\ \ p = \varepsilon_{11}\mu_{22} = \varepsilon_{22}\mu_{11}.$

Введём новую переменную z с помощью формулы

[2]Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., М, 1988.
[3] Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука. 1984. с. 264.

$$z=\nu(x_3)=\int\limits_0^{x_3}\frac{d\xi}{\sqrt{p(\xi)}}.$$

Обозначим через $\nu^{-1}(z)$ функцию, обратную к $\nu(x_3)$ и введем следующие обозначения:

$$V(x_1,x_2,z,t):=\bar{U}(x_1,x_2,\nu^{-1}(z),t),\ \hat{C}_j(z):=C_j\left(\nu^{-1}(z)\right),\ \widehat{K}(z,t):=\overline{K}(\nu^{-1}(z),t),\ \hat{C}(z)=C\left(\nu^{-1}(z)\right), a_{ij}(z,t):=\overline{a}_{ij}(\nu^{-1}(z),t), \hat{F}(x_1,x_2,z,t):=F(x_1,x_2,\nu^{-1}(z),t),\ i,j=\overline{1,6}.$$

Тогда система (46) принимает вид

$$\left(I_6\frac{\partial}{\partial t}+\Lambda_0\frac{\partial}{\partial z}+\sum_{j=1}^{2}\tilde{C}_j\frac{\partial}{\partial x_j}+\tilde{C}\right)V=$$

$$=\hat{F}(x_1,x_2,z,t)+\int\limits_0^t\widehat{K}\,(z,t-\tau)V(x_1,x_2,z,\tau)d\tau. \qquad (47)$$

В прямой задаче при заданных матрицах $\widehat{K},\ \hat{C}_1,\ \hat{C}_2,\ \hat{C}$ и вектор-функции $\hat{F}$ требуется определить в области $D=\{(x_1,x_2,z,t){:}\,0<z<L,\ t>0,(x_1,x_2)\in R^2\}$ вектор-функцию $V(x_1,x_2,z,t)$, удовлетворяющую уравнению (47) при следующих начальных и граничных условиях:

$$V_i(x_1,x_2,z,t)|_{t=0}=\phi_i(x_1,x_2,z),\ i=\overline{1,6}, \qquad (48)$$

$$V_i(x_1,x_2,z,t)|_{z=0}=g_i(x_1,x_2,t),\ i=1,2,$$
$$V_i(x_1,x_2,z,t)|_{z=L}=g_i(x_1,x_2,t),\ i=3,4, \qquad (49)$$

где

$\phi(x_1,x_2,z)=(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_6)(x_1,x_2,z), g(x_1,x_2,t)=(g_1,g_2,\ldots,g_6)(x_1,x_2,t)$ — заданные функции.

Обратная задача заключается в определении функций $\varphi_i(t),\ \psi_i(t),\ t>0, i=1,2,3$, входящих в матрицу $\widehat{K}(z,t)$, если относительно решения задачи (47)-(49) известны дополнительные условия

$$V_i(x_1,x_2,z,t)|_{z=L}=h_i(x_1,x_2,t),\ i=1,2;$$
$$V_i(x_1,x_2,z,t)|_{z=0}=h_i(x_1,x_2,t),\ i=\overline{3,6}, \qquad (50)$$

при этом $\varphi_i(0)$ и $\psi_i(0)$ считаются заданными, где $h_i(x_1,x_2,t), i=\overline{1,6}$ — заданные функции.

Пусть функции $\tilde{F}(x_1,x_2,z,t),\ \phi(x_1,x_2,z),\ g(x_1,x_2,t),\ h(x_1,x_2,t)$, входящие в правую часть (47) и данные (48), (49) финитны по x_1,x_2 при каждом фиксированном $z,\ t$. Тогда решение задачи (47)-(49) будет финитным по x_1,x_2, в силу существования конечной области зависимости от входящих данных гиперболической системы уравнений (47).

Обозначим через $\tilde{V}(\eta_1,\eta_2,z,t)$ преобразование Фурье функции $V(x_1,x_2,z,t)$ по переменным x_1,x_2:

$$\tilde{V}(\eta_1,\eta_2,z,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^2}V\,(x_1,x_2,z,t)e^{i(\eta_1x_1+\eta_2x_2)}dx_1dx_2,$$

где η_1, η_2 —параметры преобразования. Для удобства, фиксируем η_1, η_2 и введем обозначение $\tilde{V}(\eta_1, \eta_2, z, t) = \tilde{V}(z,t)$.

В терминах функции $\tilde{V}$ задачу (47)-(50) запишем в виде

$$\frac{\partial \tilde{V}_i}{\partial t} + \gamma_i \frac{\partial \tilde{V}_i}{\partial z} = -\sum_{j=1}^{6} b_{ij}(z)\tilde{V}_j(z,t) +$$

$$+\int_0^t \sum_{j=1}^{6} a_{ij}(z,\tau)\tilde{V}_j(z,t-\tau)d\tau + F_i(z,t),\ i = \overline{1,6}, \tag{51}$$

$$\tilde{V}_i|_{t=0} \equiv \tilde{\phi}_i(z),\ i = \overline{1,6}, \tag{52}$$

$$\tilde{V}_i|_{z=0} = \tilde{g}_i(t),\ i = 1,2;\ \tilde{V}_i|_{z=L} = \tilde{g}_i(t),\ i = 3,4, \tag{53}$$

$$\tilde{V}_i|_{z=L} = \tilde{h}_i(t),\ i = 1,2;\ \tilde{V}_i|_{z=0} = \tilde{h}_i(t),\ i = \overline{3,6}, \tag{54}$$

здесь $\gamma_i = \begin{cases} -1, & i = 1,2, \\ 1, & i = 3,4, \\ 0, & i = 5,6, \end{cases}$ $B = \left(b_{ij}(z)\right)_{i,j=1}^{6} = \tilde{C} - i\sum_{j=1}^{2} \eta_j \tilde{C}_j.$

Введем в рассмотрение вектор-функцию $w(z,t) = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{V}(z,t)$ и относительно функции $w(z,t)$ получим следующую задачу:

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + \gamma_i \frac{\partial w_i}{\partial z} = -\sum_{j=1}^{6} b_{ij}(z)w_j(z,t) + \sum_{j=1}^{6} a_{ij}(z,t)\tilde{\phi}_j(z) +$$

$$+\int_0^t \sum_{j=1}^{6} a_{ij}(z,\tau)w_j(z,t-\tau)d\tau + \frac{\partial}{\partial t}F_i(z,t),\ i = \overline{1,6}, \tag{55}$$

$$w_i(z,t)|_{t=0} = F_i(z,0) - \gamma_i \frac{\partial}{\partial z}\tilde{\phi}_i(z) - \sum_{j=1}^{6} b_{ij}(z)\tilde{\phi}_i(z) =: \Phi_i(z),\ i = \overline{1,6}, \tag{56}$$

$$w_i(z,t)|_{z=0} = \frac{d}{dt}\tilde{g}_i(t),\ i = 1,2;\ w_i(z,t)|_{z=L} = \frac{d}{dt}\tilde{g}_i(t),\ i = 3,4, \tag{57}$$

$$w_i(0,t) = \frac{d}{dt}\tilde{h}_i(t),\ i = \overline{3,6};\quad w_i(L,t) = \frac{d}{dt}\tilde{h}_i(t),\ i = 1,2. \tag{58}$$

Пусть выполнены условия соглосования

$$\tilde{\phi}_i(0) = \tilde{g}_i(0),\quad i = 1,2;\ \tilde{\phi}_i(L) = \tilde{g}_i(0),\quad i = 3,4, \tag{59}$$

$$F_i(0,0) - \gamma_i \frac{\partial}{\partial z}\tilde{\phi}_i(z)\Big|_{z=0} - \sum_{j=1}^{6} b_{ij}(0)\tilde{\phi}_i(0) = \frac{d}{dt}\tilde{g}_i(t)\Big|_{t=0},\ i = 1,2, \tag{60}$$

$$F_i(L,0) - \gamma_i \frac{\partial}{\partial z}\tilde{\phi}_i(z)\Big|_{z=L} - \sum_{j=1}^{6} b_{ij}(L)\tilde{\phi}_i(L) = \frac{d}{dt}\tilde{g}_i(t)\Big|_{t=0},\ i = 3,4. \tag{61}$$

Относительно задачи (55)-(57) верно следующее утверждение:

Теорема 6. *Пусть функции* $F(x_1, x_2, z, t)$, $\phi(x_1, x_2, z)$, $g(x_1, x_2, t)$ *финитны по* x_1, x_2 *при каждом фиксированном* z, t. *Кроме того* $\hat{\varepsilon}(z) \in C^1[0,L]$, $\hat{\mu}(z) \in C^1[0,L]$, $\tilde{\phi}(z) \in C^1[0,L]$, $\tilde{g}(t) \in C^1[0,T]$, $K(t) \in C^1[0,T]$, $\tilde{F}(z,t) \in C^{0,1}(\Omega_T)$ *и выполнены условия (59)-(61). Тогда в области* Ω_T *существует единственное непрерывное решение задачи (55)-(57).*

Пусть выполнены условие

$$\frac{p^2\sqrt{p}q_6}{q_1 q_2} q_5 \left(\tilde{\phi}_1^2(z) - \tilde{\phi}_3^2(z)\right)\left(\tilde{\phi}_2^2(z) - \tilde{\phi}_4^2(z)\right) \times$$

$$\times \left(q_3\tilde{\phi}_1(z) + q_4\tilde{\phi}_2(z) + q_3\tilde{\phi}_3(z) + q_4\tilde{\phi}_4(z) + \tilde{\phi}_5(z) \right) \neq 0, \qquad (62)$$

и условия согласования

$$\frac{d}{dt}\tilde{h}_i(t)\Big|_{t=0} = F_i(L,0) - \gamma_i \frac{\partial}{\partial z}\tilde{\phi}_i(z)\Big|_{z=L} - \sum_{j=1}^{6} b_{ij}\,(L)\tilde{\phi}_i(L),\ i = 1,2, \qquad (63)$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{h}_i(t)\Big|_{t=0} = F_i(0,0) - \gamma_i \frac{\partial}{\partial z}\tilde{\phi}_i(z)\Big|_{z=0} - \sum_{j=1}^{6} b_{ij}\,(0)\tilde{\phi}_i(0),\ i = \overline{3,6}. \qquad (64)$$

Относительно решения обратной задачи справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия теоремы 6 и вектор-функция* $h(x_1, x_2, t)$ *финитна по* x_1, x_2 *при каждом фиксированном* t, *кроме того* $\tilde{\phi}(z) \in C^2[0,L]$, $\tilde{g}(t) \in C^2[0,L]$, $\tilde{h}(t) \in C^2[0,L]$, $F(z,t) \in C^{1,1}(\Omega_L)$ *и выполнены соотношение (62), условия согласования (63), (64). Тогда для любого* $L > 0$ *на отрезке* $[0,L]$ *существует единственное решение обратной задачи (55)-(58) из класса* $\varphi(t)$, $\psi(t) \in C^1[0,L]$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации исследуются начально-краевые корректные задачи для систем гиперболических интегро-дифференциальных уравнений Максвелла и обратные задачи по определения ядра интегрального члена.

Основные результаты исследований:

на основе принципа сжимающих отображений, доказано существование единственного локального решения обратной задачи определения диагонального матричного ядра из гиперболической системы первого порядка с памятью;

доказана теорема об однозначной разрешимости начально-краевой задачи, поставленной для гиперболической системы интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с интегральным членом типа свёртки;

система двумерных интегро-дифференциальных уравнений Максвелла приведена к нормальной форме, поставлена и изучена обратная задача определения ядер для системы двумерных интегро-дифференциальных уравнений Максвелла в нормальной форме, также в классе непрерывных функций с экспоненциальным весом доказаны теоремы существования и единственности решения обратной задачи;

система трехмерных интегро-дифференциальных уравнений Максвелла приведена к нормальной форме, на основе принципа сжимающих отображений в классе непрерывных функций с экспоненциальным весом доказана теорема о глобальной однязначной разрешимости обратной задачи определения памяти из системы трёхмерных интегро-дифференциальных уравнений Максвелла в нормальной форме.

SCIENTIFIC COUNCIL FOR AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 AT SAMARKAND STATE UNIVERSITY

BUKHARA STATE UNIVERSITY

TURDIEV HALIM HAMROYEVICH

INVERSE PROBLEMS FOR THE SYSTEM OF INTEGRO-DIFFERENTIAL MAXWELL EQUATIONS

01.01.02 – Differential equations and mathematical physics

ABSTRACT OF DISSERTATION
of the doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences

Bukhara – 2022

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2020.4.PhD/FM533.

The dissertation was performed at the Bukhara State University and Bukhara branch of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy at the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan.

The abstract of dissertation is posted in three languages (uzbek, russian and english (resume)) on the website (www.samdu.uz) and in the website «ZiyoNet» Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific superviser:	**Durdiev Durdimurod Kalandarovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Ishankulov, Tolib** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Ruziev, Menglibay Kholtojibayevich Doctor of Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**Urgench State University**

Defense will take place «30» 09 2022 at 10:00 at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 at Samarkand State University. (Address: University Boulevard 15, Samarkand city, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866)231-06-32, fax: (+99866)235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource center at Samarkand State University (is registered №12) (Address: University Boulevard 15, Samarkand city, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866)231-06-32).

Abstract of dissertation sent out on «7» 09 2022 year

(Mailing report № 2 on «7» 09 2022 year)

A.S.Soleev
Chairman of scientific council on award of scientific degree, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor

A.M.Khalkhuzhayev
Scientific secretary of scientific council on award of scientific degree, Doctor of Physical and Mathematical Sciences

A.B.Khasanov
Chairman of Scientific seminar under scientific council on award of scientific degree, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor

INTRODUCTION (abstract of the PhD thesis)

Actuality and demand of the theme dissertation. Many scientific and applied researches conducted on a global scale show the relevance of the study of inverse problems for integro-differential equations or system of equations. Mathematical modeling of some processes in the natural sciences for the so-called systems with memory, whose behavior depends on the entire history of the process, is described by integro-differential equations. The problem of determining the kernels of the integral term of integro-differential equations of hyperbolic type is a relatively new direction in the theory of inverse problems that arose in the late 80s of the twentieth century. Since the methods for solving such problems have not been formed to the required extent, the development of research in this direction is relevant.

The research object are one-dimensional inverse problems for a system of integro-differential equations of first-order hyperbolic type.

The aim of the research work The main purpose of this dissertation work is the construct of methods for solving inverse problems for determining the kernels of integral terms in two-dimensional and three-dimensional systems of Maxwell integro-differential equations, as well as the study of the uniqueness and existence of solutions to these inverse problems.

The scientific novelty of the research is as follows:

based on the principle of contraction mappings, the existence of a unique local solution of the inverse problem of determining the diagonal matrix kernel from a first-order hyperbolic system with memory is proved;

proved of unique solvability of the initial-boundary value problem for a hyperbolic system of integro-differential equations of the first order with an integral member of the convolution type;

the system of two-dimensional integro-differential equations of Maxwell is reduced to normal form, the inverse problem of determining the kernels for the system of two-dimensional integro-differential equations of Maxwell in normal form is posed and studied. Also, in the class of continuous functions with exponential weight, existence and uniqueness theorems for the solution of the inverse problem are proved;

the system of three-dimensional integro-differential equations of Maxwell is reduced to normal form, on the use of the principle of contraction mapping in the class of continuous functions with exponential weight, a theorem on the global solvability of the inverse problem of determining the memory from the system of three-dimensional integro-differential equations of Maxwell in normal form is proved.

Practical results of the **research:** the work is of a theoretical nature, but is essentially based on the available experimental data. The results of the research can be used in seismology, in the development of oil and gas fields and in the reading of special lecture courses on the subject of mathematical physics for senior undergraduate and graduate students.

The structure and volume of the thesis. The dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion and a list of references. The volume of the dissertation is 112 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (Часть I; Part I)

1. Дурдиев Д.К., Турдиев Х.Х. Обратная задача для гиперболической системы первого порядка с памятью, Дифференциальные уравнения, 2020, том 56, № 12, с. 1666-1675. DOI: 10.1134/S0374064120120110. (SCOPUS, IF=0.837).
2. Дурдиев Д.К., Турдиев Х.Х. Задача определения ядер в системе интегро- дифференциальных уравнений Максвелла, Сиб.журн. индустр. матем., 2021, том 24, № 2, 38–61. (SCOPUS, IF=0.545).
3. Turdiev Kh.Kh. The inverse problem for systems first order integro-differential equations with memory, Scientific reports of Bukhara state university. 2020, Volume 5, Issue 81, pp. 54-66. (01.00.00, N6).
4. Durdiev D.K., Kh.Kh. Turdiev. Global solvability of the determination convolutional kernel in a hyperbolic system of integro-differential equations, Uzbek Mathematical Journal 2021, Volume 65, Issue 2, pp.43-60. DOI:10.29229/uzmj.2021-65-2.(01.00.00, N6).
5. Turdiev Kh. Kh. The problem of determining the memory in two-dimensional system of integro-differential Maxwell’s equations. Bulletin of the Institute of Mathematics 2021, Vol. 4, № 5, pp. 24-39.(01.00.00, N6).

II бўлим (Часть II; Part II)

6. Дурдиев Д.К., Турдиев Х.Х. Определение матричного ядра в гиперболической системе уравнений первого порядка с памятью, “Современные проблемы математики и прикладной математики”. Посвященной 100 летию академика С.Х. Сираждинова, 21 мая 2020 г., с. 36-40.
7. Турдиев Х.Х. Хотирали биринчи тартибли интегро-дифференциал гиперболик тенгламалар системаси учун тўгри ва тескари масала, “Глобаллашув даврида математика ва амалий математиканинг долзарб масалалари”. Республика илмий анжуман материаллари тўплами.- Тошкент. ТДТУ, 2021 йил 1-2 июнь, 36-40 б.
8. Турдиев Х.Х. Хотирали биринчи тартибли интегро-дифференциал гиперболик тенгламалар системаси учун тескари масала, “Математиканинг замонавий масалалари: муаммолар ва ечимлар” мавзусидаги республика микёсидаги илмий онлайн конференция материаллари тўплами, Термиз, 21-23 октябр 2020 йил, 164-167 б.
9. Дурдиев Д.К., Турдиев Х.Х. Обратная задача для гиперболических система первого порядка с памятью, “Математика, физика ва ахборот технологияларининг долзарб муаммолари” мавзусидаги Республика микёсидаги онлайн илмий-амалий анжумани тезислар тўплами, Бухоро, 2020 йил 15апрель, 142-145 б.

10. Дурдиев Д.К., Турдиев Х.Х. Задача определения памяти в системе интегро-дифференциальных уравнений Максвелла, “Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования” XVI Международная научная конференция, Владикавказский научный центр Российской академии наук, РСО-А, с. Цей, 20-24 сентября 2021, с. 91-93.

11. Дурдиев Д.К., Турдиев Х.Х. Задача определения ядра интегро-дифференциального волнового уравнения со слабо горизонтальной однородностью методом Фурье, “Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования” тезисы докладов XIV Международной научной конференции, Южный математический институт - филиал Владикавказского научного центра Российской академии наук. 3-8 июля 2017. с. 105-107.

12. Турдиев Х.Х. Задача определения памяти в двумерной системе интегро-дифференциальных уравнений Максвелла, “Дифференциальные уравнения и родственные проблемы анализа” Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых тезисы докладов, Бухара, 04-05 ноябр, 2021 г., с. 261-265.

Автореферат “Дурдона” нашриётида таҳрирдан ўтказилди ва ўзбек, рус ҳамда инглиз тилларида матнлар мослиги текширилди.

Босишга рухсат этилди: 24.08.2022 йил. Бичими 60х84 $^{1}/_{16}$, «Times New Roman» гарнитурада рақамли босма усулида босилди.
Шартли босма табоғи 3,0 Адади: 100 нусха. Буюртма №419.

Гувоҳнома AI №178. 08.12.2010.
“Садриддин Салим Бухорий” МЧЖ босмахонасида чоп этилди.
Бухоро шаҳри, М.Иқбол кўчаси, 11-уй. Тел.: 65 221-26-45